IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE EM CONTEXTO DE TRABALHO DE GRUPO

Ana Cristina Caixeirinho da Costa

MESTRADO EM EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR E NO ENSINO DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Setúbal, abril de 2015

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE EM CONTEXTO DE TRABALHO DE GRUPO

Ana Cristina Caixeirinho da Costa

Relatório do Projeto de Investigação

Mestrado em Educação Pré-escolar e no Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Versão Definitiva

Sob a orientação da Prof.ª Doutora Ana Maria Roque Boavida

abril, 2015

Resumo

Este documento apresenta uma investigação realizada no âmbito da unidade curricular Estágio III . Desenvolveu-se no contexto de prática pedagógica, numa turma do 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico. O seu objetivo é compreender como é que alunos do 4º ano de escolaridade resolvem problemas matemáticos em contexto de trabalho de grupo, nomeadamente as potencialidades desta modalidade de trabalho, bem como as dificuldades que emergem no decurso deste processo. Tendo por base este objetivo, organizei uma intervenção pedagógica no âmbito da qual propus aos alunos a resolução de um conjunto de problemas durante três semanas. A pertinência do estudo realizado decorre do reconhecimento, tanto a nível nacional como internacional, da importância da resolução de problemas para a aprendizagem da matemática.

Trata-se de uma investigação que visa compreender um fenómeno educativo. O enquadramento teórico incide no significado de trabalho de grupo e sua importância na aula de Matemática, nas potencialidades desta modalidade de trabalho na resolução de problemas matemáticos e no ensino da resolução de problemas. Do ponto de vista metodológico, o estudo realizado insere-se numa abordagem qualitativa de investigação e num paradigma interpretativo, tendo proximidades significativas com a investigação-ação. As técnicas de recolha de dados foram a observação participante, a entrevista não estruturada e a recolha documental. Os dados recolhidos foram submetidos a uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas, tendo como referência o objetivo e questões do estudo bem como o quadro teórico.

Ao longo do processo da resolução de problemas, os alunos tiveram um papel importante. Apesar de não ter existido um delineamento de estratégias em grupo, cada aluno foi contribuindo de forma individual para a resolução da tarefa pelo grupo. Para tal, mobilizaram vários conhecimentos matemáticos, entre os quais os algoritmos de várias operações aritméticas, a noção de dobro, o conhecimento da estrutura do sistema de numeração decimal, relações entre unidades de medida de grandezas e os conceitos de múltiplo de 3 e de número ímpar. Neste processo, depararam-se com algumas dificuldades, nomeadamente na interpretação do enunciado de problemas, no estabelecimento de relações entre valores de medidas da grandeza massa e correspondentes valores da grandeza dinheiro, na compreensão da divisão e na noção de estimativa.

Aparentemente os resultados deste estudo não permitem registar diferenças quanto ao papel do trabalho de grupo na melhoria do desempenho dos alunos quando, individualmente, resolvem problemas matemáticos. No entanto, permitem constatar que houve uma evolução ao nível da colaboração entre os alunos durante a resolução de problemas e da interação verbal focada na partilha de ideias e estratégias, o que foi útil para o processo de resolução.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Trabalho de Grupo; Aprendizagem da Matemática; Dificuldades.

Abstract

This document presents a research project developed during the academic course Estágio III, focused on the teaching practice of a 4th grade class of Primary School. The main goal of this study is to understand how 4th grade students solve mathematical problems in group work, including the potentialities of this modality of work, as well as the difficulties that emerge during this process.

Having this goal as background, a three week educational intervention was conducted within which I proposed to the students a set of problems. The relevance of the study comes from the recognition, both nationally and internationally, of the importance of problem solving for learning mathematics.

This research focuses on understanding an educational phenomenon. The theoretical framework focus on grasping the meaning of group work and its importance in mathematics classroom, as well as other aspects such as the benefits of group work in mathematical problem solving and teaching how to solve problems. From a methodology perspective, the researched follows a qualitative and interpretative approach, having some proximity with research-action. The data used on this research was obtained through direct observation, non-structured interviews and document collection. The collected data were analysed according to a qualitative content analysis oriented by thematic categories, taking into account the goal of the study as well as the theoretical framework.

Throughout the process of problem-solving, students played an important role. Despite not having been an outline of strategies for Group resolution, each student was contributing individually to the resolution of the task group. To this end, students mobilized several math skills, including the use of algorithms of arithmetic operations, the notion of double, knowledge of the structure of decimal number system, the relationships between units of measurement and the concepts of multiple of 3 and odd number. In this process, students encountered some difficulties, in particular concerning the interpretation of problems, the establishment of relationships between the measure of mass quantities and the corresponding measure of money quantities, the understanding of the arithmetical operation division and the notion of estimation.

Apparently the results of this study do not allow to observe differences regarding the role of group work in improving student performance when, individually, solve mathematical problems. However, it seems that occur an evolution at the level of collaboration between students during problem solving and verbal interaction focused on sharing ideas and strategies, which was useful for the process of resolution.

Keywords: Problem solving; Teamwork; Math Learning; Difficulties

Agradecimentos

Ao longo do curso de Mestrado, foram muitas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram e me ajudaram a concretizar os meus objetivos. Este espaço torna-se curto demais, não me permitindo agradecer a todos de forma individual.

Com efeito, a concretização deste estudo não seria possível sem a colaboração de algumas pessoas, que merecem destaque nesta secção.

Neste sentido, deixo aqui algumas palavras, que apesar de curtas, estão carregadas de reconhecido agradecimento.

Em primeiro lugar, quero agradecer à minha orientadora, a Prof.ª Doutora Ana Maria Boavida, que muito contribuiu para o sucesso deste trabalho. Estou-lhe muito grata pela disponibilidade, pelo profissionalismo e amizade ao longo de todo este tempo.

Não posso deixar de agradecer ao meu orientador de estágio, o Prof. Jorge Pinto, bem como ao meu Professor Cooperante, o Prof. Luís, pelos saberes que me transmitiram, pelas sugestões e amizade.

À minha companheira de batalha, minha colega de estágio e uma querida amiga, Susana.

Às colegas Ana e Carmen, pelo companheirismo e pela animação das nossas viagens para o estágio.

À Sónia e à Liliana, que apesar da distância estão sempre no meu coração!

À Cristina e à Nicole pelas palavras de motivação, pelos “sermões”, pela amizade e por me incentivarem a não desistir.

Ao Ricardo pela ajuda na tradução do resumo.

A todos aqueles que acreditaram em mim, quando eu própria não acreditei.

Em especial aos meus pais, sem eles estas palavras nunca seriam escritas. Estou-lhes eternamente grata pelo carinho e pelos esforços que fizeram para que eu pudesse chegar até aqui. Para eles, um obrigada é pouco.

Bem-haja!

Cada um que passa em nossa vida,
Passa sozinho, pois cada pessoa é única
E nenhuma substitui outra.
Cada um que passa em nossa vida,
Passa sozinho, mas não vai só
Nem nos deixa sós.
Leva um pouco de nós mesmos,
Deixa um pouco de si mesmo.
Há os que levam muito,
Mas há os que não levam nada.
Essa é a maior responsabilidade da nossa vida,
e a prova de que duas almas
não se encontram ao acaso.

Antoine de Saint-Exupéry

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O presente documento consiste na apresentação do desenvolvimento de um projeto de caráter investigativo realizado no âmbito da unidade curricular Estágio III, do curso de mestrado em Educação Pré-escolar e no Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Este projeto foca-se na compreensão do modo como os alunos do 4º ano de escolaridade resolvem problemas matemáticos em contexto de trabalho de grupo, nomeadamente as potencialidades desta modalidade de trabalho e as dificuldades que emergem no decurso deste processo, e foi concretizado numa turma do 4.º ano de escolaridade de uma Escola Básica, situada nas proximidades da cidade de Setúbal.

Do meu ponto de vista, o trabalho de grupo é importante não só enquanto contexto favorável à partilha de conhecimento, como também enquanto meio de aprendizagem, do respeito pelo ponto de vista do outro e, por esta via, de preparação para a vida adulta. Além disso, o desenvolvimento da capacidade da resolução de problemas é essencial não só na área da Matemática (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008), mas também ao longo da vida.

Pertinência do estudo

O tema do projeto revelou-se pertinente no contexto de estágio, originando o interesse em aprofundar conhecimentos nesta área. A temática da escrita colaborativa aliada ao trabalho de grupo ao nível da área da Língua Portuguesa, já havia conquistado a minha atenção. Contudo, na primeira semana de estágio, constatei que os alunos resolviam problemas matemáticos individualmente, apesar de estarem próximos entre si. Neste contexto, comecei a questionar-me: se os alunos produzem textos de forma colaborativa, porque não resolvem problemas em conjunto? Para além disso, pude observar e constatar, junto do professor cooperante, a dificuldade de alguns alunos na área da Matemática, nomeadamente na resolução de problemas.

Ao longo das últimas décadas, a importância do trabalho de grupo na aula de Matemática tem sido destacada por vários autores. Entre estes está Nunes (1996) que, referindo Baroody, sublinha que esta modalidade de trabalho tem potencialidades educativas, nomeadamente para o aprofundamento do conhecimento matemático, para o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas, de raciocínio matemático e de comunicação matemática e, ainda, para um aumento da autoconfiança e de capacidades sociais.

Nunes (1996), apoiando-se nas ideias de Baroody, destaca que a aula de Matemática pode ser equacionada como uma comunidade matemática em que o conhecimento é construído a partir da comunicação entre os alunos, o que favorece não só a aprendizagem de conteúdos matemáticos, como também a compreensão e a aquisição de estratégias de resolução de tarefas matemáticas. Este autor enfatiza, também, a importância da comunicação com os colegas para o desenvolvimento, pelos alunos, do raciocínio matemático. Na sua perspetiva, o trabalho de grupo pode apoiar a observação e seleção das estratégias de resolução e conduzir os alunos a um confronto com desafios e pontos de vista divergentes dos seus. Esta situação pode favorecer a reformulação de posições, estratégias e soluções, bem como a interiorização de novas estratégias que foram utilizadas.

Em pequenos grupos os alunos revelam-se mais confiantes, autónomos e persistentes (Nunes,1996). Ao trabalharem em grupo, têm mais oportunidades de contribuir diretamente para a resolução das tarefas, podem constatar que os colegas também erram, têm a possibilidade de esclarecer uma dúvida ou pedir ajuda para ultrapassar uma dificuldade, podem aprender a clarificar uma ideia que tentam transmitir e a realizar críticas construtivas e, simultaneamente, a saber ouvir os outros, o que beneficia as capacidades sociais e comunicativas (Nunes, 1996, referindo Baroody).

Abrantes (1994) chama a atenção para uma das questões principais do trabalho de grupo: a relação entre as interações verbais que emergem entre os alunos e a aprendizagem. Segundo este autor, fornecer informações sem as explicar não contribui para a reestruturação cognitiva e, por isso, não produz aprendizagem. Contudo, ao explicar algo a um colega, o aluno reformula a sua forma de pensamento, reorganizando e interligando novas ideias com os seus conhecimentos, ou seja, pode estabelecer-se um diálogo entre os alunos que beneficia a aprendizagem (Nunes,1996).

Em suma, perspetivar o trabalho de grupo como uma forma de incentivar os alunos a partilharem as suas ideias, questões e estratégias com os colegas, é uma via de favorecer a compreensão matemática (Nunes,1996). Em particular, "a cooperação é potenciada quando os alunos têm que descrever ou justificar as suas formas de resolução, o que pode facilmente acontecer num contexto de resolução de problemas*”* (Nunes, 1996, p. 35, referindo Laborde). Neste âmbito, “a maior potencialidade do trabalho de grupo é o desenvolvimento de capacidades e disposições para a resolução de problemas” (Nunes, 1996, p. 35, referindo Good, Mulryan e MaCaslin).

A significativa associação entre trabalho de grupo e resolução de problemas está relacionada com diversos fatores que não são, apenas, de natureza cognitiva. Nunes (1996), apoiando-se em diversos autores, refere, nomeadamente

- fatores afetivos: devido ao “aumento da interação verbal entre os alunos por se sentirem mais confortáveis quando resolvem problemas num pequeno grupo” (p. 35);
- fatores motivacionais: a resolução de problema em grupo proporciona uma actividade intrinsecamente motivadora e desafiadora” (idem);
- fatores sociais: “ os alunos habituam-se a trabalhar juntos, aceitando-se uns aos outros” (idem);
- fatores associados à natureza da Matemática: sendo a Matemática uma“ actividade humana exercida no contexto do mundo real e os alunos precisam de o compreender*”;* “as leis e procedimentos matemáticos não devem ser ensinados isoladamente mas em contextos de situações de resolução de problemas que requeiram o seu uso” (idem).

As orientações curriculares, quer nacionais, quer internacionais, destacam, desde há muito, a importância da resolução de problemas para a aprendizagem da Matemática. Não é, assim, de estranhar que esta temática tenha uma forte tradição na investigação em educação matemática, como destacam Boavida e Menezes (2012). Referindo-se a Portugal, estes autores sublinham que, desde o final da década de oitenta do século XX e, principalmente, a partir da década de noventa, se desenvolveu um vasto conjunto de estudos focados tanto nas conceções e práticas dos professores sobre resolução de problemas, como na forma como os alunos aprendem a resolver problemas.

Se se analisarem os Programas de Matemática do Ensino Básico publicados, em Portugal, na última década, constata-se que é dedicada uma importância significativa à resolução de problemas. Com efeito, no programa de 2007 (ME, 2007), a resolução de problemas é considerada como uma das “três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática (...) que devem merecer uma atenção permanente no ensino” (p. 2), como um objetivo geral de ensino e como uma das “importantes orientações metodológicas para estruturar as actividades a realizar em aula" (p. 10). É, assim,

> vista neste programa como uma capacidade matemática fundamental, considerando-se que os alunos devem adquirir desembaraço a lidar com problemas matemáticos e também com problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia e de outros domínios do saber. Trata-se de ser capaz de resolver e de formular problemas, e de analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema. A resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. (p. 8)

No Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em 2013, refere-se que "o gosto pela Matemática e pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos (…) constitui um propósito que pode e deve ser alcançado através do progresso da compreensão matemática e da *resolução de problemas*" (ME, 2013, p. 2, destaque acrescentado). Neste programa, embora as referências à resolução de problemas tenham subjacente uma perspetiva bem diferente da do programa de 2007, sublinha-se ainda, que os objetivos estabelecidos para os três ciclos do ensino básico permitem evidenciar a importância de que se reveste

> a aquisição de conhecimentos, de factos e de procedimentos, (…) a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, (…) uma comunicação (oral e escrita) adequada à Matemática, (…) a *resolução de problemas* em diversos contextos e (…) uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente. (ME, 2013, p.4, destaque acrescentado)

A valorização da resolução de problemas para a aprendizagem da Matemática encontra-se, também, em muitas das orientações curriculares internacionais. Entre estas estão as do National Council of Teachers of Mathematics. Por exemplo, na publicação *Princípios e Normas para o Ensino da Matemática Escolar* (NCTM, 2007), defende-se que "a resolução de problemas não só constitui um objectivo da aprendizagem da Matemática, mas é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem Matemática" (p. 57).

Apesar do reconhecimento da importância da resolução de problemas, continua a prevalecer, em muitas salas de aula, um ensino da Matemática que privilegia, antes de mais, a transmissão de informações pelo professor reservando-se ao aluno meramente o papel de memorizar ideias, técnicas e procedimentos matemáticos mesmo que não os compreenda (Boavida e Menezes, 2012). Em simultâneo, é comum a existência de perspetivas muito redutoras sobre o papel e o lugar da resolução de problemas, sendo os problemas, frequentemente, considerados apenas como um meio de motivar os alunos ou de lhes possibilitar a aplicação de conhecimentos aprendidos anteriormente (idem). No âmbito da Didática da Matemática, o que atualmente se preconiza distancia-se destas perspetivas aproximando-se do que alguns autores (Lampert; Fi & Degner, referidos por Boavida & Menezes, 2012), designam por ensinar Matemática com problemas, ou seja,

> uma abordagem de ensino que tem por pano de fundo a ideia de que a exploração e discussão de tarefas cognitivamente desafiadoras que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, é essencial para que os alunos aprendam Matemática com compreensão. (p. 288)

Nunes (1996) chama a atenção para a diferença entre a Matemática tal como é usada na sociedade e a Matemática enquanto área curricular. Segundo este autor, a primeira está, com muita frequência, relacionada com problemas com que a sociedade se defronta no quotidiano, levando a que a compreensão matemática seja resultado de uma construção social. Nunes sustenta que a aproximação da Matemática ensinada na escola à Matemática do dia-a-dia é defendida por vários matemáticos que sugerem o recurso ao trabalho de grupo na resolução de problemas.

Objetivo e questões de investigação

O projeto desenvolvido tem como principal objetivo compreender como é que alunos do 4º ano de escolaridade resolvem problemas matemáticos em contexto de trabalho de grupo, nomeadamente as potencialidades desta modalidade de trabalho, bem como as dificuldades que emergem no decurso deste processo. Neste âmbito, formularam-se as seguintes questões:

- Que papel assumem os alunos durante o trabalho de grupo?

- Que conhecimento matemático mobilizam na resolução de problemas? Como emerge e é usado este conhecimento?
- Que dificuldades surgem durante a resolução de problemas? Quais se destacam pela sua persistência? Como se lida com estas dificuldades?

Estrutura do documento

O Relatório do Projeto de Investigação é constituído por cinco capítulos de que a Introdução é o primeiro.

No segundo capítulo é apresentado o enquadramento teórico em que me debruço sobre os significados de trabalho de grupo e de resolução de problemas e também sobre a importância do trabalho de grupo na resolução de problemas.

A metodologia de investigação é apresentada no terceiro capítulo. Refiro as principais opções metodológicas, descrevo a intervenção pedagógica realizada e indico os procedimentos de recolha e análise de dados.

O quarto capítulo foca-se na análise dos dados recolhidos e sua interpretação que procurarei apoiar recorrendo a evidências empíricas selecionadas.

Terminarei com a Conclusão, em que apresentarei os principais resultados do estudo e uma reflexão global sobre o seu desenvolvimento, a que se seguem as referências bibliográficas e anexos.

CAPÍTULO 2

TRABALHO DE GRUPO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Este capítulo, está organizado em quatro secções. Em primeiro lugar, foco-me no significado de trabalho de grupo. De seguida, procuro clarificar a importância do trabalho de grupo para a aprendizagem da Matemática. Posteriormente, centro-me na organização deste tipo de trabalho e no tipo e natureza das interações durante o trabalho de grupo. Por último, foco-me na relação entre o trabalho de grupo e resolução de problemas abordando, nomeadamente o significado de problema, tipologias de classificação de problemas de um ponto de vista educativo, modelos de resolução de problemas e o papel do professor no ensino da resolução de problemas.

Trabalho de grupo: que significado?

Nem sempre é muito claro o significado de trabalho de grupo. Segundo Nunes (1996), por vezes, é utilizado, em alternativa, a expressão aprendizagem cooperativa, que permite destacar as características da colaboração entre os alunos.

O recurso à expressão "aprendizagem cooperativa" é, segundo Abrantes (1994, referindo Davidson), uma forma de salientar "a dimensão cooperativa de um processo que envolve mais do que distribuir os alunos por grupos e dar-lhes uma tarefa" (p. 131).

Abrantes (1994) sublinha que há autores para quem a aprendizagem cooperativa constitui "uma alternativa a formas tradicionais de ensino como o ensino expositivo ou individualizado (Davidson, 1990a), ou a estratégias de aprendizagem competitivas e individualistas (Johnson e Johnson, 1990)"(p. 130). Para o mesmo autor, referindo Dewey, a aprendizagem cooperativa é realizada "como um empreendimento social para o qual todos os indivíduos têm oportunidade de contribuir e perante o qual todos sentem responsabilidade" (p. 143). Nunes (1996), mencionando Davidson e Kroll, refere que é "a aprendizagem que tem lugar num ambiente onde os alunos, em pequenos grupos, partilham ideias e trabalham de forma colaborativa para levarem a cabo tarefas académicas" (p. 9).

A aprendizagem cooperativa pode ser perspetivada "em oposição tanto à aprendizagem competitiva como à aprendizagem individualista"(Abrantes, 1994, p. 135, mencionando Johnson e Johnson). Se na aprendizagem competitiva os alunos trabalham uns contra os outros com o objetivo de verificar quem é o melhor, na individualista cada aluno trabalha "para atingir os seus próprios objetivos, sem relação com os dos colegas" (idem). Abrantes (1994), apoiando-se em Bishop e Goffree, sublinha " como uma vantagem do trabalho de grupo o facto de os alunos poderem ser estimulados por outros na mesma tarefa " (p. 136).

Relativamente ao trabalho de grupo, Pato (1995) atribui-lhe o sentido de "organização dos agentes do processo de ensino/aprendizagem, em que os objectivos e as estratégias são distintos dos definidos nos modelos tradicionais: pressupõe uma activação do potencial dos saberes, da experiência e da intervenção de cada um dos alunos" (p. 9).

No presente trabalho, as expressões "aprendizagem cooperativa", no sentido de Nunes (1996), e "trabalho de grupo" são consideradas sinónimas, tendo optado pela expressão trabalho de grupo. Neste âmbito, o trabalho de grupo é entendido enquanto trabalho realizado, pelos alunos, em pequenos grupos de forma colaborativa.

A importância do trabalho de grupo para a aprendizagem da Matemática

O entendimento da importância do trabalho de grupo remete para a compreensão das relações entre a interação social, o desenvolvimento cognitivo e o processo de aprendizagem individual (Nunes, 1996). Piaget e Vygotsky foram dois psicólogos que, segundo Nunes (1996), investigaram estas relações. De acordo este autor, ambos reconheceram a existência da aprendizagem individual e da aprendizagem social. No entanto, na sua perspetiva, Piaget não deu a devida importância à interação social no desenvolvimento cognitivo individual. No entanto, em conformidade com o autor, reconhece que o conhecimento parte do indivíduo, de forma intrapessoal, podendo, mais tarde, ser confrontado de forma interpessoal e adaptado a situações novas. Pelo contrário, Vygotsky, segundo Nunes (1996), defende a existência do interpessoal que passa posteriormente a intrapessoal mencionando haver uma zona de desenvolvimento proximal, que remete para a

> distância entre o nível actual do desenvolvimento, determinado pela resolução de problemas efectuada de forma independente, e o nível de desenvolvimento potencial determinado através da resolução de problemas sob a direcção de um adulto ou em colaboração com parceiros mais capazes. (Nunes, 1996, p. 15)

O conceito de desenvolvimento proximal é também referido por Abrantes (1994), que afirma que "sozinha, a criança pode funcionar até um certo nível, mas em colaboração com outros, pode funcionar a um nível mais elevado" (p. 144).

O trabalho de grupo pode ser o contexto onde o aluno pode concretizar a elaboração e a aquisição de novos conhecimentos através das explicações apresentadas pelos alunos do grupo, de forma a enriquecer a aprendizagem de cada um (Nunes, 1994, mencionando Freitas).

Se o ambiente da sala de aula influencia a forma como se aprende Matemática, o trabalho de grupo tende a minimizar as condições que favorecem a negatividade associada à relação com a Matemática (Nunes, 1996). Assim sendo, parece que existem motivos para acreditar que, de uma forma geral, os alunos preferem o trabalho de grupo ao trabalho individual, "pois poderão sentir-se mais à vontade para falar num pequeno grupo" (Nunes, 1994, p.25, referindo Bishop & Goffree e Burn). Os alunos, ao trabalharem em grupo, dispõem de mais tempo para colaborar numa discussão em pequeno grupo do que numa discussão coletiva, avaliam de forma diferente os seus erros ao apurar que os colegas também os fazem, e assim, o ambiente de aprendizagem torna-se mais agradável e gera menos tensão (Nunes, 1994, citando Schoenfeld).

Neste sentido, o uso constante de processos de trabalho em pequenos grupos pode ter consequências positivas no ambiente de sala de aula (Abrantes, 1994, citando Davidson). A turma transforma-se numa comunidade em que os indivíduos trabalham de forma ativa e em conjunto para desenvolver os conhecimentos matemáticos e as capacidades de cada um (idem).

Durante o trabalho de grupo na aula de Matemática, os alunos expressam as suas ideias, conjeturas, resultados e dúvidas, permitindo desenvolver a comunicação matemática (Nunes, 1996). Esta capacidade pode ser um agente desbloqueador, facilitando, em simultâneo, uma cooperação efetiva aluno-aluno ou professor-aluno (idem). Abrantes (1994, referindo Schoenfeld), também realça a importância da comunicação de ideias e da cooperação. O autor acredita que, nesta perspetiva, "o trabalho de grupo seria, não um método importado para melhorar a aprendizagem da Matemática, mas sim um elemento particularmente relevante nesta disciplina" (p. 136).

Abrantes (1994, mencionando Webb) "sugere que poderá ser benéfico para um aluno observar as interações no grupo mesmo não participando ativamente: pode ser mais fácil compreender explicações dirigidas a outros do que explicações dirigidas a si próprio" (p. 147).

Há estudos que têm permitido comparar os resultados obtidos através de métodos cooperativos com outros métodos de ensino (Abrantes, 1994). "Muitos estudos não revelam diferenças significativas mas, quando elas existem, elas favorecem quase sempre o trabalho de grupo". (Abrantes, 1994, p. 138, referindo Davidson e Kroll). Do ponto de vista cognitivo, os investigadores, segundo Abrantes (1994), indicam como principais benefícios o aumento de conhecimentos, maior compreensão concetual e acrescidas capacidades de comunicação. Do ponto de vista não cognitivo, o autor refere que os alunos desenvolvem o sentido de cooperação, o gosto pela escola, a motivação e a autoestima.

Em suma, o trabalho de grupo e as suas potencialidades têm sido objeto de estudo para vários autores. Muitos investigadores têm-se focado nesta temática, com o objetivo de facilitar a aprendizagem dos alunos na área da Matemática. Neste sentido, esta modalidade pode ser uma estratégia para combater a conotação negativa que os alunos atribuem à disciplina e, por conseguinte, fomentar o gosto pela mesma.

Trabalho de grupo na aula: organização e interações

Os benefícios do trabalho de grupo dependem da forma como o professor agrupa os alunos, do tipo de tarefas que propõe e da sua própria atuação (Abrantes, 1994). O simples facto de distribuir os alunos por grupos de trabalho não significa que exista mais diálogo entre eles, que desenvolvam o pensamento crítico ou exista colaboração em projetos comuns (idem). Esta situação acontece com regularidade em grupos de trabalho homogéneos (idem, referindo Good et al.).

Abrantes (1994, referindo Freudenthal) assume a importância dos grupos heterogéneos, "nos quais alunos de diferentes níveis colaboram numa dada tarefa, cada um ao seu próprio nível" (p. 144). Este autor acrescenta, ainda, que "também se aprende através da observação dos métodos de resolução dos outros" (p. 145) e que o trabalho num grupo heterogéneo permite desenvolver todo o tipo de relações educativas e proporciona aos alunos a possibilidade de conduzir e ser conduzido de forma didática.

Há, no entanto, estudos que sugerem que o trabalho de grupo pode ter mais vantagens para os melhores alunos do que aos restantes, pelo menos no que diz respeito "à aprendizagem de conteúdos específicos e ao desenvolvimento de capacidades cognitivas" (Abrantes, 1994, p.148). Os alunos mais fracos, quando questionados, demonstram frequentemente gosto pelo trabalho de grupo, o que não implica que tenham mais facilidade na compreensão das tarefas ou a ser mais ativos no grupo (Abrantes, 1994, referindo Good, Mulryan e McCaslin).

Apoiando-se em vários autores, Abrantes (1994) destaca que a criação na sala de aula de um ambiente que proporcione aos alunos um à vontade para discutir e comunicar de forma livre as suas ideias, dúvidas e dificuldades constitui um requisito para que o trabalho de grupo funcione de forma positiva e, particularmente, para que as relações interpessoais dos alunos favoreçam a aprendizagem de todos.

A grande maioria dos estudos acerca do trabalho de grupo tem incidido no desenvolvimento das capacidades cognitivas, ou seja, nos produtos da aprendizagem e predominantemente em aptidões de cálculo, conceitos simples ou problemas simples de aplicação (Abrantes, 1994, citando Good et al.). Assim, apenas uma pequena percentagem das investigações tem dado especial atenção à forma como os alunos interagem entre si durante o trabalho de grupo e aos efeitos académicos, sociais ou psicológicos que resultam dessas interações (Abrantes, 1994, referindo Davidson, Kroll e Webb).

Os fatores que podem explicar o êxito ou fracasso do trabalho de grupo só podem ser examinados em investigações com base na observação direta do trabalho dos alunos (Abrantes, 1994, referindo Bossert). Além disso,

> a análise sistemática dos processos de grupo é essencial para se determinar que tipos de interacções são mais importantes para a aprendizagem e, por consequência, quais os tipos de interacções entre os alunos que devem ser encorajados ou desencorajados de modo a maximizar a aprendizagem. (Abrantes, 1994, p. 141, citando Webb)

César (1999) sustenta que as interações de tipo horizontal, que contrapõe às interações de tipo vertical, podem ser variadas, podendo expressar-se desde "uma mera execução de tarefas" com colegas com os quais "não há comunicação verbal mas que pode ser observado (…) até às situações em que só é apresentada uma solução para o problema proposto quando os diversos parceiros chegam a um acordo” (p. 9).

As interações sociais podem ser caracterizadas de três formas: egocêntrica (atitude individualista), assimétrica/dependente (quando há um aluno que se destaca, os colegas tendem a ser submissos) e simétrica/igualitária (os contributos de cada elemento são reconhecidos, baseando-se na procura de um acordo) (Mamede, 2004).

Frequentemente, os alunos tendem a adotar uma perspetiva individualista mesmo estando sentados com os colegas com os quais seria suposto trabalharem (Abrantes, 1994). Esta situação ocorre, segundo Abrantes (1994), principalmente com alunos que têm pouca experiência em trabalhar em grupo. Acrescenta que, por vezes, chamam o professor e pedem ajuda, antes de tentar esclarecer as dúvidas junto do grupo. Noutros casos, refere que se limitam a fazer uma divisão prévia de tarefas e iniciam o trabalho individualmente, ou então dois elementos do grupo estabelecem alguma interação entre si. Com efeito, e de acordo com este autor, o aluno vê a turma como um grupo de amigos e só posteriormente a encara como um espaço/grupo de trabalho.

É fundamental que o aluno tenha um papel ativo no processo de elaboração de novos conhecimentos e que interligue estes conhecimentos com o seu conhecimento anterior (Nunes, 1996 referindo Shunk). Os alunos aprendem através das suas experiências, realizando atividades que não façam parte da rotina e sejam desafiadoras, concretizando-as num contexto social (Abrantes, 1994, referindo Davidson). Neste âmbito, a relevância atribuída ao ambiente e à interação social para a aprendizagem está aliada “à reflexão, à discussão, à resolução de problemas e, de um modo geral, ao desenvolvimento de capacidades cognitivas de *ordem superior*” (Abrantes, 1994, p. 143, destaque no original). Segundo Vygotsky, “estas capacidades têm origem e desenvolvem-se na interação dos indivíduos com outros” (idem).

Para Abrantes (1994), os alunos

> podem compreender melhor do que o professor as dúvidas desse aluno [de um colega] visto que estão, como ele, a resolver o problema pela primeira vez; podem usar uma linguagem idêntica à do aluno; e podem dar uma ajuda imediata logo que uma dificuldade surge. (p.146)

Em resumo, a interação social tem um papel fundamental no processo de trabalho de grupo, na medida em que as capacidades de ordem superior surgem e desenvolvem-se a partir de uma interação social rica. Simultaneamente, apesar dos benefícios apresentados pelo trabalho de grupo para a aprendizagem dos alunos na área da Matemática, estes dependem do professor, ou seja, da forma como ele organiza os grupos, do tipo de tarefas que seleciona e do modo como interage com os alunos enquanto estes trabalham em grupo.

O trabalho de grupo e a resolução de problemas

A perspetiva de Vygotsky pode explicar a importância do trabalho em pequenos grupos num ambiente de resolução de problemas (Abrantes, 1994, citando Schoenfeld). "Se as discussões no grupo funcionam bem, então o aluno trabalha na sua "zona de desenvolvimento proximal" (Abrantes, 1994, p. 144). Assim sendo, durante a resolução de um problema em grupo, os alunos desenvolvem capacidades de autorregulação, que noutro tipo de contexto não se desenvolveriam de forma natural (idem, referindo Schoenfeld) .

Por este motivo, Davidson, sugere um "método de descoberta em pequenos grupos" (citado por Abrantes (1994, p. 142). Este autor, tendo por base a perspetiva de Pólya, "defende que os alunos, sob a orientação limitada e subtil do professor, formulem definições, façam conjecturas, estabeleçam e provem teoremas, construam exemplos e contra-exemplos, resolvam problemas específicos e desenvolvam técnicas para abordar problemas de vários tipos" (Abrantes, 1994, p.142).

Neste âmbito, importa clarificar o significado de problema e analisar tipologias de classificação de problemas de um ponto de vista educativo.

Problema: significado e tipologias

A definição de problema não é uma tarefa fácil devido à sua complexidade (Vale & Pimentel, 2004). O conceito de problema é polissémico, diferindo de autor para autor. Boavida (1993) realiza um pequeno levantamento de definições do conceito baseando-se em vários autores. Em particular, refere que, para Goldman, problemas são obrigatoriamente questões, enquanto que para Lester, são situações; já para Vergnaud, problema é "tudo o que implica da parte do sujeito a construção de uma resposta ou de uma ação"(Boavida, 1993, p. 102).

Em conformidade com Boavida et al. (2008), "tem-se um problema quando se está perante uma situação que não pode resolver-se utilizando processos conhecidos e estandardizados; quando é necessário encontrar um caminho para chegar à solução ” (p. 15). Neste âmbito, a forma de encarar um problema depende dos conhecimentos que cada indivíduo possui (Vale & Pimentel, 2004).

O conceito de problema é muitas vezes confundido com o conceito de exercício. De acordo com Vale e Pimentel (2004), ao contrário de um problema, um exercício é resolvido normalmente através de processos mecanizados e repetitivos.

Existem vários tipos de problemas que se diferenciam entre si, nomeadamente quanto à sua natureza e estratégias de resolução. Os tipos de problemas têm vindo a ser estudados por vários investigadores e conhecer tipologias de classificação de problemas de um ponto de vista educativo pode ser um auxílio para o professor selecionar e diversificar as tarefas que propõe aos alunos (Vale & Pimentel, 2004).

De acordo com Boavida et al. (2008), citando Vale e Pimentel, existem várias tipologias de classificação de problemas que diferem consoante os autores. Na tabela 1 são apresentadas algumas destas tipologias.

Boavida et al.	**GIRP**	**Charles e Lester**
Problemas de cálculo: (Problemas de um passo e problemas com mais passos)	___________	Problema de um passo Problema de dois ou mais passos
___________	Problemas de aplicação	Problemas de aplicação
Problemas de processo	Problemas de processo	Problemas de processo
___________	___________	Problemas tipo puzzle
___________	Problemas de conteúdo	___________
___________	Problemas de aparato experimental	___________
Problemas abertos	___________	___________

Tabela 1 Classificação de problemas de um ponto de vista educativo: algumas tipologias

Descreve-se, em seguida, de forma sucinta os diferentes tipos de problemas, tendo em conta as tipologias de Charles e Lester (citados por Vale e Pimentel, 2004), de GIRP[1] (citado por Vale e Pimentel, 2004) e de Boavida et al. (2008).

Problemas de cálculo

Problemas que podem ser resolvidos recorrendo à aplicação de uma ou mais operações básicas da aritmética. No âmbito deste tipo de tarefas podem distinguir-se problemas de um passo ou mais passos (Boavida et al., 2008). Segundo Charles e Lester (referidos por Vale e Pimentel, 2004), problemas de um passo são os que se podem resolver "através da aplicação direta de uma das quatro operações básicas da aritmética" (p. 18) enquanto que problemas de dois ou mais passos requerem a "aplicação direta de duas ou mais (...) [destas] operações, respetivamente" (idem).

Exemplo de problema de cálculo de um passo: "O quintal da Sandra é quadrado com 5 metros quadrados de lado. Quantos metros de rede são necessários para vedar o quintal?" (Boavida et al., 2008, p.17).

Exemplo de problema de cálculo dois ou mais passos: "O Luís tinha 600 berlindes. Na escola, resolveu dar metade à sua colega de carteira. Mais tarde deu $\frac{1}{4}$do resto ao irmão. Com quantos berlindes ficou o Luís?" (Vale & Pimentel, 2004, p. 18).

Problemas de aplicação

Problemas que requerem a recolha de dados acerca da vida real e a tomada de decisões. Utilizam com frequência uma ou mais operações e uma ou mais estratégias de resolução.

Exemplo: " No fim de ano uma turma pretende realizar um jantar de confraternização. Apresente duas propostas de ementa, sabendo que são 15 alunos e a verba disponível são 125 euros" (Vale & Pimentel, 2004, p. 18).

Problemas de processo

[1] Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, constituído por: Domingos Fernandes; António Borralho; Ana Leitão; Helena Fernandes; Isabel Cabrita; Isabel Vale; Lina Fonseca; e Pedro Palhares.

Problemas que “diferem dos de cálculo porque não podem ser resolvidos apenas por selecção da(s) operação(ões) apropriada(s) (Boavida et al., 2008, p. 19). Para os resolver há que recorrer, em geral, a estratégias gerais de resolução de problemas (frequentemente designadas por heurísticas), como descobrir um padrão, fazer um esquema ou desenho, reduzir a um problema mais simples ou formular e testar uma conjetura (Vale e Pimentel, 2004).

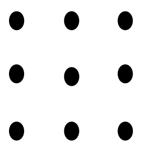
Exemplo:

> Quando a Ana resolveu aprender canto, já sabia quatro canções. Ao fim da primeira semana de aulas de canto, já sabia cinco canções. No final da segunda, sabia sete e no final da terceira semana sabia dez. Se continuar a aprender a este ritmo, quantas canções saberá a Ana ao fim de quinze semanas?. (Vale & Pimentel, 2004, p. 18)

Problemas tipo puzzle

Problemas cuja solução é encontrada ao olhar o problema sob diferentes pontos de vista. (Vale e Pimentel, 2004, citando Charles e Lester).

Exemplo: “Desenhe quatro linhas, sem levantar o lápis do papel, de modo que passem pelos nove pontos” (Vale & Pimentel, 2004, p. 19).



Problemas de conteúdo

Problemas que requerem a utilização de conteúdos programáticos, conceitos, definições e técnicas matemáticas (Vale e Pimentel, 2004, citando GIRP).

Exemplo: “Determine as amplitudes dos ângulos de um triângulo sabendo que o triângulo é isósceles e que um dos ângulos tem 75º de amplitude” (Vale & Pimentel, 2004, p. 19).

Problemas de aparato experimental

Problemas que requerem a utilização de métodos de investigação das ciências experimentais, através do qual o aluno deverá exercer funções de pesquisa. Permitem desenvolver determinadas capacidades, tais como a planificação, a organização e interpretação de dados, medições e contagens (Vale e Pimentel, 2004, referindo GIRP).

Exemplo: “Construa um pêndulo com um pedaço de fio de 60 cm e um objeto de 30 g.

1) Quanto tempo demora o pêndulo a oscilar 10 vezes?
2) Qual a amplitude, aproximada, da oscilação?
3) Substitua o objeto por outro com 15 g e responda às questões anteriores.” (Vale & Pimentel, 2004, p. 20)

Problemas abertos

Problemas que podem ter mais do que uma forma de resolução e mais do que uma solução correta, permitindo várias abordagens. Para chegarem à resposta, os alunos têm de recorrer à exploração e descoberta de regularidades e formular e testar conjeturas (Boavida et al, 2008). Os problemas abertos também são, por vezes, designados por investigações (Boavida et al., 2008, referindo Ponte).

Exemplo: “A Catarina vai pôr a secar guardanapos. Porque é uma rapariga muito organizada, pendura, todos os guardanapos, usando o mesmo processo. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 30 guardanapos.” (Boavida et al., 2008, p.21)

Sintetizando, ser ou não problema depende do indivíduo, a quem a tarefa é proposta. Há vários tipos de problemas. Alguns autores, têm agrupado os problemas de acordo com a sua natureza e o tipo.

Ensinar a resolver problemas em grupo

A resolução de problemas pode ser perspetivada de modos muitos diversos. Segundo Boavida et al. (2008), para alguns autores é um processo através do qual o indivíduo aplica conhecimentos adquiridos anteriormente a novas situações e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjeturas. Referem, no entanto, que a resolução de problemas pode “ser perspectivada num sentido mais abrangente, designando uma abordagem de ensino da Matemática: *ensino da Matemática através da resolução de problemas*. Aqui os problemas estão em primeiro plano, enquanto via facilitadora da aprendizagem” (Boavida et al., 2008, p. 14).

O processo de aprendizagem da resolução de problemas é uma atividade complexa, pois é muito mais do que recordar situações ou aplicar conhecimentos adquiridos; pressupõe a coordenação desses conhecimentos, experiências anteriores, intuição, atitudes e conceções (Vale e Pimentel, 2004). Sobressai, assim, a importância da memória, dos conhecimentos, de factos específicos e o recurso a uma grande variedade de procedimentos e capacidades tanto no domínio cognitivo e metacognitivo como no domínio afetivo (idem). Com efeito, algumas das conceções que os alunos possuem podem originar dificuldades na resolução de problemas (Vale e Pimentel, 2004, referindo Schoenfeld). Por exemplo, uma conceção muito comum entre os alunos é a de que um problema tem sempre solução e esta é única ou que a resolução de um problema deve ser rápida. Para as autoras, estas conceções podem ter efeitos negativos no desempenho dos alunos, podendo levá-los à desmotivação.

Outra das principais dificuldades no processo de resolução de problemas está relacionada com a compreensão dos mesmos. Partindo do princípio que para compreender é preciso relacionar, esta deve ser uma etapa muito importante no processo de resolução (Vale & Pimentel, 2004).

Porque resolver problemas é uma tarefa muito complexa, há vários autores que dedicaram a sua atenção à identificação de modelos que podem ser úteis na aprendizagem de resolução de problemas. Entre estes destaca-se, pela sua relevância, o modelo de Pólya.

Modelo de Pólya. De acordo com Vale e Pimentel (2004), existem vários modelos para resolver problemas e várias formas de ensinar a resolver problemas. A maior parte baseiam-se num modelo apresentado por Pólya na sua obra *How to Solve It.* Precisamente por ser um dos modelos com maior influência e continuar, ainda hoje, a ser uma referência na área da educação matemática, o modelo de Pólya tem sido o ponto de partida para o desenvolvimento de outros modelos (Vale & Pimentel, 2004). Entre estes está o adoptado pelo grupo de investigadores Fernandes, Vale, Fonseca e Pimentel, que adaptaram o modelo de Pólya, originando um modelo de resolução de problemas destinado a alunos do ensino básico (tabela 2).

<table>
<tr><th>Modelo de Pólya</th><th>Fernandes, Vale, Fonseca e Pimentel</th></tr>
<tr><td>Compreender o problema</td><td>Compreender o problema</td></tr>
<tr><td>Delinear um plano</td><td rowspan="2">Fazer e executar um plano</td></tr>
<tr><td>Executar um plano</td></tr>
</table>

Verificar	Verificar a resposta

A tabela 2 apresenta os dois modelos de resolução de problemas, mencionados anteriormente, e as respetivas etapas. Vale e Pimentel (2004) descrevem, de forma

Tabela 2 Modelos de resolução de problemas (adaptado de Vale e Pimentel, 2004)

sucinta, cada uma destas etapas. Para estas autoras, em primeiro lugar, para responder a um problema, é necessário compreendê-lo. Para tal, consideram que o aluno deve identificar os dados fornecidos, o que se pretende e as condições que o problema apresenta. Afirmam que, tendo em conta a informação disponibilizada, é necessário delinear um plano, isto é, selecionar uma ou mais estratégias para chegar à solução. Para tal, o aluno deve recordar-se de experiências anteriores, procurando relacioná-las com o problema (Vale & Pimentel, 2004). De acordo com as autoras, nesta fase, é essencial a utilização de algumas estratégias, tais como utilizar "problemas auxiliares, decompor e recombinar o problema, tentar evocar e resolver problemas relacionados (…), desenhar uma figura, fazer uma conjetura e testa-la e trabalhar de trás para a frente"(pp.21/2). Após a planificação do processo de resolução, esta é concretizada. Vale e Pimentel (2004) defendem que, em caso de impasse, volta-se à fase de planificação. Por fim, a solução obtida deve ser verificada de acordo com a informação apresentada no problema.

O modelo proposto por Fernandes, Vale, Silva, Fonseca e Pimentel distingue-se do modelo de Pólya pela junção da segunda e da terceira fases, visto, segundo Vale e Pimentel (2004), a dificuldade em dissociá-las na prática. Segundo estas autoras, o modelo de Pólya é uma proposta para ensinar a resolver problemas e ajuda a identificar as áreas em que os alunos manifestam dificuldades ou a clarificar o processo mental que é desenvolvido em atividades de resolução de problemas que tenham tido sucesso. Pólya defendia que ao seguir a sequência proposta pelo seu modelo, os alunos podem ser ensinados, com êxito, a resolver problemas (idem).

A maior dificuldade da resolução de um problema encontra-se na segunda fase do modelo de resolução de problemas de Pólya, pois não há apenas uma forma correta de resolver um problema, podendo ser utilizadas inúmeras estratégias (Vale & Pimentel, 2004).

Boavida et al. (2008) consideram importante conhecer a diferença entre o modelo de Pólya e as estratégias. Enquanto o modelo nos proporciona uma visão global do processo de resolução de um problema (Boavida et al., 2008), as estratégias são "ferramentas matemáticas que os alunos possuem e que os podem ajudar a explorar um problema" (Vale e Pimentel, 2004, p. 24, citando NCTM).

Estratégias de resolução de problemas, ou heurísticas, são "um conjunto de técnicas a serem dominadas pelo solucionador e que o ajudam a "atacar" o problema ou a progredir no sentido de obter a sua solução" (Boavida et al., 2008, p. 24, referindo Vale). Entre estas estratégias estão as seguintes:

- **Descobrir um padrão -** Estratégia centrada "em certos passos do problema e a solução é encontrada por generalizações de soluções específicas" (Vale & Pimentel, 2004, p. 24);
- **Fazer tentativas -** Pressupõe tentar "adivinhar" a solução a partir da informação fornecida pelo problema e confirmar ou não as condições estabelecidas no problema (Vale & Pimentel, 2004);
- **Trabalhar do fim para o princípio –** "Nesta estratégia começa pelo fim ou pelo que se quer provar" (Vale & Pimentel, 2004, p. 24);
- **Reduzir a um problema mais simples -** Pressupõe a resolução de um caso particular de um problema, estando, normalmente, associada à descoberta de um padrão (Vale & Pimentel, 2004);
- **Fazer uma simulação/dramatização –** Na resolução do problema, utilizam-se objetos, cria-se um modelo ou faz-se uma dramatização que represente o problema (Vale & Pimentel, 2004);
- **Fazer uma lista organizada/fazer uma tabela –** "Utiliza-se como estratégia de resolução ou simplesmente para representar, organizar e guardar informação" (Vale & Pimentel, 2004, p. 25)**.**

Quando o aluno não sabe mobilizar os seus conhecimentos de forma a usá-los numa nova situação, o conhecimento de modelos e de estratégias de resolução poderá ser uma ajuda na estruturação do seu pensamento e, naturalmente, na procura de formas possíveis de resolução e exploração das situações (Vale & Pimentel, 2004).

O professor desempenha um papel importante ao longo do processo de resolução de problemas, nomeadamente quando os alunos os resolvem em grupo. Durante este processo, o professor deve focar-se na atividade desenvolvida por cada grupo de trabalho. É importante que preste apoio, ajudando os alunos a ultrapassar certos bloqueios ou a enriquecer o trabalho desenvolvido pelo grupo, sendo esta dimensão uma das mais complexas da intervenção do professor. Assim, o professor pode estimular direta ou indiretamente a atitude reflexiva do aluno (Oliveira, Segurado, & Ponte, 1996).

Em conformidade com Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), o professor deve observar e tentar compreender as estratégias de resolução de problemas apresentadas pelos alunos, bem como o seu pensamentos matemático. Nessas tentativas de compreensão, deve questionar os alunos de forma a clarificar o raciocínio matemático dos mesmos.

Abrantes (1994) chama a atenção para a importância do professor refletir sobre os seus verdadeiros objetivos quando distribui os alunos em grupos. Um ambiente de sala de aula que favoreça o trabalho de grupo, envolvendo todos os alunos, pode estar relacionado, segundo o autor, com o facto de "o professor desejar que todos compreendam" (referindo Dekker, p.165), que todos os alunos tenham um papel ativo na discussão e no processo de resolução de problemas, para além de recorrer ao trabalho de grupo com o objetivo de ocupar os alunos, lidar com problemas de comportamento, ou dividir a turma segundo níveis de desempenho. Acrescenta que a forma como os alunos com mais dificuldades são tratados pelo professor, pode influenciar o comportamento dos melhores alunos em relação aos colegas.

No entanto, a organização dos grupos e o tipo de tarefas não devem ser, de acordo com Abrantes (1994), as únicas preocupações do professor aquando da organização dos grupos de trabalho na sala de aula, nomeadamente quando propõe problemas aos alunos. A ajuda do professor aos vários grupos, principalmente "o modo como ajuda a ultrapassar dificuldades internas de funcionamento e como estimula a discussão e a cooperação", bem como a articulação de "momentos de trabalho em grupo com outras estratégias de aprendizagem" (p.164), podem ser, também, fatores decisivos. Nunes (1996, referindo LeGere) defende que a principal preocupação do professor deve deixar de ser a forma como deve explicar a tarefa para passar a ser a elaboração cuidada da mesma, de forma a garantir o envolvimento dos alunos e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Durante a resolução de problemas em grupo, o professor deve assumir o papel de observador do desempenho dos alunos, analisando as dificuldades reveladas e organizando processos para cada grupo avaliar o seu trabalho; além disso, deve, também, assumir o papel de monitor e interveniente no trabalho, analisando e discutindo a qualidade da tarefa desenvolvida e proporcionando tempo para que os alunos também o façam (Nunes, 1996).

Em suma, os modelos e as estratégias de resolução de problemas podem ser utilizados para ensinar os alunos a resolver problemas, ajudando-os a superar as suas dificuldades e, assim, desenvolver capacidades matemáticas. Simultaneamente, a organização dos grupos, a seleção dos problemas e o apoio proporcionado durante a resolução são fatores decisivos, o que permite destacar a importância do papel do professor na resolução de problemas em grupo.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Este capítulo incide nas opções metodológicas feitas durante o desenvolvimento do projeto de caráter investigativo. Em primeiro lugar, justifico as principais opções. Em seguida, contextualizo e descrevo a intervenção pedagógica. Por último, apresento os procedimentos de recolha e da análise de dados.

Principais opções

Numa investigação educacional podemos utilizar várias metodologias. O que é importante é que o investigador selecione a mais adequada face ao objetivo e questões da investigação.

No desenvolvimento deste estudo, foi adotada uma abordagem qualitativa de investigação. Patton (2002) caracteriza a investigação qualitativa como uma tentativa de compreender as interações em determinada situação, no sentido de aprofundar as suas características, o significado que tem para os participantes e o que ocorre durante a situação. Segundo Afonso (2005) esta investigação "preocupa-se com a recolha de informação fiável e sistemática sobre aspectos específicos da realidade social usando procedimentos empíricos com o intuito de gerar e inter-relacionar conceitos que permitam interpretar essa realidade" (p. 14). No estudo que realizei procurei recolher, de forma sistemática, dados fiáveis sobre o papel que os alunos assumem quando resolvem problemas em grupo, sobre o conhecimento matemático que mobilizam e sua emergência no grupo e, ainda, sobre as dificuldades que surgem, utilizando técnicas de recolha de dados que me permitissem compreender este fenómeno e, em particular, o significado que os participantes neste estudo (alunos) atribuem às suas opções.

Bogdan e Biklen (1994), apresentam cinco características da investigação qualitativa:

1. "Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p.47);
2. "A investigação qualitativa é descritiva" (p. 48);
3. "Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p. 49);

4. “Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva” (p. 50);
5. “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa”(p. 50).

No estudo apresentado, os dados foram recolhidos, por mim, em aulas em que os alunos foram desafiados a resolver problemas matemáticos em grupo e, também, em entrevistas que realizei a alguns alunos. Sendo assim exerci dois papéis em simultâneo — o papel de professora estagiária e de investigadora —, pelo que fui um instrumento principal de recolha de dados. Como afirmam Bogdan e Biklen (1994), mesmo quando se recorre a gravações áudio, como foi o caso, “os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém pelo contacto directo” (p. 48), acrescentando que “os materiais registados mecanicamente são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento – chave de análise” (idem). Segundo os mesmos autores, entende-se que o investigador compreende melhor as ações se as observar diretamente no contexto onde decorrem.

Em investigação qualitativa, “os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48) e “os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação” (idem). A transcrição das gravações áudio das entrevistas realizadas e de diálogos estabelecido entre os alunos e com os alunos durante a resolução dos problemas, bem como as produções dos alunos, permitiram-se identificar episódios que usei no decurso da análise, respeitando a forma como foram registados ou transcritos.

Numa abordagem qualitativa, o processo é mais valorizado do que o resultado (Bogdan & Biklen, 1994). Assim, enquanto os alunos resolviam os problemas em grupo, estive com especial atenção ao papel que cada interveniente desempenhou no processo de resolução, aos aspetos emergentes desse processo que podem favorecer a aprendizagem, ao tipo de dificuldades que surgem e como os alunos as ultrapassam.

Neste estudo, os dados não foram recolhidos com o objetivo de confirmar hipóteses construídas previamente. Pelo contrário, o objetivo foi “construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes” (Bogdan & Biklen, 1994, p.50).

O investigador qualitativo valoriza o significado que os participantes atribuem às suas ações, pelo que procura compreender as suas perspetivas. Questiona-os continuamente com o objetivo de perceber “aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem" (Bogdan & Biklen, 1994, p.51, citando Psathas). Neste estudo, procurei, de forma oportuna, questionar os alunos acerca das suas estratégias de resolução de problemas e sobre os resultados a que chegaram, de forma a compreender os seus pontos de vista.

Para Aires (2011), citando Nelson, Treicher e Grossberg, "os investigadores qualitativos estudam os fenómenos nos seus contextos naturais" (p. 13). Assim, "em educação, a investigação qualitativa é frequentemente designada por naturalista, porque o investigador frequenta os locais em que naturalmente se verificam os fenómenos nos quais está interessado, incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas" (Bogdan & Biklen, 1994, p.17, citando Guba e Wolf).

De acordo com Afonso (2005), "os estudos naturalistas caracterizam-se pela investigação de situações concretas existentes e identificáveis pelo investigador, sem intervenção, em termos de manipulação, física e deliberada, de quaisquer variáveis" (p. 43). Importa esclarecer que uma investigação é naturalista no sentido em que "o fenómeno de interesse desenvolve-se naturalmente no sentido em que não tem um percurso previamente estabelecido por e para o investigador, tal como ocorreria num laboratório ou outros cenários controlados" (Patton, 2002, p. 39). Deste modo, o estudo que realizei é naturalista pois desenvolveu-se no contexto de uma sala de aula "real" e não envolveu manipulação ou controlo de quaisquer variáveis.

Cada metodologia está associada a uma perspetiva paradigmática (Carmo & Ferreira, 1998). Afonso (2005), referindo Burrell e Morgan, distingue quatro tipos de paradigmas entre os quais está o paradigma interpretativo. Este paradigma é caracterizado "pela preocupação em compreender o mundo social a partir da experiência subjetiva" (Afonso, 2005, p.34, referindo Burrell e Morgan), procurando-se, desta forma, "analisar a realidade social a partir do interior da consciência individual e da subjetividade, no contexto de referência dos actores sociais, e não no do observador da acção" (idem). Tendo em conta que procurei conhecer o significado que os alunos atribuíam ao que faziam e diziam, considero que este estudo se insere no paradigma interpretativo.

Uma investigação qualitativa pode assumir várias formas: por exemplo, "os estudos extensivos, os estudos etnográficos, os estudos de caso, a investigação-acção, os estudos biográficos e as histórias de vida, e, por fim, os estudos de avaliação" (Afonso, 2005, p. 62).

O estudo realizado tem proximidades com o que vários autores designam por investigação-ação. Afonso (2005) apoiando-se em Elliott, define a investigação-ação como o "estudo de uma situação social com o objectivo de melhorar a qualidade da acção desenvolvida no seu interior" (p. 74). Para Bogdan e Biklen (1994), "a investigação-ação consiste na recolha de informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 292) acrescentando, ainda,a que "é um tipo de investigação aplicada na qual o investigador se envolve ativamente na causa da investigação" (p.293). Qualquer umas das caracterizações de investigação-ação apresentadas envolvem a intenção de melhorar/mudar algo. Contudo, a investigação-ação também pode ter como objetivo a compreensão: "investigação-acção é um processo reflexivo que caracteriza uma investigação numa determinada área problemática cuja prática se deseja aperfeiçoar ou *aumentar a sua compreensão pessoal*" (Esteves, 2008, p. 20, citando McKernan, p.20, destaque acrescentado).

Se se adoptar a perspetiva de Esteves (2008) pode considerar-se que o estudo que desenvolvi tem características de investigação-ação, pois foca-se na compreensão de como é que os alunos do 4.º ano de escolaridade resolvem problemas matemáticos em contexto de trabalho de grupo, nomeadamente as potencialidades deste tipo de trabalho, bem como as dificuldades que emergem no decurso deste processo.

De acordo com Afonso (2005), a investigação-ação é realizada por indivíduos que se encontram diretamente envolvidos no contexto que é objeto de estudo, tendo como ponto de partida questões relacionadas com a prática do quotidiano. A escolha deste tipo de estudo implica o respeito e a adequação aos valores e às condições de trabalho na instituição. É predominante um grande ecletismo metodológico no que concerne às técnicas de recolha e tratamento de dados, pois o que é pertinente é que sejam compatíveis com os recursos disponíveis. Por fim, "a investigação-acção implica perseverança num esforço contínuo para ligar, relacionar e confrontar acção e reflexão. A reflexão abre novas opções para a acção, [e esta, por sua vez] permite reexaminar a reflexão que a orientou" (Afonso, 2005, p. 75).

Dado o tempo disponível para a realização do estudo, para efeitos desta investigação foi selecionado um grupo de três elementos.

Intervenção pedagógica

Uma das opções metodológicas do estudo foi a realização de uma intervenção pedagógica, inserida no âmbito das atividades associadas ao estágio (Estágio III), que decorreu entre 10 de dezembro de 2012 a 16 de janeiro de 2013. Nesta secção apresento uma breve caraterização da escola e da turma de estágio, bem como os principais contornos desta intervenção.

A escola e a turma

A intervenção pedagógica realizou-se numa escola básica do 1.º ciclo, de um Agrupamento de Escolas do distrito de Setúbal, durante o ano letivo 2012/13. O Agrupamento pertence à rede de escolas do Programa Territórios Educativos de Intervenção Prioritária (TEIP), que visa combater o insucesso escolar, a indisciplina e o abandono escolar que predominam a região.

O Agrupamento é constituído por 2 jardins-de-infância, 4 EPEI (Educação Pré-escolar Itinerante), 2 escolas do 1.º ciclo, 1 escola com jardim-de-infância e 1.º ciclo e 1 escola com 1.º, 2.º e 3.º ciclo. A escola básica do 1.º ciclo onde desenvolvi a intervenção pedagógica, situa-se numa zona rural, marcada pelo isolamento e com um nível socioeconómico baixo.

A localidade onde a escola está inserida, caracteriza-se por uma atividade económica nas áreas da agricultura, exploração de cortiça, vitivinicultura, cultivo e transformação de tomate, indústria de lacticínios, comércio e serviços. Nesta zona, predominam as grandes herdades, ricas em montado de sobro, pinhal e olival e que são uma importante fonte de riqueza não só para a criação de gado, como para a exploração de cortiça, apicultura e ainda a atividade cinegética. Contudo, a área predominante é a viticultura.

A freguesia tem cerca de 5000 habitantes. A maior parte da população trabalha fora e tem havido um decréscimo da população mais jovem. A maioria dos habitantes tem habilitações académicas ao nível do 1.º ciclo. De acordo com o Projeto Educativo da Escola, referindo as estatísticas disponibilizadas pelo Instituto Nacional de Estatísticas, é a freguesia que possui a maior taxa de analfabetismo do concelho.

A escola onde decorreu a intervenção pedagógica foi inaugurada na década de 50 do século passado. O edifício revela algumas carências, os espaços físicos são poucos e com condições precárias. Não há espaços de refeitório nem para prática da Educação Física ou de outras Atividades Extra Curriculares (AEC). Os recursos materiais também são escassos. Frequentam-na alunos distribuídos por três turmas: uma turma de 1.º ano, uma de 2.º e 3.º ano e uma de 4.º ano.

A turma do 4.º ano, onde desenvolvi a intervenção, é constituída por 17 alunos, dos quais 11 são rapazes e 6 raparigas. Os alunos têm idades compreendidas entre os 9 e os 12 anos. Entre estes há dois que ficaram retidos no ano letivo anterior, pelo que seguem um Plano de Acompanhamento. Além disso, há um aluno abrangido pelo decreto de Lei 3/2008, com adequações curriculares. Há, ainda, uma aluna com diagnóstico de dislexia, pelo que é acompanhada por uma terapeuta da fala no Hospital de São Bernardo. A turma tem sete alunos que necessitam de Apoio Educativo. A maioria dos alunos é de nacionalidade portuguesa; existe apenas um aluno de nacionalidade romena.

A sala de aula está organizada em três grupos de quatro alunos, um grupo de três e outro de dois alunos. Está equipada com um computador que é utilizado pelo professor e pelos alunos sob a orientação do professor. Tem um quadro negro e quatro estantes para arrumação.

O trabalho de grupo não é novidade para estes alunos, sendo uma prática comum principalmente na área do estudo do meio. Interagem entre si com frequência, partilhando opiniões e dúvidas. Maioritariamente, têm um aproveitamento escolar positivo e demonstram interesse na aprendizagem de novos conteúdos. De acordo com o Plano Curricular de Turma, a área curricular em que apresentam mais dificuldades é a Matemática, seguida da Língua Portuguesa.

Resolução de problemas em ação

A intervenção pedagógica teve como principal objetivo tentar desenvolver a capacidade de resolução de problemas matemáticos dos alunos. Comecei por propor aos alunos que integravam o grupo em estudo a tarefa *A receita de Bolachas (Anexo 1)*[2], no âmbito de uma entrevista individual. Através desta via procurei compreender como é que os alunos lidavam com tarefas matemáticas que fossem problemas: que estratégias

[2] Adaptado de Rangel, M. (2009). *Matmagicar 4.º ano: Problemas de Matemática.* Porto: Porto Editora

usavam, que dificuldades tinham... Em seguida todos os alunos da turma resolveram, em grupo, um conjunto de problemas. Por último, realizei novas entrevistas individuais aos que compunham o grupo em estudo.

Os problemas que foram realizados em grupo distribuíram-se ao longo de três semanas consecutivas e foram organizados de modo a serem apresentados dois problemas por semana. Na figura 1 apresento um esquema que representa as principais etapas deste processo.

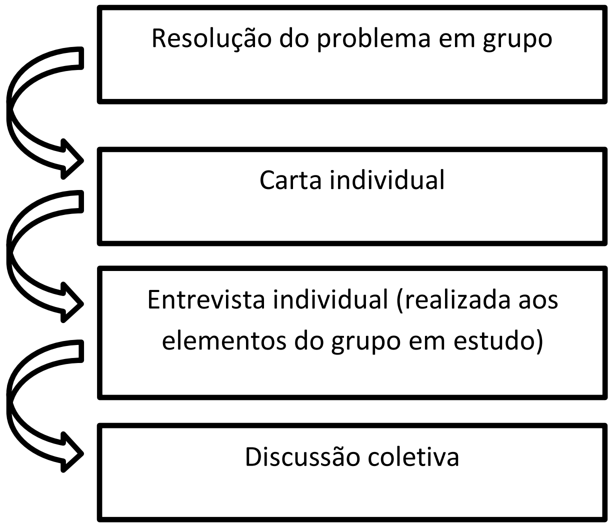


Figura 3 Etapas do processo de intervenção pedagógica

As três primeiras etapas ocorreram no mesmo dia; última etapa foi concretizada no dia seguinte.

Na primeira etapa, o enunciado do problema foi distribuído a todos alunos da turma. Comecei por lê-lo em voz alta, dando ênfase à questão colocada. Posto isto, cada grupo teve cerca de 45 minutos para o resolver. Findo este tempo e recolhidas as folhas de registo do processo de resolução, foi entregue, a cada aluno, uma folha na qual devia escrever uma carta a um amigo a relatar como resolveu a tarefa. Para esta etapa, os alunos dispuseram de cerca de 15 minutos. Para os auxiliar, foram-lhes disponibilizados, na mesma folha, os seguintes tópicos orientadores:

- O que o aluno fez na tarefa;
- Com quem trabalhou;
- O que cada elemento do grupo fez;
- Se o próprio contribuiu com alguma dica “boa”;
- Se algum dos colegas de grupo sugeriu uma dica “boa”;
- O que aprendeu com a tarefa;

- Se encontrou dificuldades e como as superou;
- Se gostou de trabalhar em grupo e porquê.

Posteriormente à redação da carta, entrevistei, individualmente, cada aluno do grupo em estudo. Estas entrevistas foram não estruturadas e realizaram-se após a aula. Pretendi, desta forma, averiguar se o aluno sabe o que fez, como e porquê.

No dia seguinte, realizou-se a discussão coletiva da resolução do problema. Para esta discussão selecionei grupos que tinham resoluções que se diferenciavam umas das outras, tendo em conta a estratégia utilizada e cada um dos grupos escolhidos apresentou, no quadro, a sua resolução. Considerei que nesta última fase era importante a partilha e análise das estratégias de resolução, para que os alunos compreendam que podem ser utilizadas várias estratégias. Além disso, a discussão coletiva permite desenvolver a comunicação matemática e o raciocínio matemático.

O processo descrito repetiu-se relativamente à resolução de cada um dos problemas propostos, ao longo das três semanas.

Procurei que os problemas matemáticos a resolver, em grupo, pelos alunos, fossem diferentes, nomeadamente quanto ao tipo e aos objetivos específicos. Para além disso, preocupei-me em que fossem adequados ao ano de escolaridade e permitissem o recurso a várias estratégias de resolução. A tabela 2 mostra o dia em que cada problema foi apresentado e a sua tipologia, de acordo com uma classificação de tipos problemas apresentada por Boavida et al. (2008)

Data de apresentação	Tarefa	Tipologia de problemas
10 de dezembro de 2012	A receita do bolo-rei	Problema de cálculo
11 de dezembro de 2012	Os arranjos florais	Problema de aplicação
7 de janeiro de 2013	Colocar azulejos	Problema de cálculo
8 de janeiro de 2013	A recolha de tampas de garrafas	Problema de processo
14 de janeiro de 2013	A coleção de selos	Problema de processo
15 de janeiro de 2013	A cidade diz que disse	Problema de processo

Tabela 4 Calendarização e classificação dos tipos de problemas (tipologia apresentada por Boavida et al., 2008)

Concretamente e, tendo por referência o PMEB (2007), as tarefas resolvidas em grupo têm, no seu conjunto, os seguintes objetivos específicos:

a) Compreender o sistema de numeração decimal;
b) Identificar e dar exemplos de múltiplos e de divisores de um número natural;
c) Resolver problemas que envolvam as operações em contextos diversos;
d) Identificar o objetivo e a informação relevante para a resolução de um dado problema;
e) Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;
f) Explicar ideias e processos e justificar resultados matemáticos;
g) Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando linguagem e vocabulários próprios;
h) Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos;
i) Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito da operação multiplicação usando as suas propriedades (nomeadamente, a comutativa e a distributiva em relação à adição e à subtração);
j) Realizar contagens progressivas e regressivas a partir de números dados;
k) Comparar números e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes;
l) Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas;
m) Formular e testar conjeturas relativas a situações matemáticas simples.

Na tabela 3 podem observar-se os principais objetivos de cada uma das referidas tarefas.

Tarefas	Objetivos específicos												
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)
A receita do bolo-rei	X	X	X	X	X	X	X						
Os arranjos florais	X	X	X	X	X	X	X						
Colocar azulejos							X	X	X				
A recolha de tampas de garrafas	X		X	X	X		X			X	X	X	
A coleção de selos	X		X	X	X								X
A cidade diz que disse	X		X	X	X								X

Tabela 5 Objetivos específicos dos problemas propostos

A análise da tabela 3 revela que, de uma forma geral, há objetivos comuns a vários problemas e há, também, objetivos diferenciados. Quanto ao que os distingue pode observar-se, por exemplo, que *A receita do bolo-rei* visa que os alunos identifiquem e deem exemplos de múltiplos e divisores de um número natural. Por seu lado, *A recolha de tampas de garrafas* tem como objetivo comparar números e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes. Por fim, *A coleção de selos* tem por propósito que os alunos formulem e testem conjeturas relativas a situações matemáticas simples.

Apresento, em seguida, uma breve descrição de cada uma das tarefas resolvidas, em grupo, pelos alunos.

1.º Problema – A receita do bolo-rei[3]

O problema (Anexo 2) é constituído por três questões. A primeira diz respeito à relação de dobro que deverá ser identificada pelos alunos; envolve o raciocínio proporcional e números de referência que poderão ser usados recorrendo a estratégias de cálculo mental. A segunda questão envolve noções de medidas de massa expressas em diferentes unidades e o estabelecimento de relações entre uma parte e um todo (por exemplo, a quarta parte e a décima parte). Por fim, a última questão envolve cálculos com valores monetários, bem como a relação quantidade/preço.

2.º Problema - Os arranjos florais[4]

É composto por duas questões (Anexo 3). A primeira está relacionada com os múltiplos e divisores comuns dos números 60 e 48, que deverão ser identificados pelos alunos. A segunda questão envolve a identificação do máximo divisor comum entre 60 e 48.

---

[3] Adaptado de *Números Naturais 3.º ano: Tarefas realizadas no âmbito da Implementação do Novo Programa de Matemática do 1.º ciclo* retirado em 2 de dezembro de 2012 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/031_Sequencia_%20Numeros_Naturais_TP_1c_3_16Dez.pdf

[4] Adaptado e retirado de Lima, E.; Barrigão, N.; Pedroso, N.; Rocha, Vítor. (2012). *Alfa – Matemática 4 – 4.º ano.* Porto: Porto Editora.

3.º Problema - Colocar azulejos[5]

É constituído por quatro questões que envolvem a multiplicação pretendendo-se que os alunos utilizem estratégias de cálculo mental e escrito desta operação usando as suas propriedades para calcularem produtos, o que pode ser facilitado pelo recurso a um modelo retangular — neste caso representado por um painel de azulejos (Anexo 4).

4.º Problema - Recolha das tampas de garrafa[6]

Está organizado em três questões (Anexo 5). A primeira visa que os alunos mobilizem a noção de dobro para calcular o número de tampas recolhidas em vários dias e que realizem uma estimativa da quantidade de tampas recolhidas ao longo de uma semana. Na segunda pretende-se que os alunos desenhem uma reta numérica e que a graduem adequadamente para posicionarem aí diversos números entre 125 e 2000. Na última questão, apresentam-se duas quantidades de tampas (15000 e 120000) e solicita-se a indicação do número de dias que se demorou a juntar estas quantidades supondo que no primeiro dia se recolheram 125 tampas e que nos subsequentes se recolheu o dobro das do dia anterior. Esta questão é a mais complexa das três, nomeadamente devido à ordem de grandeza dos números envolvidos, há necessidade de se ter em atenção não apenas o número de tampas obtidas em cada dia mas também a quantidade recolhida até esse dia e ao facto de não haver nenhuma altura em que juntaram, exatamente, as quantidades indicadas.

5.º Problema - A coleção de selos[7]

Possui apenas uma questão (Anexo 6). O enunciado fornece algumas pistas para que os alunos descubram o número de selos de uma coleção. Estas pistas remetem para o conhecimento da estrutura do sistema de numeração decimal, dos múltiplos de 3 e dos números ímpares e a resolução do problema passa por relacionarem adequadamente estas pistas.

---

[5] Retirado de Mendes, F.; Brocardo, J.; Delgado, C.; Gonçalves, F. (2010). *3.º Ano – Números e Operações.* Retirado a 2 de dezembro de 2012 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/019_020_Sequencia_NumeroseOperacoes_NPMEB_1c3(actualizado22Jun2010).pdf

[6] Adaptado de *Números Naturais 3.º ano: Tarefas realizadas no âmbito da Implementação do Novo Programa de Matemática do 1.º ciclo* retirado em 2 de dezembro de 2012 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/031_Sequencia_%20Numeros_Naturais_TP_1c_3_16Dez.pdf

[7] Retirados a 8 de janeiro de 2013 de http://www.slideshare.net/ferreirajoao/1-ficheiro-de-problemas-4-ano-8558190

6.º Problema – A cidade "diz-que-diz-que"8

É composto apenas por uma questão (Anexo 7). Pretende-se que os alunos indiquem o número de horas que uma história demora a espalhar-se por uma cidade com 21845 habitantes sabendo-se que, no início, há uma pessoa que a sabe e que a partilha com quatro pessoas no prazo de uma hora, em cada uma das horas seguintes, cada pessoa que ouve pela primeira vez a história, partilha-a com mais quatro que ainda não a sabem. A resolução deste problema envolve o conhecimento e uso dos múltiplos de quatro e da operação adição bem como o estabelecimento de relações entre o número de horas passadas, o número total de pessoas que sabe a história e o número de habitantes da cidade.

Recolha de dados

Para a concretização deste projeto, a turma foi dividida em grupos de três elementos, originando quatro grupos de três alunos e um grupo constituído por quatro alunos. Estes grupos são heterogéneos relativamente ao nível de aprendizagem, sendo, cada um constituído por um aluno bom, um aluno mediano e outro aluno menos bom. Como anteriormente referi, para efeitos desta investigação, foi selecionado um grupo de três elementos que designei por A (aluno bom), B (aluno mediano) e C (aluno menos bom).

Os critérios de seleção do grupo que escolhi para efeitos de investigação foram definidos por mim com a colaboração do professor cooperante. Para que a intervenção pedagógica ocorresse da melhor forma, conversei informalmente com este professor com o objetivo de conhecer melhor os alunos, nomeadamente as suas dificuldades na resolução de problemas e a sua recetividade para trabalhar em grupo. Sublinho que o professor cooperante teve aqui um papel importante, na medida em que a sua experiência de docente no 1.º CEB e o conhecimento dos seus alunos, me ajudaram a escolher o grupo de alunos que seria objeto de estudo.

Durante a realização do estudo, procurei compreender, nomeadamente as potencialidades do trabalho de grupo na resolução, pelos alunos, de problemas

[8] Retirados a 8 de janeiro de 2013 de http://www.slideshare.net/ferreirajoao/1-ficheiro-de-problemas-4-ano-8558190

matemáticos bem como os constrangimentos experienciados, durante o processo, que designei por dificuldades. A analogia entre as funções de mineiro e do investigador apresentada por Bogdan e Biklen (1994) pode contribuir para iluminar o papel que desempenhei. Para estes autores, "o investigador procura identificar a informação importante por entre o material encontrado durante o processo de investigação" (p.149). Acrescentam que "os materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a analisar" são designados por dados e sublinham a importância da recolha de dados no processo de investigação. Nas suas palavras, "os dados são simultaneamente as provas e as pistas" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149).

Referindo-se à condução de uma investigação-ação, Bogdan e Biklen (1994) sublinham que as provas recolhidas devem ser designadas por dados acrescentando que "os factos nunca falam por si próprios. Enquanto se consultam os registos e outros materiais, é importante colocar continuamente a questão " o que é que posso fazer com este material para tornar o meu caso mais convincente?" (p. 298).

Neste estudo, foram utilizados vários métodos de recolha de dados visíveis na tabela 4 em que se podem observar, também, as fontes de dados,, formas de registo e o material empírico analisado.

Métodos de recolha de dados	**Fonte de dados**	**Formas de registo**	**Material empírico**
Observação participante	Aulas lecionadas	Gravação áudio	Transcrição
Recolha documental	Alunos que participaram no estudo	Produções escritas dos alunos	Produções escritas dos alunos
Entrevista não estruturada	Alunos que participaram no estudo	Gravação áudio	Transcrição

Tabela 6 Resumo do processo de recolha de dados

Observação participante

A observação é uma técnica de recolha de dados muito utilizada em investigação qualitativa. Segundo Afonso (2005), para além de útil, é uma técnica extremamente fidedigna. Contrariamente ao que acontece em entrevistas e em questionários, a observação não é influenciada por opiniões ou pontos de vista de terceiros.

Esteves (2008) afirma que "a observação permite o conhecimento directo dos fenómenos tal como eles acontecem num determinado contexto" (p. 87). O autor acrescenta, ainda, que esta técnica "ajuda a compreender os contextos, as pessoas que nele se movimentam e as suas interacções" (idem).

Tal como aconteceu nesta investigação, esta técnica de recolha de dados ajudou-me não só a compreender o contexto de sala de aula, em que estava inserida como professora, tal como o que fazem os alunos e as interações que ocorrem durante o processo de resolução de problemas.

De acordo com Carmo e Ferreira (1998), no contexto de uma investigação, existem várias formas de observar que se distinguem de acordo com o envolvimento do investigador e que vão da observação não participante à observação participante. De acordo com estes autores, a observação participante ocorre quando o observador assume um papel social junto dos participantes do estudo. Referem, ainda, que o observador realiza uma observação participante propriamente dita quando assume o seu papel de investigador e explica as razões da observação aos participantes (Carmo & Ferreira, 1998).

Nesta investigação, recorri à técnica de observação participante propriamente dita, pois assumi, simultaneamente, o papel de professora estagiária e de investigadora e os alunos tinham conhecimento desta duplicidade de papéis e das suas razões. Para registar as interações verbais dos alunos durante a resolução de cada problema, recorri ao equipamento de gravação em áudio. Os registos em áudio foram, posteriormente, transcritos.

Entrevista

A entrevista é uma técnica de recolha de dados muito útil na investigação em educação. Afonso (2005) afirma que

> a realização de entrevistas constitui uma das técnicas de recolha de dados mais frequentes na investigação naturalista, e consiste numa interacção verbal entre o entrevistador e o respondente em situação de face a face ou por intermédio do telefone. (Afonso, 2005, p. 97)

Podem distinguir-se três tipos de entrevista: a entrevista estruturada, a entrevista semiestruturada e a entrevista não estruturada.

A entrevista estruturada pressupõe "uma série de perguntas preestabelecidas dentro de um conjunto limitado de categorias de respostas" (Afonso, 2005, p. 98). Normalmente, este tipo de entrevista é utilizado em investigações nas quais se pretende recolher informação junto de um elevado número de participantes, visando determinar frequências que possibilitem um tratamento frequentemente estatístico dos dados (Afonso, 2005).

A entrevista semiestruturada assume um formato intermédio entre a entrevista estruturada e a não-estruturada. O modelo é idêntico ao da entrevista não estruturada, mas os temas são mais específicos. Geralmente, este tipo de entrevista tem por base um guião semelhante ao da entrevista estruturada (Afonso, 2005). No entanto, a ordem pela qual as questões são colocadas pode ser alterada e podem ser apresentadas novas questões que emergem no decurso da entrevista e que se afiguram como relevantes face aos objetivos do estudo (Boavida, 1993).

A entrevista não estruturada foi o tipo de entrevista que utilizei neste estudo, pois permite "a interacção verbal entre entrevistador e entrevistado (…) à volta de temas ou grandes questões organizadoras do discurso, sem perguntas específicas e respostas codificadas" (Afonso, 2005, p. 98). Esta entrevista tem como objetivo "compreender o comportamento complexo e os significados construídos pelos sujeitos, sem impor uma categorização exterior que limite excessivamente o campo de investigação" (p. 98). Sendo o objetivo do estudo, a compreensão de como alunos do 4º ano de escolaridade resolvem problemas matemáticos em contexto de trabalho de grupo, nomeadamente as potencialidades desta modalidade de trabalho, bem como as dificuldades que emergem no decurso deste processo, a entrevista teve um papel fundamental.

No total foram realizadas oito entrevistas a cada aluno do grupo em estudo. Não recorri a um guião pré-estabelecido. As questões colocadas dependiam das respostas do aluno. A primeira entrevista foi realizada individualmente com o objetivo de diagnosticar a forma como os alunos resolvem problemas matemáticos, compreendendo as suas estratégias e dificuldades. Para tal, recorri, como anteriormente mencionei, ao problema *A receita das bolachas* (Anexo 1). A entrevista foi orientada pela compreensão das estratégias de resolução que o aluno utilizava, das dificuldades que surgiam e de como o aluno lidava com estas dificuldades.

Posteriormente à resolução de cada um dos seis problemas em grupo e da elaboração da carta ao amigo, cada aluno do grupo em estudo, era sujeito a uma entrevista não-estruturada. Foram, assim, realizadas seis entrevistas a cada aluno em que o questionava acerca do que tinha escrito na carta. As questões colocadas dependiam das respostas do aluno e do que escrevera na carta. Assim, estas entrevistas realizadas na etapa posterior à elaboração da carta, tinham como objetivo compreender, nomeadamente o contributo do aluno para a resolução do problema proposto, a sua perceção sobre o papel dos colegas, o que aprendeu, quais as dificuldades que encontrou e como foram superadas.

Na oitava entrevista foi proposto a cada elemento do grupo em estudo que resolvesse, individualmente, um problema, à semelhança do que aconteceu com a entrevista inicial. Para esta última entrevista, recorri ao problema *Promoção de lápis*[9] (Anexo 8). Em particular, pretendia compreender se a resolução de problemas em grupo favoreceu, de alguma forma, a resolução, individual de problemas matemáticos.

Todas as entrevistas realizadas foram áudio-gravadas e, posteriormente, transcritas.

Recolha documental

Bogdan e Biklen (1994) referem a importância dos materiais produzidos pelos participantes durante o processo de recolha de dados. De acordo com estes autores, "embora não sejam tão utilizados, os materiais que os sujeitos escrevem por si próprios também são usados como dados" (p. 176).

Esses materiais podem na maioria dos casos já existir ou podem ser escritos ao longo da pesquisa. Para Bogdan e Biklen (1994), normalmente "os dados produzidos pelos sujeitos são utilizados como parte dos estudos em que a tónica principal é a observação participante ou a entrevista" (p. 176). Assim, esta produção de dados pode ser complementar, na medida em que pode confirmar alguns dados recolhidos através da entrevista ou, por outro lado, fornecer mais informação ao investigador, tal como aconteceu neste estudo.

---

[9] Retirado a 8 de janeiro de 2013 de http://www.slideshare.net/ferreirajoao/1-ficheiro-de-problemas-4-ano-8558190

Nesta investigação, os documentos recolhidos foram os registos dos alunos durante o processo de resolução de problemas e as cartas que cada um dos alunos escreveu a relatar como resolveu as tarefas.

Análise de dados

A análise de dados pode ser entendida como

> o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir [ao investigador] apresentar aos outros aquilo que encontrou. (Bogdan & Biklen,1994, p. 205)

Para proceder à análise dos dados recolhidos optei pela análise de conteúdo. Com efeito, Bardin (1977, citando Henry e Moscovici) sublinha que "tudo o que é dito ou escrito é susceptível de ser submetido a uma análise de conteúdo" (p.33). Segundo este autor, a análise de conteúdo é

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (p. 42)

Bardin entende a descrição como sendo a primeira etapa da análise de conteúdo e a interpretação como a última etapa. A inferência é assumida como um procedimento intermédio, que permite a passagem da fase de descrição à fase de interpretação. Segundo este autor, a análise de conteúdo estrutura-se em três fases: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. A pré-análise é a fase de organização dos dados recolhidos, que pretende tornar operacionais as ideias iniciais, sistematizando-as de forma a conduzir a um plano de análise. Esta fase incide na escolha dos documentos que devem ser sujeitos à análise e na elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação dos dados. Para Bardin, a exploração do material é a segunda e mais longa fase da análise de conteúdo. Consiste em procedimentos de categorização e de codificação dos dados.

O tratamento dos resultados obtidos e a interpretação é a terceira e última fase da análise de conteúdo.

De acordo com a natureza deste estudo e o tipo de informação recolhida, o tipo de análise de conteúdo mais adequada é a qualitativa. Esta é intensiva, na medida em que exige a análise de um conjunto de informações complexas e pormenorizada, tendo como base a presença/ausência de uma característica ou a forma como os elementos do discurso se encontram articulados (Bardin, 1977).

Numa análise de conteúdo qualitativa é essencial identificar categorias de análise que podem ser de vários tipos. Tendo em conta o objetivo do estudo, a análise foi organizada por categorias temáticas. Este tipo de análise permite dar resposta às questões orientadoras deste estudo pois, segundo Bardin (1977), "consiste em descobrir os «núcleos de sentido» que compõem a comunicação e cuja presença, ou frequência de aparição podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido" (p. 105). Estas categorias surgiram da interação entre as questões orientadoras do estudo, o enquadramento teórico e uma primeira leitura de todos os dados recolhidos. Concretamente, considerei: (a) a compreensão do enunciado do problema (ações que conduziram à compreensão dos alunos); (b) a concretização de um plano de ação (estratégias usadas, conhecimento matemático mobilizado e sua emergência, papel dos alunos); (c) as dificuldades (que surgem, se são ou não ultrapassadas e como o são).

Para proceder à análise de conteúdo, realizei a leitura de todos os documentos obtidos durante o processo de recolha de dados. Sublinhei as ideias mais importantes tendo em conta o objetivo e as questões da investigação, agrupei-as por categorias e ilustrei-as.

Depois de identificadas as categorias e o material empírico associado de cada uma delas, atribuí um título a cada tipo de documento que seria objeto de análise e associei-lhe uma sigla significativa. Após a codificação dos dados, produzi um texto descritivo para cada categoria, recorrendo a evidências dos dados em bruto. Por fim, e como uma análise de conteúdo não se deve limitar à descrição (Bardin, 1977), procurei aprofundar a minha compreensão sobre o fenómeno em estudo através da interpretação dos dados.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo consiste na apresentação e análise de dados recolhidos durante a intervenção pedagógica.

Em primeiro lugar, centro-me na análise detalhada da resolução, por um grupo de três alunos, de três tarefas: *Receita do bolo-rei*, *Recolha de tampas de garrafa* e *Coleção de selos*. Para a seleção destas tarefas, foram considerados vários critérios, nomeadamente o facto de se localizarem em momentos distintos da intervenção pedagógica, serem problemas de diferentes tipos e visarem objetivos específicos diferenciados. Em segundo lugar, foco-me na análise de duas tarefas, resolvidas individualmente pelos mesmos alunos, intituladas *Receita das bolachas* e *Promoção de lápis*. Estas tarefas foram-lhes propostas durante entrevistas realizadas, respetivamente, antes e depois da referida intervenção.

Para efeitos de organização do texto escrito, estruturei a análise da atividade dos alunos associada a cada uma das tarefas em três secções intituladas (a) Compreender o enunciado, esboçando um plano de ação (b) concretizando e revendo um plano de ação um plano de ação e (c) Dificuldades. Estas secções, embora apresentadas sequencialmente, estão fortemente interligadas.

Resolvendo problemas em grupo

A receita do bolo-rei

Como referi no capítulo 3, esta tarefa (Anexo 2) foi proposta à turma em 10 de dezembro. Os alunos começaram a explorá-la neste dia e a sua discussão ocorreu no dia seguinte. Globalmente, trabalharam na tarefa cerca de duas horas.

Compreender o enunciado, esboçando um plano de ação

Na primeira questão apresentavam-se os ingredientes, e respetivas quantidades, para se fazer um bolo para oito pessoas e solicitava-se a indicação da quantidade de cada um dos ingredientes se se pretendesse fazer o bolo para 16 pessoas. Um dos alunos do grupo (C) começou por ler o enunciado do problema para os colegas (episódio 1, §1), após o que começaram, rapidamente, a surgir algumas ideias sobre o processo de resolução:

Episódio 1

1. Aluno C: Nós aqui tínhamos 8 bolos, a mãe da Marta fez primeiro para 8 pessoas, mas depois a mãe da Marta queria fazer para 16. 2 vezes 8 é 16, por isso tem de ser o dobro.
2. Aluno A: Então é 250g de farinha, 500 g de farinha
3. 100g de fermento de padeiro fica 200g.
4. Aluna B: 1 colher de sopa de sal …
5. Aluno C: São duas…
6. Aluno A: 4 ovos
7. Aluna B: 150 g de açúcar dá 300g

(…)

8. Aluno C: 8 ovos. 100 vezes 2 é 200
9. Aluno A: 200g de margarina e 200g de frutos secos…
10. Aluna B: 400

O episódio 1 mostra que a compreensão do problema pelos alunos se inicia pela leitura do enunciado e passa por retirarem daí a informação necessária para responderem à questão colocada; revela, também, que esta atividade se entrelaça com o início do processo de resolução tendo os alunos começado a efetuar cálculos mentalmente (§2, §3, §4, §5, §6, §7, §8, §9).

Na segunda questão, apresentavam-se imagens de embalagens de 1 kg de três dos ingredientes necessários à confeção do bolo e pedia-se aos alunos para indicarem quantos bolos se poderiam fazer se se dispusesse destas embalagens. Nesta questão, a aluna B, depois de ler o enunciado em voz alta (episódio 2, §1), constatou, de imediato, que era necessário consultar a receita para poder resolver o problema (idem, §3), o que indicia que interpretou corretamente o que era solicitado. O mesmo aconteceu com o aluno A que, na sequência, delineou uma estratégia de resolução (idem, §4).

Episódio 2

1. Aluna B[lendo o enunciado]: Para fazer os bolos, a mãe da Marta precisa de comprar farinha, açúcar e margarina. Se comprar as embalagens seguintes, quantos bolos pode fazer?
2. Aluno C: 1kg mais... 3 kg mais… quantos bolos pode fazer… então pode…
3. Aluna B: Temos de ir ver a receita!

4. Aluno A: Temos de fazer o açúcar até chegar a um quilo.
5. Aluno C: Até chegar a um quilo…

Ao contrário dos outros elementos do grupo, o aluno C teve algumas dificuldades na compreensão do problema. Numa das intervenções, apresentada no episódio 2 (§2), diz "1 kg mais... 3 kg mais..." parecendo que pretende juntar as quantidades dos três ingredientes representadas nas imagens (farinha, açúcar e margarina) para a partir daí que se interrogar sobre quantos bolos se poderão fazer, o que não é uma estratégia adequada. Este aluno pode não ter entendido que teria de consultar a receita para rever as quantidades necessárias de farinha, açúcar e margarina para a confeção do bolo, aparentemente revelando algumas limitações na decomposição do problema em etapas.

Na última questão, a situação foi análoga (episódio 3). O aluno C não compreendeu que para lhe conseguir responder corretamente, teria de calcular a quantidade de ovos que a mãe consegue comprar com 5 euros focando, apenas, a sua atenção no número de ovos necessário para a confeção do bolo (§1). Pelo contrário, após a leitura da questão pelo aluno A, este e B interpretaram as informações fornecidas pelo enunciado, centrando a sua atenção nas mesmas, de forma a proceder ao delineamento de uma estratégia (§2) (§3) (§4).

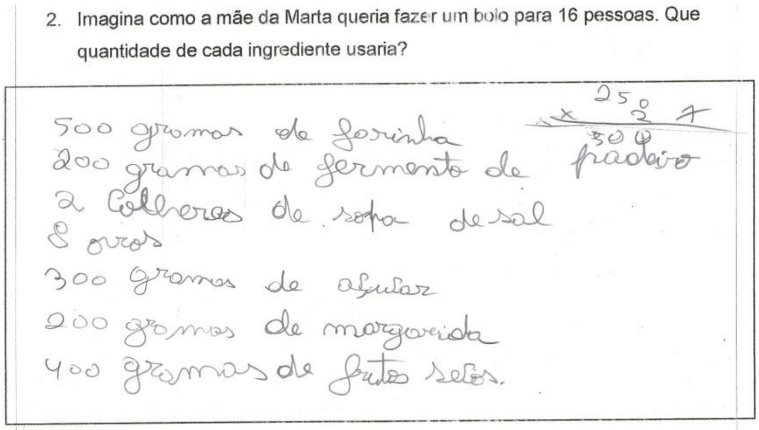
Episódio 3

1. Aluno C: Então olha, na receita para 8 pessoas ela usou 4 ovos. Para 16 ela usou 8 ovos, mas cada caixa só tem 6 ovos. Ela teve que usar…
2. Aluno A: Esta aqui tem 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12! [contando os ovos representados na caixa que tem uma dúzia]
3. Aluna B: Uma dúzia é 1,50€
4. Aluno A: 1,50 mais 1,50

Em suma, em geral um dos alunos leu o enunciado de cada questão. Foi após esta leitura que o grupo interagiu no sentido de procurar destacar a informação necessária à resolução do problema. Na primeira questão, todos os elementos usaram esta informação para delinear uma estratégia de resolução. O mesmo aconteceu nas restantes questões relativamente aos alunos A e B.

Concretizando e revendo um plano de ação

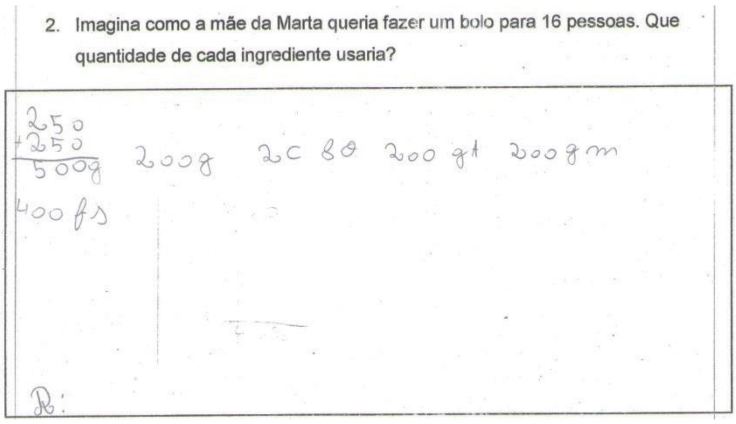
Na primeira questão, os alunos mobilizaram o conhecimento acerca do dobro para calcular a quantidade necessária de cada ingrediente para a confeção do bolo para o dobro das pessoas. As figuras 1, 2 e 3 mostram os registos escritos feitos por cada aluno.


2. Imagina como a mãe da Marta queria fazer um bolo para 16 pessoas. Que quantidade de cada ingrediente usaria?

250 × 2 = 500

500 gramas de farinha
200 gramas de fermento de padeiro
2 colheres de sopa de sal
8 ovos
300 gramas de açucar
200 gramas de margarida
400 gramas de frutos secos.

Figura 1 Registo escrito do aluno A relativo à resolução da primeira questão do problema *Receita do bolo-rei*


2. Imagina como a mãe da Marta queria fazer um bolo para 16 pessoas. Que quantidade de cada ingrediente usaria?

250 + 250 = 500g 200g 2C SO 200 gf 200gm
400 fs

R:

Figura 2 Registo escrito da aluna B relativo à resolução da primeira questão do problema *Receita do bolo-rei*

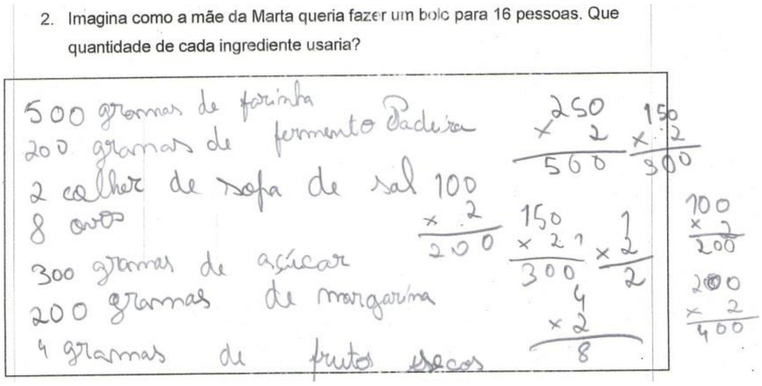


Figura 3 Registo escrito do aluno C relativo à resolução da primeira questão do problema *Receita do bolo-rei*

A análise das figuras 1, 2 e 3 revela, em primeiro lugar, que o aluno A não sentiu, na generalidade, necessidade de registar os cálculos efetuados. A única exceção foi o recurso ao algoritmo da multiplicação para calcular o dobro de 250. Também a aluna B, quase não registou procedimentos de cálculos; aqui a exceção está relacionada com o cálculo do dobro de 250 em que efetua uma adição de duas parcelas iguais recorrendo ao algoritmo desta operação para obter a quantidade de farinha necessária para fazer a receita para 16 pessoas (figura 2). No entanto, se se observar os registos desta aluna pode-se verificar que não indicou de forma correta a quantidade de um dos ingredientes (açúcar): escreveu "200g" em vez de 300 gr.

O aluno C foi o aluno que registou mais procedimentos de cálculo (figura 3). Ao contrário dos colegas, usou o algoritmo da multiplicação para calcular o dobro de todos os ingredientes, incluindo o cálculo do dobro de 4 e de 1. A análise dos seus registos revela, também, que quando a quantidade de um ingrediente (fermento) era igual à quantidade de outro ingrediente (margarina), não usou o valor de um dos produtos obtidos, ou seja a quantidade necessária de um dos ingredientes, para indicar a quantidade do outro. Também, neste caso, efetuou duas multiplicações recorrendo ao algoritmo. Além disso, nos registos surge duas vezes o cálculo do produto de 2 por 150. Diferentemente do que acontecia com o fermento e com a margarina, esta duplicação de produtos não está relacionada com o enunciado da tarefa.

O episódio 4 ilustra interações que ocorreram entre os alunos do grupo enquanto tentavam resolver a segunda questão.

Episódio 4

1. Aluno A: Temos de fazer a farinha [250g] até chegar a um quilo.
2. Aluno C: Até chegar a um quilo…

3. Aluno A: 750g. Mas aqui tem de dar um quilo que é 1000g. Podemos fazer por três. 3 vezes 0 é 0, 3 vezes 5 é 15 e vai 1, 3 vezes 7 é 21 e vão 2.
4. Aluna B: Não, não vai dar.
5. Aluno A: Devíamos tentar por 2.

(…)

6. Aluno C: Então os 3 quilos a dividir…
7. Aluna B: Quantas vezes cabem 250g num quilo?
8. Aluno C: 250 a dividir por…
9. Aluno A: 4. É 4! Porque 250 mais 250 é 500. 500 mais 500 é 1000. E isto é 1000g. tive uma ideia se fizéssemos 250 vezes 2 dá 500, e 500 vezes 2 dá 1000.
10. Aluno C: 250 vezes 2?... Já fiz.
11. Aluno A: Já fizeste 500 vezes 2?
12. Aluno C: Já. E agora? Quantas vezes cabem 500 em 250? Quantas vezes cabem 250 em 500?
13. Aluno A: Se é vezes 2 duas vezes, é 4.
14. Aluno C: Ah é como os 4 pratos. A professora também vos fez aquilo dos pratos?

A análise do episódio 4 mostra que, o aluno A rapidamente verificou que para poder responder à questão teria de descobrir a relação entre 250g e 1 kg (§1). Pode conjeturar-se que, em seguida, (§3) o aluno terá calculado mentalmente que, tendo 250g de farinha, faltariam 750g para um quilo ou que três vezes 250g são 750g, mas que, depois se baralhou e começou a multiplicar 750 por 3. A aluna B constatou este facto de imediato (§4), embora não tenha sugerido uma estratégia alternativa. A continuação da conversação revela que, aparentemente, o aluno A começou a experimentar resolver a questão por tentativas (§5).

O episódio 4 permite-nos, também, constatar que, eventualmente, o aluno C sabia que poderia ser útil fazer uma divisão, mas não sabia como usar esta operação, considerando como dividendo a soma das quantidades indicadas nas embalagens dos três ingredientes (farinha açúcar e margarina) (§6). Continuou a sugerir a realização de uma divisão, mas desta vez o dividendo seria 250g (§8), não sendo claro se pretendia saber quantas vezes 250g caberiam em 1000g. Foi o aluno A que respondeu, justificadamente, à questão colocada pela aluna B: "Quantas vezes cabem 250g num quilo?" (§7). Realizou adições sucessivas de 250 até chegar a 1000 e calculou o dobro de 250 e, em seguida, o dobro de 500, explicando a sua estratégia aos colegas (§9). Posteriormente, o mesmo aluno constatou que o dobro do dobro de um número é igual ao quádruplo desse mesmo número (§13). Através da explicação do colega, C associa esta estratégia com a utilizada na resolução do problema *A receita das bolachas* (§14).

O episódio 5 revela que o aluno C continuou a revelar dificuldades em saber como prosseguir a resolução, questionando os colegas, como forma de pedir ajuda (§1). Por seu lado, o aluno A constatou, facilmente, multiplicando 150g por 6, que um quilograma de açúcar permite confecionar 6 bolos (§3). Ao ouvir a explicação de A, C (§6), tal como B (§7), não compreenderam que o que se pretendia era determinar o número máximo de vezes que 150 cabe em 1000, e não os múltiplos de 150, como é o caso de 300.

Episódio 5

1. Aluno C: Então e agora?
2. Aluna B: Agora é o açúcar.
3. Aluno A: É 150 já vi. 3 vezes 0 é 0, 5 vezes 6 é 30 e vão 3, 1 vezes 6 é 6. Dá 900.
4. Aluna B: Ainda dá mais até ao 1000
5. Aluno A: Não dá para fazer. 900 mais 150 dá 1050.
6. Aluno C: Dá menos. O 2 vai dar.
7. Aluna B: Boa dá 300

Mesmo depois de, no grupo, ter sido calculada a quantidade de bolos que se poderia fazer com cada ingrediente, o aluno C parece não interpretar corretamente a segunda questão, pois insiste na ideia de realizar cálculos que envolvem a soma das quantidades de três ingredientes: "depois é o açúcar que dá 250 g mais 150 [açúcar] mais 100 [margarina] que dá 500. A multiplicar por 2 vai dar 1000" (aluno C). Já após os colegas terem calculado a quantidade de bolos que a quantidade de farinha permitia fazer (4 bolos), persistia em adicionar os números que representavam a quantidade de bolos a fazer se se tivesse apenas o açúcar (6 bolos) e a margarina (10 bolos), chegando a calcular o total de bolos, tendo em conta os vários ingredientes: "agora fazemos o total é 4 mais 6 mais 10 vai dar …" (aluno C).

O episódio 6 ilustra as justificações apresentadas pelo aluno A para fundamentar que só é possível fazer quatro bolos. Inicialmente começa por comparar o número de bolos que é possível fazer com 1kg de cada um dos ingredientes apresentados na imagem (§3). Em seguida, apresenta uma outra justificação (§7), que poderá ter contribuído para uma reestruturação do seu pensamento.

Episódio 6

1. Aluno A: Se fizermos 4 bolos ficamos sem farinha.
2. Estagiária: Explica-me porque achas que são 4?
3. Aluno A: Porque nós fizemos … Aqui tem um 4, aqui 6 e aqui 10. Depois como a farinha é o primeiro ingrediente, portanto é o principal, pensei que só desse para fazer …
4. Estagiária: Porque achas que a farinha é o ingrediente principal?
5. Aluno A: Aqui é 4… professora, posso explicar de outra maneira?
6. Estagiária: Podes.
7. Aluno A: Eu acho que aqui é 4 porque o 250 é o maior número que está cá. Porque se nós fizermos por 4 este vai dar 600 e aqui por 4 vai dar 400.

Como o episódio 6 revela, o aluno A compreendeu que se as embalagens dos três ingredientes têm a mesma quantidade, o ingrediente que se esgotará mais rapidamente é o que é necessário em maior quantidade na receita; neste caso é a farinha. Tendo em conta que sem farinha não é possível fazer mais bolos, esta determina quantos bolos a mãe da Marta consegue fazer.

As figuras (4, 5 e 6), ilustram que os alunos realizaram os cálculos recorrendo ao algoritmo da multiplicação para saber a quantidade de bolos que se pode fazer com um pacotes (de 1kg) de farinha, de açúcar e de margarina, tendo por base as quantidades apresentadas na receita. No caso da farinha, os registos revelam que os alunos não multiplicaram 250g por 4, mas por 2 duas vezes consecutivas, chegando assim às 1000g.

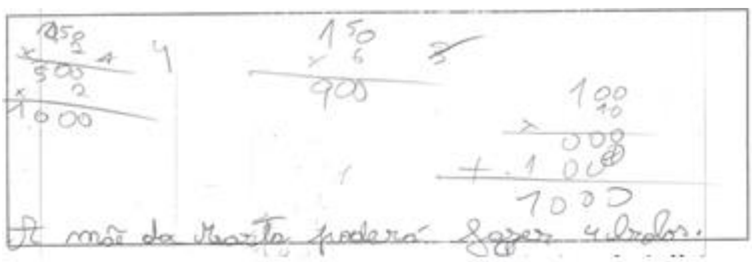


Figura 4 Registo escrito do aluno A relativo à resolução da segunda questão do problema *Receita do bolo-rei*

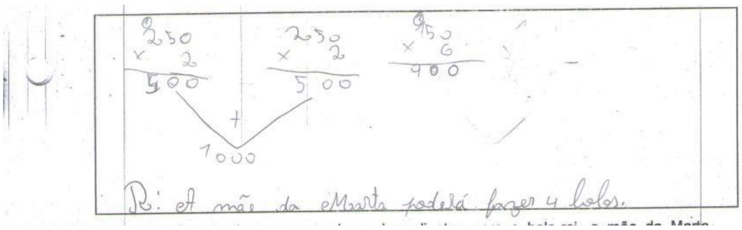


Figura 5 Registo escrito da aluna B relativo à resolução da segunda questão do problema *Receita do bolo-rei*

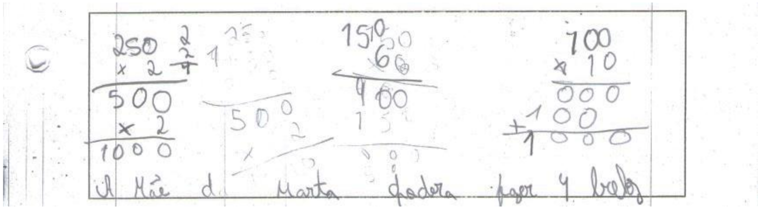


Figura 6 Registo escrito do aluno C relativo à resolução da segunda questão do problema *Receita do bolo-rei*

O episódio 7 ilustra como os alunos iniciaram a resolução da terceira e última questão.

Episódio 7

1. Aluna B: Podemos fazer como uma dúzia custa 1,50€, podemos fazer uma dúzia mais uma dúzia…
2. Aluno A: E mais uma dúzia. Então vamos fazer uma conta de mais.
3. Aluno C: eu não percebo esta conta.
4. Aluno A: É 3. 1,50 mais 1,50 dá 3. Ela não gasta tudo, vai-lhe sobrar 50 cêntimos.
5. Estagiária: Porquê?
6. Aluno A: Porque 1,50 mais 1,50 mais 1,50 vai dar 4,50.

(…)

7. Aluno C: Podíamos era fazer uma conta de dividir…
8. Estagiária: Como? Explica lá a tua ideia.
9. Aluno C: 1,50…Não, não dá.
10. Aluno A: Nós ainda não demos.
11. Aluno C: As contas de dividir com vírgula também podemos fazer com número inteiro e depois acrescentamos as vírgulas ao quociente.

(…)

12. Aluno A: Mas se fizermos 75 + 75 + 75 + 75 + 75 + 75 vai dar o mesmo.

13. Aluno C: Então é 5 vezes 1,50. Podemos somar isto e o que der multiplicamos por 5 euros. Nós somamos 1,50 mais 0,75 cêntimos e depois somávamos mais os 5 euros. Assim já passa dos 5 euros.

A aluna B considerou que, tendo em conta o preço de uma dúzia de ovos, poderiam adicionar uma dúzia a outra dúzia (§1), referindo-se, implicitamente, à adição dos respetivos preços. O aluno A concordou com esta estratégia, considerando adicionar outra dúzia (§2). Constatou que se adicionassem 75 cêntimos seis vezes ia dar o mesmo resultado (§12), sobrando apenas 50 cêntimos (§4). O aluno C sugeriu que realizassem a divisão referindo 1,50 (§7). No entanto, quando questionado sobre esta ideia, não conseguiu expandi-la, desvalorizando-a (§9). Este aluno evidenciou alguma noção sobre a possibilidade de efetuar divisões com números na representação decimal (§11), diferentemente de A (§10). No entanto, C não compreendeu que para resolver o problema teria de saber a quantidade de ovos que podiam ser comprados com 5€ (§13). Depois de calcularem a quantidade de ovos que se poderia comprar com 5 euros, os alunos procuraram saber quantos bolos a mãe da Marta consegue fazer com os 36 ovos, como é perceptível no episódio 8 (§1 e §4).

Episódio 8

1. Aluno A: Nós fizemos 1,50 mais 1,50 mais 1,50 dá 4,50. 12 mais 12 mais 12 dá 36.
2. Estagiária: 36?
3. Aluno C: Uma dúzia é 12. 12 mais 12 é 24, mais 12 …
4. Aluno A: 36, ela pode comprar 36 ovos. Já descobrimos os ovos…
5. Aluno C: Quantos bolos a mãe da Marta conseguirá fazer com os ovos que comprou com os 5€?
6. Aluno A: Então um bolo leva 4 ovos.

   4+4=8
   8+4=12
   12+4=16
   16+4=20
   20+4=24
   24+4=28
   28+4=32
   32+4=36
7. Aluno A: 9 bolos! Ela pode fazer 9 bolos.
8. Estagiária: Porquê?

9. Aluno A: Porque 4 vezes 9 dá 36. Dá para fazer 9 bolos.

O aluno A realizou adições sucessivas da quantidade de ovos, necessária para fazer um bolo, no sentido de acrescentar, até obter a soma 36 (§6). Em seguida contou o números de vezes que adicionou 4 e conclui que se poderiam fazer nove bolos (§7). Justifica a resposta referindo que a multiplicação de 4 por 9 tem 36 como produto (§9), ou seja, relaciona a adição com a multiplicação.

As figuras (7, 8 e 9) mostram os registos efetuados pelos alunos durante o processo de resolução. O aluno A recorreu ao algoritmo da adição para determinar o valor gasto em ovos e ao algoritmo da multiplicação para saber o número de ovos que se conseguia comprar com esse valor (figura 7). A aluna B utilizou apenas o algoritmo da adição para efetuar os cálculos (figura 8). O aluno C usou o algoritmo da adição para obter o preço de três dúzias de ovos, mas os seus cálculos não estão corretamente registados e são algo confusos. Para saber o número de ovos recorreu ao algoritmo da multiplicação calculando o produto de 3 por 12 e, também, ao algoritmo da adição para calcular a soma de três parcelas iguais a 12 (figura 9).

Todos os alunos apresentaram uma resposta correta relacionada com o número de bolos que se poderiam fazer, mas nenhum registou qualquer cálculo que ilustrasse como chegaram a esta resposta o que poderá, eventualmente, relacionar-se com já saberem este numero em virtude das estratégias apresentadas por A (episódio 8, §7, §9).

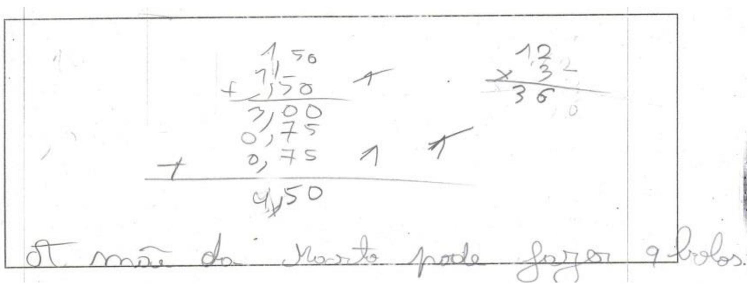


Figura 7 Registo escrito do aluno A relativo à resolução da terceira questão do problema *Receita do bolo-rei*

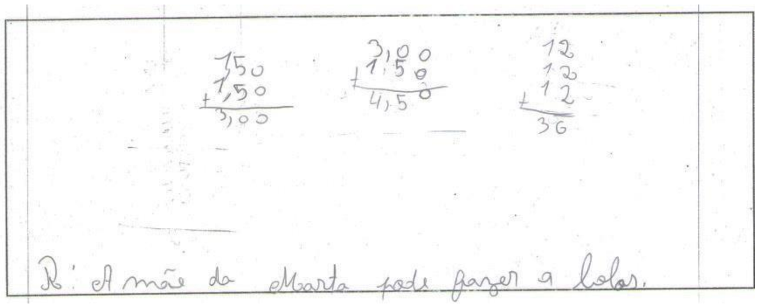


Figura 8 Registo escrito do aluno B relativo à resolução da terceira questão do problema *Receita do bolo-rei*

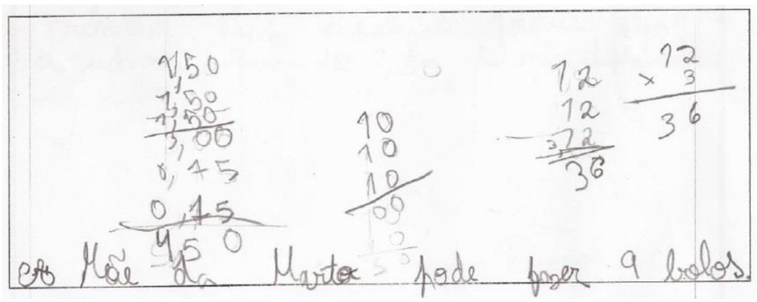


Figura 9 Registo escrito do aluno C relativo à resolução da terceira questão do problema *Receita do bolo-rei*

Ao longo da resolução do problema, tornou-se evidente o uso sistemático dos algoritmos, principalmente o da multiplicação, mesmo em casos elementares, como é o caso do aluno C que recorreu ao algoritmo para multiplicar 1 por 2 (figura 3).

Dificuldades

Ao longo das secções anteriores, foram sendo evidenciadas dificuldades, com que os alunos se confrontaram. Na segunda questão, inicialmente o aluno A teve alguma dificuldade em relacionar 250g com 1 kg, sendo que multiplicava 750g, em vez de 250g, por 3 e, depois, tentou multiplicar por 2 aparentando estar a resolver o problema por tentativas. Mais à frente, na última questão, quando um colega sugeriu que poderia efetuar-se uma divisão, revelou desconhecimento de como se poderia efetuar esta operação com números em representação decimal porque, nas suas palavras, “ainda não demos”. A aluna B não apresentou dificuldades. No entanto, a análise da *Carta ao amigo*, mostra que, para esta aluna, a última questão foi um desafio: “eu tive alguma dificuldade no último problema, mas ultrapassei fazendo muitas contas com a ajuda deles”.

O aluno C foi o que se confrontou com mais dificuldades. Na segunda e na terceira questões, deparou-se com obstáculos ao nível da compreensão, pois não interpretou a informação fornecida pelo enunciado. Por exemplo, não percebeu que para responder à segunda questão tinha de ter em conta as quantidades de ingredientes que constavam na receita e tentou adicionar as quantidades de farinha, de açúcar e de margarina. Na terceira questão, também apresentou dificuldades em realizar cálculos que envolvam a relação entre o número de ovos necessário para cada bolo, a dúzia e o seu valor.

Para além das dificuldades evidenciadas, surgiram outros obstáculos relacionados com o enunciado da tarefa. O facto de as imagens estarem a preto e branco deu origem a algumas dúvidas por parte dos alunos, nomeadamente na segunda questão, na qual existiam imagens do pacote de farinha, açúcar e margarina. Não eram muito percetíveis as diferenças entre as imagens, principalmente entre a farinha e o açúcar.

A recolha de tampas de garrafas

Esta tarefa (Anexo 5) foi proposta à turma em 8 de janeiro de 2013, ou seja cerca de um mês depois da intitulada *A receita do bolo rei*. A sua exploração e discussão ocupou cerca de 90 minutos.

Compreender o enunciado, esboçando um plano de ação

Esta tarefa apresentava a recolha de tampas de garrafas durante uma semana numa escola, o enunciado apenas fornecia o numero de tampas recolhido no primeiro dia, segunda-feira, e que a quantidades de tampas recolhidas num dia era sempre o dobro do dia anterior. Tendo por base a informação fornecida, a primeira questão pedia aos alunos que calculasse o número de tampas recolhido em cada dia da semana e realizassem a estimativa da quantidade total de tampas recolhidas durante essa semana
A aluna B leu o enunciado em voz alta e, como é visível no episódio 1, o aluno C sistematizou a informação fornecida (§1). O aluno A, de imediato, mobilizou a noção de dobro para calcular mentalmente o número de tampas recolhidas em cada dia da semana (§2). O aluno C chamou a atenção dos colegas para a realização da estimativa e para o

facto de esta ter de ser realizada antes dos cálculos (§4). A aluna B mobilizou a sua noção de estimativa (§5).

Episódio 1

1. Aluno C: Então já sabemos que na 2.ª feira ela recolheu 125 e depois aqui diz que é o dobro.
2. Aluno A: Já sei, é 250! O outro é 500. O outro é 1000. O outro é 2000.
3. Aluna B: Falta a resposta.
4. Aluno C: Temos de fazer a estimativa primeiro.

   (…)

5. Aluna B: Uma estimativa é um número perto de.
6. Aluno C: Eu primeiro dou 365. Aqui com estes dois. Com este não sei.

Na segunda questão, era pedido aos alunos que representassem, numa reta numérica, o número de tampas recolhidas em cada dia. Os alunos interpretaram o enunciado de forma correta, compreendendo que teriam de localizar a quantidade de tampas de garrafa recolhidas em cada dia da semana numa reta numérica.

Relativamente à terceira e última questão (episódio 2), os alunos tinham de calcular o número de dias necessário para se recolherem 15 000 e 120 000 tampas, supondo que se continuaria a recolher tampas da mesma forma que nos dias anteriores. O aluno A revelou, de início, alguma dificuldade na compreensão do enunciado (§1). Por outro lado, o aluno C constatou que precisaria de concretizar uma operação de envolvesse o número 15 000 para chegar ao resultado (§4).

Episódio 2

1. Aluno A: Não estou a perceber.
2. Aluno C: Calma, pá! Vamos achar o dobro de 500.
3. Aluno A: O dobro de 500?
4. Aluno C: O dobro de 15 000.

Concretizando e revendo um plano de ação

Como referi a propósito de episódio 1, os alunos começaram de imediato a realizar cálculos. Só depois se começaram a preocupar com a questão da estimativa embora o aluno A não sentisse necessidade de a fazer (episódio 3, §3).

Episódio 3

1. Aluna B: Uma estimativa é um número perto de.
2. Aluno C: Eu sei!
3. Aluno A: Estimativa? Pra quê?
4. Aluna B: Temos de fazer uma estimativa.

Como a aluna B disse que tinham de indicar um valor perto de (§1), o grupo decidiu indicar um valor aproximado do exato depois de conhecerem o valor exato. Esta situação mostra que os alunos não têm uma boa noção de estimativa.

Para além disso, os alunos fizeram cálculos usando o valor das suas "estimativas" para o número de tampas recolhido em cada um dos dias da semana usando o algoritmo da adição (figuras 10,11 e 12).

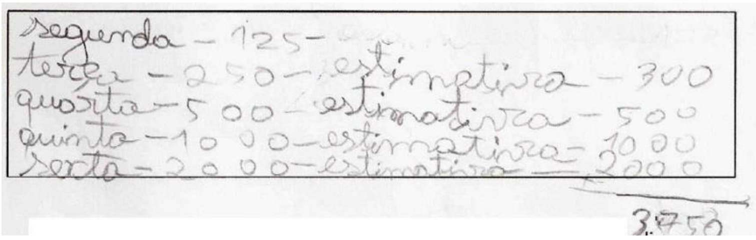


Figura 10 Registo escrito do aluno A a propósito da primeira questão da *Recolha de tampas de garrafas*

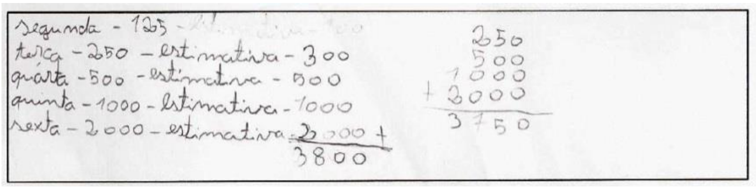


Figura 11 Registo escrito da aluna B a propósito da primeira questão da *Recolha de tampas de garrafas*

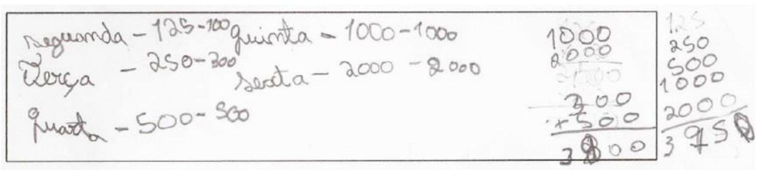


Figura 12 Registo escrito do aluno C a propósito da primeira questão da *Recolha de tampas de garrafas*

Se compararmos os registos dos alunos, podemos verificar que em qualquer um dos casos, não consideraram a segunda-feira, talvez porque o valor era fornecido pelo enunciado.

A aluna B foi quem mostrou conhecer o significado de estimativa — "é um número perto de" — , mas não conseguiu usar esta noção adequadamente no contexto do problema, tal como os colegas não o fizeram.

A segunda questão pedia para representar todos os números resultantes da recolha de tampas em cada dia na reta numérica. O episódio 4 mostra a forma como os alunos encararam a questão.

Episódio 4

1. Aluno C: primeiro é os que vêm primeiro.
2. Aluno A: Que é que estás a fazer?
3. Aluno C: Então não é para pôr?
4. Aluno A: Não estou a perceber.

O aluno C compreendeu de imediato que teria de localizar na reta numérica as quantidades pretendidas, de forma crescente (§1). O aluno A revelou alguma dificuldade em compreender o que se deveria fazer (§3) mas, posteriormente, nenhum dos alunos revelou dificuldades nesta tarefa e procederam de imediato ao desenho da reta e à localização dos números (figuras 13, 14 e 15).

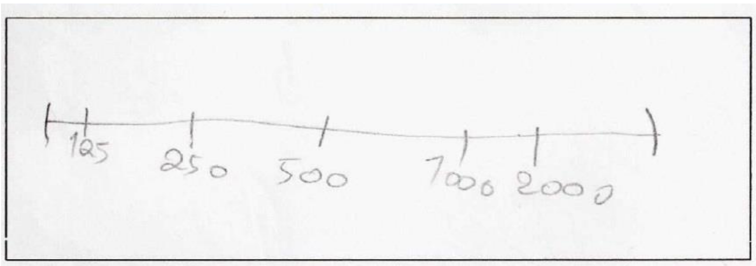


Figura 13 Registo escrito do aluno A a propósito da segunda questão da *Recolha de tampas de garrafas*

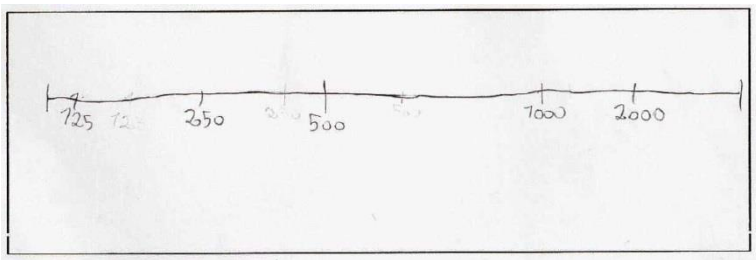


Figura 14 Registo escrito do aluno B a propósito da segunda questão da *Recolha de tampas de garrafas*

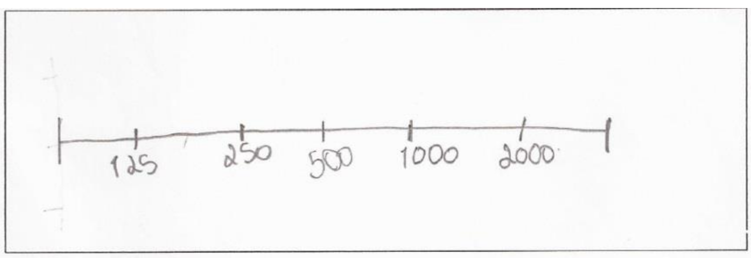


Figura 15 Registo escrito do aluno C a propósito da segunda questão da *Recolha de tampas de garrafas*

É um facto que os alunos localizaram as quantidades das tampas recolhidas em cada dia pela ordem correta, mas não tiveram em consideração a proporcionalidade entre os espaços e as quantidades.

Como no dia seguinte a quantidade de tampas era o dobro da do dia anterior, na terceira questão, o aluno C tomou a iniciativa de calcular o dobro de 15000 (§4), confundindo, aparentemente, os termos de dobro e metade (§8 e §10). O episódio 5 ilustra um diálogo que ocorreu entre os alunos.

Episódio 5

1. Aluno A: Não estou a perceber.
2. Aluno C: Calma, pá! Vamos achar o dobro de 500.
3. Aluno A: O dobro de 500?
4. Aluno C: O dobro de 15 000
5. Aluno A: Eu sei 7 e meio, quer dizer, 7 500
6. Aluno C: Então como é que sabes?
7. Aluno A: Porque 7,5 mais 7,5 é 15.
8. Aluno C: Temos de achar o dobro
9. Aluna B: O dobro de 7 500
10. Aluno C: Não é 500 ao meio?
11. Aluno A: É! Eu fiz a conta.

O episódio 5 mostra que o aluno A terá tido dificuldades na compreensão do enunciado (§1). Os alunos C (episódio 5 , §2, §4, §8) e A (episódio 6, §1) usaram com alguma frequência a palavra dobro para se referirem à metade. Para além disso, a estratégia de calcular metade de 15 000 não é adequada por várias razões, uma das quais é que pressupõe que houve um dia em que se recolheram 15 000 tampas, o que não corresponde à realidade.

No entanto, os alunos, principalmente o aluno A (episódio 6, §1), limitaram-se a calcular a metade de 15 000 e 120 000, como se pode constatar através do excerto abaixo transcrito, finalizando desta forma a resolução do problema.

Episódio 6

1. Aluno A: Aqui é 120 000. O dobro de 120 000 é 6. É 60 000, o dobro de 120 000. 6 mais 6 é 12.Está feito!
2. Aluno C: Já acabámos!
3. Aluno A: Qual é a resposta?
4. Aluna B: Se continuássemos a recolher da mesma forma tínhamos a metade.

O aluno A continua a fazer confusão entre os termos dobro e metade. Além disso, referia-se ao dobro de 120000, aparentemente pensando em metade desta quantidade (§1). Neste ponto, como constatei que a estratégia não era prometedora, intervim na resolução do grupo, questionando os alunos acerca das suas estratégias e resultados e clarificando a ideia transmitida pelo enunciado do problema, como é ilustrado no episódio 7.

Episódio 7

1. Estagiária: Porquê?
2. Aluno C: O A é que teve essa ideia.
3. Aluno A: Mas o C é que disse que era a metade.
4. Aluno C: Não fui não, foste tu! Disseste que tínhamos de achar a metade.
5. Estagiária: De onde é que vem este 7 500?
6. Aluno A: Foi ele. Ele perguntou qual era a metade de 15 000 e eu disse que era 7 500.
7. Estagiária: De acordo com o que vocês disseram, quantos dias levavam para juntar as 15 000 tampas?
8. Aluna B: Sei lá…
9. Aluno A: 10…

Perante o questionamento, o aluno C revelou-se sem argumentos, direcionando a sua atenção para outro elemento do grupo (§2, §4). Também a aluna B não sabia responder à questão colocada pelo problema (§8). Por seu lado, o aluno A considerou que em 10 dias conseguiriam juntar 20000 tampas (§9).

Devido às dificuldades dos alunos, decidi intervir, recordando-os da questão colocada pelo enunciado, como se pode constatar pelo episódio 8.

Episódio 8

1. Estagiária: Supondo que eles na semana seguinte continuavam a recolha, quantos dias seriam necessários para juntar as 15 000 tampas?
2. Aluno C: Só nos dias de escola?
3. Aluna B: Claro, não juntam ao sábado nem ao domingo.
4. Estagiária: Estamos a falar em dias de escola.

   (...)

5. Aluno C: Uma semana tem 5 dias ou tem 7?
6. Estagiária: A semana da escola.
7. Aluno C: Ah, a semana da escola tem 5, mas a semana toda tem 7.
8. Estagiária: Estamos a falar numa semana de aulas

9. Aluno C: 5 mais 5 10. Uma semana é 5 e duas semanas são 10

(…)

10. Aluno C: Depois as 3 semanas são 15. Já sei, eu primeiro vou fazer uma conta.

(…)

11. Estagiária: Nós sabemos que na sexta eles juntaram 2000 tampas, certo? Agora se eles continuassem quantas tampas iam juntar no dia seguinte?
12. Aluno C: Então segunda mais o dobro.
13. Aluno A: 4 000, depois 8000
14. Aluno C: 16 000
15. Estagiária: Onde é que está o 15 000?
16. Aluno A: Não há.
17. Estagiária: Não há? Em 16 000 não há 15 000?
18. Aluno C: Não.
19. Aluno A: Há.
20. Estagiária: Então quanto tempo levaram a juntar as 15 mil tampas?
21. Aluno A: 3 dias

O facto de o número de dias da semana ser diferente do número de dias em que se realizava a recolha das tampas originou algumas limitações para o aluno C (§2, §5). Por seu lado, a aluna B compreendeu que apenas interessavam os dias úteis (§3). O aluno C tentou fazer uma operação que envolvesse 15 000 e 15 dias, não compreendendo que o que se pretendia era saber em que dia se recolheu 15 000 tampas (§10). Perante isto, surgiu a necessidade de relembrar os alunos que tinham de ter em conta o número de tampas recolhidas na sexta-feira para saber quantas tampas foram recolhidas nos dias seguintes, pois o número de tampas era sempre o dobro do recolhido no dia anterior (§11). Os alunos procuravam o dia em que tinham sido recolhidas 15 000 em vez de calcular o número de dias necessários para alcançar esse número. Como em nenhum dos dias se obteve esse número exato de tampas, os alunos A e C revelaram constrangimentos em identificar o dia em que este número foi recolhido (§16) (§18). Após calcularem a quantidade recolhida em cada dia, os alunos contabilizaram os dias até se obter as 15000 tampas, tendo apenas em conta os dias da segunda semana da recolha (§21).

Para resolver esta questão, os alunos optaram por utilizar uma reta numérica para facilitar o registo das quantidades de tampas recolhidas em cada dia. Através dos registos dos alunos, pode-se constatar que o aluno C registou cada dia e a quantidade de tampas recolhidas nesse dia, como se pode observar na figura18.

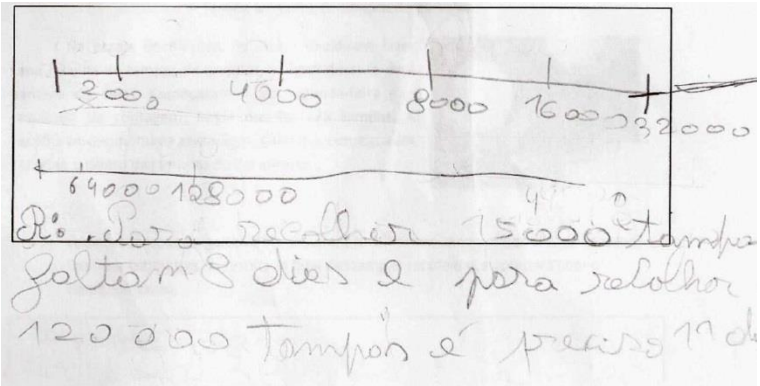


Figura 16 Registo escrito do aluno A a propósito da terceira questão da *Recolha de tampas de garrafas*

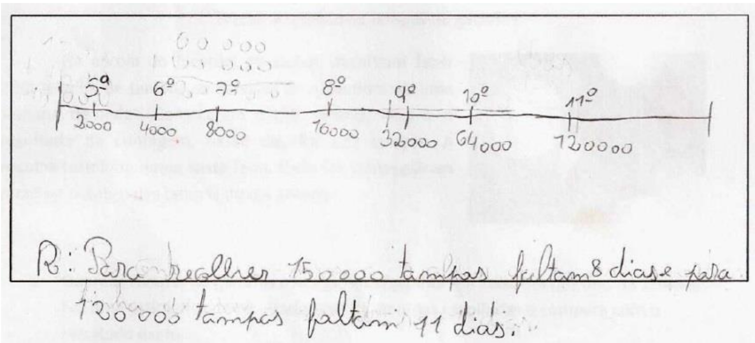


Figura 17 Registo escrito do aluno B a propósito da terceira questão da *Recolha de tampas de garrafas*

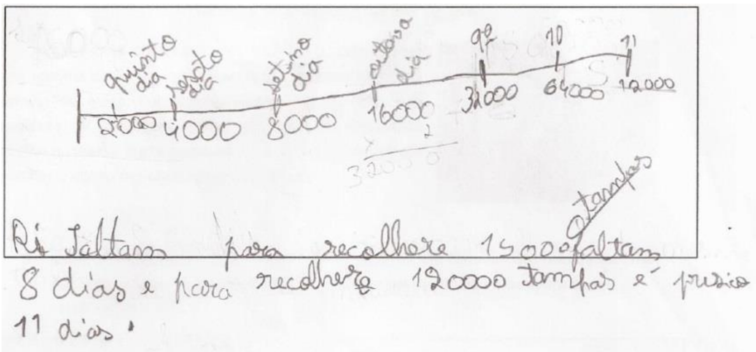


Figura 18 Registo escrito do aluno C a propósito da segunda questão da *Recolha de tampas de garrafas*

Como se pode constatar pela análise dos registos é comum a todos eles a representação, na reta numérica, do número de tampas recolhidas em cada dia até alcançar 120 000 tampas. B e C sentiram necessidade de registar também a ordem dos dias em que foi feita a recolha a partir do quinto dia até alcançar 120 000 tampas. Assim, pode-se constatar que os alunos não interpretaram de forma correta o que lhes era pedido no enunciado, pois este pedia o número de dias que se demorava a recolher

15 000 e 120 000 tampas e não aos dias em que estas quantidades foram recolhidas. No entanto, se se observar as respostas dos alunos à questão colocada pelo problema, constata-se que, aparentemente, os alunos sabiam que tinham de descobrir quantos dias eram precisos para recolher 15 000 e 120 000 tampas, mas não interpretaram que para isso teriam de adicionar as quantidades respeitantes aos vários dias de recolha até alcançar esses valores. Deste modo, seriam necessários não 8 e 11 dias, como os alunos determinaram, mas sim 7 e 14 dias para recolherem 15000 e 12 000 tampas, respetivamente.

Em síntese, os alunos não apresentaram uma boa noção de estimativa, exceto a aluna B que apesar de saber o que é uma estimativa, também não soube aplicá-la de forma correta. Os alunos calcularam mentalmente o dobro do número de tampas recolhidas tendo como ponto de partida 125 (número de tampas recolhidas no primeiro dia) e registaram-nas na reta numérica. Por último, recorreram novamente à reta numérica para saber quantos dias eram necessários para recolher 15 000 e 120 000 tampas, mas, ao tentar resolver o problema, os alunos procuraram descobrir em que dia estes valores foram conseguidos e não a totalidade de dias necessários para recolher estas quantidades de tampas.

Dificuldades

Nesta tarefa, os alunos tiveram alguns constrangimentos, relativamente à realização da estimativa e à interpretação da última questão. Os alunos A e C não têm a noção do que significa estimativa, a aluna B parece conhecer o significado desta noção, mas a análise dos registos revela que não o usou adequadamente. Com efeito, esta aluna em vez de estimar o total de tampas recolhidas limitou-se a indicar um número próximo do número de tampas recolhidas num dos dias (300 em vez de 250) mantendo os restantes e, em seguida, usa estes valores e o algoritmo da adição para determinar a sua "estimativa".

Relativamente à segunda questão, ao representar a reta numérica localizando aí os números pretendidos, nenhum dos alunos teve em atenção a proporcionalidade dos espaços entre os números apresentados na reta.

Na terceira questão, surgiu alguma confusão entre os termos dobro e metade, no entanto, apesar de A e C se referirem ao dobro, efetuaram cálculos para conhecer a metade. Apesar disso, esta estratégia não era adequada, uma vez que pressupunha que em algum dos dias se recolhesse a quantidade exata de 15 000 e 120 000 tampas. Os alunos tiveram limitações na compreensão do enunciado, pois não interpretaram que teriam de calcular sempre o dobro do número de tampas recolhidas no dia anterior e adicioná-los para saber quantos dias se levava a juntar 15 000 e 120 000 tampas. Também a duração da semana originou alguns conflitos entre os alunos.

Mediante as dificuldades do grupo, tive de intervir, relembrando-os da relação de dobro entre os dias de recolha. Neste seguimento, o aluno A considerou que seriam necessários mais 3 dias, ou seja, 8 dias para obterem 15 000 tampas. A aluna B constatou que para recolherem 120 000 tampas são necessários 11 dias. No entanto, estes resultados não estão corretos, pois os alunos tiveram em conta o dia em que estas quantidades de tampas foram recolhidas e não quantos dias eram necessários para totalizar esses valores.

A coleção de selos

A realização desta tarefa (Anexo 6) foi proposta à turma no dia 14 de janeiro de 2013, ou seja, na semana seguinte à resolução da tarefa Recolha de tampas de garrafas e na última semana da intervenção pedagógica. Foi explorada e discutida em aproximadamente 70 minutos.

Compreender o enunciado, esboçando um plano de ação

Nesta tarefa os alunos teriam de descobrir a quantidade de selos de uma coleção, para isso tinham de ter considerar um conjunto de dados fornecidos pelo enunciado. Após a leitura do enunciado pelo aluno A, os alunos constataram de imediato que o número de selos da coleção seria composto por quatro algarismos (episódio 1, §1, §2, §3).

Episódio 1

1. Aluna B: Vai ter…4
2. Aluno C: 4 algarismos
3. Aluno A: 4 espera…
   [os alunos releem o enunciado]
4. Aluno A: Quais é que são os números ímpares?
5. Vários: 1,3,5, 7, 9,
6. Aluno C: E acabou.

7. Aluno A: então tem de ser um desses números. Então este [referindo-se ao número 9] não pode ser o das unidades.
8. Aluna B: não, esse é o triplo das centenas.

No entanto, os alunos sentiram necessidade de reler o enunciado. O aluno A questionou os colegas relativamente aos números ímpares (episódio 1, §4). A aluna B chamou a atenção dos colegas para os dados do enunciado que remetem para o algarismo das unidades (§8). No entanto, confundiu-se um pouco e referiu que este número é o triplo do das centenas em vez de dizer que o número representado pelo algarismo das centenas é o triplo do das unidades.

Episódio 2

1. Aluno A: 1812 vezes 3 deu 5436
2. Estagiária: Então, como vai isso?
3. Aluno C: Estamos a tentar descobrir mas ainda não descobrimos.
4. Aluno C: 12000 agora falta o 1.
5. Aluno A: Qual é a metade de 3?
6. Aluno C: 3 vezes 1, 3, 3 vezes 4
7. Aluno A: 15. Eu já fiz, mas se fizesse vezes 3 não dava 12 000.

Os alunos A e C fizeram alguma confusão porque consideravam que o triplo do número de selos da coleção era 12000 (episódio 2, §1, §4, §7), em vez de o algarismo das centenas ser o triplo do algarismo das unidades e a soma dos algarismos que compõem o número de selos da coleção da Regina ser igual a 12.

Neste âmbito, surgiu a necessidade de intervir na tentativa de orientar os alunos na resolução do problema, recordando as informações fornecidas pelo enunciado e questionando-os (episódio 3).

Episódio 3

1. Estagiária: Então, vamos por partes. O que já sabemos? Quantos algarismos tem o número?
2. Aluno C: 4
3. Estagiária: Porquê?
4. Aluno A: Porque é entre 1000 e 2000.
5. Estagiária: Então se é entre 1000 e 2000, qual será o número dos milhares?
6. Aluno A: É 1.
7. Estagiária: Então já sabemos um algarismo.
8. Aluno C: O das centenas é o triplo do das unidades.

9. Estagiária: Boa e o algarismo das unidades é um número?
10. Alunos: ímpar.

Na minha intervenção, questionei os alunos sobre os algarismos que compõem o número de selos (§1). O aluno C constatou que seria composto por 4 algarismos (§2), porque, tal como A referiu, o número é maior que 1000 e menor que 2000 (§4). O aluno rapidamente associou que o algarismo dos milhares teria de ser 1 (§6). Como já conheciam o número dos milhares, o aluno C remeteu a atenção para o facto de o algarismo das centenas representar o triplo do algarismo das unidades (§8), que tinha de ser um número ímpar (§10).

Mais à frente, o aluno A começou a multiplicar o possível número de selos por 3 para verificar se o seu produto seria 12 000. Neste sentido, intervim para que o aluno me explicasse a sua estratégia. Este diálogo está representado no episódio 4.

Episódio 4

1. Estagiária: O que estás a fazer?
2. Aluno A: Uma conta de vezes, 3 vezes o número todo.
3. Estagiária: Porquê?
4. Aluno A: Para ver se dava 12000.

Mesmo sabendo que o algarismo dos milhares era 1, o aluno A continuou a insistir na ideia de que o triplo do número de selos teria de ser igual a 12 000 (episódio 4, §4).

Em suma, parece que as principais dificuldades dos alunos tiveram origem na interpretação do enunciado. Apesar de terem retirado os dados necessários para a resolução, os alunos revelaram dificuldades em usá-los adequadamente no processo de resolução de problemas.

Concretizando e revendo um plano de ação

Após a minha intervenção (episódio 5), os alunos compreenderam o que lhes era pedido e conseguiram retirar do enunciado a informação necessária à resolução do problema.

Episódio 5

1. Estagiária: Então tem quantos algarismos? Pensem lá.
2. Aluna B: Vai ter…4
3. Aluno C: 4 algarismos
4. Aluno A: 4 …

Como se pode verificar no episódio 5, a primeira informação que os alunos usaram foi a quantidade de algarismos que compõe o número de selos (§2, §3 e §4).

De seguida, os alunos focaram a sua atenção na descoberta do algarismo das unidades, sabendo que se trata de um número ímpar (episódio 6).

Episódio 6

1. Aluno A: Quais é que são os números ímpares?
2. Alunos: 1,3,5, 7, 9,
3. Aluno A: É o 1…. 21. Já descobrimos esta parte. Agora a outra do triplo. O triplo de 1.
4. Aluno C: Triplo de 1 é 3.
5. Aluno A: Então mas onde é que vais buscar o outro 1?
6. Aluno C: sim. Não podemos passar dos 2000.

Como se pode verificar no episódio 6, os alunos identificaram os números ímpares, de forma a encontrar o algarismo das unidades (§2), considerando apenas os algarismos ímpares até 10. Sabendo que o algarismo das centenas é o triplo do algarismo das unidades (§3) (§4), os alunos tentaram encontrar um algarismo que se adequasse às condições (§5).

Assim, os alunos começaram a fazer tentativas para encontrar o algarismo das unidades, tendo em conta que é ímpar e que o algarismo das centenas é o seu triplo, como se pode constatar pelo episódio 7.

Episódio 7

1. Aluno A: Professora, já fiz!
2. Estagiária: O 7 é o triplo de 3? [observando os registos do aluno]
3. Aluno A: Não.
4. Estagiária: Então com o 3 já sabes que não dá, tens de ver outro número ímpar.

   (…)

5. Aluno A: 5
6. Estagiária: 5 vezes 3?

7. Aluno A: 15. O 3!
8. Estagiária: Qual é o triplo de 3?
9. Aluno A: 9… Tinha de ser o 4.
10. Estagiária: Por que tinha de ser o 4?
11. Aluno A: Porque 3 vezes 4 é 12.

O aluno A tentava encontrar um algarismo que se adequasse às condições apresentadas pelo enunciado para algarismo das unidades. Assim, e sabendo a relação entre o algarismo das centenas e o das unidades (triplo), o aluno utilizou a estratégia por tentativas (§5, §7,§9). Contudo, o aluno acabou por referir que o número das unidades teria de ser 4 porque o seu triplo é 12 (§11), confundindo assim a informação fornecida pelo enunciado, que determinava que a soma dos quatro algarismos seria 12.

Perante esta confusão, tive de intervir, mais uma vez, questionando os alunos. O episódio 8 ilustra como é que os alunos chegaram ao número de selos da coleção.

Episódio 8

1. Estagiária: E quantos faltam para dar 12?
2. Alunos: 5
3. Estagiária: 5 mais 5 é 12?
4. Aluno C: São 10
5. Aluno A: 6 mais 6
6. Estagiária: Quanto é 12 menos 5?
7. Alunos: 7

Considerando que a soma dos quatro algarismos seria 12, que o algarismo das unidades é 1, o das centenas é 3 e o dos milhares é 1, os alunos tentaram descobrir, por tentativas, o algarismo das dezenas, sendo que seria a diferença entre a soma dos três algarismos conhecidos (1 + 3 +1) e 12 ou seja, 7 (§7).

Para verificar se o número encontrado era o correspondente ao número de selos da coleção, os alunos adicionaram os vários algarismos de forma a verificar se a soma dava 12, como se pode constatar pelas figuras (19, 20 e 21).

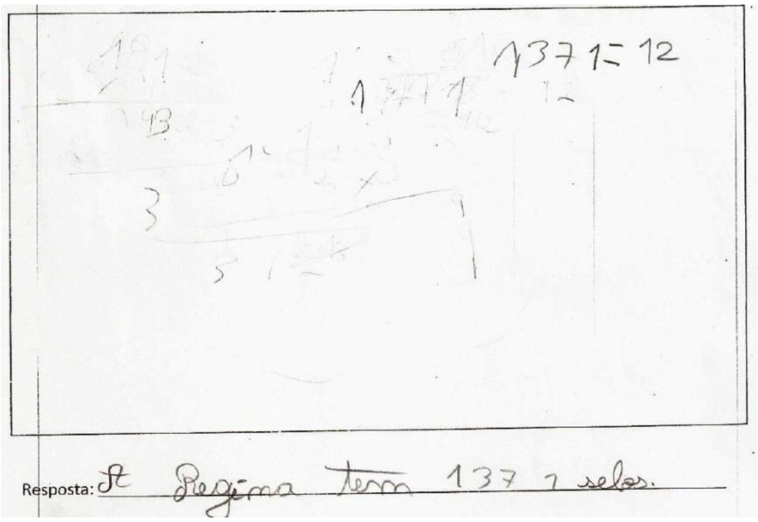


Figura 19 Registo escrito do aluno A relativamente à tarefa *Coleção de selos*

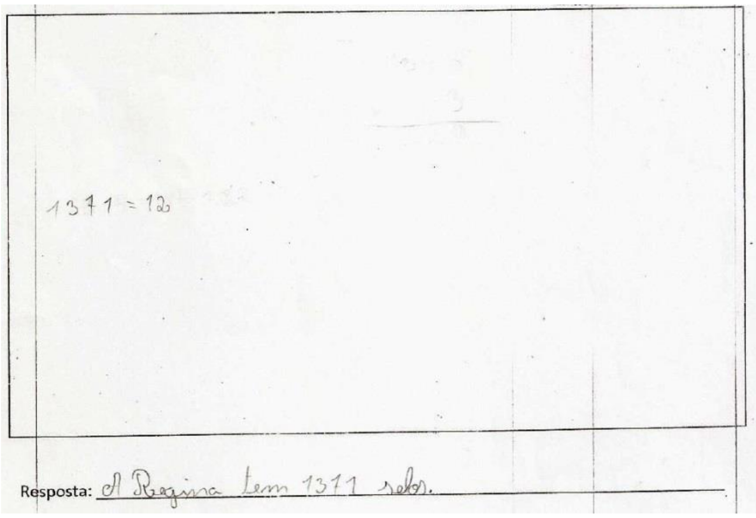


Figura 20 Registo escrito da aluna B relativamente à tarefa *Coleção de selos*

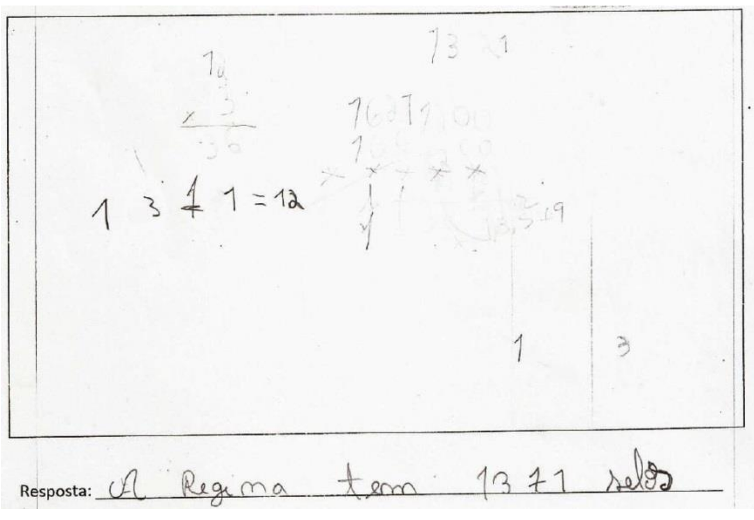


Figura 21 Registo escrito do aluno C relativamente à tarefa *Coleção de selos*

Apesar de os alunos terem apagado os registos dos cálculos efetuados durante o processo de resolução, pode-se perceber, pelo menos no caso dos alunos A e C, que recorreram, aparentemente, ao algoritmo da multiplicação para calcular o triplo de alguns números ou mesmo do número de selos da coleção.

Em suma, os alunos mobilizaram os conhecimentos relativos aos números ímpares e aos múltiplos de 3 para a resolução do problema.

Dificuldades

A única pista para o algarismo das dezenas era saber que a soma dos números representados pelos algarismos tinha de ser 12. Com efeito, o algarismo das dezenas seria o último a ser descoberto pelos alunos. No entanto, o aluno C não constatou esse facto e antes de conhecer os outros algarismos, sugeriu o algarismo 4 como algarismo das dezenas (episódio 7, §1, §3).

Episódio 7

1. Aluno C: Aqui pode ser 4.
2. Estagiária: Olha esse deixamos para o fim, sabes porquê?
3. Aluno C: Não.
4. Estagiária: Porque é o único que não temos nenhuma pista.

O aluno A também se confrontou com dificuldades considerando que o triplo do algarismo das unidades teria de ser 12 (episódio 8, §3, §5). Alertei-o para o facto de 12 se referir à soma dos quatro algarismos.

Episódio 8

1. Aluno A: 15. O 3!
2. Estagiária: Qual é o triplo de 3?
3. Aluno A: 9… Tinha de ser o 4.
4. Estagiária: Porque tinha de ser o 4?
5. Aluno A: Porque 3 vezes 4 é 12.

Apesar do enunciado fornecer os dados, os alunos A e C demonstraram alguns constrangimentos relativos à interpretação da informação fornecida, confundindo-a.

Relativamente ao papel que os alunos desempenharam durante o processo de resolução, em grupo, de problemas, pode-se constatar que em todos existiu interação entre os elementos do grupo. No entanto, cada elemento interagiu da sua forma, contribuindo com uma ideia.

O aluno C apresenta, por vezes, uma atitude individualista, no sentido de que nas suas interações verbais se expressa na primeira pessoa do singular. No entanto, questiona os colegas com alguma frequência, evidenciando uma certa dependência.

O aluno A lidera, amiúde, o processo de resolução do problema. Ao interagirem com ele, os alunos B e C abandonam o seu raciocínio, não conseguindo argumentar perante o colega ou a professora.

A aluna B não interagiu muito, o que se pode associar à insegurança e timidez da aluna. O facto de estar entre dois alunos participativos, pode ter inibido a sua interação verbal.

De uma forma geral, os alunos focaram as suas interações na partilha de ideias e estratégias que contribuíssem para a resolução do problema. Quando um dos intervenientes expunha uma ideia, os restantes manifestavam a sua opinião. Não existiu a delineação de um plano em grupo, mas cada elemento contribuiu de forma individual para o trabalho de grupo.

Resolvendo tarefas individualmente: Da "Receita das bolachas" à "Promoção de lápis"

As resoluções das tarefas analisadas anteriormente em detalhe, inseriram-se numa intervenção pedagógica em que os alunos resolveram várias outras tarefas. Uma questão que pode colocar-se é se a sua participação nesta experiência os tornou mais capazes de resolver problemas matemáticos. Uma via possível para analisar esta questão é confrontar o modo como cada um dos alunos selecionados para o estudo resolveu um problema que lhes propus antes de se iniciar a intervenção pedagógica com o usado após o final desta intervenção. Para o efeito, analiso, em seguida, a atividade matemática destes alunos durante entrevistas individuais realizadas a propósito das tarefas *Receita das bolachas* (Anexo 1) e *A promoção de lápis* (Anexo 8) apresentadas, respetivamente, antes e após a intervenção. Esta análise está organizada por aluno, ou seja, em primeiro lugar analiso a atividade desenvolvida pelo aluno A nas duas tarefas, a que se segue a da aluna B e, por último, do aluno C. Além disso, estruturei a análise da atividade de cada um dos alunos em torno de três dimensões: (a) compreender o enunciado, esboçando um plano de ação; (b) concretizando e revendo um plano de ação; (c) dificuldades. Em cada uma das dimensões, analiso os dados respeitantes, em primeiro lugar à tarefa *A receita das bolachas* e, em segundo lugar, à tarefa *Promoção de lápis.*

Aluno A

O aluno A é um aluno do género masculino, que frequenta pela primeira vez o 4.º ano de escolaridade. De acordo com o professor cooperante, tem um bom desempenho escolar, principalmente na área da Matemática, destacando-se o seu rápido raciocínio. É um aluno empenhado, interessado, mas com um ritmo lento de trabalho.

Compreender o enunciado, esboçando um plano de ação

A receita das bolachas

O aluno A leu atentamente a tarefa e compreendeu-a. O episódio 1A ilustra que identificou os dados e as condições apresentadas no enunciado, reconhecendo o objetivo da tarefa (§2). No caso dos ovos, constatou que teria de calcular o valor da quantidade necessária para a receita (§3), o mesmo acontecendo com os restantes ingredientes.

Episódio 1 A[10]

1. Estagiária: Já leste? E então, já sabes o que tens de fazer?
2. Aluno A: Sim, tenho de procurar os ingredientes que ela precisa. Qual o custo total de bolachas da Teresa, tem em atenção o preço dos produtos e as quantidades necessárias para a receita [lendo o enunciado].

(…)

3. Aluno A: Só precisa de 2 e a caixa tem 6 ovos…

Na segunda questão (episódio 2), inicialmente o aluno considerou que para fazer a mesma receita para 16 pessoas, a Teresa precisaria de multiplicar 250g pelo número

[10] Para identificar os episódios apresentados utilizei, para cada aluno, uma numeração sequencial a que justapus a letra correspondente a esse aluno. Assim, 1 A designa o primeiro episódio apresentado relativo ao aluno A.

de pessoas (§2). Interpelei-o sobre o número de pessoas para quem estava calculada a receita (§3) e, como a sua resposta foi incorreta, pedi-lhe para reler o enunciado (§5). Constatou que era para 8 pessoas (§6), o que parece não ter sido suficiente para esboçar um plano de ação adequado (§8). Só depois de eu ter estabelecido um paralelismo com o do dia a dia (§11) o de ter interpelado, de novo, sobre o número de pessoas para quem estava calculada a receita (§13) é que constatou que ,para fazer a mesma receita para 16 pessoas, a Teresa precisaria do dobro dos ingredientes (§16).

Episódio 2 A

1. Estagiária: E agora o que é pedido a seguir?
2. Aluno A: Se ela quiser fazer a mesma receita, temos de fazer 250x16
3. Estagiária: A receita é para quantas pessoas?
4. Aluno A: 16!
5. Estagiária: 16? Lê lá outa vez.
6. Aluno A: É para 8 pessoas.
7. Estagiária: Então o que se pergunta? Que quantidade…
8. Aluno A: De cada ingrediente vai precisar. Temos de fazer 250 vezes 16.
9. Estagiária: Achas? Então esta receita é para quantas pessoas?
10. Aluno A: Esta é para uma e esta é para…
11. Estagiária: Olha quando a mãe faz um bolo lá em casa faz um bolo só para uma pessoa?
12. Aluno A: Ah! Já percebi!
13. Estagiária: Esta receita é para quantas pessoas?
14. Aluno A: 8
15. Estagiária: Exato! Mas ela quer saber a quantidade…
16. Aluno A: É o dobro!

Promoção de lápis

Tal como aconteceu na tarefa *A Receita das bolachas,* o aluno leu com atenção o enunciado e identificou os dados fornecidos e o objetivo da tarefa. Aparentemente não teve dúvidas em a compreender, tanto mais que, imediato, afirmou que a maior quantidade de lápis que conseguiria comprar com 5 euros seria da marca B (episódio 3 A, §1).

Episódio 3 A

1. Aluno A: A maior quantidade de lápis que eu consigo comprar com 5 euros é a marca B.
2. Estagiária: É? Porquê?

3. Aluno A: Porque 12 lápis custa 2,50€ e 2,50 mais 2,50 dá 5 euros.
4. Estagiária: Então com 5 euros consegues comprar quantos lápis da marca B?
5. Aluno A: 24

Face à prontidão da sua resposta, pedi ao aluno que a justificasse (episódio 6, §2). Para o efeito recorreu ao cálculo mental duplicando o número de lápis e respetivos preços e concluindo que se poderiam comprar 24 lápis da marca B. Posteriormente, questionei-o relativamente às outras marcas. As várias estratégias que usou foram variadas como se apresenta na secção seguinte.

Concretizando e revendo um plano de ação

A receita das bolachas

Na resolução da tarefa, o aluno A começou por identificar corretamente que eram necessários dois ovos para fazer a receita e, aparentemente através de estratégias de cálculo mental, calculou corretamente o preço de cada ovo (episódio 4A, §1, §3). Pode colocar-se a hipótese de ter recorrido a estratégias de cálculo mental ou à mobilização de factos conhecidos. Com efeito, não conseguiu explicar o seu raciocínio (§5).

Episódio 4 A

1. Aluno A: Só precisa de 2 e a caixa tem 6 ovos…
2. Estagiária: Então o que será que temos de fazer?
3. Aluno A: Por cada ovo tiramos 0,20€.
4. Estagiária: Como é que sabes que por cada ovo tens de tirar 0,20€?
5. Aluno A: Saiu-me pela cabeça! Nos testes também faço assim…

No entanto, teve algumas dificuldades em descobrir o custo da quantidade necessária de farinha e de açúcar para fazer a receita. No caso do açúcar, sabia que 250g cabiam quatro vezes no quilo (episódio 5A,§1), mas não como relacionar esse conhecimento com o preço do quilo. Tentava usar um procedimento idêntico ao que utilizara para os ovos, generalizando-o (episódio 5 A, §4). Fazia tentativas para encontrar o resultado baseando-se no que tinha feito para os ovos (§2,10, §12). Realizou quatro subtrações sucessivas de 0,10€ ao valor do kg de açúcar, o que me leva a pensar que o aluno sabia que a resposta envolvia as quatro vezes que a quantidade necessária

(250g) cabia num kg e o preço do kg (§14). Ao chegar ao valor 0,80€ (§14), o aluno considerou que este seria o preço de 250 gramas e só depois de o questionar sobre se este valor cabia 4 vezes em 1,20€, é que concluiu verificou que não e que, por isso, 0,80€ não era o valor que procurávamos (§18).

Episódio 5 A

1. Estagiária [relatando a resposta do aluno]: Então estás-me a dizer que 250g cabem 4 vezes no pacote de açúcar. Então o pacote de açúcar tem 1 kg, se cabe lá 4 vezes, o que podemos fazer a este valor?
2. Aluno A: Menos 0,20€…
3. Estagiária: Menos 0,20? Porquê?
4. Aluno A: Porque foi o que fiz com os ovos.
5. Estagiária: E a quantidade será igual?
6. Aluno A: Não…
7. Estagiária: Pois, não. Porque trazia 6 ovos e aqui? Quantas vezes cabem as 250g?
8. Aluno A: 4
9. Estagiária: 4, exatamente.
10. Aluno A: Então tiramos 0,10€!
11. Estagiária: Porquê?
12. Aluno A: Porque aqui eram 0,20 porque eram 6 ovos, aqui como é só 4 se tirarmos 0,05+0,05 vai dar 0,10. Se tirarmos 0,10€ dá…
13. Estagiária: experimenta lá. Podes fazer no verso da folha, se quiseres.
14. Aluno A [registando na folha]: 1,20-0,10=1,10
    1,10-0,10= 1€
    1-0,10=0,90€
    0,90-0,10=0,80€…
    Já está!
15. Estagiária: então esse 0,80€ corresponde a quê?
16. Aluno A: a 250g?
17. Estagiária: se 250g cabe 4 vezes num kg, será que este valor [referindo-me a 0,80€] vezes 4 dá 1,20€?
18. Aluno A: Quantas vezes? 4x80=320… 3€… não dá!

O aluno mostrou dificuldades em compreender que se 250g é a quarta parte de 1 kg, então teria de calcular a quarta parte de 1,20€ para saber o custo das 250g de açúcar. Sabia que o preço de 250 g era inferior ao preço de 1 Kg (episódio 6 A, §2); sabia, também, que 250g cabem quatro vezes num quilograma, mas não consegui relacionar este conhecimento com os cálculos a efetuar para determinar o preço da quantidade pretendida (§14, §6, §8). Só respondeu corretamente (§12) depois de algumas intervenções da minha parte, através das quais, tentei compreender o raciocínio do aluno (§5, §9), sistematizar o que tinha dito e recordar informação fornecida pelo enunciado (§11).

Episódio 6A

1. Estagiária: Se é 4 vezes o que temos de fazer ao 1,20€? Nós sabemos que 1kg de açúcar dava para 4, mas nós só precisamos de 250g. Achas que a Teresa vai gastar mais ou menos que 1,20€?
2. Aluno A: Menos!
3. Estagiária: E quanto?
4. Aluno A: Menos 0,40€…
5. Estagiária: Menos 0,40€?
6. Aluno A: Menos 0,40 € apenas uma vez…
7. Estagiária: Olha 250g cabe aqui 4 vezes. Se cabe 4 vezes…
8. Aluno A: Temos de tirar 4 cêntimos…
9. Estagiária: Porquê 4 cêntimos?
10. Aluno A: Porque 250g mais 3 vezes 250g dá 1kg!
11. Estagiária: Então se tu dizes que 250g mais três vezes 250g dá 1 kg, o que temos de fazer ao 1,20€? 1 kg de açúcar é 1,20€.
12. Aluno A : Dividi-lo em 4 vezes.

Para calcular o preço da quarta parte de um pacote de açúcar, o aluno efetuou uma divisão em que usou o preço do kg em cêntimos, como se pode observar na figura 21.

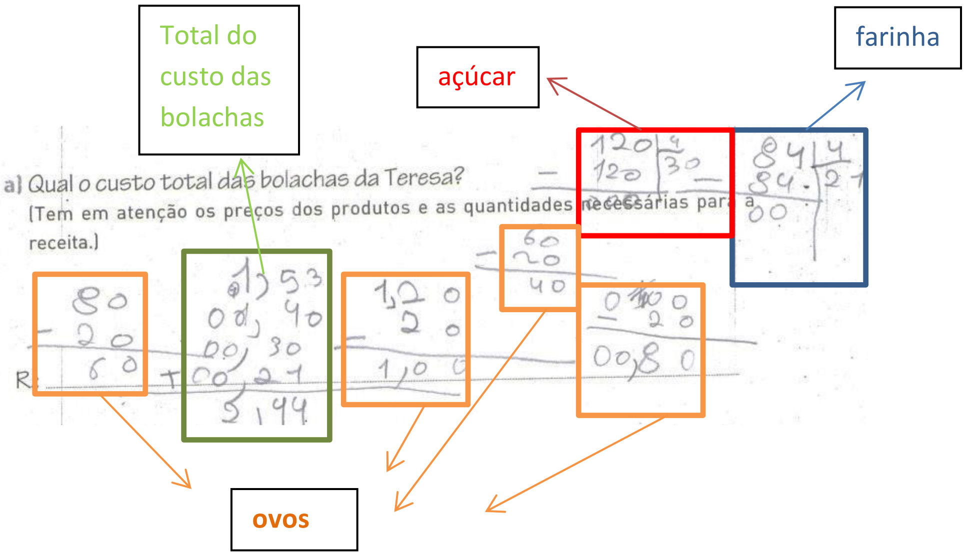


Figura 21 Registo escrito do aluno A relativamente à primeira questão da *Receita das bolachas*[11]

A figura 21 permite visualizar os vários cálculos efetuados pelo aluno na resolução do problema e ilustra que, nalguns casos, evitou o uso de números decimais não inteiros. Realizou subtrações sucessivas, no caso dos ovos, usou o algoritmo da divisão, no caso da farinha e do açúcar e, posteriormente, recorreu a uma adição para saber o custo total das bolachas. Na segunda questão, o aluno mobilizou a noção de dobro.

Promoção de lápis

Como referi anteriormente, o aluno indicou muito rapidamente que com 5 euros o número máximo de lápis que poderia comprar era da marca B. Quando o questionei sobre o número de lápis que poderia comprar da marca A com 5 euros, respondeu correta e prontamente (episódio 7A, §2). A justificação apresentada mostra que calculou mentalmente utilizando uma estratégia aditiva (§4).

Episódio 7A

1.Estagiária: Então e se fosse a marca A? Compravas quantos com 5 euros?
2.Aluno A: 20
3.Estagiária: Porque achas que eram 20?

[11] Para tornar os registos de mais simples interpretação, editei-os usando corres para assinalar os cálculos relacionados com o preço dos vários ingredientes. Com as devidas adaptações usei o mesmo procedimento nos restantes registos apresentados.

4.Aluno A: Porque se 5 lápis custam 1,50, 1,50 mais 1,50 são 3 euros mais 1,50 são 4,50. E depois mais 1,50 era 6, mas já não dava.

Quanto às marcas C, D e E, sentiu necessidade de fazer registos escritos na folha da tarefa (figura 25).

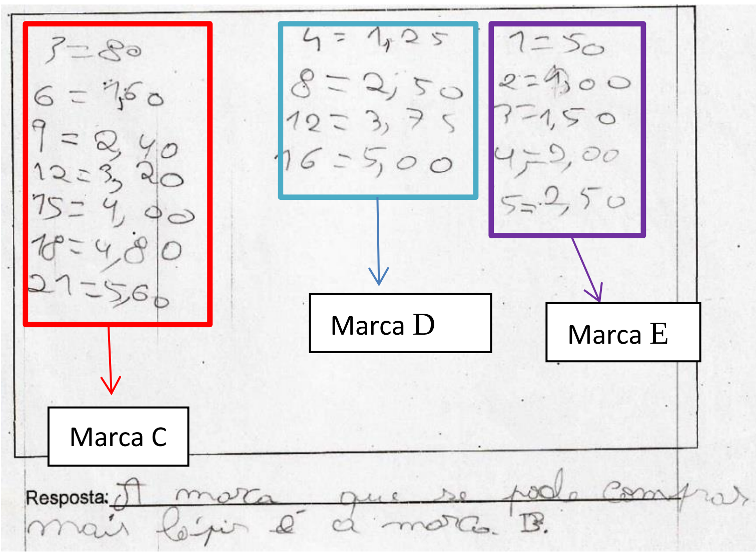


Figura 25 Registo escrito do aluno A à tarefa Promoção de lápis

Na figura 25, podemos observar os procedimentos escritos que o aluno utilizou para resolver o problema. Nesta figura, bem como no episódio 8A, constata-se que associou a quantidade de lápis ao respetivo preço, de forma a obter os múltiplos do número de lápis de cada embalagem que relacionou com o preço correspondente, mobilizando, assim, o raciocínio proporcional.

Episódio 8A

1. Aluno A [referindo-se à marca C]: Cada lápis é 40 cêntimos, mas na compra de dois oferecem outro.
2. Estagiária: Se 1 é 40 cêntimos, quanto é que custam 3?
3. Aluno A: 2 custam 80
4. Estagiária: Então e 3 lápis ficam por quanto?
5. Aluno A: 80 cêntimos
6. Estagiária: Então desta marca quantos lápis conseguíamos comprar com 5 euros?
7. Aluno A: 5 euros, aqui?
8. Estagiária: Sim.
9. Aluno A [hesita]: Então…
10. Estagiária: 3 lápis são 80 cêntimos, e se fossem 6 lápis?

11. Aluno A: 160
12. Estagiária: E 9?
13. Aluno A: 24 2,40€
14. Estagiária: E 12?
15. Aluno A: 32
16. Estagiária: 15?
17. Aluno A: 4 €
18. Estagiária: E 18?
19. Aluno A: 48
20. Estagiária: E 21?
21. Aluno A: Já não dá, era 5,60€.
22. Estagiária: Então qual o total de lápis desta marca que se poderia comprar com 5 €?
23. Aluno A: 18
24. Estagiária: E na marca D uma embalagem de 4 lápis custa 1,25€, então com 5 euros conseguimos comprar quantos lápis?
25. Aluno A: 2,50…16
26. Estagiária: Então e na marca E um lápis custa 50 cêntimos
27. Aluno: 1 euro dá 2 lápis
28. Estagiária: Isto faz-te lembrar alguma coisa?
29. Aluno: Dá para comprar 10
30. Estagiária: Explica-me
31. Aluno: Se 5 lápis é 2,50 mais outros 5 dá mais 2,50 se juntássemos dava 10 lápis e pagava 5 euros

Após efetuar cálculos para cada marca de lápis, o aluno concluiu que a sua resposta inicial estava correta. Com efeito, a marca mais económica é a B.

Dificuldades

A receita das bolachas

As principais dificuldades do aluno A na resolução deste problema foram o estabelecimento de relações entre algumas grandezas em jogo. Por exemplo, sabendo que 250g é a quarta parte de 1 kg, o aluno não conseguiu, sem ajuda, concluir que o preço a pagar por esta quantidade (250g) também teria que ser a quarta parte do custo do quilograma.

O aluno também revelou dificuldade na interpretação do enunciado, nomeadamente no facto de a receita se destinar a 8 pessoas, ou seja teria de estabelecer a relação entre 8 e 16 para depois aplicá-la nas quantidades de cada ingrediente necessárias para a confeção das bolachas. Para ajudar o aluno a superar este desafio, estabeleci uma relação entre a questão-problema e o nosso quotidiano.

Promoção de lápis

Aparentemente, o aluno A não se confrontou com nenhuma dificuldade ao longo da resolução do problema.

Em suma, o aluno A leu e compreendeu os enunciados de ambas as tarefas, à exceção da alínea b da tarefa *Receita das Bolachas*. *Na Receita das Bolachas,* o aluno demonstrou conhecimentos relativos ao dobro, raciocínio proporcional, algoritmo da divisão, adição e subtração sucessivas. Na Promoção de lápis, o aluno recorreu à estratégia aditiva, a estratégias de cálculo mental e ao raciocínio proporcional. Na última tarefa realizada individualmente o aluno não apresentou dificuldades.

Aluna B

A aluna B é uma aluna do género feminino, que frequenta pela primeira vez o 4.º ano de escolaridade. De acordo com o professor cooperante, é cumpridora e bem comportada, mas apresenta algumas dificuldades, principalmente na área da Matemática. Durante a intervenção pedagógica, revelou-se tímida e um pouco insegura.

Compreender o enunciado, esboçando um plano de ação

A receita das bolachas

A aluna B leu e compreendeu o problema, conseguindo identificar os dados necessários para a resolução e perceber o que lhe era pedido. Concretamente, compreendeu que era necessário saber o preço da quantidade de cada um dos ingredientes necessária para a receita: "Temos de fazer isto mas conforme as gramas que cada um tem de ter"(Aluna B).

Promoção de lápis

Após realizar a leitura do enunciado em voz alta, a aluna revelou alguma dificuldade na interpretação da informação fornecida. Com efeito, não apreendeu que os lápis comprados teriam de ser todos da mesma marca e que algumas marcas os vendem em embalagens, e não individualmente, como se evidencia no episódio 1 B (§2, §4).

Episódio 1B

1. "Estagiária: Como achas que podemos fazer? Temos várias marcas…
2. Aluna B: Podemos comprar 5 lápis da marca A e da marca B."
3. Estagiária: Os lápis têm de ser todos da mesma marca. Olha quantos lápis podemos comprar da marca A?
4. Aluna B: Podíamos comprar 4 lápis…"

Concretizando e revendo um plano de ação

A receita das bolachas

Na primeira questão, a aluna B recorreu à estratégia de decompor o problema em subproblemas. Começou por transformar 1 kg no número de gramas correspondente, aspeto em que foi bem sucedida (episódio 2b, §1).. Para identificar a relação entre 250g e 1 kg, recorreu a adições sucessivas de 250, no sentido de acrescentar, até chegar a 1000 (§2, §4,§6):

Episódio 2 B

1. Estagiária: Muito bem. Um quilo são mil gramas [repetindo uma ideia apresentada pela aluna]. Então se um quilo são mil gramas quantas vezes cabem 250g num quilo?
2. Aluna B: Fazemos 250 mais 250 mais 250…
3. Estagiária: Até chegar onde?
4. Aluna B: Até 1000
5. Estagiária: Já chegamos onde nós queríamos, que era mil não era? Então agora vê lá quantas vezes cabem 250 em 1000.
6. Aluna B: 4

O episódio 3B mostra que a aluna começou por ter algumas dificuldades em relacionar o custo de 1kg de farinha com o de 250g (§2). No entanto, conseguiu ultrapassá-las quando a questionei no sentido de a levar a recordar quantas vezes cabem 250g num quilo (§3) e de focar a sua atenção na relação entre 1kg e 250gr bem como na relação entre os respetivos preços (§5).

Episódio 3B

1. Estagiária: Sabemos que um quilo, que são mil gramas, custa 0,84€. Sabemos que ela só precisa de 250g de farinha, o que é que nós temos de fazer?
2. Aluna B: Temos de fazer 84 menos 250… não! Temos de fazer…
3. Estagiária: O que é que nós acabámos de ver?
4. Aluna B: Que 250g cabe quatro vezes num quilo.
5. Estagiária: Com 84 cêntimos conseguimos comprar quantas 250g?
6. Aluna B: 4
7. Estagiária: Então como podemos saber quanto custam as 250g?
8. Aluna B: Fazemos 84 vezes…Não, fazemos 84 a dividir por 4
9. Estagiária: Porquê por 4?
10. Aluna B: Se 250g cabe 4 vezes num quilo, temos de repartir 84 por 4

Também não foi simples, para a aluna, determinar, de imediato, o custo da quantidade de ovos necessária para a receita (episódio 4B, §4, §6).

Episódio 4 B

1. Estagiária: Então e os ovos?
2. Aluna B: Custam 1,20€, mas ela só precisa de 2 ovos.
3. Estagiária: Ela só precisa de 2 e a caixa traz 6 ovos. Como fazemos?
4. Aluna B: Fazemos 120 a dividir por 2.
5. Estagiária: Olha em 6 quantas vezes há 2?
6. Aluna B: 3 vezes
7. Estagiária: Então o que temos de fazer para saber o custo de 2 ovos?
8. Aluna B: 1,20€ a dividir por 3.

Como revela o episódio 4, só depois de perguntar à aluna questionar a aluna “em 6 quantas vezes há 2?” (§5) é que concluiu que para determinar o preço de dois ovos teria que dividir o preço de seis por 3 (§8).

A figura 22 permite observar os cálculos efetuados pela aluna B ao longo da resolução primeira questão da tarefa. Como se pode constatar, recorreu ao algoritmo da divisão para calcular o preço dos ovos, da farinha e do açúcar, a adições sucessivas para determinar a relação entre gr e kg ao algoritmo da adição para calcular o custo total das bolachas. Nalguns casos, evitou os números decimais não inteiros mas esta opção não a impediu de calcular corretamente o que se pedia..

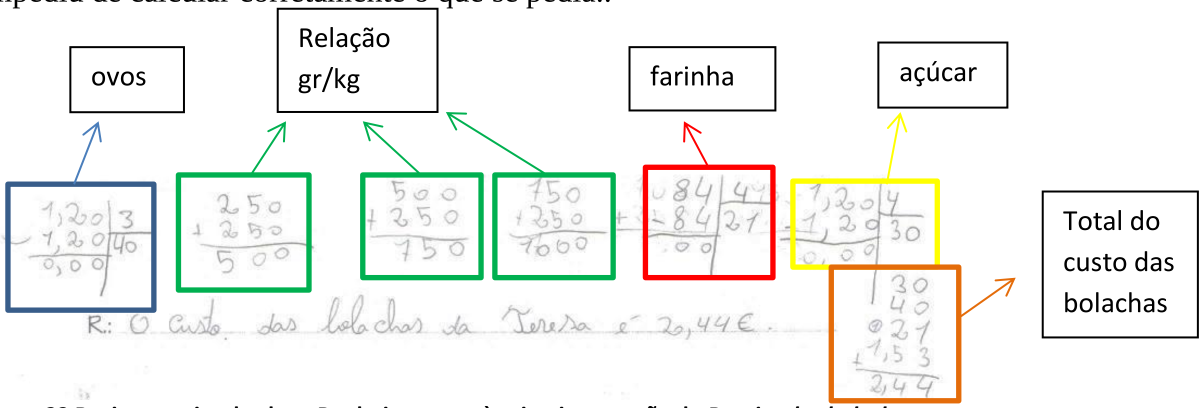


Figura 22 Registo escrito da aluna B relativamente à primeira questão da *Receita das bolachas*

Quanto à segunda questão, a aluna, de início, revelou alguma dificuldade em relacionar o custo da receita para 8 pessoas com o custo para 16 pessoas (episódio 5B , §2). No entanto, o facto de lhe ter pedido para justificar o raciocínio (§3), parece tê-la levado a refletir sobre a situação (§4). Além disso, a questão que lhe coloquei focada na relação entre 16 e 8, parece ter-lhe permitido identificar a relação de dobro que mobilizou, posteriormente, sem hesitações.

Episódio 5B

1. Estagiária: E se quiséssemos saber o custo da receita para 16 pessoas?
2. Aluna B: Temos de fazer 2,44 até chegar a 16…
3. Estagiária: Porquê?
4. Aluna B: Porque… temos de fazer 2,44 até chegar a 500g. Não, assim ia dar mal.
5. Estagiária: O 16 é o quê ao 8?
6. Aluna B: É o dobro

A figura 23 ilustra a forma como a aluna resolveu esta questão. Este registo revela que não precisou de efetuar cálculos escritos para determinar o dobro da quantidade de cada ingrediente.

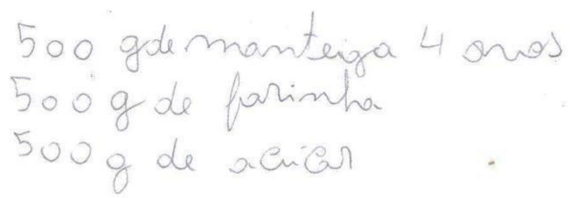


Figura 23 Registo escrito da aluna B relativamente à segunda questão da *Receita das bolachas*

Promoção de lápis

Depois de ter compreendido que os lápis da marca A só poderiam ser vendidos em embalagens de 5 lápis (episódio 6B, §2), a aluna, para saber quantas embalagens conseguia comprar com 5 €, realizou oralmente adições sucessivas do valor monetário de cada embalagem até chegar o mais próximo possível de 5€ (§6, §8, §10). Posto isto, indicou a quantidade de lápis da marca A que conseguiria comprar com os 5€ (§12,§14). Em primeiro lugar, a aluna indicou que só conseguiria comprar uma embalagem de lápis da marca B, mas quando questionada, constatou que poderia comprar duas embalagens, ou seja, 24 lápis (§16, §18, §20).

Episódio 6B

1. Estagiária: Quantos lápis tem cada embalagem da marca A?
2. Aluna B: 5 lápis.
3. Estagiária: Quanto custa cada embalagem?
4. Aluna B: 1,50€
5. Estagiária: e se forem 2 embalagens?
6. Aluna B: Gasta…2 €…3€! Se forem 3 são 4,50€.
7. Estagiária: conseguimos comprar 4 embalagens com os 5 €?
8. Aluna B: 4 embalagens é 4,50€.
9. Estagiária: Mas tu disseste que 3 embalagens eram 4,50€. Se 3 embalagens são 4,50€, quanto custarão 4 embalagens?
10. Aluna B: 6 €.
11. Estagiária: Quantas embalagens conseguimos comprar desta marca com 5€?
12. Aluna B: Conseguimos comprar 3.
13. Estagiária: Muito bem! As 3 embalagens trazem quantos lápis?
14. Aluna B: 15
15. Estagiária: E na marca B? Uma embalagem traz 12 lápis e custa 2,50€. Quantos lápis conseguimos comprar com 5 €?
16. Aluna B: Conseguimos comprar uma embalagem.
17. Estagiária: Conseguimos comprar mais que uma? Com 5 € quantas embalagens conseguimos comprar?
18. Aluna B: 2
19. Estagiária: As duas embalagens trazem quantos lápis?

Aluna B: 24

Como procurarei ilustrar na secção *Dificuldades*, o cálculo do número de lápis da marca C que se poderiam comprar com 5 euros foi a situação em que a aluna apresentou maiores dificuldades. Depois de ultrapassadas, foi registando a quantidade de 3 em 3 e a cada uma associou o respetivo valor monetário (figura 26). Quando alcançou a quantidade de 12 lápis, questionei-a sobre o total de lápis caso comprasse mais 3. Prosseguiu realizando adições sucessivas de três lápis ao número obtido imediatamente antes e adicionando 0,80, ou seja o preço que teria que pagar caso comprasse dois lápis sabendo que lhe seria oferecido mais um, aos preços que ia obtendo.

Relativamente à marca D, a aluna começou por responder incorretamente (episódio 7B, § 2). Quando lhe pedi para justificar não respondeu, pelo que decidi simplificar a questão, pedindo-lhe que indicasse o preço de duas embalagens (§5). A sua pronta resposta é indiciadora de que que recorreu ao cálculo mental (§6). Prosseguiu efetuando cálculos na folha de registo (figura 26): recorreu ao algoritmo da adição, adicionando o valor monetário à soma até obter 5€.

Episódio 7B

1. Estagiária: na marca D conseguimos comprar quantos lápis com 5 euros?
2. Aluna B: conseguimos comprar 12 lápis
3. Estagiária: porquê?
4. Aluna B: ….
5. Estagiária: quanto custam 2 embalagens?
6. Aluna: 2,50€

A figura 26 permite ilustrar quais os cálculos que a aluna efetuou durante a resolução do problema. Relativamente marca C, a aluna foi registando a quantidade de lápis (de 3 em 3) e o seu respetivo valor. Na marca D, a aluna parece ter calculado mentalmente o dobro de 1,25, ao qual continuou a adicionar 1,25 até obter 5 euros. Na marca E, a aluna recorreu às adições sucessivas do valor unitário (0,50€) até obter 2,50€ e depois a este valor continuou a adicionar 0,50 até obter 5 euros. Em relação às marcas A e B, a aluna parece não ter sentido necessidade de efetuar cálculos na folha, limitando-se a calcular mentalmente.

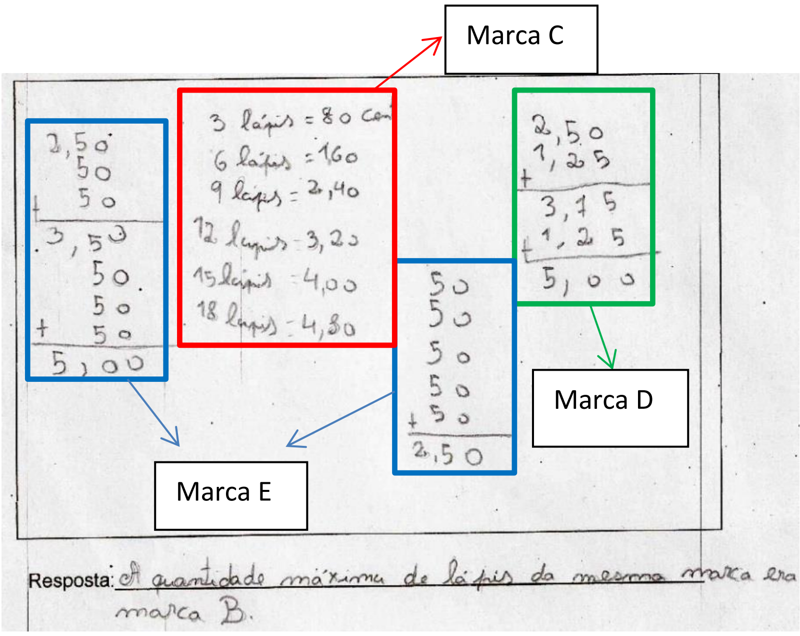


Figura 26 Registo escrito da aluna B à tarefa Promoção de lápis

Dificuldades

A receita de bolachas

A aluna B apresentou dificuldades em estabelecer a relação entre valores correspondentes entre as grandezas de dinheiro e de massa (Kg/€).

Promoção de lápis

Como referi anteriormente, a aluna revelou dificuldade na compreensão da situação descrita relacionada com o preço a pagar pelos lápis da marca C. Nesta marca e, ao contrário do que acontece com as anteriores, os lápis são vendidos à unidade e diferentemente de todas as outras há um lápis é oferecido na compra de dois. Como se pode observar no episódio 8B, apesar de saber que o terceiro lápis é oferta (§1) e que, por isso, três lápis custam 0,80€ (§3), quando interpelada sobre o custo de seis lápis, multiplica 0,40€ (o preço de um) por seis (§7, §9, §11) .

Episódio 8B

1. Aluna B: Um lápis custa 0,40€, mas na compra de dois oferecem outro
2. Estagiária: Então quanto custam 3 lápis?
3. Aluna B: 3 lápis custam 0,80€
4. Estagiária: Então como achas que podemos fazer?
5. Aluna B: Podemos fazer 0,40 mais 0,40
6. Estagiária: Sabemos que 3 lápis custam 0,80 €, então quanto vão custar 6 lápis?
7. Aluna B: 2,40€
8. Estagiária: Quantos lápis compras com 2,40€?

9. Aluna B: Compramos 6 lápis.
10. Estagiária: Se três lápis são 0,80€, então 6 lápis são quanto?
11. Aluna B: 2,40€
12. Estagiária Porquê?
13. Aluna B: 1,80€….. 1,60€
14. Estagiária: Compramos quantos lápis da marca C com 1,60€?
15. Aluna B: 6 lápis

O facto de não se pagar o terceiro lápis originou alguma confusão, pois mentalmente a aluna calculou o valor monetário dos seis lápis, esquecendo que em cada três há um que é oferta. A aluna começou a adicionar as quantidades de lápis de 3 em 3 ao número obtido anteriormente e o valor monetário de 3 lápis aos preços que ia obtendo.

Em suma, a aluna compreendeu ambos os enunciados, apesar de na *Promoção de Lápis* não ter interpretado que o dinheiro teria de ser gasto em lápis da mesma marca. Na *Receita das Bolachas*, a aluna resolveu a tarefa recorrendo a adições sucessivas, ao algoritmo da divisão e à noção de dobro. Na *Promoção de Lápis* a aluna mobilizou conhecimentos matemáticos relativos à adição, nomeadamente a adições sucessivas e ao algoritmo da adição.

Aluno C

C é um aluno do género masculino que frequenta pela segunda vez o 4.º ano de escolaridade. É caracterizado pelo professor cooperante como sendo impulsivo e com alguma dificuldade em respeitar a sua vez de participar. Apresenta algumas dificuldades, nomeadamente na área da Matemática. Segue um Plano de Acompanhamento.

Compreensão do enunciado

A receita das bolachas

O aluno C leu o problema. No entanto, quando o questionei sobre o que teria que fazer,, voltou a relê-lo (episódio 1C, §6).

Episódio 1C

1. Estagiária: Então o que é para fazer?
2. Aluno C: A Teresa quer fazer bolachas e foi à loja comprar os ingredientes.
3. Estagiária: E quais são os ingredientes?
4. Aluno C: A farinha, o açúcar, os ovos e a manteiga
5. Estagiária: E agora temos aí esses ingredientes e o preço de cada um. O que nos pede a alínea a?
6. Aluno C: Qual o custo total das bolachas da Teresa [lendo].

Promoção de lápis

O aluno procedeu à leitura do enunciado em voz alta. Inicialmente, respondeu que compraria lápis da marca B (episódio 2C, §2). Justificou que esta é a que apresenta embalagens de lápis com mais unidades (§4), desvalorizando, aparentemente a importância da relação quantidade/preço.

Episódio 2C

1. Estagiária: Se quisesses gastar 5 € em lápis, qual era a marca que escolhias?
2. Aluno C: A marca B.
3. Estagiária: porquê?
4. Aluno C: Tem 12 lápis.

O aluno parece ter considerado que a marca mais económica era a marca B, aparentemente por esta ter uma maior quantidade de lápis por embalagem e não pela relação quantidade/preço.

Concretizando e revendo um plano de ação

A receita das bolachas

Durante a resolução desta tarefa, por vezes, quando questionado, o aluno sugeria soluções ao acaso, fazendo tentativas e quando lhe era pedido que as justificasse, a sua resposta era “não sei”. Perante estas dificuldades, resolvi questioná-lo utilizando a estratégia de afunilamento de questões (episódio 3C, §1, §3, §5, §7).

Episódio 3C

1. Estagiária: Olha, nós temos 1 quilo de farinha, que são 1000 g, e vamos distribuir o quilo por vários pratos, cada prato tem de ter 250g. Quantos pratos são precisos?
2. Aluno C: Um
3. Estagiária: Um prato leva 250g, e se forem 2 pratos?
4. Aluno C: 300. 25 mais 25 ai 250 mais 250. 500
5. Estagiária: Ainda não gastámos o quilo, e se forem 3 pratos?
6. Aluno C: 750
7. Estagiária: E 4 pratos?
8. Aluno C: 1000
9. Estagiária: Podemos distribuir mais farinha ou já acabámos a farinha?
10. Aluno C: Não podemos, já acabou.

Como o episódio revela, o aluno acabou por concluir que se cada prato leva 250g de farinha, são necessários 4 pratos para se ter 1 kg de farinha. No entanto, não é claro se este conhecimento lhe permite compreender que 250gr “cabem” quatro vezes num kg. Mesmo que esta compreensão exista, ela não é suficiente para que o aluno deduza que para calcular o preço de 250gr de farinha, ou seja, o preço da quarta parte de 1 kg, há que determinar a quarta parte do preço de 1 kg. O episódio 4C ilustra as dificuldades com que se debate.

Episódio 4C

1. Estagiária: Que operação é que fizeste?
2. Aluno C: Fiz uma subtração.
3. Estagiária: Subtraíste o quê?
4. Aluno C: 250 menos 84.
5. Estagiária: E achas que podemos subtrair um número que está em gramas por um número que está em cêntimos?
6. Aluno C: Não.

Recorri novamente ao referido exemplo dos pratos que rapidamente ajudou o aluno a dar uma resposta correta. No entanto, apesar das semelhanças, o aluno teve dificuldades em calcular o preço de 250gr de açúcar, sabendo o preço do kg, pois não faz a distinção entre divisor e dividendo, ou seja, o aluno parece aplicar à operação divisão a propriedade comutativa. O aluno aparenta não ter ainda apreendido algumas noções básicas associadas à divisão e respetiva linguagem (por exemplo, distinção entre dividendo e divisor, uso inadequado da propriedade comutativa).

Na primeira questão, para saber o custo total da receita, o aluno adicionou o preço de cada ingrediente representado na imagem da direita e não apenas o das quantidades necessárias para a fazer. Para além disso, adicionou valores expressos em euros e em gramas. Neste sentido, tive de intervir, e a partir de um exemplo concreto (distribuir 1 kg de farinha em quatro pratos iguais) questionei o aluno acerca da relação entre as unidades de grandeza (g/kg) e, posteriormente tive de recorrer ao mesmo para ajudar o aluno a estabelecer a relação entre o valor monetário de 1 kg e a sua quarta parte. O aluno recorreu a adições sucessivas de 250 para calcular o número de vezes que cabem em 1000g. Posto isto, recorreu ao algoritmo da divisão para saber a quarta parte de 0,84 € (valor de 1 kg de farinha). Recorreu à mesma estratégia para calcular o valor da quarta parte de um quilograma de açúcar. Relativamente aos ovos, tive de questionar o aluno sobre a relação entre o número de ovos necessários para fazer um bolo (2) e o número de ovos da caixa (6). De seguida, o aluno voltou a utilizar o algoritmo da divisão para determinar essa relação. A figura 23 permite-nos visualizar os cálculos utilizados pelo aluno para saber o custo das bolachas.

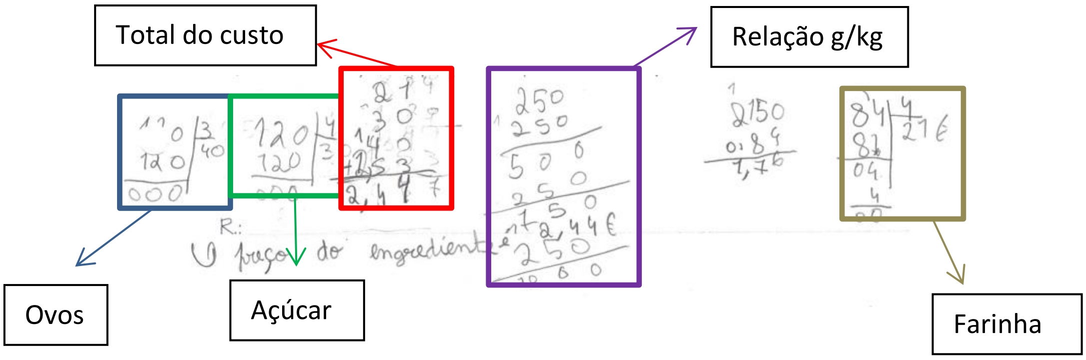


Figura 23 Registo escrito do aluno C relativamente à primeira questão da *Receita das bolachas*

Na segunda questão, o aluno revelou dificuldades ao nível da interpretação do enunciado. Inicialmente, queria adicionar gramas ao valor monetário (episódio 3C, §8). Desta forma, intervim tomando como ponto de partida a relação entre 8 e 16 para tentar que o aluno percebesse que teria de determinar também o dobro das quantidades de ingredientes (§9). No entanto, não foi simples que ele chegasse a esta relação.

Episódio 5C

1. Estagiária: Então o que temos de fazer aos ingredientes que ela utilizou na receita para 8 pessoas?
2. Aluno C: Uma conta de mais.
3. Estagiária: Porquê?
4. Aluno C: Porque nós queremos saber os ingredientes para 16 pessoas.
5. Estagiária: Mas o que vais somar?
6. Aluno C: Os preços.
7. Estagiária: Olha, por exemplo, para 8 pessoas ela precisava de 250g de manteiga, para 16 pessoas quanto é que ela iria precisar de manteiga?
8. Aluno C: 1 quilo. 250g mais o preço da manteiga
9. Estagiária: Olha bem para o 16, o que é que o 16 é ao 8?
10. Aluno C: Par ou múltiplo.
11. Estagiária: E é múltiplo porquê?
12. Aluno C: Porque 8 vezes 2 é 16
13. Estagiária: Então e quando um número é multiplicado por 2, o que é o resultado a esse número?
14. Aluno C: Par
15. Estagiária: Também. Quando multiplicamos por 2 que outro nome se pode dar ao resultado?
16. Aluno C: Múltiplo
17. Estagiária: Também é, mas há ainda outro nome. O 16 é o quê ao 8?
18. Aluno C: É o dobro!

O aluno voltou a necessitar da minha intervenção para determinar uma relação, desta vez entre 8 e 16. Determinada a relação, e sabendo que 16 é múltiplo de 8, o aluno decidiu calcular mentalmente, registando na folha o dobro da quantidade de cada ingrediente. Na figura 24, podem-se observar os registos feitos pelo aluno na resolução da tarefa.

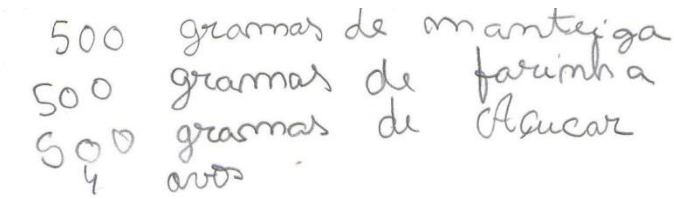

500 gramas de manteiga
500 gramas de farinha
500 gramas de Açucar
4 ovos

Figura 24 Registo escrito do aluno C relativamente à segunda questão da *Receita das bolachas*

Promoção de lápis

De uma forma geral, nesta tarefa o aluno revelou dificuldade em efetuar cálculos que envolvam dinheiro, talvez devido à utilização de números decimais não inteiros. O aluno teve algumas dificuldades como se pode constatar pela análise do episódio 6C, nomeadamente no que se refere à marca C. O aluno referiu 16 como sendo o dobro de 80, ignorando a ordem da grandeza do dinheiro (§8, §10). Determinou que poderia comprar 21 lápis da marca C, no entanto este cálculo não está correto (§12), pois com 5 euros só lhe era possível comprar 18 lápis cujo valor monetário é 4,80€. Quando questionado sobre quanto dinheiro sobrava se comprasse os lápis da marca C (§14, §18, §20), o aluno revelou alguma dificuldade em calcular mentalmente a diferença entre 4,80€ e 5€, necessitando de realizar o cálculo escrito.

Episódio 6C

1. Estagiária [referindo a marca C]: Sabemos que um lápis custa 0,40€
2. Aluno C: Dois são 80 cêntimos
3. Estagiária [repetindo a informação do enunciado]: e o terceiro é grátis, quer dizer que não se paga
4. Aluno C: então é 80
5. Estagiária: os três lápis?
6. Aluno C: sim!
7. Estagiária: então 3 lápis são 80, 6 lápis são quanto?
8. Aluno C: 16
9. Estagiária: mas nós estamos a falar em dinheiro, portanto,…
10. Aluno C: é o dobro

(…)

11. Estagiária: conseguimos comprar quantos lápis, então?
12. Aluno C: mais 21. 18 mais 3 é 21
13. Estagiária: De 4,80 quanto falta para 5€
14. Aluno C: 1
15. Estagiária: 1 quê?
16. Aluno C: 1 lápis
17. Estagiária: quero que me digas quanto falta para 5€
18. Aluno C: 4 para 5?
19. Estagiária: 4,80 para 5, quanto falta?
20. Aluno C: falta 1 €

Recorreu ao algoritmo da multiplicação, multiplicando o custo de 3 lápis (0,80€) por diversas quantidades pela respetiva quantidade, como se pode observar na figura 27.

Realizou adições sucessivas, recorrendo ao algoritmo, para determinar a quantidade de lápis da marca A que conseguiria comprar com 5€, repetindo o processo para a marca B (figura 27), para a qual não sentiu necessidade de concretizar cálculos escritos.

Na marca D, o aluno iniciou os cálculos realizando adições sucessivas de 1,25€ até alcançar a 3,75 €. Posteriormente, multiplicou 1,25 por 2, por 3 e por 4. O aluno não efetuou quaisquer registos para calcular a quantidade de lápis da marca E e da B. O aluno determinou logo a marca B como a mais económica por ser a marca que tem embalagens com maior número de lápis e não pela sua relação quantidade/ preço. A figura 27 permite visualizar os registos escritos do aluno.

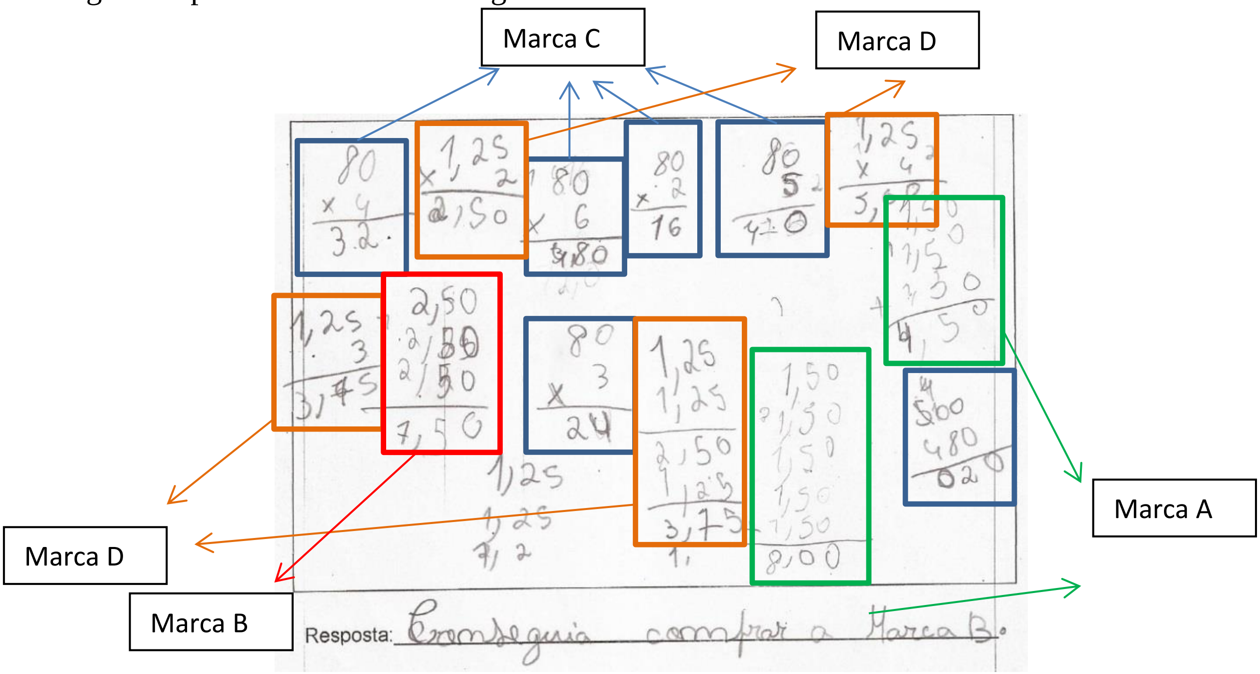


Figura 27 Registo escrito do aluno C à tarefa Promoção de lápis

Tal como se pode verificar na figura 27, alguns cálculos escritos, nomeadamente relativos às marcas A e B, ultrapassaram o valor monetário de 5 euros. Ao calcular o número de lápis da marca C, o aluno recorreu ao algoritmo mas não realizou os cálculos de forma correta, pois não respeitou a ordem de grandeza dos números. No entanto, pode pensar-se que quando multiplica 80 por 2, por exemplo, o aluno poderá querer referir-se a 16 dezenas.

Dificuldades

Receita das bolachas

O aluno C revelou dificuldades relativamente à divisão e suas propriedades, confundindo, constantemente, as funções do dividendo e do divisor. Também revelou algumas limitações na compreensão do enunciado, pois teve necessidade de o reler quando era questionado sobre a tarefa.

A promoção de lápis

O aluno demonstrou dificuldade ao realizar cálculos com valores monetários, nomeadamente quando os números eram decimais, por isso, para realizar cálculos eliminava a vírgula dos valores monetários, concretizando as operações como se fossem números inteiros. Como se pode ver no episódio 7C, aparentemente o aluno teve dificuldades em saber o dobro de 80 (§6).

Episódio 7C

1. Estagiária: Então se 3 lápis são 80, 6 lápis são quanto?
2. Aluno C: 16
3. Estagiária: mas nós estamos a falar em dinheiro…
4. Aluno C: é o dobro
5. Estagiária: qual é o dobro de 80?
6. Aluno C: 16

Também revelou limitações na realização de alguns cálculos mentalmente, nomeadamente em calcular quanto falta a 4,80€ para chegar a 5€, necessitando de os efetuar na folha de registo.

Sintetizando, o aluno C parece ter compreendido o enunciado do primeiro problema. No entanto, quando interpelado sobre o que se deveria fazer sentiu necessidade de o reler. No caso da *Promoção de Lápis*, o aluno deduziu, desde logo, que a marca mais económica era a que apresentava maior quantidade de lápis, desvalorizando a importância da relação quantidade/preço. Em relação aos conhecimentos matemáticos, o aluno mobilizou, na *Receita das Bolachas*, a noção de dobro e os algoritmos da divisão e da multiplicação, e na *Promoção de Lápis* recorreu ao algoritmo da multiplicação, da adição e aos múltiplos de 3. Na Receita das Bolachas, o aluno evidenciou dificuldades ao nível da relação entre unidades de grandeza de massa (g/kg), à noção da divisão, na qual concretiza o uso incorreto da propriedade comunidade, e à interpretação do enunciado, nomeadamente na segunda e terceira questões. Relativamente à Promoção de Lápis, o aluno revelou limitações em realizar cálculos que envolvam dinheiro, tendo em conta a ordem da grandeza de valores monetários (por exemplo, calcular 16 como sendo o dobro de 80).

A tabela 1 sintetiza a forma como cada aluno compreendeu o enunciado das duas tarefas, os conhecimentos que mobilizou e as dificuldades evidenciadas.

Aluno	Tarefa	Compreender o enunciado, esboçando um plano de ação	Concretizando e revendo um plano de ação	Dificuldades
Aluno A	Receita das bolachas	Leu e compreendeu o enunciado, retirando a informação necessária para a resolução do problema.	Recorreu a subtrações sucessivas para determinar o custo da quantidade de ovos necessária para a receita e ao algoritmo da divisão para determinar o valor da farinha e do açúcar.	Demonstrou dificuldades em estabelecer relações entre as unidades de grandeza de massa (g/kg) e entre as grandezas de massa e de dinheiro (kg/€)
	Promoção de lápis		Utilizou a estratégia aditiva, cálculo mental e raciocínio proporcional. Registou a quantidade de lápis e o respetivo valor relativos às marcas C, D e E.	Não revelou dificuldades, mas necessitou da minha ajuda relativamente à marca C.
Aluna B	Receita das bolachas	Leu e compreendeu que teria de consultar a receita para determinar o custo de cada um dos ingredientes.	Decompôs o problema em subproblemas. Realizou adições sucessivas no sentido de acrescentar para determinar o número de vezes que 250 cabe em 1000. Utilizou o	Apresentou dificuldades em estabelecer a relação entre as unidades de grandeza de massa (g/kg), entre as grandezas de massa e de dinheiro (kg/€) e

			algoritmo da divisão para determinar o custo dos ovos, do açúcar e da farinha.	na mobilização da noção de dobro.
	Promoção de lápis	Leu o enunciado, mas revelou alguma dificuldade na interpretação. Não compreendeu que os 5 euros teriam de ser gastos em lápis de uma só marca.	Realizou adições sucessivas oralmente em relação à marca A. Utilizou o algoritmo da adição para calcular a quantidade de lápis das marcas D e E. Em relação à marca C registou o número de lápis (de 3 em 3) e o respetivo preço.	Surgiram alguns constrangimentos no cálculo do número de lápis da marca C.
Aluno C	Receita das bolachas	Leu o enunciado, mas quando foi questionado sobre a informação, sentiu necessidade de o reler.	Recorreu a adições sucessivas para saber a relação entre 250g e 1000g. Utilizou o algoritmo da divisão para calcular o custo da farinha, do açúcar e dos ovos.	Apresentou falta de conhecimento das propriedades da divisão, aplicando-lhe a propriedade comutativa; dificuldades na interpretação do enunciado e em estabelecer relação entre as unidades de grandeza de massa (g/kg) e entre as grandezas de massa e de dinheiro (kg/€).
	Promoção de lápis	Após a leitura, o aluno indicou a marca B como a mais económica, por ser a embalagem com maior número de lápis e não pela relação quantidade/preço.	Recorreu ao algoritmo da multiplicação para calcular a quantidade de lápis das marcas C e D e ao algoritmo da adição para calcular os lápis das marcas A, B e D.	Revelou constrangimentos em realizar cálculos com valores monetários.

Tabela 7 Síntese comparativa das tarefas resolvidas individualmente pelos alunos A, B e C

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Este estudo centra-se na “ Resolução de problemas matemáticos no 4.º ano de escolaridade em contexto de trabalho de grupo”. Pretende-se compreender como é que alunos deste ano de escolaridade resolvem problemas matemáticos quando trabalham em grupo, nomeadamente as potencialidades desta modalidade de trabalho, bem como as dificuldades com que se confrontam. Neste âmbito, pretende-se entender (a) que papel assumem os alunos, (b) que conhecimento matemático mobilizam e como emerge e é usado este conhecimento e (c) que dificuldades surgem e como lidam com estas dificuldades.

Do ponto de vista metodológico, esta investigação enquadra-se numa metodologia qualitativa e num paradigma interpretativo. Neste âmbito, foi concretizada uma intervenção pedagógica, com a duração de doze semanas, em foi proposto aos alunos que resolvessem, em grupo, seis problemas matemáticos durante um período de três semanas. Para efeitos de investigação, foi selecionado um grupo de três alunos sendo a recolha de dados realizada através da observação participante, recolha documental e entrevistas não-estruturadas aos alunos do grupo em estudo.

Seguidamente, apresento as principais conclusões organizadas em três pontos: (a) o papel assumido pelos alunos no decurso da resolução dos problemas, (b) os conhecimentos matemáticos mobilizados e sua emergência e (c) dificuldades que surgiram. No primeiro ponto, destaco o que se relaciona com a forma como os alunos interagiram entre si durante a resolução, em grupo, dos problemas matemáticos. No segundo ponto, destaco os conhecimentos matemáticos e as estratégias usadas pelos alunos para resolverem os problemas e como é as ideias matemáticas emergem e são mobilizadas no grupo. Por fim, no terceiro e último ponto, apresento os constrangimentos vivenciados pelos alunos durante o processo de resolução.

Papel dos alunos

De uma forma geral, os alunos focaram as suas interações na partilha de ideias, estratégias e dúvidas na resolução dos problemas, contribuindo para o bom funcionamento do trabalho de grupo, ou seja, parece ter existido um ambiente de aprendizagem cooperativa (Abrantes, 1994), no sentido em que os alunos não trabalharam uns contra os outros nem prosseguindo objetivos diferenciados sem relação entre si, mas procuraram, antes, atingir um objetivo comum (resolver os problemas). Quando um dos intervenientes expunha uma ideia, os restantes manifestavam a sua opinião, escutando e avaliando o ponto de vista do colega e participando nas decisões sobre o melhor caminho a seguir, o que vai ao encontro do que Schoenfeld (referido por Abrantes, 1994), encara o desenvolvimento de capacidades de autorregulação que são essenciais na aprendizagem.

Não houve uma etapa que grupo dedicou ao delineamento, mais ou menos formal, de um plano de trabalho antes de passar à fase da sua concretização. Foi frequente a leitura e compreensão do problema ser concomitante com a emergência de ideias associadas à resolução, ou seja, a compreensão do problema entrelaçou-se com o esboço de um plano de ação que, posteriormente, tomou forma. Neste âmbito, cada elemento contribuiu de forma individual para o trabalho de grupo mas estas contribuições foram permitindo traçar o rumo que seguiriam, o que vai ao encontro do que é referido por Yackel et al: "a construção de cada uma das crianças é influenciada pelos comentários feitos pela outra" (citados por Abrantes, 1994, p. 150).

O grupo em estudo foi formado por três alunos com níveis de desempenho diferentes. Trata-se, pois, de um grupo heterogéneo. Esta heterogeneidade não foi impeditiva da colaboração entre os alunos, o que, de algum modo é consistente com as ideias de Freudenthal "que argumenta a favor de "grupos heterogéneos", nos quais alunos de diferentes níveis colaboram numa dada tarefa, cada um ao seu próprio nível" (referido por Abrantes, 1994, p. 144).

Apesar de terem níveis de desempenho diferentes, cada aluno teve o seu papel no processo da resolução de problemas. Ao analisar os problemas resolvidos em grupo, pode-se constatar que cada um deles foi lido em voz alta por um dos elementos. Por exemplo, na tarefa *Receita do bolo-rei*, o aluno C leu o enunciado da primeira questão, a aluna B leu a segunda e o aluno A a terceira.

Após a leitura, os alunos sistematizavam a informação fornecida pelo enunciado necessária ao delineamento do plano de ação. Na mesma tarefa, depois de C ler o enunciado iniciou a sistematização da informação e relacionou-a de imediato com a noção de dobro. O aluno A começou por calcular o dobro da quantidade da farinha, enquanto B enumerava as quantidades necessária para a confeção do bolo. Na segunda questão foi o aluno C quem começou por delinear uma estratégia; no entanto, a mesma não era a correta pois adicionava quantidades relativas a diferentes grandezas. Perante esta situação, a aluna B alertou os colegas para o facto de terem de rever as quantidades dos ingredientes necessárias, revisitando a receita. Após essa revisão, o aluno A começou a delinear uma estratégia que conduziu o grupo à resolução da questão. Ao explicar a sua estratégia aos colegas, este mesmo aluno constatou que o dobro de um número é igual ao quádruplo desse mesmo número. Esta ideia, por sua vez, levou C a relacionar a estratégia usada com a que fora utilizada na tarefa que resolveu individualmente (*Receita das bolachas).* Na terceira questão, o aluno C consultou a receita e partilhou com os colegas a quantidade de ovos necessária para cada bolo, o aluno A contou os ovos da caixa de uma dúzia um a um e a aluna B referiu o seu valor monetário e iniciou um plano de ação. Este plano foi o ponto de partida de A para resolverem a tarefa.

Ao longo da resolução dos problemas, os alunos também se questionaram entre si, como é o caso de C na tarefa *Receita de bolo-rei* e de A na *Recolha de tampas de garrafas* e na *Coleção de selos.*

Por diversas vezes, os alunos relembravam uns aos outros informações importantes para a resolução do problema. Por exemplo, na tarefa *Recolha de tampas de garrafas,* o aluno C chamou a atenção dos colegas para a necessidade de realização da estimativa e na *Coleção de selos* sublinhou que o número de selos da coleção não poderia ser maior que 2000.

O aluno A liderou, com frequência, o processo de resolução dos problemas, mesmo nas situações em que teve dificuldades. Por vezes, ao interagirem com ele, os alunos B e C abandonavam o seu raciocínio, não conseguindo argumentar, perante o colega, as ideias que tinham apresentado. Por ser o aluno detentor de maior conhecimento matemático, o aluno A tinha um ritmo de trabalho mais rápido, o que, por vezes, o tornava impaciente face aos colegas que tinham um ritmo mais lento. A aluna B e o aluno C assumem, com alguma frequência, o papel de dependentes (Mamede, 2004), interrogando o colega acerca dos passos seguintes.

A aluna B revelou-se pouco participativa durante o processo de resolução, embora tivesse contribuído com ideias que foram ou poderiam ter sido úteis. Por exemplo, perante a necessidade de fazer uma estimativa foi a única que foi capaz de dizer de que se tratava esta noção. Teve um papel mais passivo do que os colegas, o que pode não ser independente do facto de se tratar de uma aluna insegura e tímida e de estar entre dois alunos participativos, o pode ter inibido as suas interações com os colegas.

Inicialmente, o aluno C apresentou, por vezes, uma atitude individualista, expressando-se na primeira pessoa do singular, o que se foi esbatendo com o decorrer do tempo. Por exemplo, na segunda tarefa assume uma atitude colaborativa ("*vamos fazer assim*"). Simultaneamente, questionava os colegas com alguma frequência, evidenciando uma certa dependência mas, por diversas vezes, também exerceu o seu pensamento crítico referindo que a resolução/ estratégia realizada pelo grupo não estava correta.

Conhecimentos matemáticos mobilizados e sua emergência

Nas tarefas realizadas em grupo é notório o interesse dos alunos, o contributo de cada um para a resolução através da partilha de ideias/estratégias e a entreajuda, o que originou, por vezes, a restruturação do pensamento individual devido à escuta da explicação dos colegas. Como referem Nunes (1996) e Abrantes (1994) este modo de agir pode favorecer a resolução de problemas em grupo.

Ao longo da resolução de problemas, os alunos mobilizaram diversos conhecimentos matemáticos. É o caso da noção de dobro que foi usada, por exemplo, pelo aluno C, na tarefa *Receita do bolo-rei*, e pelo aluno A, na *Recolha de tampas de garrafas*.

Os alunos A e B recorreram com alguma frequência a estratégias de cálculo mental, como se pôde constatar na tarefa *Receita do bolo rei*, na qual A apenas recorreu ao algoritmo da multiplicação para saber o dobro da quantidade de farinha (250) e B recorreu ao algoritmo da adição para verificar o mesmo valor, adicionando duas parcelas.

Em diversas tarefas, o aluno C foi quem registou mais cálculos, nos quais o recurso ao algoritmo foi dominante, mesmo em situações mais simples, como foi o caso do cálculo do dobro de 2 colheres de sal, na *Receita do Bolo-rei*.

Nesta tarefa, o aluno A estabeleceu a relação entre as unidades de grandeza de massa (g/kg) e recorreu a adições sucessivas de 250 até 1000. Ao explicar a sua estratégia, constatou que o dobro do dobro de um número é igual ao seu quádruplo. Este plano levou o aluno C a recordar-se do que fora utilizado no problema resolvido individualmente *(Receita das Bolachas).* Nesta questão, os alunos utilizaram o algoritmo da multiplicação para calcular o número de bolos que se pode fazer com um pacote de farinha, açúcar e margarina.

Na terceira questão da *Receita do bolo-rei,* o aluno C revelou alguma noção da possibilidade de realizar uma divisão com números na representação decimal, explicando a A que poderiam fazer a operação com números inteiros e acrescentar as vírgulas no final. No entanto, o aluno A realizou adições sucessivas da quantidade de ovos e constatou que também se podia multiplicar 9 por 4 para saber a quantidade de bolos que podia fazer com 36 ovos. A aluna B recorreu apenas ao algoritmo da adição enquanto C usou os algoritmos da adição e da multiplicação, sendo, novamente, o aluno que efetua mais registos.

Na *Recolha de tampas de garrafas,* a aluna B apresentou uma boa noção de estimativa, mas não soube aplicá-la corretamente. No entanto, foi quem mais se aproximou do valor real das tampas recolhidas ao longo de uma semana. A aluna, tal como A, utilizou o algoritmo da adição para determinar o total da estimativa do número de tampas recolhido em cada dia da semana.

Na *Coleção de selos,* os alunos mobilizaram conhecimentos relativos aos números ímpares, aos múltiplos de 3 e à estrutura do sistema de numeração decimal.

A análise dos registos escritos dos alunos permitiu-me verificar que recorrem ao uso excessivo do algoritmo, mesmo em situações elementares. Esta situação é bem visível, nomeadamente, nos registos do aluno C, que recorre ao algoritmo da multiplicação para calcular o dobro da quantidade dos ingredientes.

Os conhecimentos matemáticos mobilizados pelos alunos emergiram a partir das suas interações e da forma como interpretaram o enunciado da tarefa. Por exemplo, na primeira tarefa resolvida em grupo, a *Receita do bolo-rei*, a noção de dobro surgiu através da leitura que o aluno C fez do enunciado, levando os colegas a calcular o dobro da quantidade de cada um dos ingredientes.

Na maioria das vezes, o conhecimento matemático surge a partir do aluno A. Como foi o caso da segunda questão da mesma tarefa, na qual o aluno evidenciou, a partir da leitura do enunciado, que para resolverem a questão teriam de relacionar a quantidade de açúcar necessária para fazer um bolo (150g) com a quantidade do pacote de açúcar (1kg), conduzindo o grupo para a resposta ao problema. Também na terceira questão, o aluna A, tendo em conta a informação do enunciado, começou a adicionar sucessivamente o valor monetário de uma caixa com uma dúzia de ovos (1,50€) até se aproximar o mais perto possível de 5 euros, para saber o número de ovos que poderia comprar com este valor. Apesar de todos os alunos terem contribuído para a resolução do problema, o aluno A foi quem mobilizou mais conhecimentos, que levaram por diversas vezes à resolução das tarefas.

Comparativamente às tarefas iniciais, pude verificar que, nas últimas sessões de resolução de problemas em grupo, existe uma maior colaboração para encontrar a solução do problema, maior confronto de ideias entre os elementos do grupo e maior mobilização do pensamento crítico. Os alunos também se foram revelando mais rigorosos, começando a preocupar-se com questões como o registo dos cálculos, indicação explícita da resposta ao problema e a justificação das suas estratégias de resolução. Ao observar os processos de resolução de problemas em grupo, pode-se constatar que, tal como referido por Nunes (1994), ao trabalhar em grupo os alunos partilham ideias e formulam conjeturas baseando-se em experiências que fazem.

Se comparar a atividade dos alunos na resolução dos problemas que lhes propus durante as entrevistas individuais, constato que não é possível identificar grandes diferenças, o que pode estar associado a diversos fatores. Um deles pode relacionar-se com as próprias tarefas propostas — *Receita das bolachas* e *Promoção de lápis* — que eram bastante diferentes entre si quer quanto ao tipo de problema (respetivamente de cálculo e de processo) quer, em geral, quanto aos conhecimentos matemáticos necessários à resolução. Um outro fator prende-se com a duração da intervenção pedagógica que apenas teve a duração de três semanas tendo existido, neste período, a interrupção letiva das férias do Natal.

Dificuldades

Ao longo das tarefas, os alunos A, B e C depararam-se com várias dificuldades. Entre as mais comuns estão as relacionadas com a interpretação do enunciado, o que vai no sentido do que é sublinhado por Vale e Pimentel (2004). Estão, ainda, a compreensão da divisão e suas propriedades e o uso do raciocínio proporcional

Apesar do seu bom desempenho na área da resolução de problemas, o aluno A apresentou algumas dificuldades na tarefa “Receita de Bolachas” relacionadas com a relação entre valores de medidas da grandeza massa e correspondentes valores da grandeza dinheiro. Na tarefa “Recolha de tampas de garrafas”, não lhe foi simples interpretar a questão cujo enunciado apelava à indicação do número de dias que se levaria para juntar 15000 e 120000 tampas, se se duplicasse, em cada dia, o número de tampas recolhido no dia anterior. Também na intitulada " Coleção de selos" não interpretou o enunciado de forma correta.

Globalmente, a aluna B não revelou dificuldades na primeira tarefa, apesar de na *Carta ao Amigo,* ter escrito que sentiu algumas limitações na última questão. Na última tarefa, " Promoção de lápis", a aluna teve dificuldades na compreensão do enunciado.

Ao longo do estudo, foram notórias as dificuldades evidenciadas pelo aluno C, que se situaram, essencialmente, ao nível da interpretação de enunciados. Na maioria das vezes, lia o enunciado, reconhecia os dados fornecidos, mas a sua primeira preocupação era efetuar cálculos usando-os, mesmo que estes não fizessem qualquer sentido face à situação e/ou à questão colocada. Quando lhe foi proposto que resolvesse individualmente a tarefa "Promoção de lápis", o aluno teve algumas hesitações em calcular a quantia a pagar pelos lápis da marca C, pois não entendia a relação existente entre o número de lápis comprados e oferecidos. Para além disso, o aluno também demonstrou limitações na compreensão da divisão, mais especificamente, nas suas propriedades. Em todos os problemas que exigiam o recurso a esta operação, o aluno reconhecia que tinha de aplicá-la mas fazia-o incorretamente, trocando, por exemplo, o dividendo pelo divisor.

Os alunos tiveram algumas dificuldades em comum, nomeadamente na resolução do problema "Recolha de tampas de garrafas". Nesta tarefa, os alunos A e C não sabem o que significa estimativa; a aluna B conhece o significado desta noção entendendo-a como "um número perto de", mas não soube utilizá-la de forma adequada. Na segunda questão desta tarefa, ao representarem as quantidades de tampas recolhidas numa reta numérica não tiveram em consideração a proporcionalidade entre os números e a distância entre si, não respeitando a grandeza relativa dos números. Também a terceira questão não foi fácil para os alunos, uma vez que A e C confundiam os termos dobro e metade. Calcularam metade de 15000, uma estratégia que não conduziria a um resultado correto, nomeadamente porque pressupunha que em algum dos dias se tivesse recolhido essa quantidade de tampas, o que não é possível. Para além disso, nesta questão nenhum dos alunos interpretou bem o que lhes era pedido, uma vez que procurava o dia em que se recolheram 15000 e 120 000 tampas e não o número de dias necessário para obter estes números.

Encerrando o estudo

Este estudo foi interessante na medida em que me permitiu constatar as interações que surgem num contexto de trabalho de grupo, a emergência dos conhecimentos matemáticos e a forma como os alunos lidam com as dificuldades. Apesar das dificuldades sentidas ao longo do estudo, este foi uma grande fonte de aprendizagem, nomeadamente para mim. Proporcionou-me aprofundar conhecimentos sobre duas áreas do meu interesse: a resolução de problemas e o trabalho de grupo.

Ao nível da intervenção pedagógica, senti-me limitada pelo curto período de tempo que tive para desenvolver o projeto. Além disso, o facto de o final do primeiro período de aulas acontecer a meio da implementação deste estudo também não favoreceu a manutenção do ritmo de trabalho e, por esta via, constrangeu o processo de recolha de dados. Considero que poderia ter desenvolvido o estudo de outra forma e tomado algumas decisões com mais tempo, como na seleção dos últimos problemas.

Apesar do receio em realizar o projeto na área da Matemática, julgo que o balanço foi positivo, porque devemos enfrentar sempre os obstáculos e não ignorá-los, pois só assim podemos aprender e melhorar, quer a nível profissional como pessoal.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1994). *O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática: a experiência do Projecto MAT789.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação.* Porto: Edições ASA.

Aires, L. (2011). *Paradigma Qualitativo e Práticas de Investigação Educacional .* Universidade Aberta.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Boavida, A. M. (1993). *Resolução de Problemas em Educação Matemática: contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores.* Lisboa.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua dos Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação: Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Boavida, A., & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. In L. S. A.P. Canavarro, *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 287 - 295). Portalegre: SPIEM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Carmo, H., & Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Investigação - Guia para Auto-aprendizagem.* Lisboa: Universidade Aberta.

César, M. (1999). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte, & L. Serrazina, *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália: actas da escola de verão em educação matemática* (pp. 5-44). Lisboa: SPCE - Secção de Educação Matemática.

Esteves, L. M. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Acção.* Porto: Porto Editora.

Mamede, E. (2004). The calculator in the problem solving context: A tool to done down the differences. In J. Giménez, G. E. Fitzsimons, & C. Hahn, *A Challenge for Mathematics Education: To Reconcile Commonalities and Differences* (pp. 206-2012). Barcelona: GRAO.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Ministério da Educação: DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa de Matemática Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para o Ensino da Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Nunes, F. (1996). *O ensino da Matemática e o trabalho de grupo: dois estudos de caso.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, H. M., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. (1996). Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática. In APM, *Actas do ProfMat96* (pp. 207-213). Lisboa: APM.

Pato, M. H. (1995). *O trabalho de grupo no ensino básico: guia prático para professores.* Lisboa: Texto Editora.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evalution methods.* California: Sage Publications, Lda.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In P. Palhares, *Elementos da Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7 - 52). Lisboa: Lidel.

Outros documentos consultados

Projeto Curricular de Turma 2012/2013 disponibilizado pelo Professor Cooperante (Documento não publicado)

ANEXOS

Anexo 1

Receita de bolachas

A Teresa quis fazer bolachas para o seu lanche e das amigas. Por isso, foi ao livro de receitas da mãe e procurou uma receita.

Lê a receita. Observa o preço dos produtos na loja e, depois, responde.

1. Qual o custo total das bolachas da Teresa? (Tem em atenção os preços dos produtos e as quantidades necessárias para a receita.)

2. A receita que a Teresa fez está calculada para 8 pessoas. Se ela quiser fazer estas bolachas para o dia do seu aniversario, onde estarão 16 pessoas, que quantidade deverá colocar de cada um dos ingredientes?

Anexo 2

A receita de bolo-rei

A Mãe da Marta gosta muito de fazer Bolo-rei. Lê com atenção a receita do bolo que ela faz.

Receita do Bolo-rei para 8 pessoas

250 gramas de farinha
100 gramas de fermento de padeiro
1 colher de sopa de sal
4 ovos
150 gramas de açúcar
100 gramas de margarina
200 gramas de frutos secos

1. Imagina como a mãe da Marta queria fazer um bolo para 16 pessoas. Que quantidade de cada ingrediente usaria?
2. Para fazer os bolos, a mãe da Marta precisa de comprar farinha, açúcar e margarina. Se comprar as embalagens seguintes, quantos bolos pode fazer?

1kg = 1000g

1kg = 1000g

1kg = 1000g

3. Depois de ter comprado os ingredientes para o bolo-rei, a mãe da Marta reparou que se tinha esquecido dos ovos. Ao abrir a carteira, viu que só tinha uma nota de 5€ e decidiu investi-los nos ovos. Quantos bolos a mãe da Marta conseguirá fazer com os ovos que comprou com os 5€?

1 dúzia = 1,50€

½ dúzia = 0,75€

Anexo 3

Os arranjos florais

1. Lê com atenção.

A Sofia tem 60 rosas brancas e 48 rosas vermelhas para fazer arranjos florais. A Sofia quer que os arranjos sejam todos iguais.

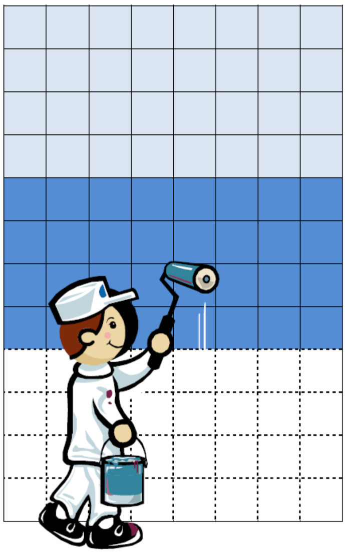
2. Indica duas maneiras para a Sofia fazer os arranjos, utilizando apenas estas flores.

3. Qual o número máximo de arranjos que a Sofia pode fazer?

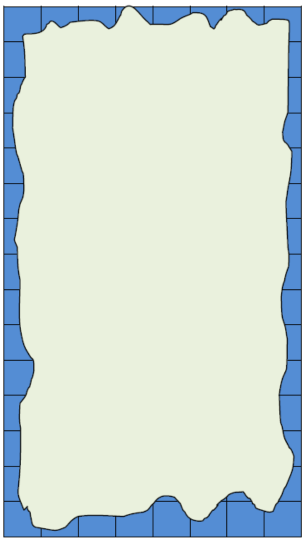
Anexo 4

Colocar azulejos

1. Na escola do André, o Sr. João está a colocar azulejos, com dois tons de azul, numa parede do complexo desportivo, tal como mostra a figura.



2. Quantos azulejos já colocou o Sr. João? Explica como pensaste.
3. Quantos azulejos faltam colocar ainda na parede? Explica como pensaste.
4. Quando terminar quantos azulejos terá colocado o Sr. João? Explica como pensaste.
5. Uma outra parede com azulejos foi danificada pela humidade e alguns azulejos caíram.



Quantos azulejos precisam de ser novamente colocados? Explica como pensaste.

Anexo 5

A recolha de tampas de garrafas

Na escola do Ricardo, os alunos decidiram fazer uma recolha de tampas de garrafas de água durante uma semana de aulas. Começaram numa segunda-feira e o resultado da contagem, nesse dia, foi 125 tampas. A recolha terminou numa sexta-feira. Cada dia, conseguiram recolher o dobro das tampas do dia anterior.

1. Quantas tampas de garrafas conseguiram recolher em cada um dos dias da semana? Faz uma estimativa do resultado final das tampas recolhidas e compara com o resultado exato.

2. Representa todos os números, resultantes da recolha das tampas em cada dia, numa reta numérica, graduando-a adequadamente.

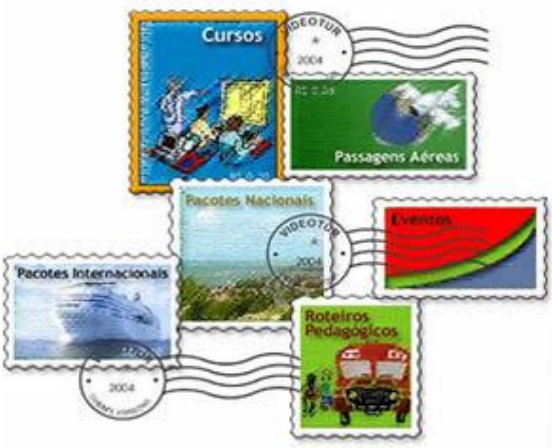
3. Se continuassem a recolher da mesma forma que nos dias anteriores, ou seja, duplicando sempre, em cada dia, o número de tampas do dia anterior, quantos dias seriam necessários para juntarem 15 000 tampas? E 120 000?

Anexo 6

A coleção de selos

A Regina tem um número ímpar de selos na sua coleção. A soma dos números representados pelos algarismos desse número é 12. O número representado pelo algarismo das centenas é o triplo do número representado pelo algarismo das unidades. A Regina tem na sua coleção mais de 1000 e menos de 2000 selos.

Quantos selos tem a Regina?



Anexo 7

A cidade "Diz-que-diz-que"

A cidade "diz-que-diz-que", com 21 845 habitantes, é conhecida pela velocidade com que uma "história" se espalha a toda a população. Cada pessoa que ouve uma "história" conta-a a outras 4 pessoas, no prazo de 1 hora, e depois disso não a conta a mais ninguém.

Uma manhã o sacristão foi visitado por um amigo da cidade vizinha de quem ouviu um boato. Quantas horas o boato demorou a espalhar-se pela cidade?

Anexo 8

Promoção de lápis

Num supermercado está a ser feita uma promoção no preço dos lápis. São oferecidas as seguintes condições:

Marca A: embalagem de 5 lápis por 1,50€

Marca B: embalagem de 12 lápis por 2,50€

Marca C: um lápis por 40 cêntimos, mas na compra de dois oferecem outro

Marca D: uma embalagem de 4 lápis por 1,25€

Marca E: Um lápis custa 50 cêntimos.

Qual a quantidade máxima de lápis da mesma marca que conseguias comprar com 5 euros?