IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Cátia Filipa Pagaime da Silva

A aprendizagem da multiplicação: Um estudo no 2.º ano de escolaridade

Tese orientada pela Professora Doutora

Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado

Dissertação de Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Relatório de Projeto de Investigação

Setúbal, julho de 2015

Resumo

Este estudo tem como objetivo compreender como lidam os alunos com tarefas de multiplicação, tendo em vista a sua resolução. Mais concretamente, pretende identificar e analisar as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e eventuais dificuldades que revelam na resolução dessas tarefas.

A fundamentação teórica inclui quatro secções que discutem as seguintes temáticas: ensino e aprendizagem dos números e das operações, à luz das orientações curriculares; significado, componentes e desenvolvimento de sentido de número; significado e desenvolvimento de cálculo mental; e aprendizagem das operações aritméticas, nomeadamente da operação multiplicação.

Este estudo insere-se num paradigma interpretativo e segue uma abordagem qualitativa, sendo também uma investigação sobre a própria prática. Nele participam 21 alunos pertencentes a uma turma do 2.º ano de escolaridade.

Os dados foram recolhidos recorrendo à observação participante, à recolha documental, a conversas informais e à entrevista. A proposta pedagógica associada a este estudo incluiu a conceção/adaptação e exploração de quatro tarefas, todas elas visando a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, e o trabalho realizado em sala de aula tem como base as ideias subjacentes ao ensino exploratório.

Os resultados deste estudo revelam que: (i) os alunos utilizam alguma diversidade de estratégias e procedimentos de cálculo na resolução de tarefas de multiplicação; (ii) globalmente, ao longo da resolução das tarefas, há uma preferência dos alunos pelas estratégias aditivas; (iii) as dificuldades evidenciadas pelos alunos têm uma natureza distinta: existem dificuldades na compreensão dos enunciados, relativas ao desenvolvimento do sentido de número, à organização e apresentação dos registos, e à compreensão dos modos de pensar distintos dos seus.

Palavras-chave: Aprendizagem da multiplicação; Sentido de número; Estratégias e procedimentos de cálculo; Dificuldades dos alunos.

Abstract

The objective of this study is to understand how students deal with multiplication tasks aiming to their resolution. More specifically, it aims to identify and analyze the strategies and calculation procedures used by students when solving multiplication tasks and possible difficulties revealed in the solution of these tasks.

The theoretical framework includes four sections that discuss the following themes: teaching and learning numbers and operations in the light of the curricular guidelines; meaning, components and number sense development; meaning; and development of mental calculation and arithmetic learning, in particular, the multiplication operation.

This study is part of an interpretative paradigm following a qualitative approach and also an investigation into the practice itself. The study involves twenty-one second grade students belonging to a class.

The data were collected using participant observation, documentary collection, informal conversations and interview. The pedagogical proposal, associated with this study, included the creation/adaptation and exploration of four tasks aiming to multiplication learning in a perspective of number sense development. The work done in the classroom was based on the ideas underlying the exploratory teaching.

The results of the study revealed that: (i) the students use diverse strategies and calculation procedures when solving multiplication tasks; (ii) globally , over the resolution of the tasks , there is a preference of students for additive strategies; (iii) the difficulties revealed by the students are of different nature: there are difficulties in understanding the statements related to number sense development, organization and presentation of records and understanding other ways of thinking different from their own.

Keywords: Learning multiplication; Number sense; Strategies and calculation procedures; Student's difficulties.

Agradecimentos

Considero que neste momento final devo mostrar gratidão e agradecer a todas as pessoas que de alguma forma me ajudaram a alcançar o sonho de finalizar este curso. Assim, não posso deixar de agradecer:

À minha orientadora, Professora Doutora Catarina Delgado, por todo o apoio prestado desde o primeiro momento, pelos vários momentos de incentivo e coragem que me ajudaram a superar algumas dificuldades e incertezas, e sobretudo pelos valores incutidos e oriundos da sua própria prática, como: rigor, exigência e determinação.

A todos os professores que me acompanharam ao longo do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º ciclo do ensino básico, pois foi com eles que aprendi muito do que sei hoje.

À professora cooperante, por ter possibilitado a realização deste estudo.

Aos alunos da turma do 2.º A, pois sem eles nada disto tinha sido possível. Recordo-os com enorme saudade.

Às minhas amigas Sara, Ana Rita e Rafaela, por todos os bons momentos passados durante a Licenciatura em Educação Básica e por continuarem a estar presentes e serem um apoio para mim.

À Susana Castanheira, o meu especial obrigada pelos momentos vividos, pelas aprendizagens efetuadas e pelo carinho, apoio e compreensão constantes.

Ao Cláudio, que sempre apoiou todas as minhas decisões, e por isso, não poderia de deixar de estar comigo neste momento. Muito obrigada, por compreenderes as minhas ausências constantes e acreditares em mim.

À minha família, especialmente à minha mãe, irmão, tia, tio e avós. Estes são sem dúvida aqueles que se sentem mais orgulhosos neste momento, pois sabem todos os sacrifícios que fiz para aqui chegar.

Ao meu sobrinho Martinho, pelos momentos de afeto e amor. As nossas brincadeiras e gritarias ajudaram-me a afugentar as preocupações e a relaxar. Sinto-me muito orgulhosa por te ter comigo e ser a tua 'titi'!

Muito obrigada a todos vós!

Índice Geral

Índice de Figuras

Índice de tabelas

Capítulo I – Introdução

O presente estudo foi realizado no âmbito do Mestrado em Educação pré-escolar e Ensino do 1.º ciclo do ensino básico, no decurso do terceiro momento de estágio.

Neste primeiro capítulo, começo por apresentar as motivações que me levaram à realização deste estudo, o objetivo e as questões que lhe estão associadas. Em seguida, discuto a sua pertinência e finalizo-o com uma descrição, sucinta, da organização deste relatório.

1.1. Motivações, objetivo e questões do estudo

A escolha do tema deste estudo advém de um conjunto de motivações pessoais e do contexto de estágio.

Começo por fazer referência aos tempos em que era aluna do ensino básico e secundário, mais concretamente, às aulas de Matemática. Em ambos os níveis de escolaridade, fui uma aluna esforçada mas com algumas dificuldades, no sentido em que necessitava de um apoio exterior que me ajudasse a compreender o que era realizado durante as aulas.

O trabalho proposto em aula baseava-se na resolução de tarefas, muitas vezes, pertencentes ao manual escolar, sem que houvesse qualquer contextualização e partilha de ideias na resolução das mesmas. No final da aula, e depois de realizadas as tarefas propostas, existia uma correção feita ou pelo professor ou por alunos (normalmente, os que tinham mais facilidade em resolvê-las), que iam ao quadro registar as respostas encontradas por si, sem que houvesse qualquer tipo de discussão sobre as mesmas.

No contexto onde desenvolvi este estudo, durante o momento de observação, fui confrontada com o mesmo tipo de práticas de aprendizagem que eu vivenciei enquanto aluna, o que me levou de imediato a recordá-las. Constatei que os alunos resolviam tarefas que lhes eram propostas, de uma forma que me pareceu pouco encadeada, na medida em que resolviam diversas tarefas sobre diferentes tópicos da área da Matemática, que depois eram corrigidas no quadro, sem que houvesse discussão ou explicação de raciocínios. Desta forma, existiam alunos que apenas copiavam os registos que eram feitos no quadro e, em algumas situações, pareciam não compreendê-los totalmente.

O interesse em realizar um estudo sobre a aprendizagem da Matemática foi ganhando força. Simultaneamente, as perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem desta área, que ao longo do meu percurso académico me foram dadas a conhecer, constituíram elementos importantes para delinear o meu projeto.

Uma delas prende-se com o modo como os alunos aprendem Matemática e está espelhada num dos princípios defendidos pelo NCTM (2007) – o princípio da aprendizagem. Neste é valorizada a ideia de que os alunos devem aprender Matemática com compreensão. Esta aprendizagem com compreensão implica que os alunos construam novos conhecimentos, tendo em conta algumas experiências e conhecimentos adquiridos previamente (NCTM, 2007).

A outra prende-se com as perspetivas subjacentes ao ensino exploratório. Este constitui um processo, no qual a exploração de tarefas na sala de aula se desenvolve em três fases: (i) apresentação da tarefa, (ii) realização da tarefa pelos alunos, e (iii) discussão e sistematização da tarefa (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

De acordo com Ponte (2005), a principal característica do ensino exploratório na área da Matemática é promover nos alunos a descoberta e, consequentemente, a construção do conhecimento. Trata-se de um processo de ensino que advoga que os alunos aprendem a partir de tarefas valiosas, possibilitando o desenvolvimento de ideias matemáticas (Canavarro, 2011). Neste processo, destacam-se os momentos de discussão coletiva das tarefas por se tratarem de oportunidades que "contribuem fortemente para a aprendizagem dos alunos, na medida em que colocam em jogo um conjunto de interações sociais e o processo de negociação de significados matemáticos" (Rodrigues, Menezes &

Ponte, 2014, p. 65). Desta forma, promove-se uma aprendizagem da Matemática significativa, porque os alunos relacionam as ideias 'novas', com as que já possuem e conseguem estabelecer conexões entre elas (Boavida, 2005; Canavarro, 2011; Mestre & Oliveira, 2012).

Tendo em conta estas ideias, procurei delinear a minha intervenção de modo a compreender como é que os alunos resolvem tarefas de Matemática e que dificuldades evidenciam na sua resolução. Decidi colocar em prática o ensino exploratório da Matemática e valorizar os momentos de discussão coletiva das tarefas. Esta valorização decorre, não só, do reconhecimento da importância que este momento assume na aprendizagem dos alunos mas, também, por constituir um momento privilegiado para aceder ao modo como os alunos resolvem as tarefas, permitindo-me, assim, alcançar os objetivos desta investigação.

A opção de me centrar na operação multiplicação surgiu posteriormente, relacionada com os conteúdos que teria de lecionar durante o estágio e, simultaneamente, da vontade em realizar um estudo mais específico e aprofundado sobre uma das operações aritméticas. Relativamente à aprendizagem desta operação, Mendes (2012) considera que os alunos devem compreender as relações existentes entre esta operação e a de adição, transformando os seus raciocínios aditivos em multiplicativos. A mesma autora realça a ideia que a aprendizagem desta operação deve ser realizada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, aspeto que está subjacente à realização deste estudo.

Assim, este estudo tem como objetivo compreender como lidam os alunos com tarefas de multiplicação, tendo em vista a sua resolução e, é orientado pelas seguintes questões:

- Quais as estratégias e procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação?
- Que dificuldades revelam os alunos na resolução dessas tarefas?

1.2. Pertinência do Estudo

Um dos aspetos que torna este estudo pertinente é o facto de este tema ser atual, na medida em que existem poucas investigações cujos propósitos são reconhecidos como centrados no aluno, no modo como aprendem e no tipo de estratégias que utilizam na resolução de tarefas (Mendes, 2012). Efetivamente, este trabalho está centrado na aprendizagem dos alunos no que respeita às operações, mais concretamente, na multiplicação. E é por se centrar na operação multiplicação que é reforçada a sua pertinência, pois a investigação em torno da aprendizagem desta operação é reduzida comparativamente à realizada em relação às operações de adição e de subtração (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007, citado por Mendes, 2012). Estes autores referem que o modo como os alunos pensam, bem como, as estratégias que os alunos utilizam na resolução de tarefas de multiplicação têm sido alvo de poucas investigações. Mas, porque é que é importante que os professores compreendam o modo como os alunos resolvem as tarefas? Porque é que deverão existir mais investigações sobre este aspeto?

Diversos autores (Carvalho & Gonçalves, 2003; Ponte & Pereira, 2011) defendem que é fundamental a realização de estudos que permitam ao professor conhecer os diferentes modos de pensar dos alunos. Na perspetiva de Carvalho e Gonçalves (2003), a importância de se conhecer o modo como os alunos pensam centra-se no trabalho que posteriormente pode ser desenvolvido pelo professor, uma vez que, ao conhecer as estratégias dos alunos, o professor poderá desenvolver tarefas mais 'elaboradas' e 'pormenorizadas' de acordo com as suas necessidades, ajudando-os a ultrapassar dificuldades e a desenvolverem competências.

Também ao compreender o modo como os alunos pensam e evoluem permite ao professor aceder a informações sobre o modo como os alunos entendem as operações, nomeadamente a multiplicação, uma vez que "as estratégias dos alunos são sempre representativas das suas ideias matemáticas" (Fosnot & Dolk, 2001b, p. 51). Seguindo este raciocínio, o NCTM (2007) refere que o "ensino efetivo exige um sério empenho no desenvolvimento da compreensão dos alunos relativamente à matemática" (p. 18), ou seja, é importante que os professores compreendam e conheçam aquilo que os alunos sabem e o modo como pensam, uma vez que, o ensino da Matemática deve ser desenvolvido com base na associação de novas ideias. Esta associação de novas ideias deve ser desenvolvida de acordo com conhecimentos adquiridos anteriormente, permitindo aos alunos estabelecer relações (NCTM, 2007).

Na perspetiva de Chamberlin (2005) este conhecimento por parte dos professores torna-se essencial para que o ensino da Matemática seja realizado com sucesso. Este autor apresenta quatro potenciais benefícios dos quais os alunos podem usufruir caso os professores compreendam os seus modos de pensar, nomeadamente:

(i) a capacidade do professor em construir e/ou selecionar tarefas matemáticas adequadas;
(ii) o ensino centrado no aluno;
(iii) a compreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos;
(iv) o desenvolvimento de atitudes positivas dos alunos em relação à Matemática.

Os dois primeiros benefícios estão relacionados com o trabalho do professor na preparação das tarefas, ou seja, baseiam-se nas suas intenções e na planificação que este elabora. Os dois últimos dizem respeito a atitudes que acabam por ser reveladas pelos alunos, uma vez que, ao planificar de acordo com as suas necessidades, o professor promove uma maior compreensão dos conteúdos matemáticos e está a ter em conta os seus interesses, possibilitando o desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à Matemática.

Perante todos os aspetos referidos anteriormente torna-se clara a ideia de que a investigação sobre este tema é importante, uma vez que quantos mais resultados existirem, mais conhecimentos acerca deste tema serão discutidos e analisados. Ao existir um conhecimento mais aprofundado sobre a aprendizagem da multiplicação, o professor poderá tê-lo em conta e adequar a sua prática letiva de modo a proporcionar aprendizagens significativas aos alunos, propondo tarefas matemáticas mais adequadas (Chamberlin, 2005).

1.3. Organização do relatório

Este relatório é composto por seis capítulos, estando subjacente a cada um deles diferentes aspetos. O primeiro corresponde ao presente capítulo, e nele apresento as motivações, o objetivo, as questões e a pertinência do estudo.

O segundo capítulo contém a revisão da literatura e encontra-se organizado em quatro secções distintas. Começo por fazer uma análise do tema Números e Operações, tendo em conta orientações curriculares nacionais e internacionais. Seguidamente, discuto o significado de sentido de número, apresento as respetivas componentes propostas por McIntosh, Reys e Reys (1992) e saliento elementos subjacentes ao seu desenvolvimento. Segue-se uma discussão centrada no significado de cálculo mental e como pode ser desenvolvido. Na última secção deste capítulo foco-me na operação multiplicação, nomeadamente nas orientações e perspetivas sobre a sua aprendizagem e apresento aspetos importantes subjacentes às tarefas, tais como: as 'grandes ideias', as características dos contextos das tarefas, e as possíveis estratégias e procedimentos de cálculo que podem ser utilizados por alunos na resolução de tarefas de multiplicação.

O terceiro capítulo diz respeito à metodologia adotada. Como tal, começo por fundamentar o porquê de ser um estudo interpretativo e por justificar as opções metodológicas. Neste capítulo caraterizo também os participantes e o contexto do estudo, bem como os métodos de recolha de dados. Termino com a explicação do processo de recolha de dados e de análise dos mesmos.

O quarto capítulo inclui a proposta pedagógica que me propus desenvolver no âmbito do desenvolvimento deste projeto. Para além de caraterizar o ensino exploratório da Matemática que foi o processo de ensino adotado, faço referência à cultura de sala de aula que necessitei de construir com os alunos. Apresento ainda as tarefas dinamizadas no âmbito deste projeto e as preocupações subjacentes à sua escolha e planificação.

O quinto capítulo corresponde à análise dos dados. Esta análise está centrada em dois aspetos: nas estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos e nas dificuldades evidenciadas por estes na resolução das tarefas.

Por fim, o sexto capítulo apresenta as conclusões do estudo, relacionando a análise efetuada com aspetos evidenciados no capítulo correspondente à revisão da literatura. Termino com uma reflexão sobre o estudo, onde destaco algumas dificuldades e constrangimentos sentidos, bem como uma reflexão prospetiva sobre a minha prática futura.

Capítulo II – Revisão da Literatura

Este segundo capítulo destina-se à revisão da literatura e está organizado em quatro secções distintas. Na primeira secção analiso o tema Números e Operações, à luz das orientações curriculares. Na segunda secção discuto o significado de sentido de número, apresento as suas componentes, baseando-me nas ideias de McIntosh et al., 1992), e refiro aspetos associados ao seu desenvolvimento. Seguidamente, desenvolvo uma terceira secção onde é discutido o significado de desenvolvimento de cálculo mental e são salientadas ideias associadas ao seu desenvolvimento. A quarta secção diz respeito à aprendizagem da multiplicação e encontra-se dividida em quatro subsecções. Uma relativa às orientações e perspetivas subjacentes ao ensino da multiplicação, outra sobre as 'grandes ideias', uma outra secção relativa às características dos contextos das tarefas e a última que incide nas estratégias e procedimentos de cálculo possíveis de serem utilizadas na resolução de problemas de multiplicação.

2.1. Números e Operações nas orientações curriculares

O tema Números e Operações tem um grande destaque ao nível do currículo da Matemática, no que respeita aos primeiros anos de escolaridade (Ferreira, 2012). Em 2007, a Associação de Professores de Matemática, editou uma obra publicada pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), intitulada de *Princípios e Normas para a Matemática Escolar,* que apresenta orientações e propostas curriculares para o ensino da Matemática desde o pré-escolar ao 12.º ano. No que respeita à aprendizagem dos números e das operações, este documento refere que, ao longo da escolaridade, os alunos deverão:

(i) compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos; (ii) compreender o

significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si;
(iii) calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis. (p. 34)

Assim, no processo de ensino e de aprendizagem dos números e das operações, o principal objetivo é a compreensão global dos números, das operações e das respetivas relações. Para que, consigam atingir este objetivo é necessário que os alunos sejam estimulados a mostrarem os seus conhecimentos matemáticos e a aprofundarem-nos (NCTM, 2007). Uma das formas possíveis para o fazerem é através da resolução de problemas significativos e contextualizados, bem como a discussão de possíveis estratégias (NCTM, 2007). Uma das capacidades matemáticas que este documento evidencia como fundamental, ao longo do 1.º ciclo do ensino básico, é a destreza de cálculo. Por destreza de cálculo é entendido o recurso "a cálculos eficazes e precisos com números de um único algarismo" (NCTM, 2007, p. 97).

A nível nacional, a aprendizagem dos números e das operações tem vindo, ao longo do tempo, a ser alvo de diferentes valorizações e reflexões. A aprendizagem dos números e das operações centrada na memorização de algoritmos e na sua utilização tem sido contraposta pela ideia de que os alunos devem aprender Matemática com compreensão. Nesta perspetiva, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) afirmam que "todos os alunos devem adquirir uma compreensão global do número e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e operações" (p. 46). Neste sentido, Pimentel, Vale, Freire, Alvarenga e Fão (2010) assumem que a introdução dos algoritmos convencionais, só deve ocorrer quando os alunos já possuem uma "compreensão dos números e das suas relações, das operações e das ordens de grandeza" (p. 7). Estes mesmos autores defendem que os alunos devem ter a oportunidade de utilizar os números de forma livre em diferentes contextos, com vista à criação de estratégias de cálculo próprias. Associados a esta ideia estão os conceitos de sentido de número e de cálculo mental que serão abordados e desenvolvidos nas secções seguintes deste trabalho.

Também Ponte e Serrazina (2000) entendem que o ensino dos números e das operações deve ocorrer de uma forma significativa, para que os alunos compreendam as suas propriedades e não decorem apenas técnicas e procedimentos de cálculo.

O anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) refere que os alunos devem iniciar a sua aprendizagem, no que respeita a este tema, recorrendo a experiências de contagem, pois deste modo estarão a compreender algumas relações numéricas. Acrescenta, ainda, que o propósito principal de ensino é que os alunos desenvolvam o seu sentido de número, compreendam os números e as relações que podem ser estabelecidas e, também, que utilizem na resolução de problemas conhecimentos e capacidades matemáticas adquiridas *à priori*. No que respeita ao cálculo mental, este programa considera que a destreza de cálculo é essencial para que os alunos consigam trabalhar e interpretar os números de forma clara e ajustada. Evidencia, ainda, a ideia de que as diferentes estratégias de cálculo mental "devem constituir objetivos de aprendizagem na aula de Matemática" (ME, 2007, p. 10).

O atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013), no que respeita ao domínio dos números e das operações, afirma que os alunos devem, fundamentalmente, adquirir "fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos" (p. 6). A esta fluência de cálculo está também associada a ideia de desenvolvimento do cálculo mental, cabendo ao professor proporcionar momentos em que os alunos possam desenvolver esta capacidade. Contudo, e comparando com o programa anterior (ME, 2007), parece existir uma maior valorização da aprendizagem dos algoritmos das operações, antecipando a sua aprendizagem no que respeita ao ano de escolaridade, aspeto que pode ser impeditivo para o desenvolvimento de estratégias de cálculo próprias por parte dos alunos (Pimentel et al., 2010).

Em suma, tradicionalmente, o trabalho em torno dos números e das operações, nos primeiros anos de escolaridade, tem sido caracterizado pela valorização da aprendizagem dos algoritmos das quatro operações elementares. Contudo, diversos documentos de orientação curricular (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; ME, 2007; NCTM, 2007) e autores que se debruçam sobre as perspetivas curriculares subjacentes ao ensino dos números e das operações

(Brocardo & Serrazina, 2008; Ponte & Serrazina, 2000) têm valorizado a ideia de que esta abordagem deve ser realizada numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, destacando o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental como um aspeto fundamental nos primeiros anos de escolaridade

2.2. Significado, componentes e desenvolvimento do sentido de número

O conceito de sentido de número não tem um entendimento único, no entanto, sabe-se que a sua origem surge da necessidade em substituir o termo de numeracia (Castro & Rodrigues, 2008). O facto de ter sido valorizada a ideia de que os alunos devem compreender os números e as operações, ao invés de estarem apenas centrados no cálculo algorítmico, fez com que este conceito emergisse. Uma outra razão que levou ao surgimento, e posterior valorização, deste termo foi um conjunto de reflexões e orientações acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática que tinham como suporte três aspetos distintos: o conjunto de competências e conhecimentos essenciais para a resolução de problemas relacionados com os números no quotidiano; os aspetos que devem ser considerados como essenciais na aprendizagem dos números e das operações; e, as conceções sobre a própria aprendizagem da Matemática (Delgado, 2013).

Mas, o que entende por sentido de número? Apesar de não existir um entendimento consensual e preciso sobre o seu significado, as ideias de McIntosh, et al. (1992) têm influenciado inúmeras investigações sobre esta temática (Delgado, 2013), sendo também a ideia de sentido de número assumida neste estudo. Estes autores afirmam que:

> O sentido de número refere-se a uma compreensão geral do indivíduo sobre os números e as operações, juntamente com a capacidade e inclinação para usar essa compreensão de modo flexível, para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e com as operações. Reflete uma capacidade e uma tendência para usar os números e os métodos quantitativos como um meio de comunicação, processamento e tratamento de informação. (p. 3)

Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) o sentido de número relaciona-se com a compreensão geral dos números e das operações e da capacidade em utilizar esta compreensão, de um modo flexível, desenvolvendo estratégias eficientes e úteis de cálculo.

Castro e Rodrigues (2008) defendem uma ideia semelhante à anterior, pois consideram que ter-se sentido de número engloba a "compreensão global e flexível dos números e operações com o intuito de compreender os números e as suas relações e desenvolver estratégias úteis e eficazes" (p. 118). Também Mendes (2012) refere que esta expressão está associada à compreensão global dos números e das operações, possibilitando aos alunos flexibilidade no cálculo.

McIntosh et al. (1992) propuseram um quadro de referência (tabela 1) onde apresentam três grandes áreas que funcionam como eixos das componentes do sentido de número, sendo elas: (i) o conhecimento e a destreza com os números, (ii) o conhecimento e a destreza com as operações e, (iii) a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situação de cálculo. Tendo em conta as ideias defendidas por estes autores, seguidamente, são caraterizadas cada uma destas componentes relativas ao sentido de número.

Tabela 1 – Quadro de referência (simplificado) de análise do sentido de número proposto por McIntosh et al. (1992)

Áreas	Componentes
Conhecimento e destreza com os números	Sentido da ordenação dos números
	Múltiplas representações dos números
	Sentido das grandezas, relativa e absoluta dos números
	Sistemas de valores de referência
Conhecimento e destreza com as operações	Compreensão dos efeitos das operações
	Compreensão das propriedades matemáticas
	Compreensão das relações entre as operações
Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	Compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários
	Consciencialização da existência de múltiplas estratégias
	Inclinação para usar representações e/ou métodos eficazes

O conhecimento e a destreza com os números são entendidos por estes autores como o conhecimento que se tem sobre os números. Esta área inclui: (i) o sentido de ordenação dos números, (ii) as múltiplas representações dos números, (iii) o sentido das grandezas, relativas e absolutas dos números e (iv) os sistemas de valores de referência.

O sentido de ordenação dos números está relacionado com o sistema Indo-árabe, sendo necessário compreender as suas características e o modo como está organizado. Este sentido de ordenação ajuda a ordenar mentalmente os números (Cebola, 2002). O conhecimento e a destreza com os números envolvem uma compreensão das diferentes representações que um número pode assumir. Ao existir esta perceção, torna-se clara a ideia de que na resolução de um determinado problema podem existir diferentes representações de resolução (Cebola, 2002). Por sua vez, o sentido de grandeza relativa e absoluta dos números relaciona-se com a capacidade que os alunos têm de reconhecer uma determinada quantidade ou número a partir de outras situações que envolvam estas quantidades ou números. O uso de sistemas de valores de referência é evidenciado quando se consegue retirar conclusões de um número a partir de um outro número, servindo este último, como referência.

O conhecimento e a destreza com as operações. McIntosh et al. (1992) referem que as ideias essenciais desta segunda área estão relacionadas com a compreensão do efeito das operações, a compreensão das propriedades matemáticas e a compreensão das relações entre elas. A compreensão do efeito das operações envolve um conhecimento pleno do que acontece a diferentes números (inteiros e não inteiros) quando envolvidos em diferentes operações. A compreensão das propriedades matemáticas é uma componente essencial ao sentido de número, uma vez que, os alunos podem utilizar esta compreensão para realizarem os seus cálculos. Por sua vez, a compreensão da relação entre as operações abrange a aplicação de forma intuitiva das propriedades das operações nos cálculos que se realizam. Perante um determinado problema, o aluno pode recorrer à operação que achar mais conveniente para si, embora esse problema o induza a realizar cálculos relativos a uma operação específica.

A aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo. McIntosh et al. (1992) propõe para esta área as seguintes componentes: (i) a compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários, (ii) a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, (iii) a inclinação para usar representações e/ou métodos eficazes e (iv) a inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado. Compreender que o contexto do problema nos indica, muitas vezes, a operação mais apropriada para o resolver, e nos fornece indícios sobre os números a utilizar é sem dúvida uma capacidade a valorizar. A consciencialização da existência de múltiplas estratégias ocorre quando um aluno já possui um bom sentido de número e durante a resolução de um determinado problema percebe que a estratégia que está a utilizar não é a mais eficaz e a altera. A inclinação para usar representações e/ou métodos eficazes é também indicadora de um aluno com um bom sentido de número. Esta componente está relacionada com a componente anterior. Por fim, a inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado resulta da capacidade que o aluno tem para analisar os resultados e os cálculos efetuados.

A análise das componentes do sentido de número, segundo a perceção de McIntosh et al. (1992) evidencia um conjunto amplo de aptidões necessárias para o seu desenvolvimento. Relativamente ao modo como os alunos desenvolvem o sentido de número Fosnot e Dolk (2001a) consideram que o desenvolvimento numérico dos alunos segue um modelo, no qual um conjunto de competências básicas se vai automatizando, permitindo uma combinação entre si. Ou seja, inicialmente é criada uma hierarquia de competências que se iniciam com a contagem oral, que por sua vez progride para a contagem de objetos e culmina com as relações numéricas que as crianças conseguem estabelecer entre os números.

Também o NCTM (2007) considera que o desenvolvimento flexível sobre o pensamento e manuseamento dos números é um aspeto fundamental e ocorre quando os alunos "transitam do inicial desenvolvimento das técnicas de contagem fundamentais para conhecimentos mais aprofundados acerca da dimensão dos números, relações numéricas, padrões, operações e valor de posição" (p. 91).

Para Mendes (2012) o desenvolvimento do sentido de número é um dos objetivos centrais da aprendizagem da Matemática e, apesar de ser importante ao longo de todo o percurso escolar dos alunos, é crucial nos primeiros anos de escolaridade. Segundo esta autora, o desenvolvimento do sentido de número ocorre tendo em consideração dois aspetos fundamentais relacionados com a prática do professor: o ambiente em que a aprendizagem ocorre e as tarefas propostas.

O ambiente de aprendizagem deve permitir que os alunos explorem, raciocinem e partilhem uns com os outros as suas estratégias de resolução das tarefas. Mas que características devem ter estas tarefas? Para potenciar o desenvolvimento do sentido de número dos alunos, o professor deverá selecionar/criar tarefas potenciadoras de discussões coletivas produtivas, uma vez que estas são "promotoras de conhecimento matemático" (Mendes, 2012, p. 42). As características das tarefas potenciadoras da aprendizagem, em particular da multiplicação, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido, serão abordadas numa secção posterior.

Em suma, apesar de existirem entendimentos diferentes de sentido de número, é evidente a importância e necessidade de desenvolver o sentido de número dos alunos desde a idade pré-escolar, por se tratar de um aspeto fundamental no modo como estes lidam com os números e com as operações (Mendes, 2012; NCTM, 2007;). Inerente à importância do desenvolvimento do sentido de número está a necessidade de refletir sobre o papel do professor, nomeadamente no que respeita ao ambiente de sala de aula que proporciona e às tarefas que propõe (Mendes, 2012). A construção de um ambiente de sala de aula favorável à discussão de estratégias usadas pelos alunos na resolução das tarefas e a escolha de tarefas que estimulem o sentido de número dos alunos são aspetos essenciais na prática do professor para potenciar o desenvolvimento do sentido de número dos seus alunos (Mendes, 2012).

2.3. Significado e desenvolvimento do cálculo mental

À semelhança do entendimento de sentido de número, também não existe unanimidade sobre o significado atribuído a cálculo mental.

Na perspetiva de Buys (2001) o cálculo mental possui três características essenciais: (i) opera-se sobre os números e não sobre os dígitos; (ii) são utilizadas relações numéricas e propriedades das operações; e (iii) apesar de existir um cálculo 'de cabeça', o registo pode ser efetuado com recurso a registos em papel.

Para Sowder (1988) no cálculo mental são utilizados algoritmos mentais, sendo estes distintos dos algoritmos utilizados nos cálculos em papel. No seu entendimento os algoritmos mentais são: *variáveis*, no sentido em que podem ser utilizados diferentes métodos de cálculo para encontrar um resultado para a expressão numérica; *flexíveis*, porque podem ser utilizados números de referência para facilitar os cálculos; *ativos,* porque permitem ao indivíduo escolher um método de cálculo; *globais,* na medida em que se trabalham com os números como um todo e, não, dígito a dígito; *construtivos,* pois normalmente efetuam-se os cálculos tendo em conta a primeira parcela (por exemplo 45+20, pensa-se em 45+10=50, 50+10=65); e, por fim, *requerentes de uma total compreensão,* por se tratar de uma capacidade que se vai desenvolvendo.

Em contradição com as ideias de Swoder (1988) acerca das diferenças entre o cálculo mental e cálculo escrito Tatton (1969) (citado por Carvalho, 2011), considera que o cálculo mental e o escrito são muito semelhantes, uma vez que em ambos são utilizadas as propriedades das operações, bem como os encadeamentos possíveis de serem estabelecidos entre elas. Para este autor, o cálculo mental não está apenas limitado às operações que são realizadas 'de cabeça', pois considera que ao realizar um cálculo escrito recorrendo ao algoritmo o indivíduo também está a efetuar um cálculo mental.

Desta forma, o cálculo mental ocorre quando são mobilizadas estratégias que permitem ao indivíduo resolver de uma forma rápida e eficaz um determinado cálculo, apresentando uma resposta. É de salientar que estas estratégias podem ser registadas com recurso ao lápis e ao papel, considerando-se como cálculos intermédios (Carvalho, 2011). Também Anghileri (2006) esclarece que o uso de papel e lápis pode ser utilizado para auxiliar a memória a curto prazo, no entanto, não podem ser consideradas estratégias de cálculo escrito, pois foram pensadas e, posteriormente registadas.

Tendo em conta as características apresentadas anteriormente, torna-se evidente a ideia de que as estratégias de cálculo mental provêm das relações numéricas e das propriedades das operações que podem ser estabelecidas, daí o cálculo mental ser considerado como algo pensado e não memorizado ou mecânico (Mendes, 2012).

No que respeita ao desenvolvimento de cálculo mental autores como Buys, (2001) e Brocardo e Serrazina (2008) apresentam diferentes argumentos que justificam a importância do desenvolvimento do cálculo mental ao longo dos primeiros anos de escolaridade, estando este associado ao desenvolvimento do sentido de número. Segundo Buys (2001), ao calcularem mentalmente, os alunos estão a desenvolver estratégias de cálculo que lhes permitem calcular livremente utilizando números de referência. Brocardo e Serrazina (2008) salientam que a aquisição de destrezas de cálculo mental está dependente do desenvolvimento do sentido de número, isto porque esta aquisição implica não só o conhecimento e compreensão dos números, como também das relações entre eles.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013), no que respeita ao desenvolvimento do cálculo mental, afirma que:

> É fundamental que os alunos adquiram durante [os primeiros anos de escolaridade] fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos, próprios do sistema decimal, associados a estas operações. Note-se que esta fluência não pode ser conseguida sem uma sólida proficiência no cálculo mental. Os professores são pois fortemente encorajados a trabalhar com os seus alunos essa capacidade, propondo as atividades que considerarem convenientes e apropriadas a esse efeito. (p. 6)

Tendo como base o projeto *Desenvolvimento do Sentido de Número: perspetivas e exigências curriculares,* Brocardo e Serrazina (2008) defendem que a aprendizagem do cálculo mental deve ocorrer de um modo coerente.

O desenvolvimento de competências de cálculo mental é algo difícil de ser realizado, no entanto, implica por parte do professor uma intenção, motivação e persistência na criação de momentos que propiciem este desenvolvimento nos seus alunos (Cebola, 2002). Em contexto de sala de aula, para além de poderem ser criados momentos específicos para a dinamização de tarefas de cálculo mental, o professor deve encorajar os alunos a explorar diferentes formas de raciocinar face a um determinado problema e, isto acontece, por exemplo, quando os alunos discutem porque é que uma determinada forma de cálculo é mais 'eficaz' ou 'plausível' que outra (Cebola, 2002).

Ao explorarem em sala de aula tarefas que potenciam o desenvolvimento do cálculo mental, os alunos têm oportunidade de 'manipular' os números de uma forma flexível e, têm a possibilidade de desenvolver o seu sentido de número (Hartnett, 2007). As tarefas propostas em sala de aula podem constituir, assim, um indutor para o desenvolvimento do cálculo mental e do sentido de número.

As cadeias numéricas são exemplo deste tipo de tarefas, por permitirem aos alunos desenvolverem estratégias de cálculo mental (Fosnot & Dolk, 2001b). Efetivamente, este tipo de tarefas permite aos alunos calcular recorrendo a números de referência, estabelecer relações numéricas e utilizar as propriedades das diferentes operações.

2.4. Aprendizagem da multiplicação

Nesta secção começo por discutir aspetos relacionados com a aprendizagem da multiplicação, revisitando documentos de orientação curricular com o foco nesta operação e baseando-me em autores que se debruçam sobre esta temática. Em seguida, apresento as 'grandes ideias' associadas à aprendizagem da multiplicação, discuto as características das tarefas que potenciam a aprendizagem desta operação e termino com a caracterização das estratégias e procedimentos de resolução de tarefas multiplicativas.

2.4.1. Orientações e perspetivas

Em termos nacionais, o anterior Programa de Matemática do 1.º ciclo (ME, 2007), estabelecia que os alunos do 2.º ano ao 4.º ano deveriam desenvolver e atingir os seguintes objetivos:

- Compreender a multiplicação nos sentidos aditivo e combinatório;
- Multiplicar utilizando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito;
- Construir e memorizar as tabuadas da multiplicação;
- Resolver problemas envolvendo multiplicações. (p. 16)

Ao atual Programa de Matemática do 1.º ciclo (ME, 2013) estão associadas um conjunto de metas curriculares que regulam os objetivos que devem ser cumpridos.

À semelhança do programa anterior, a aprendizagem da multiplicação é introduzida no 2.º ano de escolaridade. No entanto, neste programa (ME, 2013) são estabelecidos objetivos específicos para cada ano, ao contrário do programa antigo que estabelecia objetivos para cada dois anos. Assim, e tendo em conta que este estudo foi realizado com uma turma de 2.º ano, importa explicitar o que está delineado nestas metas curriculares acerca da aprendizagem da multiplicação. Neste documento pode ler-se que no final do 2.º ano os alunos devem "multiplicar números naturais e resolver problemas envolvendo situações multiplicativas no sentido aditivo e combinatório" (p. 10).

Em ambos os programas é realçada a ideia de que as operações aritméticas devem ser compreendidas, de modo que seja possível o estabelecimento de relações entre si. De uma forma resumida, a análise do Programa de Matemática (ME, 2013) permite-nos compreender que ao nível do 2.º ano de escolaridade os alunos devem iniciar uma abordagem à multiplicação com o recurso a adições sucessivas. É de salientar que em torno da operação multiplicação, está a aprendizagem e memorização das tabuadas, nomeadamente a do 2, 3, 4, 5, 6 e 10.

Em termos internacionais, o NCTM (2007) defende que o desenvolvimento da aprendizagem da operação multiplicação deve seguir algumas caraterísticas. Baseando-se no trabalho a desenvolver em contexto de sala de aula, este documento refere que a operação multiplicação, tal como a operação divisão começa a ganhar sentido para as crianças desde a idade pré-escolar, devido a situações do quotidiano que assim o proporcionam. Do pré-escolar ao 2.º ano (K-2) é defendido que as crianças estejam envolvidas num ambiente potenciador de aprendizagens e da compreensão desta operação. Como tal devem ser-lhes propostas tarefas que "envolvam o agrupamento de objetos de um dado conjunto em grupos equivalentes" (p. 97). Por sua vez, do 3.º ao 5.º ano torna-se fundamental o conhecimento por parte dos alunos sobre o conceito de multiplicação e as suas propriedades. É esperado que os alunos se centrem nos "significados e nas relações entre a multiplicação e a divisão" (p. 175).

Nesta fase os alunos deverão ainda contactar com números maiores e, para além dos números naturais devem ser utilizados também números negativos.

O processo de aprendizagem da multiplicação tem sido também uma temática de investigação de alguns autores (Brocardo, Delgado & Mendes, 2005; Fosnot & Dolk, 2001b; Jacob & Willis, 2003; Mendes, 2012).

O estudo realizado por Jacob e Willis (2003) teve como objetivo compreender de que modo os raciocínios aditivos dos alunos se poderiam 'transformar' em raciocínios multiplicativos. Estes autores apresentam cinco fases pelas quais os alunos necessitam de passar, para que o seu raciocínio multiplicativo seja desenvolvido, sendo elas: "One-to-one counting; additive composition; many-to-one counters; multiplicative relations; e, operate on the operator" (p. 1). Segundo este estudo, em cada uma destas fases o nível de compreensão sobre a operação de multiplicação vai evoluindo. Para que isto aconteça, é importante que o professor compreenda e interprete o que os alunos já conseguem fazer e o que ainda não conseguem. Com base nestas informações deverá propor tarefas adequadas que potenciem a progressão nas fases de raciocínio multiplicativo.

Por sua vez, o estudo realizado por Mendes (2012) tinha dois objetivos distintos: (i) compreender como os alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação, seguindo uma perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem e (ii) descrever e analisar as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação. As conclusões deste estudo evidenciam que os alunos recorrem a diferentes procedimentos para resolverem tarefas de multiplicação, existem procedimentos que são utilizados com maior frequência que outros e que há alunos que recorrem sempre aos mesmos procedimentos. Deste estudo advém, ainda, a ideia de que os diferentes procedimentos utilizados pelos alunos são suportados, não só pelas características das tarefas (contextos, números e articulação e sequenciação), como também pelo ambiente de sala de aula criado.

Um estudo realizado por Ambrose, Baek e Carpenter (2003), com alunos entre os oito e os onze anos, que tinha como intuito caraterizar os procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e de divisão, concluiu que o ensino da operação multiplicação deveria ser realizado em concomitância com a operação divisão. Este autor refere ainda que, numa fase inicial da aprendizagem da multiplicação os alunos tendem a recorrer a estratégias aditivas.

À semelhança de outras operações, a aprendizagem da multiplicação desenvolve-se por meio de três níveis distintos: (i) cálculo por contagem; (ii) cálculo estruturado; e, (iii) cálculo formal (Brocardo, Delgado & Mendes, 2005). O *cálculo por contagem* é o primeiro nível da multiplicação. Trata-se de um nível em que os alunos devem fazer uso da operação de multiplicação, no entanto recorrem a adições sucessivas. Por exemplo, quando se apresenta uma palete de leite escolar aos alunos e se lhes pede para calcularem o número total de leites, o esperado é que efetuem cálculos multiplicativos (utilizando o número de pacotes que se encontram na vertical e na horizontal), mas se estes efetuarem contagens de 2 em 2, 3 em 3, ou 8 em 8 estão a recorrer a adições sucessivas. Este é um exemplo concreto deste primeiro nível.

O *cálculo estruturado* é o segundo nível da multiplicação e, neste caso, os alunos já conseguem estabelecer uma relação entre uma mesma quantidade que se repete um determinado número de vezes. À semelhança do exemplo anterior, os alunos podem observar a palete de leite e referir que são 27 leites porque o número 3 repete-se 9 vezes, e portanto é 3x9. Por se tratar de um contexto em que a estrutura é a retangular e por se poder 'ler' da seguinte forma: 3x9 (3 colunas com 9 pacotes de leite) ou em 9x3 (9 linhas com 3 pacotes de leite), poder-se-á explorar o conceito de propriedade comutativa da multiplicação.

O *cálculo formal* corresponde ao terceiro nível da multiplicação. Neste nível os alunos já conseguem estabelecer diferentes relações numéricas, recorrer a factos por si conhecidos e às propriedades das operações. A diferença entre este terceiro nível e o segundo é que neste os alunos não necessitam de recorrer a modelos de apoio ao cálculo. Por exemplo, para calcular 8x17 os alunos poderão recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, ao fazerem: 8x17= 8x10 + 8x7.

Com vista à aprendizagem dos alunos, o professor deverá ter em conta que nem todos eles atingem estes níveis em simultâneo e, portanto, é essencial que sejam apoiados para que, progressivamente, as suas estratégias e procedimentos de cálculo se desenvolvam (Brocardo, Delgado & Mendes, 2005).

Uma forma possível de o fazer é através de discussões coletivas, em que os alunos discutem estratégias e procedimentos de resolução e em grupo determinam quais as mais eficazes. Através da discussão e observação de outras estratégias e procedimentos de cálculo os alunos consciencializam-se de que existem diferentes formas para a resolução de um problema, podendo optar por estratégias que lhes pareçam mais rápidas e eficazes que as utilizadas por si (Canavarro, 2011).

2.4.2. 'Grandes ideias'

De acordo com a perspetiva de Fosnot e Dolk (2001b) a aprendizagem da multiplicação deve ser fundamentada nas 'grandes ideias' (*big ideas*) relacionadas com a multiplicação. Os autores entendem por 'grandes ideias' as relações que os alunos estabelecem com a operação de multiplicação, ou seja, a progressão que estes fazem em termos do seu raciocínio.

As 'grandes ideias' associadas à multiplicação são: a compreensão de um determinado grupo como unidade, a propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração, a propriedade comutativa da multiplicação, a propriedade associativa da multiplicação e, os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez (Fosnot & Dolk, 2001b). Importa assim compreender o que estes autores entendem por cada uma destas 'grandes ideias', e como estas estão relacionadas com a aprendizagem dos alunos. Passo, então, a apresentar cada uma delas.

A compreensão de um determinado grupo como unidade. É uma ideia que está relacionada com o facto de as crianças utilizarem os números para contarem objetos. No entanto, a partir do momento em que compreendem que podem contar um determinado número de objetos sem realizarem uma contagem de um em um, estão a desenvolver uma capacidade de cálculo que será muito útil para a aprendizagem da multiplicação.

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração. Esta é uma ideia importante que tem de ser adquirida pelos alunos. Os alunos têm de compreender que numa multiplicação, a decomposição dos fatores, bem como a adição ou subtração dos produtos parciais que se obtêm, não implica alterações no resultado do produto dos fatores iniciais.

A propriedade comutativa da multiplicação. Diz respeito à ideia de que, na multiplicação, a troca da ordem dos fatores não implica em nada, o produto final.

Os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez. A estes estão associados uma ideia relativa à propriedade comutativa e à multiplicação por dez. Por vezes, é incutida aos alunos a ideia de que quando se multiplica um número por dez basta acrescentar um zero, por exemplo 9x10=90, e os alunos compreendem que 9x10 corresponde a nove grupos de dez elementos. No entanto, é ainda mais importante que os alunos compreendam a propriedade da multiplicação associada a esta ideia, ou seja a propriedade comutativa da multiplicação. Os alunos devem compreender que calcular 9x10 ou 10x9 é exatamente igual, passando a existir dez grupos de nove elementos.

A propriedade associativa da multiplicação. Esta propriedade relaciona-se com o facto de, na multiplicação, os fatores poderem ser agrupados diferentemente sem que exista qualquer alteração no produto final.

2.4.3. Características dos contextos das tarefas

A aprendizagem da multiplicação deve ser encarada como um processo "de desenvolvimento conceptual fortemente ancorado na exploração de contextos adequados" (Brocardo, Delgado, & Mendes, 2005, p. 9). Tal como acontece na seleção de tarefas relativas a outras operações, é importante que o professor ao propor tarefas de multiplicação considere três aspetos distintos relativamente aos contextos das mesmas: as situações associadas aos contextos, os modelos subjacentes e os números envolvidos (Fosnot & Dolk, 2001a).

As situações associadas aos contextos. Ao selecionar/criar tarefas o professor deve ter em conta tudo o que conhece dos seus alunos, de modo a proporcionar-lhes momentos de interesse e desafio. Fosnot e Dolk (2001a, 2001b) defendem que na escolha das situações associadas aos contextos das tarefas o professor deve ter em conta duas características: 'fazer sentido' para os alunos e criar surpresa/suscitar questões. O termo 'fazer sentido' surge de dois aspetos distintos. O primeiro relaciona-se com o facto de a tarefa estar contextualizada com o mundo real, ou seja relacionada com o quotidiano dos alunos e, o segundo diz respeito há consequente criação de conexões e relações subjacente ao contexto apresentado. Criar surpresa e suscitar questões advém do facto de as tarefas se revelarem desafiantes e interessantes para os alunos.

Também Ambrose et al. (2003) encaram os contextos das tarefas como algo que determina e influencia os procedimentos e estratégias de cálculo que os alunos utilizam e inventam durante a resolução de tarefas.

Os modelos subjacentes aos contextos. Para além, das 'grandes ideias' associadas à multiplicação, Fosnot e Dolk (2001a, 2001b) salientam a importância dos contextos das tarefas permitirem o uso de modelos.

Existe um conjunto de três modelos elementares que servem de 'suporte' à aprendizagem da multiplicação (Mendes, 2012).

Para trabalhar a operação multiplicação são normalmente utilizados modelos como: estruturas lineares, grupos de vários tipos e de estrutura retangular (Mendes, 2012). Estes modelos são importantes na aprendizagem da multiplicação, porque são representativos das diferentes variantes subjacentes à operação de multiplicação e também por se tratar de uma forma de apoiar a compreensão dos alunos face às diferentes propriedades da multiplicação (Brocardo, Delgado & Mendes, 2005).

Fosnot e Dolk (2001b) consideram que os professores, ao selecionar/construir tarefas devem pensar nos modelos que os alunos podem usar para resolver a tarefa. No entanto, advertem que numa fase inicial os alunos podem não se apoiar nesses modelos, uma vez que, é à medida que o professor vai mostrando aos alunos que aquele modelo é útil, que estes o reconhecem como tal e o conseguem utilizar para representar o seu raciocínio. Quando, efetivamente, utilizam estes modelos, os alunos estão a mostrar que a sua forma de pensar está a sofrer alterações e neste caso em concreto a evoluir.

Inicialmente, os alunos constroem ideias associadas à multiplicação como adição sucessiva de parcelas obrigatoriamente iguais. Ao longo do tempo, e consoante a evolução das suas ideias acerca da multiplicação, passam a recorrer a outras representações (Mendes, 2012). Efetivamente, "os contextos ligados à disposição retangular e a crescente grandeza dos números envolvidos nos cálculos contribuem para o uso de procedimentos multiplicativos" (Mendes, 2012, p. 502).

O NCTM (2007) confere que a construção e respetiva compreensão dos modelos de áreas ajudam os alunos a mostrarem como é que o produto se relaciona com os fatores. Desta forma, os alunos vão desenvolvendo uma compreensão da operação multiplicação.

A importância dos modelos associados aos contextos das tarefas é também reforçada por Mendes, Brocardo e Oliveira (2013) ao referirem que estes devem potenciar a aprendizagem da multiplicação de uma forma progressiva. Inicialmente devem ser utilizados grupos de objetos com o mesmo cardinal e, posteriormente, deverão ser propostas tarefas mais elaboradas em que relativamente a esse grupo de objetos deverá ser associada a disposição retangular (Fosnot & Dolk, 2001b). Subjacente a estas tarefas, o desenvolvimento de ideias e de procedimentos acerca desta operação deverá possibilitar aos alunos uma compreensão dos diferentes sentidos da multiplicação, pois só assim conseguirão resolver problemas que envolvem diferentes formas de cálculo.

É importante que na aprendizagem da multiplicação, os alunos desenvolvam capacidades que lhes permitam transpor um raciocínio aditivo para um multiplicativo, ou seja que compreendam que ao representarem 2+2+2+2 equivale a 4x2 e relacionar, por exemplo, que 4x2=2x4 equivale a 2x2+2x2.

Os números envolvidos. Este último aspeto evidencia as componentes anteriormente apresentadas relativas ao sentido de número, segundo a perspetiva de McIntosh, Reys e Reys (1992). Os números envolvidos nas tarefas devem tratar-se de referências para os alunos, de modo que estes se sintam 'confortáveis' em manipulá-los e os ajudem a tomar decisões relativas à resolução da tarefa (Mendes, 2012). Assim, e de modo a que os alunos aprendam a operação multiplicação com sucesso, e associem a esta operação as suas diferentes propriedades, o professor deve ter em conta os aspetos discutidos anteriormente (Mendes & Delgado, 2008).

2.4.4. Estratégias e procedimentos

A terminologia utilizada por diferentes autores para designar estratégia e procedimento de cálculo não é consensual. Segundo Anghileri (1989) as estratégias de cálculo descrevem o modo como os alunos compreendem os números e os utilizam.

No que concerne à operação de multiplicação, trata-se de uma compreensão que evolui à medida que os alunos compreendem as diferentes conexões possíveis de serem estabelecidas, como é o caso da relação entre a adição e a multiplicação. Por procedimento de cálculo Fosnot e Dolk (2001b) entendem que se tratam de ideias que os alunos adquirem sobre uma determinada operação, sendo que estes procedimentos evoluem em consonância com as suas ideias.

Segundo a aceção de Beishuizen (1997), as estratégias utilizadas pelos alunos relacionam-se com “a escolha das opções relacionadas com a estrutura do problema”, por sua vez, os procedimentos, dizem respeito à “execução de passos de cálculo” (p. 127).

Neste estudo, o entendimento pelos termos estratégia e procedimento de cálculo seguem a perspetiva de Beishuizen (1997), por se considerar que as estratégias de cálculo dizem respeito ao modo como os alunos ‘olham’ para o problema proposto e iniciam a sua resolução, recorrendo assim a estratégias de contagem, aditivas, subtrativas ou multiplicativas.

Por procedimento de cálculo são entendidos todos os cálculos realizados, para que seja efetuada a estratégia de resolução pensada. Perante um determinado problema podem existir alunos que utilizam a mesma estratégia de cálculo, no entanto o procedimento utilizado para o resolver pode ser diferente, vejamos a figura 1:

Observa a imagem.

Quantos pacotes de leite estão na palete?

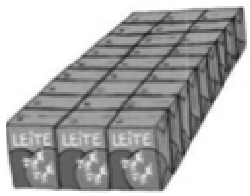


Figura 1 – Enunciado da tarefa Pacotes de leite

Perante o enunciado poderão existir alunos que ao observarem a imagem reconhecem que se trata de uma palete com três pacotes de leite que se repetem nove vezes, ou seja a sua estratégia de cálculo resulta de um raciocínio multiplicativo e, é representada pela expressão 9x3.

Como procedimento de cálculo um determinado aluno poderá reconhecer que se tratam de 27 pacotes, porque memorizou e compreendeu a tabuada do três, mas um outro aluno pode pensar que 9x3=(5x3+4x3) e, portanto efetua os seguintes cálculos: 15+12=27.

Este é um exemplo que clarifica o que anteriormente foi referido, relativamente aos termos de estratégia e procedimentos e, evidencia a opção tomada para a utilização destes termos neste estudo.

De acordo com Mendes, Brocardo e Oliveira (2013), as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação estão intrínsecas ao modo como estes relacionam as ideias que possuem sobre a multiplicação, ou seja, à medida que vão adquirindo mais conhecimentos há uma progressão nos seus procedimentos de cálculo, sendo cada vez mais 'eficazes'. Esta progressão está também relacionada com os diferentes níveis de desenvolvimento da operação multiplicação, abordados e definidos anteriormente na subsecção 2.4.1. Estas mesmas autoras consideram que, para categorizar as estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos existem duas grandes categorias: (i) estratégias baseadas nas características dos números envolvidos, sendo estes trabalhados como um todo e, (ii) decomposição dos números.

Uma vez que, uma das questões de partida desta investigação está relacionada com as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação torna-se fulcral procurar o que teoricamente é defendido sobre este tema.

No seu estudo, Mendes (2012) categoriza os procedimentos usados pelos alunos nas tarefas de multiplicação, recorrendo a dois níveis. Num primeiro nível considera os seguintes procedimentos: procedimentos de contagem, procedimentos aditivos, procedimentos subtrativos e procedimentos multiplicativos. Para cada uma destas categorias, a autora identifica um conjunto de procedimentos específicos. A tabela 2 específica as diferentes categorias de procedimentos (primeira coluna da tabela), bem como os diferentes procedimentos específicos que lhes estão inerentes (segunda coluna da tabela), usados por esta autora.

Tendo em conta a importância que as estratégias e os procedimentos usados pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação assumem neste estudo, apresento em seguida a caraterização de cada um destes aspetos, baseando-me nas ideias de Mendes (2012).

Tabela 2 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas propostas (Mendes, 2012)

Categorias de procedimentos	**Procedimentos específicos**
Procedimentos de contagem	Contar por saltos
Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
Procedimentos subtrativos	Subtrair sucessivamente
Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
	Multiplicar em coluna

É de salientar, que dado o entendimento de estratégia e de procedimento de cálculo assumido no presente estudo, o que Mendes (2012) considera como categorias de procedimentos correspondem a estratégias e os procedimentos específicos correspondem a procedimentos de cálculo.

Associado às **estratégias de contagem** (designadas por procedimentos de contagem em Mendes (2012)) existe um único procedimento – *Contar por saltos.* Este procedimento resulta de uma contagem sucessiva, partindo de um determinado número adicionando-o sucessivamente. Por exemplo, para contabilizar 12 objetos podem ser organizados grupos de dois, dando saltos de dois, 2, 4, 6, 8, 10, 12. De acordo com Mendes (2012), o 'comprimento' dos saltos que os alunos estabelecem estão relacionados com os números envolvidos nas tarefas, ou seja, quanto maior for a grandeza dos números maiores serão os 'saltos'.

As **estratégias aditivas** (designadas por procedimentos aditivos em Mendes (2012)) resultam da utilização de diferentes procedimentos. O procedimento *adicionar sucessivamente* implica a adição sucessiva de um mesmo número em que, os cálculos são apresentados horizontalmente.
Por exemplo, quando os alunos adicionam 3+3+3+3+3+3+3+3 para calcularem um determinado número de objetos e, apenas terminam quando os contabilizam a todos. *Adicionar dois a dois,* é um outro procedimento e, contrariamente ao que acontece no procedimento anterior, neste as adições são de parcelas iguais, mas agrupadas de dois em dois.

Segundo Mendes (2012) os alunos recorrem a esta estratégia para "resolverem problemas de multiplicação (…) de modo a efetuarem cálculos mais depressa, [normalmente este procedimento é representado] segundo um esquema em árvore" (p. 245).

As **estratégias subtrativas** (designadas por procedimentos subtrativos em Mendes (2012)) baseiam-se em apenas um procedimento de cálculo – *Subtrair sucessivamente* – este procedimento consiste na realização de subtrações sucessivas, em que a partir do aditivo se subtrai continuadamente um mesmo número, que corresponde ao subtrativo. Ao longo das subtrações o aditivo vai sofrendo alterações. No entanto, o número correspondente ao subtrativo permanece igual (Mendes, 2012). Os cálculos podem ser representados sob a forma vertical ou horizontal.

Relativamente às **estratégias multiplicativas** (designadas por procedimentos multiplicativos em Mendes (2012)) existem diferentes procedimentos de cálculos que ilustram as mesmas:

- *Usar produtos conhecidos,* tal como o nome indica, consiste na utilização de produtos conhecidos, ou seja, corresponde à utilização das tabuadas quando trabalhadas com os alunos. Ao compreenderem e conhecerem as tabuadas os alunos utilizam-nas na resolução de problemas, sem necessitarem de efetuar cálculos, pois os produtos já são conhecidos (Mendes, 2012).

- *Usar relações de dobro* é um procedimento de cálculo evidenciado quando os alunos ao realizarem um determinado cálculo recorrem ao dobro de um número. Este procedimento é utilizado em cálculos multiplicativos e, o seu uso é muitas vezes determinado pelo contexto do problema (Mendes, 2012).
- *Uso de múltiplos de cinco e de dez* é utilizado pelos alunos quando estes recorrem a números múltiplos de cinco e/ou de dez para efetuarem o cálculo de produtos.
- *Usar a decomposição não decimal de um dos fatores* é um procedimento que implica a decomposição não decimal de um dos fatores, a transformação dos produtos parciais e envolve a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Normalmente, a decomposição não decimal de um dos fatores corresponde "à substituição de um número por uma adição de duas parcelas iguais, ou de parcelas que, de alguma forma, facilitam o cálculo" (Mendes, 2012, p. 249).
- *Usar a decomposição decimal de um dos fatores* surge quando um dos produtos parciais é decomposto de forma decimal, ou seja em (centenas, dezenas e unidades). Ao utilizarem esta estratégia os alunos estão a recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (Mendes, 2012).

  De acordo com esta autora, esta é uma estratégia muito utilizada essencialmente quando um dos fatores é um número superior a vinte.
- *Ajustar e compensar* consiste na utilização de um número mais 'fácil' de ser trabalhado que substitui um dos fatores. Ao efetuar esta substituição, caso o número escolhido seja superior ao que correspondia o do fator, terá de ser efetuada uma subtração para que exista a compensação necessária. Por exemplo, ao pensarmos em 3x9 podemos substitui o fator 9 por 10 (número de referência), calculamos 9x10=90, e ao produto subtrai-se três (90-3= 87). A propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração está subjacente a este procedimento.
- *Usar relações de dobro e metade* é um procedimento que resulta da utilização da relação dobro/metade, ou seja quando os alunos

reconhecem as relações de dobro e de metade que podem existir entre os fatores de um mesmo produto. Por exemplo, perante a expressão numérica 25x2, para efetuar este produto poder-se-á pensar numa expressão equivalente utilizando uma relação de dobro, em que a expressão numérica será 50x4.

O número 50 é o dobro de 25 e, o número 4 o dobro de 2. Associada a esta estratégia está a propriedade associativa da multiplicação (Mendes, 2012).

- *Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência* é um procedimento em que os alunos escolhem um dos fatores para se manter sempre igual e, o outro fator ao longo das multiplicações sucessivas acresce sempre uma unidade. Esta estratégia é utilizada quando os contextos dos problemas são geralmente de divisão (Mendes, 2012).
- *Multiplicar em coluna* parece corresponder ao algoritmo tradicional da multiplicação, mas não é o que acontece. Apesar de os cálculos serem efetuados na vertical e, terem em conta a decomposição dos números envolvidos, ao contrário do algoritmo os cálculos parciais são elaborados da esquerda para a direita e, são trabalhados os números e não dígitos (Mendes, 2012).

Em suma, destaca-se a importância do ensino e da aprendizagem da operação multiplicação ser realizada numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número.

O cálculo mental é considerado um aspeto essencial e associado a este desenvolvimento (Mendes, 2012). Para promover a aprendizagem da multiplicação é importante propor tarefas que tenham em conta as 'grandes ideias' associadas à multiplicação e às características dos contextos das tarefas nomeadamente, às situações e modelos associados aos contextos e aos números envolvidos (Fosnot & Dolk, 2001b).

Capítulo III – Metodologia

Este terceiro capítulo destina-se à apresentação e justificação das opções metodológicas tomadas na realização deste estudo. Este estudo insere-se num paradigma interpretativo e, segue uma abordagem qualitativa. Como tal, começo por caraterizar o que é um estudo interpretativo e por justificar a opção de escolha por uma abordagem qualitativa. Explicito também o porquê deste estudo se tratar de uma investigação sobre a própria prática. Neste capítulo apresento, ainda, os métodos de recolha de dados e descrevo cada um deles. Termino com a explicação de como são analisados os dados recolhidos durante o estudo, explicitando as categorias de análise usadas.

3.1. Estudo Interpretativo

Os estudos interpretativos têm como principal característica o facto de apresentarem, através dos seus objetivos, uma "preocupação em compreender o mundo social a partir da experiência subjetiva" (Afonso, 2005, p. 34). Nos estudos de caráter interpretativo os investigadores são considerados como construtores do seu próprio conhecimento, uma vez que, é através das suas experiências e da compreensão que fazem sobre as mesmas que criam novas ideias (Coutinho, 2011). Assim, o paradigma interpretativo engloba estudos que revelam preocupações com aspetos como "*compreensão, significado e ação*"[1] (p. 16).

Visto que o principal objetivo deste estudo é compreender como lidam os alunos com tarefas de multiplicação tendo em vista a sua resolução, considero que este estudo se enquadra no paradigma interpretativo. De facto, no decorrer da realização deste estudo procurei compreender determinados factos, como por exemplo, o modo como os alunos da turma resolviam determinadas tarefas que lhes eram propostas na área da Matemática e que dificuldades apresentavam.

[1] Expressões em itálico no Original.

Por me encontrar em situação de estágio e, em simultâneo, a desenvolver este estudo, estive perante uma situação de estagiária/investigadora. Como tal, procurei interpretar e compreender as diferentes estratégias e procedimentos de cálculo utilizados na resolução de tarefas de multiplicação, bem como as dificuldades manifestadas.

3.2. Opções Metodológicas

3.2.1. Abordagem qualitativa

Visto que este estudo não procura testar hipóteses ou conjeturas, mas sim compreender como os alunos pensam quando resolvem tarefas de multiplicação, mais concretamente procura analisar as estratégias e os procedimentos utilizados pelos alunos, e as dificuldades que evidenciam na resolução de problemas de multiplicação, a abordagem que mais se adequa é a qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994), a abordagem qualitativa tem cinco características principais: (i) "a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47); (ii) "a investigação qualitativa é descritiva" (p. 48); (iii) "os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p. 49); (iv) "os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (p. 50); (v) "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (p. 50). Estes mesmos autores defendem que a abordagem qualitativa permite ao investigador compreender o processo através do qual os indivíduos constroem significados e o que se entende por estes significados.

Face a estas cinco características afirmo seguir uma abordagem qualitativa uma vez que, foi no contexto de estágio que recolhi os dados que servem de base para o desenvolvimento deste estudo, procurei compreender algo com vista a um aprofundamento teórico, nomeadamente no que se refere às estratégias e procedimentos usados e às dificuldades manifestadas, pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação.

Para além destes aspetos, os dados recolhidos têm um carácter qualitativo, uma vez que, resultam da "recolha de informação fiável e sistemática sobre aspetos específicos da realidade social usando procedimentos empíricos com o intuito de gerar e inter-relacionar conceitos que permitam interpretar essa realidade" (Afonso, 2005, p. 14).

Segundo Coutinho (2011) a recolha de dados qualitativos deve decorrer no "meio natural em que ocorrem (observação naturalista) com a participação ativa do investigador (observação participante) " (p. 27). Como referi anteriormente assumi um duplo papel (investigadora e estagiária). Autores como (Bogdan & Biklen, 1994; Patton, 2002) entendem que esta dualidade de papéis é bastante comum, na medida em que, o investigador qualitativo acaba por se envolver na dinamização de determinadas atividades enquanto observador participante.

3.2.2. Investigação sobre a própria prática

Considero ainda que realizei um estudo sobre a minha própria prática, na medida em que procurei colmatar alguns aspetos menos positivos relacionados com a aprendizagem dos alunos na área da Matemática e, simultaneamente, ir refletindo sobre a minha própria prática, adaptando-a sempre que considerei necessário.

Segundo Ponte (2002) a investigação sobre a prática constitui um processo fundamental de "construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente" (p. 3). Este autor considera que a investigação sobre a própria prática pode decorrer face a determinadas preocupações ou motivações do professor, no entanto, no seu entender estas investigações derivam de quatro grandes razões:

> " (i) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa mesma prática; (ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional; (iii) para contribuírem para a construção de um património de cultura e conhecimentos dos professores como grupo profissional; e (iv) como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos". (p. 3)

No caso concreto deste estudo, foi realizada uma investigação sobre a própria prática, uma vez que no decorrer de diferentes momentos de observação considerei que deveria existir uma outra preocupação com a aprendizagem dos alunos, reforçando a ideia de aprendizagem da Matemática com compreensão, cujo intuito era compreender como lidam os alunos com tarefas de multiplicação.

Ponte (2002) defende que o professor deve frequentemente refletir e avaliar a sua prática, para que esta possa ser adaptada às necessidades do contexto. Para que estas necessidades possam ser tidas em conta, o autor afirma que devem ser experimentadas diferentes formas de trabalho, sendo "indispensável compreender bem os modos de pensar e as dificuldades próprias dos alunos" (p. 2). Este mesmo autor considera que a base de uma investigação sobre a prática deve partir de uma "atividade inquiridora, questionante e fundamentada" (p. 2). Efetivamente compreender as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos, bem como as suas dificuldades no momento de exploração das tarefas pode ajudar o professor a planear tarefas mais eficazes para os alunos (Chamberlin, 2005).

3.3. Contexto e participantes do estudo

Este estudo foi realizado numa escola básica, pertencente a um agrupamento de escolas do distrito de Setúbal. Deste agrupamento fazem parte duas instituições: uma escola básica com Jardim de Infância e uma escola 2,3/S (escola sede). Nestas duas instituições estão matriculados cerca de 1850 alunos. No caso concreto da primeira, na qual foi realizado este estudo, para além da valência de 1.º ciclo do ensino básico, existem quatro salas de valência de pré-escolar, permitindo uma continuidade educativa quando os alunos transitam para o 1.º ciclo do ensino básico.

Os participantes deste estudo foram os alunos pertencentes a uma turma do 2.º ano de escolaridade. Esta turma é composta por 21 alunos, a sua faixa etária varia entre os sete e os doze anos e, em termos de género, existem 11 raparigas e 10 rapazes. Há dois casos de alunos diagnosticados com tendo Necessidades Educativas Especiais. Um dos casos é de uma aluna que, por motivos de saúde, não se desloca à escola, pelo que é acompanhada por uma professora de ensino especial em sua casa, tendo, no entanto, a oportunidade de por vezes assistir às aulas através do *skype.* O outro caso é de um aluno que integrou esta turma pela primeira vez e é repetente pela quarta vez no 2.º ano de escolaridade.

A professora cooperante, e titular desta turma, considera que os alunos se interessam pela área da Matemática, sendo a resolução de problemas a componente em que os alunos apresentam mais dificuldades porque, na sua opinião, estes não interpretam e compreendem os enunciados dos problemas, mesmo quando estes são curtos. Em termos globais a professora refere[2] que existem "alunos muito bons e outros menos bons", e que esta é uma área cujo programa é muito extenso e portanto, na sua prática, procura que os alunos "treinem" essencialmente os conteúdos, para que posteriormente os mobilizem, pois "não há espaço/tempo para tudo".

3.4. Métodos de recolha de dados

Nas investigações qualitativas são normalmente sugeridos determinados métodos de recolha de dados. Patton (2002) afirma que neste tipo de investigações as entrevistas, a observação e a recolha documental constituem os três tipos de métodos mais usuais e indicados. Também Ponte (2002) considera que nos estudos de natureza qualitativa a "observação, a entrevista e a análise de documentos" constituem as técnicas mais usuais na recolha de dados (p. 14).

Tendo em conta, as questões deste estudo, os métodos de recolha de dados a que recorri foram a observação participante, a recolha documental, conversas informais, realizadas entre mim e os alunos no decorrer da resolução das tarefas, e a uma entrevista. Descrevo, em seguida, cada um dos métodos utilizados para a recolha de dados relativos a esta investigação.

Observação Participante. Este método de recolha de dados foi o mais utilizado ao longo do estudo. A observação participante é considerada uma técnica de recolha de dados em que estes são fidedignos (Afonso, 2005).

Considero que assumi uma postura de observadora participante, porque participei neste estudo e interagi com os participantes. Coutinho (2011) caracteriza o observador participante como sendo "um participante ativo no

[2] As expressões entre parêntesis são transcrições de falas da professora cooperante no decorrer de uma entrevista.

estudo, [que] interage com os participantes, [apesar de não ser] um membro pertencente ao grupo” (p. 290).

O meu foco de observação foram os alunos, nomeadamente o tipo de estratégias e procedimentos de cálculo utilizados quando resolviam tarefas relativas à operação multiplicação e as dificuldades por eles evidenciadas. O facto de estar sempre presente e inserida na turma permitiu-me observar *in loco* os alunos, ou seja, tive a possibilidade de aceder às suas ações e discursos momentâneos.

A necessidade de efetuar registos, resultantes das observações efetuadas, fez com que recorresse às chamadas notas de campo e a registos áudio das aulas. As notas de campo resultam do “relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). As notas de campo podem assumir-se como dois tipos de materiais: *descritivos* e *reflexivos* (Bogdan & Biklen, 1994). São consideradas notas de campo descritivas, aquelas em que o investigador se preocupa em “captar uma imagem por palavras do local, pessoas, ações e conversas observadas” (p. 152). Por sua vez, nas notas de campo reflexivas o investigador dá enfase “a especulações, sentimentos, problemas, ideias, palpites, impressões e preconceitos” (p. 165).

Considero que as minhas notas de campo foram essencialmente descritivas, dando origem posteriormente a relatórios reflexivos, uma vez que, após a dinamização das tarefas e da respetiva observação, necessitei sempre de descrever o contexto em que a tarefa foi desenvolvida (número de alunos que participaram, duração da tarefa, modo de trabalho, etc.) mas também reflito sobre a prática, uma vez que incluo nestes registos (dificuldades e constrangimentos minhas e dos alunos, modos de superar essas dificuldades, o que poderia ter sido feito de forma diferente, etc.). Estes registos permitiam-me adaptar e planificar as práticas seguintes, podendo ser encarados como elementos estruturantes da minha prática letiva futura.

Os registos áudio são ferramentas preciosas ao serviço do investigador, pois são outro recurso fidedigno, para além do lápis e do papel (Coutinho, 2011). Neste estudo recorri a gravações áudio das aulas de exploração de tarefas propostas no âmbito do projeto, para que, posteriormente, pudesse apoiar-me das mesmas para analisar episódios de sala de aula. Através destes registos posso assegurar que tudo o que foi dito é preservado e se mantem inalterado.

Recolha documental. A recolha documental, segundo Merriam (1988), parte do pressuposto que os documentos devem ser encarados como "material físico e escrito" (p. 104), que é recolhido pelo investigador ao longo da sua investigação, sendo que o destino destes documentos é uma análise profunda que permitirá ao sujeito fundamentar a sua investigação. Para Bell (1993), na análise documental o investigador deve ter em conta, quatro aspetos distintivos que os caraterizam: (i) "a natureza dos dados documentais" (p. 90), (ii) "a localização dos documentos" (p. 92), (iii) "a seleção de documentos" (p. 93), e (iv) "a análise crítica dos documentos" (p. 98).

Para a realização deste estudo foram consultados dados biográficos dos alunos que constavam nos seus processos individuais, o que possibilitou um conhecimento individual de cada um deles.

Foram, também, recolhidas as produções efetuadas pelos alunos durante a resolução das tarefas, e foram reunidas as planificações realizadas pelo grupo de estágio, onde constam as tarefas e a descrição e respetiva planificação de cada uma delas.

Conversas informais. Na aceção de Patton (2002) as conversas informais resultam de algumas questões que emergem a partir da interação entre pessoas, ocorrendo, por vezes, durante a observação participante.

As conversas informais com os alunos realizaram-se nos momentos em que estes se encontravam a resolver as tarefas propostas e, por vezes, pediam algum apoio ou necessitavam de esclarecer alguma dúvida. Quando este tipo de situação acontecia registava os diálogos e seu conteúdo através de notas de campo. Considero importante referir que, no final das aulas e baseando-me em algumas notas de campo fui completando os relatórios com aspetos importantes que ocorriam durante a exploração das tarefas ou após essa exploração, tais como: as dúvidas colocadas pelos alunos, as dificuldades que evidenciavam na resolução das tarefas, os comentários que faziam a propósito das mesmas.

Entrevista. A entrevista pode ser encarada como um método de recolha de dados complementar à observação participante e à recolha documental (Bogdan & Biklen, 1994).

> A entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 124)

Uma vez que o objetivo deste estudo é compreender como lidam os alunos com tarefas de multiplicação tendo em vista a sua resolução e as dificuldades evidenciadas, resolvi efetuar uma entrevista à professora cooperante. Apesar de esta não integrar o grupo de participantes deste estudo, constitui uma fonte privilegiada sobre os alunos daquela turma, sobre as suas práticas de aprendizagem da Matemática e sobre as suas aprendizagens nesta área. Pretendia, assim, conhecer a perspetiva da professora cooperante sobre a aprendizagem da Matemática, de forma a caraterizar as práticas 'habituais' dos alunos daquela turma e de que forma perceciona a aprendizagem dos alunos no que respeita à multiplicação.

Segundo Afonso (2005), as entrevistas distinguem-se entre entrevistas estruturadas, não estruturadas e semiestruturadas, em função do que se pretende registar e das informações fornecidas pelo entrevistado. Considero que esta entrevista é não estruturada, uma vez que "a interação verbal entre entrevistador e entrevistado [desenvolve-se] à volta de (…) grandes questões organizadoras do discurso" (Afonso, 2005, p. 98). Para além de que, a principal intenção desta entrevista é "recolher informações sobre factos, (…) num sentido interpretativo, [em que são recolhidas] opiniões e representações do entrevistado" (Afonso, p. 99).

Tendo por base os métodos de recolha de dados explicitados anteriormente, sintetizo-os na tabela seguinte, relacionando-os com as suas fontes e as suas formas de registo.

Tabela 3 – Métodos, fontes e formas de registo dos dados

Método	Fonte	Forma de Registo
Observação participante	Aulas	- Notas de campo - Registos áudio - Relatórios
Recolha documental	Professora Cooperante	- Dados biográficos dos alunos
	Alunos	- Produções dos alunos
	Grupo de estágio	- Planificações das aulas e tarefas
Conversas informais	Alunos	- Notas de campo - Relatórios
Entrevista	Professora cooperante	- Gravação áudio

3.5. Processo da recolha de dados

Este processo ocorreu durante o período de estágio, sendo que na primeira semana apenas observei o modo como os alunos trabalhavam, o tipo de tarefas que lhes eram propostas, como é que as resolviam, como lhes eram apresentadas as tarefas, etc. Apesar de neste momento inicial não ter uma ideia definida sobre o tema que gostaria de estudar, já sabia que o meu foco iria incidir na área da Matemática e, portanto procurei inteirar-me dos conteúdos programáticos ao nível do Programa de Matemática para o 1.º ciclo e dos conteúdos que a professora cooperante pretendia abordar durante este período de tempo, de modo a planificar a minha proposta pedagógica.

O período de recolha de dados ocorreu ao longo de 4 semanas, sendo que existiu uma interrupção letiva (férias de natal) entre a penúltima e a última tarefa proposta. Assim, a recolha de dados teve início no dia 19 de novembro de 2014 e terminou no dia 6 de janeiro de 2015.

O estágio decorreu três dias por semana (segunda, terça e quarta-feira), sendo os dois últimos dias da semana destinados para a reflexão sobre as tarefas desenvolvidas e, a planificação da semana seguinte.

Semana após semana, propus tarefas relacionadas com o tema dos números e das operações, no entanto, não criei uma sequência de tarefas, pois apenas seguia os conteúdos que a professora cooperante estabelecia para cada semana.

Nas primeiras quatro semanas de estágio, ou seja, nas semanas que antecederam à exploração de tarefas realizadas no âmbito deste estudo, as tarefas focaram-se nas operações adição e subtração mas, posteriormente, foi-nos pedido, a mim e à minha colega de estágio, que introduzíssemos a operação multiplicação.

Por esta razão, e por ao longo das primeiras tarefas ter tentado implementar algumas normas características de uma cultura de sala de aula em que os alunos têm oportunidade de se questionar, interrogar os outros, partilhar e discutir ideias, resolvi centrar este estudo na operação multiplicação e analisar as produções e as dificuldades dos alunos apenas respeitantes a esta operação.

Na tabela seguinte apresento um resumo cronológico relativo ao processo de recolha de dados. As datas assinaladas a negrito correspondem aos dias em que foram exploradas as tarefas propostas âmbito deste estudo.

Tabela 4 – Síntese cronológica do processo de recolha de dados

	Observação participante/Conversas informais	**Recolha documental**
Dias do mês de novembro	**19**, 24, **25, 26**	**19, 25, 26**
Dias do mês de dezembro	1, **2,** 3, 9, 10	**2**
Dias do mês de janeiro	5, **6**	**6**

3.6. A análise de dados

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a fase de análise dos dados corresponde ao trabalho com os dados incluindo:

> "a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros". (p. 205)

Na realização deste estudo considero terem existido dois momentos de análise de dados. Num primeiro momento e, em concomitância com a recolha de dados, fui arquivando os dados tarefa a tarefa, onde incluía a antecipação de possíveis estratégias e procedimentos de cálculo a serem utilizados pelos alunos na resolução das tarefas, as planificações das aulas, as produções dos alunos com vista à análise das suas estratégias e procedimentos de cálculo e os relatórios de aula (onde refletia sobre as tarefas dinamizadas e aspetos da minha prática letiva e sobre as dificuldades evidenciadas pelos alunos).O segundo momento de análise realizou-se finda a recolha de dados e tinha como objetivo responder às questões de partida e consequentemente, a redação deste relatório.

Neste estudo considerei três dimensões de análise: estratégias, procedimentos e dificuldades dos alunos. Estas três dimensões resultam das questões do estudo. Apesar de todos os documentos recolhidos serem pertinentes para o desenvolvimento deste estudo, para a análise de dados foram particularmente importantes, as produções dos alunos, os registos áudio das aulas e os relatórios por forma a caracterizar o modo como os alunos lidam com tarefas de multiplicação, nomeadamente no que respeita às estratégias e procedimentos de cálculo que utilizam para as resolverem e às dificuldades que evidenciam na sua resolução. As categorias de análise das dificuldades dos alunos emergiram dos dados recolhidos. Para analisar os dados referentes às estratégias e procedimentos dos alunos usados na resolução das tarefas, adaptei a categorização usada por Mendes (2012), já referida no capítulo II deste relatório. Na tabela 5 apresento as categorias consideradas neste estudo com as respetivas adaptações.

Tabela 5 – Estratégias e Procedimentos de cálculo da operação multiplicação (Adaptado de Mendes, 2012)

Estratégias	**Procedimentos de cálculo**
Estratégias de contagem	Contar por saltos
Estratégias aditivas	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
Estratégias subtrativas	Subtrair sucessivamente
Estratégias multiplicativas	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
	Multiplicar em coluna

Assim, seguindo a estrutura de análise utilizada por Mendes (2012) no seu estudo acerca dos procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação, agrupei as estratégias de cálculo possíveis de serem utilizadas pelos alunos em quatro grupos, sendo elas: estratégias de contagem, estratégias aditivas, estratégias subtrativas e estratégias multiplicativas.

Para cada uma destas estratégias, foram considerados os procedimentos específicos que resultaram do estudo de Mendes (2012) e, que no presente estudo, designo por procedimentos de cálculo. Para além das categorias apresentadas na tabela 5, emergiram outras da análise dos dados. Como a identificação das estratégias e procedimentos fazem parte do objeto deste estudo, constituindo simultaneamente conclusões do mesmo, a tabela que resume as estratégias e os procedimentos usados pelos participantes nesta investigação será apresentada no capítulo VI deste relatório.

Na perspetiva de Patton (2002) a triangulação metodológica envolve a utilização de múltiplas fontes de dados com o intuito de facilitar a compreensão da investigação. O conceito de triangulação está relacionado com a ideia de validação dos dados recolhidos no decorrer da investigação (Ferreira, 2012).

Efetivamente, neste estudo, recorri, ao que Patton (2002) designa por triangulação metodológica, e, fi-lo através da organização do dossier referido anteriormente. Assim, ao reunir um conjunto de dados provenientes dos diversos métodos de recolha, na sua análise, cruzei essas informações para redigir este relatório.

Por forma a identificar as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução das tarefas, recorri não só às suas produções, como também a episódios de sala de aula. Estes episódios resultam, sobretudo, dos momentos de discussão coletiva.

A análise de dados incluiu as produções de todos os alunos, no entanto, optei por analisar em profundidade as que foram apresentadas no momento de discussão, pelo facto de ter sobre elas dados relativos ao modo como os alunos pensaram, permitindo-me uma análise mais pormenorizada. No entanto, não pretendia restinguir-me a este grupo de alunos, uma vez que tinha como objetivo analisar as produções de todos os alunos, para que tivesse uma noção global de todas as estratégias e procedimentos usados, na resolução das diferentes tarefas.

Os momentos de discussão coletiva foram fulcrais para a interpretação do modo como os alunos resolvem as tarefas, e por si só são momentos que contribuem “fortemente para a aprendizagem dos alunos, na medida em que colocam em jogo um conjunto de interações sociais e o processo de negociação de significados matemáticos” (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2014, p. 65). Saliento assim, e uma vez mais, a importância destes momentos, que conjugados com as produções dos alunos, me permitiram caraterizar mais pormenorizadamente as suas opções de resolução.

Contudo, e durante a análise de dados verifiquei que existiam alunos que tinham recorrido a estratégias e procedimentos de cálculo distintos dos apresentados no momento de discussão coletiva. Como tal, optei por apresentar essas mesmas produções, e sempre que isso acontece faço referência a este facto.

De modo a caracterizar as estratégias e os procedimentos de cálculo utilizados por todos os alunos, no final da análise de cada tarefa consta uma tabela com uma síntese das estratégias e procedimentos de cálculo utilizados. Os números que constam nestas tabelas contabilizam as estratégias e os procedimentos de cada aluno. Apesar de algumas das tarefas terem sido realizadas a pares tomei a decisão de quantificar aluno a aluno, pois existiu sempre um ou outro que, por falta de parceiro, resolveu a tarefa individualmente.

Devo, no entanto, salientar que na tarefa 3 ‘Construção da tabuada do 3’, devido às suas características, nomeadamente por ser uma tarefa na qual a metodologia de trabalho adotada foi o trabalho em grande grupo, a análise de dados incidiu nos diferentes raciocínios apresentados pelos alunos, uma vez que existiu uma constante interação e discussão dos raciocínios que iam sendo apresentados. Assim, e neste caso, os números que constam nas tabelas sínteses correspondem às diferentes intervenções dos alunos.

Durante o segundo momento de análise de dados, senti necessidade de designar por subtarefas as diferentes questões de uma determinada tarefa, nomeadamente nas tarefas 2 e 4. Por exemplo, a tarefa 2 ‘Colocar azulejos’ tinha três questões distintas, tendo considerado que esta tarefa era composta por três subtarefas. Esta necessidade emergiu porque, por um lado, os alunos utilizaram diferentes estratégias e procedimentos de cálculo para resolverem cada uma das subtarefas e era importante apresentá-las e caraterizá-las separadamente. E por outro, porque na dinamização das respetivas tarefas optei por discutir cada uma das subtarefas individualmente, por considerar que existiam aspetos que depois de serem discutidos numa primeira subtarefa eventualmente seriam úteis para a resolução das seguintes.

Capítulo IV- Proposta Pedagógica

Neste quarto capítulo descrevo diferentes aspetos relacionados com a proposta pedagógica que me propus desenvolver. Como tal, inicio com uma secção relativa à perspetiva de ensino na qual me situo – o ensino exploratório, caracterizando os diferentes momentos de aula que, segundo Stein et al., (2008), devem fazer parte desta abordagem, bem como a cultura de sala de aula a ser desenvolvida. A segunda secção destina-se às tarefas, pelo que, começo por apresentar o tipo de tarefas que propus no âmbito deste projeto e caracterizo-as segundo a perspetiva de Ponte (2005). Refiro também algumas preocupações subjacentes à escolha das tarefas e à planificação das aulas, por considerar um aspeto-chave nas práticas do professor. No final deste capítulo apresento as quatro tarefas dinamizadas no âmbito deste projeto, sendo explicitados os objetivos e intencionalidades de cada uma.

4.1. Perspetiva de ensino da Matemática

4.1.1. Ensino exploratório da Matemática

Como referido no capítulo I deste trabalho identifico-me com o ensino exploratório da Matemática pelas características que apresenta, nomeadamente por se tratar de uma perspetiva de ensino que se centra nos alunos e na sua aprendizagem.

O ensino exploratório da Matemática é um processo de ensino, no qual os alunos aprendem através do trabalho que realizam, partindo de tarefas propícias a discussões coletivas onde surgem e emergem ideias matemáticas que serão sistematizadas por eles e pelo professor (Canavarro, 2011).

Segundo Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) a "natureza interativa do ensino, envolvendo professor e alunos, é uma marca distintiva do ensino exploratório" (p. 31). Estas mesmas autoras referem que neste tipo de ensino, as aprendizagens ocorrem individualmente e simultaneamente em grupo, uma vez que, os alunos estão em constante interação uns com os outros e com o professor e, no final de cada tarefa, têm a oportunidade de negociar significados.

Este tipo de ensino tem características muito peculiares, no entanto pode considerar-se que a principal característica do ensino exploratório é promover a descoberta e, consequentemente, a construção do conhecimento matemático (Ponte, 2005). Assim, pode considerar-se que este tipo de ensino difere do chamado ensino 'tradicional ou direto', uma vez que os professores definem alguns aspetos ligados à sua prática de forma diferente. No ensino exploratório o professor não explica tudo, pois acredita que os seus alunos devem ter um papel ativo na procura do que necessitam para realizar o trabalho proposto (Ponte, 2005).

Optei por regular a minha proposta pedagógica, de acordo com este método de ensino, pois considero que este é uma mais-valia para a aprendizagem dos alunos e porque, mais do que efetuar registos e correções no quadro, considero que a discussão, a comunicação e negociação de resoluções são aspetos importantes para a aprendizagem da Matemática com compreensão.

Para além das características apresentadas anteriormente, o ensino exploratório da Matemática tem uma especificidade, no que respeita aos momentos de aula, ou seja, as aulas são desenvolvidas em quatro momentos distintos: a apresentação, o desenvolvimento, a discussão e, a sistematização da tarefa (Canavarro, 2011). Já Stein et al. (2008) propõem que as aulas sejam desenvolvidas em apenas três momentos distintos, sendo eles: a apresentação da tarefa, a realização da tarefa pelos alunos e, a discussão e sistematização das tarefas. Em ambas as perspetivas, os momentos pelos quais as aulas devem decorrer são os mesmos. No entanto, a diferença está relacionada com o último momento, que pode ser realizado em conjunto com o momento de discussão coletiva ou em separado.

Neste estudo assume-se a perspetiva de Stein et al. (2008), uma vez que na dinamização das tarefas, aquando dos momentos de discussão coletiva, foram sendo efetuadas sistematizações de conceitos, ideias e procedimentos de cálculo.

Para a resolução de cada uma das tarefas, os alunos dispunham sempre do enunciado da tarefa, de uma folha tamanho A3, marcadores, lápis e borracha. A opção de utilizar estes materiais, nomeadamente, as folhas de tamanho A3, prendeu-se com facto de os alunos necessitarem de registar os seus raciocínios e assim, no momento de discussão coletiva, bastava afixar no quadro estas folhas. Esta opção visava a 'poupança' de tempo, pois se os alunos tivessem de escrever com marcadores no quadro iria perder-se bastante tempo e estes acabariam por começar a dispersar-se e perder a atenção no trabalho que nos encontrávamos a desenvolver.

Explicitada esta opção, importa caracterizar cada um dos momentos de aula, de forma a, que seja percetível como cada um deles deve decorrer e como foi desenvolvido na minha prática.

Apresentação da Tarefa. De acordo com Ponte e Serrazina (2000), a forma como as tarefas são apresentadas, exploradas e discutidas em contexto de sala de aula são determinantes para a aprendizagem da Matemática. Neste primeiro momento é suposto que o professor assegure que os seus alunos compreendem o que é pressuposto ser realizado e se sintam motivados para tal. É ainda neste momento que é estabelecido com os alunos o trabalho a realizar, bem como o tempo que dispõem para cada um dos momentos de aula e, o modo de trabalho adotado (Anghileri, 2006).

De acordo com Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) o momento de apresentação das tarefas implica um conjunto de ações que devem ser desenvolvidas pelo professor e que se regem por três intenções fundamentais: (i) garantir que os alunos se apropriam da tarefa, (ii) promover a adesão dos alunos à tarefa, e (iii) organizar o trabalho dos alunos. A primeira intenção corresponde ao modo como o professor apresenta as tarefas aos alunos e as contextualiza. A segunda intenção, tal como o nome indica, pretende desafiar os alunos para o trabalho a realizar, de modo a que estes se sintam motivados. A última, diz respeito a aspetos organizativos, nomeadamente, ao modo de trabalho adotado pelo professor, o tempo que os alunos dispõem para a realização das tarefas, etc.

Nos momentos de apresentação das tarefas procurei contextualizá-las recorrendo a pequenas histórias que fossem próximas da realidade dos alunos, com o intuito de captar a sua atenção e o seu interesse pela sua resolução. Para além disso, organizava-os consoante a modalidade de trabalho adotada (individual, pares ou grande grupo) e procurava que os alunos colocassem dúvidas sobre a tarefa, caso tivessem. Neste momento disponibilizava, ainda, folhas para que os alunos registassem os seus cálculos e o enunciado de cada tarefa. Geralmente neste último integrava imagens, para que os alunos pudessem utilizá-las caso necessitassem. Ao longo das tarefas persistiu sempre um constrangimento que, embora fosse sendo cada vez mais diminuto, me provocou algumas dúvidas. Na apresentação das tarefas pedia sempre a um aluno que lesse o enunciado e, seguidamente, os alunos colocavam questões sobre o mesmo. No entanto, senti que, por vezes, me excedia nas respostas que retribuía aos alunos ficando com a sensação de que os 'conduzia' para o tipo de resposta que esperava. Apesar de ter esta consciência também sentia que deveria ajudá-los na interpretação dos enunciados e ser esclarecedora. Como tal, ao longo do tempo fui diminuindo estas minhas 'explicações' e passei a pedir a outros alunos que respondessem às dúvidas dos colegas.

Realização da tarefa pelos alunos. O trabalho em torno de tarefas é importante, mas o envolvimento que é necessário existir no decorrer da dinamização das mesmas é fulcral. Segundo o NCTM (2007) o professor deve ter em conta:

> "Os aspetos a realçar numa dada tarefa; como organizar e orientar o trabalho dos alunos; que perguntas fazer de modo a desafiar os diversos níveis de competência dos alunos; como apoiá-los, sem interferência no seu processo de pensamento eliminando, dessa forma, o desafio". (p. 20)

Neste segundo momento, os alunos iniciam a resolução da tarefa e o professor tem a função de os acompanhar e apoiar no seu trabalho. Independentemente, da modalidade de trabalho, o professor deve assegurar-se que todos aos alunos se encontram envolvidos na resolução da tarefa (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Enquanto percorre a sala de aula e observa o trabalho que os alunos estão a desenvolver, o professor prepara o momento seguinte de aula (que consiste na discussão coletiva e sistematização de ideias), selecionando e sequenciando os trabalhos que serão apresentados (Stein et al., 2008).

O momento de exploração das tarefas sempre foi um pouco difícil de gerir, uma vez que tinha de circular pela sala, realizar conversas com os alunos para tentar compreender o modo como estavam a raciocinar, responder a eventuais dúvidas colocadas por eles e, ainda, garantir que selecionava e sequenciava as suas apresentações, de forma a garantir uma discussão coletiva produtiva. Para realizar este trabalho utilizava uma tabela para registar as estratégias e procedimentos de cálculo aparentes e enumerava-as pela ordem que pretendia que ocorresse a apresentação, de modo a ser mais fácil e rápido. No que respeita às conversas que realizava com os alunos, senti que eles tinham algumas dificuldades em expressarem o modo como pensavam. No entanto, faziam-no com mais facilidade explicando oralmente do que por escrito, daí esta opção de circular pelos diferentes grupos e questioná-los sobre o que estavam a realizar.

Relativamente à seleção e sequenciação das resoluções existiam sempre dúvidas: Será que são estas as melhores propostas? Devo apenas selecionar um único procedimento de cálculo, mesmo que os alunos recorram a números distintos? Quando devo parar as intervenções dos alunos? Na verdade embora estas dúvidas estivessem sempre presentes, ao longo das tarefas fui tendo cada vez mais certezas, uma vez que já conseguia prever melhor as estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos poderiam vir a utilizar e a ordem pela qual deveriam ser apresentadas à turma. Este momento de resolução, por vezes tinha uma duração mais prolongada do que a planeada, pois existiam sempre alunos que necessitavam de mais tempo para terminarem as tarefas. Para iniciar as discussões coletivas procurava que a maioria da turma já tivesse terminado as suas resoluções.

Discussão e Sistematização da tarefa. Após a realização da tarefa ocorre este último momento de aula, que consiste na comunicação entre os intervenientes, com o intuito de partilhar ideias e modos de pensar que podem ser distintos, possibilitando assim o desenvolvimento de capacidades relacionadas com a comunicação matemática e o poder de reflexão e argumentação, face a um determinado pensamento (Canavarro, 2011).

Devo, no entanto, referir que a comunicação matemática, não ocorre apenas nos momentos de discussão coletiva, mas também quando os alunos comunicam entre si e com os colegas nos restantes momentos de aula. No entanto, neste momento e aquando da partilha de ideias poderão surgir novas ideias matemáticas ou serem esclarecidos conceitos anteriormente aprendidos, daí a ideia de sistematização. Para além disso, devem ser colocadas questões e ser apresentados argumentos sobre o que se está a ouvir, procurando desta forma negociar-se significados para as ideias expostas. No final da discussão é crucial que a turma reconheça "os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos, [estabeleça] conexões com as aprendizagens anteriores e, [reforce] os aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais (...)" (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p. 34). Perante este ambiente os alunos sentem-se motivados e predispostos a explicarem os seus raciocínios, sendo este um momento propício para o professor aceder ao modo como os alunos resolveram as tarefas e, também, um momento, para que, alunos e professor se consciencializem de algumas dificuldades e incompreensões que possam existir acerca de conceitos ou processos matemáticos.

Neste momento o grande desafio para o professor consiste na gestão das diferentes intervenções dos alunos e na orquestração da discussão coletiva (Stein et al., 2008). Sem dúvida que me senti angustiada em várias tarefas neste último momento. Por vezes, os alunos interagiam 'demasiado' e colocavam questões aos colegas que nada estavam relacionadas com o trabalho de sala de aula. Noutras situações existiam alunos que, quando terminavam a resolução da tarefa, 'desligavam' por completo começando a perturbar. No entanto, com as devidas chamadas de atenção, os alunos foram compreendendo a importância de estarem atentos e de participarem.

Para que os professores possam preparar a sua prática, no que respeita ao momento de orquestração de discussão coletiva produtiva, Stein et al. (2008) propõem um conjunto de cinco práticas: *antecipar*, *monitorizar*, *selecionar*, *sequenciar* e *estabelecer*.

A prática *antecipar*, diz respeito, à previsão, por parte do professor dos diferentes modos de resolução da tarefa (Stein et al., 2008). Na minha prática letiva antecipava as diferentes estratégias e procedimentos que os alunos poderiam utilizar após a planificação de cada uma das tarefas. Esta antevisão era realizada por mim e, por vezes, discutida com a minha colega de estágio, por considerar que assim poderia enumerar um maior número possível de estratégias e procedimentos de cálculo.

A prática *monitorizar* está relacionada com o trabalho a realizar em sala de aula, mais concretamente com a observação do trabalho que os alunos realizam (Stein et al., 2008). Durante a realização das tarefas fui circulando pela sala, de modo a compreender o que os alunos estavam a fazer, que tipo de estratégias e procedimentos estavam a utilizar, as dificuldades que estavam a sentir, etc. Este contacto com os alunos permitia-me registar dados sobre os seus modos de pensar e preparar os momentos seguintes da aula.

A prática *selecionar* advém da prática anterior, uma vez que é ao estabelecer um contacto 'direto' com os alunos, que o professor toma a decisão de quais as estratégias e respetivos procedimentos de cálculo a apresentar. É importante realçar que esta seleção deve ser ponderada, pois o professor deverá ter em conta os objetivos estabelecidos para a aula (Stein et al., 2008). Neste momento de seleção utilizei sempre uma tabela, onde constavam os nomes dos alunos, as estratégias e procedimentos utilizados por todos eles, de modo a que pudesse, rapidamente, observar todas as estratégias e procedimentos existentes e, consequentemente, selecionar as que pretendia que fossem apresentadas e discutidas. As minhas preocupações na seleção das estratégias eram distintas, nomeadamente, procurava que fossem apresentadas estratégias e procedimentos de cálculo diferentes.

A prática *sequenciar* está relacionada com a ordem pela qual as resoluções dos alunos são apresentadas (Stein et al., 2008). Na minha prática tive sempre uma intencionalidade, que consistia na sequenciação das resoluções partindo das que considerava menos eficazes para as mais eficazes, como tal, existiam sempre diferentes estratégias para serem apresentadas.

Por fim, *estabelecer conexões* consiste no estabelecimento de relações entre as diferentes resoluções apresentadas pelos alunos, bem como a sistematização de ideias matemáticas (Stein et al., 2008). O professor é quem salienta as possíveis conexões, no entanto, este trabalho deve ser realizado em 'comunhão' com os alunos, para que estes se apropriem mais facilmente destas conexões. Na minha prática procurei resumir as ideias apresentadas pelos diferentes alunos e, concluir quais as estratégias e procedimentos utilizados mais eficazes.

4.1.2. Desenvolvimento de uma determinada cultura de sala de aula

Para compreender o modo como os alunos raciocinam e resolvem as tarefas que lhes são propostas é necessário que o professor crie uma cultura de sala de aula que favoreça a comunicação, a inquirição e a negociação e discussão (NCTM, 2007). O desenvolvimento da comunicação matemática está associado a uma cultura de sala de aula onde os alunos são incentivados "a exporem as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas (…) [os alunos devem também] explicar adequadamente os seus raciocínios e apresentar as suas conclusões de forma clara" (ME, 2013, p. 5). Em qualquer sala de aula existe uma cultura instituída e o que a determina é o tipo de tarefas que o professor propõe e valoriza, as interações existentes entre alunos e professor, bem como os papéis que cada um desempenha (Delgado, 2013).

Tendo em conta, as características do ensino exploratório, a cultura de sala de aula a ser construída deve reger-se por normas em que os alunos sejam motivados e encorajados a explicar o modo como pensam e a exporem e justificarem os seus raciocínios, comunicando ideias e conceitos matemáticos (Mestre & Oliveira, 2008). Ao ser criada esta cultura de sala, onde "alunos e professor [estão] atentos ao pensamento e raciocínio uns dos outros", estamos perante "membros pertencentes a uma comunidade matemática" (Sousa, 2005, p. 36). Para que exista um ambiente de cordialidade entre os diferentes intervenientes aquando de diferentes intervenções é necessário que seja instituído um conjunto de normas. Segundo Boavida (2005) as normas surgem no decorrer de diferentes interações e são criadas e modificadas sempre que se considere necessário.

Na acessão de Yackel e Cobb (1996) as normas que são instituídas em comunidades matemáticas designam-se por *normas sociais* e *normas sociomatemáticas*.

As normas sociais são aquelas que regem as interações entre os diferentes intervenientes na sala de aula. No caso concreto de salas em que a comunicação e a discussão de ideias são valorizadas, as normas sociais são entendidas como as que "valorizam a explicação e justificação, as tentativas de encontrar sentido em ideias apresentadas por outros, a indicação de acordo ou descordo e a discussão de alternativas relativas a interpretações e soluções" (Boavida, 2005, p. 102). Por sua vez, as normas sociomatemáticas focam-se "em aspetos normativos das discussões matemáticas específicos da atividade matemática dos alunos" (Yackel & Cobb, 1996, p. 461). Assim sendo, entre as normas sociomatemáticas estão os diferentes modos de pensar acerca de um mesmo problema. A negociação e o cumprimento destas normas podem facilitar a reorganização das crenças e valores relativamente ao significado de fazer Matemática e o desenvolvimento pessoal dos alunos, proporcionando uma maior "autonomia intelectual" (Boavida, 2005, p. 103).

No contexto em que este estudo se desenvolveu foi complicado criar uma cultura de sala de aula que tivesse por base os princípios apresentados, pois os alunos não estavam habituados a envolver-se na discussão de tarefas. Inicialmente, para além das dificuldades em explicar o que pretendia que os alunos escrevessem sem lhes dizer concretamente o que tinham de registar, também foi muito difícil envolver os alunos num processo de comunicação interativa, uma vez que estavam habituados a terminar uma tarefa e a corrigirem-na no quadro, onde apenas era escrita uma resolução. Com o passar do tempo os alunos indiciaram mais facilidade em explicarem os seus raciocínios, em questionarem-se uns aos outros e em justificarem as suas opções.

As normas estabelecidas com os alunos basearam-se, essencialmente, em: escutar os colegas, falar um de cada vez, colocar o dedo no ar e, esperar pela sua vez para fazerem algum comentário ou questão. Foi sendo necessária a criação de novas normas, tais como: explicar o modo como pensaram, discutirem entre si modos de pensar, apresentar os seus resultados aos colegas e questioná-los.

O meu objetivo foi desenvolver uma cultura de sala de aula que se centrasse nos alunos, na qual eles fossem os 'atores principais', procurando envolvê-los na resolução e discussão de tarefas, bem como na argumentação das suas escolhas. Apesar de terem sido apenas nove semanas parece-me que, nas últimas tarefas dinamizadas, os alunos se sentiram mais ativos e construtores do seu próprio conhecimento.

4.2. Tarefas

4.2.1. A escolha e a planificação das tarefas

Canavarro e Santos (2012) consideram que as tarefas "são um elemento fundamental que muito marcam as possibilidades de aprendizagem matemática dos alunos" (p. 102), como tal, é importante que os professores se preocupem com alguns as tarefas que pretendem dinamizar com os seus alunos. Quando o professor seleciona uma determinada tarefa, determina o 'veículo de condução' da sua aula, pois é através da tarefa que este explora com os alunos que surgem as ideias e conceitos matemáticos (Watson & Mason, 2007). Perante uma perspetiva de ensino que valoriza os alunos, como sendo construtores do seu próprio conhecimento, as tarefas representam, assim, um "elemento organizador da atividade de quem aprende" (Ponte, 2014, p. 14).

Ao escolher as tarefas o professor deve ter sempre em conta o conhecimento que tem dos seus alunos, pois é através da resolução de tarefas que os alunos evidenciam as suas capacidades e desenvolvem competências matemáticas (NCTM, 2007). Em contrapartida, a compreensão do modo como os alunos pensam, bem como as dificuldades que estes evidenciam quando resolvem tarefas permite ao professor ter perceção do tipo de tarefas que posteriormente lhes pode propor (Canavarro & Santos, 2012).

Segundo Kraemer (2008) o professor deve planificar o trabalho a realizar com os seus alunos tendo em conta uma trajetória hipotética de aprendizagem. Este autor entende por trajetória hipotética de aprendizagem um conjunto de intenções que advêm do trabalho de planificação do professor. Na sua perspetiva, o professor planifica uma trajetória hipotética de aprendizagem quando: (i) antevê o que é possível de os alunos aprenderem num determinado momento, tendo em conta aquilo que já conhecem; (ii) seleciona ou cria determinadas tarefas de um modo encadeado, para que os alunos possam atingir os objetivos estabelecidos à partida; e (iii) explicita o que os alunos deverão aprender e como isso irá acontecer, relacionando aspetos teóricos e metodológicos.

As planificações das tarefas realizadas no âmbito deste estudo eram delineadas a cada semana, ou seja, juntamente com a minha colega de estágio e com a professora cooperante combinávamos a cada quarta-feira os conteúdos a lecionar na semana seguinte. Desta forma, ao ter conhecimento dos conteúdos a lecionar propunha a dinamização de uma determinada tarefa. Na planificação dessas tarefas identificava os objetivos que lhes estavam subjacentes embora, no seu conjunto, as tarefas não tenham sido pensadas tendo em conta os seus objetivos, globalmente. Por esta razão, considero que não planifiquei tendo em conta, uma trajetória hipotética de aprendizagem, uma vez, que me centrava nos conteúdos a lecionar e não nos objetivos de aprendizagem tal como são entendidos por Kraemer (2008). Apesar de reconhecer a sua importância e de ter tentado dinamizar as tarefas de modo encadeado e, tendo em conta os objetivos de aprendizagem, considero que não consegui planificar o ensino numa perspetiva de construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem.

Ainda assim, nas tarefas que fui propondo aos alunos, procurei sempre ter em conta: (i) os conteúdos a lecionar, uma vez que a realização das tarefas teria de ser orientada nesse sentido (cumprimento dos conteúdos estipulados); (ii) os conhecimentos que os alunos detinham, por forma a proporcionar-lhes tarefas desafiadoras; (iii) as suas motivações e interesses, pois era essencial que estivessem empenhados no trabalho que estavam a desenvolver; e (iv) tarefas potenciadoras de discussões coletivas produtivas. De forma a atender a estes aspetos, ao selecionar cada uma das tarefas, valorizei os seguintes aspetos: os contextos das tarefas, os números envolvidos e a diversidade de estratégias e procedimentos de resolução.

Como foi referido anteriormente, as tarefas realizadas centraram-se apenas no tema dos Números e Operações, pois os conteúdos planificados pela professora cooperante para o período em que este estudo se desenvolveu pertenciam apenas a este tópico curricular. As tarefas dinamizadas surgiram de diferentes fontes.

À exceção da primeira tarefa, que foi criada por mim, todas as outras foram adaptadas de materiais construídos por profissionais da área da Matemática, tais como: a Brochura "Números e Operações do 3.º ano " (Mendes, Brocardo, Delgado & Gonçalves, 2010) e um documento de apoio à implementação do Programa de Matemática do 1.º ciclo (2009), elaborado por grupos de trabalho no âmbito da experimentação do novo programa. Na tabela 6 consta o nome de cada uma das tarefas propostas, a data em que foram realizadas e a sua fonte.

Tabela 6 – Nome, data e fonte das tarefas realizadas

Nome	Data	Fonte
Pacotes de Leite	19/11/2014	Criada por mim
Azulejos	25/11/2014	Retirada da brochura "Números e Operações 3.º ano"
Construção da tabuada do 3	02/12/2014	Adaptada da brochura "Números e Operações 3.º ano"
Receita de bolo-rei	06/01/2015	Adaptada de um documento de apoio à implementação do Programa de Matemática do 1.º ciclo (2009)

4.2.2. As características das tarefas do projeto

Na seleção das tarefas tentei ter em conta dois aspetos. Um relaciona-se com o tipo de tarefa e, outro, com as características dos contextos das tarefas.

No seu quadro organizador dos diferentes tipos de tarefas, Ponte (2005), classifica os problemas como tarefas fechadas cujo nível de desafio é elevado. Este autor defende que as tarefas de nível de desafio elevado, como é o caso dos problemas, são importantes, uma vez que, possibilitam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Efetivamente, a resolução de problemas "constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática" (NCTM, 2007, p. 57). Ao resolverem problemas os alunos adquirem "modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática" (NCTM, 2007, p. 57).

No âmbito deste estudo foram propostas quatro tarefas. Considero que as tarefas 1, 2 e 4 são problemas. A tarefa 3 apresenta uma natureza distinta, não só pelo seu modo de exploração (grupo turma), como pelas suas características. Efetivamente, esta tarefa pode ser encarada como uma proposta de cálculo de diferentes produtos, constituindo-se alguns deles um problema para os alunos desta turma.

No que respeita aos contextos das tarefas, tentei seguir as ideias de Fosnot e Dolk (2001a, 2001b). Assim, propus tarefas que incluíssem imagens às quais estão associadas modelos e situações que fizessem sentido para os alunos e atendi aos números envolvidos.

As situações associadas ao contexto das tarefas revelaram-se uma preocupação ao longo de todo o processo, pois considerei que ao contextualizar uma tarefa com uma situação do quotidiano dos alunos me possibilitaria tê-los mais envolvidos e interessados na resolução da mesma. Considero que consegui contextualizar todas as tarefas com situações do seu quotidiano, com a exceção da tarefa 'Construção da tabuada do 3'. Esta tarefa partiu de um contexto puramente matemático, e por isso, na sua apresentação não consegui contextualizá-la com algo do quotidiano dos alunos.

A razão pela qual adaptei a maioria das tarefas esteve relacionada com os números envolvidos, pois considerava-os inadequados para os alunos em questão, uma vez que estes estavam habituados a aprenderem os números de um em um, e de forma gradual. Desta forma senti necessidade de adaptar os números envolvidos nas tarefas, para que, os alunos pudessem manipulá-los sem 'grandes' dificuldades, garantindo simultaneamente, que esses mesmos números suscitavam diferentes estratégias e procedimentos de cálculo.

Desta segunda preocupação advém uma outra, pois era imprescindível que os alunos recorressem a diferentes estratégias e procedimentos de cálculo, uma vez que, o objetivo deste estudo consiste na análise dessas mesmas estratégias e procedimentos. Desta forma, era importante propor tarefas cuja sua resolução pudesse ser efetuada com recurso a diferentes estratégias. Uma das formas de eu conseguir perceber isto mesmo era quando antecipava a resolução das tarefas pois, ao fazê-lo, tinha noção se seria uma tarefa rica. Subjacente à diversidade de estratégias surge a última preocupação que consiste na dinamização de discussões coletivas produtivas. O grande objetivo das discussões coletivas era os alunos 'confrontarem-se' com diferentes estratégias perante a resolução da mesma tarefa, podendo, assim serem estabelecidas conexões entre elas e os números envolvidos.

4.2.3. As tarefas de multiplicação propostas

Antes de apresentar cada uma das tarefas propostas no âmbito deste estudo, considero pertinente relatar como foi introduzida a aprendizagem da operação multiplicação na turma.

Uma vez estabelecidos os conteúdos a lecionar nessa semana, juntamente com a minha colega de estágio decidimos propor uma tarefa relacionada com uma temática que estávamos a desenvolver com os alunos, na área de Expressão e Educação Plástica. Na semana anterior, os alunos tinham votado em várias técnicas de pintura para trabalharem nas semanas seguintes. Como tal, decidimos propor-lhes uma tarefa, cujo contexto estava relacionado com um quadro pintado pelo artista plástico escolhido (Romero Britto).

O intuito da tarefa era determinar o número de peixes que constavam no papel de parede exposto numa sala de estar (fig. 2). Os alunos tinham de observar a figura, determinar o número de peixes e, posteriormente e em voz alta, teriam de explicar como calcularam. Como prevíamos que os alunos iriam recorrer a contagens adicionando sucessivamente diferentes números, pretendíamos transmitir-lhes a ideia de que a operação multiplicação consiste nisso mesmo, numa, operação que resulta da adição sucessiva de parcelas iguais. E, portanto, calcularmos 10+10+10=30 é o mesmo que calcularmos 3x10, uma vez que se tratam de 3 grupos com 10 peixes cada um. Devo também realçar que utilizamos de forma propositada o número 10, pois é um número de referência para os alunos, e de alguma forma é facilitador de cálculos.

Figura 2 – Tarefa introdutória da operação multiplicação

Finda, a descrição da tarefa introdutória da operação multiplicação, passo a apresentar cada uma das tarefas realizadas no âmbito deste estudo, tendo em conta, os objetivos de cada uma delas e alguns aspetos inerentes à sua escolha.

Tarefa 1: Pacotes de Leite

A tarefa 'Pacotes de leite' (Anexo 1) foi proposta na semana seguinte à introdução da operação multiplicação. Decidi partir de uma situação do quotidiano dos alunos e, propus-lhes que determinassem o número de pacotes que constam na palete de leite escolar, que todos os dias está na sala e da qual retiram o leite para o seu lanche. Tal como a tarefa anterior, o contexto desta tarefa estava associado à estrutura retangular. Desta forma, pretendia que os alunos reconhecessem situações de multiplicação que partissem da disposição retangular de objetos, nomeadamente, dos pacotes de leite. A este problema estava associada uma única questão (fig. 3).

"Quantos pacotes de leite estão nesta palete?" Explica como pensaste!

Figura 3 – Enunciado da tarefa 1

Para resolverem a tarefa os alunos poderiam recorrer a três estratégias distintas: estratégias de contagem, estratégias aditivas e estratégias multiplicativas. Apesar desta última estratégia ser a que se pretendia que os alunos utilizassem em maior número, seria algo que *a priori* se antevia que não iria acontecer, pois teriam de utilizar procedimentos de cálculo associados à multiplicação que ainda não estavam desenvolvidos, nomeadamente, a utilização de produtos conhecidos.

Ao planificar esta tarefa tive em conta que o modelo retangular permite aos alunos iniciar a contagem de objetos por grupos, ou seja, neste caso em concreto, era-lhes possível efetuar contagens, tendo em conta, o número de pacotes segundo a sua disposição por linhas ou colunas.

Tarefa 2: Azulejos

A tarefa 'Azulejos' (Anexo2) foi retirada da "Brochura Números e Operações – 3.º ano" da autoria de Mendes, Brocardo, Delgado e Gonçalves (2010). Apesar de constar nesta brochura destinada ao 3.ºano, considerei a tarefa adequada para o grupo de alunos, uma vez que os conteúdos aqui envolvidos correspondem aos que o atual Programa de Matemática do 1.º ciclo designou para o 2.º ano de escolaridade.

A tarefa original é composta por duas grandes partes. No entanto, com estes alunos, decidi resolver apenas a primeira parte da tarefa. Esta primeira parte é composta por três questões distintas, às quais designei subtarefas.

A opção de apenas resolver a primeira parte da tarefa original, prendeu-se pelo facto de necessitar de mais tempo do que aquele que poderia utilizar para a sua realização, e posterior discussão. Assim, tomei a decisão de propor aos alunos a resolução de cada uma das subtarefas (figs. 4, 5, 6) e a sua discussão de forma individualizada, num período total de 90 minutos.

Subtarefa 1

Quantos azulejos já colocou o Sr. António? Como descobriram?

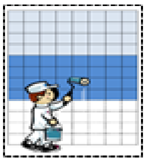


Figura 4 – Enunciado da subtarefa 1, da tarefa 2 – Azulejos

Subtarefa 2

Quantos azulejos faltam colocar? Expliquem como pensaram!

Figura 6 – Enunciado da subtarefa 2, da tarefa 2 – Azulejos

Subtarefa 3

Quando terminar a parede, quantos azulejos terá colocado o Sr. António? Expliquem como pensaram!

Figura 5 – Enunciado da subtarefa 2, da tarefa 2 – Azulejos

À semelhança da tarefa proposta na semana anterior, também esta partia de um contexto associado ao modelo retangular, como tal os alunos poderiam utilizar diferentes estratégias de cálculo, nomeadamente, associadas à multiplicação.

Assim, estabeleci como objetivo: reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação contando o número de objetos colocados numa malha retangular e, verificando que é igual ao produto, por qualquer ordem, do número de linhas pelo número de colunas.

Para além da constatação da propriedade comutativa da multiplicação, para a resolução da primeira questão os alunos poderiam recorrer ao dobro ao verificarem que se tratavam de 2x32.

Ao propor esta tarefa composta por três subtarefas e, consequentemente, diferentes momentos de discussão coletiva, tinha intenção que os alunos averiguassem que as estratégias multiplicativas seriam as mais eficazes e assim, 'abandonassem' o uso tendencial de utilizarem estratégias aditivas.

Tarefa 3: Construção da tabuada do 3

Tal como o nome indica, esta tarefa foi dinamizada com o intuito de os alunos aprenderem e compreenderem a tabuada do 3. Foi uma tarefa diferente de todas as outras, uma vez que foi realizada em grande grupo e, na qual, tive uma participação mais ativa no momento de exploração.

Ao planificar esta tarefa pretendia que os alunos construíssem, compreendessem e, posteriormente memorizassem a tabuada do 3. Realço que a construção desta tabuada deveria ter em conta, o estabelecimento de relações numéricas entre os produtos das expressões numéricas (fig. 7).

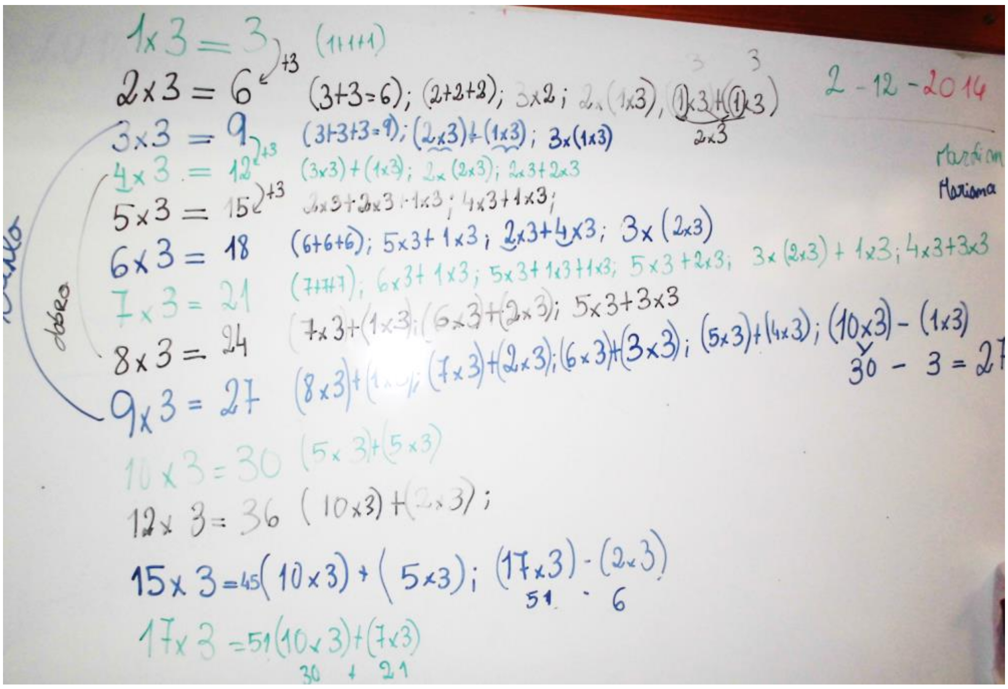


Figura 7 – Resultado da construção da tabuada do 3

Ao propor a criação da tabuada em grande grupo, de modo a que todos pudessem participar e partilhar ideias, estratégias e procedimentos de cálculo, pretendia que os alunos percebessem que, primeiramente, deveriam procurar relações entre os diferentes números e expressões numéricas, de forma a calcularem produtos, e só depois de adquirida esta destreza é que deveriam procurar memorizar a tabuada. Na criação desta tabuada pretendia que os alunos usassem algumas propriedades da multiplicação, nomeadamente, a propriedade distributiva e comutativa da multiplicação. Os alunos poderiam ainda recorrer a procedimentos de cálculo que evidenciassem relações de dobro.

Subjacente a estas ideias pretendia ainda, que os alunos tivessem noção que as tabuadas não findam no número 10, ou seja, no ‘10 vezes qualquer coisa’, por essa razão propus-lhes a construção da tabuada com produtos maiores, como por exemplo, 17x3.

Tarefa 4: Receita de bolo-rei

Esta última tarefa foi dinamizada no Dia de Reis e, como tal, resolvi partir de um contexto relacionado com este dia festivo. Ao contactar com um documento de apoio à implementação do Programa de Matemática do 1.º ciclo (2009), da autoria do Ministério da Educação encontrei esta tarefa e decidi adaptá-la.

A tarefa ‘Receita de bolo-rei’ (Anexo 3) foi realizada a pares e o intuito era que os alunos, perante o enunciado e as imagens que o acompanhavam respondessem a quatro questões. Designei por subtarefa, cada uma destas questões (figs. 8, 9, 10, 11).

Subtarefa 1


RECEITA DE BOLO-REI

4 Chávenas de farinha
2 Colheres de sopa de fermento
1 Colher de sopa de sal
4 Ovos
4 Chávenas de açúcar
5 Colheres de sopa de margarina
2 Colheres de sopa de frutos secos

1. No Dia de Reis a mãe da Susana vai fazer bolo-rei para vender. Consegues ajudá-la a descobrir que quantidade de cada ingrediente vai precisar para fazer dois bolos? Discute com o teu colega e explica como pensaram!

Figura 8 – Enunciado da subtarefa 1, da tarefa 4 – Receita de bolo-rei

Subtarefa 2

E para fazer três bolos, que quantidade de cada ingrediente precisa? Discute com o teu colega!

Figura 9 – Enunciado da subtarefa 2, da tarefa 4 – Receita de bolo-rei

Subtarefa 3

2. Observa a imagem. Sabendo o preço de cada bolo, quanto dinheiro ganhará a mãe da Susana se vender dois bolos?

Figura 10 – Enunciado da subtarefa 3, da tarefa 4 – Receita de bolo-rei

Subtarefa 4

Se vender três bolos, quanto ganhará a mãe da Susana? Expliquem como pensaram!

Figura 11 – Enunciado da subtarefa 4, da tarefa 4 – Receita de bolo-rei

Esta tarefa envolvia cálculos, por forma, a determinar quantidades de ingredientes para a confeção de bolo-rei e cálculos com dinheiro.

As subtarefas 1 e 2 induziam os alunos a utilizarem estratégias multiplicativas recorrendo, particularmente, à relação de dobro e de triplo, uma vez que teriam de calcular a quantidade de ingredientes necessários para confecionar dois e três bolos. Quanto às subtarefas 3 e 4, os alunos deveriam também reconhecer que para calcularem o preço de dois bolos poderiam calcular 2x15 e, portanto, recorriam ao dobro de 15 e para calcularem o preço de três bolos recorriam ao triplo de 15.

O intuito desta tarefa era que os alunos utilizassem e compreendessem a noção de dobro e de triplo. Para tal, deveriam recorrer às tabuadas construídas e memorizadas anteriormente (tabuada do 2 e do 3), mais concretamente às diferentes expressões numéricas e respetivos produtos.

Capítulo V – Análise de dados

Este capítulo corresponde à análise dos dados recolhidos. Na primeira secção apresento e caraterizo as estratégias e os procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação. Esta secção encontra-se estruturada em quatro subsecções, que correspondem às tarefas propostas no âmbito deste estudo, seguindo a ordem da sua exploração na sala de aula. Relativamente a cada tarefa, é feita uma breve descrição, tendo em conta os três momentos que marcaram a exploração das tarefas: apresentação, realização da tarefa pelos alunos e discussão/sistematização. A análise das estratégias e dos procedimentos é organizada a partir das resoluções que foram selecionadas para serem apresentadas no momento de discussão/sistematização, recorrendo quer às suas produções, quer a episódios de sala de aula. Sempre que identifico diferentes estratégias e/ou procedimentos usados por outros alunos da turma, daqueles que foram selecionados nos momentos de discussão, a respetiva análise é realizada no final das resoluções anteriores. Cada subsecção termina com uma síntese de todas as estratégias e procedimentos usados pelos alunos na respetiva tarefa.

Na segunda secção descrevo e analiso as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução das tarefas propostas no âmbito deste estudo.

5.1. Estratégias e procedimentos de cálculo

5.1.1. Tarefa 1 – Pacotes de leite

Na exploração de esta primeira tarefa estiveram envolvidos 18 alunos.

Num primeiro momento apresentei a tarefa aos alunos, e informei-os sobre a modalidade de trabalho que decidi adotar. Após a leitura do enunciado, os alunos questionaram-me sobre o mesmo e dei-lhes as explicações necessárias para a sua resolução.

A resolução da tarefa foi feita individualmente, pois pretendia conhecer e compreender o modo como cada um dos alunos iria pensar e resolver a tarefa.

No momento de resolução da tarefa, cada um dos alunos resolveu a tarefa e efetuou os seus registos, no entanto, por vezes compreendi que trocaram impressões com o seu parceiro. Enquanto os alunos resolviam a tarefa circulei pela sala de modo a compreender o trabalho que estavam a realizar e, consequentemente, selecionar e sequenciar as produções a serem apresentadas e discutidas coletivamente.

Para a última fase da aula, que corresponde à discussão e sistematização da tarefa foram selecionados quatro alunos, tendo assim estado patentes as diferentes estratégias/procedimentos utilizados pelos alunos da turma.

A discussão começou com a apresentação de uma aluna que recorreu a uma estratégia de contagem, seguidamente existiram dois alunos que apresentaram estratégias aditivas e, no final existiu um aluno que apresentou uma estratégia multiplicativa. Durante este momento, os alunos explicaram aos colegas o modo como tinham resolvido a tarefa e responderam a questões que lhes foram colocadas.

A exploração desta tarefa teve a duração de 60 minutos, incluindo os diferentes momentos de aula.

Estratégias de contagem

Na resolução desta tarefa, Constança parece recorrer a uma estratégia de contagem utilizando um procedimento de contar de um em um, de modo a contabilizar o número de pacotes de leite. Apesar de registar 20+7=27 (fig. 12), Constança escreve na sua folha de registo que efetuou contagens de um em um e, durante o momento de discussão coletiva, a aluna explicita o procedimento de cálculo utilizado, tal como mostra o seguinte excerto.

> **Constança:** Fiz 20 mais 7 é igual a 27. Primeiro contei até 20 e depois parei e escrevi, depois contei os outros que eram 7, por isso é que fiz 20 mais 7.

(Discussão coletiva da tarefa 1 – Pacotes de leite; 19-11-14)

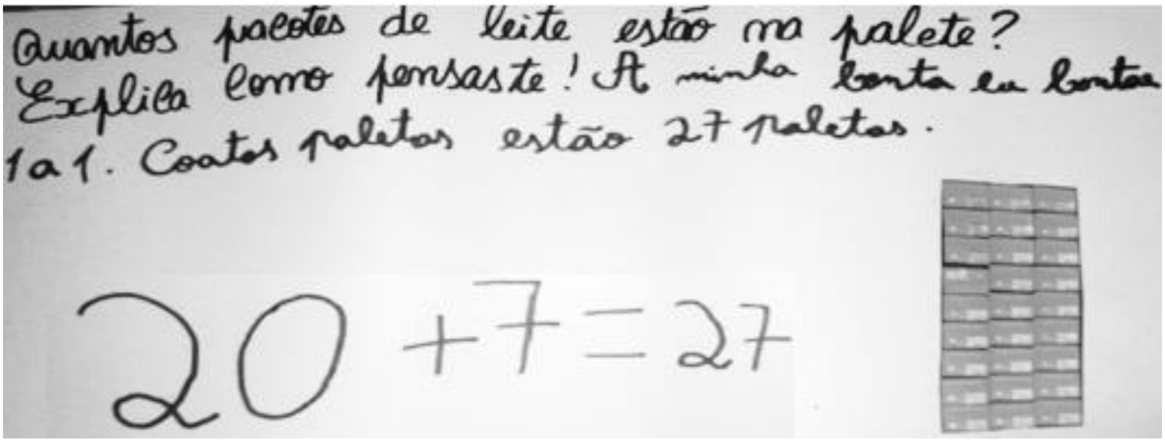


Figura 12 – Resolução de Constança da tarefa 1

Efetivamente, Constança recorre a uma estratégia de contagem dos pacotes de leite fazendo-o em dois momentos. Primeiro a aluna conta até 20 e regista este número, e depois contabiliza os restantes 7.

Estratégias Aditivas

Na resolução desta tarefa a maioria dos alunos recorreu a estratégias aditivas tendo, no entanto, utilizado diferentes procedimentos de cálculo. Foram selecionados e discutidos os registos de dois alunos, Renato e Diana.

Renato parece recorrer a um procedimento de adição sucessiva, uma vez que, para contabilizar o número de pacotes de leite, o aluno adiciona sucessivamente o número 3 que corresponde aos pacotes que se encontram em cada linha, segundo a disposição retangular (fig. 13). Ao apresentar o seu trabalho, o aluno refere que:

> **Renato**: Eu fiz uma conta de 3 em 3 e vi quanto dava. Contei os pacotes que estavam na horizontal.

(Discussão coletiva da tarefa 1 – Pacotes de leite; 19-11-14)

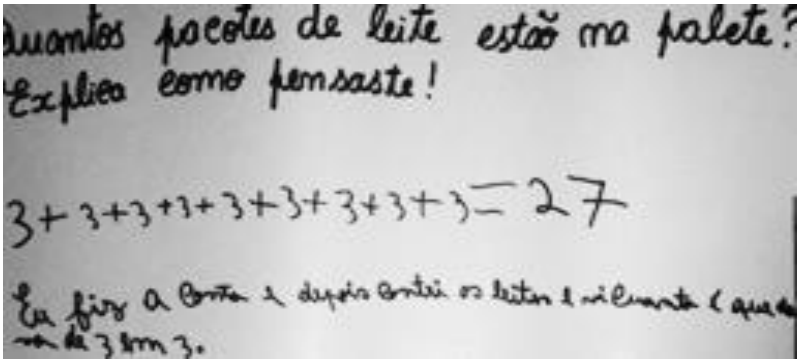


Figura 13 – Resolução de Renato da tarefa 1

O aluno adiciona sucessivamente o número 3 e calcula o valor da soma, ou seja, o número total de pacotes de leite. Para efetuar cálculos, o aluno escreve apenas a expressão aditiva e a respetiva soma numa única expressão horizontal.

Por sua vez, Diana apesar de ter utilizado uma estratégia aditiva, resolveu a tarefa de uma outra forma. Para calcular o número de pacotes de leite, a aluna utiliza um procedimento distinto (fig.14).

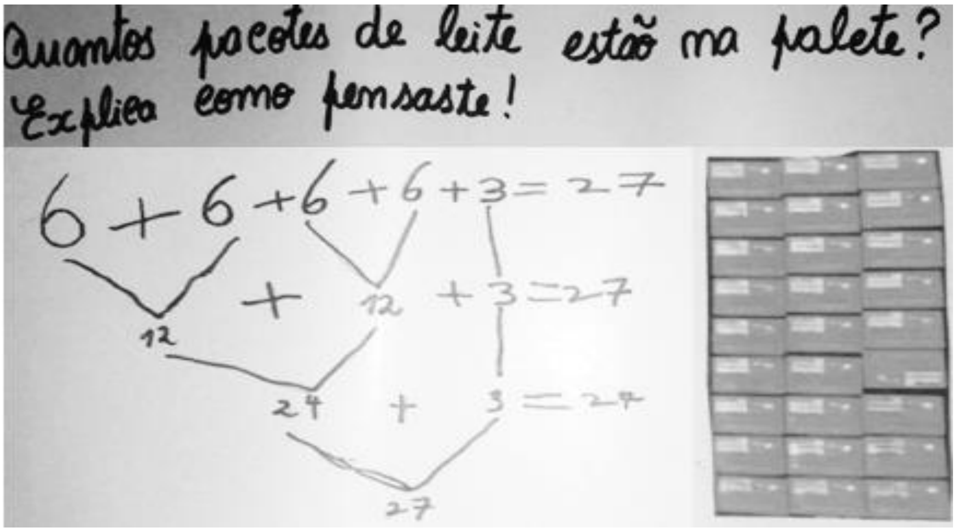


Figura 14 – Resolução de Diana da tarefa 1

O excerto seguinte diz respeito à explicação dada por Diana, no momento de discussão coletiva.

> **Diana:** Eu fiz 6 mais 6 mais 6 mais 6, como vi que não dava para fazer mais 6 fiz mais 3, porque eram os pacotes que sobravam.
>
> **Eu:** Mas de onde vêm estes 6 mais 6 mais 6 mais 6 mais 3?
>
> **Diana:** (Recorrendo à imagem exposta no quadro) Contei de duas em duas linhas e depois sobrou-me só uma linha com três pacotes.
>
> (Discussão coletiva da tarefa 1 – Pacotes de leite; 19-11-14)

Neste excerto, Diana explicita que contou de duas em duas linhas, adicionando o número de pacotes de leite dessas linhas, no entanto, quando confrontada com a sobra de uma linha, a aluna adiciona os restantes 3 pacotes.

Relativamente, ao procedimento de cálculo este corresponde a adicionar de dois a dois. Tal como se pode observar na fig. 14, e constatar no excerto seguinte, a aluna agrupa as parcelas duas a duas e calcula a sua soma.

Diana: Depois juntei os dois 6 e deu-me 12, depois juntei os outros dois 6 e deu-me 12. Fiz 12 mais 12 igual a 24, e juntei o 3 e deu 27.

(Discussão coletiva da tarefa 1 – Pacotes de leite; 19-11-14)

Estratégias Multiplicativas

Existiu apenas um aluno, Lucas, que recorreu a uma estratégia multiplicativa para resolver a subtarefa. Este aluno parece ter utilizado este tipo de estratégia, pois na sua folha de registo escreveu apenas a igualdade multiplicativa, sem apresentar quaisquer cálculos (fig.15).

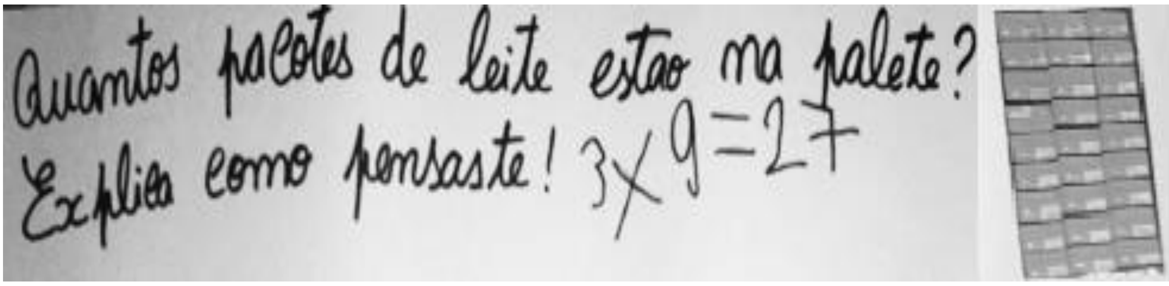


Figura 15 – Resolução de Lucas da tarefa 1

No momento de discussão coletiva, Lucas explica aos colegas como chegou à representação daquele produto e como calculou esse mesmo produto:

Lucas: Eu fiz 3 vezes 9 igual a 27. Vi na imagem que existiam 3 filas de leite e que cada uma delas tinha 9 pacotes, e escrevi 3 vezes 9.

Íris: Mas como é que sabes que 3 vezes 9 é igual a 27?

Lucas: Eu sabia porque aprendi a tabuada do 3 com a minha mãe, mas para ver se o resultado estava correto pensei em 9 mais 9 mais 9 e calculei de cabeça.

(Discussão coletiva da tarefa 1 – Pacotes de leite; 19-11-14)

Lucas, parece usar, de facto, uma estratégia multiplicativa dado que afirma ter feito 3 vezes 9. Quanto ao procedimento de cálculo, a afirmação de Lucas confirma o uso de um produto conhecido, pois o aluno diz saber a tabuada do 3. Contudo, é de salientar que o aluno associa o produto 3x9 à tabuada do 3, dado que foi desta forma que explica ter aprendido com a mãe. Lucas parece ainda compreender a propriedade comutativa da multiplicação, pois reconhece que a ordem dos fatores não altera o produto. Como tal, para o aluno registar 3x9 ou 9x3 é o mesmo.

O trabalho realizado por Tiago não foi selecionado para discussão, no entanto, ao analisar os dados dos alunos de toda a turma verifiquei que este aluno recorreu a um procedimento de cálculo distinto dos apresentados. Este aluno parece ter utilizado uma estratégia de contagem (fig. 16).

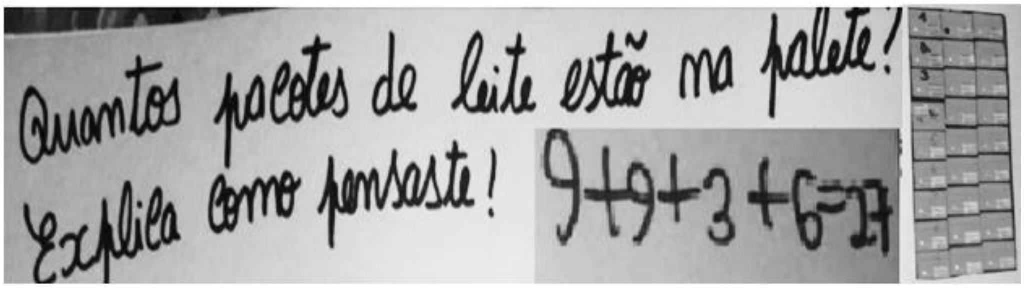


Figura 16 – Resolução de Tiago da tarefa 1

Quanto ao procedimento de cálculo utilizado, o aluno indicia um uso de contar por saltos, uma vez que as parcelas são distintas. Na imagem referente à palete de leite, pode constatar-se que o aluno numerou vários pacotes de leite, e talvez este tenha sido um princípio para a contagem do número total de pacotes. Considero tratar-se de uma contagem por saltos, pois Tiago adiciona 9+9+3+6.

Síntese

Na tabela seguinte estão quantificados os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução desta tarefa, tendo por base as produções dos alunos da turma.

Tabela 7 – Estratégias/Procedimentos utilizados pelos alunos na resolução da tarefa 1

Tarefa 1 – Pacotes de leite		
Estratégia	**Procedimento**	**Nº de alunos**
Contagem	Contar por saltos	1
	Contar de um em um	3
Aditivas	Adicionar sucessivamente	7
	Adicionar dois a dois	6
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos	1

Para além de Constança que recorreu a uma estratégia de contagem, existiram mais três alunos que o fizeram.

No que respeita às estratégias aditivas, estas foram utilizadas por 13 alunos, sendo que, os procedimentos de cálculo foram distintos. Existiram 7 alunos que recorreram a um *procedimento de adicionar sucessivamente*. Destes alunos, 4 adicionaram sucessivamente o número três e, os restantes adicionaram sucessivamente o número nove. Existiram 6 alunos que utilizaram um *procedimento adicionar dois a dois*.

Lucas foi o único aluno que utilizou uma estratégia multiplicativa, tendo recorrido a um procedimento de *usar produtos conhecidos.*

5.1.2. Tarefa 2 – Colocar azulejos

Esta tarefa foi realizada por 19 alunos. A apresentação da tarefa decorreu tal como tinha sido planeada. Inicialmente, informei os alunos da modalidade de trabalho adotada e, uma vez que iriam trabalhar a pares, decidi agrupá-los, de acordo com os lugares em que estavam sentados. A tarefa foi contextualizada como se esta fosse real, dizendo-lhes que tinha um vizinho que estava a colocar, numa parede de casa, azulejos. Mas estava preocupado, pois perdeu a noção do número de azulejos que já tinha colocado e de quantos azulejos ainda necessitava para terminar o trabalho. Perante esta 'introdução' os alunos sentiram-se desafiados e motivados. Para realizarem a tarefa utilizaram uma folha de tamanho A3 e marcadores escuros.

Esta tarefa é composta por três subtarefas. Como tal, decidi que a exploração de cada subtarefa deveria ser realizada e discutida individualmente. Assim, enquanto os alunos resolviam cada uma das subtarefas, percorri a sala de modo a selecionar e sequenciar as apresentações dos alunos.

Por terem sido realizadas três discussões, uma vez que se tratavam de três subtarefas, foi necessário mais tempo comparativamente ao que tinha sido estipulado. O facto de os alunos terem interrompido a tarefa durante algum tempo para realizarem uma rotina da sala, também fez com que nos atrasássemos e, desta forma, as duas últimas subtarefas foram realizadas e discutidas na manhã seguinte.

Na sequência da subtarefa 1, foram selecionados para o momento de discussão coletiva 10 alunos. Relativamente, à subtarefa 2 foram selecionados 9 alunos. Por sua vez, para a discussão da subtarefa 3 foram selecionados 6 alunos.

Subtarefa 1

Estratégias de contagem

Na resolução da subtarefa 1, correspondente à tarefa 2, Iara e Constança recorrem a uma estratégia de contagem, por forma a contabilizar o número de azulejos colocados. Para conseguirem calcular o total de azulejos, as alunas revelam durante a apresentação do seu trabalho à turma, o seguinte:

> **Constança:** Nós vimos que cada um dos tons de azul tinha 32 azulejos.
>
> **Eu:** E como é que viram que eram 32 e não 30 azulejos?
>
> **Iara:** Porque nós contámos de um em um. E depois ao contarmos os azulejos dos dois tons de azul chegámos ao 64.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-14)

De facto, trata-se de uma estratégia de contagem, na qual o procedimento de cálculo adotado foi contar de um em um, uma vez que as próprias alunas o referem. Como é visível nos registos que efetuaram (fig. 17), estas alunas adicionam o número de azulejos de cada uma das tonalidades de azul e verificam que se trata de 32 azulejos mais 32 azulejos, obtendo o resultado de 64 azulejos.

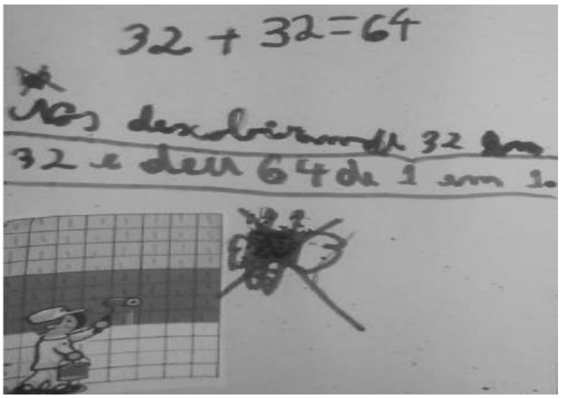


Figura 17 – Resolução de Iara e Constança, da subtarefa 1, relativa à tarefa 2

Apesar da explicação dada pelas alunas, não se compreende como é que elas efetuam o cálculo 32+32, no entanto talvez o tenham feito contando azulejo a azulejo, pois na imagem que acompanha o enunciado estão evidentes marcas de caneta que indiciam a contagem de um em um.

Assim, as alunas parecem ter contabilizando os primeiros 32 azulejos pertencentes à tonalidade mais clara e depois os restantes 32 azulejos pertencentes à tonalidade escura, seguindo o sistema de numeração.

Estratégias aditivas

Tal como aconteceu anteriormente, a maioria dos pares recorreu a estratégias aditivas para resolver a subtarefa 1. No entanto, os procedimentos utilizados para calcular o número de azulejos colocados na parede pelo Sr. António foram distintos.

Henrique e Matilde efetuaram cálculos recorrendo a uma estratégia aditiva (fig. 18). Durante o momento de discussão, os alunos referiram que:

> **Matilde:** Nós vimos a imagem e pensámos que aqui tinha oito (apontando para a imagem e referindo-se à primeira linha na horizontal). Então fizemos 8 mais 8 mais 8 mais 8 mais 8 mais 8 mais 8 mais 8.
>
> **Henrique:** E depois pensamos em 16+16+16. Esta forma era mais fácil e rápida.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-14)

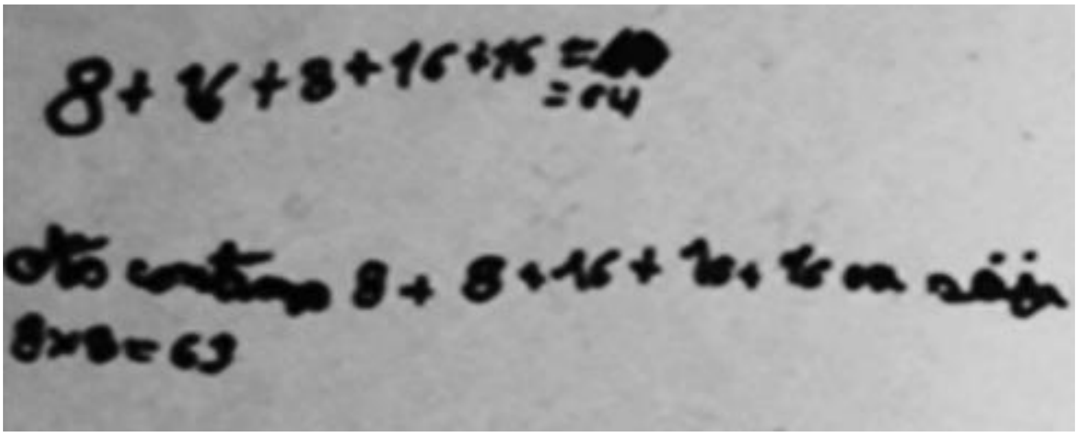


Figura 18 – Resolução de Henrique e Matilde da subtarefa 1, relativa à tarefa 2

Apesar de este par apresentar este raciocínio, na sua folha de registo (fig. 18) apresentam cálculos distintos.

Desta forma, os alunos indiciam começar por um procedimento de adição sucessiva, uma vez que, explicitam no seu discurso que adicionam sucessivamente o número 8.

Importa referir, que este número resulta do total de azulejos por cada 'linha' de acordo com a estrutura retangular. Mas, posteriormente, e através do discurso proferido por Henrique, pode verificar-se que os alunos recorrem a um procedimento de adicionar dois a dois, só que não o registam. Tal como Henrique refere, para efetuarem os cálculos, adicionam 16+16+16, resultante do agrupamento dois a dois feito com o número 8.

Também Diana e João parecem utilizar uma estratégia aditiva, mas recorrem explicitamente a um procedimento de cálculo no qual adicionam dois a dois. Estes alunos, a partir da observação da imagem, parecem ter tomado consciência de que cada linha (horizontal) era composta por oito azulejos. Assim, adicionaram o número de azulejos dessas linhas. Os cálculos foram progredindo, uma vez que os alunos foram adicionando duas parcelas de cada vez (fig. 19).

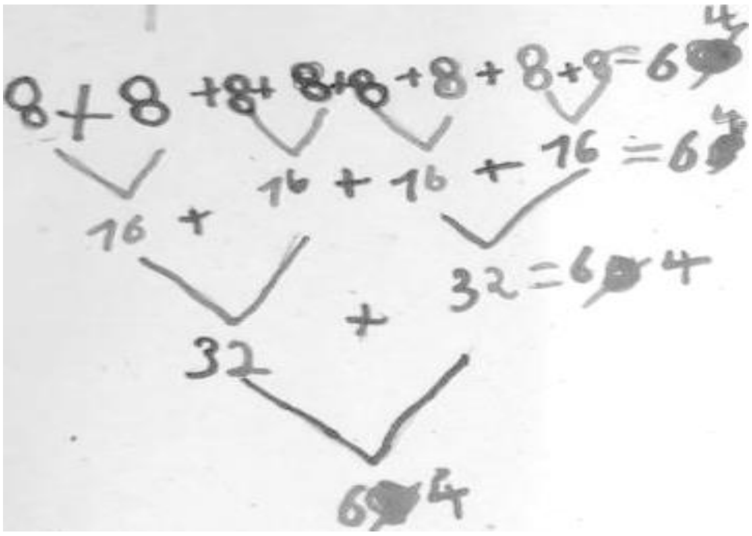


Figura 19 – Resolução de Diana e João, da subtarefa 1, relativa à tarefa 2

Ao explicarem aos colegas o modo como tinham calculado o número de azulejos colocados pelo Sr. António, os alunos referiram que:

> **João**: Nós fizemos de 8 em 8, porque contámos as linhas horizontais. Depois fizemos as contas para baixo e chegámos ao número 64.

(Discussão coletiva da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-14)

Estes alunos, para além de explicitarem o modo como pensaram também explicaram os registos efetuados. Através do seu discurso e da respetiva análise, verifica-se que os alunos utilizaram um 'esquema em árvore' para efetuarem de forma rápida e correta os seus cálculos.

Por sua vez, Íris e Salvador apresentam um raciocínio bastante curioso. Estes alunos verificaram que na malha existiam duas tonalidades de cor, e que a cada uma dessas tonalidades correspondiam 32 azulejos. Ao terem esta noção registaram que se tratavam de 2x32 azulejos. A estratégia de cálculo adotada foi explicada da seguinte forma, aos colegas:

> **Íris**: Aqui temos 32 azulejos (apontando para os azulejos azuis escuros) e aqui mais 32 azulejos (apontando para os azulejos azuis claros). Então escrevemos 2x32, porque o número 32 se repete duas vezes.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-14)

Perante este discurso, os alunos parecem evidenciar o uso de uma estratégia multiplicativa, pois reconhecem que o número total de azulejos corresponde a duas vezes o número 32. No entanto, como não conhecem a tabuada e não sabem como calcular o valor deste produto, recorrem a procedimentos de cálculo associados a estratégias aditivas assumindo que 2x32 é igual a 32+32.

Ainda na continuação do seu raciocínio, durante as explicações dadas aos colegas, este par referiu que:

> **Salvador**: Para fazermos esta conta pensámos em 3+3=6, e 2+2=4, então deu-nos 64.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-14)

Na sua folha de registos (fig. 20), os alunos registam uma representação num produto (2x32), mas como foi dito anteriormente, por não o conseguirem calcular 'abandonam' uma evidente estratégia multiplicativa e utilizam um procedimento de cálculo característico das estratégias aditivas.

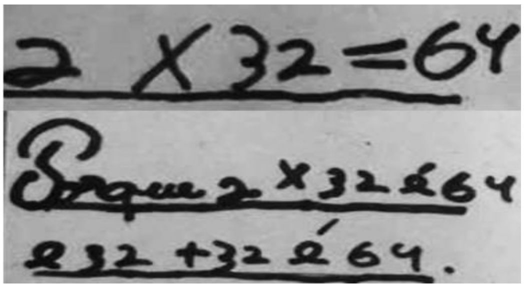


Figura 20 – Resolução de Íris e Salvador, da subtarefa 1, relativa à tarefa 2

Íris e Salvador parecem recorrer ao procedimento de cálculo adicionar em coluna, uma vez que Salvador refere que fizeram 3+3 e depois 2+2. Assim, separaram o algarismo das dezenas e das unidades, e efetuam o cálculo em coluna.

De facto, foi uma forma eficaz para a resolução desta subtarefa. No entanto, caso os números fossem maiores poderia não resultar e levar a que os alunos errassem os cálculos.

Estratégias multiplicativas

Leona e Catarina não foram selecionadas para apresentar as suas resoluções no momento de discussão coletiva. Nos seus registos, apesar de não explicitarem o modo como pensaram, nem como chegaram ao resultado, indiciam a utilização de uma estratégia e um procedimento distinto dos apresentados anteriormente e discutidos em sala de aula.

Estas alunas recorreram a uma estratégia multiplicativa e calcularam o valor total de azulejos colocados, utilizando o procedimento usar relações de dobro. Na sua folha de registo as alunas escreveram duas representações num produto (fig. 21).

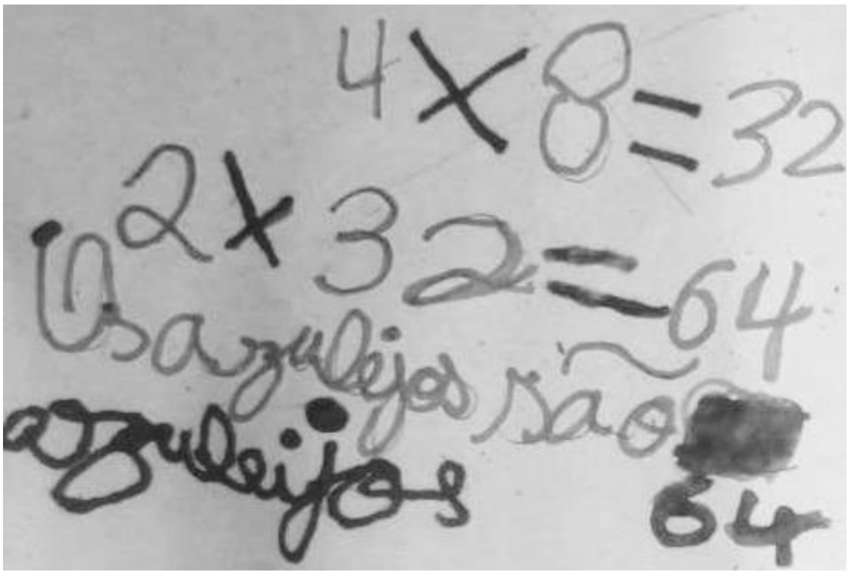


Figura 21 – Resolução de Leona e Catarina, da subtarefa 1, relativa à tarefa 2

A representação 4x8=32 é relativa ao número de azulejos de uma determinada tonalidade. Desta forma, as alunas ao reconhecerem que teriam de calcular o número total de azulejos relativos a duas tonalidades, resolvem calcular 2x32, chegando ao número 64.

Assim, considerei tratar-se de uma estratégia multiplicativa cujo procedimento foi usar relações de dobro, pois parece-me que as alunas compreenderam que o número total de azulejos era o dobro do número de azulejos de uma determinada tonalidade.

Subtarefa 2

Estratégia de contagem

Martim, foi um dos alunos que recorreu a esta estratégia para resolver a subtarefa 2. Este aluno não apresenta um cálculo específico, no entanto, através dos seus registos e do discurso feito no momento de discussão coletiva compreende-se que o aluno recorre a uma estratégia de contagem e efetuou uma contagem de um em um, seguindo a sequência numérica.

Na sua folha de registo (fig. 22) o aluno admite que efetuou contagens de um em um, até chegar ao resultado que é 32.

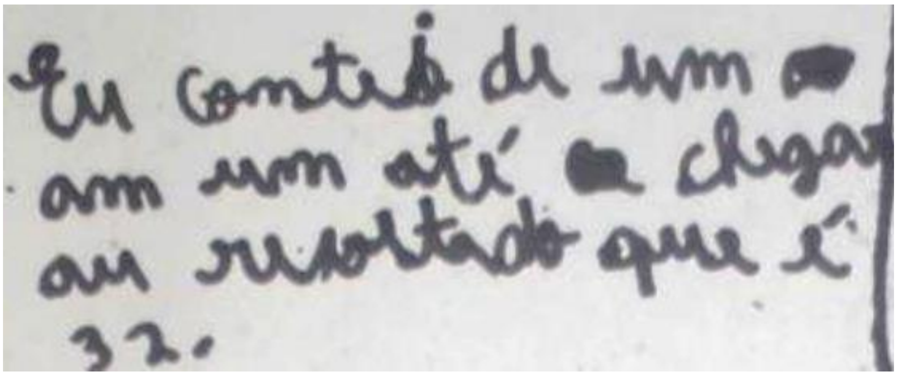


Figura 22 – Resolução de Martim, da subtarefa 2, relativa à tarefa 2

Também no momento em que explicou aos colegas o modo como tinha resolvido a tarefa, Martim referiu que:

> **Martim:** Eu não fiz conta. Fiz só uma resposta, porque contei os azulejos de um em um e, depois, quando terminaram vi que eram 32.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 2, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

Martim, foi selecionado para o momento de discussão coletiva para que, mais uma vez, os alunos tomassem consciência de que as estratégias de contagem não são as mais eficazes, principalmente quando se efetuam contagens de um em um, uma vez que a possibilidade de se enganarem é grande.

Estratégias Aditivas

Nesta subtarefa foram selecionados três pares para apresentarem as suas produções. Estes pares recorreram a estratégias aditivas, de modo a resolverem a questão que lhes foi proposta, no entanto, utilizaram procedimentos de cálculo distintos, à exceção de um par.

O par formado por Iara e Constança parece ter observado a imagem e constatado que, a região da parede onde ainda não foram colocados azulejos é composta por uma malha retangular de 4 azulejos que se repetem 8 vezes. Como tal estas alunas, recorrem a uma estratégia aditiva, para determinarem o número de azulejos. Durante o momento de discussão coletiva, as alunas clarificam a estratégia utilizada referindo que:

> **Iara:** Nós contámos de quatro em quatro.
>
> **Constança:** Contámos as linhas verticais e vimos que era sempre 4 azulejos, e por isso juntámos todos.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 2, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

O procedimento de cálculo utilizado por Iara e Constança, foi adicionar dois a dois, uma vez que para calcularem o total de azulejos agruparam as parcelas duas a duas, tal como pode ser evidenciado na fig. 23.

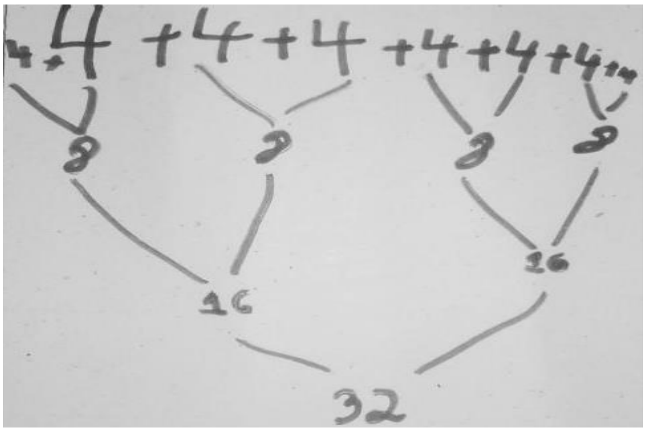


Figura 23 – Resolução de Iara e Constança, da subtarefa 2, relativa à tarefa 2

Apesar de selecionados para o momento de discussão coletiva, Matilde e Henrique também utilizaram a mesma estratégia e procedimento de cálculo de Iara e Constança. No entanto, este par interpretou a imagem de uma outra forma.

Estes alunos recorreram ao número 8, pois ao interpretarem a imagem aperceberam-se que cada linha da malha retangular era composta por 8 azulejos. A adição do número 8 ocorre quatro vezes (fig. 24).

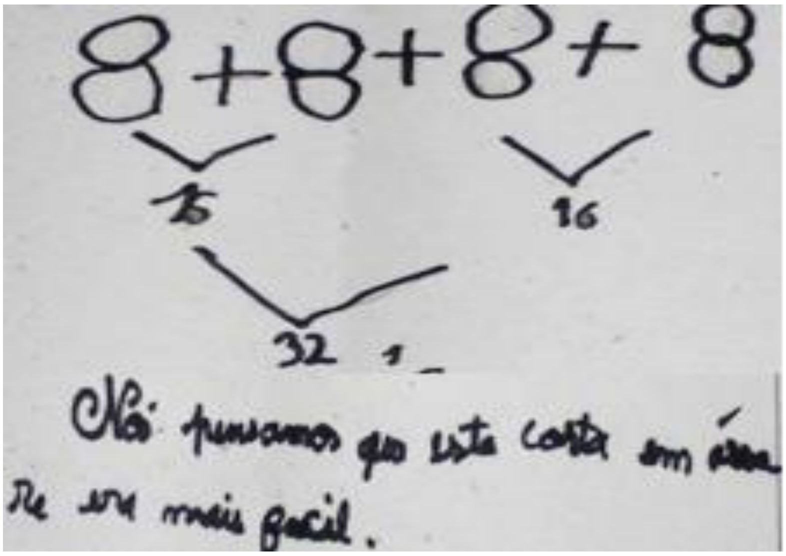


Figura 24 – Resolução de Matilde e Henrique, da subtarefa 2, relativa à tarefa 2

No que respeita, ao procedimento de cálculo utilizado, os alunos agruparam as parcelas duas a duas e efetuaram cálculos, recorrendo assim a um procedimento de adicionar dois a dois.

O excerto seguinte diz respeito, ao momento em que os alunos apresentaram aos colegas, o modo como pensaram.

> **Matilde:** Nós fizemos 8 mais 8 mais 8 mais 8. Depois decidimos fazer a conta para baixo. Cada um dos 8 juntos dava 16, então depois fizemos os 16 para baixo e o total foram 32 azulejos.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 2, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

Matilde e Henrique decidem justificar a razão pelo qual resolveram a tarefa desta forma, e para isso, escrevem na folha de registo, tal como pode ser constatado na fig. 24, que pensaram fazer esta conta em árvore, porque é mais fácil.

Para além destes dois pares, existiu um outro que resolveu esta subtarefa através de uma estratégia aditiva. Mariana e Leonardo, tal como os colegas anteriores interpretaram a imagem que acompanha o enunciado da tarefa e verificaram que a parte da parede onde faltam colocar azulejos é composta por quatro linhas e que cada uma dessas linhas é composta por 8 azulejos.

Os alunos, adicionam 16 mais 16, pois reconhecem que a soma de cada duas linhas é 16 e uma vez que são quatro linhas este número irá repetir-se duas vezes (fig. 25).

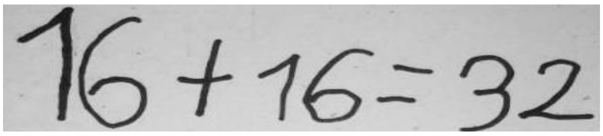


Figura 25 – Resolução de Mariana e Leonardo, da subtarefa 2, relativa à tarefa 2

O excerto seguinte, diz respeito ao discurso proferido pelos alunos, durante o momento em que apresentaram aos seus colegas o trabalho realizado.

> **Mariana:** Nós fizemos 16 destas duas linhas (apontando para a imagem, e referindo-se às linhas horizontais correspondentes à parte da parede em que não há azulejos), e 16 destas outras duas linhas.
>
> **Leonardo:** Depois calculámos 16+16 e sabíamos que era 32.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 2, relativa à tarefa 2; 26-11-14)

Estes alunos admitiram ter recorrido a uma estratégia aditiva, no entanto não esclareceram o modo como calculam 16+16. Como tal, considero que para estes alunos, adicionar 16 mais 16 é um facto conhecido, uma vez que, o fazem de forma hábil sem necessitarem de recorrer a quaisquer registos escritos. Por esta razão, parece que estes alunos utilizaram o procedimento usar somas conhecidas.

Estratégias Multiplicativas

O par constituído pelas alunas Leona e Catarina, apresentam registos que induzem à utilização de uma estratégia multiplicativa, com vista à resolução desta tarefa. Para determinar o número de azulejos que ainda faltam colocar na parede, as alunas apresentam a expressão 4x8=32 (fig. 26).

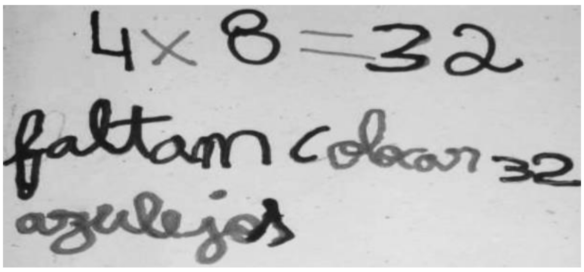


Figura 26 – Resolução de Leona e Catarina, da subtarefa 2, relativa à tarefa 2

Para além dos registos indiciarem que o raciocínio das alunas é multiplicativo, o seu discurso, aquando do momento de discussão coletiva, também é esclarecedor. O excerto seguinte é proveniente das explicações dadas pelas alunas aos colegas:

Leona: Nós vimos que seria 4x8 porque existiam 4 azulejos na vertical e 8 na horizontal.

Catarina: Quando escrevemos 4x8 soubemos que a conta dava 32, porque descobrimos ao olhar para a conta anterior (referindo-se aos cálculos efetuados para a resolução da subtarefa 1).

(Discussão coletiva da subtarefa 2, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

Ao analisar em simultâneo a gravação áudio da aula e os registos destas alunas, verifiquei que não tinham realizado quaisquer cálculos, uma vez que já tinham adquirido conhecimentos suficientes que lhes permitiram afirmar que 4x8 era igual a 32, através da resolução da subtarefa anterior. Por estas razões, considero que o procedimento de cálculo utilizado por Leona e Catarina foi a utilização de produtos conhecidos.

Embora, no momento em que esta subtarefa foi discutida não tenha selecionado o trabalho realizado por Sara e Lucas, durante a análise dos registos dos alunos verifiquei que o deveria ter feito.

Tal como Catarina e Leona, este par recorreu a uma estratégia multiplicativa, tal como pode ser visualizado na sua folha de registo (fig. 27).

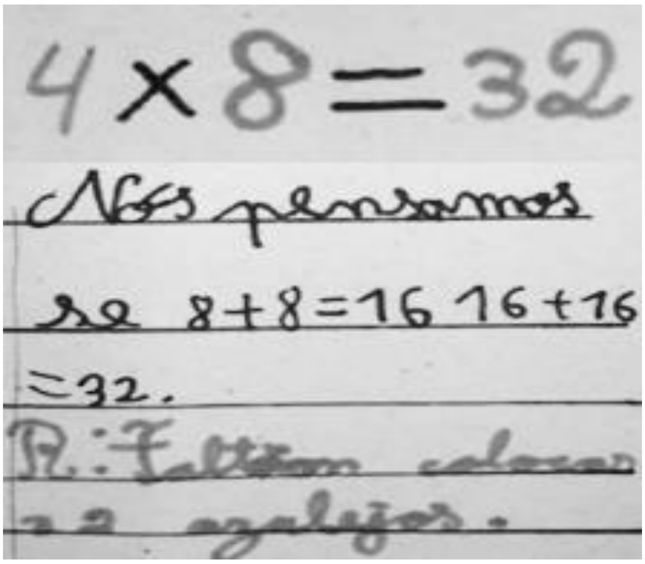


Figura 27 – Resolução de Catarina e Leona, da subtarefa 2, relativa à tarefa 2

Apesar de Sara e Lucas não explicitarem o modo como pensaram, através dos registos efetuados parece-me que os alunos utilizaram o procedimento usar relações de dobro.

Existe uma evidencia de que Sara e Lucas, reconhecem o fator 4, como sendo o dobro de 2, ou seja, os alunos para calcularem a expressão 4x8 encaram-na como sendo 2x(2x8), por esta razão escrevem que “se 8+8=16, então 16+16=32”. Assim sendo, estes alunos estabelecem relações de dobro entre os números 2 e 4 e os números 8 e 16.

Íris e Salvador resolveram a tarefa de uma forma distinta de todos os outros colegas. Por se tratar de uma segunda subtarefa já existiam conhecimentos anteriores que podiam ser mobilizados para a resolução de novas questões. De facto, este par fez exatamente isso. Como na resolução da subtarefa 1 já tinham percebido que a cada espaço da malha retangular, delineado por diferentes cores, pertenciam 32 azulejos, ao lhes ser perguntado o número de azulejos necessários para terminar a parede (correspondente à cor branca), os alunos afirmam ser 32 azulejos, porque cada cor tem 32 azulejos e portanto neste espaço em branco é igual (fig. 28).

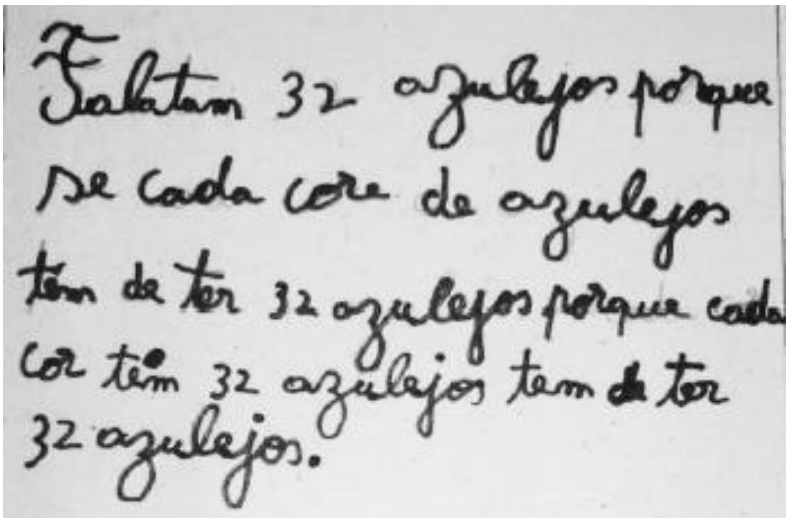

Falatam 32 azulejos porque
se cada core de azulejos
tem de ter 32 azulejos porque cada
cor tem 32 azulejos tem de ter
32 azulejos.

Figura 28 – Resolução de Íris e Salvador, da subtarefa 2, relativa à tarefa 2

Durante o momento de discussão coletiva, estes alunos justificaram o trabalho por si realizado, referindo que:

> **Salvador:** Faltam 32 azulejos porque se cada cor teve até agora 32 azulejos então nesta parte também são 32 azulejos.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 2, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

Perante os argumentos dados por estes alunos tornou-se inviável a correspondência a uma estratégia e procedimento de cálculo, das categorias até então consideradas.

Por esta razão foi criada uma categoria de estratégia de análise distinta – Perceção visual de uma quantidade. Considero ter adequado a categoria à própria análise da produção, pois os alunos verificaram que o 'espaço' ocupado pelos azulejos era o mesmo e, por isso, o número de azulejos também era igual.

Por me parecer uma forma de pensar distinta das apresentadas pelos colegas, apesar de não existirem cálculos, decidi selecioná-la e discuti-la com o grupo turma.

Subtarefa 3

Estratégia de contagem

Para resolver a subtarefa 3, o par composto por Ana Rita e Renato decidiu recorrer a uma estratégia de contagem efetuando o procedimento contar de um em um.

No decorrer da sua apresentação, os alunos esclareceram os colegas sobre os cálculos e registos efetuados, como mostra o seguinte excerto:

> **Renato:** Nós fizemos 90+7 e deu 97.
>
> **Eu:** E como é que chegaram ao número 90?
>
> **Rita:** Fomos contando os azulejos de um em um.
>
> **Renato:** Contámos os dois e depois vimos que no total a parede tinha 97 azulejos.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 3, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

Na folha de registo (fig. 29), os alunos apresentam a expressão aditiva 90+7=97 e apesar de o resultado estar correto, os cálculos efetuados estão errados, uma vez que, na parede só poderiam ser colocados 96 azulejos.

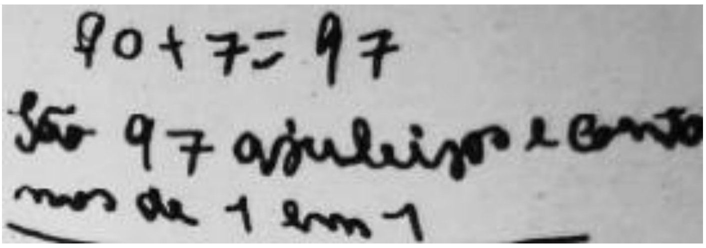


Figura 29 – Resolução de Ana Rita e Renato, da subtarefa 3, relativa à tarefa 2

De facto, estes alunos, recorrem a uma estratégia de contagem cujo procedimento é contar de um em um, por forma a calcularem o número de azulejos colocados na parede.

A contagem é feita em dois momentos, num primeiro momento, os alunos contam até 90 e registam, e posteriormente, no segundo momento contam os restantes e registam 7, apesar de estar incorreto, pois deveriam ter contabilizado 6 azulejos ao invés de 7.

A decisão de selecionar estes alunos, embora os cálculos efetuados estivessem errados, prendeu-se com o facto de querer que toda a turma compreendesse que existe uma enorme probabilidade de cometerem erros quando efetuam contagens de um em um e o número total de objetos é elevado. Por serem alunos do 2.º ano queria que compreendessem que existem estratégias e procedimentos de cálculo mais eficazes.

Estratégias Aditivas

Lucas e Sara resolveram esta subtarefa utilizando uma estratégia aditiva. Durante o momento de discussão coletiva, os alunos explicaram o seu raciocínio e os cálculos efetuados, tal como mostra o seguinte excerto:

> **Sara:** Nós fizemos 12+12+12+12+12+12+12+12.
>
> **Lucas:** E utilizámos o 12, porque é o número de azulejos que estão nas linhas verticais.
>
> **Sara:** Sim e depois ao fazermos as contas deu-nos 96 azulejos.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 3, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

Perante este discurso, clarifica-se o uso de uma estratégia aditiva. Relativamente ao procedimento de cálculo utilizado parece tratar-se de uma adicionação sucessiva. No entanto, ao analisar os registos (fig. 30) efetuados por este par, constatei que não tinha sido este o procedimento de cálculo utilizado.

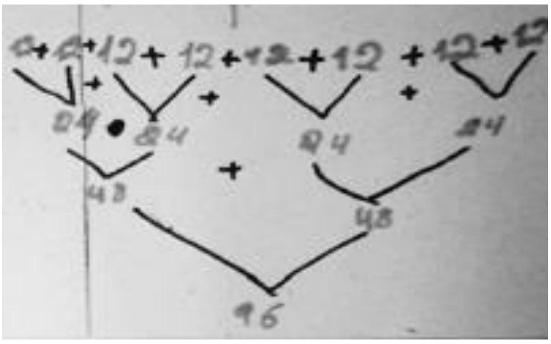


Figura 30 – Resolução de Sara e Lucas, da subtarefa 3, relativa à tarefa 2

Efetivamente, tal como explicaram, estes alunos representaram sucessivamente o número 12, mas para efetuarem os cálculos de modo a responder à questão fizeram uma conta em 'árvore'. Desta forma e através dos seus registos, constata-se que se trata de um procedimento de adição dois a dois, uma vez que estes efetuam cálculos a partir da adição de várias parcelas, e seguidamente juntam essas mesmas parcelas duas a duas, até obterem o resultado final.

Estratégias multiplicativas

Para o momento de discussão coletiva foi ainda selecionado outro par, que resolveu a subtarefa através de uma estratégia multiplicativa. As alunas Leona e Catarina registaram na sua folha (fig. 31), uma representação num produto, que resulta da repetição do número 32. Ao verificarem que cada disposição retangular era composta por 32 azulejos e que a malha era composta por três disposições, as alunas verificaram que se tratavam de 3x32.

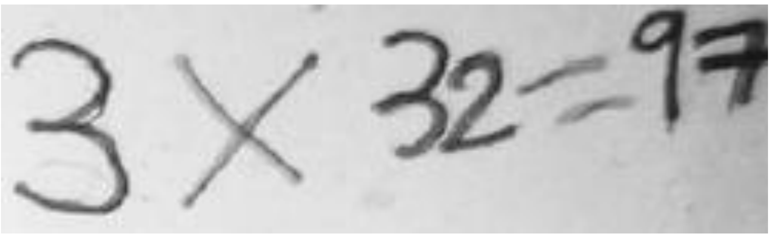


Figura 31 – Resolução de Leona e Catarina, da subtarefa 3, relativa à tarefa 2

Durante o momento de discussão coletiva, as alunas explicitaram o modo como tinham calculado o número total de azulejos colocados, tal como mostra o seguinte excerto:

> **Catarina:** Nós fizemos 3x32 e deu-nos 96.
>
> **Eu:** E de onde vem o número 32?
>
> **Leona:** São 32 desta parte, mais 32 desta e mais 32 desta (apoiando-se na imagem e referindo-se a cada uma das disposições da malha retangular).
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 3, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

No entanto, e por ainda não conhecerem as tabuadas, as alunas necessitaram de efetuar alguns cálculos para chegarem ao produto, apesar de não os explicitarem na folha de registo.

Ainda durante o momento de discussão coletiva, um dos alunos questionou as alunas, pois queria compreender como é que as colegas tinham calculado 3x32.

> **Tiago:** E como é que vocês sabiam que 3 vezes 32 era igual a 97 se nós ainda não aprendemos a tabuada?
>
> **Leona:** Porque nós pensámos e primeiro fizemos 3 vezes 3 é igual a 9, e depois fizemos 3 vezes 2 que é igual a 7.
>
> (Discussão coletiva da subtarefa 3, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 26-11-14)

Pelas razões apresentadas, parece tratar-se de uma resolução cujo procedimento de cálculo é multiplicar em coluna. Considero-o como tal, porque as alunas efetuaram cálculos que, embora mentais, evidenciam a decomposição dos números envolvidos, nomeadamente de um dos fatores, e efetuam os cálculos da esquerda para a direita.

Apesar de terem calculado de forma incorreta o valor de 3x32, Leona e Catarina mostraram compreender algumas relações possíveis de serem feitas entre os dois fatores e, por essa razão, as alunas foram selecionadas para o momento de discussão.

Ainda que tenha selecionado apenas estes três pares para o momento de discussão coletiva, ao analisar os dados, verifico que existem outros dois pares que deveriam ter sido selecionados, uma vez que utilizaram estratégias/procedimentos de cálculo distintos dos apresentados. Apresento os registos destes dois pares e identifico as estratégias e procedimentos utilizados.

Matilde e Henrique, tal como as alunas anteriores, verificaram através da malha retangular e das suas diferentes disposições, que se tratavam de 3 vezes 32 azulejos. Como tal efetuaram o registo da expressão num produto 3x32. Mas, tal como as colegas necessitaram de efetuar cálculos, uma vez que o produto resultante da multiplicação destes dois fatores lhes era desconhecido. Apesar de registarem na sua folha esta expressão que parece corresponder a uma estratégia multiplicativa, tal não acontece quando se analisam os registos na sua totalidade (fig. 32).

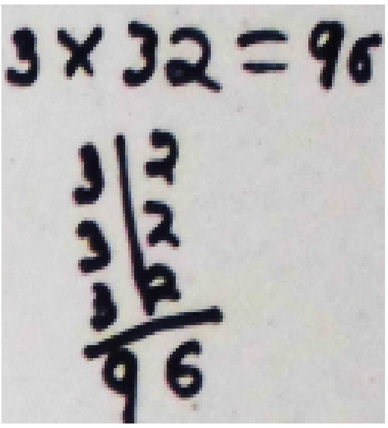


Figura 32 – Resolução de Matilde e Henrique, da subtarefa 3, relativa à tarefa 2

De facto, para além da expressão referida anteriormente, as alunas apresentam um cálculo vertical que corresponde à soma de três parcelas iguais. Desta forma, e perante estas evidências considerei tratar-se de uma resolução, na qual os alunos recorreram a uma estratégia aditiva e a um procedimento de cálculo em coluna. Este cálculo em coluna corresponde ao chamado ‘algoritmo tradicional’ da adição, no qual os alunos trabalham com dígitos e não com números e os ‘dividem’ (utilizando uma barra entre os números) em ordens (dezenas e unidades).

Existiu ainda uma estratégia aditiva que poderia ter sido discutida, na qual o aluno utilizou como procedimento de cálculo a adição sucessiva. Martim seguiu o raciocínio dos dois pares anteriormente apresentados, ao verificar que cada disposição retangular era composta por 32 azulejos. No entanto, decidiu adicionar sucessivamente esse mesmo número (fig. 33).

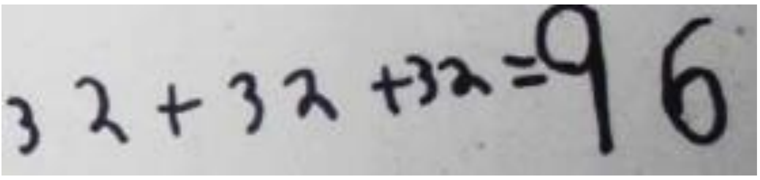


Figura 33 – Resolução de Martim, da subtarefa 3, relativa à tarefa 2

Tal como se pode constatar na fig. 33, Martim adiciona sucessivamente o número 32. Para além da expressão aditiva que se encontra na horizontal, o aluno não apresenta quaisquer cálculos, nem explicita como conseguiu chegar ao resultado 96.

Síntese

A tabela seguinte resume as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução das três subtarefas que constituem a tarefa 2.

Tabela 8 – Estratégias/Procedimentos utilizados pelos alunos na resolução da tarefa 2

		Tarefa 2 – Azulejos		
		Subtarefa 1	**Subtarefa 2**	**Subtarefa 3**
De contagem	"Contar de um em um"	5	3	4
Aditivas	Adicionar sucessivamente	4	2	7
	Adicionar dois a dois	6	6	4
	Adicionar em coluna	2	—	2
	Usar somas conhecidas	—	2	—
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos	—	2	—
	Usar relações de dobro	2	2	—
	Multiplicar em coluna	—	—	2
Perceção global de quantidade	—	—	2	—

Na resolução das três subtarefas, a grande maioria dos alunos recorre a estratégias aditivas e, tendencialmente, a procedimentos de adição sucessiva e adição dois a dois.

Na subtarefa 1, à semelhança de Iara e Constança, existem mais três alunos que recorrem a estratégias de contagem. Estes cinco alunos utilizaram como procedimento de cálculo *contagens de um em um*. Por sua vez e relativamente às estratégias aditivas existiram 12 alunos a utilizá-las, sendo os procedimentos de cálculo distintos. Destes 12 alunos, 6 recorrem a um procedimento de *adicionar dois a dois,* incluindo os alunos, Henrique e Matilde. Existem 4 alunos que recorrem ao procedimento *adicionar sucessivamente.* O procedimento de cálculo utilizado por Íris e Salvador é somente utilizado por eles, e corresponde a um procedimento *de adição em coluna*.

Por fim, existe um par que recorre a uma estratégia multiplicativa. O procedimento de cálculo evidenciado por Catarina e Leona parece patentear a *utilização de relações de dobro*.

Relativamente à subtarefa 2, existem três alunos que recorrem a estratégias de contagem, efetuando *contagens de um em um*. No que respeita a estratégias aditivas, estas são utilizadas por 10 alunos, sendo que os procedimentos de cálculo foram diferentes. Existiram 2 alunos a recorrer ao procedimento *adicionar sucessivamente*. Matilde e Henrique recorrem ao procedimento *adicionar dois a dois*, tal como outros 4 alunos. Por sua vez, Leonardo e Mariana recorrem ao procedimento *usar somas conhecidas*. A utilização de estratégias multiplicativas é recurso para 4 alunos, tendo dois deles utilizado o procedimento *usar produtos conhecidos,* e os 2 outros alunos utilizado *relações de dobro*. Íris e Salvador, recorrem a uma estratégia de *perceção visual de quantidade*.

No que concerne à subtarefa 3, existem várias estratégias e procedimentos de cálculo a serem utilizados. Tal como Renato e Rita existem mais dois alunos a efetuar *contagens de um em um*, tendo assim recorrido a uma estratégia de contagem. À semelhança da Sara e do Lucas existem mais dois alunos a recorrer a uma estratégia aditiva, cujo procedimento de cálculo é *adicionar dois a dois*. O procedimento de *adição sucessiva* é utilizado por 7 alunos. Ainda relativamente a estratégias aditivas, existem dois alunos a recorrer a um procedimento de *cálculo em coluna*. As alunas Leona e Catarina acabaram por ser o único par a resolver esta subtarefa recorrendo a uma estratégia multiplicativa, sendo o procedimento de cálculo *multiplicar em coluna*.

5.1.3. Tarefa 3 – Construção da tabuada do 3

Nesta terceira tarefa estiveram envolvidos 19 alunos. Como referi no capítulo III – Metodologia, esta tarefa tem características muito próprias e por isso, a sua dinamização ocorreu de forma distinta.

O intuito desta tarefa era construir em grande grupo a tabuada do 3. No entanto, para a construção desta tabuada eram necessárias regras, como tal, no momento de apresentação, juntamente com os alunos estabelecemos as regras que teriam de ser cumpridas.

Para além disso informei os alunos que iriamos fazer uma tarefa diferente, uma vez que iriam aprender algo novo e trabalharíamos em grande grupo.

Como nunca tinham realizado uma tarefa em grande grupo, foi um pouco complicado explicar-lhes como iria decorrer a aula e, por isso, disse-lhes que iriamos fazer como no cálculo mental, cada aluno punha o dedo no ar para participar e aguardava a indicação para poder falar. Os alunos foram informados que os registos iriam ser feitos por mim no quadro e que eles não necessitariam de copiar nada para o caderno, apenas deveriam olhar para o quadro e participar.

Uma vez que estavam um pouco 'preocupados', por não estarem a compreender muito bem como é que a aula iria decorrer, informei-os que deveriam estar despertos, para eventuais relações entre as diferentes expressões numéricas.

O decorrer da tarefa foi um pouco confuso, pois os alunos nem sempre aguardavam a oportunidade para participarem e alguns deles começaram a distrair-se com o passar do tempo. No entanto, a maioria da turma conseguiu interagir e apresentar estratégias e procedimentos de cálculo. À medida que os raciocínios foram sendo apresentados, os alunos adequaram o seu discurso, utilizando conceitos matemáticos relacionados com a operação multiplicação, tais como: fatores, produto, dobro, triplo e regularidades.

Por se tratar de uma tarefa com as características anteriormente descritas, a sua discussão e sistematização ocorreu em simultâneo com a sua resolução/dinamização.

Estratégias de contagem

João recorre a uma estratégia de contagem, para calcular a expressão 3x3. Quando confrontado com esta expressão, o aluno responde de imediato que são 9. O discurso seguinte foi proferido pelo aluno, quando explicava aos colegas como é que tinha calculado o valor do produto.

> **João:** Dá 9, porque eu fiz de três em três. Se o produto anterior é seis e temos sempre de acrescentar 3 ao anterior, aqui pensei em 6 mais 3 que é 9.

(Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Parece-me tratar-se de uma estratégia de contagem, em que o procedimento de cálculo recorrido é contar por saltos, uma vez que este aluno identifica uma regularidade entre os produtos resultantes da multiplicação das expressões anteriores. Como tal, 'dá saltos de três em três', pois ao verificar que 3 vezes 2 são 6 adiciona de imediato ao número 6 mais 3, chegando assim ao resultado 9. A figura 34 corresponde ao registo efetuado no quadro, que resultou do raciocínio apresentado por João.

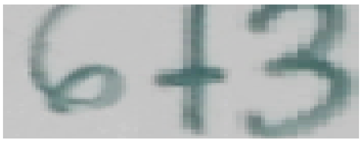


Figura 34 – Cálculo efetuado por João na tarefa 3

Estratégias aditivas

Contrariamente ao que aconteceu nas tarefas analisadas anteriormente, as estratégias aditivas foram as menos utilizadas pelos alunos na resolução desta tarefa. No entanto, existem casos em que são efetuados cálculos aditivos para calcular o valor do produto das expressões e, quando isto acontece utilizam apenas o procedimento adicionar sucessivamente.

Renato quando solicitado para responder qual o resultado de 1x3, demora alguns segundos e refere que:

Renato: Dá 3. Eu pensei em 1 mais 1 mais 1.

(Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Ao proferir este discurso, o aluno evidencia a estratégia aditiva por si utilizada e o respetivo procedimento de cálculo, uma vez que adiciona sucessivamente o número 1. A figura 35 resulta do registo do cálculo efetuado por Renato.

Figura 35 – Cálculo efetuado por Renato na tarefa 3

Leonardo, tal como Renato, utiliza a adição sucessiva do número 2 para calcular o produto resultante da multiplicação da expressão 2x3. Ao participar na tarefa, o aluno explicita o seu raciocínio do seguinte modo:

Leonardo: Eu pensei em 2 mais 2 mais 2 e deu 6.

(Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Tal como acontece com Renato, este aluno ao compreender que para calcular 2x3 pode recorrer à adição sucessiva, fá-lo sem qualquer hesitação e calcula o resultado correto. A figura 36 resulta dos cálculos efetuados por Leonardo.

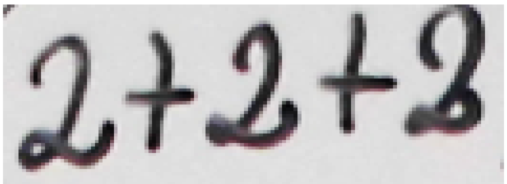


Figura 36 – Cálculo efetuado por Leonardo na tarefa 3

À semelhança dos colegas anteriores, Diana também parece recorrer a uma estratégia aditiva e ao procedimento de cálculo adicionar sucessivamente. Esta aluna para determinar o resultado da expressão 7x3 adiciona sucessivamente o número 7. Durante a explicação do seu raciocínio, a aluna refere que:

Diana: O resultado é 21. Eu pensei em 7 mais 7 mais 7.

(Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

A figura 37 resulta dos registos efetuados no quadro após a intervenção de Diana.

Figura 37 – Cálculo efetuado por Diana na tarefa 3

Estes três alunos não foram os únicos a utilizarem este tipo de estratégia e procedimento, no entanto, servem de exemplo dos restantes. Como constatado, estes alunos efetuam a adição sucessiva de um dos fatores. É importante realçar que para eles parece ser evidente pensarem no 1x3 como sendo 3x1, no 2x3 como sendo 3x2 e no 7x3 como sendo 3x7. Assim, os alunos parecem reconhecer que quando se troca a ordem dos fatores os produtos são iguais, e talvez por esta razão, efetuam as adições sucessivas, do modo como foram apresentadas anteriormente.

Estratégias multiplicativas

As estratégias multiplicativas foram as mais utilizadas pelos alunos tendo, no entanto existido diferentes procedimentos de cálculo.

Leonardo para calcular o produto da expressão 4x3 afirma ter pensado da seguinte forma:

> **Leonardo:** Eu vi que na anterior eram 3 vezes 3 e se esta é 4 vezes 3 é mais uma unidade no primeiro fator. Então pensei em 3 vezes 3 igual a 9, mais 1 vezes 3 dá 3, então depois fiz 9 mais 3 que dá 12.
>
> (Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

O raciocínio exposto por este aluno pode ser representado pela expressão numérica exposta no quadro após a sua intervenção (fig. 38). Leonardo decompõe um dos fatores, pensando assim em (3x3) + (1x3). Como já conhecia os produtos destas expressões efetuou a adição de ambos, tendo chegado rapidamente ao número 12.

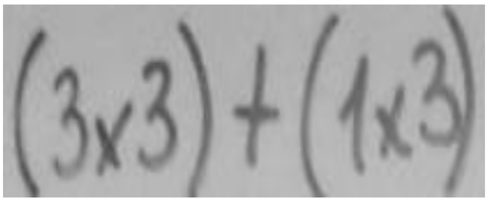


Figura 38 – Cálculo efetuado por Leonardo na tarefa 3

Matilde pensou que para calcular o valor da expressão 5x3, poderia recorrer a expressões anteriores, nomeadamente à expressão 4x3 e 1x3, ou seja, à semelhança de Leonardo, esta aluna também decompõe um dos fatores, nomeadamente, o fator correspondente ao número 5 (fig. 39).

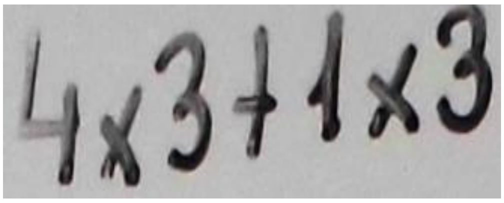


Figura 39 – Cálculo efetuado por Matilde na tarefa 3

Durante a sua intervenção, a aluna explicita o seu raciocínio e admite pensar da seguinte forma:

> **Matilde:** Eu pensei em 4 vezes 3 que dá 12, e depois pensei em 1 vezes 3 que é 3. Então depois fiz 12 mais 3 e dá 15.
>
> (Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Tal como os colegas, Lucas perante a expressão 9x3, decide efetuar a decomposição do número 9, tendo, assim, recorrido a outras expressões que o apoiaram nos cálculos. Neste caso, o aluno considerou adequado recorrer às expressões 8x3 e 1x3 e adicionar os produtos resultantes (fig. 40).

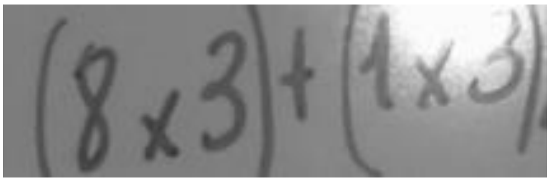


Figura 40 – Cálculo efetuado por Lucas na tarefa 3

Lucas durante a sua intervenção explica como pensou e quais os cálculos efetuados. O seguinte excerto traduz esse momento.

> **Lucas:** O resultado é 27, porque pensei no 8 vezes 3, mais 1 vezes 3, ou seja, em 24+3 e a resposta é 27.
>
> (Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Estes três alunos não foram os únicos a recorrer a esta estratégia e procedimento de cálculo, no entanto servem de exemplo. Através da análise dos seus modos de pensar, consegue perceber-se que estes alunos recorrem a estratégias multiplicativas para determinarem o valor do produto. No que respeita ao procedimento de cálculo todos eles utilizam uma decomposição não decimal de um dos fatores. Como evidenciado anteriormente e característico deste procedimento de cálculo, os alunos substituem um determinado fator por uma adição de duas parcelas que podem ou não ser iguais. Neste caso é um procedimento facilitador de cálculos, uma vez que, os alunos não conhecem a tabuada e portanto recorrem a produtos anteriores de forma a efetuarem os seus cálculos. Existe também um aspeto comum a todos estes modos de pensar que merece ser destacado, uma vez que se relaciona com o significado da decomposição que os alunos efetuam.

Estes alunos recorrem sempre ao produto anterior, por forma a calcularem o produto seguinte, isto é, Leonardo para calcular 4x3 pensa e utiliza as expressões (3x3)+(1x3), por sua vez, Matilde utiliza as expressões (4x3)+(1x3) para determinar o valor da expressão 5x3 e Lucas fá-lo, também, ao pensar no (8x3)+(1x3), como sendo uma forma de calcular 9x3.

Outros alunos utilizaram estratégias multiplicativas tal como as apresentadas, mas o procedimento de cálculo foi distinto.

Após a explicação de João que refere que 3x3=9 porque “fiz de três em três” (João – Resolução/Discussão da tarefa 3), Sara apresenta o seu raciocínio:

> **Sara:** Eu vi que 3 vezes 3 é o triplo de 1 vezes 3. Por isso, o resultado também é o triplo. A resposta é 9.
>
> **Martim:** Então o 9 é o triplo de 3?
>
> **Sara:** Sim é.
>
> (Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Esta aluna parece recorrer a um conhecimento que já tinha adquirido anteriormente, noção de triplo, raciocina partindo de uma estratégia multiplicativa e utiliza o procedimento usar relações de triplo. Ao realizar este raciocínio e ao explicá-lo aos colegas, Sara ajuda alguns deles a compreenderem esta relação que, até então, lhes era desconhecida. Como se pode constatar pela interrogação feita por Martim. A figura 41, representa os registos efetuados no quadro durante a explicação dada por Sara sobre o seu modo de pensar.

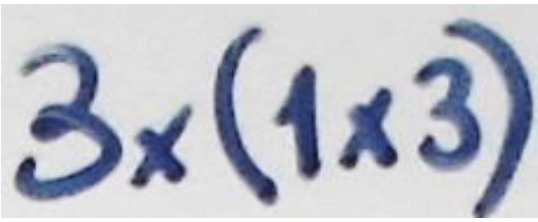


Figura 41 – Cálculo efetuado por Sara na tarefa 3

Íris utiliza um outro procedimento de cálculo recorrendo, também, a uma estratégia multiplicativa. Esta aluna refere que:

> **Íris:** Eu sei que o 4 é o dobro de 2, por isso pensei em 2 vezes o 2 vezes 3. Se 2 vezes 3 é 6, o dobro de 6 é 12.
>
> (Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Esta aluna recorre ao procedimento usar relações de dobro, para determinar o valor do produto da expressão 4x3. Como sabe que 2 é o dobro de 4 recorre à expressão que corresponde a metade de 4x3, ou seja à expressão 2x3 e calcula o valor desse produto duas vezes, utilizando a noção de dobro. Por esta razão, refere que o dobro de 6 é 12. Esta aluna estabelece assim, relações de dobro ao nível dos números dos fatores e dos resultados dos produtos. O raciocínio de Íris foi exposto no quadro, tal como ilustra a fig. 42.

Figura 42 – Cálculo efetuado por Íris na tarefa 3

No decorrer da tarefa os alunos compreenderam que a tabuada não finda na expressão 10x3, pois essa era uma das minhas intencionalidades, como tal propus-lhes a resolução de expressões cujo multiplicando fosse superior a 10.

Quando apresentei a expressão 12x3, Tiago descobre que pode efetuar os cálculos da mesma forma como os colegas têm feito até então. Como tal, refere que:

> **Tiago:** Eu fiz a conta com o 10 vezes 3 mais 2 vezes 3. Olhei para o quadro e vi que é 30 mais 6 e isto dá 36.
>
> (Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Este aluno, à semelhança de Leonardo, Matilde e Lucas, calcula o valor do produto da expressão 12x3 decompondo o número 12. Tiago parece pensar no número 12 como sendo 10+2. No entanto, apesar das semelhanças com os colegas anteriormente referidos, o procedimento de cálculo utilizado por Tiago é distinto, uma vez que, ao decompor o número 12, este aluno utiliza o procedimento usar a decomposição decimal de um dos fatores.

A figura 43 emerge dos cálculos efetuados no quadro, aquando da participação de Tiago.

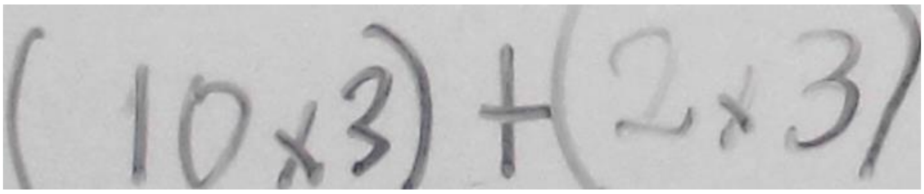


Figura 43 – Cálculo efetuado por Tiago na tarefa 3

Leona também efetua um raciocínio do mesmo tipo. Ao ser-lhe apresentada a expressão 17x3, esta aluna demora um pouco, mas acaba por explicar o seguinte:

> **Leona:** Eu fui às expressões de cima, e como sei que 10 mais 7 é igual a 17, fiz os cálculos a partir do 10 vezes 3 mais 7 vezes 3. Depois vi que tinha de juntar 30 mais 21 e deu-me 51.
>
> (Resolução/Discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 2-12-14)

Tal como o colega, esta aluna decide recorrer à decomposição decimal do número 17 e efetua os cálculos necessários a partir do resultado dos produtos anteriormente conhecidos e discutidos. Assim sendo, Leona utiliza uma estratégia multiplicativa e o procedimento de cálculo resulta da utilização da decomposição decimal de um dos fatores.

A fig. 44 corresponde a registos efetuados sobre o modo de pensar desta aluna.

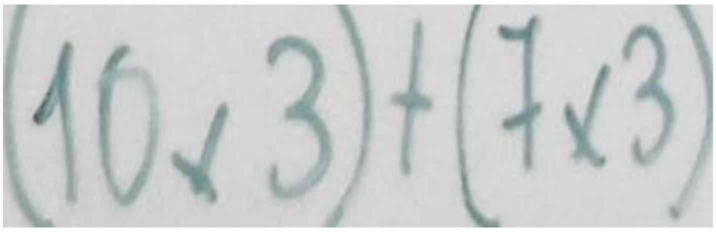


Figura 44 – Cálculo efetuado por Leona na tarefa 3

Leona e Tiago foram os únicos a utilizar um procedimento de cálculo distinto dos anteriores, embora, tal como referi anteriormente, seja muito semelhante ao utilizado por Leonardo, Matilde e Lucas (fig. 38, 39, 40). No caso de Tiago e Leona, trata-se do procedimento usar a decomposição decimal de um dos fatores, porque os alunos efetuam a decomposição de um dos fatores, mas recorrem à adição em que uma das parcelas é 10. Ao efetuarem esta decomposição, Leona e Tiago recorrem à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que anteriormente já lhes tinha sido dada a conhecer e explicada.

Parece-me que o facto de serem expressões, em que pelo menos um dos fatores é maior que 10, fez com que estes alunos recorressem a este procedimento de cálculo específico.

Síntese

A tabela seguinte (tabela 9) inclui a síntese das estratégias e dos procedimentos de cálculo utilizados pelos diferentes alunos da turma na resolução da tarefa 3.

Tabela 9 – Estratégias/ Procedimentos utilizados pelos alunos na resolução da tarefa 3

Tarefa 3 – Construção da tabuada do 3		
Estratégias	**Procedimento**	**Nº de alunos**
De Contagem	Contagem por saltos	1
Aditivas	Adicionar sucessivamente	7
Multiplicativas	Usar relações de dobro	3
	Usar relações de triplo	1
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores	7
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores	2

Na resolução desta tarefa as estratégias utilizadas pelos alunos são de contagem, aditivas e multiplicativas. Existiu apenas um aluno que recorreu a uma estratégia de contagem, tendo utilizado o procedimento *contar por saltos*.

As estratégias aditivas são utilizadas por diversos alunos, e o procedimento de cálculo é sempre o mesmo, *adicionar sucessivamente*. Existem sete alunos a recorrer a este procedimento durante a construção da tabuada, tendo sido utilizada com maior frequência no início da dinamização da tarefa. Tendencialmente, ao compreenderem melhor as relações que podem estabelecer entre as diferentes expressões, à medida que a tarefa vai sendo explorada, alguns alunos abandonam este tipo de raciocínio e optam por estratégias multiplicativas.

As estratégias multiplicativas surgem a partir da utilização de diferentes procedimentos de cálculo. Tal como referi na análise existem três alunos que recorrem ao procedimento *usar a decomposição não decimal de um dos fatores*, de forma a calcular o resultado do produto.

Como explicitado anteriormente, através do exemplo do raciocínio de Tiago e Leona, surge o procedimento *usar a decomposição decimal de um dos fatores*. A noção de dobro e, consequentemente, o procedimento de cálculo *usar relações de dobro* surge do raciocínio apresentado por Íris, no entanto, ao longo da tarefa é referido e salientado por mais dois alunos.

Por sua vez, a ideia de triplo surge apenas no discurso efetuado por Sara, tendo assim utilizado o procedimento *usar relações de triplo*.

5.1.4. Tarefa 4 – Receita de bolo-rei

A tarefa 4 foi planificada com o intuito dos alunos recorrerem a relações e propriedades características da operação multiplicação. Nesta tarefa estiveram envolvidos 19 alunos.

No momento de apresentação da tarefa contextualizei-a com o dia de Reis, uma vez que nos encontrávamos a comemorar esse dia. Resolvi também utilizar o nome da minha colega de estágio para contextualizar a tarefa, para que os alunos acreditassem que se tratava de uma situação verídica.

Num primeiro momento solicitei a um aluno que lesse o enunciado da tarefa. Após a leitura, informei-os que se tratava de uma tarefa que à semelhança da tarefa 2 'Azulejos' era composta por quatro subtarefas. Assim, resolveriam a pares cada uma das subtarefas e discutiríamos cada uma à medida que iriam sendo resolvidas.

Durante o momento de resolução da subtarefa 1, alguns alunos mostraram dificuldades. Assim, pedi a uma aluna que explicasse aos restantes colegas o enunciado da tarefa, sem lhes dar pistas ou ideias do trabalho que já estava a realizar. Na resolução das restantes subtarefas não existiram dúvidas, pelo menos que tivessem sido motivo de questionamento por parte dos alunos.

Para o momento de discussão da primeira subtarefa foram selecionados quatro alunos, para a discussão da segunda e terceira subtarefa foram selecionados seis alunos e, por fim para a quarta subtarefa foram selecionados quatro alunos.

Subtarefa 1

Estratégias aditivas

O par constituído por Salvador e por Íris parece recorrer a uma estratégia aditiva, uma vez que compreendem que, para calcular a quantidade de cada ingrediente necessário para serem feitos dois bolos, necessitam de adicionar esses mesmos ingredientes (fig.45).

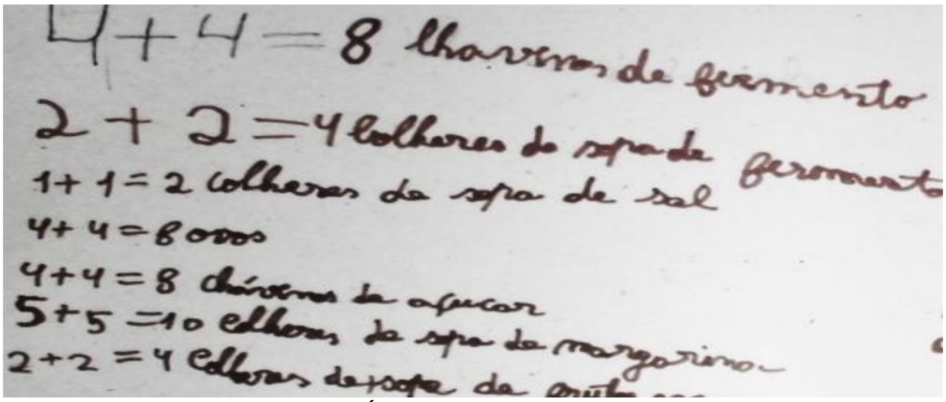


Figura 45 – Resolução de Íris e Salvador, da subtarefa 1, relativa à tarefa 4

Como se pode constatar na fig. 45, os registos efetuados por este par, evidenciam um procedimento de adicionar sucessivamente, pois por exemplo, ao saberem que para confecionar um bolo necessitavam de 4 chávenas de fermento, então para saberem a quantidade deste ingrediente para dois bolos adicionam 4 mais 4.

Ao apresentarem o seu raciocínio aos colegas, os alunos explicitam a estratégia e o respetivo procedimento utilizado. O seguinte excerto resulta desse momento:

> **Íris:** Nós escrevemos a receita e acrescentámos mais uma vez os ingredientes.
>
> **Salvador:** Se eram 4 chávenas de farinha, nós fizemos 4 mais 4 e deu 8.
>
> **Íris:** Pensámos que era sempre duas vezes o ingrediente que estava na receita.
>
> (Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

A explicação dada por estes alunos apesar de indiciar uma estratégia aditiva cujo procedimento é adicionar sucessivamente, também revela uma outra hipótese de raciocínio. Na última fala de Íris, a aluna refere que pensaram duas vezes o ingrediente, perante estas palavras poderá também considerar-se que estes alunos pensaram através de uma estratégia multiplicativa cujo procedimento de cálculo é usar relações de dobro.

Aparentemente, Íris e Salvador resolvem esta subtarefa de uma determinada forma mas, quando terminam a sua resolução e estão a explicar o seu modo de pensar aos colegas, reconhecem uma outra estratégia e procedimento de cálculo. No entanto, para efeitos deste estudo considerar-se-á os registos efetuados, e por isso, será considerada a utilização de uma estratégia aditiva.

Estratégias multiplicativas

Diana e Constança foram selecionadas para o momento de discussão coletiva, pois na resolução desta subtarefa recorrem a uma estratégia multiplicativa.

As alunas verificaram que se tratava de uma subtarefa, na qual poderiam recorrer ao uso de dobros para calcular os ingredientes necessários para a confeção de dois bolos-rei. No entanto, nunca expressaram verbalmente a expressão 'dobro'.

Ao apresentarem o trabalho realizado, as alunas explicaram o seguinte:

> **Diana:** Nós escrevemos os ingredientes, e vimos que para a mãe da Susana fazer dois bolos precisava de duas vezes esses ingredientes.
>
> **Constança:** E depois calculamos cada um dos ingredientes e escrevemos.

(Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

A figura 46 corresponde aos registos efetuados por estas duas alunas. Ao analisar esta produção concluo que Diana e Constança parecem recorrer ao procedimento usar relações de dobro, uma vez que, embora de outra forma, referem isso mesmo no seu discurso. Para além disso, nos seus registos existe uma série de expressões relativas a cada um dos ingredientes. Nestas expressões o multiplicando corresponde ao número de vezes que o ingrediente se vai repetir (neste caso duas vezes, por se tratarem de dois bolos) e o multiplicador corresponde à quantidade do ingrediente. Ao efetuarem estas multiplicações, as alunas evidenciam as noções de dobro aqui envolvidas.

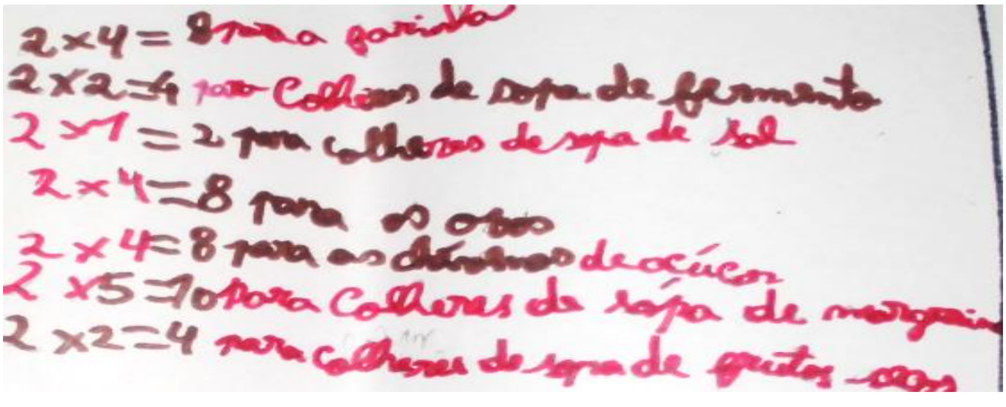


Figura 46 – Resolução de Diana e Constança da subtarefa 1, relativa à tarefa 4

Lucas e Sara também apresentaram aos colegas o trabalho realizado por si, embora tivessem recorrido à mesma estratégia e procedimento de cálculo que Diana e Constança.

Decidi, no entanto, selecionar estes alunos porque, enquanto circulei pela sala, pude verificar que identificaram de imediato que se tratava de um problema em que estava implícito o uso de relações de dobro. Por esta razão, considerei que seria uma mais-valia para os colegas escutarem as suas ideias e o modo como tinham pensado.

Os registos efetuados por Lucas e Sara (fig. 47) são muito idênticos ao do par anterior.

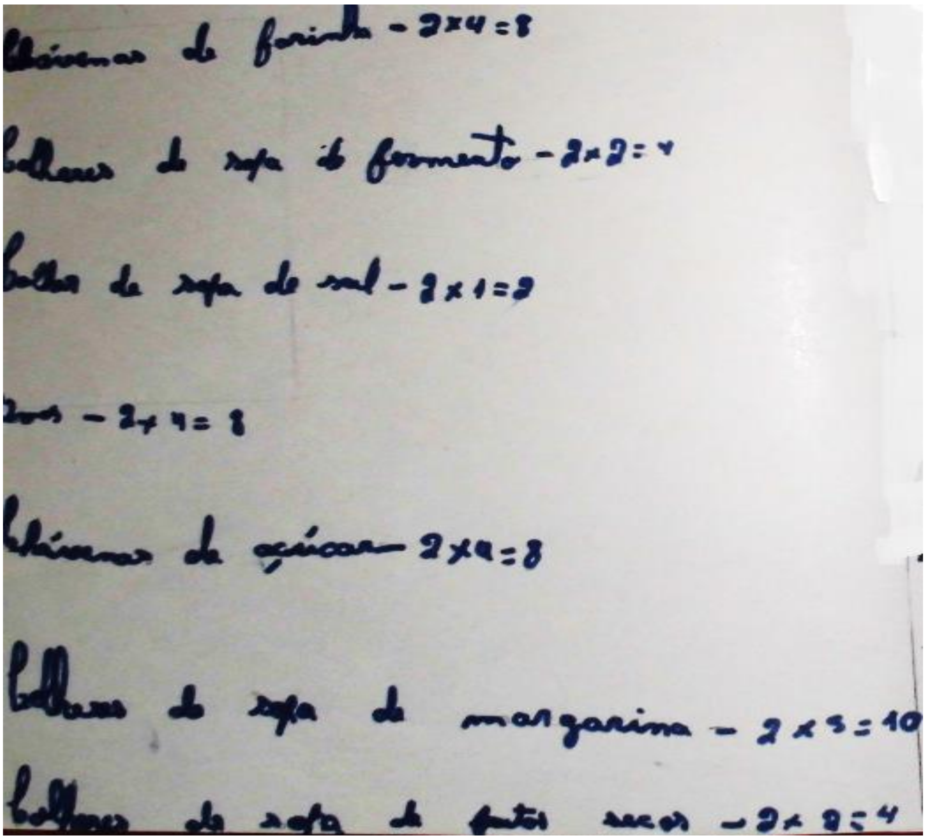


Figura 47 – Resolução de Sara e Lucas da subtarefa 1, relativa à tarefa 4

No entanto, estes alunos iniciaram a sua apresentação de uma forma que acabou por complementar a apresentação anterior, uma vez que, apresentaram a noção de dobro aos colegas, como pode ser constatado no excerto seguinte.

> **Sara:** Nós vimos que a mãe da Susana ia fazer dois bolos, por isso ia precisar do dobro dos ingredientes.

Lucas: Por exemplo, na receita dizia que a mãe da Susana utilizava 4 ovos, então nós fizemos 4 vezes 2 igual a 8. Para dois bolos ela vai precisar de 8 ovos.

(Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Subtarefa 2

Estratégia de contagem

Salvador e Íris, para contabilizarem a quantidade dos diferentes ingredientes necessários para serem feitos três bolos, recorrem a uma estratégia de contagem. Estes alunos tiveram em conta os cálculos realizados na subtarefa anterior e, por isso, acrescentam mais uma 'medida' do ingrediente.

Durante o momento de discussão os alunos explicaram aos colegas como tinham resolvido esta subtarefa e referiram que:

Íris: Para fazer três bolos nós acrescentámos mais uma medida.

Salvador: Nós juntámos 4 mais 4 é igual a 8 e depois fizemos 8 mais 4 igual a 12. São precisas 12 chávenas de farinha para fazer três bolos.

(Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Através do raciocínio apresentado por estes alunos, concluo parecem recorrer a uma estratégia de contagem cujo procedimento de cálculo é contar por saltos, uma vez que, se baseiam nos resultados das somas das parcelas anteriores e dão um salto acrescentando uma nova parcela com o mesmo valor.

A figura 48 corresponde aos registos efetuados por estes alunos durante a resolução da subtarefa.

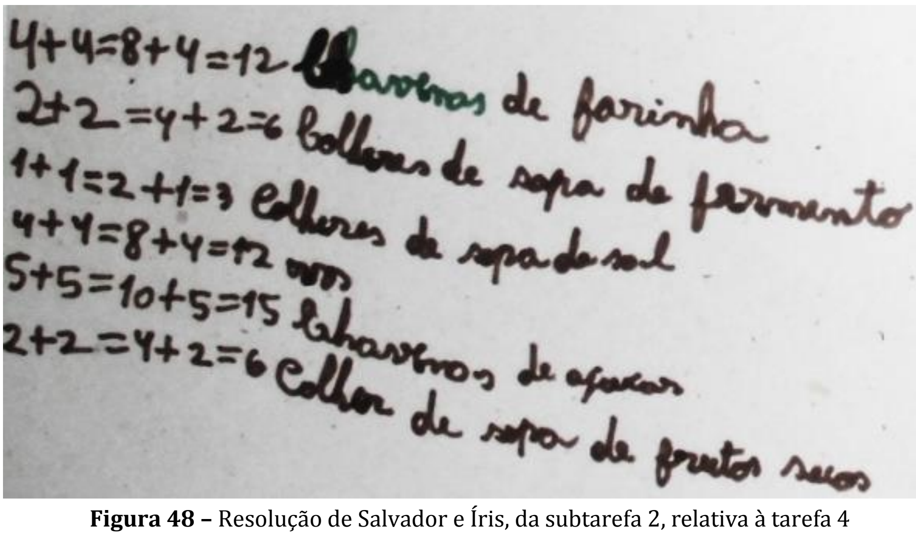


Figura 48 – Resolução de Salvador e Íris, da subtarefa 2, relativa à tarefa 4

Estratégias aditivas

Renato e Catarina utilizam na resolução desta segunda subtarefa uma estratégia aditiva.

Ao explicarem o seu raciocínio aos colegas, estes alunos referiram que:

> **Renato:** Nós fizemos contas de mais, porque foi a única forma como pensámos.
>
> **Catarina:** Nós vimos a receita para um bolo e somámos os ingredientes para sabermos quanto era necessário de cada um dos ingredientes para três bolos.
>
> (Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Perante a explicação dada por Catarina e Renato e pelos registos efetuados (fig. 49) considero que estes recorreram ao procedimento adicionar sucessivamente. Julgo a utilização deste procedimento, pois os alunos adicionam a quantidade do ingrediente o número de vezes de cada bolo, ou seja, se para um bolo é necessária 1 colher de sopa de sal, para calcularem a quantidade deste ingrediente para três bolos somam três vezes sucessivas o número um.

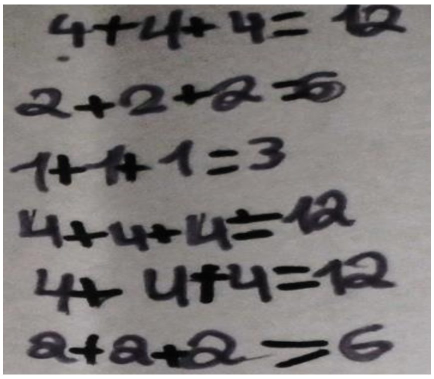


Figura 49 – Resolução de Renato e Catarina, da subtarefa 2, relativa à tarefa 4

Estratégias multiplicativas

Sara e Lucas foram novamente os alunos selecionados para apresentarem a sua estratégia/procedimento de cálculo utilizados para a realização desta segunda subtarefa. Tal como na questão anterior, estes alunos verificam que se precisam de saber a quantidade de ingredientes necessários para a confeção de três bolos, estão perante uma situação em que podem efetuar cálculos a partir do triplo desses números. Por isso, no momento de apresentação do seu trabalho os alunos elucidam os colegas para este facto.

Sara: Para sabermos os ingredientes para três bolos utilizámos o triplo.

Lucas: E fizemos assim, porque eram três vezes os ingredientes.

(Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Assim, estes alunos parecem utilizar o procedimento de cálculo que se designa por usar relações de triplo. Na sua folha de registos (fig. 50) constata-se a utilização de uma estratégia multiplicativa pois, em cada uma das expressões registadas, os alunos multiplicam a quantidade de um ingrediente por três, deixando assim explícita a noção de triplo.

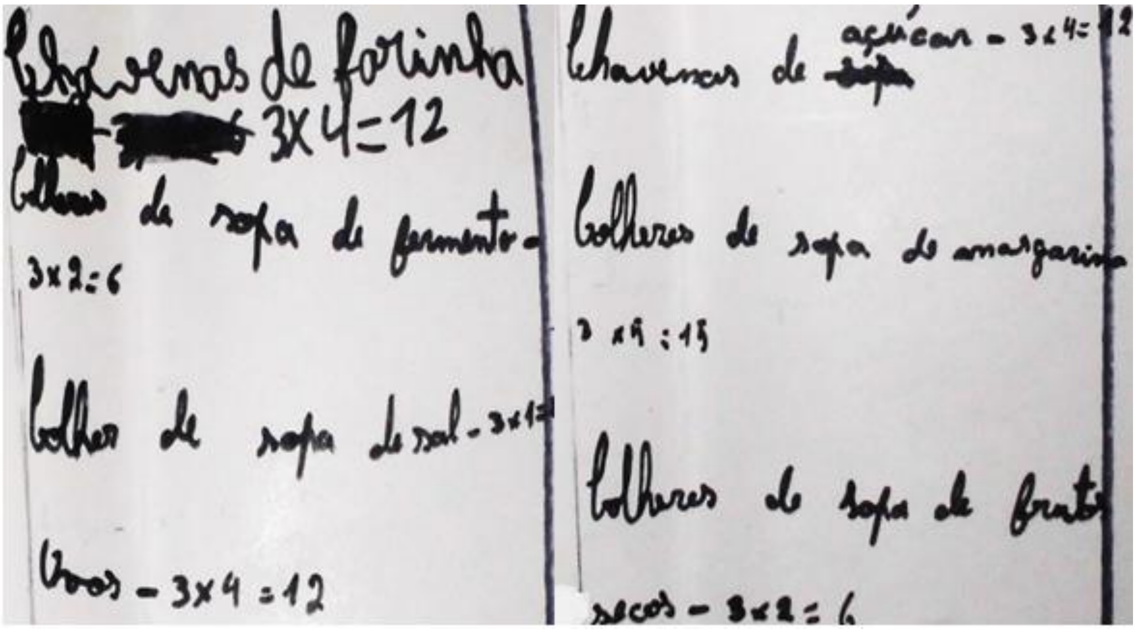


Figura 50 – Resolução de Sara e Lucas, da subtarefa 2, relativa à tarefa 4

Subtarefa 3

Estratégias Aditivas

Iara e Ana Rita recorrem a uma estratégia aditiva, para calcular o valor que a mãe da Susana irá receber quando vender dois bolos. Para efetuarem os cálculos, as alunas utilizam o procedimento de cálculo adicionar sucessivamente.

Como se pode constatar na figura 51, Iara e Ana Rita efetuam a soma de duas parcelas. O número 15 corresponde ao valor em euros de cada bolo, como tal para determinar o preço de dois bolos adicionam-no sucessivamente.

Os seus registos são apenas efetuados na horizontal, não havendo assim nenhuma eminencia do modo como calcularam o 15+15, mas muito provavelmente efetuaram um cálculo mental, uma vez que os números envolvidos são valores de referência.

Ao adicionarem sucessivamente o número quinze, as alunas calculam o preço de dois bolos e chegam ao resultado 30.

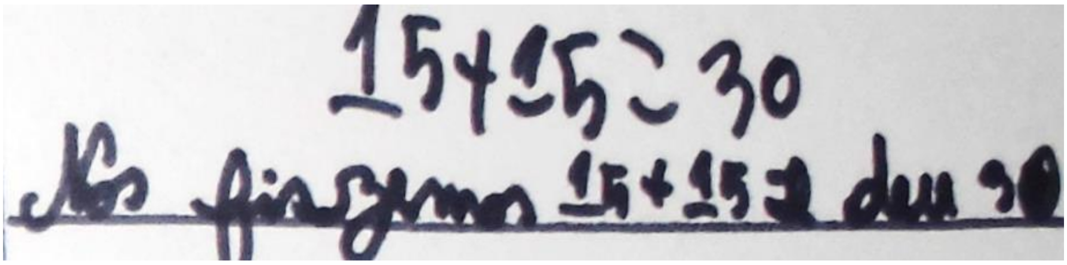


Figura 51 – Registos de Iara e Ana Rita da subtarefa 3, relativa à tarefa 4

No momento de apresentação aos colegas, as alunas referiram que:

Ana Rita: Nós fizemos 15 mais 15, e o resultado foi 30 euros.

Iara: E escrevemos isto na nossa folha debaixo da conta.

(Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Matilde e Henrique também utilizam uma estratégia aditiva, mas o procedimento de cálculo é diferente. Estes alunos resolvem a subtarefa com recurso ao procedimento adicionar em coluna (fig. 52). Este procedimento de cálculo consiste na soma de duas parcelas, em que a sua representação e respetiva adição é realizada na vertical.

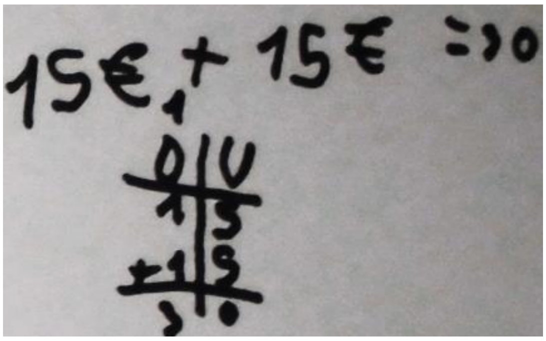


Figura 52 – Resolução de Matilde e Henrique, da subtarefa 3 relativa à tarefa 4

Tal como pode ser observado na figura 52, os alunos separam os algarismos e trabalham apenas com dígitos.

Para além disso, fazem a separação dos números tendo em conta as ordens (dezenas e unidades). Desta forma, adicionam os dois dígitos pertencentes às unidades e depois os dois dígitos pertencentes às dezenas.

Durante o momento de discussão coletiva, Matilde refere que:

> **Matilde:** Para termos a certeza que 15 mais 15 é 30 fizemos a conta em pé.

(Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Por esta razão, considero que estes alunos utilizam uma estratégia aditiva, cujo procedimento de cálculo é adicionar em coluna.

Estratégias multiplicativas

Relativamente às estratégias multiplicativas, existe um par que resolve a subtarefa com recurso a uma estratégia deste tipo. Para efetuar os cálculos necessários, Sara e Lucas utilizam o procedimento de cálculo usar produtos conhecidos (fig. 53).

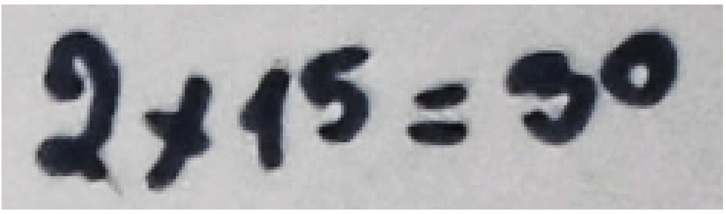


Figura 53 – Resolução de Lucas e Sara, da subtarefa 3, relativa à tarefa 4

Neste caso, os alunos calculam o valor de dois bolos através da expressão 2x15. Estes registos indiciam de imediato o recurso a uma estratégia multiplicativa.

No decorrer da discussão coletiva, Sara e Lucas explicam aos colegas o modo de resolução adotado. O seguinte excerto resulta desse mesmo momento.

> **Lucas:** Nós fizemos 2 vezes 15, porque sabíamos que um bolo custava 15€, e ao fazermos esta conta íamos saber o preço que a mãe da Susana ia receber pelos dois bolos. Nós sabíamos que era 30.
>
> **Sara:** Para termos a certeza pensámos de cabeça em 15 mais 15 e vimos que o resultado era mesmo 30.

(Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Pelo raciocínio apresentado durante o momento de discussão da subtarefa, parece-me que Lucas e Sara recorrem ao procedimento de cálculo usar produtos conhecidos, pois apesar de calcularem mentalmente 15 mais 15, à partida eles têm conhecimento do resultado simplesmente querem confirmá-lo e optam por fazê-lo desta forma.

Subtarefa 4

Estratégias Aditivas

As estratégias aditivas foram as mais utilizadas pelos alunos na resolução desta última subtarefa. João e Tiago foram um dos pares que recorreram a uma estratégia aditiva.

Ao explicitarem o seu raciocínio, estes alunos esclarecem que:

> **Tiago:** Nós sabíamos que um bolo custava 15 euros.
>
> **João:** Por isso, fizemos uma conta de mais e pensámos em 15 mais 15 mais 15 que dá 45.
>
> (Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

De facto estes alunos apresentam nos seus registos, a adição de três parcelas iguais cujo resultado é 45, isto numa única expressão horizontal (fig. 54).

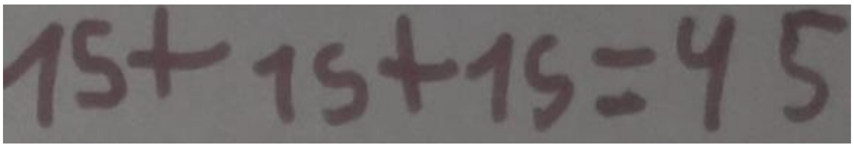


Figura 54 – Resolução de João e Tiago, da subtarefa 4 relativa à tarefa 4

Tal como os alunos referiram, para calcular o valor ganho pela mãe da Susana, caso esta vendesse três bolos, adicionaram três vezes sucessivas o número 15. Ao efetuarem a adição destas parcelas obtiveram o resultado. Por estas razões, parece-me que estes alunos utilizam uma estratégia aditiva e o procedimento de cálculo é a adição sucessiva.

Estratégias multiplicativas

Os alunos, Sara e Lucas foram novamente os únicos a recorrer a uma estratégia multiplicativa com o intuito de resolverem esta última subtarefa.

Nos seus registos (fig. 55), os alunos apenas apresentam a expressão 3x15=45, não explicitando o modo como calcularam o valor deste produto.

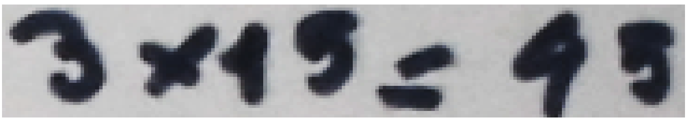


Figura 55 – Resolução de Sara e Lucas, da subtarefa 4, relativa à tarefa 4

No entanto, no momento de discussão coletiva, os alunos para além de explicarem como tinham chegado à expressão 3x15 referiram também como tinham efetuado os cálculos, expressando desta forma o procedimento de cálculo utilizado.

> **Sara:** Nós fizemos 3 vezes 15 e sabíamos que o resultado ia ser o triplo, porque eram três bolos.
>
> **Lucas:** Para fazer a conta pensámos na tabuada do 3. Fizemos primeiro 3 vezes 10 igual a 30, e depois pensámos em 5 vezes 3 que dá 15. Depois juntámos 30 mais 15 e deu 45. Por isso, o preço de três bolos é 45.
>
> (Discussão da tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Tendo em conta, a explicação dada por Sara e Lucas parece-me que os alunos recorreram a conhecimentos que tinham adquirido na exploração da tarefa realizada anteriormente, no âmbito deste projeto (construção da tabuada do 3). Desta forma, calculam o valor do produto da expressão 3x15 ao utilizar o procedimento usar a decomposição decimal de um dos fatores. Mais concretamente, este par decompõe o número 15 e pensa nele como sendo 10+5, de forma a simplificar os cálculos.

Síntese

Na tabela 10 consta uma síntese das estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos nas quatro subtarefas que constituem a tarefa 4.

Tabela 10 – Estratégias/Procedimentos utilizados pelos alunos na resolução da tarefa 4

		Tarefa 4 – Receita bolo-rei			
		Subtarefa 1	**Subtarefa 2**	**Subtarefa 3**	**Subtarefa 4**
De contagem	Contar por saltos	—	4	—	—
Aditivas	Adicionar sucessivamente	11	5	10	13
	Adicionar dois a dois	—	—	—	—
	Adicionar em coluna	—	—	3	—
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos	—	—	2	—
	Usar relações de dobro	6	—	—	—
	Usar relações de triplo	—	6	—	—
	Multiplicar em coluna	—	—	—	—
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores	—	—	—	2
	Não resolveram	2	4	4	4

Na subtarefa 1, os alunos recorrem tendencialmente a estratégias aditivas, sendo que, o único procedimento de cálculo efetuado é a *adição sucessiva*. Tal como Íris e Salvador existem mais 9 alunos a recorrer a esta estratégia e procedimento de cálculo. As estratégias multiplicativas são apenas utilizadas por 6 alunos. O procedimento de cálculo utilizado por estes alunos é o *uso de relações de dobro*. Existem dois alunos que não conseguem resolver a tarefa, e portanto, a análise é impossibilitada pela ausência de quaisquer registos.

Na subtarefa 2, as estratégias utilizadas pelos alunos foram várias, entre elas: de contagem, aditivas e multiplicativas. Salvador e Íris apresentam uma estratégia de contagem, e tal como eles existem mais dois alunos a fazerem-no. O procedimento de cálculo utilizado é *contar por saltos*. Catarina e Renato recorrem a uma estratégia aditiva, tal como 3 colegas, tendo estes alunos recorrido a um procedimento de *adição sucessiva*. As estratégias multiplicativas evidenciadas na resolução desta subtarefa baseiam-se no recurso a um procedimento de *relações de triplo*, tendo sido utilizado por seis alunos. Existiram quatro alunos que não resolveram esta subtarefa.

Para resolver a subtarefa 3, os alunos recorrem apenas a estratégias aditivas e multiplicativas. As estratégias aditivas baseiam-se na utilização de dois tipos de procedimentos. Para além, de Iara e Ana Rita que utilizam um procedimento de cálculo que consiste na *adição sucessiva* de um fator existem mais 8 alunos a fazerem-no. No entanto e, ainda relativo a estratégias aditivas, o procedimento *adicionar em coluna* é utilizado por 3 alunos. Por fim, Lucas e Sara recorrem a uma estratégia multiplicativa, cujo procedimento de cálculo é *usar produtos conhecidos*. Existem novamente quatro alunos que não realizam a subtarefa.

Tal como na subtarefa anterior, na subtarefa 4 os alunos recorrem ao mesmo tipo de estratégias (aditivas e multiplicativas). Existem 13 alunos que recorrem a estratégias aditivas, e utilizam o procedimento *adicionar sucessivamente.* Relativamente às estratégias multiplicativas, existem dois alunos que utilizam o procedimento *usar a decomposição decimal de um dos fatores*. Existem novamente quatro alunos que não realizam a subtarefa.

5.2. Dificuldades dos alunos

Nesta última secção, pertencente ao capítulo da análise de dados pretendo elaborar uma análise das dificuldades evidenciadas e manifestadas pelos alunos, no decorrer da exploração e discussão das tarefas realizadas no âmbito deste estudo. Desta forma, através das gravações áudio e de algumas notas de campo retiradas no momento de dinamização das tarefas procuro reconhecer e interpretar as dificuldades manifestadas pelos alunos. Estas dificuldades têm um cariz distinto e, portanto, decidi agrupá-las segundo a sua natureza.

Através da análise das produções dos alunos e da audição de momentos de sala de aula, que incluem explicações e dúvidas colocadas pelos alunos uns aos outros, percecionei que as principais dificuldades dos alunos estavam relacionadas com: (i) a compreensão dos enunciados; (ii) o sentido de número; (iii) a organização e apresentação dos registos; e (iv) a compreensão dos modos de pensar diferentes dos seus.

Compreensão dos enunciados. A compreensão dos enunciados é uma dificuldade que já havia sido referida pela professora cooperante numa conversa informal, antes do início da realização deste estudo. Como tal, ao possuir este conhecimento procurei elaborar enunciados e propor tarefas nos quais estes fossem suficientemente explícitos, simples e possuíssem pouco texto. Apesar de esta preocupação advir de algo que já me tinha sido dado a conhecer pela professora cooperante, também tinha noção das competências de leitura que estes alunos possuíam, uma vez que, já tinha realizado estágio com eles no ano letivo anterior.

Nas tarefas propostas, com exceção da tarefa 3 'Construção da tabuada do 3', que tinha um contexto distinto das tarefas 1, 2 e 4, procurei que os enunciados não tivessem muito texto, recorrendo a imagens que, para além de ilustrativas da situação associada ao contexto, incluíssem informações e apoiassem os alunos na compreensão e resolução das tarefas.

Nos momentos de apresentação das tarefas selecionava sempre um aluno para ler os enunciados e, após essa leitura, os alunos podiam colocar as suas dúvidas. Estas dúvidas relacionavam-se essencialmente, com o significado de palavras e com a incompreensão do que lhes era solicitado. Esta última dificuldade era motivo, para que se sentissem desmotivados e não realizassem o trabalho proposto.

Recordo-me que na primeira tarefa desenvolvida no âmbito deste projeto, no final do enunciado, aparecia a seguinte frase: 'Explica como pensaste!'. Após o momento de leitura em voz alta, os alunos permaneceram em silêncio à espera que eu lhes perguntasse se existiam dúvidas, mas Iara pediu de imediato um esclarecimento.

> **Iara:** Cátia, o que é explicar como pensaste?
>
> **Eu:** Alguém consegue ajudar a Iara, e esclarecer o que significa esta frase?
>
> **Martim:** Posso? (colocando o dedo no ar)
>
> **Eu:** Sim, explica lá.
>
> **Martim:** Eu acho que é escrever com palavras o que fizemos para resolver o problema.
>
> **Raquel:** Eu também acho. Primeiro fazes as contas e depois escreves com palavras como é que as fizeste.

(Apresentação da tarefa 1 – Pacotes de leite; 19-11-2014)

Este momento foi essencial, pois a frase 'Explica como pensaste!' foi utilizada com bastante frequência nos enunciados das tarefas propostas, uma vez que, pretendia que os alunos não se esquecessem que, para além de resolverem a tarefa teriam de posteriormente, descrever e explicar como é que o tinham feito. Este aspeto era fundamental, pois era uma forma de eu conseguir compreender os raciocínios dos alunos e as respetivas produções. Como tal, ao longo das várias tarefas fui-lhes sempre pedindo que explicassem como pensaram.

Considero que a explicação do modo como pensaram foi sem dúvida uma dificuldade para a grande maioria da turma, não só porque inicialmente tendiam a não fazê-lo, mas também porque não existia o hábito de explicar os seus modos de pensar através de registos escritos.

Ainda relacionado com os enunciados e com esta expressão foram várias as situações em que necessitei de alertar os alunos para a distinção entre, explicação do modo de pensar e a resposta dada ao problema que se encontravam a resolver. Como para alguns alunos era difícil escrever sobre o modo como tinham resolvido a tarefa, alegavam que ao darem uma resposta completa e correta ao problema era suficiente e traduzia o seu modo de pensar. Esta ideia acabou por ser atenuada após várias insistências da minha parte.

O seguinte excerto corresponde a um episódio de sala de aula que ocorreu no momento de discussão coletiva da subtarefa 1, correspondente à tarefa 2, e ilustra a importância que é dada pelos alunos à resposta 'completa' aos problemas.

> **Ana Rita:** Eu fiz 32 mais 32 azulejos, e vi que davam 64 azulejos.
>
> **Eu:** Muito bem, obrigada!
>
> **Mariana:** Mas, Cátia qual é a resposta?
>
> **Ana Rita:** Eu disse! 64 azulejos.
>
> **Mariana:** Mas não escreveste cá em baixo a resposta completa.
>
> **Eu:** Mariana já vos disse que para mim é mais importante explicarem como pensaram, do que perderem muito tempo a dar respostas completas aos problemas e depois não registarem como resolveram a tarefa.

(Discussão coletiva da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-2014)

Desta forma, parece-me que a ideia dos alunos de explicação de raciocínio está associada à existência de uma resposta não estando necessariamente relacionada com a apresentação do raciocínio.

Como referi anteriormente, juntamente com enunciados das tarefas propostas incluía sempre uma imagem ou mais caso se justificasse. O enunciado da subtarefa 1 relativa à tarefa 2, para além de um pequeno texto incluía a imagem de uma parede com azulejos (ver fig. 4). Durante a exploração da tarefa, Tiago evidência dificuldades na interpretação da imagem, pois não consegue perceber quais os azulejos que já estão colocados e os que ainda faltam colocar. O aluno pede-me para ir junto dele e coloca a seguinte questão:

> **Tiago:** Quais são os azulejos que já estão colocados? Os azuis-claros, os escuros ou estes brancos? (Apontando para a imagem)
>
> **Eu:** Eu não te posso responder a essa pergunta, porque se não estou a dar-te a resposta. Olha bem para a imagem…
>
> **Tiago:** Eu já tentei, mas não consigo perceber.

(Resolução da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-2014)

Este aluno acabou por não efetuar quaisquer registos, mas durante o momento de discussão coletiva intervém e refere que :

> **Tiago:** Eu pensei que os azulejos que tinham sido colocados eram todos os que estavam na imagem. Os azuis claros, escuros e brancos.

(Discussão da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-2014)

Considero que esta dificuldade, para além de ter resultado de uma incompreensão da imagem, também foi originada por um erro cometido por mim quando adaptei o enunciado da tarefa original. No enunciado da tarefa original é referido que estão a ser colocados azulejos com dois tons de azul, mas no enunciado da tarefa apresentada aos alunos apenas refiro que estão a ser colocados azulejos, este facto fez com que alguns alunos interpretassem os azulejos brancos como pintados daquela cor e não que estivessem ainda por pintar de azul.

Sobre o enunciado da tarefa 4 'Receita de bolo-rei' (subtarefa 1), não foram colocadas quaisquer dúvidas no momento de apresentação da tarefa. No entanto, com a exploração da tarefa e ao circular pela sala, apercebi-me que existia um par de alunos, que apesar de conhecer o conceito de receita e já ter contactado com uma, não conseguiam transpor esses conhecimentos para resolver a tarefa.

Raquel e Martim estavam muito conversadores durante a resolução da tarefa, e por isso decidi ir até junto deles e tentar compreender se já tinham terminado o trabalho. Ao aproximar-me percebi de imediato que estavam a brincar com as canetas um do outro, por isso decidi perguntar-lhes:

Eu: E então, podem explicar-me os registos que fizeram na vossa folha?

Raquel: Nós já fizemos tudo! Fizemos esta conta de mais.

Martim: Para sabermos os ingredientes para dois bolos juntámos todos, e são 22 ingredientes.

Eu: Como assim 22 ingredientes?

Raquel: Juntámos 4 mais 2 mais 1 mais 4 mais 4 mais 5 mais 2.

Eu: Oiçam com atenção! Para uma receita são necessárias estas quantidades destes ingredientes (apontando para o enunciado da tarefa). Aquilo que eu agora quero saber é que quantidade desses ingredientes são precisos para dois bolos!

Martim: Sei lá, que contas é que podemos fazer?

Eu: Concentrem-se, falem um com o outro e vejam bem como podem resolver o problema.

(Resolução da subtarefa 1, relativa à tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 06-01-2015)

Após a minha intervenção, os alunos conversaram um pouco, mas não conseguiram resolver tarefa. A figura 56 corresponde aos registos efetuados por este par, em que os números parecem representar quantidades de alguns ingredientes necessários para a confeção de um bolo.

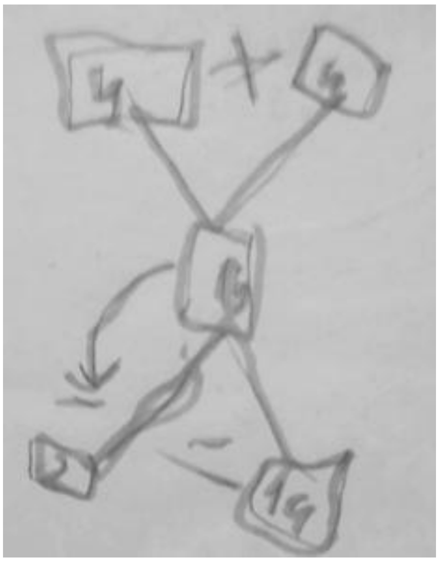


Figura 56 – Resolução de Martim e Raquel da subtarefa 1, relativa à tarefa 4

Perante as evidências aqui apresentadas, considero que estes alunos não compreenderam o enunciado da subtarefa 1 e não souberam interpretar o que lhes foi solicitado, apesar de terem tido oportunidade de exporem as suas dúvidas.

O sentido de número. Tendo em conta, os pressupostos defendidos por McIntosh et al. (1992) e o seu quadro teórico acerca das diferentes componentes do sentido de número, considero que as principais dificuldades dos alunos desta turma estão relacionadas com as seguintes componentes: sistemas de valores de referência, compreensão das relações entre as operações e compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários.

No que respeita às dificuldades relacionadas com sistemas de valores de referência há a assinalar a não utilização por parte dos alunos de estratégias que envolvam a decomposição dos números em números de referência. Na resolução da subtarefa 3, relativa à tarefa 4, Matilde e Henrique recorrem a uma estratégia aditiva e a um procedimento de adicionar em coluna, para calcular o valor a pagar por dois bolos-rei. Ao efetuarem os cálculos em coluna, estes alunos ao invés de estarem a calcular com números estão a encará-los e a utilizá-los como dígitos (ver figura 32). Matilde e Henrique poderiam efetuar a soma de 15+15 recorrendo a números de referência como o 5 e o 10, até porque o número 15 pode ser visto como a adição do 10 mais 5. No entanto, preferem efetuar este tipo de cálculos que revelam pouca destreza com os números.

Este par serve de exemplo para ilustrar as situações em que os alunos poderiam recorrer a números de referência para efetuarem os seus cálculos mas, efetivamente, não o fazem. O mesmo acontece durante a realização e discussão da tarefa 3. Os alunos ao serem confrontados com as várias expressões que compõem a tabuada do 3 mostram algumas dificuldades em calcular o valor dos produtos, usando estratégias multiplicativas. Mesmo quando recorrem apenas à decomposição de um dos fatores utilizam os produtos imediatamente anteriores. Isto é, para calcularem o valor do produto 8x3 recorrem à expressão 7x3 e adicionam-na à expressão 1x3, não recorrendo por exemplo ao 5x3 e ao 3x3.

Relativamente à compreensão das relações entre as operações, é importante salientar que, no início deste estudo, os alunos já detinham uma compreensão profunda da operação adição, uma compreensão menos consolidada da operação subtração, e a operação multiplicação foi dada a conhecer mais tarde.

Como a operação multiplicação era novidade para os alunos, considerei natural o facto de recorrerem a estratégias aditivas para solucionar problemas que induziam à utilização da operação multiplicação e das suas propriedades.

Na resolução da subtarefa 1 pertencente à tarefa 2, Íris e Salvador reconhecem que podem solucionar a tarefa recorrendo a uma estratégia multiplicativa, pois verificam que para calcular o número de azulejos colocados na parede podem utilizar a expressão 2x32. Esta expressão significa que existe uma malha retangular com diferentes tonalidades de cor, e a cada tonalidade correspondem 32 azulejos. Por esta razão, os alunos consideram correto determinar o produto de 2x32. No entanto como estão no início da aprendizagem da operação multiplicação não conseguem calcular este produto. Como tal, decidem 'abandonar' este raciocínio e recorrer a um procedimento associado a uma estratégia aditiva. Nos registos efetuados por Íris e Salvador (fig. 57) consta a expressão do raciocínio multiplicativo e o respetivo produto que, no entanto, foi calculado através de uma estratégia aditiva.

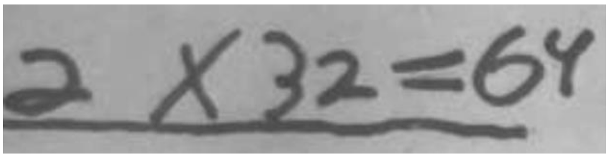


Figura 57 – Resolução de Íris e Salvador, da subtarefa 2, relativa à tarefa 2

Finalmente, no que respeita à compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários, considero que as dificuldades associadas aos enunciados das tarefas, já referidas anteriormente, traduzem as dificuldades relativas a esta componente. Efetivamente, compreender a situação associada ao contexto das tarefas e interpretar e 'retirar' das respetivas imagens informação útil que ajude a resolver os problemas de forma mais apropriada constituiu uma dificuldade manifestada por alguns alunos.

Organização e apresentação dos registos. Os registos dos alunos foi um aspeto com que me preocupei, por dois motivos. Um, porque seriam a base de dados importantes que necessitaria de analisar. Outro, porque não só considero fundamental que os alunos se habituem a explicitarem os seus raciocínios o mais claramente possível, mas também porque era importante que estes registos fossem claros para os restantes colegas.

Como já referi anteriormente, na resolução das tarefas, os alunos utilizavam folhas de tamanho A3, para que os seus registos fossem visíveis. Era importante que isto acontecesse, para que nos momentos de discussão coletiva todos pudessem observar os registos que estavam a ser discutidos. Como não estavam habituados a fazê-lo foi algo que foram melhorando com o passar do tempo.

Relacionados com os registos, detetei situações em que os efetuavam de forma pouco explícita quanto ao modo de pensar. Este facto, para além de prejudicar os alunos, pois quando tinham de apresentar o trabalho realizado acabavam por se ‘perder’ e não sabiam como explicitar o seu modo de pensar, dificultava o meu trabalho também porque ao analisá-los nem sempre consegui compreender como certos alunos tinham pensado.

Na resolução da tarefa 1, Catarina determina o número de pacotes de leite que estão na palete. No entanto, efetua diferentes registos sobre esse mesmo número, isto é, a aluna efetua várias representações do mesmo tipo.

Apesar de evidenciar conhecimento sobre algumas representações do número 27, a aluna acaba por utilizar representações incorretas e os seus registos não são claros, pois não explicitam o modo de pensar e de calcular o número total de pacotes. A fig. 58 representa os registos efetuados por esta aluna durante a resolução da tarefa.

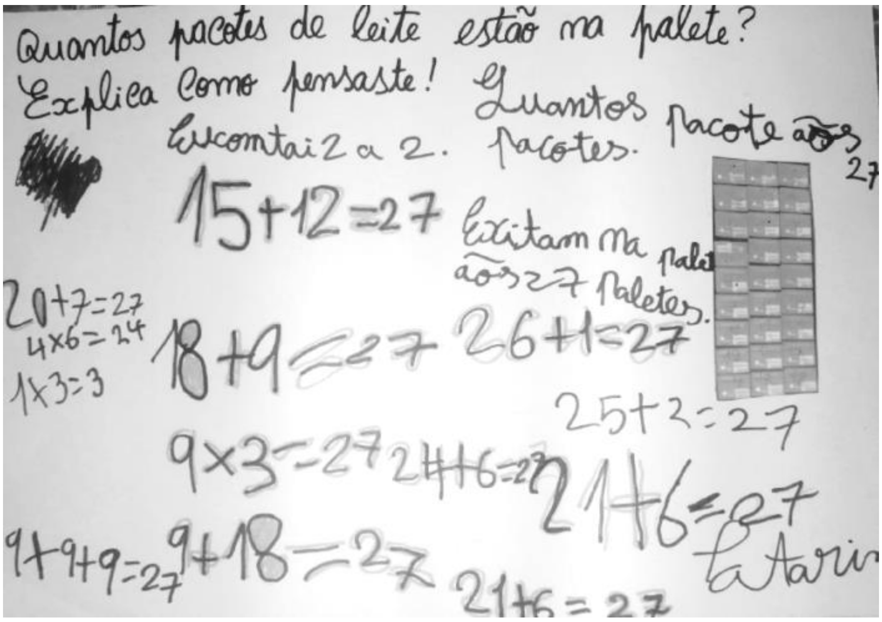


Figura 58 – Resolução de Catarina da tarefa 1

Iara e Ana Rita, na resolução das subtarefas 1 e 2 pertencentes à tarefa 4, efetuam registos que posteriormente, quando questionadas sobre o trabalho que estavam a desenvolver, mostram dificuldades em explicar. As alunas calculam os ingredientes necessários para a confeção de dois e três bolos, mas redigem-nos de forma confusa e desordenada. Ao observar esta produção é difícil compreender quais os cálculos pertencentes a cada uma das subtarefas. A figura 59 representa os registos efetuados por este par.

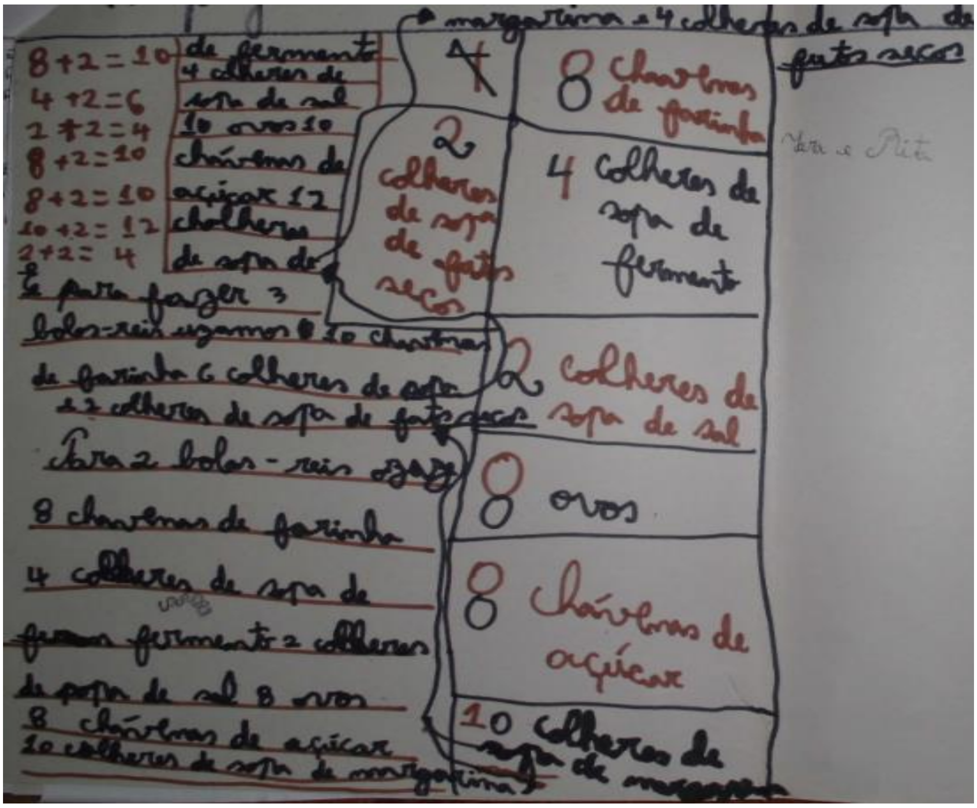


Figura 59 – Resolução de Iara e Ana Rita da subtarefa 1 e 2, relativas à tarefa 4

Ao serem chamados à atenção diversas vezes, os alunos foram compreendendo, tarefa após tarefa, o quão importante era manterem os seus registos organizados e claros, para que, no momento em que tivessem a apresentar o trabalho realizado, se pudessem apoiar neles.

Ainda relativamente aos registos, tive a perceção que os alunos sentiam dificuldades na explicitação dos seus pensamentos e, em particular, apresentavam dificuldades em registar por escrito os seus modos de pensar.

Ao longo da dinamização das quatro tarefas procurei que os alunos expressassem sempre o modo como tinham pensado, mas este foi um aspeto que tive de 'batalhar' até ao fim. Parece-me que o facto de estarem habituados a realizar tarefas e a corrigi-las sem exporem os seus raciocínios, fez com que esta fosse uma dificuldade evidenciada pela grande maioria dos alunos. No entanto, devo referir que, quando questionados pelos colegas ou por um dos adultos da sala, os alunos, uns melhor que outros, conseguiam expor os seus raciocínios oralmente.

Existiram ainda situações, nomeadamente na dinamização da tarefa 3, que os alunos evidenciaram com maior clareza dificuldades em transmitir as suas ideias, relacionando-as com conceitos e expressões matemáticas. Apesar de ter consciência de que a capacidade de registo que traduz os raciocínios dos alunos é algo que eles aprendem a fazer e a compreender ao longo do tempo decidi referenciar esta dificuldade. A tarefa envolvia o cálculo de produtos de diferentes expressões numéricas, e por se tratar da tabuada podiam ser estabelecidas relações entre os produtos calculados anteriormente. Quando consciencializados para este facto, existem alunos que utilizam estas relações mas sentem dificuldades em expressá-las.

O excerto seguinte diz respeito ao momento de exploração e discussão da tarefa no qual Renato participa, referindo que:

> **Renato:** Eu pensei no 5 vezes 3, a partir do 4 vezes 3 mais 1 vezes 3.
>
> **Eu:** Então e como é que nós podemos registar a tua ideia? Consegues ajudar-me?
>
> **Renato:** Então 5x3.
>
> **Eu:** Sim, mas disseste que tinhas pensado em duas expressões para calcular o 5x3, portanto é essa ideia que tem de ficar clara!

(Momento de exploração e discussão da tarefa 3 – Construção da tabuada do 3; 02-12-14)

Compreensão dos modos de pensar distintos dos seus. Tal como era complicado para alguns alunos redigirem os seus modos de pensar, também era difícil para outros compreenderem certas explicitações dadas pelos colegas sobre os raciocínios efetuados. Uma vez que a cultura de sala de aula que procurei criar promovia e valorizava a discussão e partilha de raciocínios, ideias e modos de pensar, procurei que os alunos o fizessem nos momentos de discussão coletiva.

Nas tarefas iniciais os alunos sentiam-se incomodados por estarem de pé, perante a restante turma e terem de falar sobre o modo como tinham pensado e raciocinado. Apesar de se sentirem motivados por poderem partilhar conhecimentos, os alunos sentiam-se envergonhados e, por isso, falavam muito direcionados para mim e em voz baixa. Para além disso, quando as tarefas eram realizadas a pares, nunca existia concordância entre os dois membros sobre os registos efetuados na folha. Estes aspetos foram sendo trabalhados e fui incentivando-os a falarem para os colegas, colocando-me estrategicamente ao fundo da sala, e ajudei-os a compreenderem a responsabilidade que deve existir quando se trabalha com uma outra pessoa.

Se nos momentos de discussão coletiva, os alunos partilhavam conhecimentos e ideias, era natural que existissem dúvidas e questões. Estas dúvidas eram colocadas em voz alta aos colegas que estavam a apresentar e, na globalidade, eram dúvidas relacionadas com os raciocínios apresentados e com as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados.

Os procedimentos de cálculo associados a estratégias multiplicativas foram aqueles que mais dúvidas causaram. Como se pode verificar nas sínteses resultantes da análise de cada tarefa, as estratégias aditivas são as mais frequentes. Por esta razão quando um colega apresentava um raciocínio multiplicativo era alvo de questões. Estas questões provinham normalmente dos alunos que recorriam a estratégias de contagem e aditivas. Por exemplo, na resolução da tarefa 1, Lucas recorre a uma estratégia multiplicativa e ao procedimento de cálculo usar produtos conhecidos. Enquanto apresentava o seu raciocínio, Mariana interveio:

> **Mariana:** Mas como é que tu sabias que era 3 vezes 9? Não estou a compreender de onde vem o número 9 e o número 3!
>
> **Lucas:** Então o 3 é o número de pacotes que estão nas linhas e o 9 é o número de pacotes por colunas. Então vi que se fizesse 3 vezes 9 ia chegar ao resultado dos pacotes de leite todos.
>
> (Discussão coletiva da tarefa 1 – Pacotes de leite; 19-11-14)

A dúvida de Mariana estava relacionada com o modo como o colega tinha visualizado a imagem, e como este compreendeu que através da multiplicação daqueles dois números poderia determinar o total de pacotes de leite presentes na palete. Após a resposta dada por Lucas e de este ter explicado o seu raciocínio recorrendo à imagem do enunciado, a colega ficou esclarecida.

Na tarefa 2, mais concretamente, na subtarefa 1, Sara e Lucas utilizam uma estratégia multiplicativa para calcularem o número de azulejos colocados na parede. Tal como Mariana, Raquel não consegue compreender o raciocínio destes alunos, em particular, a natureza dos números envolvidos.

O excerto seguinte resulta do momento em que Raquel questiona os alunos, Sara e Lucas sobre o seu modo de pensar.

> **Raquel:** Não percebi como é que vocês chegaram ao número 8!
>
> **Sara:** Então, olha aqui para a imagem que está no quadro. Nós vimos que havia 8 azulejos na horizontal e 8 na vertical (apontando para a imagem).
>
> **Lucas:** Depois chegámos ao 64.
>
> (Discussão da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-14)

Ainda relativa à apresentação de Lucas e Sara emergiu uma outra questão relativa ao seu modo de pensar e sobre como tinham calculado o valor do produto da expressão 8x8.

O excerto seguinte resulta desse momento:

> **Catarina:** E como é que vocês sabem que 8 vezes 8 são 64? Nós nem sabemos a tabuada!
>
> **Sara:** Nós fizemos com lápis, a adição do número 8, oito vezes e, depois fomos fazendo as contas em árvore e chegámos ao número 64.
>
> (Discussão da subtarefa 1, relativa à tarefa 2 – Azulejos; 25-11-14)

Também na subtarefa 2, da tarefa 4 'Receita de bolo-rei', os alunos questionaram, novamente a Sara e o Lucas, pois foram o único par que recorreu a uma noção de triplo e a expuseram ao explicitarem o raciocínio efetuado.

> **Sara:** Nós para calcularmos os ingredientes para três bolos fizemos o triplo.
>
> **Renato:** O triplo?
>
> **Lucas:** Sim o triplo, porque eram três bolos. Nós multiplicamos a quantidade de cada ingrediente por três. E depois para sabermos o resultado pensamos na tabuada do 3 que tínhamos aprendido.
>
> (Discussão da subtarefa 2, relativa à tarefa 4 – Receita de bolo-rei; 6-01-15)

Face ao exposto, concluo este capítulo com a ideia de que as dificuldades dos alunos são originárias de aspetos distintos, umas relacionadas com aspetos linguísticos e interpretativos e outras relacionadas com a própria aprendizagem da Matemática.

As dificuldades sentidas, no que respeita à compreensão dos enunciados, estão relacionadas com três componentes da área do Português, nomeadamente com a compreensão, interpretação e leitura de textos. No entanto, dificuldades como apresentação de raciocínios oralmente e para os colegas e comunicação com o grupo turma estão relacionadas com a componente de expressão oral.

Relativamente, às restantes dificuldades podem ser compreendidas como resultantes de diferentes aspetos relacionados com a área da Matemática, nomeadamente, com o desenvolvimento de sentido de número.

Capítulo VI – Conclusão

Este estudo tem como objetivo compreender como lidam os alunos com tarefas de multiplicação, tendo em vista a sua resolução. O estudo é orientado por duas questões, que estão relacionadas com o modo como os alunos resolvem problemas cuja operação é a multiplicação. As questões de estudo são:

- Quais as estratégias e procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação?
- Que dificuldades revelam os alunos na resolução dessas tarefas?

Este estudo decorre no âmbito do estágio realizado numa escola básica, pertencente a um agrupamento de escolas do distrito de Setúbal, numa turma de 2.º ano.

Esta investigação enquadra-se num paradigma interpretativo e segue uma abordagem qualitativa. Constituiu, simultaneamente, uma investigação sobre a própria prática porque ao longo do desenvolvimento do estudo refleti sobre as minhas práticas letivas com vista a promover a aprendizagem dos alunos, em particular, no que diz respeito à multiplicação.

O presente capítulo encontra-se organizado em duas secções. Na primeira secção apresento as conclusões do estudo, respondendo às respetivas questões. Na segunda secção elaboro uma reflexão sobre o desenvolvimento do projeto.

6.1. Conclusões do estudo

As conclusões do estudo serão organizadas a partir das questões de investigação: (i) Quais as estratégias e procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação? e (ii) Que dificuldades revelam os alunos na resolução dessas tarefas?

6.1.1. Estratégias e procedimentos de cálculo

A tabela seguinte inclui as diferentes estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos desta turma na resolução das quatro tarefas de multiplicação, propostas no âmbito deste projeto de investigação.

Tabela 11 – Estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos

Estratégias	Procedimentos de cálculo
Estratégias de contagem	Contar por saltos
	Contar de um em um
Estratégias aditivas	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
	Usar somas conhecidas
Estratégias multiplicativas	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar relações de triplo
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores
	Multiplicar em coluna
Perceção visual de uma quantidade	______________

Como se pode observar na tabela 11, na resolução das tarefas, os alunos recorreram a quatro tipos de estratégias diferentes: estratégias de contagem, estratégias aditivas, estratégias multiplicativas e perceção visual de uma quantidade. É de assinalar que esta última estratégia emerge da análise dos dados, não fazendo parte do quadro de categorias de análise adotado para este estudo, tendo sido este baseado nos resultados do estudo realizado por Mendes (2012).

Esta estratégia foi denominada por perceção visual de uma quantidade, uma vez que, resultou de um raciocínio no qual os alunos analisaram a imagem da tarefa e constataram que se tratava de uma disposição retangular com um determinado número de objetos.

Associada à estratégia de contagem, identificam-se dois procedimentos de cálculo: *contar por saltos* e *contar de um em um*. Relacionados com estratégias aditivas surgiram os procedimentos de cálculo: *adicionar sucessivamente*, *adicionar dois a dois*, *adicionar em coluna* e *usar somas conhecidas.* Os alunos que recorreram a estratégias multiplicativas usaram um dos seguintes procedimentos de cálculo: *usar produtos conhecidos, usar relações de dobro, usar relações de triplo, usar uma decomposição não decimal de um dos fatores, usar a decomposição decimal de um dos fatores* e *multiplicar em coluna.* À estratégia – perceção visual de uma quantidade, não surge associado nenhum procedimento de cálculo, dado que esta estratégia corresponde à identificação de uma determinada quantidade sem recorrer a qualquer tipo de cálculos.

Os resultados deste estudo revelam, assim, que os alunos usam estratégias diferentes para resolver as tarefas, recorrendo a uma grande diversidade de procedimentos de cálculo. Esta diversidade de procedimentos é também assinalada por Mendes (2012) quando analisa os procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação.

Embora não tenha como objetivo estudar a evolução das estratégias e dos procedimentos de cálculo dos alunos, optei por construir duas tabelas – uma que sintetiza todas as estratégias dos alunos usadas nas resoluções das quatro tarefas (Anexo 4) e outra que sintetiza todos os procedimentos de cálculo usados também na resolução das mesmas (Anexo 5). Estas tabelas facilitam a identificação de alguns padrões associados às estratégias usadas e às respetivas tarefas.

Analisando a tabela do anexo 4, pode observar-se que na resolução da tarefa 1, as estratégias mais utilizadas são as aditivas, tal como na tarefa 2. Na tarefa 3, os alunos utilizam com maior frequência as estratégias multiplicativas, e na última tarefa voltam novamente a recorrer com maior frequência às estratégias aditivas. É de realçar que no que respeita à tarefa 3 'Construção da tabuada do 3', os alunos numa fase inicial recorrem a procedimentos de cálculo associados a estratégias aditivas e, à medida que a tarefa vai sendo explorada, alguns alunos abandonam este tipo de raciocínio e optam por procedimentos de cálculo associados a estratégias multiplicativas.

Na mesma tabela, pode observar-se que é nas duas primeiras tarefas que há um maior número de alunos que recorre a estratégias por contagem. Como estavam no início da aprendizagem desta operação, este resultado parece indiciar que, nesta fase, estes alunos situar-se-iam no primeiro nível de cálculo da multiplicação (Brocardo, Delgado & Mendes, 2005).

Pode também observar-se que, ao longo da resolução das tarefas, há uma preferência dos alunos pelas estratégias aditivas. Como referi ao longo deste trabalho, os alunos estavam habituados a resolver tarefas que envolvessem a operação adição, mostrando assim algum à-vontade em efetuar cálculos aditivos. O estudo realizado por Ambrose et al, (2003) corrobora a ideia de que, no início da aprendizagem da multiplicação, o recurso a estratégias do tipo aditivo é recorrente.

No entanto, após a exploração das duas primeiras tarefas, verifica-se uma maior adesão a estratégias multiplicativas. Poderão existir várias razões para este facto, nomeadamente: a compreensão de algumas características e propriedades desta operação, a perceção de como podem calcular utilizando este tipo de estratégias e a vontade de quererem utilizar estratégias que anteriormente tinham sido discutidas e consideradas 'mais eficazes'.

De acordo com Mendes, Brocardo e Oliveira (2013), o tipo de estratégias que os alunos utilizam para resolverem tarefas de multiplicação são reflexo das ideias que estes possuem sobre esta operação.

A análise das produções dos alunos e o discurso que desenvolvem no momento de discussão das tarefas evidencia algumas situações em que os alunos regridem no tipo de estratégias enquanto as resolvem. Apesar de alguns alunos reconhecerem que poderiam resolver as tarefas recorrendo a estratégias multiplicativas, a dificuldade em calcular o valor dos produtos, fazia-os recuar e utilizar procedimentos de cálculo associados a estratégias aditivas, com os quais estavam mais familiarizados. Assim, por vezes, quando iniciavam a resolução da tarefa indiciam o uso de uma estratégia que revela um nível de aprendizagem da multiplicação superior àquele que acabam por revelar na resolução da tarefa.

Existem também alunos que recorreram sistematicamente às mesmas estratégias de cálculo quando resolvem as tarefas propostas. Matilde, Henrique, João e Mariana são alunos que ao longo das diferentes tarefas recorrem apenas a estratégias aditivas, apesar de utilizarem diferentes procedimentos de cálculo. Por sua vez Lucas, Sara e Leona utilizam, com bastante frequência, estratégias multiplicativas, sendo esta opção mais percetível nas últimas tarefas. A ideia que há alunos que revelam uma preferência por uma determinada estratégia é também assinalada por Mendes (2012).

À semelhança do que sucedeu nas categorias de análise das estratégias, no decorrer da análise de dados emergiram outras categorias de análise dos procedimentos diferentes das que constam no quadro de categorias de análise adotado para este estudo (Mendes, 2012). Como tal, foram considerados os seguintes 'novos' procedimentos: *usar somas conhecidas* e *usar relações de triplo*.

Analisando a tabela do anexo 5, na resolução da tarefa 1, o procedimento *adicionar sucessivamente* foi o mais utilizado, já na tarefa 2 os alunos recorreram com maior frequência ao procedimento *adicionar dois a dois*. Na resolução da tarefa 3, o procedimento *adicionar sucessivamente e usar uma decomposição não decimal de um dos fatores* foram os mais usados. Por sua vez, na tarefa 4 os alunos utilizaram com maior frequência o procedimento *adicionar sucessivamente.*

Pode também observar-se que os alunos quando resolvem tarefas cuja estratégia usada é de contagem, o procedimento mais utilizado é *contar de um em um.* Por sua vez, quando usam estratégias aditivas há uma maior variedade de procedimentos a serem utilizados. No entanto, o procedimento *adicionar sucessivamente* é o mais utilizado pelos alunos. Esta evidência pode ser justificada pelo facto de estes entenderem que a operação multiplicação resulta de uma adição sucessiva de parcelas iguais. Efetivamente, numa fase inicial da aprendizagem da multiplicação, os alunos 'encaram' o produto de dois fatores como sendo a adição sucessiva de um determinado número de parcelas obrigatoriamente iguais. À medida que vão evoluindo na compreensão desta operação, como resultado das tarefas propostas, recorrem a procedimentos de cálculo associados a estratégias multiplicativas (Mendes, 2012).

Relativamente às estratégias de multiplicação, os procedimentos de cálculo *usar produtos conhecidos*, *usar relações de dobro* e *usar relações de triplo* são os mais comuns. No entanto, foram utilizados outros procedimentos como *multiplicar em coluna, usar a decomposição decimal de um dos fatores* e *usar uma decomposição não decimal de um dos fatores*.

Há também a tendência de alguns alunos para a utilização frequente de determinados procedimentos de cálculo. Iara e Renato são os dois alunos que mais recorrem ao procedimento *adicionar sucessivamente*. João e Diana têm tendência a utilizar frequentemente o procedimento *adicionar dois a dois*.

Tal como as estratégias são um reflexo das ideias dos alunos relativa à multiplicação (Fosnot & Dolk, 2001b) os procedimentos de cálculo são utilizados de acordo com o conhecimento que os alunos têm dos números envolvidos nas tarefas, das operações e das propriedades que lhes estão implícitas (Ambrose et al., 2003). A variedade de estratégias e de procedimentos de cálculo usadas pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação pode ser influenciada pelas tarefas propostas, pelo seu contexto e pelos números envolvidos (Mendes, 2012).

Em suma, dando resposta à primeira questão do estudo – Quais as estratégias e procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação? – concluo que:

- Os alunos usam estratégias diferentes para resolver as tarefas de multiplicação e recorrem a uma grande diversidade de procedimentos de cálculo.
- As estratégias por contagem foram usadas com maior frequência nas primeiras tarefas de multiplicação.
- Globalmente, ao longo da resolução das tarefas, há uma preferência dos alunos pelas estratégias aditivas.
- Na resolução das últimas tarefas verifica-se uma maior opção por estratégias multiplicativas.
- Por vezes, durante a resolução da tarefa, os alunos regridem na estratégia inicialmente indicada, recorrendo a procedimentos de cálculo associados a uma estratégia que corresponde a um nível inferior de aprendizagem da multiplicação.

- Existem alunos que recorreram sistematicamente às mesmas estratégias de cálculo e aos mesmos procedimentos de cálculo.
- Quando a estratégia usada é de contagem, o procedimento de cálculo mais utilizado é *contar de um em um.*
- Quando a estratégia usada é aditiva, há uma maior variedade de procedimentos a serem utilizados. Ainda assim, o procedimento *adicionar sucessivamente* é o mais utilizado pelos alunos.
- Quando a estratégia usada é multiplicativa, os procedimentos de cálculo *usar produtos conhecidos*, *usar relações de dobro* e *usar relações de triplo* são os mais comuns.

6.1.2. Dificuldades evidenciadas pelos alunos

Os alunos revelam dificuldades relacionadas com: a compreensão dos enunciados, a organização e apresentação dos registos, a compreensão de modos de pensar diferentes dos seus e o seu sentido de número. A primeira dificuldade foi evidenciada durante o momento de apresentação das tarefas, a segunda no decurso da realização da tarefa por parte dos alunos, a terceira durante a discussão/sistematização das tarefas e a última foi transversal a estes momentos de exploração das tarefas.

Quando às dificuldades evidenciadas na compreensão dos enunciados, estas relacionam-se com o significado atribuído a algumas expressões e frases que fazem parte do texto dos enunciados (compreensão semântica), o uso de informação importante inerente às imagens que acompanham os enunciados e alguma falta de entendimento das situações associadas aos contextos das tarefas. As dificuldades na compreensão semântica estão relacionadas com a falta de conhecimento do significado de algumas expressões. Relativamente às imagens, alguns alunos mostraram dificuldades em usar estratégias que são potenciadas e induzidas pelas mesmas, nomeadamente quando correspondem a uma disposição retangular. As situações associadas aos contextos das tarefas suscitaram dúvidas a alguns alunos, nomeadamente, as da tarefa 4. Alguns alunos, ao não compreenderem o contexto da tarefa, não conseguiram solucionar o problema em questão.

Os registos pouco explícitos, a falta de registos escritos sobre o seu modo de pensar e o estabelecimento de relações entre os seus pensamentos e ideias matemáticas foram dificuldades exibidas pelos alunos relativas à organização e apresentação dos registos.

Por sua vez, as dificuldades relacionadas com a compreensão dos modos de pensar distintos foram evidenciadas quando os alunos não compreendiam determinadas explicações dadas pelos colegas e, essencialmente, quando estas explicações eram relativas a raciocínios multiplicativos.

As dificuldades identificadas ao nível do sentido de número relacionam-se com três das suas componentes: (i) sistemas de valores de referência, (ii) compreensão das relações entre as operações e (iii) compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários.

6.2. Reflexão sobre o estudo

Com esta reflexão pretendo analisar alguns aspetos relacionados com o desenvolvimento deste estudo. Assim, começarei por abordar a relevância de se ser um professor reflexivo e que implicações têm estas reflexões na aprendizagem dos alunos. Seguidamente, irei revelar algumas dificuldades e aspetos que destaco como positivos, no que respeita à minha prática na sala de aula. Posteriormente, analiso algumas opções metodológicas tomadas no decorrer deste projeto. Termino com um balanço das aprendizagens realizadas e com as implicações que este estudo terá na minha futura prática profissional.

Como frisei no capítulo III – Metodologia, é da máxima importância que um professor perspetive a sua prática letiva, refletindo sobre ela (Alarcão, 1996; Schön, 1983). Mas o que distingue um professor reflexivo de um não reflexivo? Um professor reflexivo pondera as suas intervenções, pois reflete em ação e sobre a sua ação, ou seja, existem dois momentos distintos de reflexão. Um primeiro momento enquanto o professor, na sala de aula, explora tarefas com os seus alunos e, um outro, posterior à sua ação, onde acaba por fazer um balanço do trabalho desenvolvido (Schön, 1983). O que distingue um professor reflexivo de um não reflexivo é a capacidade que o primeiro tem de adaptação e readaptação constante, sendo que o seu intuito é adequar as suas práticas letivas, de modo a proporcionar aprendizagens significativas aos seus alunos (Oliveira & Serrazina, 2002).

No meu caso, ao longo do desenvolvimento deste projeto realizei por diversas vezes reflexões sobre o modo como agir com os alunos, o que deveria modificar para que as aulas fossem mais dinâmicas, como poderia ajudar os alunos sem lhes dar indicações precisas do que teriam de realizar, etc. Destaco assim, as reflexões realizadas com as minhas colegas e orientadora de estágio/projeto de investigação, às quintas-feiras, na escola, pois era um momento em que partilhávamos dúvidas e acontecimentos que me permitiram por vezes, perspetivar futuras ações e intervenções.

Relativamente à minha prática letiva, o primeiro desafio foi a criação de uma cultura de sala de aula na qual os alunos partilhassem as suas resoluções, colocassem questões e explicitassem os seus raciocínios. Uma vez que pretendia que os alunos expressassem o seu modo de pensar e discutissem coletivamente as diferentes resoluções de um mesmo problema, foi necessário informá-los e mostrar-lhes como poderiam fazê-lo. Tarefas após tarefa, os alunos foram-se adaptando a esta dinâmica.

Os momentos de discussão coletiva revelaram-se um verdadeiro desafio, uma vez que, para além de mediar as intervenções dos alunos, também tinha de me certificar que todos compreendiam os raciocínios que estavam a ser apresentados e necessitava de estabelecer conexões entre as diferentes apresentações, de modo a que os alunos compreendessem quais as estratégias/procedimentos de cálculo mais eficazes. Particularmente, neste último momento, as dificuldades persistiram.

Senti algumas dificuldades na antevisão de possíveis estratégias/procedimentos de cálculo utilizadas pelos alunos, uma das práticas defendidas por Stein et al. (2008). Antecipar possíveis estratégias/procedimentos permitia-me ter uma perspetiva mais 'clara' da aula que iria dinamizar, pois já tinha uma perceção do que poderia surgir. No entanto, e apesar de ter um conhecimento global dos alunos, foi difícil fazê-lo.

Apesar de saber que no final de cada tarefa, deveria proceder a uma sistematização das ideias matemáticas associadas às mesmas e que deveria ajudar os alunos a compreenderem-nas, foi difícil fazê-lo. Assim, considero que é algo que tenho de melhorar na minha prática futura. Neste momento, e fazendo uma reflexão prospetiva acerca do modo como posso ultrapassar estas dificuldades, considero que, para além de antecipar as possíveis resoluções dos alunos nas tarefas e de as seriar quando preparo as aulas, terei de investir em dois aspetos. Um primeiro prende-se com a análise de possíveis conexões entre elas e, um segundo, com uma reflexão mais aprofundada sobre as ideias matemáticas que pretendo 'fazer sobressair' com a resolução de cada tarefa.

Tal como refiro no capítulo IV – Proposta pedagógica e se verifica no capítulo V – Análise de dados, o momento de seleção das produções dos alunos constituiu-se um desafio, pois nem sempre consegui selecionar todas as estratégias para serem discutidas e analisadas em sala de aula. No entanto e, apesar de nem sempre ter selecionado todas as estratégias e procedimentos usados pelos alunos, considero que, globalmente, as que selecionei proporcionaram momentos ricos de discussão, promovendo a comunicação matemática e a aprendizagem da multiplicação. Destaco, ainda, como aspetos positivos da minha prática letiva, a capacidade que revelei em motivar os alunos para a dinamização das tarefas e diversidade de modalidades de trabalho que proporcionei. Pude observar repercussões destes aspetos no entusiasmo manifestado pelos alunos quando exploravam tarefas matemáticas em grupo, pois estavam apenas habituados a trabalhar individualmente.

Relativamente à metodologia adotada para a realização deste estudo, há dois aspetos sobre os quais gostaria de refletir, um relacionado com a recolha de dados e o outro com a sua análise.

No que se refere à recolha de dados, tal como referi no capítulo III - Metodologia, durante as aulas realizei gravações áudio. No entanto, restringi-me apenas aos momentos de apresentação e discussão coletiva das tarefas. Aquando da análise de dados verifiquei que deveria ter efetuado também a gravação áudio dos momentos de monitorização das mesmas, pois nestes momentos os alunos questionavam-me e conversavam com os seus pares. Considero que ao percorrer a sala e ser solicitada pelos diferentes grupos deveria ter-me feito acompanhar do gravador, para que pudesse ter mais episódios de sala de aula, uma vez que, estes eram geralmente ricos e reveladores de raciocínios e dificuldades manifestadas pelos alunos. Embora as notas de campo tenham constituído um instrumento importante de recolha de dados deste momento da aula, existiram aspetos do discurso dos alunos que não consegui reconstituir totalmente após as aulas.

No que respeita à análise de dados, considero que o facto de ter organizado a análise das estratégias e dos procedimentos dos alunos a partir do que aconteceu nos momentos das discussões coletivas, acrescentando posteriormente a análise das resoluções dos restantes alunos, mostrou-se uma boa opção, não só do ponto de vista da investigação como também da reflexão sobre a minha própria prática. No que concerne à investigação, facilitou a caracterização das estratégias e procedimentos, tendo apenas que acrescentar algumas resoluções que, eventualmente não tinha selecionado no momento de discussão coletiva na sala de aula. Relativamente à reflexão sobre a prática permitiu-me não perder de vista o trabalho que realizei na prática, dado que me fui apercebendo das resoluções que me faltaram selecionar para os momentos de discussão e analisar de forma mais aprofundada as suas diferenças.

Ao nível da proposta pedagógica considero ter cometido alguns lapsos. Como já referi anteriormente tentei realizar um estudo que seguisse uma trajetória hipotética de aprendizagem, mas foi-me impossível. Na impossibilidade de o fazer considero que deveria ter dado uma outra atenção às tarefas selecionadas e aos números envolvidos. Penso que, efetivamente, existiu uma certa falta de articulação entre os números das tarefas, sendo esta mais evidente da tarefa 2 para a tarefa 3. A tarefa 2 envolvia o cálculo de produtos até 98, estando associado a várias malhas retangulares cuja disposição era de 4x8. Uma vez que, não conheciam as tabuadas, foi complicado calcular o valor do produto a partir de estratégias multiplicativas. Já na tabuada do 3, os números envolvidos foram até ao 90, e os alunos podiam recorrer a expressões e produtos anteriores que os ajudassem nos cálculos a efetuar. Desta forma, considero que a sequência destas duas tarefas deveria ser inversa, ou seja, primeiramente deveria ter proposto a tarefa 3 'Construção da tabuada do 3' e, posteriormente, a tarefa 2 'Azulejos'.

Apesar de ter dinamizado apenas quatro tarefas e do tempo de estágio ser reduzido, considero que do desenvolvimento deste projeto surtiram resultados que terão certamente influência na minha perspetiva de ensino e de aprendizagem enquanto futura professora. Posso começar por referir de imediato que, a realização deste projeto possibilitou-me experienciar, enquanto professora, um ensino da Matemática diferente daquele que vivenciei enquanto aluna.

Por diversas vezes questionei-me sobre as práticas que fui observando nos diversos estágios realizados ao nível do meu percurso académico (Licenciatura e Mestrado), pois tinha noção de que não era aquele tipo de práticas que eu gostaria de dinamizar com os meus alunos, mas também não sabia como fazê-lo de outra forma. Mas, com a concretização deste projeto pude estabelecer uma ligação entre aspetos que me tinham sido dados a conhecer teoricamente e relacioná-los com a prática. Refiro-me ao Ensino Exploratório da Matemática que foi o processo de ensino que 'alimentou' o desenvolvimento deste projeto. Após esta experiência sinto que encontrei um caminho possível de percorrer, e que pode responder às minhas inquirições e inquietações iniciais.

Após a escolha do tema necessitei de ler alguns textos, artigos científicos, capítulos de livros, para que me pudesse inteirar das várias temáticas relacionadas com o tema do projeto. Recorri, essencialmente, a literatura relativa ao desenvolvimento de sentido de número e de cálculo mental e à aprendizagem das operações, tendo-me focado na operação multiplicação. Os conhecimentos resultantes destas leituras foram utilizados e abordados ao longo da minha prática letiva, nomeadamente os aspetos específicos da operação multiplicação. A realização deste projeto também me permitiu desenvolver uma compreensão sobre os processos de aprendizagem dos alunos relativo aos números e às operações.

Enquanto futura profissional da área da educação destaco dois aspetos que suscitaram o meu interesse e que determino como fulcrais e necessários de serem pensados por todos os educadores/professores, ao nível da educação Matemática. O primeiro diz respeito à importância da escolha/seleção das tarefas a serem realizadas pelos alunos, porque as tarefas constituem "pontos de partida para a atividade matemática dos alunos" (Veia, Brocardo & Ponte, 2014, p. 325) e porque possibilitam aos alunos um envolvimento em atividades matematicamente ricas e produtivas (Ponte, 2005). O segundo está também ele relacionado com as tarefas, mas especificamente com as que envolvem a operação multiplicação. Com esta experiência percebi que ao propor uma determinada tarefa, o professor deve ter em conta, os números, as propriedades, os contextos e as características que lhes estão inerentes.

Para além disso, é muito importante que estes aspetos estejam adequados ao nível de cálculo dos alunos, para que estes se sintam motivados e despertos para a realização das tarefas.

Por tudo o que referi anteriormente, termino esta reflexão com a convicção que a concretização deste projeto me ajudará futuramente a tomar decisões mais acertadas e refletidas sobre o trabalho em torno dos números e das operações e, em particular, sobre a operação multiplicação.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação - Um guia prático e crítico.* Lisboa: Edições Asa.

Alarcão, I. (1996). *Formação Reflexiva de Professores.* Porto: Porto Editora.

Ambrose, R., Baek, J.-M., & Carpenter, T. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In &. A. In A. J. Baroody, *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Anghileri, J. (1989). *An Investigation of young children´s understanding of multiplication 20 (4).* Educational Studies in Mathematics.

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, pp. 33-52.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In K. G. M. Beishuizen, *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht: The Netterlands.

Bell, J. (1997). *Como realizar um Projeto de Investigação.* Lisboa: Gravida.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Lisboa: Coleção Teses: Associação de Professores de Matemática.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação .* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J., & Delgado, C. (2009). Desafios e Complexidades na concepção e exploração de tarefas para o desenvolvimento do sentido do número. *Actas do XIXEIEM - Vila Real*, pp. 1-14.

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido de número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha, (Eds.), *O sentido de número: Reflexões que entrecruzam a prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J., Delgado, C., & Mendes, F. (2005). A multiplicação no contexto do sentido de número. In Equipa do Projecto Desenvolvendo o sentido do número: perspetivas e exigências curriculares, *Desenvolvendo o sentido de número: Materiais para o educador e para o professor do 1º Ciclo Vol.II* (pp. 9-17). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Buys, K. (2001). Mental arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Canavarro, A. P. (2011). *Ensino exploratório da Matemática: Práticas e Desafios.* Lisboa: Instituto de Educação - Universidade de Lisboa.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque, *Práticas de Investigação em Educação* (pp. 1-17). Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira, *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). Lisboa: SPIEM.

Carvalho, A., & Gonçalves, H. (2003). Multiplicação e divisão: conceitos em construção... *Educação e Matemática,* Nº 75, pp. 23- 25.

Carvalho, R. (2011). *Calcular de cabeça ou com a cabeça?.* Lisboa: PROFMAT.

Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008). O sentido de número de no Jardim-de-Infância. In J. P. Castro, & M. Rodrigues, *Sentido de número e organização de dados - Textos de apoio para Educadores de Infância* (pp. 11-58). Lisboa: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, M. E. Rosendo, N. Figueiredo, & A. Dionísio, *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 257-273). Lisboa: SEM - SPCE.

Chamberlin, M. (2005). Teachers discussions of students thinking: Meeting the challenge of attending to students thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8 (3)*, pp. 141-170.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática.* Lisboa: Edições Almedina .

Delgado, C. R. (2013). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número: Um estudo no 1º ciclo.* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Ferreira, E. G. (2012). *O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade.* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001a). *Young Mathematicians at Work: Constructing number sense, addition, and subtraction.* Heinemann: Portsmouth, NH.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001b). *Young Mathematicians at work: Constructing multiplication and division.* Heinemann: Portsmouth, NH.

Jacob, L., & Willis, S. (10 de July de 2003). The development of multiplicative thinking in young children. *In: 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group, 6.* Deakin University: Geelong.

Kraemer, J.-M. (2008). Desenvolvendo o sentido de número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha, *O sentido de número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense . *For the Learning of Mathematics 12 (3)*, pp. 2-8 & 44.

Mendes, F., & Delgado, C. (2008). A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido de número. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha, *O sentido de número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 159-182). Lisboa: Escolar Editora.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Revista Quadrante, Vol. XXII, Nº1* , pp. 133-162.

Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C., & Gonçalves, F. (2010). *Números e Operações - 3.º ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Merriam, S. (1989). *Case study research in education: A qualitative approach.* S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2008). *A exploração de tarefas matemáticas para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano.* Lisboa.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante 21 (2)*, pp. 111-138.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação. (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (2007). *Normas para a Matemática Escolar: do pré-escolar ao 12º ano.* Lisboa: APM - Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3º Ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, Vol.XXII, Nº2*, pp. 29-53.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. *Investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods.* California : Sage Publications, Lda.

Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D., & Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos: Tarefas e desafios para a sala de aula.* Lisboa: Texto Editores.

Ponte, J. P. (2002). *Investigar a nossa própria prática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão Curricular em Matemática.* Lisboa: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (2014). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.* Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., & Pereira, J. M. (2011). Raciocínio Matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos dos 9.º ano. *Ensino e Aprendizagem da Álgebra*, (pp. 347-364). Lisboa.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. d. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2014). Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. *Actas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 65-78). Braga: APM.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professional think in action.* Aldershop Hants: Averbury.

Sousa, H. (2005). O Ambiente de Aprendizagem e a Matemática. *Educação e Matemática - Revista da Associação de Professores de Matemática*, pp. 35-40.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. H. (Edits.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). *Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell.* Mathematical Thinking and learning.

Tatton, R. (1969). *O cálculo mental (tradução de M.A. Videira).* Lisboa: Arcádia.

Veia, L., Brocardo, J., & Ponte, J. P. (2014). Práticas de preparação de uma tarefa de organização e tratamento de dados com características investigativas. In J. Brocardo, A. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, et al., *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 323-336). Sesimbra: SPIEM.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education 10 (3-4)*, 205-215.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics . *Journal for Research in Mathematics Education 27(4)*, pp. 458-477.

Anexos

Anexo 1 – Tarefa Pacotes de Leite

Quantos pacotes de leite estão na palete?

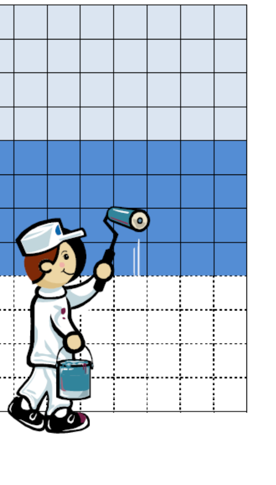
Explica como pensaste!

Anexo 2 – Tarefa Azulejos

1.ª Questão: Quantos azulejos já colocou o Sr. António? Expliquem como pensaram!

2.ª Questão: Quantos azulejos lhe faltam colocar? Expliquem como pensaram!

3.ª Questão: Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. António? Expliquem como pensaram!



Anexo 3 – Tarefa receita de bolo-rei

A mãe da Susana gosta muito de fazer bolo-rei. Lê com atenção a receita que ela utilizou para fazer um bolo.

RECEITA DE BOLO-REI

4 Chávenas de farinha

2 Colheres de sopa de fermento

1 Colher de sopa de sal

4 Ovos

4 Chávenas de açúcar

5 Colheres de sopa de margarina

2 Colheres de sopa de frutos secos

1. No Dia de Reis a mãe da Susana vai fazer bolo-rei para vender. Consegues ajudá-la a descobrir que quantidade de cada ingrediente vai precisar para fazer dois bolos? E três bolos? Discute com o teu colega e explica como pensaram!

2. Observa a imagem. Sabendo o preço de cada bolo, quanto dinheiro ganhará a mãe da Susana se vender dois bolos? E se vender três?

Anexo 4

Estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos na resolução de todas as tarefas

	Tarefa 1	Tarefa 2			Tarefa 3	Tarefa 4			
		Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3		Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3	Subtarefa 4
Estratégias de contagem	4	5	3	4	1	0	4	0	0
Estratégias aditivas	13	12	10	13	7	11	5	15	13
Estratégias multiplicativas	1	2	4	2	13	6	6	0	2
Perceção visual de uma quantidade	0	0	2	0	0	0	0	0	0

Anexo 5 **Procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução de todas as tarefas**

		Tarefa 1	Tarefa 2			Tarefa 3	Tarefa 4			
			Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3		Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3	Subtarefa 4
Estratégias de contagem	**Contar por saltos**	1	0	0	0	1	0	4	0	0
	Contar de um em um	3	5	3	4	0	0	0	0	0
Estratégias aditivas	**Adicionar sucessivamente**	7	4	2	7	7	11	5	10	13
	Adicionar dois a dois	6	6	6	4	0	0	0	0	0
	Adicionar em coluna	0	2	0	2	0	0	0	3	0
	Usar somas conhecidas	0	0	2	0	0	0	0	0	0
Estratégias multiplicativas	**Usar produtos conhecidos**	1	0	2	0	0	0	0	2	0
	Usar relações de dobro	0	2	2	0	3	6	0	0	0
	Usar relações de triplo	0	0	0	0	1	0	6	0	0
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores	0	0	0	0	7	0	0	0	0
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores	0	0	0	0	2	0	0	0	2
	Multiplicar em coluna	0	0	0	2	0	0	0	0	0