IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

JOANA FERREIRA GALAMAS MARQUÊS

PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO COM ALUNOS DO 3.º ANO: FUNDAMENTAÇÃO E OPERACIONALIZAÇÃO DE UMA INTERVENÇÃO.

Relatório do Projeto de Investigação do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Orientadora
Professora Doutora Joana Maria Leitão Brocardo

Abril de 2022

JOANA FERREIRA GALAMAS MARQUÊS

PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO COM ALUNOS DO 3.º ANO: FUNDAMENTAÇÃO E OPERACIONALIZAÇÃO DE UMA INTERVENÇÃO.

JÚRI

Presidente:

Professora Doutora Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Arguente:

Professora Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Orientador:

Professora Doutora Joana Maria Leitão Brocardo, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Abril de 2022

Agradecimentos

Este relatório marca o fim de mais uma etapa da minha vida académica e o início de uma aventura com que sonho e desejo desde criança, ser Professora e Educadora de Infância. Desta forma, é imprescindível, neste momento, agradecer a todos aqueles que fizeram parte deste meu percurso e que contribuíram, apoiaram e não me deixaram desistir até eu conseguir realizar este sonho.

À minha orientadora, Professora Doutora Joana Brocardo, pela disponibilidade e por me ter guiado, apoiado e incentivado, pois sem a sua ajuda este trabalho não teria sido possível.

A todos os professores da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal que me acompanharam, ou fizeram parte, do meu percurso académico, pelo apoio incondicional e a preciosa ajuda ao longo da Licenciatura e Mestrado.

Agradeço à minha família, principalmente aos meus pais, Luísa e João, e ao meu irmão, Luís, por todo o incentivo, por terem estado ao meu lado nos momentos bons e nos difíceis e por me acompanharem em mais uma etapa da minha vida.

À minha amiga Sara, por todo o apoio, motivação e força durante todo este percurso.

À minha colega e amiga Catarina, que me acompanhou e ajudou neste caminho com altos e baixos, mas incrivelmente desafiador e precioso.

E a todos aqueles que com suas manifestações de carinho e respeito me ajudaram a alcançar esta vitória.

Obrigada a todos!

Resumo

O presente estudo, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º ciclo do Ensino Básico foca-se na promoção do desenvolvimento do raciocínio matemático.

Devido à situação pandémica causada pela Covid-19, não foi possível colocar em prática a parte empírica do projeto, a que estava associada a uma metodologia de investigação de abordagem qualitativa. Estava previsto realizar uma investigação sobre a prática em que os métodos de recolha de dados seriam a observação participante complementada com registos em áudio ou vídeo, e a recolha documental. Do ponto de vista metodológico foi possível realizar um estudo teórico que envolveu uma revisão da literatura sobre o tema do projeto e a conceção e fundamentação de uma intervenção prevista para ser implementada numa sala de aula do 1.º ciclo.

A fundamentação teórica contém a discussão e uma reflexão detalhada e aprofundada focada (i) no entendimento de raciocínio matemático, dos tipos de raciocínio e dos processos de raciocínio, do enquadramento curricular do raciocínio matemático; (ii) nas características do ensino exploratório e de uma aula de ensino exploratório; (iii) no papel do professor na promoção do raciocínio matemático.

No que respeita à intervenção pedagógica, este estudo inclui a planificação detalhada e fundamentada de três tarefas matemáticas que visam promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos do 3.º ano de escolaridade do 1.º ciclo do Ensino Básico.

As considerações finais salientam as aprendizagens que foram realizadas com a revisão da literatura e as aprendizagens e desafios com que me deparei na preparação de um projeto de intervenção muito detalhado e fundamentado. Quanto aos desafios destaco: (i) o selecionar e a adaptação das tarefas; (ii) a antecipação das estratégias e de possíveis dificuldades dos alunos; (iii) o cuidado para não reduzir o nível de exigência cognitivo das tarefas e das questões que podem ser levantadas para ajudar um aluno a conseguir resolver

a tarefa; (iv) a escolha das resoluções e dos alunos a apresentar; (v) as questões a levantar para potencializar a promoção dos processos de raciocínio.

Palavras-chave: Raciocínio matemático; Currículo da matemática; Ensino exploratório; Ações dos professores.

Abstract

The present study, within the scope of the Master in Preschool Education and Teaching of the 1st cycle of Basic Education, focuses on promoting the development of mathematical reasoning.

Due to the pandemic situation caused by Covid-19, it was not possible to put into practice the empirical part of the project, which was associated with a research methodology of a qualitative approach. It was planned to carry out an investigation into the practice in which the data collection methods would be participant observation and audio or video recordings, and document analysis. From a methodological point of view, it was possible to carry out a theoretical study that involved a review of the literature on the subject of the project and the design and rationale of an intervention planned to be implemented in a 1st cycle classroom.

The theoretical foundation contains discussion and a detailed and in-depth reflection focused on (i) understanding mathematical reasoning, types of reasoning and reasoning processes, the curricular framework of mathematical reasoning; (ii) the characteristics of exploratory teaching and an exploratory teaching class; (iii) the teacher's role in promoting mathematical reasoning.

Regarding pedagogical intervention, this study includes the detailed and grounded planning of three mathematical tasks that aim to promote the development of reasoning in students of the 3rd year of schooling of the 1st cycle of Basic Education.

The final considerations highlight the lessons learned from the literature review and the lessons learned and challenges that I encountered while preparing a very detailed and well-founded intervention project. As for the challenges, I highlight: (i) the selection and adaptation of tasks; (ii) anticipation of students' strategies and possible difficulties; (iii) the care not to reduce the level of cognitive demand of the tasks and of the questions that can be raised to help a student to be able to solve the task; (iv) the choice of resolutions and students to present; (v) the questions to be raised to enhance the promotion of reasoning processes.

Keywords: Mathematical reasoning; Mathematics curriculum; Exploratory teaching; Teachers' actions.

Índice

Introdução 1

Capítulo I – Quadro Teórico de Referência 6

1. O que se entende por raciocínio matemático 6

    1.1. Tipos raciocínio matemático 12

    1.2. Processos de raciocínio 17

2. O currículo de matemática e o raciocínio matemático 22

3. O ensino exploratório 28

    3.1. Ensino exploratório 29

    3.2. Uma aula de ensino exploratório da Matemática 32

4. O professor e o desenvolvimento do raciocínio matemático 37

Capítulo II – Metodologia de Investigação 46

1. Paradigma, perspetiva e método investigativo 46

2. Procedimentos de recolha e de tratamento de dados 50

    2.1. Técnicas e instrumentos de recolha de dados 50

    2.2. Técnica de análise de dados 52

Capítulo III – Proposta de Intervenção 54

1. Tarefas Matemáticas que desenvolvem o raciocínio matemático 54

2. Organização da intervenção pedagógica 61

3. Planificação das tarefas selecionadas para a intervenção pedagógica. 63

    3.1. Tarefa: *Vamos plantar feijões!* 63

    3.2. Tarefa: *A turma do Miguel e o feijoeiro* 70

    3.3. Tarefa: *Partilhar feijões* 78

Considerações Finais 86

Referências Bibliográficas 93

Apêndices 99

Apêndice 1: Enunciado da tarefa *Vamos plantar feijões!* 99

Apêndice 2: Enunciado da tarefa *A turma do Miguel e o feijoeiro* 100

Apêndice 3: Enunciado da Tarefa *Partilhar feijões* 101

Índice de Figuras

Figura 1 - Raciocinar e pensar (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020, p. 7) 7

Figura 2 - Modelo de um processo de raciocínio matemático (Lannin, Ellis & Elliott, 2011, p. 11). 10

Figura 3 - Quadro conceptual para a análise do raciocínio matemático de Mata-Pereira e Ponte (2011, p. 355). 11

Figura 4 - Tarefa Chupa-Chupas 13

Figura 5 - Tarefa das Bolinhas 15

Figura 6 - Níveis de justificação de formalidade e complexidade (Mata-Pereira & Ponte, 2018b, p. 490). 20

Figura 7 - Área de Competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação, 2018, p. 6). 25

Figura 8 - Enunciado de uma tarefa (Canavarro, 2011, p.12). 34

Figura 9 - Modelo das ações do professor na condução de discussões coletivas (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013, p. 59). 43

Figura 10 - Modelo das ações da coletivas que promovem o raciocínio matemático retirado de Brocardo, Delgado, Mendes e Ponte (no prelo, p. 22). 44

Figura 11 - Princípios para design de tarefas para promover o raciocínio matemático (Quaresma, Mata-Pereira & Henriques, no prelo, p.7). 57

Figura 12 - Enunciado da tarefa Vamos plantar feijões! 58

Figura 13 - Enunciado da tarefa A turma do Miguel e o feijoeiro. 59

Figura 14 - Enunciado da tarefa Partilhar feijões. 60

Figura 15 - Esquema da intervenção pedagógica. 61

Figura 16 - Estratégia de resolução através da representação icónica. 67

Figura 17 - Estratégia da adição sucessiva do número 7. 67

Figura 18 - Estratégia de resolução por multiplicação por um produto conhecido. 68
Figura 19 - Estratégia de resolução por divisão dos números por 7..... 69
Figura 20 - Estratégia de resolução por representação gráfica. 75
Figura 21 - Estratégia de resolução através de uma tabela para chegar a uma generalização vertical. 76
Figura 22 - Estratégia de resolução através de uma tabela para chegar a uma generalização horizontal. 77
Figura 23 - Estratégia de resolução usando a representação icónica. 82
Figura 24 - Exemplo e contraexemplo através da representação icónica. 83
Figura 25 - Estratégia de resolução usando a testagem de números ímpares a partir do 7. 84
Figura 26 - Estratégia de resolução usando a divisão. 85

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Tabela de registo das estratégias utilizadas pelos alunos e respetiva ordem de apresentação na discussão coletiva. 66

Introdução

O presente relatório do projeto de investigação surge no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e incide na área da Matemática, focando-se mais precisamente no raciocínio matemático.

Os motivos da escolha desta área e tema surgem associados (i) às minhas experiências anteriores como aluna que me levam a considerar importante proporcionar uma formação matemática desafiante e interessante para os alunos e (ii) à minha curiosidade, enquanto profissional de educação, sobre a forma de pensar matemática dos alunos.

A Matemática é para mim uma área de eleição, no sentido em que as relações entre os números e os desafios matemáticos que estas nos trazem me fascinam. Creio que este fascínio surgiu devido a todos os trabalhos que fiz sobre a Matemática ao longo da minha licenciatura e mestrado e às professoras que me acompanharam ao longo da minha formação inicial que me foram desafiando e motivando a querer saber mais sobre esta ciência que para muitos, e até para mim durante alguns anos, foi, ou é, um bicho de sete cabeças.

Durante o meu percurso escolar, as aulas de matemática eram sempre iguais, isto é, a professora explicava os conteúdos, fazia no quadro dois ou três exercícios sobre os mesmos, pedia para realizarmos os exercícios do manual e, por último, corrigia os exercícios no quadro perguntando apenas a resposta ou solicitando que fossemos resolver ao quadro. Recordo-me que nunca nos era perguntado a razão de utilizarmos determinada estratégia de resolução ou se a forma como resolvemos determinados exercícios era possível aplicar noutras situações e porquê. À chegada ao Ensino Superior as coisas mudaram, as professoras começaram a perguntar o porquê e a pedir que explicássemos, que utilizássemos argumentos fundamentados e que fizéssemos afirmações matemáticas baseadas nesses argumentos. Ora, eu, como muitos outros colegas, não estávamos preparados para estas questões, ficávamos calados e sem saber o que dizer.

Passaram mais de dez anos desde que conclui o 1.º Ciclo do Ensino Básico e, ainda hoje, quando se entra numa sala deste ciclo de ensino é raro observarmos uma prática educativa em que seja dada aos alunos a oportunidade de darem e explicarem os seus pontos de vista e confrontarem as suas resoluções e argumentos com os dos seus colegas. O que me faz pensar que, enquanto profissional de educação, é necessário mudar as práticas adotadas para conseguirmos promover e desenvolver o raciocínio matemático dos alunos.

Centrando-me agora na pertinência da realização deste projeto saliento a importância que é dada, atualmente, pelas orientações curriculares em vigor e pelas que entrarão nos próximos anos letivos (*Aprendizagens Essenciais* de 2021) à capacidade de raciocinar matematicamente.

O raciocínio é uma capacidade de grande importância na vida em sociedade, uma vez que nesta surgem diversas situações problemáticas que põem à prova a nossa capacidade de pensar de forma reflexiva e fundamentada. Para solucionar estas situações é imprescindível que o ser humano seja capaz de interpretar a situação e pensar em estratégias que possam ser aplicadas para que a mesma seja resolvida, no entanto é necessário fundamentar e argumentar essas escolhas. Esta minha perceção encontra eco nas palavras de Martins et al. (2017) que consideram que raciocinar é, sem dúvida, essencial na vida social, dado que é uma capacidade que os seres humanos utilizam em diversas situações e, deste modo, os alunos, ao longo do seu percurso escolar, devem desenvolver esta capacidade dado que serão confrontados ao longo da sua vida com situações que têm de ser analisadas, interpretadas e solucionadas a partir de uma argumentação e uma tomada de posição baseada em conhecimentos sólidos e robustos.

A Matemática é uma das áreas em que é possível desenvolver o raciocínio, sendo que neste caso estamos a falar do raciocínio matemático. Este deve ser promovido em qualquer ano de escolaridade e, por esse motivo, a matemática escolar tem como um dos seus grandes objetivos de ensino e aprendizagem o desenvolvimento do raciocínio matemático (NCTM, 2007), dado

que este envolve um conjunto de processos que nos permitem chegar a conclusões coerentes e fundamentadas (Semana & Santos, 2008).

De acordo com as orientações curriculares em vigor para o ensino da matemática, ao longo da escolaridade os alunos devem compreender procedimentos, conceitos, técnicas e relações matemáticas de modo a conseguirem aplica-los na resolução de situações em diversos contextos salientando que não só os devem compreender e saber aplicar como também devem ser capazes de descrever como é que pensaram, de explicar e justificar o porquê de terem utilizado determinado procedimento, os resultados e as conclusões obtidas, ou seja, devem compreender o porquê das relações que estabeleceram serem matematicamente válidas (Ministério da Educação, 2018; Ministério da Educação, 2021).

Enquanto futura docente, considero que, o raciocínio matemático é de extrema importância na compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos dado que quando explicámos e apresentamos razões para justificar a validade das nossas afirmações ou posicionamentos necessitamos de nos basear em conceitos e conhecimentos matemáticos que os fundamentem, ou seja, é necessário aplicar esses conceitos e saber explicar os procedimentos e as técnicas utilizadas para chegar a determinadas conclusões (Boavida, 2008). Porém, para que os alunos tenham esta oportunidade é essencial que estejam numa sala de aula em que são valorizados o raciocínio e os seus processos (*idem ibidem*).

Este projeto assume ainda pertinência nas implicações que as práticas adotadas pelos professores poderão ter no ensino da matemática e, em particular, para a minha própria prática enquanto futura docente. Efetivamente, é importante que para desenvolver o raciocínio matemático, o professor dê aos seus alunos a oportunidade de expressar e comunicar as suas ideias, de analisar as tarefas que lhes são propostas e explorar hipóteses de resolução, assim como justificar as suas generalizações e conclusões com argumentos matemáticos válidos (NCTM, 2007). Deste modo, o professor deve utilizar um modelo de ensino em que os alunos possam entrevir de forma ativa no processo de ensino-

aprendizagem, em que tenham voz na sala de aula e liberdade para questionar o que está a ser dito pelo professor e pelos seus colegas (Canavarro, 2011; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2017). Por este motivo, o ensino exploratório é considerado o modelo de ensino adequado à promoção do raciocínio matemático dos alunos. Numa abordagem exploratória, a aula é estruturada em três fases: introdução, exploração, discussão coletiva e sistematização da aprendizagem realizada (Stein et al., 2008).

Deste modo, este projeto teria como objetivo principal investigar como é que os alunos, trabalhando num contexto de aulas em três fases:

1. Formulam e testam conjeturas;
2. Desenvolvem os processos de raciocínio de justificar e generalizar.

Porém, devido ao contexto pandémico que estamos atualmente a vivenciar não foi possível pôr em prática este projeto de investigação dado que não me foi permitido realizar o último estágio. Assim sendo, este relatório centra-se numa planificação e fundamentação de uma intervenção focada na promoção e desenvolvimento do raciocínio dos alunos do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Estruturalmente, este relatório é composto por três capítulos. No primeiro capítulo apresento o Quadro Teórico de Referência, onde procuro compreender e discutir (i) o que se entende por raciocínio matemático, os tipos de raciocínio e os processos de raciocínio, (ii) o currículo de matemática e as orientações que o mesmo tem sobre o raciocínio matemático, (iii) o ensino exploratório, que engloba as caraterísticas do ensino exploratório na matemática, identificando as diferenças que existem entre este modelo de ensino e o ensino direto, e as particularidades de uma aula de ensino exploratório no ensino da matemática e, (iv) a as ações do professor para promover o raciocínio matemático.

No segundo capítulo, delineio uma proposta de metodologia de investigação que poderia ser adotada, no caso de este projeto ser implementado. Deste modo, neste capítulo enuncio e justifico o paradigma, a perspetiva e o método investigativo em que se inscreve este projeto e apresento os procedimentos de recolha e tratamento de dados selecionados.

No que respeita terceiro capítulo, denominado de Proposta de Intervenção Pedagógica, faço a descrição da minha proposta intervenção pedagógica. Isto é, neste momento começo por apresentar e justificar as tarefas matemáticas selecionadas/adaptadas/concebidas no âmbito deste estudo. Em seguida realizo a descrição de uma proposta de organização de intervenção pedagógica e, por último, apresento uma planificação detalhada, descrevendo a forma como as aulas seriam preparadas e concretizadas, dando exemplos de estratégias de resolução que poderiam ser apresentadas pelos alunos e possíveis questões que poderiam ser feitas ao longo das explorações e discussões coletivas das tarefas.

Por último, são apresentadas as considerações finais sobre este projeto de investigação hipotético, enumerando eventuais conquistas e dificuldades, e uma breve reflexão sobre todo o processo desenvolvido.

Capítulo I – Quadro Teórico de Referência

O presente capítulo incide na apresentação e discussão da fundamentação teórica que está na base deste projeto de investigação. Começo por discutir o que se entende por raciocínio matemático, por caracterizar os tipos de raciocínio matemático e por identificar vários processos de raciocínio. Em seguida, discuto aspetos referentes ao raciocínio matemático no ensino, focando o modo como é visto no currículo de matemática, qual a importância que lhe é reconhecida na formação matemática dos alunos e qual o papel do professor no desenvolvimento do raciocínio matemático dos seus alunos. O último ponto deste capítulo será dedicado à caracterização do que se entende por ensino exploratório e à discussão de como ele pode apoiar o desenvolvimento e evolução do raciocínio matemático dos alunos.

1. O que se entende por raciocínio matemático

Os termos pensar e raciocinar são frequentemente utilizados como sinónimos, mas será que quando pensamos estamos sempre a raciocinar? A verdade é que ao se procurar a definição destes conceitos, é possível verificar que o ato de pensar não é equivalente ao ato de raciocinar. O pensamento é uma atividade intelectual que se direciona para a construção de um novo saber a partir da reflexão, quer sobre objetos e tomadas de decisões como ao nível da realização de ações (Japiassu & Marcondes, 1996), enquanto “raciocinar é pensar de acordo com princípios lógicos, de modo que partindo de determinadas premissas chega-se, necessariamente, a determinadas conclusões.” (Bulhões, 2007, p. 256). Nesta perspetiva considera-se que o raciocínio é um processo que parte do que se sabe para chegar a um novo conhecimento, sendo que o ato de raciocinar está associado a uma situação problemática que necessita de uma solução, a análise da situação em estudo, a formulação de hipóteses para resolver essa mesma situação, a testagem das hipóteses formuladas e, por último, a aplicação da hipótese selecionada (Ávila, 1967).

Deste modo, é possível afirmar que nem sempre pensar é racicionar. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), reforçam esta ideia através de um diagrama (Figura 1) em que representam o raciocinar como um subconjunto do

pensar. Estes autores consideram, tal como Ávila (1967), que o significado de raciocinar é mais restrito do que o de pensar, uma vez que raciocinar implica pensar de uma forma específica.

Figura 1 - Raciocinar e pensar (Ponte et al., 2020, p. 7)

Por exemplo, quando se responde que 3x2 é igual a 6 ou que 2+2 é igual a 4, não existe nenhum tipo de raciocínio, no entanto, antes de responder, pensou-se sobre a resposta. Contudo, o cálculo de uma simples operação como as anteriores pode envolver um raciocínio matemático, dependendo da forma como é interpretada e resolvida. Isto é, imaginemos uma situação na qual um indivíduo, para responder à questão «Quanto é 9x7? justifica a tua resposta.», opta por, primeiramente, realizar a operação 10x7, retirando depois 7 ao produto. Esta forma de proceder perante a indicação de determinar o valor de 9x7, mostra que o indivíduo analisou a questão que lhe foi apresentada e recorreu a factos já conhecidos, ou seja, aos seus conhecimentos prévios, estabelecendo relações entre um produto que conhece e o produto que quer determinar, operacionalizando o seu conhecimento que traduz o seu entendimento da tabuada do 7.

Raciocinar é uma capacidade que os seres humanos possuem e utilizam em diversas situações. É possível afirmar que é uma capacidade comum a várias áreas e, por essa razão, dificulta o estabelecer de uma definição para raciocínio matemático, dado que o termo raciocinar é usado com um sentido amplo no dia-a-dia (Yackel & Hanna, 2003). Raciocinar matematicamente não inclui apenas a capacidade de executar um procedimento ou a compreensão de uma ideia, conceito ou noção matemática, pois as realizações destas ações não nos permitem afirmar que existe um raciocínio. Raciocínio envolve um conjunto de processos – como a formulação de conjeturas, generalizar e justificar – que permitem chegar a conclusões coerentes e fundamentadas (Semana & Santos, 2008), pelo que não é simples encontrar uma definição que englobe todas as suas caraterísticas. No entanto, apesar desta complexidade, existe uma grande

unanimidade por parte dos autores ligados a este tema em considerar que o raciocínio matemático é fazer inferências justificadas (Battista, 2017; Lannin, Ellis, & Elliott, 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2013; Mata-Pereira & Ponte, 2016; Mata-Pereira & Ponte, 2018; Oliveira, 2008; Ponte et al., 2020).

Globalmente, Oliveira (2008, p. 3) está de acordo com a definição anterior, chamando a atenção para a complexidade dos processos mentais que envolvem o raciocínio. Mais precisamente, este autor considera que o raciocínio matemático é "[…] um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio).". Oliveira (2008) explica que tradicionalmente se considerava que as obtenções destas novas proposições se faziam através de um raciocínio dedutivo e alerta para o erro de se acreditar nesta ideia redutora de raciocínio matemático, uma vez que ela deixa por explicar o que vai além do raciocínio dedutivo, salientando que não se pode confundir raciocínio matemático com raciocínio dedutivo.

Oliveira (2008) realça ainda que existe todo um conjunto de raciocínios matemáticos ligados à descoberta de conhecimento novo e que não se devem valorizar só os produtos na matemática, pois o processo de como se chegou a esse produto também é fundamental. Salienta, ainda, que a análise de situações-problema e a criatividade que se exerce quer para se encontrar relações entre casos particular, quer entre um conjunto de dados ou até mesmo as representações que se usam durante todo o processo são essenciais para se interpretar e compreender o raciocínio que foi realizado.

A ideia de Oliveira (2008) está de acordo com o que Aliseda (2003) afirma sobre a interpretação tradicional de raciocínio matemático que associa raciocínio matemático a apenas um tipo de raciocínio, o raciocínio o dedutivo. Esta autora destaca a existência de outros tipos de raciocínio, o indutivo e o abdutivo, que, embora não tendo um grau de certeza como o raciocínio dedutivo e as suas conclusões não sejam irrefutáveis, também eles são rigorosos e importantes, uma vez que o indutivo permite fazer e testar inferências gerais sobre a situação em estudo e o abdutivo possibilita a criação de hipóteses plausíveis para fenómenos intrigantes (Aliseda, 2003).

Para Battista (2017) a matemática é algo muito visual e só é possível compreendê-la se conseguirmos construir sentido para o que se aprende. Do seu ponto de vista, o raciocínio matemático é um processo em que através da "manipulação e análise de objetos, representações, diagramas, símbolos ou declarações se retiram conclusões baseadas em evidências ou premissas" (p.1). O autor concorda com a definição apresentada no início deste capítulo, isto é, que raciocinar matematicamente é efetuar inferências justificadas, sendo que estas mesmas premissas e justificações incluem a manipulação e a análise, analítica e visual, de objetos matemáticos através do que designa por *sense making*, entendido como um processo de compreensão de ideias e conceitos no sentido de identificar, descrever, explicar e aplicá-los de forma correta (Battista, 2017).

Indo para além do que já foi discutido sobre o raciocínio matemático, outros autores caracterizam-no recorrendo adicionalmente a um conjunto de processos que, neste ponto serão apenas mencionados e, que posteriormente, serão apresentados e caracterizados de forma mais pormenorizada. Mais concretamente especificam o seu entendimento de vários processos de raciocínio como conjeturar, generalizar e justificar.

Lannin et al. (2011) afirmam que é fácil pensar que o raciocínio matemático é um processo que apenas envolve saber o porquê de determinadas coisas serem matematicamente apropriadas e ser capaz de resolver diferentes tipos de problemas particulares. Porém, defendem que não basta conhecer as noções matemáticas importantes, também é necessário compreender como é que essas mesmas noções se podem relacionar entre si, uma vez que só assim é possível justificar ou refutar conjeturas, tendo por base ideias e procedimentos matemáticos. Deste modo, definem raciocínio matemático como "[…] um processo dinâmico envolvendo conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos." (p. 12).

Este processo dinâmico, representado na Figura 2, não é simples, pois mesmo que seja composto por três fases e que exista uma ordem para que se passe por cada uma, não quer dizer que não se possa voltar atrás ao longo do processo. Isto é, normalmente, o processo começa pela formulação de conjeturas ou generalizações, seguindo-se a análise dessas conjeturas de modo

a perceber o porquê de estas serem válidas ou inválidas (investigar o porquê), e, por último, o momento de justificar ou refutar a razão pela qual as conjeturas são, ou não, válidas (Lannin et al., 2011). Contudo, é possível voltar às conjeturas iniciais para as rever ou alterar durante o raciocínio, possibilitando, desta forma, avançar ou recuar em qualquer momento deste processo (*idem, ibidem*).

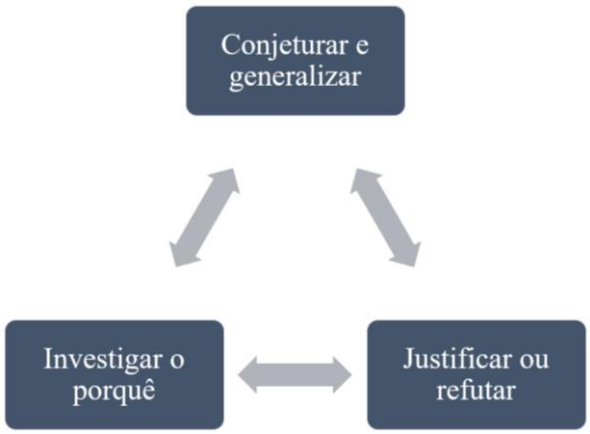


Figura 2 - Modelo de um processo de raciocínio matemático (Lannin et al., 2011, p. 11).

Na perspetiva de Mata-Pereira e Ponte (2016), raciocinar de forma matemática envolve fazer afirmações baseadas nas informações que já conhecemos para se construir novas conclusões, sendo que estas devem ser justificadas a partir de propriedades, conceitos ou noções matemáticas. Assim, é possível afirmar que "[…] a capacidade de raciocinar matematicamente inclui processos como formular questões, formular e testar conjeturas […] e realizar justificações." (Mata-Pereira & Ponte, 2013, pp. 18-19).

Mata-Pereira e Ponte (2011) propõem um quadro conceptual para a análise do raciocínio matemático (Figura 3) que se inicia com o levantamento de questões, seguindo-se a formulação de conjeturas e o uso de estratégias de resolução, com vista a validá-las ou refutá-las. Este quadro conceptual assenta num processo cíclico em que existe um formular, um testar de uma determinada estratégia de resolução e a possibilidade de a reformular. Esta forma de analisar o raciocínio matemático, para além de realçar o conjunto de processos que fazem parte da capacidade de raciocinar matematicamente, apontados pelos autores, também reúne aspetos salientados por Battista (2017), visto que

reconhece a importância das representações, que são utilizadas no decorrer do raciocínio, e da atribuição e construção de sentido (*sense making*), tanto ao nível dos objetos em estudo, como das ações realizadas durante o processo (Mata-Pereira & Ponte, 2011).

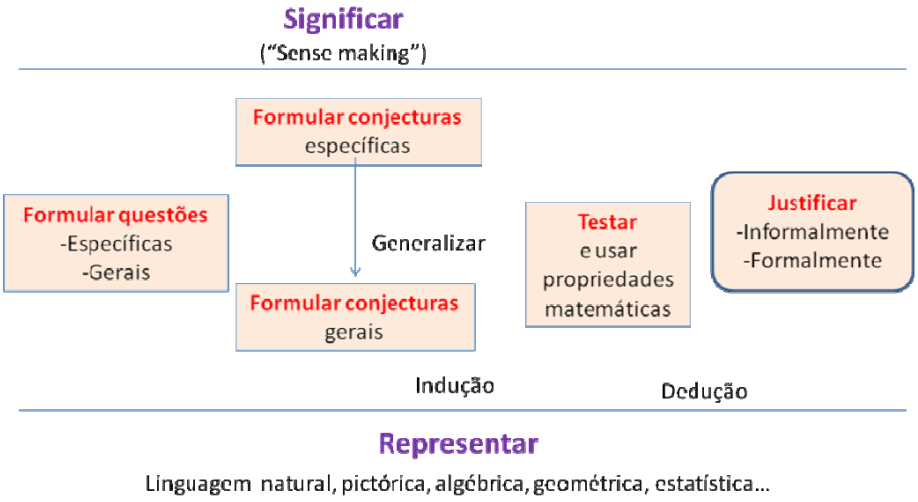


Figura 3 - Quadro conceptual para a análise do raciocínio matemático de Mata-Pereira e Ponte (2011, p. 355).

Ao analisar as Figuras 2 e 3, é possível identificar várias semelhanças no que respeita aos processos de raciocínio que os autores incluem nas suas interpretações de raciocínio matemático, uma vez que tanto Lannin et al. (2011) como Mata-Pereira e Ponte (2011) reconhecem que conjeturar, generalizar e justificar são processos indispensáveis no raciocínio matemático. Assim, conclui-se que estes autores suportam a posição adotada neste trabalho sobre o raciocínio matemático ser um processo em que se realizam inferências matemáticas fundamentadas.

Para Jeannotte e Kieran (2017), o raciocínio matemático tem quatro aspetos fundamentais: (i) a dicotomia entre atividade e produto; (ii) a natureza inferencial; (iii) as funções e o objetivo do raciocínio matemático; e (iv) os apectos estruturais e processuais. Para estas autoras, é a articulação entre estes quatro elementos e uma perspetiva cognitiva que defende que a comunicação é importante para a realização de atividades, que nos autoriza a afirmar que raciocionar matematicamente é "um processo de comunicação […] que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos" (Jeannotte & Kieran, 2017, p. 9). Situando-se na linha do que aqui foi discutido até ao

momento salientam a relação direta que existe entre os tipos de raciocínio (aspeto estrutural) e os processos de raciocínio (aspeto processual).

Em suma, raciocinar matematicamente é fazer inferências justificadas. Envolve a análise (analítica e visual), a interpretação de objetos, situações e problemas matemáticos, o estabelecer de relações entre as informações que são fornecidas procurando formular conjeturas e generalizações com vista à sua posterior validação ou refutação.

1.1. Tipos raciocínio matemático

De acordo com Aliseda (2003) e Oliveira (2008), identificam-se os seguintes tipos de raciocínio: (i) o dedutivo; (ii) o indutivo; e (iii) o abdutivo.

O raciocínio dedutivo, também denominado de lógico ou lógico-dedutivo, é considerado como um raciocínio formal que está relacionado com as demonstrações e a lógica, ocupando um papel fundamental na estrutura da Matemática, dado que tem como função a validação de conhecimentos (Oliveira, 2002a; Oliveira, 2008; Ponte et al., 2012; Ponte et al., 2020).

Raciocinar dedutivamente, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2008, p. 89), inclui "[…] encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento". Desta forma, desde que não exista deduções com erros, as conclusões produzidas através do raciocínio dedutivo são irrefutáveis, uma vez que se apoiam num conjunto de afirmações e regras matemáticas que são assumidas como verdadeiras (Oliveira, 2008; Ponte et al., 2020).

A ideia defendida por Ponte et al. (2008), Oliveira (2008) e Ponte et al. (2020), está em concordância com Aliseda (2003) que afirma que no raciocínio dedutivo existe uma relação inquebrável e lógica entre as afirmações feitas e as conclusões a que se chega, realçando dois aspetos deste tipo de raciocínio: a certeza e a definição clara das suas caraterísticas. Em relação ao primeiro aspeto, a autora explica que este diz respeito à relação que é estabelecida entre as premissas e as conclusões, visto que as conclusões retiradas decorrem desse mesmo conjunto de premissas (*idem*, *ibidem*). Relativamente ao segundo, Aliseda (2003) refere que este está relacionado com o tipo de conclusões produzidas, isto é, as conclusões a que se chega por meio do raciocínio dedutivo

são incontestáveis, dado que tendo sido provado com base nas leis da matemática não existe qualquer dúvida em relação à sua validade.

Considerando tudo o que foi referido anteriormente pelos diversos autores a respeito do raciocínio dedutivo, é possível caraterizá-lo como um raciocínio caraterístico da matemática, que sem dúvida alguma é rigoroso, ou seja, quando uma afirmação é provada por este tipo de raciocínio temos a certeza absoluta que é verdadeira, que tem como principal função provar a verdade matemática de uma determinada afirmação e não a descoberta de novo conhecimento e que se baseia no conjunto de leis da matemática para validar ou refutar as asserções que foram realizadas.

Tendo como exemplo a tarefa *Chupa-chupas*[1], cujo enunciado está representado na Figura 4, um possível raciocínio dedutivo poderia ser «Se o resto é 1 então o número de chupa-chupas é ímpar. Como o resto é 1, então o número de chupa-chupas tem de ser ímpar.», visto que para provar que a afirmação realizada é verdadeira, recorre-se às leis matemáticas relacionadas com a operação divisão e à lógica proposicional usando um silogismo *(modus ponens*) para validar a conclusão que se obteve.

André e Rute receberam um saco de chupa-chupas. Partilharam os chupa-chupas entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram os seus amigos, Ana, Rui e António que também queriam chupa-chupas. Decidiram então partilhá-los novamente e sobraram 2 chupa-chupas. Quantos chupa-chupas podiam estar no saco?

Figura 4 - Tarefa Chupa-Chupas

No que respeita ao raciocínio indutivo, este é heurístico e desenvolve-se quando se concebem conclusões gerais a partir da observação atenta e análise de uma caraterística comum que existe em vários casos particulares (Oliveira, 2002a; Oliveira, 2002b; Oliveira, 2008; Ponte et al., 2012; Ponte et al., 2020).

A indução está relacionada com a analogia. Por outras palavras, ao fazer-se uma analogia está a comparar-se uma situação com algo que nos é conhecido, o que também acontece no raciocínio indutivo isso (Ponte et al.,

[1] Tarefa adaptada da tarefa "Lots of Lollies", disponível em: https://nrich.maths.org/2360, pela Equipa do Projeto REASON.

2012). O processo de raciocínio indutivo tem início com a análise dos vários casos particulares, de modo a ser possível encontrar e identificar uma caraterística em comum entre eles, para que, posteriormente, seja possível estabelecer relações entre esse aspeto com o intuito de se conseguir formular generalizações (Lannin et al., 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2016; Mata-Pereira & Ponte, 2018a).

Para Aliseda (2003), o raciocínio indutivo, mesmo não tendo um grau de certeza como o raciocínio dedutivo, é muito importante e rigoroso. A autora explica que um raciocínio que recorre à indução é validado de forma empírica através da testagem e da experimentação e, por isso, é revogável. Por outras palavras, esta autora diz-nos que as generalizações que se efetuam no raciocínio indutivo advêm da expansão da análise das informações das situações em estudo e da experimentação e testagem de várias hipóteses de resolução, sendo que, por esse motivo, não é possível ter a certeza se essas generalizações são, ou não, válidas.

O raciocínio indutivo, tendo em consideração o que é dito pelos vários autores aqui mencionados, pode ser caraterizado como um raciocínio que: (i) vai do concreto para o geral, ou seja, começa com a análise de dados específicos para posteriormente os expandir para o geral, com o objetivo de explicar algo; (ii) procura elementos comuns entre casos particulares para formular generalizações; e (iii) utiliza como métodos a testagem e a experimentação para validar as generalizações.

Um exemplo de raciocínio indutivo é a verificação, na tarefa dos *Chupa-Chupas* (Figura 4), de que, para cumprir as duas condições do enunciado, o 7, o 17, o 27, o 37 e o 47 são soluções possíveis e a generalização de que o número de chupa-chupas que se encontram dentro do saco termina em 7. Ao mostrar algumas das soluções possíveis, estamos no momento de testagem/experimentação do número de chupas que podem constar no saco e quando se generaliza que este número tem de terminar em sete é por ser detetado que todos os números têm na sua constituição o algarismo sete e que este se encontra sempre na casa das unidades.

A resolução de tarefas em que existe uma sequência ou padrão, e em que se tem de descobrir qual será a constituição de qualquer figura da sequência, como a tarefa da Figura 5[2] ilustra, envolve, igualmente, o raciocínio indutivo. Neste tipo de tarefa, é sempre possível usar o raciocínio indutivo, uma vez que partindo da observação das figuras é possível encontrar o que se mantém e o que se altera de uma figura para a outra, estabelecendo, desta forma, relações entre as figuras da sequência que, posteriormente, serão expandidas através da formulação de uma generalização e da sua justificação que permita chegar a uma figura de qualquer ordem da sequência.

Observa a sequência:

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

1. Constrói a figura seguinte.
2. Quantas bolas são necessárias para construir cada uma das figuras desenhadas?
3. Quantas bolas são necessárias para construir a 5.ª figura? E a 20.ª? Explica como pensaste.
4. Explica, por palavras tuas, de quantas bolas precisas para desenhar uma figura qualquer na sequência.

Figura 5 - Tarefa das Bolinhas

O raciocínio abdutivo envolve explorar os dados para se formular hipóteses plausíveis para uma ocorrência, tendo em conta a relação que existe entre um conjunto de dados, e testá-las de modo a validar o seu significado numa determinada situação (Oliveira, 2002b; Oliveira, 2008; Mata-Pereira & Ponte, 2016; Ponte et al., 2020).

Oliveira (2002a) refere que o raciocínio abdutivo tem como função a explicação de uma situação que foi observada através de uma hipótese verosímil, realçando, deste modo, o seu papel na construção de conhecimento, no sentido em que gera novas hipóteses para explicar o que foi observado.

Oliveira (2002a) está em consonância com Aliseda (2003), que não só reforça a ideia de que o raciocínio abdutivo é invocado com o objetivo de explicar uma observação a partir da criação de hipóteses prováveis, como também

[2] Tarefa retirada de Pimentel, T.; Vele, I.; Freire, F.; Alvarenga, D. & Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos: Tarefas e Desafios para a sala de aula*. Lisboa: Texto Editores, LDA.

explica que estas hipóteses são criadas a partir de uma lei geral que é interiorizada pela pessoa que raciocina e, por essa razão, podem ser refutadas se forem acrescentadas informações adicionais ao seu conhecimento. Por exemplo, se eu disser que «ontem à noite choveu, pois o chão da rua está molhado» estou a raciocinar de forma abdutiva, isto é, eu sei que se chover o chão da rua fica molhado, é um conhecimento que eu tenho por já ter observado esse fenómeno. Por isso, se ao acordar vejo que o chão da rua está molhado, posso concluir que choveu durante a noite, embora possam existir diversas outras razões para o chão estar molhado.

Atendendo ao que foi discutido sobre o raciocínio abdutivo, torna-se importante destacar que este tipo de raciocínio é intuitivo, realiza inferências a partir das observações e tem como principal função a construção de conhecimento através da criação de hipóteses plausíveis para as situações em estudo (Aliseda, 2003; Mata-Pereira & Ponte, 2016; Ponte et al., 2020; Oliveira 2002a; Oliveira, 2002b; Oliveira, 2008).

Tendo como exemplo a tarefa dos Chupa-chupas (Figura 4), quando se analisa a informação que é dada no enunciado e se formula a hipótese de que o número de chupa-chupas deve ser ímpar, estamos na presença de um raciocínio abdutivo. Isto porque (i) o facto observado é que ao dividir-se os chupas por duas pessoas sobra 1 e (ii) o conhecimento que se detém e está interiorizado diz-nos que os restos das divisões nos permitem determinar se um número é par ou ímpar, pelo que (iii) é provável que o número de chupa-chupas que se encontra no interior do saco seja ímpar.

Importa salientar que os tipos de raciocínio aqui apresentados (dedutivo, indutivo e abdutivo) são importantes no raciocínio matemático. Ainda assim, durante vários anos, foi defendido que o raciocínio matemático era apenas dedutivo, mais precisamente lógico-dedutivo (Ponte et al., 2020). Atualmente, considera-se que estes três tipos de raciocínio são complementares uns dos outros e que cada um é insubstituível, uma vez que o abdutivo e o indutivo permitem a criação de novos conhecimentos a partir de generalizações e da criação de hipóteses prováveis, enquanto o dedutivo faz a sua validação com base em propriedade, conceitos, ideias e noções matemáticas (processo de justificação) (Ponte et al., 2020).

Em síntese, o raciocínio matemático pode ser de três tipos diferentes: (i) o dedutivo, que é caraterístico da matemática, de um grau de rigor máximo e com a função de provar a verdade matemática, isto é, validar ou refutar as inferências tendo como base as leis matemáticas; (ii) o indutivo, que parte de dados específicos de casos particulares para a formulação de generalizações, sendo que para as realizar encontram relações entre os dados da situação em estudo e para as validar usa-se a testagem e a justificação; e (iii) o abdutivo, que é um tipo de raciocínio intuitivo e que tem como principal função produzir conhecimento a partir da construção de hipóteses explicativas para os fenómenos observáveis. É de salientar que não só todos estes tipos de raciocínio podem ser utilizados em simultâneo numa única tarefa matemática, como se complementam, dado que, efetivamente, verifica-se, tal como é mencionado por Jeannotte e Kieran (2017), que existe uma relação entre o aspeto estrutural do raciocínio, isto é, as caraterísticas estruturais dos diferentes tipos de raciocínio matemático, e o aspeto processual (os processos de raciocínio).

1.2. Processos de raciocínio

Raciocinar matematicamente envolve uma diversidade de processos de raciocínio que derivam do modo de exploração de objetos matemáticos ou das relações que existem entre eles (Jeannotte & Kieran, 2017), destacando-se o comparar, o exemplificar, o classificar, o conjeturar, o generalizar e o justificar.

O processo de comparar permite inferir uma dada afirmação em relação a objetos ou relações matemáticas a partir da procura de semelhanças e diferenças entre eles (Jeannotte & Kieran, 2017). Este processo pode ocorrer em conjunto com outros processos de raciocínio, como por exemplo o generalizar (*idem, ibidem*). Já o processo de exemplificar corresponde a um processo que tem como função gerar elementos, com base nos dados de uma situação matemática, que apoiem outros processos de raciocínio, mais precisamente, os que têm como finalidade encontrar semelhanças e diferenças entre um conjunto de objetos e os que estão relacionados com a validação ou refutação de premissas (Jeannotte & Kieran, 2017). Segundo estas mesmas autoras, classificar é um processo que permite fazer inferências sobre as classes de objetos com base nas suas propriedades e definições.

Um outro processo de raciocínio matemático, destacado por diversos autores (Brocardo, Delgado, Mendes & Ponte, no prelo; Jeannotte & Kieran, 2017; Lannin et al., 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2013), é o conjeturar. O processo de conjeturar "[…] consiste em produzir afirmações que se espera que sejam verdadeiras" (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p. 19). Deste modo, este processo tem como elemento central a procura de semelhanças, diferenças e regularidades, uma vez que para realizar conjeturas, ou seja, afirmações, é imprescindível o estabelecer de relações entre objetos ou fenómenos matemáticos (Brocardo et al., no prelo; Jeannotte & Kieran, 2017). Porém, o seu valor epistémico é provável, sendo, por isso, necessários outros processos de raciocínio matemático para determinar a sua veracidade (Jeannotte & Kieran, 2017).

A conjetura pode ser caraterizada como cíclica, dado que envolve enunciar de forma clara afirmações que têm a possibilidade de serem verdadeiras, verificar se a afirmação formulada cobre todos os casos da situação que está a ser trabalhada, desconfiar da validade da conjetura, tentando arranjar formas de refutá-la e, por último, perceber a razão pela qual ela é verdadeira ou, caso não seja, modificá-la, voltando ao início do ciclo (Jeannotte & Kieran, 2017). Assim, Lannin et al. (2011) consideram que a conjetura é uma forma de entrar no raciocínio matemático, uma vez que as afirmações enunciadas são suposições que requerem a exploração de relações matemáticas e a identificação de evideâncias que as suportem ou refutem.

Generalizar e justificar são dois processos de raciocínio cuja importância se destaca no raciocínio matemático (Brocardo et al., no prelo; Mata-Pereira & Ponte, 2013). Generalizar consiste em fazer inferências gerais, sobre ideias, procedimentos ou propriedades válidas para um determinado conjunto de objetos matemáticos (Brocardo et al., no prelo; Mata-Pereira & Ponte, 2013; Mestre & Oliveira, 2014). De acordo com Lannin et al. (2011), as generalizações podem ser realizadas através da identificação de elementos comuns entre diferentes situações, exemplos e problemas matemáticos ou da expansão do raciocínio, em que se pensa sobre as relações e propriedades matemáticas de forma mais ampla. Deste modo, o generalizar pode ser visto como uma forma poderosa de pensar por envolver a utilização e a clarificação de termos, símbolos

e representações, pois para que seja possível identificar padrões, elementos ou propriedades comuns e estabelecer relações matemáticas entre os mesmos, é essencial saber clarificar as definições, os conceitos e os processos matemáticos que estão presentes no raciocínio, uma vez que só desta forma será possível validar ou refutar as generalizações (Lannin et al., 2011). Assim sendo, o processo de generalizar é considerado como importante no apoio à capacidade de pensar de forma ampla e flexível sobre ideias matemáticas e as relações que estas podem estabelecer entre si (Lannin et al., 2011).

Justificar consiste na construção de uma sequência de argumentos lógicos apoiados em propriedades, conceitos, ideas ou procedimentos matemáticos (Brocardo et al., no prelo; Lannin et al., 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2013; Mata-Pereira & Ponte, 2016). As justificações incluem tanto afirmações válidas como inválidas e envolvem não apenas a validação de conjeturas ou generalizações, mas, também, a sua refutação, dado que ambos os processos de raciocínio produzem afirmações dos dois tipos (Lannin et al., 2011). Deste modo, é essencial reconhecer que para providenciar uma justificação válida, de acordo com Lannin et al. (2011), é necessário estabelecer uma sequência lógica de argumentos que sejam reconhecidos por todos como verdadeiros, para ser possível chegar a uma conclusão. Por outro lado, um único contraexemplo pode refutar uma conjetura ou uma generalização.

Uma justificação válida é mais do que mostrar que uma determinada afirmação é verdadeira, pois esta tem de explicar o porquê (Lannin et al., 2011). Porêm, nem sempre as justificações corretas incluem a razão pela qual as premissas são válidas em todo o domínio da situação ou problema em estudo, por isso, tonar-se, por vezes, necessário expandir a justificação de modo a provar que esta não se aplica apenas a um exemplo particular (Lannin et al., 2011).

Para Lannin et al. (2011) as justificações matemáticas são uma componente crítica do processo de raciocínio e têm poder matemático, pois não só envolvem várias componentes importantes como a criação de argumentos, o explicar do porquê de uma conjetura ou generalização ser válida ou mostrar, se for o caso, a razão pelo qual é falsa e compreender a importância do papel das

definições matemáticas e dos contraexemplos, como também incluem avaliar argumentos.

Uma justificação matemática não se apoia em argumentos baseados em autoridade, ou seja, que são referidos por alguém que tem autoridade, perceções, exemplos ou senso comum (Lannin et al., 2011). Desta forma, a avaliação dos argumentos é imprescindível para se obter uma justificação válida. Assim sendo, envolve determinar se os argumentos incluem premissas corretas ou erróneas, se as conclusões foram validadas com lógicas erradas ou se a validade do argumento inclui todos os casos possíveis da situação matemática ou apenas uma parte da mesma (Lannin et al., 2011). Estes autores, explicam, ainda, que as justificações podem ter diferentes graus de formalidade e complexidade, ou seja, podem ser completas, parcialmente corretas ou erradas, contudo, permanecem como um processo de raciocínio. Nesse sentido, Mata-Pereira e Ponte (2018b) apresentam um esquema (Figura 6) em que distinguem os diferentes graus de complexidade e de formalidade que o processo de justificação pode assumir.

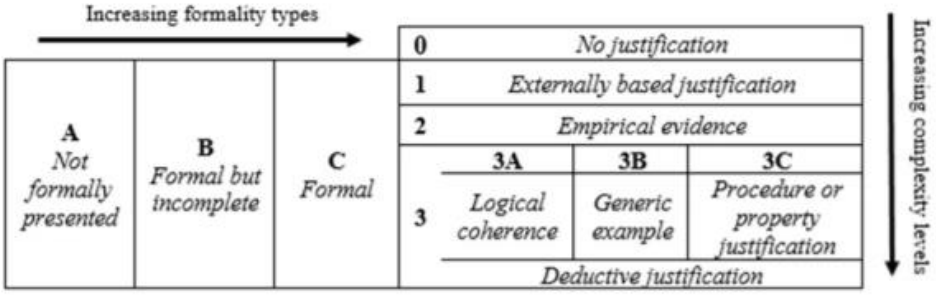


Figura 6 - Níveis de justificação de formalidade e complexidade (Mata-Pereira & Ponte, 2018b, p. 490).

Na Figura 6 é possível observar que as justificações, ao nível da formalidade, situam-se entre três níveis diferentes: (i) não formal, em que a justificação não é apresentada de forma formal, contudo está associada ao modelo de ação da pessoa que a realizou; (ii) formal, mas incompleta, em que as inferências apenas se baseiam em elementos da situação em estudo; e (iii) formal, em que as justificações são suportadas através de uma cadeia de inferências lógicas relacionadas tanto com os dados da situação em estudo como pelo conhecimento considerado como verdadeiro. Mata-Pereira e Ponte

(2018b) referem que estes três níveis são propostos por Brousseau e Gibel (2005) e que o conceito de justificação formal, presente nestes níveis, depende do que se considera ser formal numa determinada situação para o nível de conhecimento dos indivíduos que estão a realizá-la.

Mata-Pereira e Ponte (2018b), relativamente aos graus de complexidade de uma justificação, explicam que estes níveis advêm do trabalho de diversos autores, como Balacheff (1988), Sowder e Harel (1998), Lannin (2005) e Carraher, Martinez e Schliemann (2008), e identificam (ver Figura 6) quatro níveis distintos (sem justificação, justificação baseada externamente, evidência empírica e justificação dedutiva), sendo que o último está divido em três subníveis (coerência lógica, exemplo genérico e justificação a partir de um procedimento ou propriedade). No que respeita a cada nível: o nível 0, tal como indica a sua denominação, o raciocínio não tem qualquer justificação incluída; o nível 1, representa as justificações que dependem de outros indivíduos ou de materiais de referência; o nível 2, reflete uma justificação que tem como base um exemplo particular; o nível 3, retrata uma justificação de natureza dedutiva, sendo que no primeiro subnível a justificação base-se em princípios lógicos, no segundo a justificação refere-se a um determinado exemplo e no terceiro, e último subnível, a justificação é fundamentada através de argumentos de natureza dedutiva que não estão relacionados com nenhum exemplo específico.

Em suma, os processos de raciocínio são a forma como conseguimos obter e relacionar informação a partir de outras informações, sendo que entre os vários processos que existem destacam-se o comparar, o exemplificar, o classificar, o conjeturar, o generalizar e o justificar. Os processos de generalizar e de justificar são considerados os mais importantes, uma vez que através da generalização é possível reconhecer padrões ou agrupar "[…] propriedades, conceitos e procedimentos gerais que se pretendem válidos para um conjunto abrangente de condições ou objetos matemáticos" (Mata-Pereira & Ponte, 2016, p. 38), possibilitando pensar em matemática de forma ampla e flexível. Com a justificação é possível validar ou refutar as generalizações formuladas através de argumentos baseados em conhecimentos já estabelecidos que permitem a construção de afirmações lógicas que levaram à chegada de conclusões (Lannin

et al., 2001), sendo que estas podem ter diferentes níveis de formalidade e de complexidade.

2. O currículo de matemática e o raciocínio matemático

A matemática, de acordo com Sá (2000), pode ser olhada por diversas perspetivas, mas quando vista como uma área do conhecimento e como uma área ensino acarreta o desenvolver de capacidades muito importantes para o nosso intelecto, como por exemplo o raciocínio.

A nível internacional, uma referência que é muito considerada, habitualmente ao nível curricular da Matemática, é a do National Council of Teachers of Mathematics. Estes desenvolveram um conjunto de princípios e normas que têm como principal objetivo oferecer aos professores uma perspetiva que os oriente num contínuo desenvolvimento da educação matemática, uma vez que os princípios descrevem características de como promover aulas de matemática de alta qualidade e as normas descrevem quais os conteúdos e os processos matemáticos que os alunos deverão aprender a longo dos anos de escolaridade (NCTM, 2007).

Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) destacam a importância de os alunos compreenderem e acreditarem "[…] que a matemática faz sentido, através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjeturas" (p. 61), realçando que o raciocínio matemático está presente em todas as áreas de conteúdos e em todos os anos de escolaridade, mesmo que o grau de exigência, rigor e aprofundamento seja distinto consoante o nível de conhecimentos dos alunos (NCTM, 2007). Estas mesmas orientações internacionais defendem que para os alunos compreenderem a matemática e para que possam dar sentido às aprendizagens necessitam de desenvolver as suas capacidades de pensamento através da utilização de diferentes estratégias de resolução e tipos de raciocínio. Para tal, sublinham não só a importância do selecionamento das tarefas por parte dos professores, mas também na forma como estas são discutidas e analisadas em sala de aula, uma vez que consideram que a comunicação faz parte da aprendizagem dado que a discussão e a comparação de ideias entre

os alunos “[…] poderão contribuir para alterar, consolidar ou fortalecer os seus argumentos ou raciocínios.” (p.64).

Em Portugal, o currículo de matemática, ao longo dos anos, segundo Porfírio (1998), tem sofrido algumas alterações significativas. Elas refletem, principalmente, as necessidades sociais e políticas, dado que o currículo é influenciado pelo contexto social e politico que se vive no país, a forma como a Matemática é encarada, uma vez que será a partir do que é considerado importante que se decide quais os temas a incluir no currículo, e as teorias/práticas educativas, ou seja, como deve decorrer o processo de ensino-aprendizagem (o papel do professor, o papel dos alunos, os materiais, os recursos, as estratégias que contribuem para facilitar as aprendizagens, entre outros).

De acordo com Ponte (2009), uma grande mudança curricular foi o Programa de Matemática do ensino básico de 2007, pois veio, por um lado, reajustar os programas anteriores através da introdução de alterações nas finalidades e nos objetivos gerais do ensino da matemática e, por outro lado, legitimar e consolidar aspetos essências das práticas pedagógicas dos professores.

Uma das capacidades transversais descrita no programa de 2007 é o raciocínio, indicando-se que é através dele que os alunos são capazes de estabelecer relações entre objetos matemáticos, processo que envolve a formulação e testagem de conjeturas, a compreensão e criação de generalizações e de contraexemplos e a justificação dos seus raciocínios a partir de cadeias argumentativas, sendo estas com o tempo mais complexas (Ministério da Educação, 2007; Ponte, 2009).

Em relação às recomendações metodológicas para os professores, o Programa de Matemática de 2007, segundo Ponte (2009), veio dar destaque à importância de diversificar as tarefas propostas em sala de aula, sendo que estas devem ser desafiantes e contextualizadas, mas também possibilitar relacionar e fazer conexões entre os diversos conteúdos programáticos e a promoção de momentos de discussões coletivas, de forma a que seja possível aos alunos

prenunciarem-se sobre as suas ideias, perspetivas, estratégias e raciocínios. Deste modo, este programa destaca claramente o raciocínio matemático, realçando que ele está presente em todos os tópicos matemáticos e que importa que o mesmo seja objeto de trabalho explícito do professor.

Em 2013, sob a tutela do ministro Nuno Crato, surge um novo programa para orientar os professores no ensino da Matemática, *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013), que perspetiva uma visão mais redutora de raciocínio matemático restringindo-o, praticamente, ao raciocínio dedutivo - "[…] o raciocínio matemático é, por excelência, o raciocínio hipotético-dedutivo" (p. 4), não valorizando os raciocínios indutivos e abdutivos. Ora, tendo em consideração tudo o que já foi referido sobre o raciocínio matemático e estando de acordo com o que é mencionado por Boavida (2015), que reforça a ideia de que "[…] a Matemática não é só sobre símbolos e cálculos. […]. É sobre ideias e sua inter-relação." (p. 1), é possível verificar que a tónica deste programa curricular é uma regressão relativamente ao que até ao momento fora perspetivado sobre o entendimento do raciocínio matemático. Valoriza-se a demonstração formal em matemática, relegando para segundo plano o raciocínio indutivo e o abdutivo e o uso de métodos informais para justificar e generalizar, aspetos subjacentes ao entendimento amplo de raciocínio matemático veiculado no programa de 2007.

Deste modo, a perspetiva adotada pelo programa de matemática de 2013 relativa ao raciocínio matemático, pode considerar-se retrógrada, uma vez que não dá qualquer valor aos processos indutivos, nem aos métodos informais que se utilizam para matematizar as situações em estudo, eliminando, assim, bases poderosas para a aprendizagem e compreensão da matemática (Boavida, 2015).

Em 2017, foi lançado um documento de natureza curricular geral, ou seja, transversal a todas as áreas curriculares, que perspetiva tudo aquilo que importa que os alunos dominem à saída da escolaridade obrigatória, denominado de *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Neste documento, o raciocínio é visto como uma competência essencial que os alunos devem adquirir ao longo do seu percurso escolar, uma vez que estes devem ser capazes de

colocar questões, identificar o que pretendem descobrir e definir as estratégias que são mais adequadas para chegar ao seu objetivo (Martins et al., 2017). Ao longo deste processo colocam questões, formulam hipóteses e conjeturas, analisam e criticam os processos que usam e as conclusões que obtêm, validando-as ou refutando-as (Martins et al., 2017).

Com a entrada em vigor do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, a articulação entre o mesmo e o Programa de Matemática de 2013 era complicada, existindo a necessidade de estabelecer um outro documento em que se concretizasse essa mesma articulação. As Aprendizagens Essenciais, explicitam essa articulação que é definida a partir das áreas de competências (Figura 1) previstas no perfil que os alunos devem aprender, tanto no que respeita às áreas que estão intrinsecamente relacionadas com os temas, processos e métodos matemáticos, como nas restantes áreas em que a matemática pode contribuir com auxílios essências (Ministério da Educação, 2018).

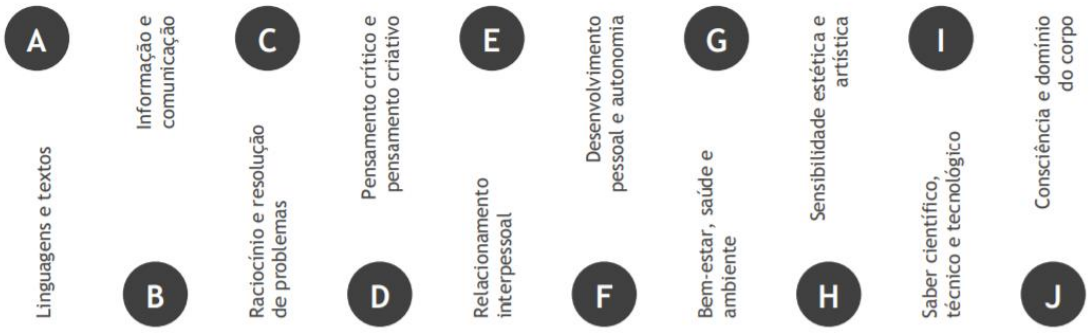


Figura 7 - Área de Competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Ministério da Educação, 2018, p. 6).

Estas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 1.º ciclo do Ensino Básico,* publicadas em 2018, são constituídas por um conjunto de conteúdos, objetivos e práticas de aprendizagem que para além de serem relevantes ao nível do conhecimento disciplinar desta área, também articulam os conteúdos programáticos de modo a que os alunos consigam dar sentido e estabelecer inter-relações entre estes, pois só desta forma é possível realizar um processo de ensino-aprendizagem significativo e harmonioso (Ministério da Educação, 2018). Estas orientações, no que respeita ao raciocínio matemático, preveem

que os alunos, ao longo do ensino básico, desenvolvam a capacidade de raciocinar matematicamente e de resolver problemas ou situações matemáticas a partir da "[…] mobilização das aprendizagens nos diversos domínios" (Ministério da Educação, 2018, p. 5), da análise de estratégias de resolução e das conclusões obtidas e dos raciocínios de outros, bem como a capacidade de expressar, argumentar e debater as suas ideias e raciocínios.

Atualmente, no decorrer do ano de 2021, as Aprendizagens Essenciais para o ensino da Matemática publicadas em 2018 foram revistas e sofreram algumas alterações importantes a referir, mesmo que este novo documento curricular entre apenas em vigor no ano letivo de 2022/2023 para alguns anos de escolaridade.

De acordo com Canavarro (2021), as alterações nas aprendizagens essências para o Ensino da Matemática advém das mudanças que tem ocorrido na sociedade, principalmente ao nível da tecnologia. Deste modo, para que a escola não fique para trás e os alunos consigam adquirir conhecimentos e capacidades que lhes permitam usar tecnologias e resolver problemas sociais que ainda não foi exequível antecipar, é imprescindível a atualização das orientações de forma a ser possível preparar os nossos alunos para o futuro.

As novas Aprendizagens Essenciais para a matemática têm como sua principal missão, segundo Canavarro (2021), desenvolver nos alunos a literacia matemática, que de acordo a OCDE "[…] é a capacidade de um indivíduo raciocinar matematicamente e de formular, aplicar e interpretar a matemática para resolver problemas numa variedade de contextos do mundo real. Inclui conceitos, procedimentos, factos e ferramentas para descrever, explicar e prever fenómenos. Ajuda os indivíduos a conhecerem o papel que a matemática desempenha no mundo e a formular juízos e decisões bem fundamentados, como se espera de cidadãos do século XXI participativos, empenhados e reflexivos." (p. 4). Assim sendo, Canavarro (2021) indica-nos três pontos, neste documento, que promovem o desenvolvimento da literacia matemática. O primeiro está relacionado com a relação entre a matemática, as outras áreas do saber e a realidade, ou seja, o aplicar dos conhecimentos matemáticos em contextos reais para que os alunos tenham um maior interesse e,

simultaneamente, contribuírem para a sua formação global. O segundo ponto frisado pela autora é a valorização do cálculo mental e a utilização de diversos processos e estratégias, tendo em conta o número ou a situação que está a ser solucionada, e o terceiro ponto referido é a valorização da estatística e das probabilidades, para que os nossos alunos consigam ler, compreender e interpretar tabelas e gráficos.

Este documento, de acordo com Brocardo (2021), tem muitas virtualidades na aprendizagem da Matemática, sendo uma delas colocar a matemática mais acessível às crianças e jovens, pois o Programa Curricular de Matemática 2013 insiste num formalismo excessivo que os alunos não podem ter se ainda não alcançaram um pensamento matemático apropriado. Esta mesma autora afirma que o tornar acessível não é de todo facilitar, ter receio de cansar as crianças ou fugir a uma formalização que é adequada ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos, uma vez que para atingir os objetivos que integram as Aprendizagens Essenciais é imprescindível que se trabalhe, se exercite, se memorize e que se seja rigoroso, ou seja, o que se preconiza com este documento curricular, que está baseado em estudos nacionais e internacionais, permite preparar os jovens para o seu futuro,

> *Seguir o que agora se preconiza é ser exigente, é não facilitar, é dar valor ao esforço, é mostrar como é possível caminhar para um ensino da matemática que prepare as crianças e jovens para lidar com os desafios que irão enfrentar num mundo marcado pela inovação tecnológica e que está em rápida mudança.* (Brocardo, 2021, p. 10)

Em conclusão, as orientações para o ensino da matemática adotaram ao longo dos anos diferentes perspetivas no que respeita ao raciocínio matemático. O *Programa de Matemática do Ensino básico* de 2007 tinha uma visão abrangente de raciocínio matemático, mostrando que este não era apenas dedutivo, ou seja, que os outros tipos de raciocínio, como o indutivo e o abdutivo, também eram importantes. Embora tudo o que fora perspetivado até ao momento, em relação ao raciocínio matemático, verificou-se que as orientações posteriores ao programa de 2007, nomeadamente o *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (2013)*, adotou uma perspetiva retrograda, uma vez que apenas consideram o raciocínio hipotético-dedutivo. Já

em 2018, com a articulação entre o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (2017) e as *Aprendizagens Essenciais* (2018), a perspetiva sobre o raciocínio matemático volta a ser mais abrangente e vai ao encontro das orientações internacionais para o ensino da matemática discriminadas em *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (revisão de 2007) editado pela primeira vez em 2000.

O meu projeto de intervenção enquadra-se no que é perspetivado nas *Aprendizagens Essenciais* publicadas em 2018, uma vez que as novas orientações só entraram em vigor a partir do ano letivo de 2022/2023.

3. O ensino exploratório

No que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio matemático, considera-se que o modelo que mais se adequa à sua promoção é o ensino exploratório. Este modelo de ensino permite aos alunos assumirem um papel ativo no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que através das explorações que fazem das tarefas, autonomamente e de forma coletiva, conseguem dar significado aos procedimentos matemáticos que utilizam (Canavarro, 2011; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2017).

Ensinar matemática, segundo Guerreiro, Ferreira, Menezes e Martinho (2015), "[…] tem como um dos seus principais objetivos levar o aluno a desenvolver o seu conhecimento matemático." (p. 280). Estes autores acreditam que o professor tem um papel fulcral na organização de ambientes de aprendizagem, uma vez que é a partir das suas práticas e dos recursos de que faz uso, que o conhecimento matemático é ensinado e aprendido pelos alunos. Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), acrescentam ainda que para se compreender as práticas adotadas pelos professores é essencial identificar não apenas as suas intenções, mas também as suas motivações e ações, dado que a prática de ensinar é multifacetada e, por isso, depende dos contextos e dos objetivos que lhes estão subjacentes.

No ponto seguinte são discutidas as caraterísticas do ensino exploratório na matemática, identificando as diferenças existentes entre este modelo de

ensino e o ensino direto, e, num segundo momento, as particularidades de uma aula de ensino exploratório no ensino da matemática.

3.1. Ensino exploratório

O modo como o professor organiza o ensino e procura promover as aprendizagens dos seus alunos pode ser muito diverso. No entanto, é usual distinguir dois modelos de ensino no ensino da matemática, o ensino direto e o ensino exploratório (Ponte, 2005).

O ensino direto, também conhecido por ensino expositivo, está associado às aulas tradicionais, ou seja, aulas centradas no professor em que a matéria é exposta pelo mesmo (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013) e, em que posteriormente, são realizados exercícios para se aplicar o que foi "explicado" (Ponte, 2005), sendo assim considerado um ensino em que o conhecimento é transmitido pelo professor aos alunos. Neste modelo de ensino o professor e o manual são as autoridades na sala de aula (Ponte, 2009) e a comunicação é feita de forma unidirecional tendo um carater transmissivo, sendo, por essa razão, a comunicação caraterizada como um "[…] instrumento de verbalização e transmissão de conhecimento" (Guerreiro, Ferreira, Menezes & Martinho, 2015, p. 286). Ponte (2009) acrescenta, ainda, que este tipo de comunicação tem como padrão a sequência I-R-F (iniciação, resposta e *feedback*), em que o professor inicia a comunicação com uma questão, recebe uma resposta por parte dos alunos e imediatamente informa os mesmos se esta está, ou não, correta.

O papel do aluno no ensino direto é o de ouvinte, tendo como principal função compreender o que está a ser explicado pelo professor e esclarecer as dúvidas quando não está a perceber o que lhe está a ser transmitido, de modo a que consiga aprender como se usa um determinado procedimento (Ponte, 2005; Ponte, 2009). Nas aulas, os alunos resolvem, sobretudo, exercícios que são escrupulosamente selecionados com o objetivo de ilustrar um procedimento ou conceito. Também são muitas vezes realizados com vista à repetição de procedimentos de forma a que consigam e saibam resolver os diferentes tipos de exercícios que podem sair nos testes, provas ou exames, fazendo com que tenham um caráter particular (Ponte, 2005). Para além disso, quando as tarefas são problemas fechados assume-se que existe apenas uma e uma só resposta

correta para os mesmos, assim como uma única estratégia de resolução para a sua realização (Ponte, 2009).

As orientações curriculares nacionais, mais recentes, e as orientações internacionais para o ensino da matemática, consideram que este género de abordagem não é a mais adequada para alcançar as exigências da sociedade atual, pois os alunos necessitam de ter a oportunidade de contactarem com tarefas que para além de serem significantes e desafiantes, permitam raciocinar matematicamente, estabelecer conexões entre os diversos conteúdos curriculares e dar sentido ao conhecimento matemático (Martins et al., 2017; Ministério da Educação, 2018; NCTM, 2007). No entanto, como referem, por exemplo, Guerreiro et al. (2015) o ensino direto ou expositivo continua a ser o que muitos professores usam.

O ensino exploratório é uma prática de natureza multidirecional, uma vez que envolve a interação entre os alunos e os seus pares e entre os alunos e o professor (Guerreiro et al., 2015; Oliveira et al., 2013). Neste tipo de ensino os alunos aprendem e desenvolvem as suas capacidades matemáticas e os seus conhecimentos matemáticos a partir do trabalho que efetuam com as tarefas ricas e significativas que os professores selecionam, dado que estes são chamados a participar ativamente na exploração das tarefas, na procura de resoluções possíveis para as tarefas que lhes são propostas e na discussão coletiva sobre essas mesmas resoluções (Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

No ensino exploratório, ao contrário do ensino direto, são mais valorizados os momentos de discussão e reflexão dos alunos entre si e com o professor do que os resultados obtidos, uma vez que é nestes momentos que se partilham, compreendem e se justificam as estratégias adotadas pelos alunos, para além de se fazer a sistematização e formalização do que se aprendeu com a tarefa (Ponte, 2005; Ponte et al., 2020). Neste sentido, Guerreiro et al. (2015) afirmam que no ensino exploratório a construção de conhecimento emerge através da interação social que resulta da partilha de ideias matemáticas e da negociação de significados, sendo, por isso, a comunicação vista como “[…] um processo complexo e multidimensional através do qual os alunos em interação entre si e com o professor constroem e compartilham significados para as ideais e procedimentos matemáticos” (p. 286).

O professor, ao promover um ensino exploratório da matemática, tem um papel fundamental na aprendizagem pois é ele que intencionalmente seleciona as tarefas, que devem ser diversificadas (investigações, explorações, problemas, exercícios, entre outros), desafiantes; permitir a construção de conhecimento e admitir mais do que uma estratégia de resolução (Ponte, 2005; Ponte, 2009). Também é o professor que delineia a forma como as tarefas vão ser exploradas e que regula as interações entre os alunos de modo a evitar repetições de ideias e estratégias de resolução e, simultaneamente, articular essas mesmas ideias com o que é esperado os alunos aprenderem, trazendo desta forma para primeiro plano o que é importante os estudantes saberem e reterem (Canavarro, 2011; Ponte, 2009). Desta forma, uma das principais caraterísticas desta prática de ensino é os professores deixarem uma parte do trabalho de descoberta e construção de conhecimento para os seus alunos e, por isso, terem como suas principais funções ouvir e dialogar com os mesmos para conseguirem interpretar e compreender os raciocínios dos estudantes (Ponte, 2005).

Uma outra caraterística importante do ensino exploratório é o papel que o aluno tem na sua aprendizagem, isto é, como foi referido anteriormente, a construção do conhecimento inicia-se com a exploração e resolução das tarefas por parte do aluno, passando, em seguida, para uma discussão coletiva com todos os elementos da turma de modo a partilhar ideias e estratégias de resolução. Professor e alunos partilham o “palco”, tornando-se estes, também, autoridades na sala, pois têm de justificar, através de argumentos, os seus raciocínios (Ponte, 2009). Deste modo, é-lhes dada a oportunidade de construir e aprofundar conhecimentos com significado e, simultaneamente, desenvolver a capacidades no que respeita à resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático (Canavarro, 2011; Ponte et al., 2020).

Em conclusão, as práticas adotadas pelos professores influenciam o ensino da matemática e a forma como os alunos aprendem. Globalmente distinguem-se dois tipos de práticas de ensino. No ensino expositivo é o professor que transmite o conhecimento aos alunos e as tarefas realizadas são maioritariamente exercícios usados para ilustrar e praticar técnicas e preparar os alunos para os testes/exames. Embora também sejam usados problemas, estes

tendem a ser *problemas tipo* e de solução única. No ensino exploratório, professores e alunos partilham o "palco", incentiva-se os alunos a participar ativamente e a fundamentar as suas observações e raciocínios. O professor dinamiza e gere a aprendizagem, articulando momentos de exploração autónoma por parte dos alunos com momentos de debate e discussão de ideias e de resoluções das tarefas exploradas.

3.2. Uma aula de ensino exploratório da Matemática

Numa aula de ensino exploratório da Matemática os alunos são confrontados com tarefas matemáticas em que para além de terem como objetivo introduzir ou aprofundar conteúdos matemáticos, também desenvolvem competências matemáticas, como por exemplo o raciocínio matemático, a comunicação matemática e a resolução de problemas (Guerreiro et al., 2015).

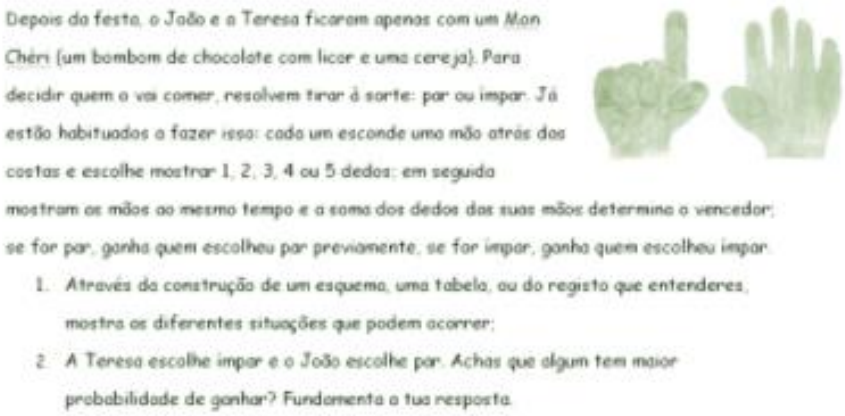
A aula de ensino exploratório da Matemática pode estar organizada em três ou quatro fases distintas. Stein et al. (2008) propõem um modelo em que a aula está organizada em três fases: o *lançamento* da tarefa, a *exploração* da tarefa realizada pelos alunos e, por último, a *discussão e sintetização* da tarefa. Canavarro et al. (2012) propõem uma aula dividida em quatro fases: a *introdução da tarefa*, a *realização da tarefa*, a *discussão da tarefa* e a *sistematização das aprendizagens* obtidas através da realização da tarefa.

A diferença entre estas duas perspetivas consiste na forma em como está organizada a aula de ensino exploratório da Matemática. As primeiras autoras mencionadas juntam a discussão e a sintetização da tarefa na mesma fase, ou seja, esta fase junta a partilha dos resultados e das estratégias apresentadas pelos alunos com a conexão entre os conceitos e procedimentos explorados na tarefa com outros já conhecidos e aplicados anteriormente. Na proposta efetuada pelos segundos autores estas fases encontram-se separadas, por estes considerarem importante existir uma separação entre a discussão da tarefa em si e o reconhecer de conceitos e procedimentos matemáticos e o estabelecer de relações com aprendizagens anteriores ou o reforçar de aspetos essenciais de processos matemáticos transversais. É assim usado o termo "sistematização" em vez de "síntese", dado que para estes autores esta fase vai para além da sintetização de ideias, pois a turma sistematiza e institucionaliza

não só as aprendizagens matemáticas que foram efetuadas enquanto exploravam as tarefas, mas também as que foram emergindo e conectando-se durante a discussão da mesma.

A *introdução* ou *lançamento* da tarefa, primeira fase da aula, é o momento em que o professor apresenta as tarefas aos seus alunos que, na maioria dos casos, são problemas ou investigações (Oliveira et al., 2013). Nesta fase, o professor tem um grande destaque uma vez que para além de familiarizar os alunos com o contexto da tarefa também deve explicar o que espera que estes realizem (Guerreiro et al., 2015; Mata-Pereira et al., 2020). Assim, em poucos minutos, o professor deve garantir que todos os alunos se apropriem e compreendam o objetivo da tarefa e, simultaneamente, desafiá-los a aderir ao trabalho que lhes foi proposto (Canavarro et al., 2012; Oliveira et al., 2013). Para que tal aconteça, Guerreiro et al. (2015) afirmam que os professores podem recorrer a explicações instrucionais e a questões de verificação de modo a conseguirem despistar quais as dificuldades dos alunos na compreensão da tarefa, tendo sempre em atenção que não devem dar pistas para a resolução da mesma (Mata-Pereira et al., 2020).

Canavarro (2011) apresenta o exemplo de uma professora que nesta fase, ao perceber que existem bastantes dúvidas na primeira questão da tarefa, opta por, em conjunto com um aluno, demonstrar o jogo (Figura 8) que é referido na tarefa, concretizando diversas situações possíveis que podem acontecer no jogo de forma a que os alunos reflitam sobre elas. No entanto, não lhes são dadas indicações para a resolução pois importa que o nível cognitivo de dificuldade da tarefa não diminua. As questões que coloca, como, por exemplo “o número 13, que é um ímpar, pode ocorrer?”, são cuidadosamente escolhidas, De facto, a escolha do número treze foi realizada de forma criteriosa pela professora porque, para além de ser um número ímpar e os alunos terem de realizar um esquema/ tabela sobre as diversas situações que podem ocorrer no jogo, este número não pode ocorrer nunca no jogo dado que é realizado apenas por duas pessoas e cada uma só pode usar uma mão, logo o número máximo que pode ocorrer durante o jogo é o número dez.



Depois da festa, o João e a Teresa ficaram apenas com um *Mon Chéri* (um bombom de chocolate com licor e uma cereja). Para decidir quem o vai comer, resolvem tirar à sorte: par ou ímpar. Já estão habituados a fazer isso: cada um esconde uma mão atrás das costas e escolhe mostrar 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos; em seguida mostram as mãos ao mesmo tempo e a soma dos dedos das suas mãos determina o vencedor; se for par, ganha quem escolheu par previamente, se for ímpar, ganha quem escolheu ímpar.

1. Através da construção de um esquema, uma tabela, ou do registo que entenderes, mostra as diferentes situações que podem ocorrer;
2. A Teresa escolhe ímpar e o João escolhe par. Achas que algum tem maior probabilidade de ganhar? Fundamenta a tua resposta.

Figura 8 - Enunciado de uma tarefa (Canavarro, 2011, p.12).

Oliveira et al.(2013) salientam, ainda, que antes de iniciar a segunda fase da aula o professor deve fornecer aos seus alunos todos os materiais e recursos necessários para que estes consigam desenvolver, com sucesso, o seu trabalho.

Na segunda fase da aula, *exploração* ou *realização da tarefa*, os alunos iniciam o trabalho que lhes foi lançado. Na maioria dos casos, nesta fase, o trabalho é executado em pequenos grupos para que os alunos tenham a oportunidade de trocar ideias sobre a resolução da tarefa e quais os procedimentos a que podem recorrer para a levar a cabo com sucesso, embora também possa ser realizado individualmente (Canavarro et al., 2012; Guerreiro et al., 2015).

O professor, na segunda fase da aula, tem o papel de apoiar os alunos na realização do trabalho e garantir que todos se envolvem de forma ativa na sua realização (Oliveira et al., 2013), utilizando como ferramentas de comunicação a observação e a audição (Guerreiro et al., 2015). De acordo com Canavarro et al. (2012) e Mata-Pereira et al. (2020), o professor, mais uma vez, deve ter atenção à forma como responde ou comenta as dúvidas e o trabalho dos seus alunos para que não exista a possibilidade reduzir o nível de dificuldade cognitivo da tarefa, bem como estandardizar as estratégias de resolução da tarefa para que não prejudique a discussão coletiva que se realizará na fase seguinte da aula. Oliveira et al. (2013) acrescentam ainda que nesta fase, embora o professor não pareça estar tão ativo como nas restantes fases da aula, necessita de tomar importantes decisões que poderão influenciar o sucesso, ou fracasso das fases

que se seguem, pois se, por um lado, deve assegurar que os alunos preparam as apresentações das suas estratégias de resolução para partilhar com a restante turma, por outro, deve selecionar as soluções que devem ser partilhadas e sequenciar a ordem pela qual estas serão apresentadas de forma a que a discussão seja interessante e desafiante para cada elemento da turma.

A aula continua com a fase de discussão, sendo que para esta ser produtiva é imprescindível que se apoie no pensamento e ideias dos alunos e no avançar de ideias matemáticas importantes (Ponte et al., 2013). Os alunos, na fase de discussão, voltam a trabalhar em plenário de forma a poderem comunicar e discutir as suas soluções e estratégias de resolução que utilizaram para realizar a tarefa (Canavarro et al., 2012). Neste momento, segundo Ponte et al. (2013), é dado aos alunos um espaço alargado de participação, sendo estes incentivados não só a apresentar o trabalho que realizaram como também a questionar os seus colegas sobre as suas ideias e estratégias, seja por não as terem conseguido compreender, seja por não as considerarem matematicamente corretas.

A fase de discussão é considerada bastante exigente para o professor devido às dificuldades que se colocam na gestão de uma discussão coletiva De facto, embora o professor tenha como base a sua planificação da aula e os dados que foi recolhendo durante o momento de trabalho autónomo dos alunos, são muitos os caminhos pelos quais poderá seguir durante a sua intervenção na discussão, sendo que terá de ter em vista quais os objetivos a que se propôs com a tarefa selecionada, as necessidades e os interesses dos seus alunos (Canavarro, 2011; Oliveira et al., 2013).

Nesta fase da aula, o professor tem de gerir as interações dos alunos durante a discussão promovendo o potencial matemático das explicações e justificações (Canavarro et al., 2012). Desta forma Guerreiro et al. (2015) afirmam ser essencial ouvir o que os alunos têm a dizer, formular questões de inquirição para levar os mesmos a explicar e justificar as suas ideias, procedimentos e soluções. Oliveira et al. (2013) acrescentam ainda que o professor deve garantir a comparação entre as resoluções apresentadas, tanto no que respeita à diferença como à eficácia, e a estabelecer conexões entre

essas mesmas ideias e estratégias. Ao professor cabe também focar a atenção dos alunos nas ideias fundamentais que estão a ser trabalhadas com a exploração da tarefa e dar coerência às ideias dispersas dos alunos ao longo da discussão (Ponte et al., 2013).

É importante que o professor, durante a discussão, mantenha um clima calmo e positivo (Canavarro et al., 2012), que explore os desacordos entre os alunos, que desafie a encontrar conexões entre diferentes interpretações de resoluções, completar as ideias dos colegas ou até mesmo reformular as ideias dos mesmos (Mata-Pereira et al., 2020; Ponte et al., 2013), pois está não só a promover a comunicação dos alunos, a compreensão que uma mesma ideia pode ser interpretada de diferentes maneiras, a favorecer a conexão de conhecimentos entre conceitos e a desenvolver competências de argumentação e justificação como também está a promover um aprofundar de conhecimentos, conceitos e processos matemáticos.

A *sistematização* é vista por Guerreiro et al. (2015) como fundamental para a construção de conhecimento matemático. O professor não só procura relembrar as ideias, os conceitos e os procedimentos matemáticos que foram explorados com a tarefa, como também pretende enquadrá-los com os conhecimentos matemáticos que já foram estabelecidos pelos alunos anteriormente (Canavarro, 2011; Canavarro et al., 2012).

Para concluir, as aulas de ensino exploratório são uma abordagem possível no modelo de ensino exploratório da Matemática que pode ser utilizada pelos professores para os alunos terem a oportunidade de se envolverem ativamente nas suas aprendizagens e, simultaneamente, desenvolverem as suas capacidades de comunicação e argumentação, uma vez que neste tipo de aula para além dos alunos serem confrontados com tarefas ricas em conceitos, procedimentos e conhecimentos matemáticos, também tem momentos de partilha e discussão das aprendizagens efetuadas. Estas aulas são compostas por três ou quatro fases, dependo se a discussão e sistematização se encontram, ou não, em fases distintas, sendo estas: a *introdução da tarefa*, momento em que a tarefa é dada a conhecer aos alunos; a *exploração da tarefa*, fase em que os alunos, individualmente ou em pequenos grupos, exploram e trabalham

autonomamente na resolução da tarefa; a *discussão coletiva*, um momento em que todos os alunos não só se envolvem ativamente na partilha das suas resoluções, na discussão dos resultados obtidos e na interpretação das resoluções dos outros colegas como também na explicação, argumentação e justificação das suas escolhas e estratégias; e *sistematização*, que é a fase onde é realizada uma síntese das aprendizagens realizadas ao longo da exploração da tarefa e o momento em que se pode fazer um enquadramento dessas mesmas aprendizagens com os conhecimentos prévios que já foram estabelecidos pelos alunos noutras aulas. Estas aulas são particularmente indicadas para desenvolver o raciocínio matemático pelo que importa igualmente discutir as ações do professor para desenvolver o raciocínio matemático, aspeto que será analisado no ponto seguinte.

4. O professor e o desenvolvimento do raciocínio matemático

De acordo com o NCTM (2007), o raciocínio matemático é desenvolvido em aulas em que "[…] os alunos são encorajados a exporem as suas ideias para serem verificadas." (p. 220). As orientações que este nos traz para o ensino e aprendizagem da matemática afirmam que nas aulas em que os alunos são encorajados a partilhar as suas ideias e em que a turma é chamada a contribuir na avaliação das mesmas é proporcionado um ambiente rico para a promoção e desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que a comunicação e a comparação de ideias entre os vários elementos da turma podem contribuir para alterar, melhorar ou consolidar raciocínios.

Desta forma, segundo Wood, Merkel, e Uerkwitz (1996), o professor tem um papel muitíssimo importante, dado que para além de ser este a selecionar as tarefas e a estruturar a forma como estas serão realizadas em sala de aula, também tem uma grande responsabilidade na criação de um ambiente de sala de aula motivador, enriquecedor, estimulante e em que seja possível existir uma comunicação harmoniosa entre os alunos e os seus pares e entre os alunos e o próprio professor de forma a que lhes seja dada a oportunidade de falarem abertamente sobre as suas ideias e a sua forma de pensar sobre a matemática, sem medo de represálias ou constrangimentos, no caso das ideias estarem incorretas ou inacabadas. Cabe, ainda, ao professor reforçar, perante os alunos,

a ideia de que é extremamente importante conseguirem articular os seus próprios raciocínios e, simultaneamente, escutarem atentamente e esforçarem-se para compreenderem os raciocínios dos outros (NCTM, 2007).

Mediante uma sala de aula como a descrita anteriormente, em que os alunos são encorajados a comunicar, a refletir e a seguir por caminhos próprios é importante analisar a forma como o professor comunica com os seus alunos.

Segundo Guerreiro et al. (2015) as ações comunicativas mais destacadas utilizadas pelos professores são o explicar, o questionar, o ouvir e o responder ou reagir.

Explicar envolve fazer conexões entre as ideias apresentadas pelos alunos, sendo que o tipo de explicação mais usual é o instrucional dado que para além de se ter como objetivo comunicar os conteúdos da disciplina, também permitem o envolvimento de toda a turma se forem realizadas coletivamente, promovendo a produção de explicações e a partilha de ideias entre todos (*idem, ibidem*). Questionar, tal como o nome indica, diz respeito às perguntas que o professor faz aos seus alunos. Estas podem variar no que respeita ao seu propósito, ou seja, podem ser feitas para verificar conhecimentos, para focalizar ideias e/ou estratégias e para inquirir os alunos sobre o seu próprio pensamento matemático (*idem*, *ibidem*). Ouvir, embora sendo uma ação importante, depende do papel que o professor atribui a este ato comunicativo, isto é, a forma como o professor ouve os seus alunos permite-nos identificar a visão que o mesmo tem sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, existindo assim o ouvir avaliativo ou direto que está mais presente no ensino tradicional, o ouvir interpretativo ou observacional e o ouvir globalizante que se encontram num modelo de ensino exploratório (*idem*, *ibidem*). Por fim, o ato comunicativo de responder ou reagir é o ato que ocorre depois das intervenções dos alunos. As respostas dadas pelos professores podem ser diretas, conter explicações, fornecer informação, validar respostas, confrontar ideias, entre muitas outras, o que implica adequar as reações e as respostas dadas aos alunos de acordo com a situação em que as mesmas foram colocadas (*idem*, *ibidem*).

Na promoção e desenvolvimento do raciocínio matemático o docente deve, de acordo com Mata-Pereira e Ponte (2016), incentivar os estudantes a

apresentar as suas resoluções e a explicar como é que chegaram a determinadas conclusões e o "porquê" de terem seguido aquele caminho e não outro, assumindo assim uma atitude questionadora que, segundo Guerreiro et al. (2015), se deve focalizar nas estratégias utilizadas pelos alunos de modo a que se possa averiguar/ compreender quais os pensamentos matemáticos dos mesmos. Estes mesmos autores acrescentam ainda que o docente deve valorizar as contribuições dos alunos, mesmo que estas sejam incorretas e utilizar os momentos de partilha de ideias entre a turma para desconstruir, clarificar ou complementar conceitos, noções e propriedades matemáticas, ou seja, o professor deve ouvir os seus alunos para melhor compreender o seu raciocínio e orientar a sua prática no decorrer da aula. Por outro lado, é essencial que este desafie os seus alunos "[…] a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões, quer pela formulação de generalizações" (Mata-Pereira & Ponte, 2016, p. 39), uma vez que para além de incentivar e motivar os alunos para a aprendizagem da matemática, também lhes dá a possibilidade de melhorarem as suas argumentações e a estabelecerem relações entre conteúdos (Wood et al., 1996). Para tal, é importante que ao reagir aos contributos e ideias dos alunos o professor opte por pôr em confronto as respostas dadas pelos alunos antes de as validar, tornando-as objetos de discussão, e evite transmitir demasiada informação que possa dar asus à diminuição do nível cognitivo da tarefa em estudo (Guerreiro et al., 2015).

Promover e desenvolver o raciocino matemático nas crianças não é um trabalho fácil, visto que, tal como afirmam Boavida (2008) e Lannin et al. (2011), não existe uma receita aplicável. Exige um trabalho árduo por parte do docente que para além de selecionar as tarefas, deve estar preparado para receber questões e críticas dos alunos, pois estes podem ter diferentes pontos de vista e trazer para a aula diferentes resoluções.

Em concordância com Boavida (2008) está Boaler (2010) que reforça a ideia de que uma prática em que se é dada a oportunidade de expressar e comunicar os pensamentos matemáticos não é fácil de realizar e gerir em sala de aula. Lannin et al. (2011), também em consonância com os autores mencionados acima, defendem que o promover do raciocínio matemático dos alunos não é um processo direto, contudo o professor ao ser conhecedor dos

processos de raciocínio e das ações que o podem auxiliar no decorrer das explorações das tarefas terá uma maior probabilidade de conseguir intervir junto dos alunos de modo a levá-los a desenvolver, com sucesso, o raciocínio matemático.

As ações dos professores para desenvolver o raciocínio matemático são deveras importantes, principalmente no momento de partilha e discussão de ideias e resoluções. Brocardo et al. (no prelo) realçam que as ações dos professores durante as discussões coletivas são elementos-chave para que o raciocínio matemático dos alunos possa emergir, uma vez que as discussões coletivas oferecem aos alunos a oportunidade de partilharem e manifestarem ideias matemáticas bem como, com o auxílio do professor, "[…] elaborarem argumentos válidos que as sustentem e clarifiquem" (p. 3).

Fraivillig *et al* (1999) organizam as ações dos professores num modelo com três categorias: incentivar (*eliciting*) os alunos a apresentar as suas ideias e métodos de resolução de modo a conseguir perceber como é que estes pensam sobre a matemática, valorizando os seus contributos e utilizando os seus métodos nas suas expliacações; apoiar (*supporting*) os alunos na compreenção de conceitos, ideias, e procedimentos matemáticos, relembrando alguns conhecimentos básicos ou clarificando, através de questões, descrições e métodos utilizados por alguns alunos em que existiram passagens muito rápidas ou pouco claras; e ampliar (*extendig*) o pensamento dos alunos, almejando, através de questões e desafios, que os alunos resolvam a tarefa proposta através de vários métodos e que, posteriormente, analisem e comparem os métdodos utilizados e as soluções a que chegaram de forma a poderem eleborar generalizações matemáticas.

Todas as fases de uma aula de ensino exploratório são importantes e têm o seu próprio grau de dificuldade para os professores, contudo é na gestão das discussões coletivas que os professores apresentam ter maior dificuldade (Canavarro, 2011). Estas são vistas como um grande desafio pelos professores, uma vez que são vários os caminhos por onde estes podem seguir durante a sua intervenção devido ao elevado número de ideias dispersas que os alunos alcançam e a diversidade de estratégias que podem ser utilizadas pelos mesmos

para resolverem a tarefa que lhes foi lançada, levando a que o professor tenha o papel de transformar essas ideias dispersas, muitas vezes incompletas ou mal formuladas, em ideias matemáticas precisas e poderosas (Canavarro, 2011; Ponte et al., 2013; Oliveira et al., 2013). Desta forma, Stein et al. (2008) apresentam um modelo composto por um conjunto de 5 ações/práticas (antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões) que auxiliam o professor na preparação e realização das discussões matemáticas coletivas de forma a que este possa promover com maior facilidade o raciocínio matemático dos alunos.

No que respeita à parte da preparação da discussão temos a ação de antecipar e a de monitorizar (Oliveira et al., 2013). Antecipar, de acordo com Canavarro (2011), corresponde a uma previsão, por parte do professor antes da realização da aula, do que poderá acontecer desde o momento do lançamento da tarefa até à fase final da aula. Ou seja, o professor dedica-se não só a prever como é que os alunos irão interpretar a tarefa, o seu envolvimento na mesma e as estratégias de resolução que poderão adotar, mas também como é que poderão relacionar as ideias e estratégias a que os alunos chegaram com os procedimentos, conceitos e conhecimentos que estes devem aprender (*idem*, *ibidem*). Já o monitorizar descrito por Canavarro (2011) como uma ação que acontece já em sala de aula no momento de trabalho autónomo por parte dos alunos. Nesta prática o professor dedica-se a analisar o trabalho que está a ser realizado pelos seus alunos através da observação, da audição e a recolher informação importante para as fases seguintes da aula, principalmente no que toca às estratégias de resolução que estes usaram, de modo a identificar o potencial de cada uma na discussão coletiva (Canavarro, 2011).

Na condução da discussão coletiva as ações são o selecionar, o sequenciar e o estabelecer de conexões (Oliveira et al. 2013). Na prática de selecionar, o professo faz a seleção das resoluções que lhe parecem ser mais importantes a partilhar com a turma, tendo em conta o propósito matemático da aula (Canavarro, 2011). Canavarro (2011) salienta ainda que esta seleção deve ser realizada de forma criteriosa para que as ideias discutidas pela turma sejam as mais importantes e relevantes para a aprendizagem e desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos. Os critérios adotados pelo professor

dependem, segundo esta mesma autora, da forma como o próprio professor pretende que a aula prossiga durante a discussão coletiva, existindo desta forma uma grande diversidade, como por exemplo resoluções em que exista um erro recorrente, resoluções em que foram usadas estratégias mais produtivas, resoluções em que foram usadas várias representações, nomeadamente as que têm uma maior eficácia, entre muitos outros (*idem*, *ibidem*).

Sequenciar, de acordo com Canavarro (2011), é o tomar das decisões sobre a ordem pela qual se dará as apresentações dos alunos aos restantes colegas. Esta ordem depende do que o professor entende ser o mais apropriado para os seus alunos tendo em conta o propósito e os objetivos matemáticos estipulados para aquela aula (Canavarro, 2011).

O estabelecer de conexões é realizado após a discussão das diferentes resoluções apresentadas (Canavarro, 2011). Esta ação tem como principal objetivo relacionar as variadas apresentações umas com as outras com vista ao desenvolvimento de ideias matemáticas com significado para os alunos e simultaneamente poderosas em relação ao conhecimento matemático que irão sintetizar as aprendizagens que os alunos adquiriram no decorrer da aula (Canavarro, 2011; Oliveira et al., 2013).

Um outro modelo que caracteriza as ações dos professores no momento de partilha e discussão (Figura 9) é o de Ponte et al. (2013). Neste modelo, as ações do professor estão dispostas em dois grandes grupos, sendo que num grupo se encontram as ações que estão relacionadas com os conteúdos e os processos matemáticos e no outro as ações que auxiliam a gestão das aprendizagens (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013).

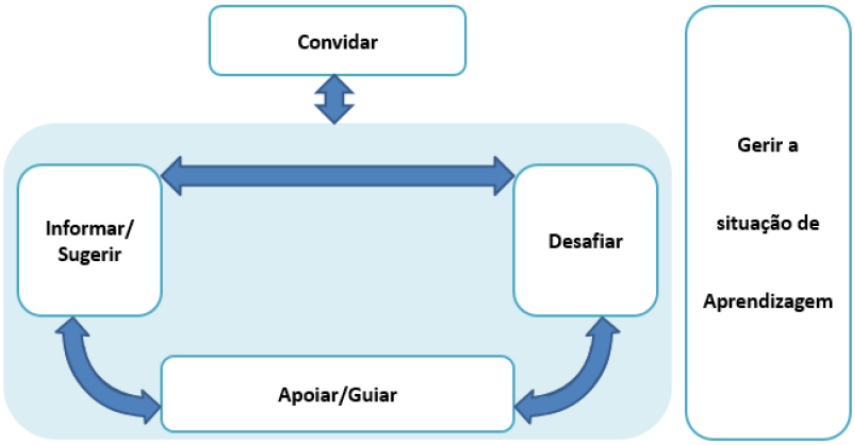


Figura 9 - Modelo das ações do professor na condução de discussões coletivas (Ponte et al., 2013, p. 59).

Este modelo, de acordo com Ponte et al. (2013), dá uma maior relevância ao grupo das ações que estão associadas aos conteúdos e processos matemáticos. O primeiro tipo de ações, *Convidar*, diz respeito ao envolvimento dos alunos na discussão, isto é, têm como objetivo incentivar os alunos a participar na partilha e discussão das resoluções, enquanto que os outros três tipos de ações estão relacionadas com o suporte que é dado pelo professor durante as discussões à aprendizagem dos alunos (Mata-Pereira & Ponte, 2018; Ponte et al., 2013;). Nas ações de *Apoiar/Guiar* o professor para além de incentivar os alunos a apresentarem as suas resoluções (Mata-Pereira & Ponte, 2018) vai conduzindo os alunos na discussão através de questões que os ajudem a clarificar de descrever mais pormenorizadamente as suas ideias e métodos (Ponte et al., 2013), ao passo que nas ações de *Informar/Sugerir* o professor tem como função introduzir informação, sugerir argumentos ou até mesmo validar as respostas dadas pelos alunos, ou seja, tem a encargo total do discurso matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2018; Ponte et al., 2013). Por outro lado, nas ações de *Desafiar* o professor procura que sejam os alunos a irem além dos conhecimentos que já têm adquiridos (Mata-Pereira & Ponte, 2018), uma vez que este tipo de ações "coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (Ponte et al., 2013, p. 59).

Também Brocardo et al. (no prelo) apresentam um modelo das ações dos professores na condução de discussões coletivas, procurando caraterizar as que incidem particularmente no raciocínio matemático (Figura 10). Este modelo tem como base o modelo proposto por Ponte et al. (2013) e dá maior destaque às relações que existem entre as ações do professo e o raciocínio matemático, avançado ainda as potencialidades que cada tipo de ação tem para promover os processos de raciocínio matemático considerados pelos autores (Brocardo et al., no prelo).

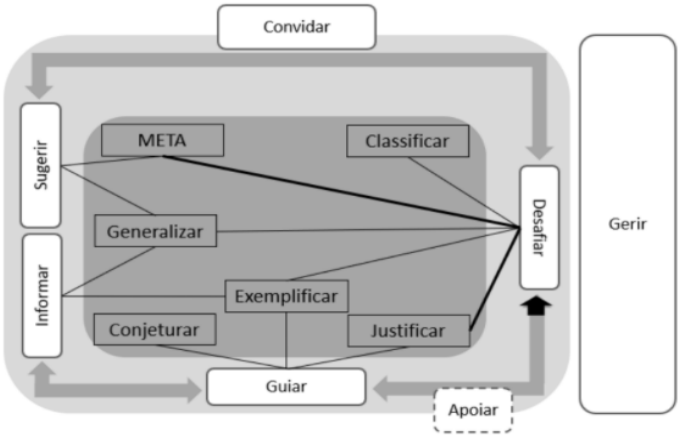


Figura 10 - Modelo das ações da coletivas que promovem o raciocínio matemático retirado de Brocardo et al. (no prelo, p. 22).

A parte do modelo que tem um sombreado mais escuro retrata as ligações diretas que existem entre as ações dos professores mencionadas no modelo de Ponte et al. (2013) e os processos de raciocínio matemático.

A ação de desafiar, de acordo com este modelo, é a que está mais associada ao desenvolvimento do raciocínio matemático. De facto, como se pode observar na Figura 3, é a que recai num maior número de processos de raciocínio matemático (Classificar, Justificar, Generalizar, Exemplificar), existindo uma maior incidência nos processos de Meta-analisar e de Justificar. A ação de guiar está associada às questões que o professor coloca para conduzir os alunos a clarificarem os seus pensamentos de forma a que possam, posteriormente, elaborar e formular exemplos, conjeturas e justificações para as suas ideias, o que leva a que este tipo de ação promova os processos de Justificar, Exemplificar e Conjeturar (*idem*, *ibidem)*. Já nas ações de informar é possível verificar que estas promovem os processos de Exemplificar e Generalizar dado que o professor pode informar os alunos que podem recorrer

a mais do que um exemplo que satisfaça as condições da tarefa proposta ou pode validar uma ideia baseada no que foi dito, ou realizado, pelos alunos (*idem*, *ibidem*). Por sua vez, a ação de sugerir aparece relacionada com os processos de Meta-analisar e de Generalizar, pois o professor pode aconselhar os alunos a verificar se o que está por detras de uma generalização ou até recomendar a utilização de uma determinada estratégia de resolução para conduzir os alunos a produzirem e testarem uma conjetura (*idem*, *ibidem)*.

No estudo realizado por Brocardo et al. (no prelo) não foram identificadas nenhuma ação do tipo de Convidar ou Apoiar que promovesse os processos de raciocínio matemático, levando a que no modelo representado na Figura 10 não apareça nenhum processo de raciocínio associado a estas ações. Porém, os mesmos autores afirmam que estas ações poderiam ter surgido se a professora que participou no estudo tivesse selecionado um grupo especifico para participar na discussão ou se tivesse destacado algo dito pelos alunos durante a exploração autónoma da tarefa (*idem*, *ibidem*).

Em suma, o professor tem um papel de protagonismo na promoção e desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças. Para além de selecionar as tarefas a trabalhar, deve criar um ambiente de sala de aula que possibilite a partilha de ideias, questionar os alunos sobre as suas escolhas de estratégias e resoluções, levando-os a justificá-las e motivar e desafiar a ir além do que já conhecem, facilitando a formulação de conjeturas, justificações e generalizações, e o estabelecer de relações entre diversos conteúdos matemáticos.

Capítulo II – Metodologia de Investigação

A Covid-19 veio alterar um pouco a logística deste projeto de investigação uma vez que não permitiu a realização do estágio em que este seria posto em prática. Assim sendo, este projeto não inclui uma componente empírica focando-se na fundamentação teórica das opções que justificam a importância do tema que me propunha trabalhar e na fundamentação da sua operacionalização em termos de uma planificação detalhada.

Tendo em conta que inicialmente tinha considerado e previsto elaborar uma investigação em que o principal objetivo era investigar como é que os alunos, trabalhando num contexto de aulas em três fases formulam e testam conjeturas e desenvolvem os processos de raciocínio de justificar e generalizar tinha preparado uma metodologia de investigação. Deste modo, em seguida, irei apresentar e justificar a metodologia de investigação que iria sustentar o projeto inicial se este tivesse sido concretizado.

Deste modo, inicio este capítulo com a apresentação do paradigma de investigação, a perspetiva e o método investigativo e termino com a exposição dos processos de recolha e tratamento de dados que foram selecionados para a concretização da componente empírica do projeto inicial.

1. Paradigma, perspetiva e método investigativo

Investigar é obter conhecimento novo. Deste modo, a investigação, entendida como processo de procurar, tem como finalidade a produção de conhecimento. Assim sendo, a investigação é caraterizada por ser intencional, criteriosa e rigorosa, ou seja, requer uma inquirição disciplinada e, também, uma pesquisa sistemática, uma vez que, para que se obtenha conhecimento válido, é imprescindível que seja estruturada, lógica, empírica, redutível (para ser possível compreender não só as relações estabelecidas entre fenómenos, mas também a forma como estas podem ser aplicadas em outros contextos), replicável e transmissível (Tuckman, 2000).

Numa investigação é necessário seguir um conjunto de normas, pressupostos e valores que orientam o investigador, determinando, assim, a forma como este conduzirá o seu trabalho, denominado de paradigma (Coutinho,

2016). De acordo com Crotty (1998, p.3 in Coutinho, 2016, p. 24), “os paradigmas são o referencial filosófico que informa a metodologia do investigador”, ou seja, são considerados como modelos que ajudam a saber o “que” e “como” investigar num determinado contexto (Coutinho, 2016).

Deste modo, é possível afirmar que quando falamos em paradigmas estamos a referirmo-nos às perspetivas globais de um investigador sobre o modo como o mundo pode ser conhecido, podendo este fazê-lo de duas maneiras: usando uma perspetiva quantitativa ou uma perspetiva qualitativa.

Enquanto na primeira perspetiva a investigação é realizada através da análise de factos observáveis sobre amostras com grande dimensão, o investigador tem uma atitude distante e neutra e a resolução dos problemas tem soluções objetivas e generalizáveis, a perspetiva qualitativa tem como finalidade interpretar e compreender as situações, dado que o investigador não pretende generalizar, mas particularizar. Os dados, ao serem de um contexto específico, podem não se verificar num outro, sendo desta forma imprescindível que o investigador tenha um grande contacto com os indivíduos investigados e, simultaneamente, seja neutral, não dando opiniões nem fazendo juízos de valor (Coutinho, 2016).

Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco caraterísticas para investigações numa perspetiva qualitativa: (i) os dados são recolhidos pelo investigador nos locais de estudo num ambiente natural através de observações feitas pelo mesmo no contexto; (ii) a investigação é descritiva, as observações são descritas de forma minuciosa, nada é trivial e nada escapa à avaliação para que se compreenda exatamente o que aconteceu no decorrer da observação; (iii) o investigador tem interesse no processo e não nos resultados, uma vez que neste tipo de investigação os pormenores do processo são contabilizados sendo os resultados apenas uma pequena parte da investigação; (iv) os resultados são analisados de forma indutiva, o investigador não recolhe os dados com a finalidade de verificar uma hipótese formulada; (v) e, por último, existe a importância do significado das coisas, o investigador não se baseia apenas na sua observação, ele tem de saber o motivo para que uma determinada coisa aconteça tendo como ponto de vista o dos sujeitos da investigação.

Ao ter em conta tudo o que foi mencionado neste capítulo até ao momento, considero que este projeto estaria inserido numa perspetiva metodológica qualitativa, visto que o objetivo era compreender como é que os alunos, trabalhando num contexto de aulas em três fases formulam e testam conjeturas e desenvolvem os processos de raciocínio de justificar e generalizar. Para tal, necessitaria de estar presente no local para conseguir recolher os dados, pois estes advêm, maioritariamente, das observações que faria dos alunos ao longo da implementação do projeto e, também, pela necessidade de dialogar com os mesmos para conseguir perceber o porquê de escolherem determinadas opções e não outras para chegarem às conclusões das tarefas propostas.

É ainda de salientar que eu não pretenderia generalizar as conclusões a que chegaria, uma vez que estaria num contexto que terá as suas especificidades, não sendo possível afirmar que o que seria observado neste contexto possa ser verificado num outro, e, acima de tudo, iria privilegiar o processo, ou seja, o trabalho que seria realizado ao longo das sessões, desde a exploração em grupo das tarefas propostas, passando pelo trabalho autónomo até chegar ao momento das discussões coletivas, sendo deste modo indispensável a interação, a partilha e a colaboração entre o investigador, neste caso eu própria, e o indivíduos investigados, os alunos.

A metodologia reflete as escolhas e as filosofias do investigador, mostrando o que está por trás dos métodos, e analisa e descreve os mesmos, sendo estes um conjunto de procedimentos e técnicas, para se conseguir chegar à finalidade da investigação (Coutinho, 2016). Existem vários métodos de investigação, como por exemplo os estudos de caso, a investigação-ação, os estudos etnográficos, os estudos biográficos e as histórias de vida.

A investigação que estaria presente neste projeto foi projetada para ser realizada em contexto de estágio no 1.º Ciclo do Ensino Básico, mais precisamente no 3.º ano de escolaridade, tendo como finalidade compreender como é que os alunos, trabalhando num contexto de aulas em três fases formulam e testam conjeturas e desenvolvem os processos de raciocínio de justificar e generalizar. Assim, a investigação estaria inteiramente relacionada com a minha prática enquanto (futura) docente e, por essa razão, considero que

o método de investigação que mais se ajustava a este projeto é a investigação sobre a prática.

Como estagiária que está a construir e desenvolver a sua prática profissional considero de extrema importância os professores refletirem, permanentemente, sobre a forma como conduzem as suas práticas, pois só assim será possível avaliar o que foi feito para, posteriormente, saber o que se pode melhorar e reformular. No entanto, um professor para ser investigador não basta refletir sobre a prática, também tem de: compreender o modo de pensar dos seus alunos e as suas dificuldades; ter a capacidade de questionar e se sentir questionado; ter autoconfiança; e, ter uma atitude autónoma e responsável sobre a sua própria aprendizagem, que é feita ao longo da vida (Alarcão, 2001; Ponte, 2002).

No decorrer das aulas, os professores enfrentam diversas situações problemáticas, sendo muitas vezes resolvidas através das suas experiências profissionais. Contudo, nem sempre a forma como se resolvem essas situações são as mais satisfatórias para que o processo de ensino-aprendizagem seja realizado de uma forma harmoniosa. Então, a investigação por parte dos docentes pode ajudar a superar os problemas encontrados nas suas práticas (Ponte, 2002).

Assim, ao juntar a investigação, processo de produção de conhecimento, com a prática profissional é possível estabelecer um processo que permita a construção de conhecimento sobre a prática, sendo, por isso, “uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente” (Ponte, 2002, p. 7).

A investigação sobre a prática, de acordo com Ponte (2002, pp. 7-8), pode destinar-se a dois objetivos, “alterar algum aspeto da prática, uma vez estabelecida a necessidade dessa mudança” ou “procurar compreender a natureza dos problemas que afetam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior, de uma estratégia de ação”.

Este método de investigação, tal como todos os outros, cumpre quatro momentos: o formular da questão-problema, que deve ser clara e construída a partir de uma situação que intriga o professor; a metodologia de trabalho, que

recorre aos planos de trabalho e técnicas de recolha de dados das investigações em Ciências Sociais e Humanas (CSH), sendo que este método tem um grande vínculo com as situações problemáticas da prática profissional e poderá ter uma dimensão colaborativa no caso de ser realizada em trabalho de equipa; a análise dos dados (os quais são, predominantemente, a observação, a análise documental e a entrevista), que inclui a análise de conteúdo e de discurso; e a divulgação dos resultados (Ponte, 2002).

É necessário referir que a investigação sobre a prática inclui cinco critérios de qualidade, sendo estes: o vínculo com a prática, que requer uma situação vivida na prática; a autenticidade, articulação entre o ponto de vista do investigador e o contexto; a novidade; qualidade metodológica; e a qualidade dialógica (Ponte, 2002).

Em suma, a perspetiva qualitativa e o método de investigação sobre a prática seriam as melhores opções para este projeto, uma vez que como investigadora necessitria de estar presente no local e interagir com os alunos para conseguir recolher os dados que necessito para avançar possíveis conclusões e, também, por este projeto contribuir para o desenvolvimento da minha prática como profissional da área de educação.

2. Procedimentos de recolha e de tratamento de dados

As técnicas de investigação são definidas, por Almeida e Pinto (1990, p.78), como "[…] conjuntos de procedimentos bem definidos e transmissíveis, destinados a produzir certos resultados na recolha e tratamento de informação requerida pela actividade de pesquisa".

Neste capítulo serão identificadas e caraterizadas as técnicas, e os seus respetivos instrumentos, escolhidas para a recolha e tratamento de dados deste projeto, assim como a explicitação da sua adequação ao estudo em causa.

2.1. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

As técnicas escolhidas foram: a observação, em que se irá utilizar como instrumentos de registo as grelhas de observação, fotografias e os registos de

vídeo ou áudio; e a recolha documental, através dos documentos produzidos pelas crianças.

2.1.1. Observação

A observação é uma técnica útil e fidedigna na recolha de dados, pois possibilita que a informação seja recolhida através do contato direto, intencional e sistemático, com os sujeitos em estudo no contexto. Esta técnica permite não só obter informações *in loco*, mas também possibilita o não condicionamento das mesmas pelos indivíduos, dado que o investigador descreve factos concretos do que observa (Afonso, 2005; Aires, 2015).

De acordo com Afonso (2005, p. 92), a observação pode ser realizada de uma forma estruturada ou não estruturada. A observação estruturada é efetuada quando o investigador utiliza instrumentos concebidos *a priori* "[…] em função dos objetivos de pesquisa, nos quais se regista informação anteriormente pré-codificada", já a observação não estruturada tem como finalidade descrever as situações sem ser possível determinar ao certo o que pode ou não acontecer.

Nesta investigação iria optar por uma observação estruturada, uma vez que teria de organizar, no final de cada tarefa, um momento de discussão coletiva, sendo necessário saber quais foram os raciocínios que os alunos usaram para chegar às suas conclusões, facilitando, assim, a minha intervenção e o estabelecimento de relações entre os raciocínios e os conceitos/noções por detrás das tarefas propostas.

O investigador, ao utilizar esta técnica, pode tomar dois tipos de postura: ser observador participante – participa nas ações que está a observar, assumindo um papel ativo nas mesmas – ou ser observador não participante – não participa na ação (Aires, 2015).

É de salientar que, neste caso, iria tomar uma posição de observadora participante, pois estaria em constante contato com os alunos ao apresentar as propostas de tarefas, no apoio ao trabalho autónomo e durante a realização das discussões coletivas. No entanto, essa participação poderia ser maior em alguns momentos e menor noutros, o que é completamente normal, segundo Bogdan e

Biklen (1994), porque o tipo de observação pode ser ajustado consoante os momentos que compõem as tarefas.

Em relação aos instrumentos para realizar os registos, estes são: as grelhas de observação, construídas previamente de modo a facilitar a recolha de dados em função dos objetivos do meu projeto de investigação; e os registos em áudio ou vídeo, que iriam facilitar o registo das informações, principalmente, durante as discussões coletivas, uma vez que se torna difícil mediá-la e, simultaneamente, escrevê-las de forma clara, factual, detalhada e precisa.

2.1.2. Recolha documental

A recolha documental tem como objetivo "selecionar, tratar e interpretar informação bruta existente em suportes estáveis […] com vista a dela extrair algum sentido" sobre o estudo a que corresponde a investigação (Carmo & Ferreira, 2008, p. 73). Estes documentos, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), podem ser textos escritos pelos indivíduos, documentos oficiais (por exemplo, documentos sobre os estudantes) ou documentos pessoais, como os documentos produzidos pelas crianças.

Os produtos dos alunos são indispensáveis "[…] quando o foco da investigação se centra na aprendizagem dos alunos" (Máximo-Esteves, 2008, p. 92). Assim, optaria por analisar a resolução das tarefas feitas pelos alunos, dado que estas poderiam ajudar-me a compreender melhor o que estão a tentar explicar no decorrer das discussões coletivas.

2.2. Técnica de análise de dados

A análise de informação "envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspetos importantes do que deve ser apreendido e a decisão do que vai ser transmitido aos outros" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 225). Assim, Quivy (1992) afirma que esta pode ser realizada através de duas categorias: a análise estatística e a análise de conteúdo.

Neste projeto de investigação, a análise dos dados seria realizada através da análise de conteúdo.

2.2.1. Análise de conteúdo

A análise de conteúdo é uma técnica que tem como finalidade tratar e interpretar os dados recolhidos. De acordo com Bardin (1997, p. 42), a análise de conteúdos pode ser definida como:

> *Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores […] que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção […] destas mensagens.*

Deste modo, esta técnica é caraterizada por ser básica, metódica, exigente, flexível e adaptável a diversas técnicas de recolha de dados e por permitir compreender e fazer inferências interpretativas através "dos conteúdos que são privilegiados na análise", sendo estes separados por categorias (Amado, Costa & Crusoe, 2013, p. 300).

Como já foi referido anteriormente, a minha principal finalidade é compreender como é que os alunos formulam e testam conjeturas e desenvolvem os processos de justificar e generalizar numa aula dividida em três fases. Assim, acredito que a análise de conteúdo seria a técnica mais indicada para esta investigação, na medida em que me permitiria entender como é que os alunos interpretam as tarefas e as relacionam com os seus conhecimentos prévios, de forma a resolverem as tarefas. Por outro lado, a partir da descrição das situações vivenciadas e do cruzamento das informações retiradas dos produtos das crianças, poderia focar-me nos aspetos que considero mais significativos no âmbito deste estudo, formulando as minhas conclusões.

Capítulo III – Proposta de Intervenção

Este projeto foi delineado para ser desenvolvido com uma turma de 3.º ano de escolaridade e tem como seu principal objetivo perceber como é que um professor do 1.º Ciclo do Ensino Básico pode desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos, principalmente os processos de conjeturar, justificar e generalizar. É de salientar que todas as tarefas escolhidas para este projeto têm como temática as plantas, tema que pertence à área de Estudo do Meio, dado que esta área abrange uma diversidade de conteúdos programáticos que podem ser usadas por outras áreas (Roldão, 1995), permitindo, desta forma, que a aprendizagem não seja fragmentada, pois só com a junção dos vários conhecimentos das diversas áreas é que o ser humano consegue compreender o mundo real (Martins et al., 2017). Tal como Martins et al. (2017), também eu, acredito que todas as áreas curriculares estão interligadas, uma vez que as literacias e os saberes de cada uma são essenciais para a aprendizagem de conteúdos presentes nas inúmeras áreas científicas.

Neste capítulo, são apresentadas as tarefas matemáticas selecionadas, uma proposta de organização de intervenção pedagógica e a planificação das tarefas selecionas para a intervenção pedagógica.

1. Tarefas Matemáticas que desenvolvem o raciocínio matemático

As tarefas são uma forma de proporcionar aos alunos oportunidades de realizarem aprendizagens ricas, poderosas e produtivas em qualquer ano de escolaridade (Ponte, 2005). A partir delas, não só é possível trabalhar qualquer conteúdo como, também, fazer adaptações consoante as necessidades individuais de cada aluno, possibilitando, assim, a diferenciação pedagógica (Swan, 2017). Assim sendo, é importante que o professor crie ou selecione as tarefas tendo em consideração os conteúdos que quer trabalhar, os objetivos que pretende atingir, os interesses e as necessidades dos seus alunos, pois é ele quem conduz o processo de ensino-aprendizagem (Ponte, 2005).

Relativamente às tarefas matemáticas, importa referir que existem diversos tipos de tarefa (exercícios, problemas, explorações, investigações, etc.)

e que estes se diferenciam consoante: o grau de desafio, sendo que este varia entre “reduzido” e “elevado”; o grau de estruturação, que depende da informação dada e do que é pedido, variando entre “aberto” e “fechado”; a duração, visto que consoante o tipo de tarefas estas podem realizar-se num espaço de tempo curto (ex. exercícios), médio (ex. problema e tarefas de exploração) ou longo (ex. projetos); e o contexto, em que as tarefas podem ser enquadradas em contextos de realidade, de semi-realidade ou de matemática pura (Ponte, 2005).

É ainda de salientar que para além da tipologia de tarefa, o professor necessita de ter em atenção a forma como irá realizar a apresentação à turma e fará a sua condução durante a aula, pois de acordo com Swan (2017, p.67-68)

> *Uma tarefa significa mais do que a impressão de um problema numa ficha ou num manual, incluindo a forma como é mediada e transformada pelo professor na sala de aula, a sua apresentação e a subsequente provisão de indicações, pistas e outras questões. As tarefas também se alteram à medida que os alunos as interpretam de modos diferentes.*

As tarefas matemáticas que têm o propósito de favorecer o raciocínio matemático devem ser pensadas e elaboradas tendo em consideração um conjunto de princípios que desenvolvam os processos de raciocínio que o mesmo envolve. De acordo com estas mesmas autoras, este tipo de tarefas, de um modo geral, devem permitir a aplicação de uma diversidade de estratégias de resolução e, consequentemente, dar a oportunidade aos alunos de usar diversos raciocínios, proporcionando uma discussão coletiva mais rica, envolver a utilização de várias representações (ativas, icónicas ou simbólicas), permitindo uma maior compreensão dos conceitos matemáticos, incentivar à reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados e favorecer o envolvimento dos alunos em processos de raciocínio cada vez mais formais, de modo a que reflitam, simultaneamente, sobre os processos que utilizaram e sobre os processos utilizados por outros (Quaresma, Mata-Pereira & Henriques, no prelo)

Como referi anteriormente este projeto tem como principal finalidade perceber como é que através das tarefas matemáticas selecionadas é possível promover o raciocínio matemático focando, sobretudo, o desenvolvimento dos processos de conjeturar, generalizar e justificar. Quaresma et al. (no prelo) consideram que para que os processos de raciocínio sejam desenvolvidos é

fundamental que lhes sejam dados uma atenção particular e sistemática. Assim sendo, estas autoras afirmam que, para promover estes processos de raciocínio, é essencial que as tarefas propostas aos alunos incentivem a formulação de conjeturas baseadas tanto na observação de diferenças e semelhanças como de casos particulares para que possam generalizar o que observam. A generalização, segundo estas mesmas autoras, pode ser potencializada também através de questões que envolvem o conhecimento prévio dos alunos ou a partir de outras generalizações que estes já conheçam, levando a que exista uma extensão da mesma a um conjunto mais alargado de objetos. No que respeita ao processo de justificar, as autoras referem que as tarefas matemáticas devem incluir questões em que os alunos sejam solicitados a justificar as suas respostas, assim como as estratégias de resolução escolhidas ou até mesmo as afirmações matemáticas, sendo que estas podem ser de diversas naturezas, como por exemplo por exaustão, analisando todos os exemplos possíveis, por coerência lógica ou recorrendo ao uso de contraexemplos. Outras questões que podem desenvolver o raciocínio são as que solicitam ao aluno a identificação da veracidade ou falsidade de afirmações matemáticas, podendo estas serem realizadas através da análise de justificações apresentadas por outros.

Quaresma et al. (no prelo) propõem um conjunto de princípios que podem orientar a seleção, elaboração ou adaptação de tarefas potencialmente promotoras do desenvolvimento do raciocínio matemático que estão resumidos na figura 11. Salienta-se que não é expectável que uma só tarefa abranja todos os princípios que indicam, mas sim que inclua alguns, ou mesmo só um, desses princípios.

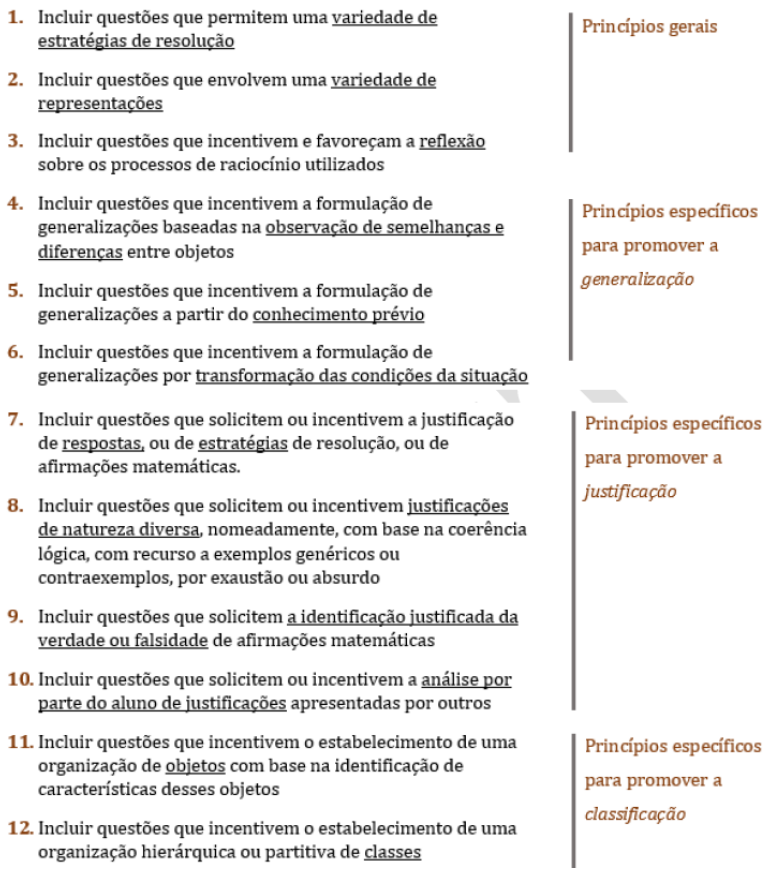


Figura 11 - Princípios para design de tarefas para promover o raciocínio matemático (Quaresma et al., no prelo, p.7).

Tendo presente os princípios para design de tarefas acima mencionados, para este projeto foram selecionadas/concebidas/adaptadas três tarefas, com o objetivo de promover o desenvolvimento dos processos de raciocínio conjeturar, generalizar e justificar, as seguintes tarefas: *Vamos plantar feijões!*, uma adaptação das tarefas *{30, 12, 18} What else belong?* (Vale et al., 2017, p. 4) e *Setting up chairs for a band concert* (Leinwand, et al., 2014, p. 27); *A turma do Miguel e o feijoeiro*, concebida por mim tendo em consideração diversas tarefas do mesmo tipo que se encontram no livro *Matemática nos Primeiros Anos: Tarefas e Desafios para a Sala de Aula* (Pimentel et al., 2010); e *Partilhar feijões*, uma adaptação da tarefa Chupa-chupas da Equipa do Projeto REASON.

Vamos plantar feijões! (Figura 12) é uma tarefa que tem no seu design caraterísticas, referidas por mim anteriormente, que promovem o raciocínio matemático.

Vamos plantar feijões!

A turma do terceiro ano é responsável por plantar feijões na horta da escola. De forma a prepararem a plantação, têm de determinar o total de feijões que irão necessitar.

A professora da turma explica que vão precisar de plantar 7 regos.

Dos números de feijões que se seguem, quais podem ser plantados nos sete regos de modo que cada um dos regos tenha o mesmo número de feijões?

279 252 140 300 105

Explica como pensaste e justifica a tua resposta.

Figura 12 - Enunciado da tarefa *Vamos plantar feijões!*

A nível geral, esta tarefa permite aos alunos a possibilidade de recorrem a diversas estratégias de resolução e representação. Por exemplo os alunos podem optar por resolver esta tarefa através: da representação icónica de cada um dos números e da sua colocação em sete filas de forma a poderem observar quais dos números são abrangidos pela condição imposta pela tarefa; da utilização da adição sucessiva do número 7; e da divisão de cada um dos números por sete, sendo que apenas as divisões que derem resto 0 é que podem ser soluções da tarefa. Esta tarefa também incentiva à reflexão sobre os processos de raciocínio que foram utilizados quando pede que os alunos expliquem como é que pensaram. No que respeita à promoção específica dos processos de raciocínio, esta tarefa apela à justificação uma vez que solicita que os alunos indiquem uma sequência de argumentos lógicos baseados em propriedades, conceitos, ideias ou procedimentos matemáticos que lhes permitam validar as suas conclusões.

A tarefa *A turma do Miguel e o feijoeiro* tem na sua composição uma sequência que representa o crescimento de um feijoeiro durante as primeiras três semanas após a sua germinação (Figura 13). Este tipo de tarefas com sequências ou padrões desenvolvem o raciocínio matemático dos alunos por lhes ser proporcionado a possibilidade de usarem várias estratégias de resolução e permitirem a utilização de diversas representações para as mesmas, como por exemplo a representação icónica dos diversos termos da sequência e

a utilização de tabelas, mas também oferecem aos alunos a possibilidade de promover os processos de raciocínio de conjeturar, justificar e generalizar, através da observação e análise das figuras da sequência, uma vez que podem verificar o que se mantem e o que se altera de uma figura da sequência para a outra.

A turma do Miguel e o feijoeiro

A turma do Miguel esteve a fazer uma experiência com sementes de feijão. Nesta experiência, os alunos mediam, todas as semanas, o caule do feijoeiro e contavam o número de folhas.

A imagem representa o feijoeiro nas primeiras três semanas.

Tendo em conta a sequência representada na imagem, responde às seguintes questões.

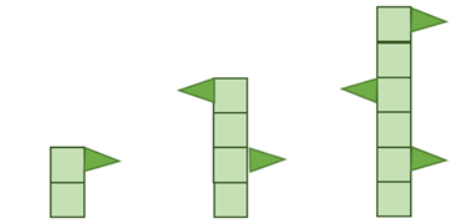


Figura 1 (1ª semana) Figura 2 (2ª semana) Figura 3 (3ª semana)

a) Que figuras geométricas foram utilizadas para representar o feijoeiro?
b) Que diferença existe da figura 1 para a figura 2? E da figura 2 para a figura 3?
c) Desenha a figura 4 da sequência.
d) A Ana, colega do Miguel, diz que a sétima figura da sequência vai ter 9 quadrados e 5 triângulos. Já o Fábio diz que não é possível ter nenhuma figura com esses números. Quem tem razão? Justifica a tua resposta.
e) Quantos quadrados e triângulos tem a oitava figura? E a figura 15? E a 25?
f) Explica por palavras tuas como é que sabemos quantos quadrados e triângulos terá o feijoeiro de uma figura qualquer da sequência. Justifica a tua resposta.

Figura 13 - Enunciado da tarefa *A turma do Miguel e o feijoeiro*.

Neste caso, a tarefa apela ao processo de generalizar quando incentiva a que os alunos observem a sequência e identifiquem as diferenças e as semelhanças que existem entre os termos da mesma e quando incentiva a formulação de uma generalização tendo em consideração o seu conhecimento prévio sobre a sequência em estudo, isto é, quando pede ao aluno para explicar pelas suas próprias palavras como é que se pode saber qual o número de quadrados e de triângulos que terá o feijoeiro de qualquer um dos termos da

sequência. Relativamente à justificação, este processo é promovido quando é solicitado ao aluno que analise uma resposta dada por outro e que identifique e justifique a veracidade ou falsidade da mesma, sendo que neste caso temos uma discordância entre os dois personagens que aparecem na alínea d), e quando é solicitado a justificar as suas respostas, podendo nestas justificações utilizar exemplos genéricos ou contraexemplos. Finalmente, a alínea e) ao implicitamente desafiar os alunos a passar de pensar em casos em que é razoável recorrer a desenhos para outros em que não o, favorece a formulação de conjeturas.

A última tarefa selecionada para este projeto é *Partilhar feijões* (Figura 14). Esta tarefa tem um conjunto de caraterísticas que ajudam a desenvolver o raciocínio matemático dado que permite a utilização de uma variedade de estratégias de resolução por parte dos alunos (como por exemplo a experimentação/testagem sucessiva de números, o encontrar de relações entre os números testados e a divisão de diferentes números por 2 e por 5) e, consequentemente, uma diversidade de representações (icónicas - imagens, desenhos e esquemas - ou simbólicas - símbolos, linguagem e vocabulário matemático).

Partilhar feijões

O francisco e a Beatriz ficaram responsáveis por apanhar os feijões da horta da escola. Partilharam os feijões entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram mais três colegas da sua turma que também queriam ficar com alguns feijões. Decidiram partilhá-los novamente e sobraram 2 feijões. Quantos feijões podiam ter sido apanhados?

Figura 14 - Enunciado da tarefa *Partilhar feijões*.

Uma outra caraterística é que não tem uma solução única, ou seja, faz com que os alunos compreendam que uma tarefa ou um problema pode ter mais do que uma solução ou, até mesmo, infinitas soluções e que todas elas estão corretas. Relativamente aos processos de raciocínio, a questão colocada no enunciado apela à formulação de generalizações baseadas nas observações de semelhanças e diferenças entre os números.

Em suma, as tarefas que selecionei incidem nos processos de raciocínio de justificar e generalizar. No entanto, embora não tenha referido especificamente para cada uma delas o processo auxiliar de exemplificar será igualmente previsivelmente trabalhado, sobretudo nas última duas tarefas dado que os alunos podem recorrer ao processo de exemplificar quando recorrem a exemplos e contraexemplos para justificar as suas conclusões ou generalizações.

2. Organização da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica deste projeto foi separada em três momentos. O primeiro momento ocorreria antes da intervenção e onde seria realizada uma observação da turma e do modelo de ensino que é utilizado pela professora titular de forma a perceber se os alunos estão familiarizados com o ensino exploratório e com a abordagem da aula dividida em quatro fases, que tipo de dificuldades existem no que respeita à matemática e que complicações é que é possível prever em relação às tarefas que serão propostas aos alunos.

O segundo momento diz respeito à intervenção pedagógica, que neste caso segue as fases de uma aula de ensino exploratório da matemática (Figura 15).

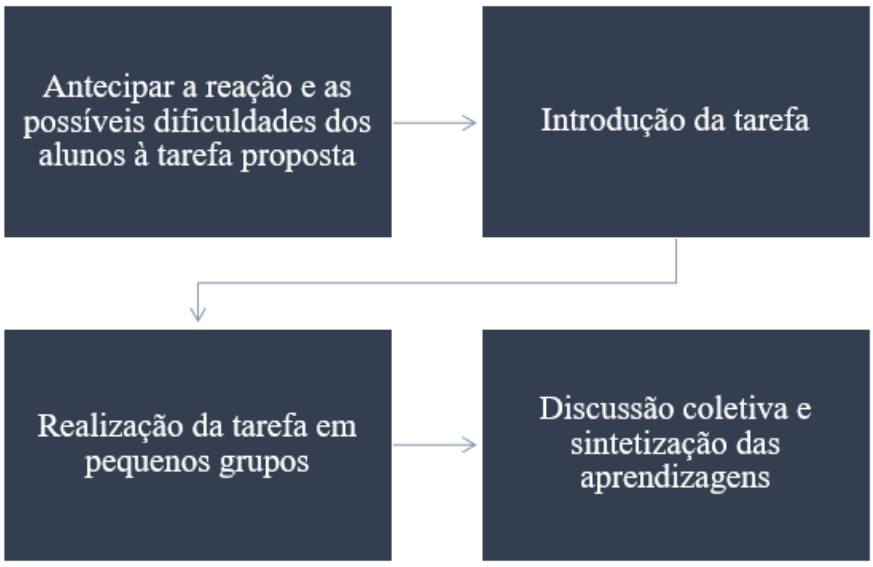


Figura 15 - Esquema da intervenção pedagógica.

A intervenção pedagógica inicia-se com o preparar e planificar das tarefas propostas e com o antecipar das reações e das formas como os alunos irão abordar as mesmas. De seguida, serão realizadas as três fases que complementam uma aula de ensino exploratório (introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão coletiva e sintetização das aprendizagens). É de assinalar que, para organizar o momento de discussão coletiva sigo as ideias de Stein et al. (2008) em que é salientado a importância de selecionar resoluções em que sejam utilizadas estratégias diferentes e de escolher a ordem pela qual é feita a apresentação das estratégias, dado que esta ordem deve ser intencional, ou seja, em primeiro lugar são discutidas as estratégias que correspondem a um nível mais baixo de aprendizagem e, por último, as de um nível mais elevado de aprendizagem, que normalmente são mais eficazes. Este procedimento tem como objetivo dar a oportunidade aos alunos de contactarem, compararem e compreenderem diferentes estratégias de resolução, sendo que também poderão chegar à conclusão de que algumas resoluções podem ser mais eficazes do que outras.

O último momento seria composto pela análise dos dados recolhidos ao longo do projeto de forma a compreender se os alunos iriam conseguir, ou não, desenvolver o seu raciocínio matemático, principalmente os processos de raciocínio de generalização e de justificação. Para tal, iria recorrer às produções dos alunos, às minhas tabelas de observação, a vídeos ou gravações de áudio em que os alunos expliquem a forma como pensaram, o porquê de utilizarem determinadas estratégias em discernimento de outras e as justificações/argumentos que utilizaram para validar as suas soluções para cruzar informações e, assim, conseguir perceber se a utilização destas tarefas e da abordagem de ensino exploratório de uma aula dividida em três fases realmente ajuda a que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático e, consequentemente, os processos de raciocínio matemático.

3. Planificação das tarefas selecionadas para a intervenção pedagógica.

Como foi referido no início deste capítulo, irei agora apresentar as planificações das tarefas adaptadas/concebidas por mim para promoverem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos de 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

3.1. Tarefa: *Vamos plantar feijões!*

Objetivos:

- Compreender os conceitos de múltiplo e de divisor;
- Mobilizar conceitos relativos aos múltiplos de 7;
- Perceber o significado de resto de uma divisão inteira;
- Incentivar o uso de exemplos como apoio aos processos de justificar;
- Promover o uso da justificação como processo de raciocínio.
- Incentivar o uso de exemplos como apoio ao processo de justificar (Brocardo, et al., no prelo);

Conteúdos de ensino/aprendizagem:

- Múltiplo e divisor;
- Divisão por partilha;
- Processos de raciocínio matemático: justificar;

Recursos:

- Folha com o enunciado da tarefa (Apêndice 1).
- Folha branca para o registo das respostas.

Organização dos alunos: Os alunos estarão a trabalhar em pares, de modo a poderem discutir e partilhar as suas ideias.

Organização do espaço: As mesas estarão colocadas de forma a formarem um U, aberto em direção ao quadro, de modo a que todos os elementos da turma (professora e alunos) consigam ver a pessoa que está a falar, independentemente de quem seja e da sua posição na sala, sendo, assim, uma organização facilitadora da comunicação entre todos.

Antecipação das dificuldades previstas e de estratégias de resolução possíveis: Nesta tarefa prevê-se que as dificuldades dos alunos se localizem no compreender que a tarefa está relacionada com os múltiplos do 7, ou seja, que existe uma relação entre o número de regos que são necessários plantar e o número de feijões a plantar em cada rego.

Relativamente às estratégias de resolução os alunos, prevejo que poderão utilizar as seguintes estratégias:

- Representação icónica de cada um dos números e colocar a sua representação dividida em sete linhas (regos), ou seja, cada linha é 1 rego e repartirem os feijões de modo a que cada um dos regos fique com o mesmo número de feijões. Por exemplo, ao desenharmos 140 feijões distribuindo-os por sete linhas (regos) verificamos que em cada linha ficam 20 feijões, ou seja, o 140 é uma solução para o problema, porém o mesmo já não acontece ao número 279 uma vez que ao distribuirmos os feijões pelas sete linhas percebemos que 6 das linhas tem 4 feijões e que uma fica com 39 feijões.
- Adição sucessiva do número 7, ou seja, sabendo que existem sete regos e que cada rego tem de ter o mesmo número de feijões percebemos que o número mínimo de feijões é sete, um por cada rego, então se continuarmos a soma sete ficamos a saber vários números de feijões que são solução do problema, por exemplo 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49…;
- Multiplicar sucessivamente por um produto conhecido, por exemplo sabendo que 2x7 é igual a 14 facilmente se percebe 20x7 é igual a 140, o que quere dizer que 140 é solução da tarefa e que se 4x7 é igual a 28, então 40x7 é 280, logo é solução da tarefa e, por isso, 279 não poderá ser solução da tarefa;
- Divisão dos diversos números por sete e os números em que o resto seja 0 fazem parte da solução, sabendo que ao fazermos a divisão entre dois números e o resto for 0 o dividendo é múltiplo do divisor, ou seja, ao dividirmos 105 por 7 o resultado é 15 e o resto é 0, logo o 105 é múltiplo de 7 e pertence às soluções da tarefa enquanto se dividirmos 300 por 7 o resultado é 42 e o resto é 6, logo 300 não é múltiplo de 7.

Exploração da tarefa

Introdução da tarefa: Para iniciar a sessão começarei por projetar o enunciado da tarefa (Apêndice 1) e peço aos alunos façam uma leitura silenciosa do mesmo. Em seguida, solicito a dois ou três alunos que expliquem, por palavras suas, a interpretação que fizeram do enunciado, reforçando e sistematizando as ideias transmitidas pelos alunos de modo a garantir que todos compreenderam a situação proposta, sendo que um aspeto-chave para a compreensão é os alunos identificarem que para solucionar a tarefa necessitam de a relacionar com a tabuada do 7.

No caso de os alunos não estarem a compreender a tarefa, poderei perguntar qual o menor número de feijões que poderiam ser utilizados e, em seguida, solicitar um número de feijões que não cumprisse com o requisito da tarefa, por exemplo o número 13. Com estas duas questões poderia levar os alunos a perceber que esta tarefa está relacionada com os múltiplos do número 7.

Proposta de trabalho e atividade esperada (Realização da tarefa): Após a apresentação da tarefa, é distribuído por cada par de alunos uma folha branca, onde estes devem responder às questões que estão no enunciado. É de salientar que neste momento aproveitarei para reforçar, aos alunos, a importância de registarem todas as tentativas de resolução para que mais tarde lhes seja possível perceber como é que pensaram.

Durante a realização da tarefa, os alunos devem explorar a situação proposta e analisar quais as melhores estratégias para resolverem a questão que lhes foi colocada. Nesta parte da sessão, eu irei passar por cada grupo de alunos de modo a perceber se existem dificuldades e se estes estão a conseguir avançar na tarefa, sendo que, caso necessário, poderei desafiar os alunos com questões que os façam pensar sobre as suas resoluções ou que os leve por outros caminhos de resolução. Algumas questões que podem ser utilizadas por mim neste momento, de modo a apoiar as aprendizagens dos alunos, são:

- ✓ Que semelhanças existem entre os números 105 e 140?

- ✓ Que relação é que os números 105 e 140 têm com o número 7?

Importa referir que no decorrer deste momento terei comigo uma tabela (Tabela 1) onde vou registando quais as estratégias de resoluções dos grupos para que posteriormente possa organizar a fase seguinte da exploração da tarefa, a discussão coletiva.

Estratégia de resolução	Quem e o quê?	Ordem de apresentação
Listagem de estratégias utilizadas (corretas ou incorretas) e principais conceitos mobilizados.	Alunos que usaram as estratégias e considerações sobre o seu trabalho.	Ordem de apresentação dos alunos na discussão coletiva.

Tabela 1 - Tabela de registo das estratégias utilizadas pelos alunos e respetiva ordem de apresentação na discussão coletiva.

Discussão coletiva e sintetização: Na discussão coletiva é esperado que os alunos apresentem à turma a sua resolução, indicando a estratégia e justificando as conclusões obtidas. Esta apresentação será feita de acordo com a tabela preenchida, anteriormente, por mim, pois ajudará a que os alunos possam ver diferentes tipos de estratégias de resolução, quais os principais conceitos mobilizados pelos colegas e que se consiga fazer "pontes" entre umas e outras. Para tal, começarei por pedir ao primeiro grupo que apresente a sua estratégia e que explique como é que pensou.

Tendo em conta as minhas previsões das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, começaria a apresentação das resoluções com a estratégia em que é utilizada a representação icónica (Figura 16).

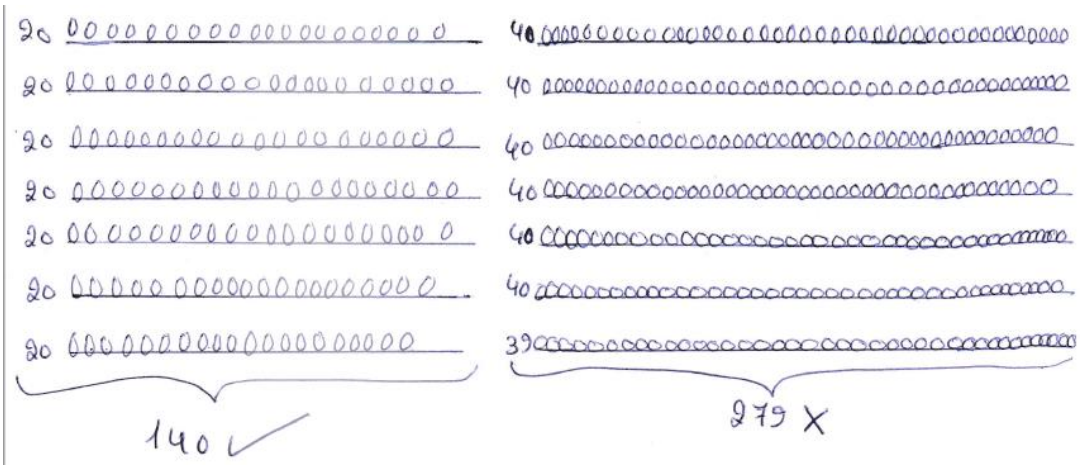


Figura 16 - Estratégia de resolução através da representação icónica.

Escolheria iniciar com esta resolução uma vez que a estratégia utilizada demora muito tempo a ser executada devido aos números propostos serem muito grandes e, também, porque existiria a grande probabilidade de os alunos que a usaram não terem conseguido acabar a tarefa. Nesta resolução o desenho é utilizado para representar os feijões e, simultaneamente, separar os mesmos por sete filas (regos) de modo a que em cada fila exista o mesmo número de feijões, sendo que no caso de não ser possível esse número de feijões não pode ser plantado.

Em seguida pediria ao grupo de alunos que utilizou a estratégia da adição sucessiva do número 7 (Figura 17) para explicar como é que pensou. Esta resolução inicia no menor número possível de feijões que poderia ser plantado nos sete regos e vai até atingir o número 301, ou seja, os alunos foram adicionando sempre sete ao resultado anterior até chegarem aos números pretendidos.

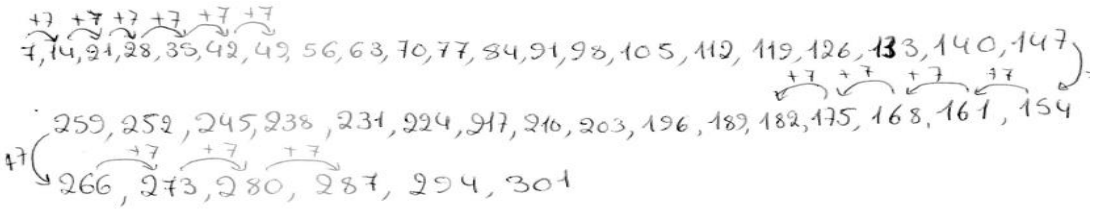


Figura 17 - Estratégia da adição sucessiva do número 7.

Após a apresentação destas duas estratégias e antes de iniciar a apresentação da estratégia seguinte, perguntaria aos alunos se existem semelhanças entre estas estratégias e quais das duas seria a mais eficaz até ao momento. Na minha opinião, haveria a grande probabilidade de os alunos

dizerem que ambas eram muito extensas e que por isso levariam muito tempo até conseguirem saber quais dos números dados no enunciado podiam fazer parte da solução da tarefa, mas que a que seria mais eficaz seria a da adição sucessiva, pois na primeira estratégia existe a grande probabilidade de os alunos se enganarem no número de feijões desenhados enquanto na segunda o aluno só teria de somar 7 ao número anterior.

Posteriormente, pediria ao grupo que utilizou a multiplicação para chegar à solução do problema (Figura 18) para explicar a sua estratégia. Nesta resolução, os alunos utilizariam a multiplicação de números em que já conheciam o produto, ou seja, sabendo que 2x7 é igual a 14 então facilmente sabem que se multiplicarem 20 por 7 o produto será 140 e que este número faz parte da solução da tarefa. O mesmo acontece para os números que não fazem parte, por exemplo se 4x7 é igual a 28, então 40x7 é igual a 280 logo se 280 faz parte das soluções é impossível que o 279 faça parte das mesmas visto que fica a faltar um feijão para que os sete regos tenham o mesmo número de feijões plantados.

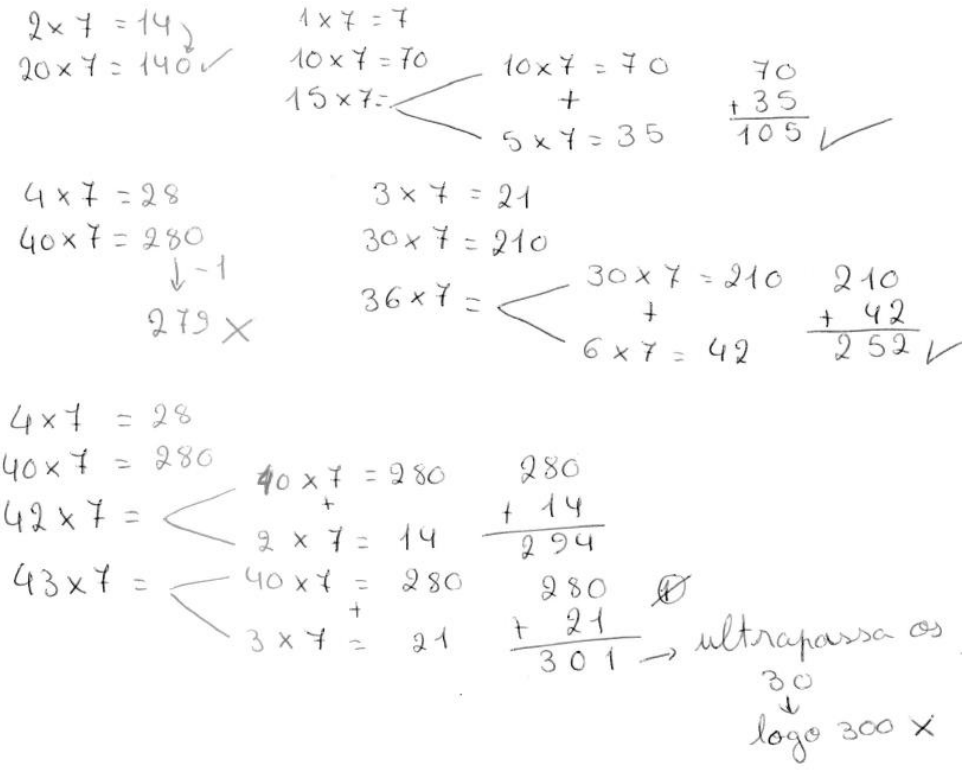


Figura 18 - Estratégia de resolução por multiplicação por um produto conhecido.

Ao ser apresentada esta solução é possível que os alunos não conseguissem explicar bem como é que pensaram para chegar a estas

conclusões e, como tal, seria importante levar a restante turma a questioná-los para que estes conseguissem precisar mais as suas explicações, argumentos e justificações. Algumas das perguntas que os restantes alunos poderiam fazer, ou até mesmo eu poderia colocar, poderiam ser:

- ✓ Porque é que escolheram o 2x7 para saber se o número 140 pertencia à solução da tarefa em vez de usarem o 10x7 que está mais próximo do 100?
- ✓ Porque é que fizeram 43x7 em vez de multiplicarem 7 outro número qualquer para saber se o 300 fazia parte da solução? E porque é que decompuseram o 43 para chegarem ao número 301?

Uma outra questão que levantaria à turma era se a resolução em que seria utilizada à multiplicação tem vantagens relativamente às restantes e se sim porquê. As respostas a estas perguntas poderiam ser algo como a estratégia da multiplicação chega mais rapidamente aos números dos feijões que podem ser plantados nos regos e que no caso da estratégia da adição sucessiva teríamos de ir contando de sete em sete até chegarmos aos números, correndo o risco de errar uma vez que era necessário efetuar vários cálculos sucessivos.

Por fim, pediria aos alunos que utilizaram a estratégia da divisão (Figura 19) para explicarem como é que pensaram e justificarem a sua resposta. Este raciocínio tem subjacente a compreensão do que é uma divisão em que o resto dá 0, ou seja, os alunos que a utilizarem sabem que se numa divisão o resto for 0, divisão exata, o dividendo é múltiplo do divisor.

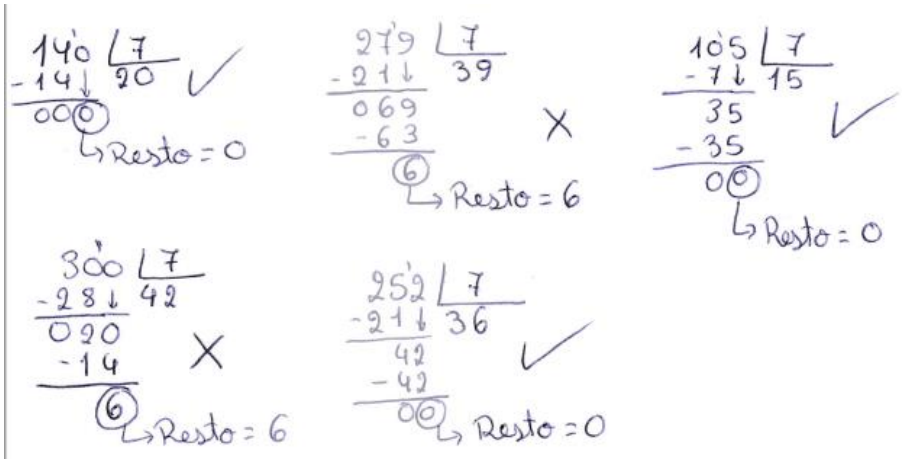


Figura 19 - Estratégia de resolução por divisão dos números por 7.

Nesta resolução, os alunos pegaram nos números mencionados no enunciado e dividiram cada um deles por sete. Os números que ao serem divididos por sete deram resto 0 são os que podem ser plantados nos regos de forma em que em cada um dos regos fique com o mesmo número de feijões, logo são múltiplos de 7. Os números em que a divisão deu resto diferente de 0 não são múltiplos de 7, logo não fazem parte da solução desta tarefa.

Após as apresentações dos alunos, questionaria a turma sobre se existem outros números que também poderiam fazer parte da solução da tarefa, solicitando exemplos, para que fosse possível os alunos chegarem à generalização que qualquer número que seja múltiplo de 7 pode fazer parte da solução desta tarefa.

De modo a sintetizar a tarefa, iria estabelecer relações entre as ideias, resoluções de cada grupo para que, no fim, fosse possível sintetizar as noções matemáticas trabalhadas a partir da proposta. Neste caso, estamos a falar dos múltiplos de 7 e de como é que podemos saber se um número é múltiplo de 7.

Tendo em consideração as estratégias apresentadas, é possível verificar que podemos recorrer à adição sucessiva do número sete e, assim, sabemos que todos os números que aparecem na cadeia numérica são múltiplos de sete, podemos também recorrer à tabuada do 7 e utilizar produtos da tabuada por nós conhecidos para chegar a outros produtos que também são múltiplos de sete ou, ainda, recorrer à divisão que se for exata mostra-nos se o dividendo é múltiplo do divisor.

3.2. Tarefa: *A turma do Miguel e o feijoeiro*

Objetivos:

- Compreender o conceito de dobro;
- Compreender os conceitos de múltiplo;
- Mobilizar conceitos relativos aos múltiplos de 2;
- Perceber que o produto de um número por 1 é igual a esse número;
- Reconhecer sequências e regularidades;
- Formular, testar e justificar conjeturas e generalizações associadas a regularidades numéricas.

- Incentivar o uso de exemplos como apoio aos processos de justificar e generalizar;
- Promover o uso da justificação como processo de raciocínio.
- Incentivar o uso de exemplos como apoio aos processos de justificar e generalizar (Brocardo, et al., no prelo);
- Promover o uso da justificação como processo de raciocínio (Brocardo, et al., no prelo).

Conteúdos de ensino/aprendizagem:

- Dobro de um número;
- Propriedades da multiplicação;
- Sequências;
- Processos de raciocínio de matemático: conjeturar, exemplificar, generalizar e justificar.

Recursos:

- Folha com o enunciado da tarefa (Apêndice 2).
- Folha branca para o registo das respostas.

Organização dos alunos: Os alunos estarão a trabalhar em pares, de modo a poderem discutir e partilhar as suas ideias.

Organização do espaço: As mesas estarão colocadas de forma a formarem um U aberto em direção ao quadro, de modo a que todos os elementos da turma (professora e alunos) consigam ver a pessoa que está a falar, independentemente de quem seja e da sua posição na sala, sendo, assim, uma organização facilitadora da comunicação entre todos.

Antecipação das dificuldades previstas e de estratégias de resolução possíveis: Nesta tarefa prevê-se que as dificuldades dos alunos se situem na generalização e na justificação, ou seja, quando é solicitado que os alunos indiquem como é que é possível construir qualquer figura da sequência, uma vez que os alunos terão de compreender a relação que existe entre o número da

figura e o número das figuras geométricas que se encontram na mesma, e justificar o seu raciocínio.

Relativamente às estratégias de resolução, os alunos poderão utilizar as seguintes estratégias:

- Utilização da representação gráfica, ou seja, desenharem as figuras que se seguem às representadas no enunciado de forma exaustiva, como por exemplo desenharem todas as figuras até ao 25.º termo;
- Recorrer a uma tabela que permita verificar o que se altera e o que se mantém de uma figura para a outra, o número total de elementos de cada uma das figuras e a ordem de cada uma das figuras (número da figura) de modo a ser possível fazer uma generalização vertical. Por exemplo, o número de quadrados do 2.º termo é 4 e o do 3.º é 6, então de um termo para o outro foram somados mais dois quadrados o que quere dizer que no 4.º termo teremos 8 quadrados (os 6 quadrados do termo anterior mais os 2 que são acrescentados).
- Encontrar uma relação funcional que levaria os alunos a uma generalização horizontal, como por exemplo a utilização de uma tabela onde é possível estabelecer uma relação entre o número da ordem do termo (número da figura) e o termo (total de elementos do feijoeiro), sem ser necessário ter conhecimento dos valores do termo de ordem anterior. Por exemplo, o 3.º termo da sequência é composto por 6 quadrados e três triângulo, ou seja, se relacionarmos o número de quadrados com o número da ordem do termo da figura podemos verificar que o número de quadrados da figura é o dobro do número da ordem da sequência e que o número de triângulos é igual ao número da ordem da figura da sequência.

Exploração da tarefa

Introdução da tarefa: Para iniciar a sessão, começarei por projetar o enunciado da tarefa (Apêndice 2) e peço aos alunos façam uma leitura silenciosa do mesmo. Em seguida, solicito a dois ou três alunos que expliquem, por palavras suas, a interpretação que fizeram do enunciado, reforçando e sistematizando as ideias transmitidas pelos alunos de modo a garantir que todos compreenderam

a situação proposta, sendo que um ponto-chave para a compreensão é os alunos, ao observarem as figuras representadas na sequência, identifiquem o que se mantem e o que se altera de figura para figura e que relacionem os números das figuras com o número dos quadrados e triângulos de cada uma das mesmas.

No caso de os alunos não estarem a compreender a tarefa, poderei solicitar que observem a sequência de imagens que têm no enunciado e que as descrevam, isto é, que indiquem que as figuras são compostas por duas figuras geométrica, quadrados e triângulos, e que existem algumas diferenças entre as figuras, como por exemplo que na primeira figura existem dois quadrados e um triângulo enquanto na segunda existem quatro triângulos e dois triângulos.

Proposta de trabalho e atividade esperada (Realização da tarefa): Após a apresentação da tarefa, é distribuído a cada par de alunos uma folha branca, onde estes devem responder às questões que estão no enunciado. É de salientar que neste momento aproveitarei para reforçar a importância de registar todas as tentativas de resolução para que mais tarde seja possível perceber como é que cada um pensou.

Durante a realização da tarefa, os alunos devem explorar a situação proposta e analisar quais as melhores estratégias para resolveram as questões que lhes foram colocadas. Nesta parte da sessão, irei passar por cada grupo de alunos de modo a perceber se existem dificuldades e se estes estão a conseguir avançar na tarefa, sendo que, caso necessário, poderei desafiar os alunos com questões que os façam pensar sobre as suas resoluções ou que os levem por outros caminhos de resolução. Por exemplo se os alunos estiverem a desenhar vários termos da sequência para descobrir como é que é composta uma dada figura posso questioná-los sobre como está a correr o seu trabalho, se estão a conseguir resolver as questões com a estratégia que escolheram utilizar e, em seguida, questioná-los sobre o que se altera e o que se mantém da primeira para a segunda figura e da segunda para a terceira.

Importa referir que no decorrer deste momento terei comigo uma tabela (Tabela 1) onde vou registando quais as estratégias de resoluções dos grupos

para que posteriormente possa organizar a fase seguinte da exploração da tarefa, a discussão coletiva.

Discussão coletiva e sintetização: Na discussão coletiva é esperado que os alunos apresentem à turma a sua resolução, indicando a estratégia e justificando as conclusões obtidas. Esta apresentação será feita de acordo com a tabela preenchida, anteriormente, por mim, pois ajudará a que os alunos possam ver diferentes tipos de estratégias de resolução, quais os principais conceitos mobilizados pelos colegas e que se consiga fazer “pontes” entre umas e outras. Para tal, começarei por solicitar aos alunos que indiquem como é que desenharam a quarta figura da sequência e, no caso de existirem grupos que estejam em desacordo, por exemplo se um grupo disser que número de quadrados da figura quatro é 7 e o outro grupo disser que é 8, pedirei a cada um dos grupos que indique argumentos que apoiem a sua resposta.

Posteriormente, tendo em conta as minhas previsões das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, começaria a apresentação das resoluções das restantes alíneas com o grupo que utilizou a estratégia da representação gráfica (Figura 20).

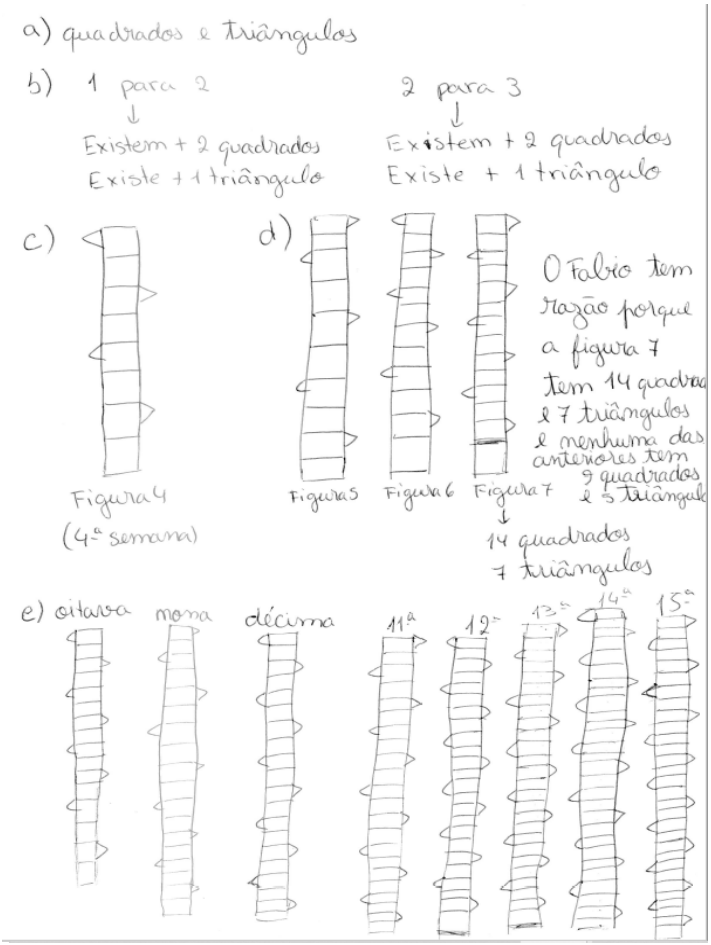


Figura 20 - Estratégia de resolução por representação gráfica.

Escolheria iniciar por esta resolução uma vez que a estratégia utilizada demora algum tempo a ser executada devido aos alunos terem de desenhar cada uma das sequências até obterem a sequência pretendida e, também, porque existiria a possibilidade de os alunos que a usaram não terem chegado à generalização pedida na última alínea da tarefa.

Em seguida pediria ao grupo de alunos que recorreu a utilização de uma tabela com quatro colunas para executar uma generalização vertical (Figura 21) para explicar como pensou. Esta resolução permite relacionar verificar o que se mantém e altera de uma figura da sequência para a outra e, simultaneamente, o número de elementos de cada uma das figuras e a ordem de cada uma delas. A partir desta tabela é possível verificar que relativamente ao termo da ordem anterior, existe sempre um crescimento de mais 2 quadrados e mais 1 triângulo.

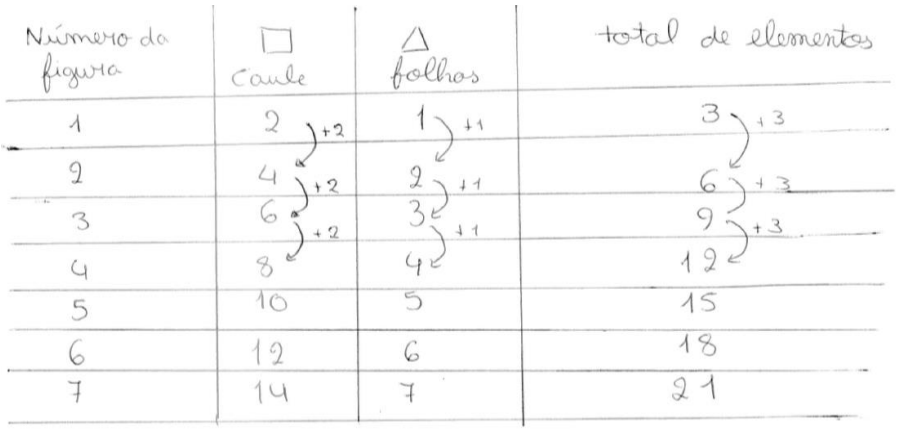


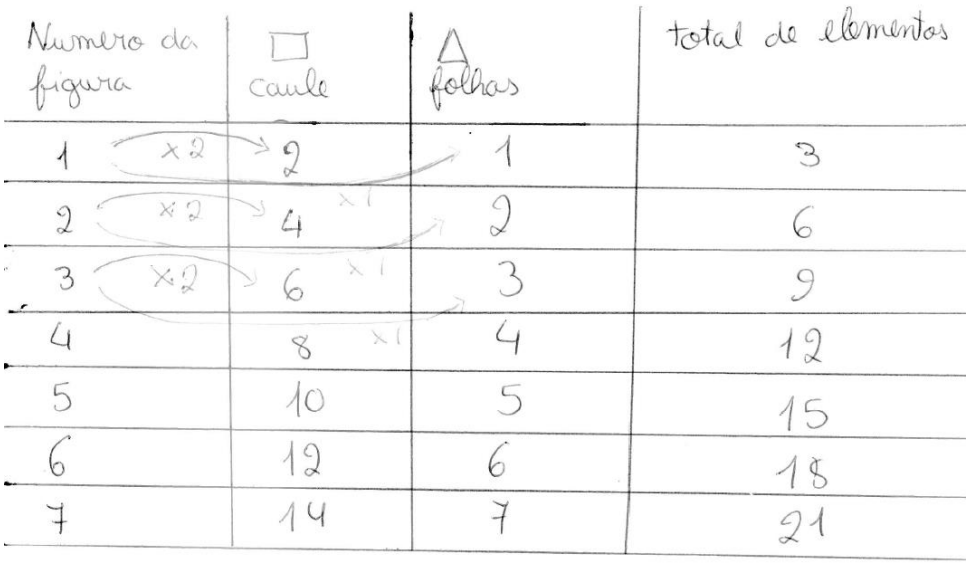
Figura 21 - Estratégia de resolução através de uma tabela para chegar a uma generalização vertical.

Após a apresentação destas duas estratégias e antes de iniciar a apresentação da estratégia seguinte, perguntaria aos alunos qual das soluções lhes parece menos propícia a gerar erros. Na minha opinião, os alunos responderiam que a segunda era mais eficaz uma vez que para além de identificar os elementos constituintes de cada uma das figuras, iria permitir perceber com mais facilidade que para saber o número de quadrados de um termo da sequência é sempre necessário adicionara mais 2 ao número de quadrados da figura anterior e que ao número de triângulos é sempre necessário acrescentar mais um ao termo anterior.

No caso da resolução da alínea d), em que é solicitado que os alunos identifiquem a criança que faz a afirmação correta justificando a sua resposta, a resolução acima mencionada acabaria por ajudar muitíssimo dado que através dos dados apontados na tabela conseguiríamos saber como era composto o sétimo termo (figura) da sequência. Porém, no que respeita às alíneas seguintes, esta resolução acaba por ser mais exaustiva uma vez que a generalização que é realizada é vertical, ou seja, é sempre necessário saber as informações do termo anterior para sabermos a composição do termos que se pretende.

Por fim, pediria aos alunos que recorreram a uma tabela que lhes permite fazer uma generalização horizontal (Figura 22) para explicarem como é que pensaram e justificarem a sua resposta. Este raciocínio tem subjacente a compreensão de que existe uma relação entre o número do termo (figura) e o número de quadrados, pois o número de quadrados é o dobro do número da

figura da sequência, e que o número dos triângulos é sempre igual ao número da figura.



Número da figura	□ caule	△ folhas	total de elementos
1	2	1	3
2	4	2	6
3	6	3	9
4	8	4	12
5	10	5	15
6	12	6	18
7	14	7	21

Figura 22 - Estratégia de resolução através de uma tabela para chegar a uma generalização horizontal.

Nesta resolução, os alunos observaram os dados que colocaram na tabela e estabeleceram relações entre a coluna que indica o número da figura e as colunas que indicam o número de quadrados e o número de triângulos, respetivamente. O número de quadrados é sempre o dobro do número da figura, ou seja, multiplica-se o número da figura por 2. Por exemplo, no segundo termo da sequência temos 2 x 2 que é igual a 4 quadrados. No que respeita ao número de triângulos, a relação que pode ser estabelecida é que o número da figura é igual ao número dos triângulos dessa mesma figura, por exemplo na figura 3 o número de triângulos é 3.

Uma questão que levantaria à turma era se esta resolução acrescentaria alguma coisa à que foi anteriormente apresentada. A resposta a esta pergunta poderiam ser sim porque enquanto a tabela da resolução anterior só nos permitia saber qual era a composição do termo seguinte sabendo a composição do termo anterior (solução iterada), esta possibilitaria saber a composição de qualquer termo da sequência sem ser necessário ter conhecimento dos valores do termo de ordem anterior.

Após as apresentações dos alunos, questionaria a turma sobre se poderiam provar que todas as figuras da sequência são construídas por duas vezes o número da figura (quadrados) mais o número da figura (triângulos). Tendo em conta a última resolução os alunos diriam sim e poderiam até dar diversos exemplos de como esta generalização está correta, por exemplo 2x2+2 para a segunda figura ou 10x2+10 para a décima figura da sequência.

De modo a sintetizar a tarefa, estabeleceria relações entre as ideias, resoluções de cada grupo para que, no fim, conseguisse que os alunos compreendessem que sempre que existe uma sequência, quer seja de números ou de figuras, é sempre possível chegar a uma generalização que nos permita obter qualquer termo da sequência. É de salientar que nesta sistematização também é importante relembrar o que é o dobro de alguma coisa e até relembrar o que é metade, o triplo, o conceito de múltiplo e as propriedades dos múltiplos de 2, pois se observarmos o número de quadrados de figura para figura podemos verificar que todos são múltiplos de 2.

3.3. Tarefa: *Partilhar feijões*

Objetivos:

- Compreender os conceitos de múltiplo e de divisor (Brocardo, et al., no prelo)**;**
- Relacionar a divisão por partilha com o conceito de múltiplo;
- Perceber o significado de número par e ímpar e de resto de uma divisão inteira;
- Compreender que um problema pode ter mais do que uma solução (Brocardo, et al., no prelo);
- Incentivar o uso de exemplos como apoio aos processos de justificar e generalizar (Brocardo, et al., no prelo);
- Promover o uso da justificação como processo de raciocínio (Brocardo, et al., no prelo).

Conteúdos de ensino/aprendizagem:

- Múltiplo e divisor;

- Divisão por partilha;
- Processos de raciocínio de raciocínio matemático: conjeturar, exemplificar generalizar e justificar.

Recursos:

- Folha com o enunciado da tarefa (Apêndice 3);
- Folha branca para o registo das respostas.

Organização dos alunos: Os alunos estarão a trabalhar em pares, de modo a que se possam ajudar mutuamente na procura de regularidades, na formulação de conjeturas e generalizações e na procura de justificações para as conclusões a que chegaram.

Organização do espaço: As mesas estarão colocadas de forma a formarem um U, aberto em direção ao quadro, de modo a que todos os elementos da turma (professora e alunos) consigam ver a pessoa que está a falar, independentemente de quem seja e da sua posição na sala, sendo, assim, uma organização facilitadora da comunicação entre todos.

Antecipação das dificuldades previstas e de estratégias de resolução possíveis: Nesta tarefa prevê-se que as dificuldades dos alunos se localizem na compreensão de que é necessário satisfazer duas condições simultaneamente para conseguirem solucionar o problema de partilhar os feijões por 2 e por 5 de modo a sobrar determinado número de feijões.

Relativamente às estratégias de resolução os alunos poderão utilizar as seguintes estratégias:

- Fazer o teste sistemático a diversos números, recorrendo a diversas representações, para verificar os que conseguem, ou não, satisfazer as duas condições, ou seja, utilizar exemplos e contraexemplos para justificar as suas respostas, por exemplo desenhar a partilha de feijões por duas e cinco pessoas com 3, 5, 7, 9,..;
- Identificar que o número de feijões só pode ser ímpar e analisar apenas esses mesmos números, ou seja, se quando os feijões são divididos por duas pessoas sobra 1 feijão quer dizer que o número de feijões é ímpar e, por isso, são testados apenas os números ímpares a partir do 7 porque

quando são divididos por cinco pessoas sobram 2 feijões, por exemplo os números 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, entre outros, analisam-se os números e identifica-se que apenas os que terminam em 7 satisfazem as duas condições impostas pelo enunciado da tarefa;

- Efetuar divisões por 2 e por 5 de vários números, registando os restos obtidos. Em seguida analisam-se os resultados e verifica-se que todos os números que satisfazem as duas condições acabam em 7, por exemplo divide-se o 9 por 2 que tem como resultado 4 e resto 1 e por 5 dá 1 e resto 4, logo não satisfaz as duas condições, se dividirmos 17 por 2 dá 8 e resto 1 e por 5 dá 3 e resto 2, logo satisfaz as duas condições.

Exploração da tarefa

Introdução da tarefa: Para iniciar a sessão começarei por projetar o enunciado da tarefa (Apêndice 3) e peço aos alunos façam uma leitura silenciosa do mesmo. Em seguida, solicito a dois ou três alunos que expliquem, por palavras suas, a interpretação que fizeram do enunciado, reforçando e sistematizando as ideias transmitidas pelos alunos de modo a garantir que todos compreenderam a situação proposta, sendo que um aspeto importante que estes devem compreender é que o número de feijões que está dentro do saco tem de satisfazer duas condições, quando os feijões são partilhados por 2 alunos tem de sobrar 1 feijão e quando é partilhado por 5 alunos têm de sobrar 2 feijões.

No caso de os alunos não estarem a compreender a tarefa poderei fazer perguntas sobre o problema, começando por questioná-los qual a história que está por de trás da tarefa utilizando as suas próprias palavras. Em seguida, poderei questionar sobre o que é que tem de descobrir e, por fim, sublinhando o que os alunos terão dito, explicitar que quando os feijões são divididos por duas das crianças sobra um feijão e quando os feijões são divididos por cinco crianças sobram dois feijões.

Proposta de trabalho e atividade esperada (Realização da tarefa): Após a apresentação da tarefa, é distribuído por cada par de alunos uma folha branca, onde estes devem responder as questões que estão no enunciado. É de salientar que neste momento aproveitarei para reforçar, aos alunos, a importância de

registarem todas as tentativas de resolução para que mais tarde lhes seja possível perceber como é que pensaram.

Durante a realização da tarefa, os alunos devem explorar a situação proposta e analisar quais as melhores estratégias para resolverem a questão que lhes foi colocada. Nesta parte da sessão, eu irei passar por cada grupo de alunos de modo a perceber se existem dificuldades e se estes estão a conseguir avançar na tarefa, sendo que, caso necessário, poderei desafiar os alunos com questões que os façam pensar sobre as suas resoluções ou que os levem por outros caminhos de resolução. Por exemplo existe a grande possibilidade de os alunos considerarem como solução: todos os números ímpares, todos os números possíveis têm de ser ímpares ou que a solução é o número 7.

Relativamente à solução em que os alunos mencionam que são todos os números ímpares, poderei questionar se realmente todos os números ímpares cumprem as duas condições do enunciado da tarefa, levando a que os alunos justifiquem a sua resposta. Neste caso, poderei também perguntar se o número 9, que é um número ímpar, pode ser solução, levando a que os alunos testem e verifiquem que apenas satisfaz uma das condições, ou seja, que quando é dividido por 2 sobra 1, mas que quando é dividido por cinco sobram 4 e não 2.

No que respeita aos alunos dizerem que todos os números possíveis têm de ser ímpares, estes têm razão uma vez que quando os números são divididos por 2 a divisão não é exata, logo o número tem de ser ímpar. No entanto, esta generalização não está totalmente correta, pois não nos mostra quais os números que podem fazer parte da solução da tarefa. Assim, iria questioná-los perguntando se todos os números ímpares pertencem à solução, levando a que formulassem uma generalização completamente correta.

Se os alunos identificassem o 7 como solução da tarefa estariam corretos, uma vez que o número sete é uma das soluções. Porém, como existem mais soluções possíveis poderei questionar os alunos se só poderão apenas estar dentro do saco 7 feijões, levando a que reflitam sobre a sua resposta e percebam que podem existir outras soluções para esta tarefa e que vão tentar encontrar outros números que também podem fazer parte da solução.

No caso de os alunos já terem diferentes soluções, mas não consigam estabelecer uma relação entre os números que encontraram ou testaram poderei questioná-los sobre as propriedades desses mesmos números, por exemplo levá-los a pensar o que têm em comum.

Importa referir que no decorrer deste momento terei comigo uma tabela (Tabela 1) onde vou registando quais as estratégias de resoluções dos grupos para que posteriormente possa organizar a fase seguinte da exploração da tarefa, a discussão coletiva.

Discussão coletiva e sintetização: Na discussão coletiva é esperado que os alunos apresentem à turma a sua resolução, indicando a estratégia e justificando as conclusões obtidas. Esta apresentação será feita de acordo com a tabela preenchida, anteriormente, por mim, pois ajudará a que os alunos possam ver diferentes tipos de estratégias de resolução, quais os principais conceitos mobilizados pelos colegas e que se consiga fazer "pontes" entre umas e outras. Para tal, começarei por pedir ao primeiro grupo que apresente a sua estratégia e que explique como é que pensou.

Tendo em conta as minhas previsões das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, começaria a apresentação das resoluções com a estratégia em que é utilizada a representação icónica (Figura23).

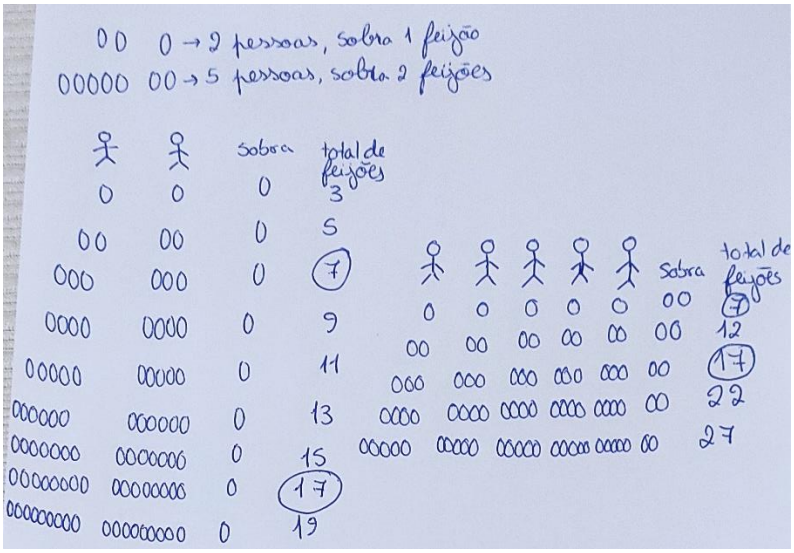


Figura 23 - Estratégia de resolução usando a representação icónica.

Ao recorrerem a este tipo de estratégia os alunos acabam por testar diferentes números de modo a perceberem se é possível que estes concretizem as situações de partilha por 2 e por 5 que são mencionados no enunciado. Assim, identificam alguns exemplos, como o 7, o 17 e o 27, como possíveis soluções e como não exemplos os números 9, 15 e 22.

Esta estratégia de resolução mesmo sendo exaustiva devido às diversas testagens que são realizadas pelos alunos, mostra que os mesmos compreenderam que os números que podem fazer parte desta solução são números ímpares e que é necessário que os números ímpares quando divididos por cinco deem resto dois.

É de salientar que os alunos também poderão recorrer à representação icónica não só para dar exemplos de soluções possíveis, mas também para dar contraexemplos de modo a conseguirem justificar as suas respostas, como é possível verificar na Figura 24.

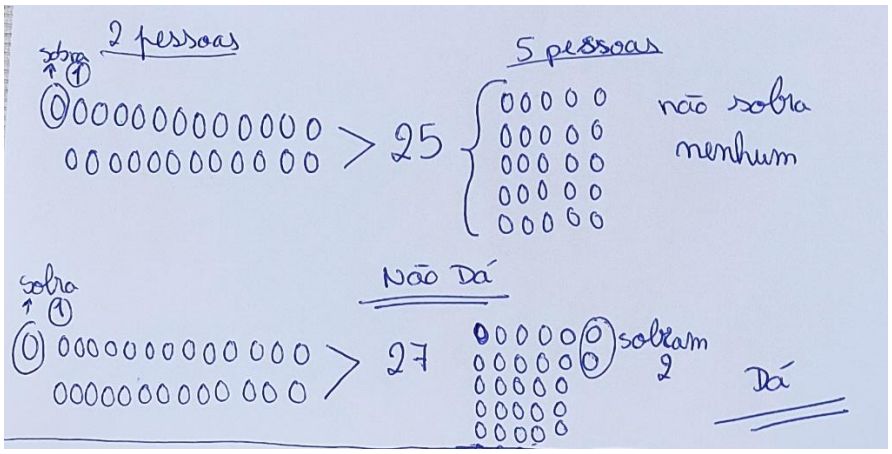


Figura 24 - Exemplo e contraexemplo através da representação icónica.

A apresentação seguinte seria a da estratégia em que os alunos apenas utilizam a testagem de números ímpares a partir do 7, uma vez que identificaram que não poderiam ser números pares porque ao partilhar os feijões por 2 pessoas sobraria 1 e para que fosse possível partilhar os feijões por 5 pessoas e sobrar 2 o menor número de feijões que poderia estar no saco eram 7 porque 5+2 é igual a 7 (Figura 25).

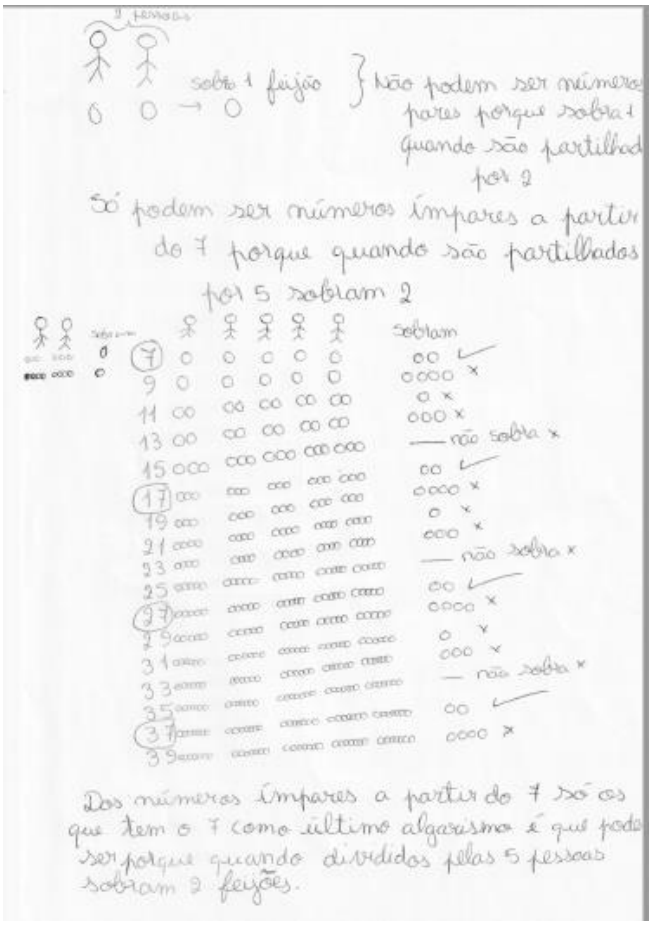


Figura 25 - Estratégia de resolução usando a testagem de números ímpares a partir do 7.

Após a testagem de alguns números, os alunos identificam com um certo os que satisfazem as duas condições e com x os que não satisfazem. Através da análise dos números que satisfazem as duas condições da tarefa, os alunos encontraram semelhanças entre esses números e generalizaram que o número de feijões que pode estar no saco tem de ter no último algarismo o número sete.

Uma outra resolução é a utilização da divisão como estratégia de resolução (Figura 26). Neste caso, os alunos efetuam diversa divisões de números por 2 e por 5, registando os restos obtidos. Em seguida, verificam quais dos números que satisfazem as duas condições, mencionando que o 7, 17, 27 e o 37 são soluções possíveis. A partir da análise da sua resolução generalizar que os números que são solução desta tarefa têm de terminar em 7.

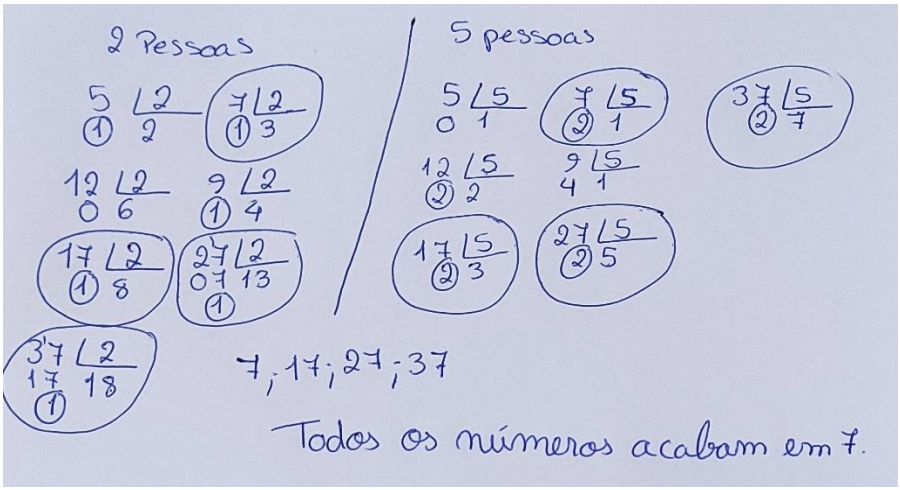


Figura 26 - Estratégia de resolução usando a divisão.

Após a apresentação das resoluções poderei questionar os alunos sobre qual das soluções é mais eficaz ou se existe alguma solução mais completa. Existe a probabilidade de que os alunos mencionem que a utilização da representação icónica seja mais demorada, mas também a que dá mais exemplos e contraexemplos para justificar as afirmações realizadas, e que indiquem que a resolução onde foi utilizada a divisão seja a mais completa e eficaz porque para além de testar os números de forma mais rápida, indica não só os números que fazem parte da solução como faz a generalização da tarefa mencionando que todos os números que acabam em 7 pertencem à solução da mesma.

De modo a sintetizar a tarefa, iria estabelecer relações entre as ideias, resoluções de cada grupo para que, no fim, fosse possível sintetizar as noções matemáticas trabalhadas a partir da proposta. Neste caso, estamos a falar das propriedades dos números pares e, também, das caraterísticas dos números serem e dos números múltiplos de 5+2, uma vez que os alunos necessitam de perceber estes dois conceitos para resolver a tarefa proposta.

Considerações Finais

Inicialmente este projeto tinha como objetivo compreender como é que os alunos, no contexto de uma aula em três fases, formulam e testam conjeturas e desenvolvem os processos de justificar e generalizar. No entanto, a situação pandémica pela qual estamos a passar há dois anos não me permitiu realizar o último estágio o que impossibilitou levar este projeto à prática e me levou a realizar um outro que apresento neste relatório.

Do ponto de vista de investigação, este projeto é teórico e, como tal, irei optar por refletir sobre as aprendizagens que efetuei com a revisão da literatura que sustenta a temática do raciociocínio matemático e com a elaboração muito detalhada e fundamentada de um pequeno projeto de intervenção pedagógica focado no desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos que frequentam o 3.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Mais especificamente, irei refletir sobre alguns desafios com que me deparei na preparação das tarefas que os alunos iriam explorar em sala de aula e algumas possíveis dificuldades que poderiam ser levantadas durante a sua exploração.

Relativamente à revisão da literatura quero saliento que uma das coisas que inicialmente me fez alguma confusão foi o diferenciar dos termos pensar e raciocionar, pois são utilizados frequentemente como sinónimos no nosso quotidiano. Estes dois conceitos não são equivalentes dado que pensar é um ato de reflexão, podendo ser sobre um determinado objeto ou uma tomada de decisão (Japiassu & Marcondes, 1996), e o raciocínio parte de premissas para chegar a uma conclusão (Bulhões, 2007), isto é, o raciocínio está associado a uma situação em que é necessária uma solução (Ávila, 1967). Deste modo, compreendi que raciocinar implica pensar de uma terminada forma para chegar a uma conclusão.

Uma outra aprendizagem realizada está relacionada com os tipos de raciocínio, isto é, durante a revisão da literatura li diversos artigos sobre o raciocínio matemático e vários realçavam a existência de três tipos de raciocínio matemático, mais precisamente o dedutivo, o indutivo e o abdutivo, e que era possível utilizarem-se os três tipos numa única tarefa matemática. Contudo, a

minha dificuldade foi compreender o que era o raciocínio abdutivo uma vez que este tipo de raciocínio parte de algo que foi observado para formular premissas que podem, ou não, ser verdadeiras, o que me levou a ter de encontrar um exemplo do quotidiano (se quando me deito o chão da rua não está molhado e quando acordo está, posso assumir que choveu durante a noite, mas existem outras razões que poderão ter acontecido para que o chão esteja molhado) para que este tipo de raciocínio me fizesse sentido.

Ainda no que respeita às aprendizagens realizadas na revisão da literatura, importa salientar que no final senti a necessidade de reformular e acrescentar alguns conteúdos ao nível das orientações curriculares, pois quando iniciei este projeto as orientações mais recentes para o ensino da matemática eram as *Aprendizagens Essenciais* de 2018. No entanto, em 2021 essas mesmas orientações foram revistas e reformuladas, o que me levou a ter de rever todo esse ponto dado que, como futura professora, necessito de saber, compreender e refletir sobre todas as orientações que estão ou entrarão em vigor para o ensino. Mesmo que neste projeto se tenha baseado nas Aprendizagens essenciais de 2018, considerei importante incluir as perspetivas do documento de 2021 em relação ao raciocínio matemático.

Relativamente às aprendizagens que efetuei com a preparação e fundamentação detalhada do projeto de intervenção saliento que segui o modelo de uma aula de ensino exploratório composta por três fases distintas (introdução à tarefa, realização da tarefa, discussão coletiva e sistematização da tarefa). Na preparação da discussão coletiva foram consideradas as cinco práticas - antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer de conexões - estabelecidas por Stein et al. (2008). A adaptação/seleção das tarefas selecionadas está em concordância com os princípios para design de tarefas para promover o raciocínio matemático, descritos por Quaresma et al. (no prelo).

Um desafio com que me deparei foi precisamente a seleção das tarefas. Estas tinham de desenvolver os processos de generalização e justificação e, simultaneamente, incidirem sobre um tema que os alunos do 3.º ano pudessem estar a trabalhar em Estudo do Meio, uma vez que considero que a interdisciplinaridade é muito importante para que a aprendizagem dos alunos

não seja fragmentada dado que os saberes de cada área são essenciais para a aprendizagem de conteúdos presentes noutras áreas científicas. Deste modo, procurei tarefas que incluíssem: (i) questões que pudessem ser resolvidas com diferentes estratégias e com recurso a diferentes representações, de modo que a discussão coletiva fosse mais rica e em que fosse possível estabelecer relação entre as respostas dos alunos, (ii) questões que os obrigassem a justificar as suas conclusões e que pudessem formular generalizações através da observação e análise da informação contida nas tarefas, (iii) conteúdos relacionados com o tema das plantas, que escolhi a partir das Aprendizagens Essenciais de Estudo do Meio.

No que respeita ainda às tarefas, tive o cuidado de ordená-las tendo em conta o seu grau de dificuldade cognitivo, ou seja, primeiro coloquei uma tarefa em que era dado aos alunos alguns números que poderiam ou não fazer parte da solução do problema (*Vamos plantar feijões!*) e em que era apenas pedido que justificassem a sua resposta. Em seguida, a tarefa *A turma do Miguel e o feijoeiro*, tem na sua composição uma sequência que os alunos devem observar para saberem o que se mantém e altera de modo a conseguirem formular uma generalização e justificá-la. Por fim, uma adaptação da tarefa "*Chupa-Chupas*" (Brocardo, et al., no prelo) que designei por *Partilhar feijões*, em que não existe uma solução única e em que os alunos devem formular uma generalização para responder à questão colocada pela tarefa e justificá-la de forma fundamentada.

Após a seleção e as adaptações feitas às tarefas escolhidas, deparei-me com um outro desafio, a antecipação/previsão das estratégias que os alunos poderiam vir a usar e as dificuldades que estes poderiam ter na compreensão das tarefas propostas. Para mim, prever as estratégias e as possíveis dificuldades que os alunos poderiam ter é uma das minhas maiores dificuldades, pois tenho de me colocar no lugar do aluno e pensar que tendo em conta o conhecimento que um aluno do terceiro ano tem neste momento sobre os conteúdos matemáticos, que tipo de estratégia poderia usar. De acordo com diversos autores, como Canavarro (2011) e Oliveira et al. (2013), um dos maiores desconfortos que os professores sentem é exatamente o grande número de resoluções que os alunos podem utilizar para resolver as tarefas e as ideias dispersas, incompletas ou mal formuladas que podem aparecer, levando a que

o professor tenha o papel de levar os alunos a aprofundá-las e a transformá-las em ideias matemáticas precisas e poderosas. Canavarro (2011) refere também que o antecipar das estratégias e das dificuldades permite que o professor esteja mais bem preparado no que respeita às respostas e as questões que lhe sejam feitas, não tendo que recorrer à improvisação. O imprevisto é algo que me cria desconforto, pois ainda estou a dar os primeiros passos nesta profissão e não tenho um grande conhecimento sobre o tipo de perguntas que os alunos possam formular, por isso percebi que quanto mais estratégias de resolução conseguir prever menos possibilidades tenho de ser apanhada desprevenida.

No que respeita a apresentação das tarefas verifiquei que tive alguma dificuldade em compreender como é que poderia fazer no caso de um aluno não estar a compreender o que é pedido na tarefa, pois tenho sempre o receio de diminuir o grau de exigência cognitivo da tarefa com uma explicação muito detalhada. Este problema é mencionado por Canavarro (2011) como sendo um dos que mais pode ocorrer, ou seja, o professor muitas vezes recorre a exemplos que dão demasiadas pistas para a resolução da tarefa acabando por diminuir o nível de dificuldade. Assim, durante a planificação das tarefas tentei pensar em perguntas ou chamar a atenção para determinadas especificidades das tarefas., Por exemplo no caso da terceira tarefa, *Partilhar feijões*, mencionei que daria enfase à necessidade de o número de feijões dentro do saco ter de cumprir as duas condições que estavam no enunciado, isto é, quando dividido por 2 teria de sobrar 1 feijão e quando dividido por 5 teria de sobrar dois feijões.

No momento de exploração autónoma dos alunos o professor deve monitorizar o trabalho. Este momento para mim também é bastante desafiante e quando estava a realizar a planificação das tarefas tive algumas dúvidas sobre o tipo de questões que poderia colocar a um aluno que não estivesse a conseguir avançar com a sua resolução e como é que o poderia fazer sem facilitar a resolução da tarefa. De acordo com Canavarro (2011), este momento também apresenta alguns desafios para os professores, pois devem ter cuidado quando respondem a uma dúvida dos alunos dado que importa não reduzir o nível de exigência cognitiva e não standardizar as estratégias de resolução. De modo a ultrapassar estas dúvidas tentei focar-me nas estratégias que previ, por exemplo no caso da tarefa *A turma do Miguel e o feijoeiro* se um aluno utilizar a estratégia

de desenhar os diferentes termos da sequência e ficar cansado de o fazer eu poderia sugerir a observação dos primeiros termos e perguntar-lhe o que é que muda de um termo para o outro e o que é que se mantém.

Ainda relativamente ao momento de monitorização, um outro desafio que senti diz respeito à escolha das resoluções a serem apresentadas e a ordem das apresentações. No meu caso, a dificuldade que poderia sentir se estivesse em prática seria a da escolha das resoluções para apresentar. Esta dificuldade não se prende tanto com a escolha das resoluções que têm um maior interesse matemático, mas com o facto de se existir um grupo que tenha a mesma resolução que um outro como é que posso fazer para que não exista a repetição de resoluções e simultaneamente não comprometa a participação do outro grupo na discussão devido a não ter sido o escolhido para ir apresentar aos colegas o seu trabalho. Para ultrapassá-la, provavelmente iria pedir ao grupo que não ia apresentar para comentar e ajudar a clarificar algumas questões que o grupo que foi apresentar não conseguiu explicar de forma coerente ou totalmente correta. Na planificação que previ comecei sempre por iniciar as apresentações com a resolução que utilizava a estratégia menos *sofisticada matematicamente*, como as que utilizavam a representação icónica, e terminava com as que envolviam o uso da representação matemática simbólica. É ainda importante referir que para me guiar neste momento utilizaria a Tabela 1 que se encontra junto à planificação da primeira tarefa, uma vez que para além de me permitir saber que estratégias foram utilizadas pelos alunos e poder fazer algumas anotações sobre dúvidas a ser esclarecidas durante a discussão coletiva e a sistematização de ideias, também permite compreender quais as relações que podem ser efetuadas de umas estratégias para as outras, ajudando assim nas questões que posso lançar na discussão coletiva.

O momento da discussão coletiva é considerado por muitos professores como o mais difícil de realizar (Canavarro, 2011). Eu não sou exceção à regra, pois este é talvez a parte da aula que mais tenho receio de realizar devido ao tipo de perguntas que se deve fazer e também à forma de como posso motivar e incentivar os alunos a partilharem as suas ideias, resoluções e descobertas. De acordo com Wood et al. (1996), o nosso papel enquanto professores é o de providenciar oportunidades aos alunos que os façam refletir, reconstruir e discutir

com os outros quando estão a explicar os procedimentos ou métodos que usaram para resolver as tarefas que lhes são propostas. Deste modo, estes autores acreditam que as perguntas que propomos ajudam a que os próprios alunos comecem a usá-las para compreender o raciocínio dos outros, como acontece, por exemplo com: "[…] "Podias repetir?", "Queres dizer…?", "Concordo com a tua resposta, mas não compreendo a tua explicação", "Porque é que… Como sabias que…?", "Podes justificar a tua resposta?"" (p. 43).

Em relação ao motivar e ao incentivar os alunos na partilha e discussão de ideias, resoluções e conclusões, teoricamente devo criar um ambiente calmo, harmonioso e em que os alunos não tenham medo de falar e expor as suas ideias, ou seja, que não tenham medo de sofrer represálias por não terem acabado o seu trabalho, por as suas ideias estarem incompletas ou até mesmo erradas (Wood et al., 1996).

No que respeita às questões que devo levantar, estas dependem dos objetivos que eu tenho para uma determinada tarefa. No caso deste projeto, os processos que eu queria promover e desenvolver era o justificar e o generalizar. Logo as questões que estavam nas tarefas e as questões que eu previ utilizar na discussão coletiva iam ao encontro de levar os alunos a justificar as suas conclusões. Pensei, por exemplo, em "Explica como é que pensaste para chegar a essa conclusão?" ou "Porque é que preferiste usar a divisão em vez da adição ou multiplicação?" (no caso da tarefa *Vamos plantar feijões!*), e perguntar se "Existem outros números que também poderia fazer parte da solução da tarefa?", solicitando exemplos, para que fosse possível aos alunos chegarem à generalização de que qualquer número que seja múltiplo de 7 pode fazer parte da solução desta tarefa (ainda no caso da tarefa *Vamos plantar feijões!*).

Para concluir, é importante referir que constatei que para promover o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático é necessário aprofundar o conhecimento dos professores nas questões que estão associadas a esta temática, pois é um tema muito complexo e em que é necessário ter um bom domínio para o conseguir trabalhá-lo com os alunos, uma vez que não existe uma receita para promover o raciocínio dos alunos. Relativamente às planificações, tendo em conta que não foi possível levar à prática este projeto,

estas ajudaram-me a refletir e a prever o que poderia acontecer na realidade, uma vez que eu não tinha como saber quais eram os conhecimentos que os alunos poderiam ter, quais as suas rotinas e que tipo de tarefas e explorações que costumam realizar ao nível da matemática.

Este projeto, mesmo que teórico, constituiu um grande desafio para mim enquanto futura professora dado que, ao longo da preparação do projeto de intervenção pedagógico, fui sempre refletindo sobre as minhas decisões com vista a promover o raciocínio matemático dos alunos, em particular, no que diz respeito aos processos de justificação e generalização. Para que tal fosse possível foi essencial a revisão da literatura e o relacionar desta com as minhas tarefas e planificações, uma vez que só assim consegui adquirir um maior conhecimento sobre esta temática.

Referências Bibliográficas

Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em Educação.* Porto: Edições ASA.

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo: E práticas de investigação educacional.* Lisboa: Universidade Aberta.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? *Cadernos de Formação de Professores*(1), 21-30.

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese, 134*, 25-44.

Almeida, J., & Pinto, J. (1990). *A Investigação nas Ciências Sociais.* Lisboa: Editorial Presença.

Amado, J., Costa, A., & Crusoe, N. (2013). Procedimentos de Análise de Dados. Em J. Amado, *Manual de Investigação Qualitativa em Educação* (pp. 299-333). Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Bardin, L. (1997). *Análise de conteúdo.* (L. A. Reto, & A. Pinheiro, Trads.) São Paulo: Edições 70. Obtido em 3 de abril de 2020, de https://www.ets.ufpb.br/pdf/2013/2%20Metodos%20quantitat%20e%20qualitat%20-%20IFES/Livros%20de%20Metodologia/10%20-%20Bardin,%20Laurence%20-%20An%C3%A1lise%20de%20Conte%C3%BAdo.pdf

Battista, M. (2017). Mathematical Reasoning and Sense Making. Em M. T. Battista (Ed.), *Reasoning and Sense Making in the Mathematics Classroom: Grades 3–5* (pp. 1-22). Reston : NCTM.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Boaler, J. (2010). The road to reasoning. Em K. Brodie, *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.* (pp. V-Vii). New York: Springer.

Boavida, A. (2015). Pensando sobre Matemática para perspetivar o seu ensino. *Educação e Matemática,* 132, 1.

Boavida, A. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocionar. *Educação e Matemática,* 100, 1.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (15 de agosto de 2021). As aprendizagens essenciais em Matemática que hoje se exigem. *Público*, 10.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., & Ponte, J. (no prelo). Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa. *Educación Matemática*.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Brunheira, L., Serrazina, L., & Rodrigues, M. (no prelo). Tarefas para promover o raciocínio matemático. Em C. Delgado, F. Mendes, & J. Mata-Pereira (Orgs.), *Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º Ciclos* (pp. 10-49). Associação de Professores de Matemática.

Bulhões, F. (2007). Como diria Nietzsche, pensar é (antes de tudo) uma atividade criativa. *Princípios, 14*(22), 235-260.

Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Revista Educação e Matemática*(115), 11-17.

Canavarro, A. (26 de junho de 2021). Novas orientações curriculares para a Matemática do ensino básico. *Público*.

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. Em P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Ed.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática.* (pp. 255-266). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Carmo, H., & Ferreira, M. (2008). *Metodologia da investigação: Guia para Auto-aprendizagem* (2º ed.). Lisboa: Universidade Aberta.

Coutinho, C. (2016). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática.* Coimbra: Edições Almedina.

Fraivilling et al. (1999). Advancing Children's Mathematical Tinking in Everyday Mathematics Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 148-170.

Guerreiro, A., Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké, 23*(44), 279-295.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16.

Lannin, J., Ellis, A., & Elliott, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten-Grade 8.* Reston VA: NCTM.

Leinwand, S., Brahier, D., Huinker, D., Berry, R., Dillon, F. L., Larson, M., . . . Smith, M. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Estados Unidos da América: National Council of Teachers of Mathematics.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Camillo, J., Silva, L. M., . . . Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Lisboa : Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação (DGE).

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico:uma análise com alunos do 9.º ano. Em M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Ed.), *EIEM 2011 – Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 347–364). Póvoa de Varzim. Obtido de http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2011.pdf

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim GEPEM, 62*, 17-31.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2016). Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. *Educação e Matemática, 137*, 38-41.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2018a). Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. *BOLEMA, 32*(62), 781-801.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2018b). Teacher's actions to promote students' justification. *Acta Scientiae, 20*(3), 487-505.

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Acção.* Porto: Porto Editora.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2014). A construção coletiva da generalização num contexto de ensino exploratorio com alunos do 4.º ano. Em J. P. Ponte, *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 283-308). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação. (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática.* Lisboa: Direção-Geral da Educação.

Ministério da Educação. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática.* Lisboa: Direção-Geral da Educação.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (1ª ed.). Lisboa: APM.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-54. Obtido de https://doi.org/10.484

Oliveira, P. (2002a). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figuefredo, A. F. Dionisio, & S. d. Educação (Ed.), *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 25-40). Lisboa: SEM-SPCE.

Oliveira, P. (2002b). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica.* Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia Soft. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D., & Fão, A. (2010). *Matemática nos Primeiros Anos: Tarefas e Desafios para a Sala de Aula.* Lisboa: Texto Editores.

Ponte, J. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em GTI, *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interacções, 12*, 96-114.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática, 100*, 89-96.

Ponte, J., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa, 7*(2), 355-337.

Ponte, J., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, XXII*(2), 55-81.

Ponte, J., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teachers' professional practice. *Didacticae: Journal of Research in Specific Didactics, 1*, 45-59.

Ponte, J., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*(156), 7-11.

Porfírio, J. (1998). Os currículos de Matemática: como têm evoluído. *Educação e Matemática*(50), 32-38.

Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (no prelo). Contexto de ensino e aprendizagem para a promoção do raciocínio matemático. Em C. Delgado, F. Mendes, & J. Mata-Pereira (Orgs.), *Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º Ciclos* (pp. 3-7). Associação de Professores de Matemática.

Quivy, R. (1992). *Manual de investigação em ciências sociais.* Lisboa: Gradiva.

Roldão, M. (1995). *O Estudo do Meio no 1.º Ciclo: Fundamentos e Estratégias.* Lisboa: Texto Editora.

Sá, E. (2000). Problemas da Formação de Professores de Matemática. *O Ensino da Matemática na Universidade em Portugal e Assuntos Relacionados*(14), 22-29.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A Avaliação e o Raciocínio Matemático. *Educação e Matemática*(100), 51-60.

Stein et al. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for help teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Swan, M. (outubro/ novembro/ dezembro de 2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão cocetual, a competência estratégica e a consciência crítica. (F. Nunes, Trad.) *Educação e Matemática*(144-145), 67-72.

Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação.* Lisboa: Fundação Calouste Glubenkian.

Vale, C., Bragg, L. A., Widjaja, W., Herbert, S., & Loong, E. Y.-K. (2017). Children's mathematical reasoning: opportunities for developing understanding and creative thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 22*(1), 3-8.

Wood, T., Merkel, G., & Uerkwitz, J. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre a matemática. *Educação e Matemática*(40), 39-43.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. Em J. Kilpatrick, & D. Schifter (Edits.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). VA: NCTM.

Apêndices

Apêndice 1: Enunciado da tarefa *Vamos plantar feijões!*

Vamos plantar feijões!

A turma do terceiro ano é responsável por plantar feijões na horta da escola. De forma a prepararem a plantação, têm de determinar o total de feijões que irão necessitar.

A professora da turma explica que vão precisar de plantar 7 regos.

Dos números de feijões que se seguem, quais podem ser plantados nos sete regos de modo que cada um dos regos tenha o mesmo número de feijões?

279 252 140 300 105

Explica como pensaste e justifica a tua resposta.

Apêndice 2: Enunciado da tarefa *A turma do Miguel e o feijoeiro*

A turma do Miguel e o feijoeiro

A turma do Miguel esteve a fazer uma experiência com sementes de feijão. Nesta experiência, os alunos mediam, todas as semanas, o caule do feijoeiro e contavam o número de folhas.

A imagem representa o feijoeiro nas primeiras três semanas.

Tendo em conta a sequência representada na imagem, responde às seguintes questões.

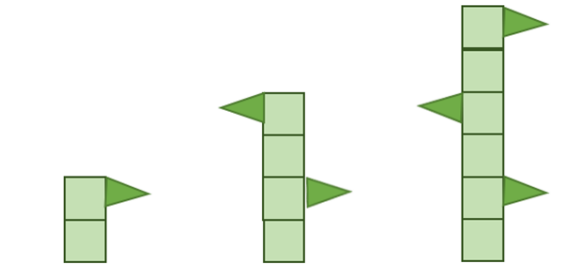


Figura 1 (1ª semana) Figura 2 (2ª semana) Figura 3 (3ª semana)

a) Que figuras geométricas foram utilizadas para representar o feijoeiro?

b) Que diferença existe da figura 1 para a figura 2? E da figura 2 para a figura 3?

c) Desenha a figura 4 da sequência.

d) A Ana, colega do Miguel, diz que a sétima figura da sequência vai ter 9 quadrados e 5 triângulos. Já o Fábio diz que não é possível ter nenhuma figura com esses números. Quem tem razão? Justifica a tua resposta.

e) Quantos quadrados e triângulos tem a oitava figura? E a figura 15? E a 25?

f) Explica por palavras tuas como é que sabemos quantos quadrados e triângulos terá o feijoeiro de uma figura qualquer da sequência. Justifica a tua resposta.

Apêndice 3: Enunciado da Tarefa *Partilhar feijões*

Partilhar feijões

O francisco e a Beatriz ficaram responsáveis por apanhar os feijões da horta da escola. Partilharam os feijões entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram mais três colegas da sua turma que também queriam ficar com alguns feijões. Decidiram partilhá-los novamente e sobraram 2 feijões. Quantos feijões podiam ter sido apanhados?