EDUCAÇÃO

ESCOLA SUPERIOR
POLITÉCNICO SETÚBAL

ALEXANDRE MARTINS PAULA ARAGÃO DE OLIVEIRA

APRENDER FRAÇÕES A PARTIR DE DIFERENTES CONTEXTOS: UM ESTUDO NO 3.º ANO

Relatório do Projeto de investigação do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

ORIENTADORA Professora Doutora Célia Maria Martins Vitorino Mestre

dezembro de 2025

ALEXANDRE MARTINS PAULA ARAGÃO DE OLIVEIRA

APRENDER FRAÇÕES A PARTIR DE DIFERENTES CONTEXTOS: UM ESTUDO NO 3.º ANO

JÚRI

Presidente: Professora Doutora Joana Filipa Oliveira Cabral, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal.

Arguente: Maria de Fátima Pista Calado Mendes, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal .

Orientador (a): Professora Doutora Célia Maria Martins Vitorino Mestre, Escola Superior de Educação, Politécnico de Setúbal

dezembro de 2025

AGRADECIMENTOS

A realização deste projeto investigativo foi possível graças ao apoio e suporte de diversas pessoas, a quem desejo expressar o meu profundo agradecimento e reconhecimento.

Em primeiro lugar, começo por agradecer à minha orientadora Célia Mestre, pela orientação rigorosa, pela disponibilidade permanente, pelas sugestões, pelo acompanhamento em todas as etapas do desenvolvimento deste projeto, e sobretudo pela atenção disponibilizada nos momentos que mais me preocuparam e afligiram. A sua dedicação, confiança e rigor científico foram determinantes para que este projeto fosse concluído da melhor forma.

Um especial agradecimento, à professora Fátima Mendes que me mostrou como se pode trabalhar diversas áreas do saber através dos livros infantis. Obrigado por me mostrar este lado maravilhoso de ensinar.

À minha família, o meu porto seguro nos piores momentos, só tenho de agradecer pelo apoio, paciência e incentivo que me ofereceram desde o primeiro dia. Aos meus pais, agradeço pelos conselhos, pelo amor incondicional e pelo carinho que tanto me confortou desde o primeiro dia, pelos valores transmitidos e pela força que me deram para nunca desistir dos meus objetivos e sonhos. Ao meu irmão, agradeço pelo amor e carinho que tanto tem por mim e pelas risadas que partilhámos e que continuaremos a partilhar durante muitos anos e que tão bem me fazem.

Aos meus colegas e amigos, expresso um agradecimento muito especial pela amizade, pelo companheirismo e pelas inúmeras partilhas ao longo deste percurso. A vossa boa disposição, apoio e espírito de equipa tornaram esta etapa mais leve, enriquecedora e repleta de momentos memoráveis. Às minhas afilhadas académicas, expresso um agradecimento especial pela amizade, pela confiança e pelo entusiasmo demonstrado ao longo desta caminhada. Foi um verdadeiro privilégio acompanhar o vosso crescimento académico e pessoal, partilhar experiências e construir laços que certamente perdurarão para além desta etapa. A vossa presença trouxe motivação, alegria e um sentido de continuidade que muito enriqueceram esta jornada.

Aos meus amigos mais próximos, que são para mim como uma verdadeira família, deixo um agradecimento especial. Em particular, ao meu melhor amigo Alexandre Pires, que considero como um irmão, pela amizade incondicional, pelo apoio constante e por estar sempre presente nos momentos mais desafiantes e significativos deste percurso. À Raquel, que é para mim é como uma irmã mais nova, agradeço a presença, serenidade, incentivo e palavras certas nos momentos mais exigentes. À Inês, deixo um agradecimento muito especial pela amizade, pela compreensão e pelo apoio constante ao longo de todo este percurso.

Por fim, um agradecimento muito especial para o meu afilhado Diogo, cuja presença e carinho foram uma fonte constante de motivação e inspiração ao longo desta caminhada. Apesar de ainda seres muito pequeno para o perceber, um simples sorriso teu ilumina o meu dia e ajudou-me a superar os meus maiores medos e preocupações.

A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste projeto investigativo, deixo a minha sincera gratidão e apreço.

RESUMO

O presente projeto investigativo tem como objetivo principal compreender como é que diferentes contextos contribuem para a compreensão do conceito de fração nos alunos de 3.º ano de escolaridade. A investigação desenvolveu-se em contexto de estágio pedagógico ao longo de sete semanas, inserindo-se numa abordagem qualitativa e no âmbito da investigação sobre a prática e com o intuito de conseguir responder às questões de investigação: "Que significados de fração os alunos utilizam nos diferentes contextos?" e "Que representações os alunos usam no diferentes contextos explorados?".

Ao longo da realização deste projeto investigativo foram implementadas quatro tarefas cuidadosamente selecionadas e desenhadas com contextos diversos, de modo a explorar diferentes significados de fração e de tipos de representações (físicas, visuais, verbais, simbólicas e contextuais). A recolha dos dados foi feita através da observação participante, com registos áudio das discussões matemáticas, e da recolha documental das produções dos alunos.

Os resultados evidenciam que o contexto desempenha um papel determinante na forma como os alunos interpretam e utilizam os significados de fração, tendo utilizado sobretudo o significado parte–todo em contextos com unidades contínuas ou visuais claramente identificáveis, como alimentos, figuras geométricas ou pizas. Já o significado de fração como quociente emergiu de forma mais marcada nas tarefas de partilha equitativa, onde a própria natureza do contexto favorecia a interpretação da fração enquanto resultado de uma divisão. Os resultados revelam ainda que os alunos recorreram a um conjunto diversificado de representações, com predominância das representações verbais, utilizadas para justificar decisões e descrever procedimentos, e das representações simbólicas, ativadas sempre que o objetivo da tarefa exigia o registo formal das frações. As representações visuais foram particularmente eficazes na clarificação da unidade e as representações contextuais permitiram atribuir significado às ações matemáticas, sobretudo em situações de partilha ou nas narrativas provenientes da literatura infantil.

Desta forma, o estudo conclui que a aprendizagem das frações é fortemente influenciada pela qualidade dos contextos propostos, pela clareza das tarefas e pela diversidade de representações que os alunos podem mobilizar. A inclusão de materiais manipuláveis, de narrativas significativas e de cenários do quotidiano facilita a construção conceptual e aproxima os alunos de um entendimento mais flexível e profundo do número racional. Contudo, evidencia-se igualmente a necessidade de um trabalho continuado e sistemático, capaz de apoiar os alunos na transição gradual entre diferentes significados e formas de representação, promovendo uma compreensão mais integrada e duradoura do conceito de fração.

Palavras-chave: Contextos; Tipos de Representações; Significados das Frações

ABSTRACT

The present research project aims primarily to understand how different contexts contribute to third-grade students' understanding of the concept of fractions. The study was conducted within the context of a teaching practicum over a seven-week period, following a qualitative approach and framed within research on practice, with the purpose of addressing the following research questions: "Which meanings of fractions do students use in different contexts?" and "Which representations do students use in the different contexts explored?".

Throughout the development of this research project, four carefully selected and designed tasks were implemented in diverse contexts in order to explore different meanings of fractions and different types of representations (physical, visual, verbal, symbolic, and contextual). Data were collected through participant observation, including audio recordings of mathematical discussions, as well as through the documentary collection of students' work.

The results show that context plays a decisive role in how students interpret and use fraction meanings. Students predominantly used the part–whole meaning in contexts involving continuous units or clearly identifiable visual representations, such as food, geometric figures, or pizzas. In contrast, the meaning of fraction as a quotient emerged more strongly in tasks involving equitable sharing, where the nature of the context itself supported the interpretation of fractions as the result of a division. The findings also reveal that students made use of a wide range of representations, with a predominance of verbal representations, used to justify decisions and describe procedures, and symbolic representations, activated whenever the task required the formal recording of fractions. Visual representations proved particularly effective in clarifying the unit, while contextual representations helped attribute meaning to mathematical actions, especially in sharing situations or narratives drawn from children's literature.

In conclusion, the study highlights that learning fractions is strongly influenced by the quality of the proposed contexts, the clarity of the tasks, and the diversity of representations that students are able to mobilize. The inclusion of manipulatives, meaningful narratives, and everyday-life scenarios facilitates conceptual construction and brings students closer to a more flexible and deeper understanding of rational numbers. Nevertheless, the study also points to the need for sustained and systematic work to support students in the gradual transition between different meanings and forms of representation, promoting a more integrated and long-lasting understanding of the concept of fractions.

Keywords: Contexts; Representations; Meanings of Fractions

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

O presente relatório constitui uma investigação centrada na aprendizagem das frações por parte de alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico. O mesmo foi desenvolvido no âmbito da unidade curricular de Estágio no 1.º e 2.º ciclos do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico. Ao logo deste relatório, para além da apresentação da fundamentação necessária para a sustentação do meu projeto de investigação, é descrito todo o trabalho desenvolvido ao longo de 7 semanas, entre 22 de abril e 4 de junho de 2025. Este período correspondeu a um momento de estágio desenvolvido numa turma do 3.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico, numa escola localizada no concelho de Almada

Com o intuito de justificar a seleção da temática do projeto de investigação desenvolvido, de seguida, irão ser descritas as motivações pessoais, a contextualização que revele a pertinência da temática escolhida e ainda a enumeração dos objetivos e das questões problema que orientam a elaboração deste projeto investigativo.

MOTIVAÇÃO, PERTINÊNCIA, OBJETIVO E QUESTÕES DO ESTUDO

As motivações que me levaram à elaboração de um projeto investigativo inerente à área curricular da matemática e à temática das frações estão diretamente relacionadas com o meu gosto em trabalhar na área da matemática, sobre esta temática e de desenvolver atividades que ajudem a tornar esta área curricular numa disciplina mais atrativa para os alunos.

Além das motivações pessoais para desenvolver este projeto na área curricular da matemática é crucial destacar ainda as motivações empíricas que fundamentaram a escolha da temática do mesmo.

De acordo com Mata (2012), a Matemática é classificada como umas das disciplinas fundamentais para a educação dos alunos, uma vez que para além de fazer parte do nosso quotidiano, ainda ajuda a desenvolver aptidões e capacidades fulcrais para se viver em sociedade, como por exemplo o pensamento crítico e a autonomia. O ensino da Matemática permite ainda que os alunos desenvolvam diversas outras capacidades como a resolução de problemas, a autoconfiança, o pensamento computacional e a capacidade de estabelecer conexões com o ambiente ao seu redor (Canavarro et al., 2021).

Para que os alunos consigam adquirir conhecimentos e aprender da melhor forma, torna-se crucial que estes tenham contacto com diferentes materiais (Ponte & Serrazina, 2004). A utilização de materiais possibilita "uma melhor compreensão conceptual, ajudam as crianças a construir o seu raciocínio, dão suporte físico para explicar como os alunos pensam e ajudam a desenvolver a sua autonomia." (Ponte & Serrazina, 2004, p.56)

Além disso, a articulação da matemática com outras disciplinas é um tópico que tem sido muito discutido ao longo dos anos, uma vez que essa mesma articulação traz benefícios recíprocos para as disciplinas envolvidas na mesma. No caso da articulação entre a matemática e o português, por exemplo, essa reciprocidade é visível quando Menezes (2011) afirma que "A Matemática fornece à língua, e em particular à literatura, estruturação de pensamento, organização lógica e articulação do discurso." (p. 69) e, consequentemente, "a língua fornece à Matemática capacidades comunicativas, como a leitura e interpretação de texto (escrito e oral) e também capacidades de expressão (escrita e oral, em particular a discussão)." (p.69).

Contudo, ao longo do meu percurso académico e dos períodos de estágio que realizei, foi possível perceber que, na grande maioria das situações, o ensino da Matemática e do Português, nomeadamente a componente da literatura, encontravam-se isoladas uma da outra. Esta ausência de interligação, põe em causa os fundamentos da aprendizagem, uma vez que esta "depende da capacidade de o aluno estabelecer conexões entre o seu conhecimento e as diferentes matérias que está a estudar e igualmente entre elas" (Menezes, 2011, p.68).

Desta forma e devido à importância que os materiais possuem no ensino aprendizagem dos alunos, as tarefas desenvolvidas e dinamizadas centram-se na utilização e exploração de materiais didáticos e manipuláveis, como por exemplo: fichas de trabalho, livros infantis sobre a temática das frações e blocos padrão.

De destacar que a utilização do livro infantil como recurso para a exploração de conteúdos matemáticos foi motivada pelo facto da sua utilização favorecer, não só o ensino e aprendizagem do Português e da Matemática, mas também de diversas outras áreas do saber. O uso de livros infantis na aprendizagem pode ser importante uma vez que, tal como afirma Quaresma (2015, cit. por Damas, 2023) a literatura "facilita o desenvolvimento da linguagem, promove a leitura, influencia positivamente as perceções dos alunos e atitudes em relação à leitura. Também influencia a habilidade para a escrita e aprofunda o conhecimento da linguagem escrita e características linguísticas" (p.43).

Relativamente ao ensino da Matemática, o uso de livros infantis pode servir "como um recurso que permite às crianças relacionarem as suas ideias informais com conceitos abstratos da Matemática" (Tucker et al., 2010, cit. por Vale & Santiago, 2022, p.56).

Desta forma, este projeto investigativo tem como temática a aprendizagem das frações no 1.º Ciclo do Ensino Básico.

A escolha desta temática remete sobretudo, tal como referido anteriormente, para o interesse pessoal pelo ensino e aprendizagem da matemática, nomeadamente das frações. Além disso, é ainda do meu interesse pessoal desenvolver um projeto que possibilite desconstruir a ideia, que muitos alunos têm, de que a aprendizagem da matemática é algo entediante e difícil, uma vez que tal como refere (Jorge (2003, cit. por Almeida, 2011):

> *"ainda os estudantes não começaram a conhecer a Matemática que temos para lhes desvendar e já 'sabem' que é 'a pior das disciplinas' que é o 'terror absoluto', que é natural que não gostem, porque 'na família ninguém tem jeito para a Matemática!" (p. 26).*

Desta forma, com este projeto investigativo pretendo não só abordar conteúdos inerentes às frações, mas também transmitir aos alunos que a aprendizagem da matemática pode ser significativa, dinâmica e envolvente.

Assim, foi definido o seguinte objetivo de investigação: Compreender como é que diferentes contextos contribuem para a compreensão do conceito de fração nos alunos do 3.º ano de escolaridade. Partindo desse mesmo objetivo, o projeto investigativo é ainda orientado pelas seguintes questões de investigação:

i) Que significados de fração os alunos utilizam nos diferentes contextos explorados?
ii) Que representações os alunos usam nos diferentes contextos explorados?

Ao longo da intervenção pedagógica, implementei quatro tarefas centradas no tópico das frações, recorrendo, tal como mencionado anteriormente, a um conjunto de materiais didáticos e manipuláveis. A primeira tarefa, *Análise do livro,* centrou-se na exploração das frações a partir do livro infantil "Frações na Cozinha" (Rodi, 2018) e teve como objetivo compreender quais os conhecimentos prévios dos alunos sobre as frações. A segunda tarefa, *O Gato da Joana*, foi desenvolvida e dinamizada tendo em conta a tarefa de Mestre e Carvalho (2022) e também se centrou na exploração das frações, mas desta vez a partir de materiais manipuláveis, nomeadamente os blocos padrão e as relações existentes entre os mesmos. Na terceira tarefa, *O almoço da turma do João*, adaptada de Canavarro et al. (2022), pretendeu-se explorar as frações recorrendo a unidades continuas a partir da resolução de problemas presentes numa ficha de trabalho. Por fim, a última tarefa, "O Festival das Estrelas", foi adaptada de Ventura (2013) e pretendeu-se explorar as frações recorrendo a unidades discretas a partir da resolução de problemas presentes numa ficha de trabalho.

Estas tarefas foram exploradas em contexto de sala de aula e tendo em conta o ensino exploratório, na medida em que se pretendeu que os alunos tivessem um papel ativo na sua aprendizagem, pudessem refletir sobre as decisões que escolheram e os resultados e respostas que obtiveram e que discutissem com os colegas as diferentes estratégias de resolução usadas.

ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO

Este projeto está organizado em cinco capítulos, sendo complementado por este momento introdutório onde foram apresentadas as questões de investigação, os objetivos da mesma e a relevância da temática que se pretende abordar.

No **Capítulo I** é apresentado o enquadramento teórico e está estruturado em 3 subcapítulos:

- O ensino exploratório;
- As representações matemáticas;
- O ensino das frações ;
- O uso de materiais no ensino.

O **Capítulo II** destina-se à descrição da metodologia inerente à investigação, bem como das técnicas de recolha e análise de dados utilizados.

O **Capítulo III** centra-se na caracterização do contexto e dos participantes, bem como das ações pedagógicas desenvolvidas ao longo da intervenção pedagógica.

O **Capítulo IV** centra-se na interpretação e análise dos dados recolhidos mais relevantes.

Por fim, no **Capítulo V** são apresentadas as considerações finais e uma reflexão sobre as limitações e potencialidades deste projeto e uma reflexão sobre a prática.

CAPÍTULO I

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste Capítulo, apresento as temáticas e conteúdos que fundamentam a implementação e o desenvolvimento deste meu projeto de investigação. Assim, este capítulo encontra-se estruturado em quatro subcapítulos:

- **O ensino exploratório**: enquadramento da intervenção pedagógica tendo em conta este modelo de ensino e as caraterísticas do mesmo;
- **As representações matemáticas:** as representações no ensino da matemática e os tipos de representações
- **O ensino das frações**: tipos de unidades, distinção dos diferentes significados de fração e explicitação das dificuldades que existem na aprendizagem e no ensino das frações.
- **O uso de materiais no ensino:** a importância destes como ferramentas pedagógicas para um ensino e aprendizagem mais enriquecedores, e a utilização dos materiais manipuláveis no ensino das frações, mais concretamente dos blocos padrão e dos livros infantis.

1- O Ensino Exploratório

O ensino exploratório é um modelo de ensino bastante enriquecedor tanto para quem a implementa como para os alunos. Este modelo de ensino, apesar de ser complexo e necessitar de tempo na sua implementação, privilegia a interação entre os professores e os seus alunos (Oliveira et al., 2013).

Ao contrário do que acontece no ensino que, muitas vezes, se classifica como um ensino mais expositivo, centrado no trabalho do professor e na forma como este transfere os conhecimentos aos alunos, o ensino exploratório, distingue-se dos restantes por centrar a aprendizagem dos alunos no "trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva." (Oliveira, et al., 2013, Canavarro, 2011, p.11).

Este modelo de ensino, segundo Stein et al (2008, cit. por Canavarro, 2011), encontra-se estruturado em quatro fases: apresentação da tarefa; realização da tarefa por parte dos alunos; uma fase de partilha e discussão de ideias e uma fase sistematização de conteúdos que envolvam a tarefa proposta.

Na primeira fase deste modelo de ensino, o professor deve introduzir a tarefa à turma e certificar-se que os alunos têm ao seu dispor todos os materiais e ferramentas necessários para a realização da tarefa proposta, que compreendem o que se propõe com a mesma e que estejam motivados e interessados na sua realização (Oliveira, et al., 2013).

Posteriormente, numa segunda fase, enquanto os alunos resolvem a tarefa proposta de forma autónoma, individualmente, em pares ou em pequenos grupos, o docente deve ser apoiar o trabalho dos seus alunos (Oliveira, et al., 2013). Além disso, e ainda segundo os mesmos autores, o professor deve ainda "garantir que os alunos preparam a sua apresentação" e deve "selecionar e estabelecer a sequência dessas apresentações na discussão coletiva" (Stein et al., 2008 cit. por Oliveira, et al., 2013, p. 34).

Ainda na fase de resolução da tarefa, o professor, com o apoio que fornece aos alunos, não deve confirmar se as respostas e resoluções se encontram corretas, uma vez que isso pode influenciar a motivação futura que os alunos terão em explicar aos colegas como pensaram e como resolveram a tarefa (Canavarro, 2011). Por outro lado, o período de trabalho autónomo dos alunos não se deve prolongar por muito tempo, mesmo que alguns alunos não tenham conseguido acabar de resolver a tarefa, pois, segundo Canavarro (2011), "as diferenças no grau de completude das resoluções dos alunos favorece o interesse pela discussão colectiva e pela produção de sínteses matemáticas que complementam o trabalho realizado pelos grupos" (p.17).

Além disso, nestas duas primeiras fases, segundo Canavarro (2011), o professor deve "controlar as questões e comentários que se oferecem aos alunos durante a apresentação da tarefa e durante o trabalho autónomo de modo a não lhes indicar «a» estratégia a seguir" de modo a não tornar a tarefa menos exigente, padronizar as soluções, nem limitar a riqueza de um debate matemático posterior (p.17).

A fase seguinte corresponde a um momento de partilha, discussão dos resultados obtidos e das estratégias utilizadas pelos alunos na fase anterior. Ao longo desta fase, o professor deve assumir um papel de orientador e organizador deste momento, na medida em que lhe compete organizar da melhor forma as intervenções dos alunos neste momento de discussão, de maneira a permitir que este momento seja enriquecedor ao nível da partilha de estratégias e ideias diferentes e ao nível do cumprimento do rigor matemático (Oliveira, et al., 2013).

Ainda nesta fase de discussão e de partilha, o professor deve iniciar este momento com uma questão desafiadora que leve o aluno a formular uma conjetura ou uma opinião sobre a tarefa ou o momento da tarefa em questão (Oliveira, et al., 2013). Para que tal aconteça, segundo Oliveira et al., (2013), o professor deve :

> *"(i) encorajar a reflexão matemática, que se traduz no levar os alunos a compreender, comparar e generalizar ideias matemáticas; a considerar e discutir relações entre ideias; a usar diversas resoluções e a considerar a razoabilidade de um argumento; (ii) avançar nas ideias iniciais, levando os alunos a procurar resoluções alternativas e a promover o uso de estratégias de resolução eficazes; e (iii) promover o raciocínio matemático, envolvendo a justificação das ideias e das estratégias dos alunos e o acompanhamento das justificações dos colegas." (p.34)*

Por fim, é ao longo da fase de sistematização que, com a ajuda do docente, os alunos devem fazer um levantamento das ideias e conteúdos que envolvem a tarefa ou o exercício proposto pelo mesmo, com destaque para as representações e resoluções partilhadas na fase (Oliveira et al., 2013).

Apesar destas duas últimas fases serem extremamente cruciais para a aprendizagem dos alunos, o professor pode sentir dificuldades na gestão adequada do tempo de cada uma das fases deste método de ensino, implicando assim a necessidade de adiar as últimas duas fases para uma sessão seguinte (Canavarro, 2011). Este adiamento, pode vir a provocar uma perda de interesse e participação dos alunos nestes dois momentos e um afastamento entre estas fases e aquilo que terão realizado na fase de elaboração da tarefa (Canavarro, 2011).

O ensino exploratório na Matemática, apesar de ser um método bastante enriquecedor para a aprendizagem dos alunos, acarreta, para além dos aspetos que foram descritos anteriormente, inúmeras dificuldades para o professor que o implementa na sua sala de aula. Para que o professor consiga implementar este tipo de ensino, o mesmo deve começar por escolher e/ou adaptar/elaborar tarefas que fortaleçam o ensino-aprendizagem da matemática dos alunos e não apenas em tarefas para pôr em prática o que foi aprendido (Canavarro, 2011). Além disso, o professor deve planificar as tarefas previamente e prever que estratégias podem os alunos recorrer na resolução das mesmas (Canavarro, 2011) .

Assim, e apesar das dificuldades que podem surgir ao longo da sua implementação, o ensino exploratório não deve ser visto como algo que só se implementa para tarefas especificas, uma vez que o professor que o implementa necessita de tempo e de um trabalho constante para aprimorar a sua prática ao mesmo tempo que orienta os alunos a adquirirem os conteúdos matemáticos programados e diferentes estratégias de os adquirir, o que, efetivamente, beneficia de uma prática prolongada no tempo (Canavarro, 2011).

2- Representações Matemáticas

O recurso a representações no ensino da Matemática tem assumido um grande destaque e o seu valor pedagógico vem sendo amplamente reconhecido ao longo dos anos. Estas possuem um papel crucial na compreensão dos alunos, uma vez que, segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), "a forma como as ideias matemáticas são representadas é fundamental para compreender como as pessoas as entendem e utilizam" (p. 68) e porque "para aprofundar o conhecimento, os alunos necessitam de uma variedade de representações que apoiem a sua aprendizagem" (p. 68). Desta forma torna-se crucial compreender o que é uma representação e que tipos de representações existem na Matemática.

Uma representação consiste numa disposição de sinais, símbolos, imagens ou objetos que têm a função de indicar, transmitir um significado ou substituir algo (Goldin, 2003). Por outro lado, Woleck (2001), descreve as representações como um processo dinâmico, que funciona como ferramenta que permite articular, esclarecer, justificar e comunicar o raciocínio matemático.

Quaresma e Ponte (2012) complementam a designação de representação e afirmam que ao representar um número estamos a "atribuir-lhe uma designação" (p. 40). Além disso é crucial que os alunos percebam que um número pode ser expresso de diferentes formas ou através de representações distintas, uma vez "necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. […]" (NCTM, 2007, p. 240). Por outro lado, Egipto (2022) afirma que os alunos ao utilizarem representações "desenvolvem processos que tornam as suas aprendizagens mais significativas, pois quando o fazem exteriorizam os seus pensamentos, organizando as informações que vão adquirindo, sendo os construtores dos seus próprios conhecimentos e tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo." (p. 30)

Além disso, Mainali (2021) afirma que a utilização de múltiplas representações mo ensino e aprendizagem da matemática é crucial, uma vez que: i) fazem parte da própria essência da matemática, sendo indispensáveis em muitos tópicos, como no estudo de funções e gráficos cartesianos, que exigem diferentes formas de representação e conexões entre elas; ii) permitem concretizar um conceito de múltiplas maneiras, ajudando os alunos a identificar propriedades e a compreender ideias como, por exemplo, a equivalência de frações; iii) facilitam a superação de dificuldades, pois oferecem diferentes perspetivas sobre o mesmo objeto matemático, promovendo uma compreensão mais profunda; iv) tornam a matemática mais apelativa.

Desta forma torna-se crucial, segundo Canavarro el al. (2021), "promover a análise de diferentes representações sobre a mesma situação, considerando as representações verbal, visual, física, contextual e simbólica, e explicitar as relações entre elas, evidenciando o papel das conexões entre representações para promover a compreensão matemática" (p.20).

De seguida, serão apresentados diferentes tipos de representação, de acordo com diferentes autores.

2.1- Tipos de representações

Dufour-javier et al. (1987) distinguem dois tipos de representações: as representações que formamos sobre a realidade, ou seja, construções internas ligadas a um significado (representações internas); e as representações que correspondem a expressões simbólicas — como símbolos, esquemas ou diagramas — cuja função é representar, de forma visível, determinada "realidade" matemática, situando-se no domínio do significante (representações externas ou múltiplas).

Apesar de distintas, estes dois tipos de representações relacionam-se mutuamente, uma vez que, as representações internas são ativadas quando o aluno encontra uma representação externa que não lhe é familiar, levando-a a confrontá-la com aquilo que já conhece internamente (Velez, 2020). Assim, é importante compreender que tipos de representações externas existem.

De acordo com Bruner (1999) as representações externas podem assumir diferentes tipos: icónicas (ou visuais); simbólicas; e ativas (ou físicas).

As representações ativas (ou físicas) recorrem à ação e à manipulação de materiais concretos, favorecendo a compreensão de ideias matemáticas que podem ser difíceis de transmitir apenas por palavras ou imagens (Azevedo, 2025). Este envolvimento físico torna a aprendizagem da Matemática mais intuitiva e motivadora, sobretudo nos primeiros anos de escolaridade (Azevedo, 2025).

As representações icónicas (ou visuais) podem ser caraterizadas como todos os desenhos, figuras, imagens ou esquemas que o aluno utiliza para o aluno exemplificar ou tornar os conceitos mais claros (Araújo, 2014). Este tipo de representação é ainda caracterizado por se basear na disposição visual ou em outras perceções sensoriais, utilizando imagens para transmitir significado (Bruner, 1999).

As representações simbólicas referem-se às formas formais de representação matemática, consistindo em proposições simbólicas ou lógicas estruturadas por regras específicas (Bruner, 1999). Por outro lado, dentro das representações simbólicas podemos enquadrar dois tipos de representações: representações simbólicas verbais ou apenas representações verbais, que usam a linguagem para expressar conceitos matemáticos, e representações simbólicas matemáticas, que utilizam notação matemática (Velez, 2020). Contudo Hiebert e Carpenter (1992) defendem que, no início da aprendizagem, os alunos devem explorar múltiplas representações antes de recorrer à "utilização de símbolos", de forma que estes surjam naturalmente.

Por sua vez, Lesh et al. (1987), distinguem ainda um outro tipo de representação: as representações contextuais. O mesmo autor classifica as representações contextuais como representações que envolvem contextos ligados ao quotidiano do aluno, ajudando-o a estabelecer conexões entre os conceitos e conteúdos matemáticos e o seu dia-a-dia (Lesh et al. (1987). Esta perspetiva articula-se com o que é defendido por NCTM (2017), que inclui as representações contextuais como uma das cinco representações fundamentais e reconhecendo o potencial das situações da vida real na apropriação de ideias matemáticas.

Neste sentido, as representações contextuais podem ser entendidas como um elo entre a formalidade matemática e a experiência vivida, permitindo que os alunos interpretem, comuniquem e discutam ideias matemáticas num registo que se ancora em significados que já dominam (Branco et al., 2025).

Além disso, as representações contextuais encontram-se intrínsecas à resolução de problemas, área em que o recurso a situações realistas permite clarificar significados e apoiar a formulação de estratégias (Azevedo, 2025). Tal enquadramento é coerente com o que defendem diversos autores, nomeadamente Goldin (2018), que destaca o papel das representações tangíveis e significativas no apoio ao raciocínio matemático, e Barbosa e Vale (2022), que valorizam o uso de representações que favoreçam a emergência de raciocínios mais intuitivos e significativos.

Assim, neste projeto investigativo assumem-se os seguintes tipos de representações, descritas por Canavarro et al. (2021): as representações verbais, através das explicações ou ideias que os alunos expõe nos momentos de diálogo sobre os diversos conceitos matemáticos; representações visuais, através das ilustrações que os alunos utilizam para explicar o seu pensamento e as estratégias que utilizaram; as representações contextuais, através das relações que os alunos estabelecem entre os conceitos matemáticos que estão a trabalhar e o contexto a ser explorado; e as representações simbólicas, através da notação matemática que os alunos utilizam para representar os diferentes conceitos trabalhados (Tabela 1).

Tabela 1

*Classificação das representações adotada neste estudo, de acordo com Canavarro et al. (2021)***.**

Tipos de representações	Os alunos recorrem a essas representações quando usam:
Físicas	Materiais manipuláveis, objetos
Verbais	Linguagem oral ou escrita
Visuais	Diagramas, tabelas, gráficos, desenhos
Contextuais	Situações da vida real
Simbólicas	Notação simbólica

3. O Ensino das Frações

3.1- Os Números Racionais

Aos dias de hoje, e tal como afirmam Quaresma e Ponte (2012), a definição de número racional, apesar da sua elevada complexidade, é uma das mais importantes nos primeiros anos de escolaridade.

Assim, um número racional pode ser definido como:

- Segundo Veloso (2017), como todos os números que podem ser expressos na forma de fração cujo numerador e denominador são inteiros, sendo o denominador diferente de zero; portanto, todos os números inteiros também se enquadram como números racionais.
- Segundo Caraça (1951), como todo ou qualquer número que pode ser representado como uma razão ou fração entre dois números inteiros, M e n (n ^{1} 0).

Devido à complexidade de definir os números racionais, torna-se importante perceber que os números racionais podem assumir diferentes representações (Quaresma & Ponte, 2012).

Antes de apresentar as diferentes representações que os números racionais podem assumir é importante perceber que uma representação consiste numa disposição de sinais, símbolos, imagens ou objetos que têm a função de indicar, transmitir um significado ou substituir algo (Goldin, 2003).

Quaresma e Ponte (2012) complementam a designação de representação afirmam que ao representar um número estamos a "atribuir-lhe uma designação" (p.40). Além disso é crucial que os alunos percebam que um número pode ser expresso de diferentes formas ou através de representações distintas, uma vez "necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. […]" (NCTM, 2007, p. 240).

Por outro lado, a compreensão do conceito de número racional por parte dos alunos é influenciada pelas seguintes particularidades do pensamento dos alunos: (i) a facilidade em alternar entre diferentes formas de representar os números racionais; (ii) a aptidão para efetuar transformações no interior de cada representação; e (iii) a crescente capacidade de pensar de forma abstrata, sem depender tanto de representações concretas (Post, et al., 1993).

Os números racionais podem assumir forma/representação: de numeral decimal, fração e de percentagem. Assim, define-se percentagem como uma forma simplificada de representar uma fração com denominador 100, em que *n%* equivale a $\frac{n}{100}$ (Lima et al., 2005 cit. por Heitor, 2018). Guerreiro et al. (2018) complementam esta definição afirmando que uma percentagem corresponde a uma forma de representação versátil dos números racionais, destacada por três aspetos principais: o seu uso frequente e o entendimento da expressão "por cento" no quotidiano dos alunos, a simplicidade da sua notação — que combina um número inteiro com um símbolo de relação multiplicativa — e a facilidade com que pode ser convertida em fração ou número decimal.

Além disso, de acordo Parker e Leinhardt (1995), a representação dos números racionais na forma de percentagem constitui uma forma vantajosa e amplamente utilizada na vida dos alunos, pois está presente em diversos contextos do quotidiano dos mesmos — como o nível de carga das baterias dos telemóveis ou os descontos em produtos —, estabelecendo assim uma ponte entre situações do dia a dia e os conceitos matemáticos relacionados com estruturas multiplicativas.

Relativamente aos numerais decimais, estes são formas de expressar os números racionais no sistema decimal, recorrendo aos algarismos e à vírgula como elementos de representação (Heitor, 2018). Assim, com base em Vale e Pimentel (2004), compreende--se que qualquer número inteiro ou racional não inteiro pode ser representado por um numeral decimal, uma vez que a fração decimal $\frac{N}{10^k}$ corresponde a um número decimal d.

Relativamente à representação de um número racional na forma de fração, esta acontece quando um dado número pode ser escrito na forma $\frac{D}{d}$, onde "o numerador D representa um número inteiro e o denominador d representa um número natural (inteiro não nulo, d ≠ 0)" (Veloso, 2017, p.5).

É importante ainda destacar que segundo Post et al. (1986), muitos alunos revelam dificuldades em compreender os números racionais como verdadeiros números, mostrando falta de uma noção quantitativa e funcional e não reconhecendo que estes podem ser representados de várias formas, como decimais, frações, percentagens, representações gráficas ou expressões verbais.

3.2- Significados das Frações

Tal como foi referido anteriormente, os números racionais podem ser representados sobre a forma de frações. Desta forma torna-se crucial, destacar a definição de fração e dos diferentes significados que estas podem assumir.

O conceito de fração é algo bastante complexo de se definir, uma vez que as frações podem "representar números e relações entre números" (Monteiro & Pinto, 2005, p.91). Além disso é importante destacar que, segundo Monteiro e Pinto (2007), uma "fração é uma representação versátil e muito rica, porque permite expressar diferentes relações" (p.12), ou seja, definir uma fração dependerá do contexto em que esta surja e da relação que esteja a exprimir.

Uma mesma fração pode assim expressar: uma relação parte-todo de unidades contínuas ou discretas; a divisão entre dois números inteiros, um operador numa multiplicação, uma medida ou comparação de uma grandeza com uma unidade e uma comparação entre duas partes de uma mesma unidade (Monteiro & Pinto, 2005).

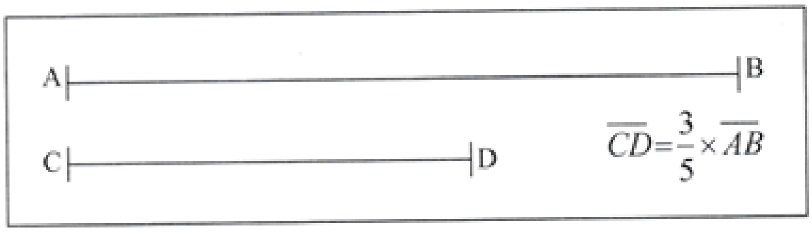
Uma fração representa uma relação parte-todo, quer de unidades contínuas como discretas, quando é usada para exprimir uma relação comparativa entre uma unidade, ou seja, um todo, e a uma parte da mesma (Monteiro & Pinto, 2007). Neste tipo de relação, segundo Monteiro e Pinto (2005), "o símbolo a/b refere-se a uma parte fracionada de uma só unidade (por exemplo um quinto de uma folha de papel está pintada, ou um quinto de uma coleção de 10 lápis são azuis, sendo o todo a folha de papel e a coleção de lápis respetivamente" (p.91).

Além disso, neste tipo de relação, os elementos constituintes de uma fração possuem características específicas, na medida em que o denominador representa a quantidade de vezes que o todo se encontra repartido e o numerador representa a quantidade que se pretende desse mesmo todo (Monteiro & Pinto, 2007).

Uma fração possui o significado de medida quando existe uma comparação entre duas grandezas, tendo uma delas caraterísticas do todo (unidade) (Monteiro & Pinto, 2005). Monteiro e Pinto (2005), ilustram (através da figura 1) e descrevem que, por exemplo, " Para medir com a unidade $\overline{AB}$ o comprimento $\overline{ED}$, há que dividir a unidade em partes tais, que um número inteiro dessas partes corresponda ao comprimento que se quer medir” (pp. 13 e 14),

Figura 1

Ilustração significado de medida (Monteiro & Pinto, 2007, p. 14)



Uma fração, tal como mencionado anteriormente, pode ilustrar uma divisão entre dois números inteiros. Esta representação ocorre quando o denominador não é zero e em momentos onde se pretende representar uma divisão justa entre duas quantidades (Monteiro & Pinto, 2007). Neste significado, o numerador ilustra a quantidade de algo que será distribuído, enquanto o denominador representa a quantidade de elementos que irão beneficiar dessa distribuição (Monteiro & Pinto, 2007).

Assim, este tipo de significado, representa “uma relação entre duas quantidades, mas que também tem o significado de uma quantidade, que é a quantidade com que cada um dos receptores ficou” (Monteiro & Pinto, 2007, p. 13).

Isto sucede-se quando, por exemplo, a fração “3/4, na situação “3 pizas a dividir por 4 crianças”, representa a relação entre o número de pizas e o número de crianças, mas também representa o resultado dessa divisão — a quantidade de piza com que cada criança ficou” (Monteiro & Pinto, 2005, p.92)

Uma fração representa um operador numa multiplicação, quando o denominador representa um quociente e o numerador representa um produto (Monteiro & Pinto, 2007). Segundo Monteiro e Pinto (2005), neste tipo de representação, a “fracção a/b transforma o cardinal de um conjunto discreto (3/4 de 12 lápis são 9 lápis) ou, no caso de uma figura, tem o efeito de redução ou de ampliação” (p.92).

Uma fração pode ainda assumir-se como uma razão entre dois constituintes da mesma unidade, ou seja, quando pretendemos comparar duas grandezas que pertencem ao mesmo todo. Um exemplo que ilustra bem esta situação é referido por Monteiro e Pinto (2007), quando as mesmas mencionam que “numa turma a razão entre o número de rapazes e o número de raparigas é de três para cinco” (p.14).

3.3- Dificuldades comuns dos alunos envolvendo frações.

O ensino das frações é complexo e por essa mesma razão, "as fracções são um dos temas do ensino básico em que os alunos apresentam mais dificuldades" (Monteiro et al., 2005, p. 47).

Os alunos, segundo Monteiro e Pinto (2007), podem sentir dificuldades na comparação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, uma vez que alguns alunos acreditam que $\frac{1}{4}$ é superior que $\frac{1}{3}$, justificando a sua resposta com a afirmação de que 4 é superior a 3. Além disso, muitos alunos afirmam que $\frac{1}{2}$ e 1,2 representam o mesmo número (Monteiro & Pinto, 2007). Estas autoras afirmam ainda que estas dificuldades revelam que “a representação fraccionária ainda não está compreendida” (Monteiro & Pinto, 2007, p. 12).

Os alunos ainda revelam sentir dificuldades na adição envolvendo frações, acabando por adicionar “os numeradores e os denominadores, precisamente porque generalizam os algoritmos das operações com números inteiros” (Monteiro & Pinto, 2007, p. 12).

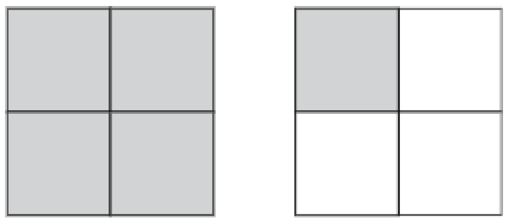
Outra dificuldade que os alunos podem sentir é referente à representação de frações através de numerais decimais, uma vez que, segundo Monteiro e Pinto (2005), é possível verificar que alguns alunos afirmam que “1,345 é maior que 1,7 dando como justificação o facto do primeiro ter “mais números” que o segundo, ou então porque 345 é maior que 7” (p. 91).

Ainda de acordo com Monteiro e Pinto (2005), alguns alunos apresentam dificuldades relativas à relação “parte-todo” que uma fração pode assumir, uma vez que revelam dificuldades em fazer a distinção entre esta relação e a relação de uma parte com outra parte. Um exemplo desta dificuldade é descrito por Monteiro e Pinto (2005) quando estas afirmam que “há professores que se queixam que quando mostram 3/5 pintados de uma figura e perguntam que fracção está representada, pretendendo que os alunos respondam 3/5, alguns alunos respondem 3/2 evidenciando a relação entre as duas partes, a pintada e a não pintada” (p. 92).

Esta dificuldade intensifica-se quando a fração que se pretende ilustrar representa um número superior à unidade (Monteiro & Pinto, 2005). Esta dificuldade é percetível através do seguinte exemplo apresentada por Monteiro e Pinto (2005): “na figura seguinte, a parte sombreada da figura constituída por 2 unidades, 5/4, pode ser interpretada, como sendo 5/8” (p.92).

Figura 2

Exemplo apresentado por Monteiro e Pinto (2005, p. 92)



Através dos estudos apresentados por Bright et al. (1988), os alunos podem ainda apresentar dificuldades em localizar frações na reta numérica quando o número de divisões não coincide com o denominador, mesmo que se trate de um múltiplo ou submúltiplo deste, o que revela uma compreensão limitada e pouco flexível do conceito de fração.

Aksoy e Yazlik (2017) apresentam ainda algumas dificuldades e debilidades que os alunos possuem nas operações envolvendo frações. Assim, os autores revelam que os alunos apresentam dificuldades em compreender a relação entre numerador e denominador, cometendo erros como adicionar ou subtrair numerador e denominador simultaneamente e tratar frações como números independentes (Aksoy &Yazlik, 2017). Relativamente à multiplicação e à determinação do todo a partir de uma parte, também surgem equívocos, como multiplicar pelo denominador ou aplicar a divisão de forma comutativa (Aksoy & Yazlik, 2017).

Além das dificuldades já referidas, Almeida e Branco (2018), destacam ainda que umas das dificuldades que os alunos mais sentem no trabalho com as frações é a identificação da unidade a trabalhar.

3.4- Tipos de Unidades

As dificuldades que se verificam ao longo do processo de ensino das frações, tal como referido anteriormente, destacam-se sobretudo pelas questões relacionadas com o todo/unidade, uma vez que, para além de desempenhar um papel extremamente importante para a constituição de uma fração, a mesma pode ser caraterizada de várias formas (Monteiro & Pinto, 2005, 2007).

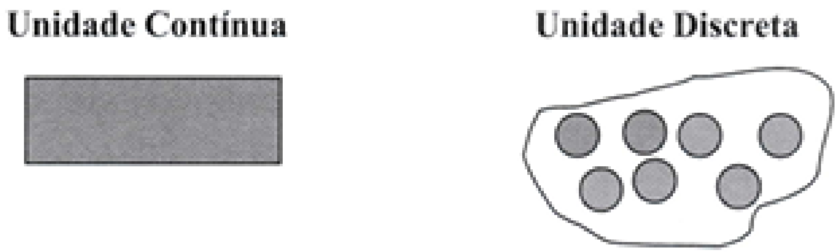
Assim, as unidades podem se caracterizar como unidades simples, compostas, contínuas e discretas (Monteiro & Pinto, 2005, 2007). Assim, classifica-se uma unidade como composta quando esta junta um grupo discreto de objetos, como por exemplo uma dúzia de maçãs, onde uma maçã poderá ser classificada como a unidade simples (Monteiro & Pinto, 2007).

Por sua vez, a unidade é classificada como contínua quando esta não possui um limite para ser repartida, como por exemplo um bolo ou uma piza (Morais et al., 2014).

Em contrapartida, uma unidade diz-se discreta quando é formada por elementos que, apesar de poderem contar, não podem ser divididos, como por exemplo berlindes (Morais et al., 2014).

Figura 3

Ilustração de unidades contínuas e discretas (Monteiro & Pinto, 2007, p. 15)



4- O uso de materiais no ensino da Matemática

4.1- Tipos de materiais

Historicamente, a matemática tem vindo a ser trabalhada de uma maneira bastante abstrata, com escassa utilização de exemplos práticos e com alguma limitação em articular os conteúdos e conceitos trabalhados com situações do quotidiano, provocando inúmeras dificuldades ao nível da compreensão matemática e influenciando negativamente o gosto e a motivação por esta área curricular (Silveira et al., 2011).

Assim, torna-se importante utilizar materiais curriculares e didáticos que permitam não só motivar e cativar os alunos na sua aprendizagem da matemática, mas também que sejam recursos capazes de suprir as dificuldades que os mesmos poderão sentir ao longo do processo de aprendizagem.

Considerando a relevância que podem ter estes materiais, torna-se importante distingui-los, uma vez que, para além dos materiais curriculares possuírem características distintas, um material didático pode ser considerado um material educativo, mas nem todo material educativo é, necessariamente, didático (Graells, 2000).

Os materiais curriculares, segundo Zabalza (1998), correspondem a recursos que apoiam o trabalho docente e que permitem dar resposta a problemas que surgem em diferentes fases do processo educativo, seja no planeamento, na execução ou na avaliação. Além disso, segundo o mesmo autor, estes materiais têm como principais funções: "orientar, guiar, exemplificar, ilustrar, propor, divulgar" (p. 168).

Assim, Zabalza (1998), agrupa os materiais curriculares em diferentes grupos, tendo em conta os parâmetros: âmbito de intervenção, finalidade, conteúdos e tipo de suporte desempenhado.

O parâmetro referente ao âmbito de intervenção, refere-se aos diferentes níveis em que os professores atuam, agrupando materiais voltados ao sistema educativo em geral, às decisões institucionais (como projetos escolares), ao trabalho com a turma ou ainda ao ensino-aprendizagem individualizado (Zabalza, 1998, cit. por Botas & Moreira, 2013).

O parâmetro referente à finalidade, diz respeito ao papel que os materiais exercem, podendo servir para orientar, exemplificar, ilustrar ou divulgar, ajudando o professor a tomar decisões, como é o caso dos livros e artigos teóricos, guias didáticos, programas audiovisuais ou propostas que oferecem alternativas pedagógicas (Zabalza, 1998, cit. por Botas & Moreira, 2013).

O parâmetro referente aos conteúdos, classifica os materiais de acordo com o tipo de conteúdo que se pretende trabalhar: conteúdos procedimentais (como fichas e softwares de treino), conteúdos conceituais (como manuais escolares) e conteúdos atitudinais (como propostas educativas e materiais multimédia) (Zabalza, 1998, cit. por Botas & Moreira, 2013).

Por fim, o último parâmetro, inclui recursos como o quadro, materiais em papel (livros, cadernos, fichas), projeções estáticas (slides, transparências) ou dinâmicas (vídeos, informática, multimédia) (Zabalza, 1998, cit. por Botas & Moreira, 2013).

Em contrapartida, definir um material didático é bastante complexo, uma vez que ao longo dos anos, apesar de existir uma complementaridade, é definida de diferentes maneiras por diferentes autores.

Segundo, Mansutti (1993), a definição de material didático tem em conta as palavras “material” e “instruir”. Para este mesmo autor, um material carateriza-se por ser “conjunto de objetos que constituem ou formam uma obra, uma construção" (p. 17) e a palavra instruir significa “"transmitir conhecimentos, ensinar, habilitar, exercitar e informar" (p. 17). Assim, o autor, através da junção dos significados destas duas palavras, define como material didático qualquer instrumento utilizado pelo professor na sua prática, através do qual se articula a aprendizagem com a formação.

Tal como referido anteriormente, a definição de materiais didáticos tem vindo a ser complementada por diferentes autores:

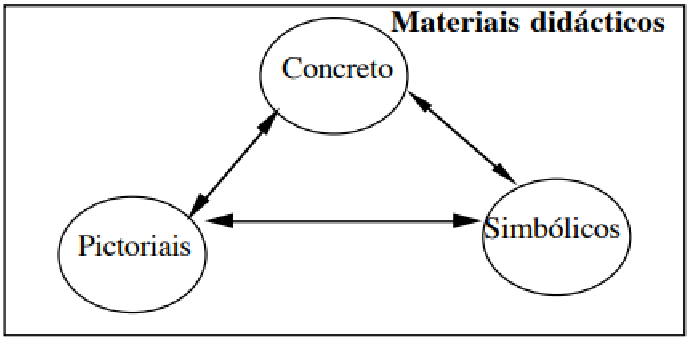
- Assim, Gagné (1971 citado por Vale, 2002) afirma que estes constituem parte do ambiente de aprendizagem e desempenham um papel essencial na motivação e no desenvolvimento da aprendizagem do aluno;
- Bandeira (2009), afirma que um material didático “pode ser definido amplamente como produtos pedagógicos utilizados na educação e, especificamente, como o material instrucional que se elabora com finalidade didática” (p.14);
- E Meksenas (2001, citado por Meros, 2021), destaca que um “material didático pode ainda ser definido como um ambiente ou obra, escrita ou organizada com a finalidade específica de ser utilizado numa situação didática” (p. 39);
- Por fim, Hole (1977), explica ainda que estes materiais surgem como meios de aprendizagem e de ensino.

Apesar destes materiais serem ferramentas bastante importantes para a promoção de uma boa aprendizagem, torna-se importante que o docente selecione da melhor forma todos os materiais, tendo em consideração, além da qualidade do mesmo, “até que ponto as suas características específicas (como conteúdos, atividades ou formas de acompanhamento) se articulam com os elementos curriculares do contexto educativo em que vão ser utilizados.” (Graells, 2000, p.5).

É importante ainda referir que os materiais didáticos podem ser, tal como ilustra a figura 4, agrupados em três categorias: pictoriais, abstratos ou simbólicos e concretos (Lesh, 1979; Bruner, 1962; Fennema, 1982; Sowell, 1989; Schultz, 1989, cit por Vale, 2002).

Figura 4

Tipos de materiais didáticos (Vale, 2002, p. 7)



Os materiais pictoriais, segundo Vale (2002), “permitem que os alunos observem apresentações audiovisuais, observem demonstrações pelo professor ou usem desenhos ou imagens de materiais concretos; permitem uma representação de ideias matemáticas entre o concreto e o simbólico e são usadas normalmente em livros de texto” (pp. 7 e 8). A autora refere ainda que os materiais abstratos possibilitam que os alunos utilizem a leitura, a escrita e o registo em papel, recorrendo a números e sinais convencionados que servem para expressar ideias matemáticas, bem como operações ou relações entre elas (Vale, 2002).

Os materiais concretos possibilitam que os alunos interajam diretamente com eles, funcionando como uma forma de representar ideias matemáticas através de objetos tridimensionais e podem ser classificados em dois grupos: materiais comuns e materiais educativos (Vale, 2002).

Os materiais comuns são objetos de uso quotidiano que são utilizados para diferentes propósitos, como é o caso dos paus de gelado, folhas de papel, espelhos, entre outros (Vale, 2002). Por sua vez, define-se por materiais educativos todo e qualquer material que, num dado contexto de ensino, seja utilizado com o propósito de apoiar a aprendizagem ou de orientar atividades formativas (Graells, 2000). Do mesmo modo, também são definidos como material educativo todos os "recursos que sejam criados e aplicados na ação educativa e que promovam o desenvolvimento do processo cognitivo", como por exemplo "esquemas, instrumentos, como textos, manual escolar, calculadora, barras de Cuisenaire, régua, balança, lupa, microscópio entre outros"(Pereira, 2019, p. 18).

Dentro dos materiais didáticos concretos encontram-se ainda inseridos os materiais manipuláveis. Tal como acontece com os materiais didáticos, apesar de existirem diversos autores a definirem materiais manipuláveis, estas definições acabam por convergir e assemelharem-se umas com as outras (Marques, 2013). Assim, os materiais manipuláveis são definidos da seguinte forma:

- Para Reys (1971), os materiais manipuláveis correspondem a objetos que permitem ao aluno sentir, explorar com as mãos, manipular e movimentar.
- Para Marques (2013), os materiais manipuláveis são "materiais, objetos, instrumentos ou outros media que podem ajudar os alunos a descobrir, entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem." (p. 11).
- Por outro Botas e Moreira (2013), afirmam que os materiais manipuláveis caraterizam-se por serem materiais que "possibilitam ao professor desenvolver um ensino centrado no aluno e na sala de aula e que auxiliam a aprendizagem, desenvolvendo uma atitude positiva dos alunos face à Matemática" (p. 262).

Após compreender o conceito de materiais manipuláveis é importante perceber que estes, quando aplicados com intencionalidade pedagógica, enquadram-se numa visão construtivista da aprendizagem, pois as ações realizadas pelo sujeito sobre objetos físicos influenciam de forma significativa o desenvolvimento conceptual (Vale, 2012). Além disso, Pereira (2019) refere que "os materiais manipuláveis devem ser utilizados nas situações de aprendizagem em que o seu uso seja facilitador da compreensão dos conceitos e das ideias que estão a ser trabalhadas" (p.20).

Os materiais manipuláveis, por permitirem que os alunos adquiram conhecimentos através da exploração e construção de recursos, são ainda instrumentos cruciais para a promoção de uma aprendizagem ativa e para que a escola consiga fornecer aos alunos vivências importantes em diferentes situações (Pereira, 2019).

De modo a potencializar essa mesma aprendizagem, é essencial perceber que os materiais manipuláveis possuem inúmeras funções. Reys (1971), afirma que os materiais manipuláveis servem para diversificar as estratégias de ensino e criar oportunidades de resolução de problemas em situações reais; para disponibilizar formas visíveis e palpáveis de conceitos difíceis de entender; de apoio à análise de informações percebidas pelos sentidos, indispensáveis para a formação de conceitos; para estimular os alunos na identificação de relações e construção de generalizações; assegurar participação ativa dos alunos e para motivar os alunos não apenas em relação a conteúdos específicos da matemática, mas ao ato de aprender como um todo. Além disso, estes materiais servem ainda para "responder às diferenças individuais" dos alunos (Reys, 1971, p. 9).

Os materiais manipuláveis podem ser classificados em estruturados e não estruturados. Os primeiros são concebidos com uma finalidade pedagógica definida, trazendo em si ideias matemáticas específicas (Hole, 1977, citado por Botas & Moreira, 2013). Já os não estruturados não possuem, na sua conceção, elementos matemáticos próprios, sendo o seu uso dependente da forma como o professor os integra em atividades (Botas & Moreira, 2013). Além disso, estes são ainda definidos por Hohmann e Weikart (2011, citado por Ribeiro, 2020), como materiais que oferecem ao aluno a possibilidade de decidir como os utilizar e que favorecem interpretações pessoais, sendo por isso fundamentais para despertar a motivação das crianças e promover uma aprendizagem ativa.

Desta forma, consideram-se os blocos padrão como exemplos de materiais manipuláveis não estruturados e os livros infantis como materiais didáticos que podem ser usados pelo docente de modo a melhorar o processo de aprendizagem dos alunos.

4.2- Blocos padrão

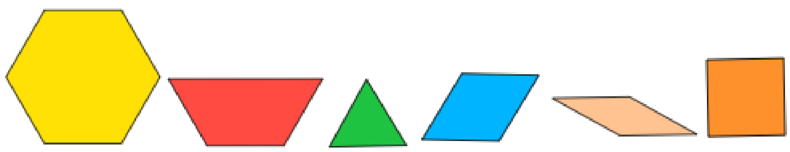
Assim como foi referido anteriormente, os blocos padrão enquadram-se no grupo dos materiais ou recursos manipuláveis. Esta afirmação é validada quando Champion e Wheeler (2014 cit por Meireles, 2015), afirma que "Os blocos padrão são um recurso manipulável que foi desenvolvido nos anos 60 e especialmente usado pelos professores para auxiliar os alunos a compreenderem conceitos abstratos" (p.50). Neves (2024) acrescenta ainda que este recurso possibilita explorar de forma prática e visual conceitos matemáticos e geométricos, facilitando a compreensão de frações, simetria, padrões e outros conteúdos. Além disso, Meireles (2015), afirma ainda que este recurso é bastante polivalente, uma vez que os seus constituintes auxiliam os alunos na resolução de problemas e guiam os alunos a estabelecer diferentes relações matemáticas presentes no trabalho com os mesmos.

Os blocos padrão são materiais distintos entre si, tendo diferentes cores e tamanhos e representam diferentes figuras geométricas. Estas características são bastante importantes pois possibilitam que os alunos "os manipulem para criar, decompor e reconstruir figuras, tornando todo o processo de aprendizagem mais interativo e prático" (Neves, 2024, p.40).

Assim, tal como é visível na figura 5, os blocos padrão são formados por seis peças distintas: um hexágono, um triângulo, um trapézio, um losango grande, um losango pequeno e um quadrado. É de salientar que, apesar de possuírem cores diferentes, estas podem variar dependendo do conjunto de blocos padrão utilizados.

Figura 5

Peças que formam os Blocos padrão



É ainda importante mencionar que cada peça deste material manipulável possui características específicas. Segundo Meireles (2015), as peças pertencentes aos blocos padrão têm os seus "lados congruentes com exceção do trapézio em que um dos lados paralelos (base maior) tem exatamente o dobro da medida comprimento de qualquer um dos outros lados" (p.51). Além disso, a mesma refere ainda que os ângulos internos do losango maior medem 60º e 120º e que os ângulos internos do losango mais pequeno medem 30º e 150º (Meireles, 2015).

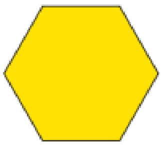
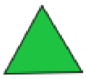
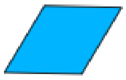
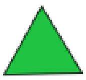
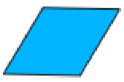
A partir destes materiais manipuláveis é possível, tal como referido anteriormente, trabalhar com os alunos de forma que estes ao mesmo tempo que exploram este recurso consigam estabelecer diversas relações entre as peças pertencentes aos blocos padrão. Assim de seguida apresentarei as relações que existem entre as diferentes peças dos blocos padrão.

Uma das relações existentes entre as diferentes peças, remete para a decomposição das mesmas. Tal como é visível na tabela, é possível perceber que:

- o hexágono pode ser formado por dois trapézios, por seis triângulos, por três losangos grandes;
- o trapézio pode ser constituído por três triângulos;
- o losango grande pode ser formado por dois triângulos;

Tabela 2

Relações envolvendo a decomposição de cada peça.

	Peça			
Unidade de medida				
	2	1		
	6	3	1	2
	3			1

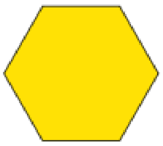
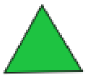
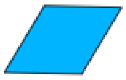
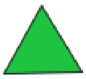
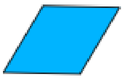
Outra das relações existentes, e sobre a qual se irá centrar este estudo prende-se sobretudo em questões relacionadas com a área de cada uma das peças existentes, uma vez que a área do hexágono é o sêxtuplo da área do triângulo verde, a área do trapézio é o triplo do triângulo, e a área do losango grande é o dobro da área do triângulo. (Meireles,2015). Apesar desta relação se verificar nas peças referidas anteriormente, a mesma não se verifica para o quadrado e o losango mais pequeno, uma vez que a área do quadrado corresponde a $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ da área do triângulo e o losango mais pequeno corresponde a

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ da área do triângulo (Meireles, 2015). Por não ser possível estabelecer a mesma relação entre as peças, ao longo do estudo, apenas serão utilizados o triângulo, o hexágono, o losango grande e o trapézio.

Ainda relativamente à relação acima apresentada, a mesma pode ser descrita envolvendo os números racionais, nomeadamente as frações e a noção parte-todo. Assim, tal como é visível na tabela 3, é possível compreender que: um triângulo representa um sexto do hexágono, um terço do trapézio e metade de um losango grande; o trapézio é metade do hexágono; o losango grande é um terço do hexágono e dois terços do trapézio.

Tabela 3

Relação entre as peças dos blocos padrão representada com frações.

	Peça			
Unidade de medida				
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$		
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{1}$

Os blocos padrão, tal como referido anteriormente, além de apresentarem diferentes relações entre si e de ajudarem os alunos na resolução de problemas, apresentam outras potencialidades, nomeadamente na compreensão do número racional representado na forma de fração. Assim, irei enumerar, de acordo com diversos autores, algumas potencialidades que este material possui nesse mesmo âmbito:

- Segundo Vale (1999), este material permite suprir dificuldades relativas à perceção do conceito de fração, uma vez que estes podem auxiliar os alunos a representar frações e efetuar operações com as mesmas;
- Segundo Meireles (2015), este material possibilita aos alunos "construírem significados ao nível do conceito e dos procedimentos, uma

vez que este material permite-lhes visualizar o conceito de fração e não, somente, memorizar regras operatórias.” (p.53);

- Por outro lado, segundo (Meireles, 2015), “o uso dos blocos padrão tem desempenhado um papel importante na construção e desenvolvimento do conceito de número racional” (p.53).

Assim, devido às suas potencialidades e por consistir numa ferramenta bastante útil para o trabalho com frações, este material manipulável foi utilizado numa das tarefas estudo descrito neste mesmo relatório.

4.3- Livros infantis

À semelhança dos blocos padrão, os livros infantis podem ser classificados como materiais didáticos. Por esse motivo torna-se importante falar sobre estes e sobre a importância que podem ter na aprendizagem da matemática.

Contudo, para se abordar a temática dos livros infantis torna-se indispensável abordar temáticas que estão continuamente intrínsecas aos mesmo, nomeadamente os termos Literatura e Literatura infantil.

O termo Literatura é assim definido por Silva (1984), como o “conjunto de obras consideradas como esteticamente valiosas pelo ‘’milieu’’ literário (…) e aceites pela comunidade como parte viva, fecunda e imperecível da sua herança cultural’’ (p. 144).

Dentro deste grande grupo de obras, existem aquelas que se enquadram no termo Literatura Infantil. A Literatura Infantil é trabalhada desde os primeiros anos de vida e, apesar de não lhe atribuirmos a sua merecida importância, é retratada muitas vezes como os “livros infantis” (Ribeiro, 2020). Apesar de atribuirmos essa designação, a literatura infantil não se carateriza apenas por essa mesma designação. Este termo “Literatura Infantil”, distingue-se do termo “Literatura” devido às “particularidades do público leitor a que se dirige especialmente: a criança.” (Silva, 2012, p.7).

Além disso, a literatura infantil apresenta a realidade de forma criativa e inovadora, abrindo espaço para que o leitor descubra sentidos ocultos e exercite a imaginação e constituindo-se como a expressão surpreendente da capacidade criadora do autor, que, atento à faixa etária do seu público, conduz a criança por uma viagem encantadora através dos caminhos da fantasia e da imaginação (Silva, 2012).

A Literatura Infantil é extremamente importante para as crianças uma vez que, de acordo com Silva (2012), os "textos literários infantis, através da força das imagens e das palavras, põem diante dos olhos da criança, alguns fragmentos da vida, do homem, da sociedade, do ambiente imediato ou longínquo, da realidade exequível ou inalcançável, mediante um sistema de representação." (p.8). Além disso, este recurso permite que exista uma "emergência da literacia de leitura e envolvimento positivo com livros e leitura, a compreensão de histórias; o desenvolvimento de capacidades linguísticas e da consciência linguística" (Costa & Mendes, 2017, p. 2).

A Literatura Infantil, além de ser prazerosa para a criança, oferece à mesma a possibilidade de vivenciar simbolicamente a "fuga" da realidade e a construção de mundos imaginários que atendem aos seus anseios e sonhos (Silva, 2012). Nesse sentido, o autor destas mesmas produções literárias, torna-se mediador entre a criança e o conhecimento, ao mesmo tempo em que estimula sua imaginação, sensibilidade artística e fruição estética (Silva, 2012).

Além das competências linguísticas que este recurso promove, este possibilita trabalhar temáticas referentes a conteúdos matemáticos.

O trabalho de conteúdos matemáticos através dos livros infantis, segundo Ribeiro (2020), possibilita "motivar os alunos, estabelecer conexões com os seus interesses e criar contextos de aprendizagem mais significativos, funcionando assim como uma estratégia poderosa para desenvolver o conhecimento e capacidades matemáticas" (p.23). Além disso, este recurso permite que os alunos sejam "capazes de se adaptar mais facilmente ao contexto de aprendizagem e construir diferentes tipos de conhecimento matemático, que podem ir desde o mais informal até ao mais formal, dependendo das vivências e do grau de desenvolvimento cognitivo de cada aluno" (p.23).

Os livros infantis, com os quais é possível trabalhar conteúdos matemáticos, podem ser divididos em três grupos tendo em conta o tipo de conteúdo presente do mesmo: conteúdo percecionado, conteúdo explícito e conteúdo incorporado (Marston, 2010). O primeiro grupo, referente aos livros de conteúdo percecionado, engloba os livros infantis que expõe os conteúdos matemáticos de forma discreta, tendo assim "fundamentalmente objetivos de fruição literária" (Ribeiro, 2020, p. 24). Por outro lado, o segundo grupo, referente aos livros com conteúdo explícito, enquadra todos os livros que "são escritos com informações explícitas a conteúdos matemáticos, como por exemplo, os livros para “contar”.” (Ribeiro, 2020, p. 24). Por fim, o último grupo, referente aos livros com conteúdo incorporado, estão englobados os “livros com finalidades de fruição literária, mas que incluem intencionalmente ideias matemáticas.” (Ribeiro, 2020, p. 24).

Apesar de todos estes tipos de livros infantis poderem ser utilizados para aprimorar a aprendizagem e o ensino da Matemática, ao longo do estudo apresentado neste relatório foi utilizado um livro infantil com conteúdos matemáticos incorporados.

CAPÍTULO II

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

O capítulo seguinte é referente às opções metodológicas utilizadas ao longo de toda a investigação, como por exemplo, o tipo de abordagem e investigação em que se enquadra a investigação, as técnicas de recolha de dados e de análise usadas e a sua pertinência para o estudo realizado.

Iniciarei este capítulo com a descrição da questão e dos objetivos de investigação e do tipo de abordagem e investigação sobre a qual incidiu a minha investigação. Posteriormente, iriei descrever as técnicas de recolha e análise de dados utilizadas, bem como os instrumentos que as suportaram. As opções metodológicas descritas ao longo deste capítulo serão sempre fundamentadas tendo em conta a sua pertinência e adequação ao estudo.

Tal como mencionado na Introdução, este projeto de investigação tem como objetivo principal compreender como é que diferentes contextos contribuem para a compreensão do conceito de fração nos alunos do 3.º ano de escolaridade. Assim, pretendo responder às questões de investigação apresentadas anteriormente: i) Que significados de fração os alunos utilizam nos diferentes contextos? e ii) Que representações os alunos usam nos diferentes contextos explorados?

1. Abordagem e tipo de investigação

Antes de descrever as técnicas de recolha e análise de dados utilizados ao longo deste projeto investigativo, considero crucial referir o tipo de investigação que se implementou e o tipo de abordagem adotada, fundamentando.

Assim, de modo a conseguir referir em que tipo de investigação o meu estudo se enquadra, considero necessário falar um pouco sobre o que é investigar e sobre a investigação quantitativa e sobre a investigação sobre a prática.

O conceito de investigação não deve remeter apenas para estudos produzidos apenas por investigadores profissionais, uma vez que constitui uma atividade presente no quotidiano de todos e necessário para o desenvolvimento de uma sociedade, com destaque para as escolas e para a formação de todos os seus intervenientes (Ponte, 2008).

Um professor, para além de ter um papel formador, deve ser ele próprio um investigador, uma vez que deve refletir sobre as opções que tomou na sua prática, tentar perceber a razão pela qual os seus alunos apresentam maus resultados, possuir um olhar crítico sobre os manuais e atividades que lhe são propostas e que reflita sobre o papel da escola (Alarcão, 2001)

Uma investigação carateriza-se por ser um trabalho de pesquisa com um fio condutor específico. Segundo Ponte (2008), uma investigação "começa com a identificação de um problema relevante – teórico ou prático – para o qual se procura, de forma metódica, uma resposta convincente" e "termina quando foi comunicada a um grupo para o qual ela faz sentido, discutida e validada no seu seio" (p.3).

1.1. Investigação qualitativa

Uma investigação qualitativa caracteriza-se por ser uma investigação onde o investigador constitui a ferramenta principal e crucial ao longo de toda a investigação e a pela sua fonte direta de informação ser o meio natural, como por exemplo as escolas (Bogdan & Biklen, 1994). Este tipo de investigação "visa contribuir para o melhoramento das situações e para a resolução dos problemas existentes no contexto" (Amado, 2014, p. 14).

Neste tipo de investigação, conforme referem Bogdan e Biklen (1994), é valorizada a observação dos participantes nos seus contextos naturais e os dados recolhidos, como descrições, imagens e palavras dos próprios participantes, devem permitir ao investigador construir uma narrativa descritiva da realidade observada. O principal objetivo da recolha de dados é alcançar uma compreensão fundamentada a partir da análise do material obtido, e não validar hipóteses pré-estabelecidas. Assim, é uma abordagem centrada no participante, privilegiando a sua perspetiva sobre a situação em estudo (Bogdan & Biklen, 1994).

Neste sentido e após analisar as características das duas abordagens descritas anteriormente, considero este projeto investigativo enquadra-se numa investigação qualitativa, uma vez que:

a. é uma investigação centrada no aluno e na sua perceção sobre a temática em estudo;

b. a recolha de todos os dados necessários é feita no ambiente natural dos alunos, nomeadamente na sala de aula;

c. a recolha dos dados é a partir das produções, registos dos alunos e registos fotográficos desses mesmos registos e da transcrição dos diálogos e explicações nos momentos de partilha e de discussão das tarefas.

1.2. Investigação sobre a prática

De modo a conseguir fundamentar da melhor forma sobre que tipo de investigação se debruça este meu estudo, considero ainda crucial falar sobre a investigação sobre a prática.

Neste tipo de investigação e segundo Ponte (2008), "o investigador tem uma relação muito particular com o objecto de estudo – ele estuda não um objecto qualquer, mas um certo aspecto da sua prática profissional" (p.3). Além disso, este tipo de investigação possui bastantes potencialidades para o investigador, uma vez auxilia a compreensão e solução de problemas, favorece o crescimento profissional dos envolvidos, contribui para a melhoria das organizações em que atuam e pode promover o desenvolvimento da cultura profissional na área, assim como ampliar o conhecimento da sociedade como um todo. (Ponte, 2002).

A investigação sobre a prática requer que o investigador realize diversas etapas, tais como: recolher e registar dados sobre a prática, nomeadamente o comportamento observado das crianças e as suas produções; proceder à análise e interpretação desses mesmos dados, de forma criteriosa, tendo sempre em consideração o contexto em que as crianças se encontram e os seus intervenientes; justificar as decisões e os caminhos seguidos ao longo do estudo, comparando os conhecimentos prévios e opiniões com a leitura documental realizada; partilha da prática realizada e o contacto com outras práticas de maneira a permitir uma reflexão sobre as mesmas e sobre a própria prática (Silva, 2013).

Assim, e tendo em conta a fundamentação acima descrita, considero que a este estudo enquadra-se numa investigação sobre a prática, uma vez que o objeto de estudo tem relevância para a minha futura prática docente, nomeadamente no que concerne ao conhecimento sobre os alunos, pois irá contribuir para perceber como é que diferentes alunos mobilizam o conceito de fração em diferentes situações e possibilita fazer uma reflexão sobre a minha prática e sobre as decisões que tomei ao longo da implementação da intervenção pedagógica.

Além disso, este projeto segue as etapas descritas anteriormente inerentes à investigação sobre a prática, uma vez que, para além da formulação de objetivos e de questões de investigação e da partilha do mesmo, esta investigação foi desenvolvida tendo em conta a observação e a recolha de dados ao longo da implementação do estudo, bem como a sua análise.

2. Ética com as crianças

Antes de proceder à descrição das técnicas e instrumentos de recolha de dados, considero importante refletir sobre as considerações éticas de desenvolver um estudo com crianças.

Uma pesquisa ou uma investigação que envolve crianças tem de ter sempre em consideração o "respeito pela sua privacidade e pelo seu consentimento em participar ou não da investigação, além de eliminar quaisquer possibilidades de influenciá-las para que tenham uma determinada opinião" (Felipe & Moraes, 2022, p.230).

Além disso, é fundamental assegurar uma série de direitos, como o entendimento claro sobre os objetivos e métodos do estudo, a preservação da privacidade e confidencialidade, a informação sobre os possíveis benefícios e riscos, a liberdade de recusa em participar de situações desconfortáveis, o acesso antecipado aos resultados da pesquisa e a garantia de que eventuais custos decorrentes da participação sejam arcados pelos pesquisadores, sem prejuízo às atividades habituais dos participantes (Fernandes & Francischini, 2016).

Neste sentido e enquanto investigador e professor estagiário, tive como um dos principais pontos chave da minha intervenção, o respeito pela autonomia e vontade das crianças e a construção de um ambiente de respeito pela individualidade de cada um dos alunos e propicio à participação constante dos alunos e motivador para que estes pudessem desenvolver novas competências e capacidades.

Além disso, de modo a promover a ética necessária para este tipo de estudos, considerei necessário, desenvolver e partilhar com os encarregados de educação dos alunos, uma autorização para a recolha das produções dos alunos e para as gravações áudio dos momentos de partilha e discussão (**Anexo A**).

3. Técnicas de recolha de dados

Tal como referido anteriormente, para o desenvolvimento deste estudo, foi necessário proceder à recolha dos dados que considerava pertinentes e para puder refletir sobre os objetivos e a questão de investigação definidas previamente. Assim, neste tópico deste capítulo, irei proceder à descrição, de forma fundamentada, das técnicas de recolha utilizadas ao longo da implementação deste estudo, bem como dos instrumentos utilizados e que favorecem essas mesmas técnicas. Contudo, considero importante começar este tópico por refletir sobre o conceito de dados e mencionar a importância que as técnicas de recolhas de dados possuem para as investigações.

Os dados qualitativos, em investigação, consistem nas informações de natureza qualitativa presentes em todos os materiais recolhidos e registados pelos investigadores e que são considerados pertinentes para a investigação, como por exemplo, nas entrevistas, nas notas de campo, nos questionários e até mesmo em fotografias (Bogdan & Biklen, 1994).

As técnicas de recolha de dados são “procedimentos operatórios rigorosos, bem definidos, transmissíveis” (Baptista & Sousa, 2011, citado por Batista et al., 2021, p.15). Estes devem ser utilizados tendo em conta os objetivos da investigação e desenvolvidos tendo em conta as características da problemática em estudo (Batista et al., 2021).

Apesar de existir um leque alargado de técnicas de recolha de dados, ao longo deste projeto investigativo, apenas foram utilizadas a observação participante e a recolha documental.

3.1. Observação Participante

A observação participante como técnica de recolha de dados é um aspeto crucial para um projeto investigativo. A observação participante, segundo Iturra (1986, p. 149, citado por Santos, 1994) é o “envolvimento directo que o investigador de campo tem com um grupo social que estuda dentro dos parâmetros das próprias normas do grupo.” (p.5). Além disso, tem como objetivo perceber os indivíduos e as ações num determinado contexto (Correia, 2009).

Este tipo de técnica de recolha de dados, apesar de ter como predominância a observação dos seus intervenientes, possibilita ao investigador interagir no contexto e estabelecer um elo de ligação com os sujeitos do estudo (Monico et al., 2017).

A observação participante, enquanto técnica de recolha de dados, oferece diversas vantagens importantes, uma vez que permite aceder a comportamentos espontâneos e observar os fenómenos quando ocorrem; possibilita ao investigador uma compreensão mais próxima da realidade vivida pelos participantes, reduzindo interferências externas e facilitando o acesso a contextos ou grupos que dificilmente seriam abrangidos por outros métodos de investigação (Monico et al., 2007)

Esta técnica de recolha de dados pode ser complementada com a utilização de formas de registo variadas, nomeadamente através de registos áudios, registos fotográficos e notas de campo bem estruturas (Bogdan & Biklen, 1994).

Ao longo da implementação deste projeto foram utilizadas, com o intuito de complementar a observação participante, as notas de campo e registos áudio. As notas de campo correspondem ao "relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150).

Esta forma de registo pode ser desenvolvida tendo em conta duas vertentes distintas. Na primeira, a vertente descritiva, este instrumento é usado para descrever o que foi observado relativamente ao contexto e aos participantes do estudo, quer seja um registo dos diálogos dos participantes ou até o comportamento observado dos mesmos (Bogdan & Biklen, 1994). Contudo, na segunda vertente, o investigador é o sujeito central e remete para um momento reflexivo para quem está a observar, uma vez que é nesta vertente que são registadas as opiniões do investigador ou conclusões a que o investigador chegou durante a observação (Bogdan & Biklen, 1994).

Esta forma de registo, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), pode incluir: (i) Retratos dos sujeitos.; (ii) "Reconstruções do diálogo"; (iii) "Descrição do espaço físico"; (iv) "Relatos de acontecimentos particulares"; (v) "Descrição de actividades"; e (vi) "O comportamento do observador" (pp. 163-165).

Assim, enquanto professor estagiário e como investigador, uma das técnicas de recolha de dados utilizada foi a observação participante, uma vez que esta viria a permitir perceber o envolvimento dos alunos nas tarefas propostas ao longo do período de implementação do projeto e possibilitar estar a par das questões, dúvidas, explicações e estratégias apresentadas pelos alunos, bem como a reflexão constante sobre as mesmas.

3.2. Recolha Documental

A recolha documental, de acordo com Albarello et al. (1997), é " um método de recolha e de verificação de dados [que] visa o acesso a fontes pertinentes, escritas ou não" (p. 30).

A recolha de documentos durante a investigação pode ser feita por dois propósitos, uma vez que o investigador pode pretender recolher determinados documentos com o intuito de apenas proceder à análise completa do documento em si ou com o intuito de procurar evidencias que considere que irão melhorar a sua investigação (Quivy & Campenhoudt, 1995).

Este tipo de técnica de recolha de dados, segundo Quivy e Campenhoudt (1995), pode ser feita a partir da "recolha de documentos de forma textual provenientes de instituições e de organismos públicos e privados (leis, estatutos e regulamentos, actas, publicações…) ou de particulares (narrativas, memórias, correspondências…)" (p. 202).

Assim, e após a leitura de toda a documentação necessária sobre esta temática, considero que ao longo deste projeto investigativo, para além da observação participante, é necessário recorrer a outras técnicas de recolha de dados, nomeadamente à recolha documental, uma vez que esta permite, à posteriori, adquiri exemplos concretos de evidencias, verificadas ao longo da implementação deste estudo; considerando que os documentos recolhidos são de fácil acesso e constituem uma fonte informativa consistente e valiosa, permitindo assim ao investigador retornar ao mesmo sempre que necessário (Costa, 2015).

Desta forma, além da recolha de documentos que auxiliassem a caracterização do contexto e dos participantes, procedi à recolha de documentos particulares, nomeadamente às produções dos alunos e a áudio-gravações com o propósito de tentar encontrar evidências que pudessem complementar o que pretendo investigar.

4. Técnica de análise de dados

4.1. Análise de Conteúdo

Para além da recolha de dados, é crucial para o desenvolvimento de um projeto investigativo, proceder à análise dos mesmos. Assim, é importante definir, de forma fundamentada, uma técnica que auxiliasse a análise desses mesmos dados, optando-se pela análise de conteúdo.

Esta técnica de análise de dados, segundo Bogdan e Bicklen (1994), define-se por ser um "processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objectivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou". (p. 205). Esta é uma técnica fundamental para uma investigação pois, "enriquece a tentativa exploratória" e " aumenta a "propensão à descoberta" (Bardin, 1977, p. 30)

Apesar da importância que esta técnica de análise de dados, é importante destacar que este pode ser feito de várias formas, no entanto, neste projeto de investigação apenas foi utilizado uma análise de conteúdo de cariz qualitativo e indireto, uma vez que, para além de se centrar numa investigação qualitativa, a "a noção de importância implica a novidade, o interesse, o valor de um tema" e porque "e procura uma interpretação do que se encontra latente sob a linguagem expressa" (Carmo & Ferreira, 2008, p. 271).

Além disso, esta técnica de análise de dados deve ser desenvolvida a partir de um conjunto de etapas obrigatórias, que de acordo com Carmo e Ferreira (2008) são: a determinação dos objetivos do estudo e da fundamentação necessária sobre o mesmo; recolha da documentação que será analisada e que vá ao encontro dos objetivos do estudo; construção de categorias e unidades de análise e interpretação dos dados e compreensão dos resultados obtidos tendo em conta os objetivos da investigação.

4.1.1. Categorias de análise

Desta forma e tal como é descrito anteriormente, para se realizar uma análise de conteúdo de forma rigorosa é importante definir um conjunto de categorias e unidades de análise que auxiliem a análise dos dados recolhidos.

O processo de categorização, segundo Bardin (1977) é “uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o género (analogia), com os critérios previamente definidos.” (p. 117).

De acordo com Monteiro e Pinto (2007), as frações podem ter diferentes significados. Assim, é necessário definir quais os significados que podem ser mobilizados a partir dos contextos das tarefas que foram implementadas, a saber: a relação parte-todo e o quociente, respeitando os significados trabalhados no 3.º ano de escolaridade, de acordo com as Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021).

Relativamente à categoria representações, pretendo compreender como é que os alunos representam a fração nos diferentes contextos das tarefas exploradas, recorrendo a representações que podem ser de natureza física, visual, verbal, contextual ou simbólica. Quando mobilizam uma representação física da fração, os alunos podem recorrer a objetos que ajudem a traduzir as relações que querem expressar. Quando usam uma representação simbólica, os alunos escrevem simbolicamente a fração e reconhecem o significado do numerador e do denominador. Quando mobilizam uma representação visual, podem recorrer a desenhos ou esquemas para representar a unidade e as suas partes . Por outro lado, quando recorrem à representação verbal, podem referir-se às frações nos diálogos que estabelecem entre eles e nos momentos de discussão em grande grupo. Por fim, relativamente à representação contextual, os alunos podem reconhecer as frações em determinado contexto e usá-las para estabelecer conexões com a realidade.

Em suma, as categorias de análise sobre as quais irei incidir a análise dos dados são apresentadas na tabela seguinte:

Tabela 4

Categorias e Subcategorias de análise

Categorias de análise	**Subcategorias**
Significados de fração	Relação parte-todo envolvendo unidades discretas
	Relação parte-todo envolvendo unidades contínuas
	Quociente
Tipos de Representações	Física
	Verbal

	Visual
	Contextual
	Simbólica

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

O presente capítulo destina-se à caraterização da intervenção pedagógica desenvolvida no meu projeto investigativo denominado de "A aprendizagem das frações no 3.º ano de escolaridade". Este projeto de investigação foi implementado em contexto de estágio, numa turma do 3.º ano de uma escola pública situada no concelho de Almada, no distrito de Setúbal, onde as aulas funcionam num horário regular, das 9h às 15h.

Este capítulo encontra-se dividido em 2 subcapítulos. No primeiro faço uma caraterização do contexto educativo, bem como dos seus participantes e das infraestruturas da instituição onde foi implementada a intervenção pedagógica. Já no segundo subcapítulo, apresento como se realizou a minha intervenção pedagógica e descrevo as sessões dinamizadas ao longo dos momentos de intervenção do estudo.

1. Contexto e participantes

1.1. A instituição e as salas de aula.

Ao longo do momento de intervenção e recorrendo à observação direta, foi possível perceber que a instituição é composta por dois edifícios, sendo o primeiro constituído por duas salas de aula do 1.º Ciclo, que são utilizadas pelo CAF a partir das 15h, duas casas de banho para os alunos, uma casa de banho para os docentes e funcionários da escola, e duas salas para os funcionários da instituição. O segundo edifício, significativamente maior, é constituído por 8 salas do 1.º Ciclo e 2 salas para o Pré-Escolar, um refeitório comum para os dois ciclos de ensino, uma cozinha, um ginásio, uma sala utilizada como biblioteca, uma sala para os professores e da coordenação, um elevador, um armário com materiais de diversas áreas curriculares, uma sala de apoio especializado, um gabinete de apoio educativo e nove casas de banho. Além disso, a instituição possui um espaço ao ar livre amplo com um escorrega, diversos espaços verdes, um campo de futebol e quadros de giz espalhados pelo mesmo.

Relativamente à sala de aula onde decorreu o estágio e onde foi implementada a intervenção pedagógica, é um espaço acolhedor e organizada tendo em conta o número de alunos. Além disso, as paredes e os tetos da sala estão decorados com trabalhos e projetos construídos pelos alunos e materiais de apoio disponibilizados pela docente titular, nomeadamente cartazes informativos sobre diferentes géneros textuais trabalhados ao longo do ano, sobre a tabuada e conteúdos gramaticais. As mesas e as cadeiras estão dispostas em pequenos grupos de três mesas individuais, à exceção de seis que se encontram dispostas em linha reta. Esta organização foi adotada pela docente titular, uma vez que pretende garantir que os alunos trabalhem em grupo e que adquiram competências como a cooperação e a partilha de ideias e opiniões.

A instituição, por fazer parte de um agrupamento de escolas, possui diversos projetos de intervenção que têm como principal objetivo a "melhoria das práticas pedagógicas e avaliação das aprendizagens " (Projeto Educativo, 2020, p. 16).

1.2. Participantes

Relativamente à caracterização dos alunos, a turma é composta por onze rapazes e dez raparigas, com idades compreendidas entre os 8 e os 10 anos. A grande maioria dos alunos possui nacionalidade portuguesa à exceção de duas alunas que possuem nacionalidade russa e uma aluna com nacionalidade são-tomense, beneficiando assim de Português Língua Não Materna (PLNM). Através de um momento de conversa com a professora cooperante e da análise de um documento disponibilizado pela mesma, foi possível perceber que dos vinte e um alunos da turma, dois encontram-se ao abrigo do Decreto-Lei/2018, de 6 de julho, sendo um deles beneficiário de medidas universais, seletivas e adicionais e outro de medidas universais e seletivas. É ainda de referir que uma aluna, apesar de fazer parte da turma, na parte da manhã, devido às dificuldades que possui de escrita e de leitura, encontra-se na sala destinada aos alunos do 1.º ano.

O contexto socioeconómico dos alunos é diversificado, e através do diálogo com a docente cooperante, foi possível perceber que dois alunos beneficiam do Serviço de Ação Social Escolar (SASE).

Relativamente à dinâmica de trabalho da turma, segundo a docente, os alunos estão habituados a trabalhar em grupo e manifestam hábitos de cooperação e de interajuda entre eles. Os alunos, na sua grande maioria, são bastante atenciosos e mostram interesse em participar nas atividades propostas e gosto por aprender. Estes são na sua generalidade bastante pontuais, com exceção de alguns alunos que costumam chegar atrasados ao primeiro tempo da manhã, na maioria das vezes à segunda-feira. É ainda de salientar que os alunos possuem algumas dificuldades ao nível da gramática e na resolução de exercícios que envolvam o cálculo com recurso aos algoritmos da subtração e da adição.

Ao dialogar com a docente cooperante e ao observar a sua prática pedagógica, foi possível perceber que esta privilegia uma abordagem centrada no aluno e na cooperação entre os mesmos. Valoriza e incentiva o trabalho a pares e em grupos, promovendo assim a cooperação e um ambiente inclusivo onde os alunos podem expor as suas dúvidas e partilhar a sua opinião livremente.

1.3. Caracterização específica em função do tema de investigação.

No que se refere à temática deste projeto investigativo, é de referir que, de acordo com a professora cooperante, o significado de fração, as relações entre frações e as operações entre as mesmas, já tinham sido abordados previamente, mas que ainda não tinham sido consolidados. Assim, esta característica da turma revelou-se bastante interessante, uma vez que possibilitou perceber melhor as dificuldades que os alunos viram a ter, bem como os avanços na perceção dos conteúdos inerentes em cada uma das tarefas implementadas.

A professora cooperante referiu que implementou na turma uma metodologia de partilha e discussão de diferentes estratégias de resolução. Contudo, de acordo com o que foi observado, alguns dos alunos apresentam dificuldades em expressar as suas resoluções e dúvidas, verificando-se a participação constante de um determinado grupo de alunos específicos em detrimento de outros que não participavam.

A professora cooperante também referiu que dinamiza as suas aulas recorrendo a diversos recursos, como por exemplo, modelos físicos de figuras geométricas, ábacos ou até mesmo recursos digitais de fácil acesso para os alunos. Esta forma de abordar os conteúdos revelou-se ser bastante interessante e crucial para a implementação desta intervenção pedagógica, possibilitando que os alunos reagissem bem aos diferentes tipos de tarefas propostas e implementadas, bem como demonstrassem interesse em participar na resolução das mesmas.

É ainda de referir que, apesar da maioria dos alunos demonstrar bastante interesse e prazer por participar e/ou realizar tarefas inerentes à área da matemática, alguns alunos apresentam bastantes dificuldades na disciplina.

Desta forma, considero que as características da turma, descritas anteriormente, mostraram-se ser bastante importantes para facilitar a implementação da minha intervenção pedagógica.

2. A intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica desenvolveu-se em 4 sessões, cada uma com a duração de aproximadamente 120 minutos. Tal como referido anteriormente, cada uma das tarefas e sessões dinamizadas tiveram por base um modelo centrado no ensino exploratório.

De forma geral, formulei as tarefas seguindo as fases propostas por Stein et al. (2008, cit. por Canavarro, 2011), tendo começado por apresentar e contextualizar a tarefa, garantindo que os alunos compreendiam o objetivo e tinham os recursos necessários; depois, acompanhei o trabalho autónomo dos grupos, incentivando a reflexão; seguiu-se a partilha e discussão coletiva, em que organizei as intervenções e promovi o confronto de ideias e justificações; por fim, apesar de não se enquadrar no ensino exploratório procedi ainda à correção das tarefas propostas ao longo das diferentes sessões.

Para além da escolha do modelo de ensino, foi importante proceder à seleção e/ou adaptação/elaboração de tarefas adequadas, bem como dos recursos que as complementariam. Assim, tendo em conta o objetivo principal deste estudo e os conteúdos inerentes às frações previstos para o 3.º ano de escolaridade, optei por elaborar tarefas que recorressem à utilização de materiais manipuláveis e didáticos, mais concretamente os blocos padrão e os livros infantis.

Considerando estes princípios, apresento de seguida, nas Tabelas 5 e 6, o planeamento das aulas, indicação dos materiais manipuláveis utilizados e os objetivos curriculares de acordo com as Aprendizagens Essenciais.

Tabela 5

Calendarização das sessões

Calendarização		
Calendarização	Nome da tarefa	Material utilizado
1.ª sessão - 28 de abril	Exploração do Livro “Frações na Cozinha”	Livro “Frações na Cozinha”
2.ª sessão - 5 de maio	O Gato da Joana	Blocos padrão
3.ª sessão - 14 de maio	O almoço da turma do João	

4.ª sessão - 4 de junho	O Festival das Estrelas	Ficha de trabalho

Tabela 6

Objetivos das sessões

Objetivos Curriculares			
Tema	Tópico	Subtópico	Objetivos de aprendizagem:
Capacidades Matemáticas	Comunicação matemática	Expressão de ideias	Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
	Comunicação matemática	Discussão de ideias	Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
Números	Frações	Significado de fração	Reconhecer a fração como representação de uma relação parte-todo e de quociente, sendo o todo uma unidade discreta, e explicar o significado do numerador e do denominador em contexto da resolução de problemas.
			Representar uma fração de diversas formas, transitando de forma fluente entre as diferentes representações.
		Relações entre frações	Reconhecer a equivalência entre diferentes frações que representem a metade, a quarta parte e a terça parte.

2.1 As tarefas

Ao longo da intervenção pedagógica foram implementadas quatro tarefas que exploraram o conceito de fração a partir de diferentes contextos e materiais, em consonância com as orientações das Aprendizagens Essenciais, que valorizam a diversidade de contextos e representações (Canavarro et al., 2021).

Desta forma, neste subtópico irei descreverei brevemente as sessões desenvolvidas ao longo da minha prática pedagógica.

A primeira tarefa, "Exploração do Livro "Frações na Cozinha"" (Anexo B), foi desenvolvida a partir do livro infantil *Frações na Cozinha* (Rodi, 2018), cuja narrativa decorre no ambiente familiar de uma cozinha, explorando situações relacionadas com receitas, preparação de alimentos e utensílios culinários. Este contexto culinário, facilmente reconhecido pelas crianças, permitiu introduzir e explorar o significado parte–todo em unidades contínuas, como bolos ou tartes que podem ser divididos em porções iguais. Através das ilustrações e da história, os alunos foram expostos a representações contextuais que se ligam de forma direta ao seu quotidiano, o que permitiu relembrar conhecimentos prévios sobre partilhas e medidas. O livro funcionou como recurso mediador, reforçando a importância atribuída pelas Aprendizagens Essenciais ao uso de contextos autênticos e significativos para promover a compreensão matemática (Canavarro et al., 2021).

Por outro lado, com o intuito de complementar a exploração do livro e reforçar as ideias apresentadas, foi também utilizada uma ficha de trabalho, permitindo consolidar o contacto inicial com representações contextuais ligadas ao quotidiano, apoiar a formalização das primeiras ideias sobre frações e fortalecer a recolha de dados.

Esta combinação de narrativa e tarefa escrita reforçou o papel dos contextos significativos na construção de conhecimento matemático, tal como defendem Canavarro et al. (2021), promovendo simultaneamente representações verbais, visuais e contextuais que ajudaram os alunos a estabelecer ligações entre situações reais e conceitos matemáticos.

Para além de permitir identificar as ideias iniciais dos alunos sobre frações, esta tarefa valorizou também a articulação entre Matemática e Literatura, criando um ambiente narrativo envolvente que contribuiu para a mobilização de representações verbais, visuais e contextuais.

A segunda tarefa, "*O Gato da Joana*" (Anexo C), inspirada em Mestre e Carvalho (2022), desenvolveu-se num contexto centrado na utilização dos blocos padrão, permitindo aos alunos explorar conceitos de forma manipulativa. Este contexto, de natureza essencialmente geométrica, proporcionou oportunidades para manusear os blocos, comparar as suas formas e analisar como as peças se relacionam entre si. Ao construir e decompor figuras com estes materiais manipuláveis, as crianças puderam compreender, de forma intuitiva e visual, a noção de unidade e parte da unidade, considerando que determinados blocos correspondem a uma parcela de outros — por exemplo, que certos triângulos ou losangos representam partes do hexágono — e identificar equivalências e relações proporcionais entre elas. A exploração com este tipo de material favoreceu a mobilização de representações físicas e visuais, algo que as Aprendizagens Essenciais valorizam fortemente, na medida em que os materiais manipuláveis apoiam a construção e consolidação dos significados associados às frações nos primeiros anos de escolaridade (Canavarro et al., 2021).

A terceira tarefa, "*O Almoço da Turma do João" (*Anexo D*),* adaptada de Canavarro et al. (2022), alberga um contexto narrativo muito próximo do quotidiano das crianças: um almoço partilhado entre colegas, no qual surgiam alimentos familiares como pizas que podiam ser divididos em partes iguais. A escolha deste cenário não foi casual; ao recorrer a situações que fazem parte da vida escolar, procurou-se garantir que os alunos reconhecessem imediatamente o contexto e percebessem a relevância das frações em situações reais de partilha. Além disso, a utilização de personagens pertencentes ao livro "Frações na Cozinha", teve como propósito transmitir continuidade e ligação com a primeira tarefa. Esta familiaridade permitiu aprofundar a exploração do significado parte–todo em unidades contínuas, uma vez que a divisão de alimentos constitui uma experiência concreta e intuitiva para os alunos.

Para além disso, o carácter narrativo desta tarefa fomentou um ambiente propicio à mobilização de representações contextuais e visuais, permitindo que as crianças passassem de uma descrição verbal das situações para a construção de imagens mentais ou esquemas visuais que apoiam a compreensão das relações fracionárias. Este tipo de contexto ajudou a reforçar assim a ideia de que as frações não são apenas símbolos abstratos representados no papel, mas conceitos que emergem de situações quotidianas em que é necessário repartir, medir ou comparar quantidades.

Por fim, a quarta tarefa, " O Festival das Estrelas" (Anexo E), adaptada de Ventura (2013), decorreu num contexto ficcional e lúdico que envolvia a contagem de lugares de dois estacionamentos representados através de unidades discretas. Ao contrário das tarefas associadas a unidades contínuas, esta proposta permitiu trabalhar o significado parte–todo em conjuntos de objetos indivisíveis, ajudando os alunos a compreender que o denominador representa o total de elementos do conjunto e o numerador a parte selecionada. O carácter imaginativo e envolvente desta tarefa criou condições motivadoras para a mobilização de representações contextuais, em consonância com as recomendações de Canavarro et al. (2021), e contribuiu salientar a distinção entre unidades contínuas e discretas. Este contexto permitiu ainda desenvolver flexibilidade conceptual, preparando os alunos para interpretar frações em diferentes tipos de situações, tanto reais como fictícias.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O presente capítulo tem como finalidade interpretar os dados recolhidos nas diferentes tarefas realizadas pelos alunos, procurando compreender como é que diferentes contextos contribuem para a compreensão do conceito de fração nesta turma de 3.º ano de escolaridade.

A análise que se segue procura, assim, identificar padrões de raciocínio, avanços conceptuais e dificuldades reveladas pelos alunos durante o processo, articulando continuamente os dados com o enquadramento teórico e com as orientações das Aprendizagens Essenciais. Ao longo desta secção, são analisadas as resoluções dos alunos em cada tarefa e as intervenções pedagógicas que surgiram ao longo da dinamização de cada sessão, permitindo uma reflexão fundamentada posterior sobre a adequação da intervenção e sobre as decisões tomadas ao longo da implementação deste projeto investigativo.

Assim, de seguida, apresentarei e descreverei as sessões desenvolvidas ao longo da minha prática pedagógica.

1.ª sessão- Tarefa - Exploração do Livro "Frações na Cozinha"[1]

Esta primeira sessão, dinamizada no dia 28 de abril de 2025, iniciou-se com uma conversa com os alunos, onde lhes foi dito que iriam participar num estudo e que para tal iriam realizar diferentes tarefas relacionadas com a área da matemática. Além disso, os alunos foram informados que em todas as sessões iriam existir momentos de discussão e de partilha de opiniões, ideias e resoluções.

Após este momento, apresentei e projetei o livro "Frações na Cozinha" de Sara Rodi (figura 6) e revelei que ao longo desta sessão iria proceder à sua leitura e dinamizar uma tarefa relacionada com o mesmo.

[1] Tarefa adaptada de Rodi (2018)

Figura 6

Capa do livro "Frações na cozinha" de Sara Rodi

Neste momento, fomentei um primeiro momento de discussão orientado pelas questões "Quem é Sara Rodi?","Qual é o título do livro?" e "Partindo do título do livro, qual será o assunto retratado ao longo do livro?".

Ao longo deste momento, foi possível recolher e registar as seguintes respostas, onde identificam os elementos principais de um livro e da sua temática, verificando-se que a grande maioria dos alunos respondeu corretamente a todas as questões:

- Para a primeira questão: "Não sei!", "A ilustradora!" e "A editora!";
- Para a segunda questão: "Frações na Cozinha!";
- Para a terceira questão: "Cozinha!" e "Frações!".

A partir deste momento e com o intuito de perceber se os alunos conseguiam relacionar o termo fração com o seu quotidiano, decidi colocar a questão "Será que é possível utilizar as frações na cozinha?" e obtive respostas bastante interessantes, com destaque para as justificações dadas:

- "Sim, a minha avó tem um livro que usa na cozinha que tem frações.";
- "Sim, professor, quando estás a ler aquele livro das receitas, aparece lá um terço de farinha, por exemplo.".

Além disso, fiz a questão "Será que podemos usar as frações sem ser na cozinha?" e um dos alunos respondeu:

- “Sim, as frações servem para usar na escola, em casa …em todo o lado. Especialmente quando estás a pagar uma conta.”

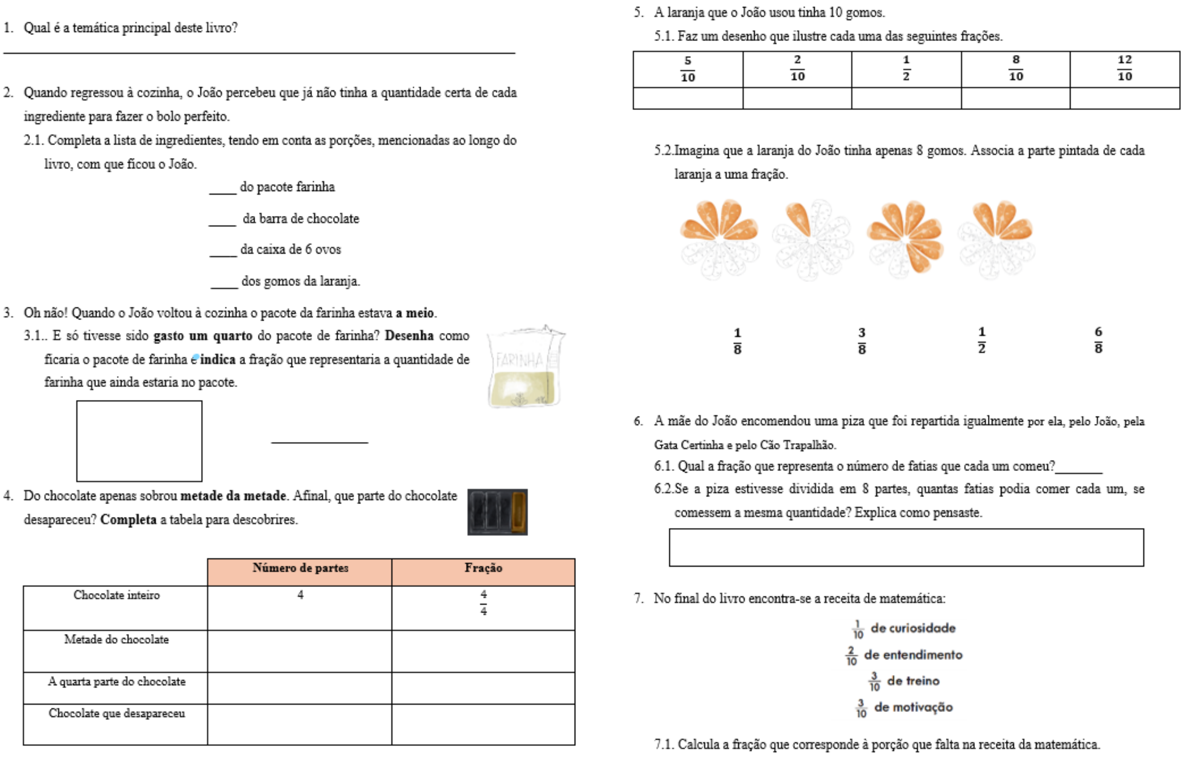
Através destas respostas é possível afirmar que os alunos em questão, utilizam representações contextuais ao estabelecerem conexões com a realidade, uma vez que conseguem facilmente estabelecer relações entre o conceito matemático e situações do quotidiano, nomeadamente a cozinha, as tarefas domésticas ou até situações ligadas ao pagamento de contas. Ao afirmarem que as frações “servem para usar na escola, em casa… em todo o lado”, demonstram que reconhecem a utilidade deste conceito para além do contexto escolar, evidenciando capacidade de transferir o conhecimento para diferentes situações práticas.

Posteriormente, procedi à projeção e leitura do livro de modo a permitir que os alunos ficassem a conhecer a história. Apesar de ter previsto que apenas seria necessário ler uma vez o livro, os alunos pediram-me que o voltasse a ler uma segunda vez. Ainda neste momento, por sugestão da professora cooperante, houve a necessidade de explicar o significado de algumas palavras e/conceitos, como por exemplo uma porção.

Posteriormente, distribui uma cópia da tarefa “Exploração do livro Frações na Cozinha” (Figura 7) e pedi que os alunos a resolvessem tendo em conta aquilo que ouviram da história e do que se recordavam sobre as frações.

Figura 7

Tarefa "Exploração do livro"



1. Qual é a temática principal deste livro?

____

2. Quando regressou à cozinha, o João percebeu que já não tinha a quantidade certa de cada ingrediente para fazer o bolo perfeito.

2.1. Completa a lista de ingredientes, tendo em conta as porções, mencionadas ao longo do livro, com que ficou o João.

____ do pacote farinha

____ da barra de chocolate

____ da caixa de 6 ovos

____ dos gomos da laranja.

3. Oh não! Quando o João voltou à cozinha o pacote da farinha estava **a meio**.

3.1.. E só tivesse sido **gasto um quarto** do pacote de farinha? **Desenha** como ficaria o pacote de farinha e **indica** a fração que representaria a quantidade de farinha que ainda estaria no pacote.

____

4. Do chocolate apenas sobrou **metade da metade**. Afinal, que parte do chocolate desapareceu? **Completa** a tabela para descobrires.

	Número de partes	Fração
Chocolate inteiro	4	$\frac{4}{4}$
Metade do chocolate		
A quarta parte do chocolate		
Chocolate que desapareceu		

5. A laranja que o João usou tinha 10 gomos.

5.1. Faz um desenho que ilustre cada uma das seguintes frações.

$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{12}{10}$

5.2.Imagina que a laranja do João tinha apenas 8 gomos. Associa a parte pintada de cada laranja a uma fração.

$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{6}{8}$

6. A mãe do João encomendou uma piza que foi repartida igualmente por ela, pelo João, pela Gata Certinha e pelo Cão Trapalhão.

6.1. Qual a fração que representa o número de fatias que cada um comeu?_______

6.2.Se a piza estivesse dividida em 8 partes, quantas fatias podia comer cada um, se comessem a mesma quantidade? Explica como pensaste.

7. No final do livro encontra-se a receita de matemática:

$\frac{1}{10}$ de curiosidade
$\frac{2}{10}$ de entendimento
$\frac{3}{10}$ de treino
$\frac{3}{10}$ de motivação

7.1. Calcula a fração que corresponde à porção que falta na receita da matemática.

Ao longo deste momento houve a necessidade de apoiar os alunos, individualmente e em grande grupo, através das questões orientadoras:

- Como é que foram representadas as porções de ingredientes que sobraram?
- Quando é que usamos as frações?
- Como ficou o pacote de farinha? Como é que representamos essa porção?
- E a barra de chocolate/ caixa de ovos?
- Quantos gomos de laranja sobraram? Como é que representamos esses gomos na forma de uma fração?
- O chocolate estava dividido em quantas partes?
- Se quisermos metade do chocolate quantas partes teríamos?

Na resolução desta tarefa, surgiram respostas variadas e bastante interessantes. Assim, além de proceder à descrição das questões presentes ao longo da tarefa apresentada anteriormente e de apresentar exemplos das respostas dadas pelos alunos, irei comentar cada questão de forma a promover a compreensão das produções dos alunos.

Na primeira questão (figura 8), os alunos tinham de dizer qual a temática do livro de tinha sido lido anteriormente. Apesar da maioria dos alunos ter respondido corretamente e desta questão ter sido esclarecida logo no momento de apresentação inicial do livro, houve alunos que não conseguiram responder, demonstrando possivelmente alguma falta de atenção nesse momento.

Figura 8

Questão 1

1. Qual é a temática principal deste livro?

A análise das respostas a esta questão permitiu verificar que, dos vinte e um alunos da turma, dezoito responderam corretamente, demonstrando que foram capazes de interpretar a temática do livro *Frações na Cozinha* e de mobilizar a informação apresentada no momento de discussão inicial. Este resultado revelou assim que a maioria dos alunos conseguiu situar a história e o seu conteúdo no contexto apropriado, evidenciando uma adequada representação contextual, isto é, a capacidade de compreender o enredo, identificar a situação apresentada e relacioná-la com a questão colocada.

Os restantes três alunos responderam incorretamente ou não responderam, podendo evidenciar alguma falta de atenção no momento de leitura da história ou de compreensão do que se pretendia com esta questão. Estas respostas menos completas ou incorretas sugerem que, para alguns alunos, a reconstrução mental do contexto narrativo — fundamental para interpretar corretamente a questão — poderá não ter sido plenamente alcançada

Com a questão 2. (figura 9), pretendia-se que os alunos, tendo em conta as porções que tinham ouvido e visto ao longo do momento de leitura do livro "Frações na Cozinha", completassem a lista dos ingredientes com que o João ficou no final da história. As respostas dos alunos são colocadas na figura 10.

Figura 9

Questão 2

2. Quando regressou à cozinha, o João percebeu que já não tinha a quantidade certa de cada ingrediente para fazer o bolo perfeito.

   2.1. Completa a lista de ingredientes, tendo em conta as porções, mencionadas ao longo do livro, com que ficou o João.

   ____ do pacote farinha

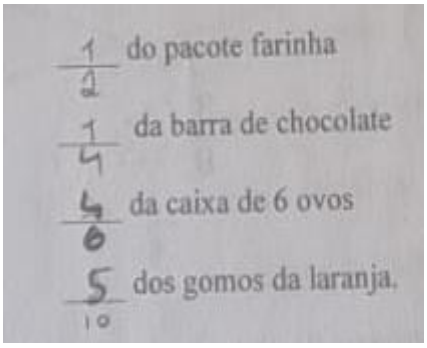
   ____ da barra de chocolate

   ____ da caixa de 6 ovos

   ____ dos gomos da laranja.

Figura 10

Respostas corretas do aluno F à questão 2.



$\frac{1}{2}$ do pacote farinha

$\frac{1}{4}$ da barra de chocolate

$\frac{4}{6}$ da caixa de 6 ovos

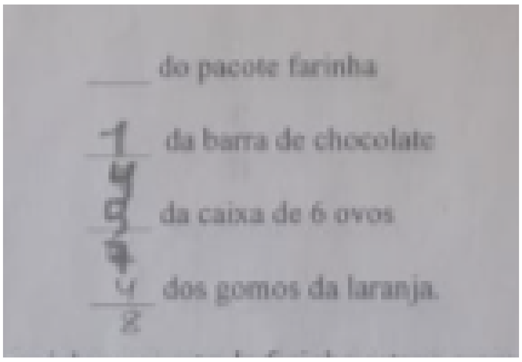
$\frac{5}{10}$ dos gomos da laranja.

Após proceder à recolha dos dados e de analisar as respostas dos alunos, foi possível constatar que apenas quinze alunos responderam corretamente à totalidade da questão, mostrando assim que se mantiveram atentos à leitura do livro e às suas ilustrações. Além disso, é ainda de destacar que estes alunos ao representarem as quantidades através de frações estão a utilizar representações simbólicas e que ao representarem corretamente cada quantidade, por exemplo "1/2 do pacote de farinha", compreendem a existência de uma relação parte-todo de uma unidade contínua. Importa ainda salientar que, nesta atividade, surgem tipos específicos de unidades, sendo a caixa de ovos um exemplo claro de unidade discreta, na qual os elementos são contáveis e distinguíveis entre si. Os alunos ao responderam corretamente mostraram, assim, capacidade para interpretar cada tipo de unidades e para estabelecer a relação entre as partes e o conjunto total.

Os restantes sete alunos que responderam incorretamente a esta questão, apresentaram respostas variadas e que requerem uma análise mais detalhada.

Figura 11

Resposta incorreta do aluno A à questão 2.

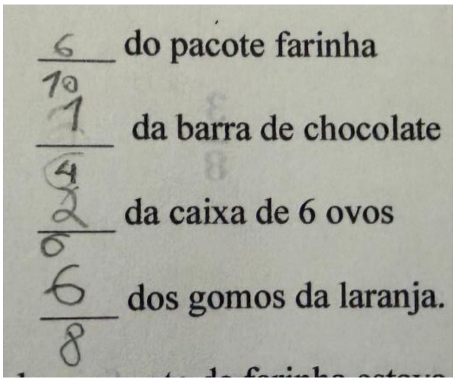


A partir da figura acima, é possível perceber que, apesar do aluno A ter conseguido representar corretamente a fração correspondente à quantidade de barra de chocolate que sobrou, o mesmo teve dificuldades em representar as restantes quantidades.

É ainda de referir que o aluno escreve 5/7 em vez de 4/6 e 4/8 em vez de 5/10 provavelmente porque ainda não consegue relacionar corretamente a fração com a quantidade concreta. Apesar da resposta do mesmo revelar que compreende que a fração representa uma parte de um todo, parece confundir o número de partes do todo ou o número de partes selecionadas, produzindo frações que não correspondem exatamente à situação representada. Isto indica que o aluno compreende a estrutura da fração (numerador e denominador), mas ainda tem dificuldade em aplicar essa compreensão de forma precisa a contextos concretos, confundindo a correspondência entre a representação simbólica e a quantidade real.

Figura 12

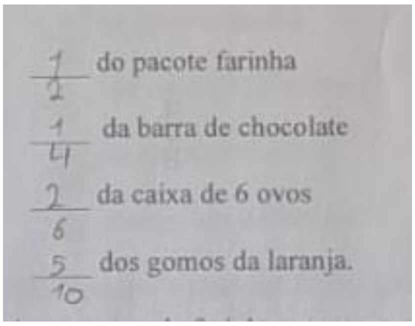
Resposta incorreta do aluno B à questão 2.



A partir da figura acima, é possível perceber que, apesar do aluno B ter conseguido representar a corretamente a fração correspondente à quantidade de barra de chocolate que sobrou, o mesmo teve dificuldades em representar as restantes quantidades. Apesar do aluno não representar corretamente as restantes quantidades, evidenciando que ainda não compreende na totalidade a relação parte-todo das frações de unidades continuas, o mesmo utiliza representações simbólicas, por exemplo “1/4” para representara essas mesmas quantidades.

Figura 13

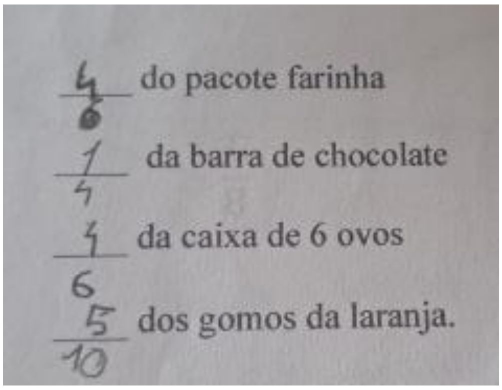
Respostas incorretas dos alunos C e G à questão 2.



A partir da figura acima é possível compreender que os alunos C e G, apenas responderam incorretamente á representação da caixa de seis ovos. Assim, as respostas deste aluno podem evidenciar que o aluno poderá ter interpretado de forma errada o que era pedido, ou seja , em vez de representar os ovos que foram usados, representou os ovos que ficaram na caixa.

Figura 14

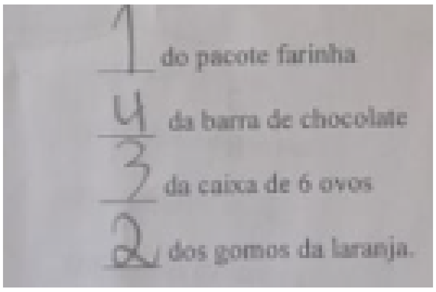
Resposta incorreta do aluno D à questão 2.



A partir da figura acima é possível compreender que o aluno D, apenas respondeu incorretamente á representação do pacote de farinha. Além disso, presume-se que o aluno terá repetido a fração, uma vez que o mesmo usa essa mesma fração para representar a caixa de ovos ou que este erro tenha surgido por distração.

Figura 15

Respostas incorreta dos alunos E e F à questão 2

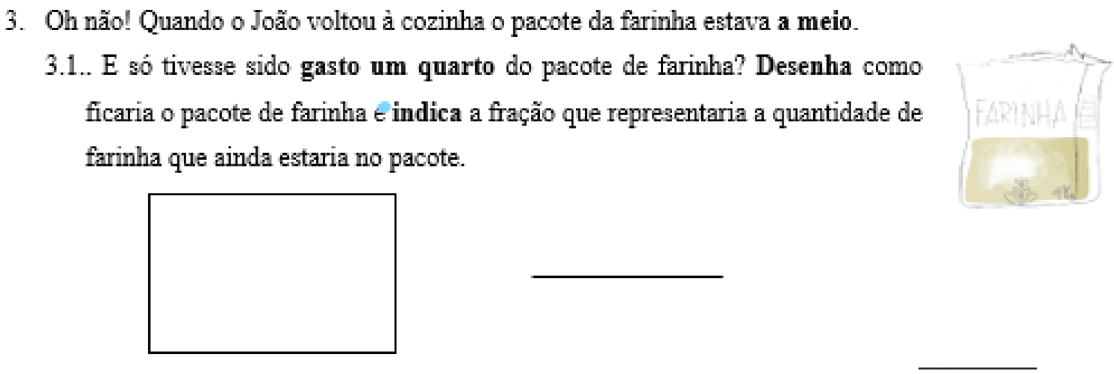


A partir da figura anterior é possível compreender que os alunos E e F ainda não conseguiram representar corretamente as quantidades na forma de fração.

Na questão 3 (figura 16), os alunos foram convidados a representar a quantidade de farinha que permanecia no pacote, considerando que apenas se tinha utilizado 1/4 do mesmo. Esta atividade inspirou-se na representação apresentada no livro Frações na Cozinha (figura 17), que ilustrava a metade de um pacote de farinha. A proposta feita aos alunos baseou-se nessa mesma representação, solicitando uma adaptação da situação descrita a o novo contexto, mostrando tanto graficamente, através de uma ilustração do pacote, como simbolicamente, através de uma fração, a parte restante do pacote. Desta forma, a questão permitia avaliar a capacidade dos alunos de transferir o conceito apresentado no livro para uma situação ligeiramente diferente, mantendo a coerência entre a representação visual e simbólica.

Figura 16

Questão 3



3. Oh não! Quando o João voltou à cozinha o pacote da farinha estava **a meio**.

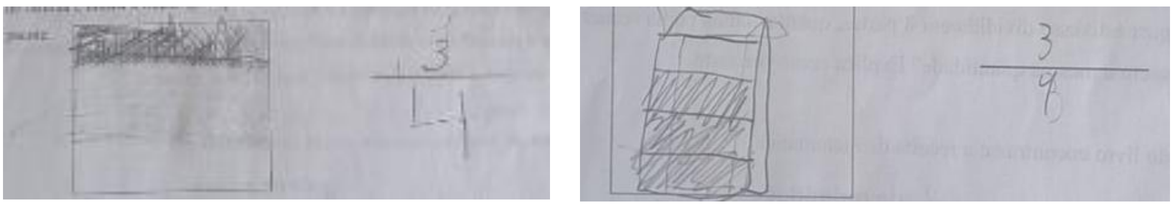
   3.1.. E só tivesse sido **gasto um quarto** do pacote de farinha? **Desenha** como ficaria o pacote de farinha e **indica** a fração que representaria a quantidade de farinha que ainda estaria no pacote.

Figura 17

Representação do pacote de farinha com metade da farinha

Figura 18

Respostas corretas dos alunos R e Z à questão 3.



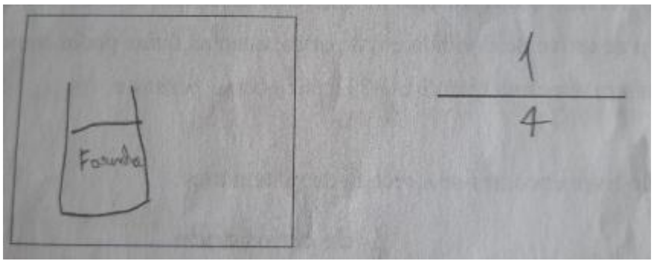
Após a análise das respostas dos alunos, constatou-se que apenas dois — R e Z — responderam corretamente à questão. Ambos recorreram à representação visual e simbólica, bem como à relação parte–todo, embora de formas distintas.

O aluno Z, cuja produção é apresentada na figura à esquerda, utilizou uma representação visual para ilustrar a quantidade de farinha utilizada. Apesar de identificar corretamente a fração simbólica 3/4, não dividiu o pacote em quatro partes iguais e representou a parte utilizada em vez da parte que sobrou. Ainda assim, evidencia compreensão da relação parte–todo ao associar a situação à fração correspondente. Por outro lado, o aluno R dividiu corretamente o pacote em quatro partes iguais, utilizando de forma adequada a relação parte–todo, e representou visualmente as três partes que sobraram. Além disso, utilizou a representação simbólica 3/4, demonstrando compreender tanto a fração envolvida como a sua representação.

Apesar de dois dos alunos terem conseguido responder corretamente à questão, é de destacar que a maioria do aluno não conseguiu responder corretamente.

Figura 19

Resposta do aluno P como exemplo das respostas incorretas dos restantes alunos.



Tal como é referido anteriormente, apenas dois alunos conseguiram resolver corretamente este exercício. É ainda possível constatar que os restantes alunos, apesar de terem utilizando tanto representações visuais como simbólicas para resolver a questão, não respeitaram o que era pedido e representaram a quantidade do pacote de farinha utilizado (um quarto), tendo escrito a fração $\frac{1}{4}$ em vez de $\frac{3}{4}$ (figura 19). Além disso, nenhum dos alunos apresentou uma representação visual que mostrasse explicitamente a divisão da unidade — o pacote de farinha — em quatro partes iguais. Assim, não é possível perceber com segurança se a parte assinalada na ilustração corresponde efetivamente aos $\frac{3}{4}$ que sobraram ou se a marcação visual se refere apenas ao 1/4 utilizado, permanecendo a representação ambígua no que diz respeito à relação parte–todo.

Com a questão 4. (figura 20) pretendia-se que os alunos representassem a fração correspondente a cada expressão descrita na tabela. Para tal, os alunos deveriam completar a tabela identificando o número de partes correspondente a cada expressão, ou seja, a que identificassem a parte considerada em cada situação, e a respetiva fração.

Figura 20

Questão 4

4. Do chocolate apenas sobrou **metade da metade**. Afinal, que parte do chocolate desapareceu? **Completa** a tabela para descobrires.

	Número de partes	Fração
Chocolate inteiro	4	$\frac{4}{4}$
Metade do chocolate		
A quarta parte do chocolate		
Chocolate que desapareceu		

A esta questão surgiram respostas bastante variadas, tendo havido apenas cinco alunos que responderam corretamente e na totalidade a esta questão (figura 21).

Figura 21

Respostas dos alunos X, E,J, P à questão 4

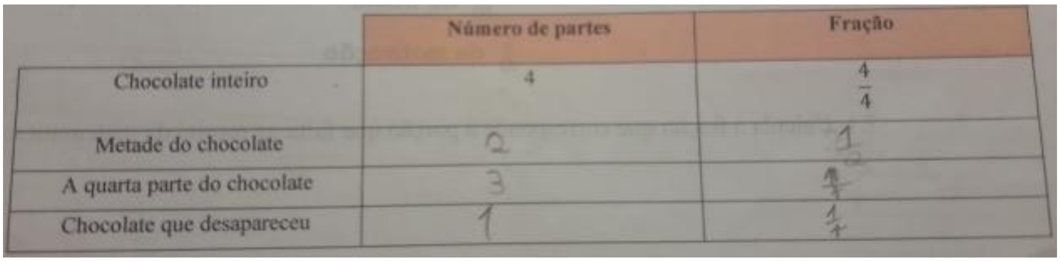
	Número de partes	Fração
Chocolate inteiro	4	$\frac{4}{4}$
Metade do chocolate	2	$\frac{2}{4}$
A quarta parte do chocolate	1	$\frac{1}{4}$
Chocolate que desapareceu	3	$\frac{3}{4}$

A partir das respostas destes cinco alunos, é possível constatar que os alunos utilizaram representações simbólicas para representar corretamente cada fração e que compreendem corretamente a relação parte-todo de uma unidade continua, uma vez que aparentam perceber a quantidade de partes do chocolate que deve ser representado em cada expressão.

Após uma análise mais aprofundada desta questão e das respostas dadas pelos alunos, foi possível constatar que a questão não foi bem formulada e por essa mesma razão um grande número de alunos não conseguiu resolver corretamente a esta questão, o que condicionou a interpretação das respostas dos alunos.

Figura 22

Respostas do aluno B à questão 4



	Número de partes	Fração
Chocolate inteiro	4	$\frac{4}{4}$
Metade do chocolate	2	$\frac{1}{2}$
A quarta parte do chocolate	3	$\frac{1}{4}$
Chocolate que desapareceu	1	$\frac{1}{4}$

É ainda de destacar a representação da fração correspondente à expressão "metade do chocolate". Para esta expressão, respostas distintas que variaram entre uma representação simbólica da metade através da fração $\frac{1}{2}$ (figura 22) e da fração $\frac{2}{4}$ (figura 21), sendo esta última a resposta dada pelos alunos que responderam corretamente a todas as alíneas (figura 21). Estes alunos que responderam $\frac{2}{4}$, possivelmente, foram sugestionados pela fração indicada acima para representar o chocolate inteiro, $\frac{4}{4}$, considerando que metade do chocolate seria metade das quatro partes da unidade inteira, ou seja, duas partes de quatro.

É de destacar que a partir da questão 5 dez alunos não conseguiram responder ao resto da ficha de trabalho, uma vez que esta sessão foi dinamizada no dia do apagão que deixou Portugal sem luz durante várias horas e os alunos começaram a ir para casa a meio da realização da tarefa.

A questão 5 (figura 23) está dividida em dois momentos que se complementam. No primeiro momento pretendia-se que os alunos ilustrassem cada uma das frações apresentadas relativas à laranja com 10 gomos considerada como unidade. No segundo momento pretendia-se que os alunos associassem a fração apresentada à ilustração correspondente, considerando agora uma laranja com 8 gomos como unidade.

Figura 23

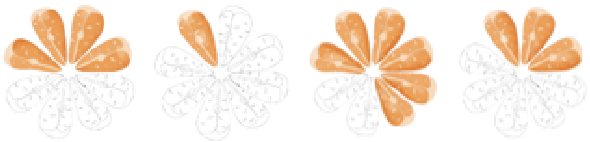
Questão 5.

5. A laranja que o João usou tinha 10 gomos.

5.1. Faz um desenho que ilustre cada uma das seguintes frações.

$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{12}{10}$

5.2. Imagina que a laranja do João tinha apenas 8 gomos. Associa a parte pintada de cada laranja a uma fração.

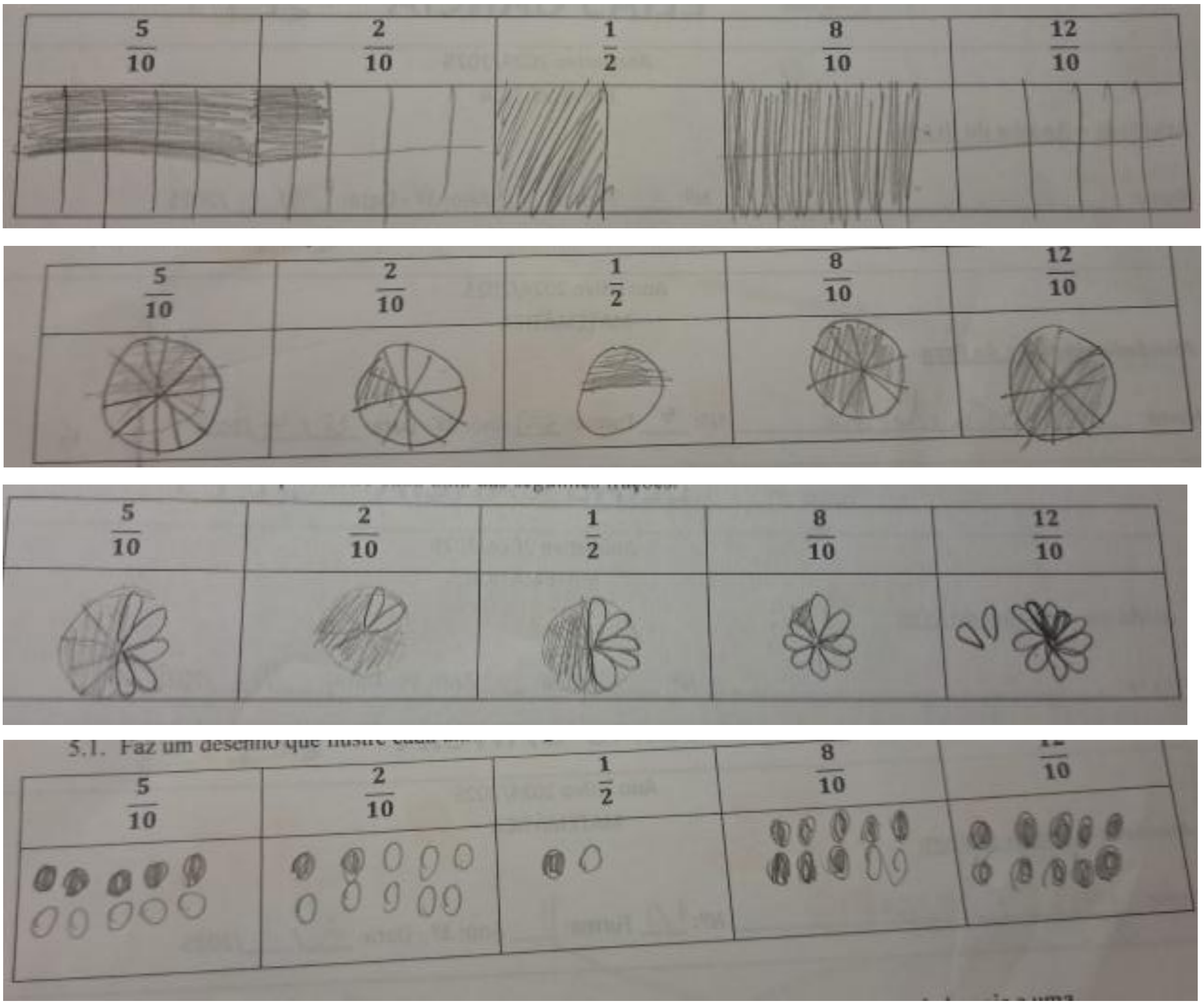


$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{6}{8}$

Na questão 5.1, é percetível verificar que surgiram várias formas de representar cada uma das frações pedidas (figura 24). Assim, alguns alunos recorreram a representações visuais que ilustram unidades discretas como representações retangulares e circulares, e outros alunos representaram as unidades discretas desenhando os gomos da laranja ou bolas (figura 24).

Figura 24

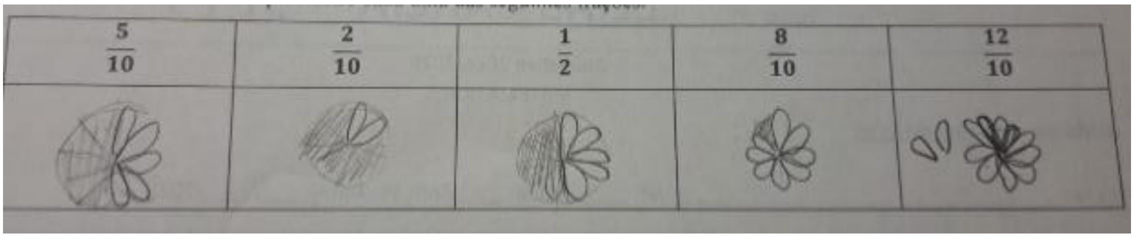
Respostas comuns à questão 5.1.



É ainda de destacar que apenas um aluno representou corretamente a fração $\frac{12}{10}$, tendo apresentou uma representação visual explícita que revela a unidade completa mais duas partes de outra unidade, desenhando corretamente os 10 gomos de uma laranja e os dois gomos soltos de uma segunda laranja (figura 26).

Figura 26

Respostas correta à última coluna da questão 5.1.

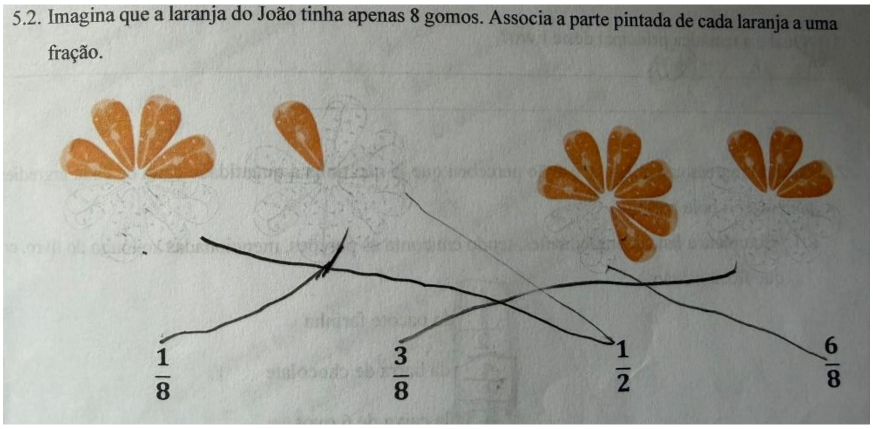


Através de todas as respostas apresentadas anteriormente, é possível compreender que os alunos foram induzidos a utilizar diferentes representações visuais para representara cada uma das frações. Além disso, é ainda possível compreender que ao representarem corretamente os gomos da laranja em cada uma das situações, os alunos demonstram estabelecer corretamente a relação parte-todo de uma unidade discreta.

Relativamente à questão 5.2, 3 alunos tiveram dificuldades em associar corretamente a fração à respetiva ilustração, tendo os restantes respondido corretamente e demonstrado conseguir estabelecer uma relação parte-todo uma vez que conseguiram identificar a fração que representa a quantidade de gomos pintado, como por exemplo ligar os cinco gomos pintados dos dez ilustrados à fração $\frac{1}{2}$ (figura 27).

Figura 27

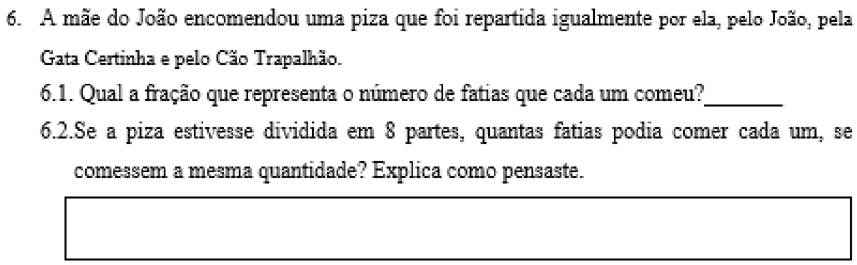
Resposta correta à questão 5.2.



Com a questão 6. (figura 27), esperava-se que os alunos, num primeiro momento, escrevessem a fração que representasse o número de fatias que cada personagem mencionada no enunciado tinha comido.

Figura 28

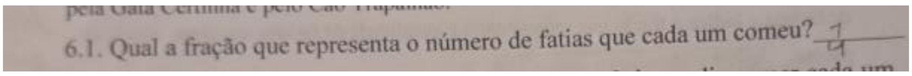
Questão 6.


6. A mãe do João encomendou uma piza que foi repartida igualmente por ela, pelo João, pela Gata Certinha e pelo Cão Trapalhão.
   6.1. Qual a fração que representa o número de fatias que cada um comeu?_______
   6.2. Se a piza estivesse dividida em 8 partes, quantas fatias podia comer cada um, se comessem a mesma quantidade? Explica como pensaste.

Ao longo da recolha de dados foi possível perceber que onze dos alunos que responderam a esta questão, apenas seis conseguiram representar corretamente o número de fatias que cada um comeu, na forma de frações (figura 29).

Figura 29

Resposta correta de alunos à questão 6.1.

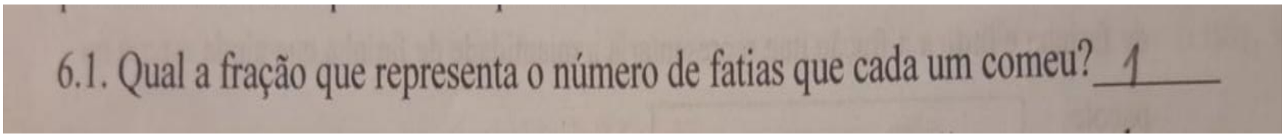

6.1. Qual a fração que representa o número de fatias que cada um comeu? $\frac{1}{4}$

As respostas destes alunos, evidenciam que os alunos utilizaram corretamente representações simbólicas para representar o número de fatias que cada um comeu. Além disso, os alunos demonstram compreender a relação parte-todo, uma vez que representam a quantidade de uma piza que cada um comeu, e utilizam a noção de que uma fração pode representar um quociente para representar por quantas fatias têm de dividir uma piza.

Contudo, os restantes cinco alunos que responderam a esta questão demonstraram dificuldades e apresentaram respostas incorretas:

Figura 30

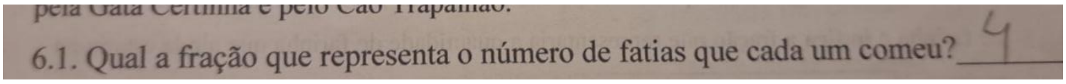
Respostas incorretas dos alunos I e S à questão 6.1.


6.1. Qual a fração que representa o número de fatias que cada um comeu? 1

Na figura 30, é possível verificar que estes alunos, apesar de perceberem qual a quantidade de fatias que cada personagem comeu, 1 fatia, não conseguiram representar essa mesma quantidade na forma de fração.

Figura 31

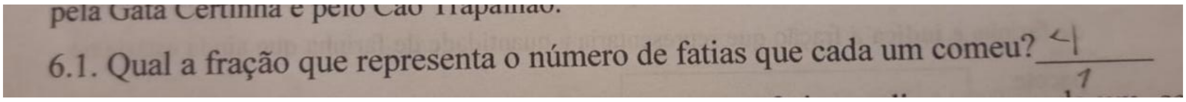
Respostas incorretas dos alunos A e T à questão 6.1


6.1. Qual a fração que representa o número de fatias que cada um comeu? 4

Os alunos que responderam 4 (figura 31) parecem ter indicado por quantas pessoas foi dividida a piza e não a fração que representava a parte que cada um comeu.

Figura 32

Respostas incorretas do aluno D à questão 6.1

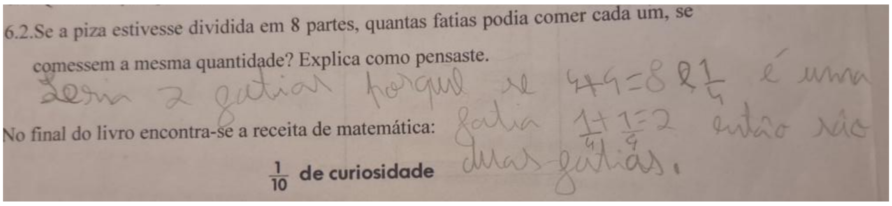

6.1. Qual a fração que representa o número de fatias que cada um comeu? $\frac{4}{1}$

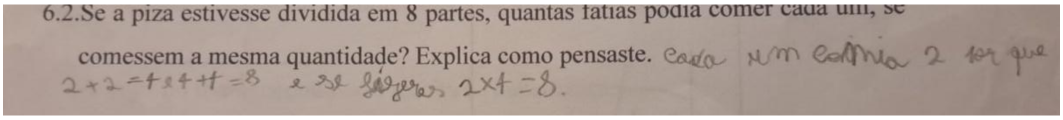
É ainda de destacar que o aluno D, ao utilizar a fração $\frac{4}{1}$, pode ter tentado representar a quantidade de fatias (4) pela qual uma piza seria dividida, demonstrando não compreender o que representam o numerador e o denominador de uma fração.

Na questão 6.2 esperava-se que os alunos determinassem quantas fatias podia comer cada uma das personagens, sabendo que todos comeram a mesma quantidade e que a piza foi dividida em 8 partes iguais. Apesar de ser uma turma com vinte e um alunos, apenas dois alunos conseguiram responder corretamente a essa alínea, tal como é possível visualizar na figura seguinte.

Figura 33

Respostas dos alunos à questão 6.2.


6.2.Se a piza estivesse dividida em 8 partes, quantas fatias podia comer cada um, se comessem a mesma quantidade? Explica como pensaste.
Seria 2 fatias porque se 4+4=8 e $\frac{1}{4}$ é uma fatia $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2$ então são duas fatias.
No final do livro encontra-se a receita de matemática:
$\frac{1}{10}$ de curiosidade


6.2.Se a piza estivesse dividida em 8 partes, quantas fatias podia comer cada um, se comessem a mesma quantidade? Explica como pensaste. Cada um comia 2 por que 2+2=4+4+4=8 e se fizeres 2x4=8.

Assim, através das respostas apresentadas anteriormente é possível verificar que estes alunos responderam corretamente à alínea, indicando serem duas fatias, mas apresentando justificações pouco corretas. O primeiro aluno justifica a sua resposta utilizando a adição e procurando relacionar com a piza anterior que estava dividida em 4 partes iguais. Desta forma, usa a adição 4 + 4 = 8 e refere que se $\frac{1}{4}$ é uma fatia, então $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2$, acrescentando que são duas fatias. De facto, o aluno não completa corretamente a igualdade, que seria $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$, e quando indica que $\frac{1}{4}$ é uma fatia, (referindo-se à piza dividida em 4 partes iguais) e que seriam 2 fatias (na piza dividida em 8 partes iguais), não reconhece a equivalência entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$. Este aluno demonstra assim, ainda não dominar na totalidade as relações parte-todo das frações, utilizando a representação simbólica ($\frac{1}{4}$) de forma incorreta para representar uma fatia.

O outro aluno também procura relacionar com a piza dividida em 4 partes iguais, mas fá-lo de forma pouco percetível, provavelmente considerando que as 8 fatias correspondem ao dobro do número de fatias da piza da alínea anterior (2 x 4 = 8).

Com a questão 7 (figura 34), pretendia-se perceber se os alunos já conseguiam adicionar frações. Nesta questão pretendia-se que os alunos adicionassem todas as frações apresentadas na receita descrita no enunciado e no livro "Frações na Cozinha" e que concluíssem qual era a porção (fração) correspondente à parte que faltava na receita, a parte relativa à diversão.

Figura 34

Questão 7.

7. No final do livro encontra-se a receita de matemática:

$\frac{1}{10}$ de curiosidade

$\frac{2}{10}$ de entendimento

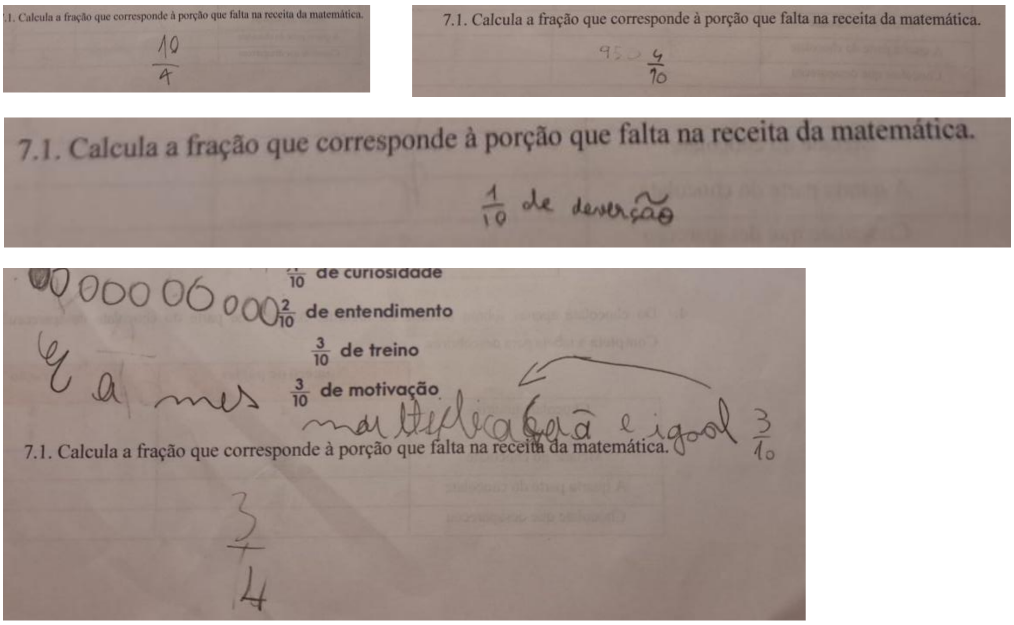
$\frac{3}{10}$ de treino

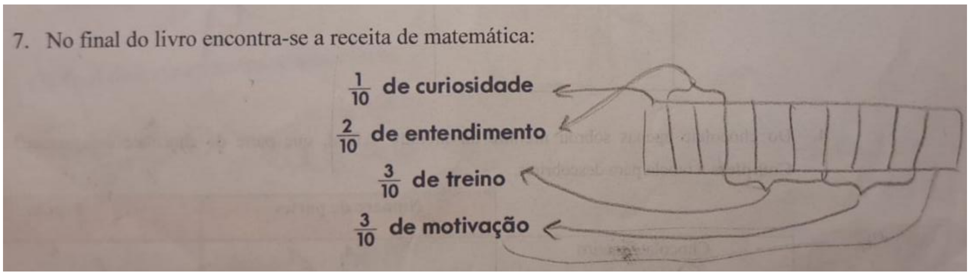
$\frac{3}{10}$ de motivação

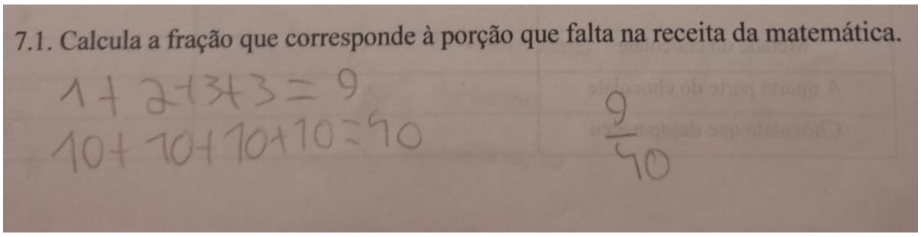
7.1. Calcula a fração que corresponde à porção que falta na receita da matemática.

Figura 35

Respostas dos alunos à questão 7.







Através das figuras apresentadas anteriormente, é possível perceber que apenas um aluno respondeu corretamente, utilizando uma representação simbólica, a esta questão, embora sem mostrar como pensou.

Contudo, é de destacar as duas últimas resoluções. Na penúltima resolução é possível perceber que o aluno utilizou uma representação visual, um retângulo, para tentar determinar a porção que faltava, tendo o dividindo em 10 partes iguais e usado setas para fazer corresponder as partes do desenho à sua descrição. O aluno cuja resolução se apresenta em último, parece ter adicionado todos os numeradores - $1 + 2 + 3 + 3 = 9 -$ e todos os denominadores - $10 + 10 + 10 + 10 = 40 -$, apresentando, em seguida, uma representação simbólica para representar a fração $\frac{9}{40}$, em que usou a soma dos numeradores como numerador e a soma dos denominadores como denominador.

Depois de cada aluno ter resolvido a ficha de trabalho, dinamizei um momento de discussão final com o intuito de corrigir a tarefa e ajudar os alunos nas dúvidas que surgiram na realização da mesma, permitindo que partilhassem diferentes resoluções e que expressassem a sua opinião sobre as resoluções dos colegas e sobre a própria tarefa.

Dentro dos diálogos que surgiram este momento destaco os seguintes:

Diálogo 1

Prof. Est. - Se o pacote estiver a meio, qual é a fração que o representa?

Aluno X – Metade!

Prof. Est. - E qual é a fração que representa a metade de alguma coisa?

Aluno X - Ah… um, dois…

Prof. Est. - Alguém consegue ajudar o vosso colega?

Aluno Y - Sim, é um meio ou um sobre dois.

Prof. Est. - E como é que represento a fração um meio?

Aluno Y - O um em cima e o dois em baixo

Prof. Est. - Muito bem…Olhem, o um e o dois representam o quê na fração?

Aluno Y - O numerador e o denominador!

Com este diálogo é percetível que, apesar do aluno X estabelecer uma relação de parte-todo ao compreender que se o pacote está a meio então tem metade e de utilizar corretamente as representações verbais, ainda revela dificuldades em conseguir associar a expressão "metade" a uma fração que a represente. Por outro lado, é ainda visível que o aluno Y, para além de já conseguir associar uma fração à respetiva expressão, sabe representá-la e compreende os seus elementos constituintes (numerador e denominador).

Diálogo 2.

Prof. Est. - Já viram que vocês me disseram que metade do chocolate pode ser representada pelas frações um meio e dois quartos? Será que é verdade?

Turma – Sim!

Prof. Est. - Porquê?

Aluno Z - Porque são a mesma coisa.

Prof. Est. - Porque são a mesma coisa ou que representam a mesma quantidade?

Aluno Z - A segunda!

Prof. Est. - E como é que se chamam estas frações?

Aluno Z - Iguais!

Aluno A - Equivalentes

Com este segundo diálogo é visível que o aluno Z, apesar de compreender que as frações mencionadas representam a mesma quantidade, ainda revela alguma dificuldade em nomear essas frações como equivalentes. Contudo, o aluno A já parece compreender o significado da expressão "equivalentes" e já a consegue relacionar com o tipo de frações apresentadas.

Apesar de considerar que deste momento foi bastante enriquecedor, este acabou por ser afetado pela ausência de alguns alunos devido ao apagão que ocorreu neste dia.

Síntese da 1.ª sessão

Esta primeira sessão, centrada na exploração do livro "*Frações na Cozinha*" (Rodi, 2018), teve como principal finalidade identificar e compreender os conhecimentos prévios dos alunos relativamente ao conceito de fração, permitindo ainda aferir o ponto de partida da turma para o desenvolvimento das tarefas seguintes. Através da leitura e discussão conjunta da história, foi possível observar um envolvimento generalizado e uma predisposição positiva por parte dos alunos, uma vez que o contexto narrativo e próximo do quotidiano despertou o interesse e facilitou a mobilização de experiências pessoais relacionadas com o tema, como o ato de cozinhar, medir ou repartir alimentos.

Por outro lado, ao longo desta sessão, verificou-se que a maioria dos alunos já possuía uma noção intuitiva de fração, associando-a espontaneamente à ideia de "parte de um todo" e reconhecendo situações concretas onde o conceito se manifestava. Alguns alunos revelaram compreender que a fração é composta por dois números – o numerador e o denominador – e conseguiram exemplificar, com base no livro, casos como "metade" e "um quarto", relacionando-os com porções de receitas ou divisões de alimentos.

Contudo, emergiram também algumas dificuldades significativas. Foi notório que alguns alunos apresentavam fragilidades na distinção entre o todo e as partes que o compõem, considerando o todo como algo indefinido ou variável, conforme o contexto apresentado. Além disso, revelaram insegurança na representação gráfica de frações e na partição equitativa de figuras, nomeadamente quando solicitados a identificar e pintar partes de um objeto que representassem determinadas frações. Outro aspeto observado foi a dificuldade em reconhecer que frações diferentes podem representar quantidades iguais (frações equivalentes), evidenciando uma compreensão ainda centrada no valor absoluto dos números que compõem a fração, em detrimento da relação entre eles.

Além disso, a implementação desta primeira tarefa revelou-se extremamente relevante, uma vez que permitiu concluir que, apesar dos alunos possuírem noções intuitivas e experiências empíricas associadas ao conceito de fração, a análise das produções, das interações orais e das observações registadas evidenciou que os alunos necessitavam de experiências mais concretas que lhes permitissem visualizar e manipular as relações entre as partes e o todo, consolidando o significado de fração para além da mera associação verbal ou contextual. Neste sentido, a sessão seguinte – centrada na tarefa *O Gato da Joana* – foi planeada de forma a responder diretamente às dificuldades identificadas e de forma a promover a visualização, manipulação e discussão das relações parte-todo, bem como o desenvolvimento progressivo da linguagem matemática associada a este domínio.

Tabela 7

Identificação das categorias e subcategorias de análise evidenciadas na tarefa "Frações na cozinha"

Categorias de análise	**Subcategorias**	**Número de vezes que surgem**
Significados de fração	Relação parte-todo envolvendo unidades discretas	6
	Relação parte-todo envolvendo unidades contínuas	4
	Quociente	3
Representações	Física	0
	Verbal	3
	Visual	5
	Contextual	2
	Simbólica	15

A análise feita às produções dos alunos da primeira tarefa permitiu identificar que no que diz respeito aos significados de fração, verificou-se que os alunos mobilizaram predominantemente o significado parte–todo em unidades contínuas, uma vez que a tarefa se centrava em alimentos e objetos que podiam ser divididos em porções iguais. Contudo, também emergiram manifestações da relação parte–todo em unidades discretas, sobretudo em situações em que os alunos contavam elementos ou partes individualizadas da unidade (por exemplo, gomos de laranja).

É ainda de destacar, que alguns alunos mobilizaram o significado de fração como quociente, especialmente quando interpretaram expressões como "metade", "um quarto" ou "parte de", relacionando-as com a ideia de dividir uma quantidade por um determinado número de partes iguais. Embora estas interpretações fossem, por vezes, implícitas, demonstram que o conceito de fração como resultado de uma divisão também foi identificado.

Relativamente aos tipos de representações, foi possível identificar que os alunos mobilizaram:

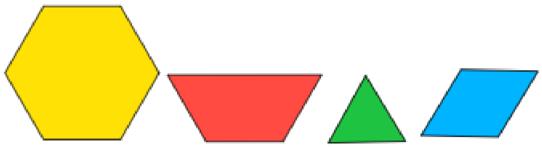
- Representações visuais, através de desenhos das porções de ingredientes, ainda que nem sempre com divisão clara da unidade;
- Representações simbólicas, com uso de frações como 1/4, 2/4 ou 3/4 para expressar quantidades usadas ou sobrantes;
- Representações verbais, presentes nas explicações orais dos alunos
- Representações contextuais, ao estabelecerem conexões com a realidade, por exemplo quando referem que utilizam frações em casa ou quando identificam que estas se encontram em receitas, e ao identificar corretamente que o têm de utilizar as frações para resolver as questões.

2.ª sessão- Tarefa “ O Gato da Joana”[2]

Nesta segunda sessão, dinamizada no dia 5 de maio de 2025, comecei por organizar a turma em cinco grupos e a disponibilizar um saco com blocos padrão por grupo. Além disso, referi quais os blocos padrão (Figura 36) que iriam ser utilizados ao longo da tarefa deste dia.

Figura 36

Blocos padrão utilizados na tarefa



Ainda neste momento inicial, onde apresentei os blocos padrão que deveriam ser usados, surgiu o seguinte diálogo:

Prof. Estg. (apresentando o hexágono) - Que figura é esta?

Aluno C - Um cilindro…Ah não!

Aluno D – Não, é um hexágono!

Prof. Estg. (apresentando o trapézio) – E esta?

Aluno E - É um triângulo!

Aluno F - Meio hexágono

Aluna G - É metade do hexágono

Prof. Estg. (apresentando o losango) – E esta?

Aluno D - Losango!

Aluno E - Parece que são dois triângulos colados!

Através deste diálogo, é possível observar diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e indícios das conceções prévias dos alunos acerca das figuras

[2] Tarefa adaptada de Carvalho e Mestre (2023).

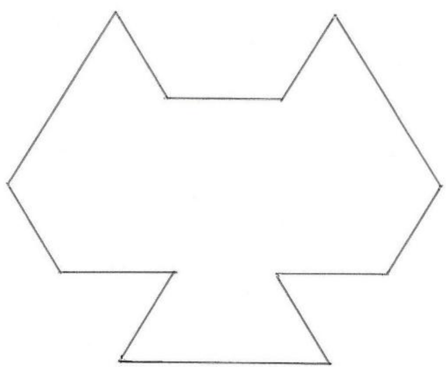
e das suas relações espaciais. As respostas apresentadas demonstram que os alunos se encontram em diferentes estágios de compreensão, oscilando entre uma perceção mais intuitiva e uma análise mais estruturada das formas geométricas. As intervenções em que os alunos identificam o trapézio como "meio hexágono" ou "metade do hexágono são particularmente relevantes, uma vez que evidenciam o início de uma compreensão da existência de relações entre as figuras da utilização de representações verbais para representar essas relações, traduzida na capacidade de reconhecer que uma forma pode ser obtida a partir da decomposição de outra. Este tipo de raciocínio, ainda que emergente, é essencial para o desenvolvimento do conceito de fração, pois envolve a ideia de equivalência e de relação parte-todo de uma unidade continua.

Posteriormente, revelei aos alunos que esta tarefa estava dividida em diferentes momentos. Assim, com o intuito de iniciar a tarefa, comecei por referir que: "A Joana gosta de construir figuras diferentes recorrendo a blocos padrão. Esta semana decidiu construir o maior número de figuras com o formato de um gato.".

A partir desta contextualização, projetei no quadro branco a silhueta do gato da Joana (Figura 37) e expliquei que as construções da Joana tinham o mesmo formato que o da silhueta projetada.

Figura 37

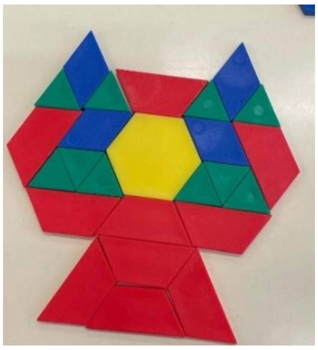
Silhueta do gato da Joana



De seguida, propôs aos alunos que recorrendo aos blocos padrão disponibilizados previamente e a partindo da visualização da projeção, tentassem contruir diferentes figuras com o formato semelhante à silhueta projetada do gato. A partir deste momento, foi possível recolher inúmeras construções diferentes. Contudo, destaco com as figuras 38 3 39, as representações físicas de dois alunos e o diálogo onde um dos alunos apresentou as justificações das decisões tomadas ao longo da construção das suas construções.

Figura 38

Construções do aluno X com auxílio da silhueta projetada.



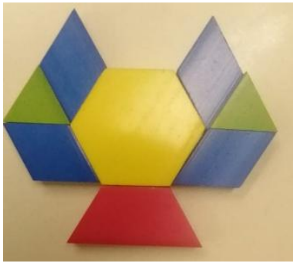
A partir da figura acima apresentada é possível constatar que o aluno teve dificuldades em construir a figura a partir da projeção da silhueta no quadro branco. Embora tenha obedecido à forma, não conseguiu construir a figura com as dimensões pretendidas.

Figura 39

Construções do aluno Y com auxílio da silhueta projetada.

1.ª construção

2.ª construção



Diálogo com o aluno Y

Prof. Estg. - Porque é que utilizaste o hexágono nas duas construções?

Aluno Y - Porque é a que ocupa mais espaço?

Prof. Estg. - E que alterações fizeste de uma construção para a outra?

Aluno Y - Então professor…deixei o trapézio e o hexágono e depois como queria utilizar todas as peças, todas, tentei colocar as peças que ainda não tinha usado no lugar das que já estavam.

A partir da figura e do diálogo acima apresentados, é percetível que o aluno substituiu as peças, mas parece não ter ainda reconhecido de forma explícita as relações existentes entre elas.

Posteriormente, fotografei e projetei as produções dos alunos e fomentei um momento de partilha com a turma, permitindo que os alunos falassem sobre as dificuldades que sentiram e que constatassem que era possível construir a mesma figura de diferentes formas.

Nesse momento, surgiram os seguintes diálogos:

Diálogo 1

Prof. Estg. (apresentando construções dos alunos) - Será que estas figuras são diferentes?

Aluno F - Sim, as peças não são as mesmas!

Prof. Estg. - Então, mas ele construiu o gato não foi?

Aluno F - Sim!

Aluno G - Então fizeram a mesma figura, mas de diferentes maneiras.

Através deste momento é possível perceber que, inicialmente, o aluno F apercebe-se apenas de diferenças concretas (peças utilizadas), enquanto o aluno G avança para uma compreensão mais abstrata: que a mesma figura pode ser construída de formas diferentes.

Diálogo 2

Prof. Estg. - Que dificuldades tiveram nesta parte da tarefa?

Aluno H - A silhueta estava muito longe e parecia maior, então fiz uma construção maior.

Aluno I - Não consegui fazer muitas. Queria fazer mais!

Através deste diálogo é percetível os alunos compartilham suas experiências durante a execução da tarefa. A partir do mesmo é possível perceber que o aluno H demonstra uma adaptação a desafios percetuais, explicando a estratégia usada para lidar com a diferença de escala, enquanto o aluno I expressa, apesar das limitações, uma motivação e desejo de continuar a construir as figuras.

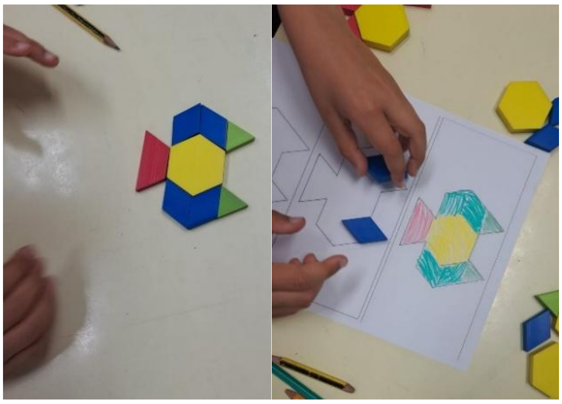
Após este momento, disponibilizei várias cópias da silhueta do gato e propus que os alunos repetissem a etapa anterior, mas com o auxílio da cópia disponibilizada. Além disso, pedi aos alunos que contornassem as peças que usaram de modo que pudessem representar a figura que construíram na folha com as cópias da silhueta do gato.

Figura 40

Construções dos alunos I e P da silhueta do gato

Figura 41

Construção do aluno G da silhueta do gato



Observando as figuras acima apresentadas é possível verificar que os alunos utilizaram diferentes estratégias para construir corretamente as suas figuras. Tal como se pode verificar na figura 41, os alunos recolheram à silhueta disponibilizada previamente e sobrepuseram cada peça na silhueta de modo a perceber onde esta poderia encaixar. Contudo, e tal como se pode verificar na figura 41 e no diálogo abaixo, um dos alunos preferiu não utilizar a silhueta num primeiro instante por considerar que seria mais fácil construir primeiro a figura e só depois passar para a folha.

Diálogo 1:

Prof. Estg. - Porque é que não estás a utilizar a folha que te dei?

Aluno G - Prefiro juntar as peças primeiro e depois copiar para a folha.

A partir deste diálogo, é possível observar que o aluno G demonstra uma forma própria de organização, optando por montar primeiro as peças e só depois transferir o resultado para a folha. Esta opção poderá evidenciar capacidades de planeamento, exploração prática e pensamento estratégico relativamente à forma mais adequada e eficaz de realizar a tarefa.

Além do que foi descrito no diálogo anterior, é ainda percetível através da figura 41, o aluno tentou utilizar o menor número de peças diferentes possível.

À semelhança do que aconteceu no momento anterior, fomentei um momento de discussão, onde, através da projeção das fotografias das construções, permiti que os alunos partilhassem as suas resoluções.

Diálogo 1

Prof. Estg.- Alguém teve dificuldades em construir e representar as suas figuras na folha?

Maioria da turma - Não!

Aluno H - Na folha não ficou igual à que construí! As peças ficaram tortas! Mas depois o aluno P ajudou-me.

A partir deste diálogo é percetível que, a maior parte da turma indica não ter enfrentado dificuldades na elaboração da tarefa. No entanto, aluno H relata que sua construção não se refletiu fielmente na folha, devido ao desalinhamento das peças relativamente à folha disponibilizada previamente. Este menciona ter recebido ajuda, evidenciando a existência de uma colaboração constante entre colegas.

Diálogo 2

Prof. Estg. - Vou projetar as vossas construções e vamos ver quantas é que são diferentes.

Prof. Estg. - Alguém construiu uma diferente a esta?

Aluno H - Eu não coloquei o hexágono do meio. Eu pus dois trapézios

Prof. Estg. (após a partilha de todas construções dos alunos) - Conseguiram fazer várias figuras diferentes, não foi?

Aluno I - Não, eu só fiz duas!

Aluno G - Eu já fiz 6!

Prof. Estg. - Muito Bem! Só por curiosidade, sabem quantas é que eram possíveis? 33 construções diferentes!

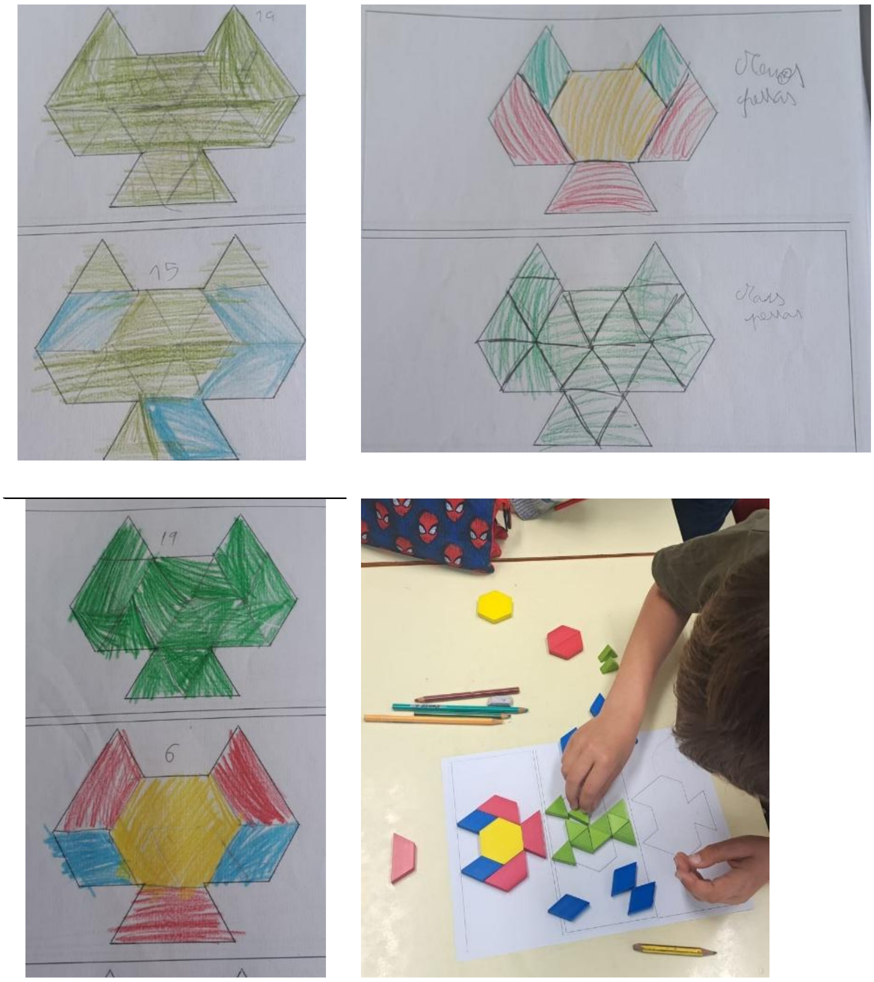
A partir deste diálogo, é visível que o aluno H identifica uma variação própria de figuras possíveis (alterando a peça central), enquanto outros alunos indicam a quantidade de figuras que construíram.

De seguida, lancei um novo momento a partir das questões “Será que já construíram a figura com o menor número de peças possível? Se sim, quantas peças usaram?” e “Será que já construíram a figura com o maior número de peças possível? Se sim, quantas peças usaram?”. Ao longo deste momento, propus que os alunos tentassem construir novas figuras de acordo com estas questões e que as representassem na silhueta do gato da joana.

Assim, a partir deste momento foram possíveis recolher inúmeras construções dos alunos, porém gostaria de destacar as seguintes:

Figura 42

Construção das figuras com o maior/menor número de peças.



Tal como é possível verificar nas primeiras três figuras , os alunos demonstraram ter percebido que para fazer uma construção com o maior número de peças possível tinham de utilizar a peça mais pequena, ou seja, o triângulo. Ainda assim, é de destacar que, na primeira figura, o aluno apercebe-se que pode substitui os triângulos por outra peça, neste caso um losango, de modo a diminuir o número de peças utilizadas. Por outro lado, tanto na segunda como na terceira figura, pode perceber-se que os alunos conseguiram fazer tanto uma construção com o maior número de peças como com o menor número de peças.

Relativamente à quarta figura, é possível verificar que o aluno colocou as peças na silhueta do gato e que conseguiu construir as figuras com o menor número de peças e, aparentemente, com o maior número de peças possível. Contudo, tal como se mostra no diálogo abaixo, ao conversar com o aluno, este afirmou que apenas utilizou o triângulo porque queria construir uma figura verde.

Diálogo 1:

Prof. Estg. - Já conseguiste construir as figuras?

Aluno J - A com menos sim! Está aqui!

Prof Estg. - Então e agora o que estás a fazer?

Aluno J - A pôr triângulos…

Prof. Estg. - Porque só os triângulos?

Aluno J - Porque quero uma figura verde!

A partir deste diálogo é possível perceber que o aluno J demonstra autonomia e intenção pessoal na construção da figura, revelando que as suas escolhas não são apenas técnicas, mas também estéticas ("quero uma figura verde"). O diálogo evidencia ainda que o aluno está envolvido de forma criativa na tarefa, atribuindo sentido e preferência própria ao longo do processo de construção.

Ainda neste momento surgiu o seguinte diálogo:

Diálogo 2:

Prof. Estg. - O que é que fizeste?

Aluno X - Substitui os dois trapézios que faziam um hexágono, por um hexágono completo.

Diálogo 2:

Aluno X - Professor, já fiz a com mais peças. Usei 12!

Prof. Estg. - Será que não consegues usar mais?

Aluno X - Sim…

Prof Estg. - Então e que peças vais usar?

Aluno X - Triângulos…para fazer os losangos.

Prof. Estg. - Mas porquê? Porque é que vais substituir o losango pelos triângulos?

Aluno X - Para fazer mais peças…porque se juntarmos os dois, dá para fazer um losango.

Neste diálogo, ao contrário do que se verifica no diálogo anterior, o aluno X demonstra compreender, apesar de ainda de forma um pouco vaga, algumas das possíveis relações geométricas entre as peças. Ao decidir substituir o losango por dois triângulos, o aluno revela que compreende a composição das formas geométricas e utiliza esse conhecimento para atingir o objetivo proposto — construir uma figura com mais peças.

Por fim, criei um momento de discussão onde, à semelhança do que ocorreu em momentos anteriores, propus que os alunos partilhassem as suas conclusões e as estratégias que utilizaram para determinar o número máximo e o número mínimo de peças necessárias para construir a figura.

Diálogo 1:

Prof. Estg. - Qual foi o número mínimo de peças que utilizaram?

Aluno G - 6!

Prof. Estg. – Concordam?

Aluno I - Não, eu usei 7.

Prof. Estg. - Será que não consegues utilizar uma peça que substitua alguma que aí tenhas?

(o aluno voltou a olhar para o que tinha feito e conseguiu substituir)

Prof. Estg. - Que peças utilizaram?

Aluno Z - A amarela, a azul e as vermelhas.

Prof. Estg. - As peças que o aluno Z usou foram o hexágono, o trapézio e o losango.

A partir deste diálogo é visível que o aluno G apresenta uma resposta inicial (6 peças), enquanto o aluno I discorda e identifica outra possibilidade (7 peças). Além disso, a minha intervenção, ao sugerir que o aluno encontrá-se "uma peça que substitua alguma que aí tenhas", promoveu um processo de revisão, levando o aluno a reconstruir a figura e a perceber novas relações entre as peças.

Diálogo 2:

Prof. Estg. - Então e para utilizarmos mais peças possíveis? São precisas quantas peças?

Aluno X - 19!

Prof. Estg. - E que peças utilizaste?

Aluno X - Triângulos!

Prof. Estg. - Porquê?

Aluno X - Porque são mais pequeninos.

Neste diálogo, o aluno X demonstra compreender a existência de uma relação entre o tamanho das peças e a quantidade necessária para preencher uma figura, reconhecendo que, ao utilizar peças menores (triângulos), é possível aumentar o número total utilizado.

Seguidamente, questionei os alunos sobre quais as relações entre as peças que tinham encontrado ao longo da construção das figuras. Assim, neste momento surgiu o seguinte diálogo:

Diálogo 1(figura 43):

Prof. Estg. - As peças que utilizaram têm relações entre si. Conseguem dizer quais é que foram essas relações?

Aluno X - Quando juntamos dois triângulos dá um losango.

Prof. Estg. - Consegues explicar essa relação de outra forma?

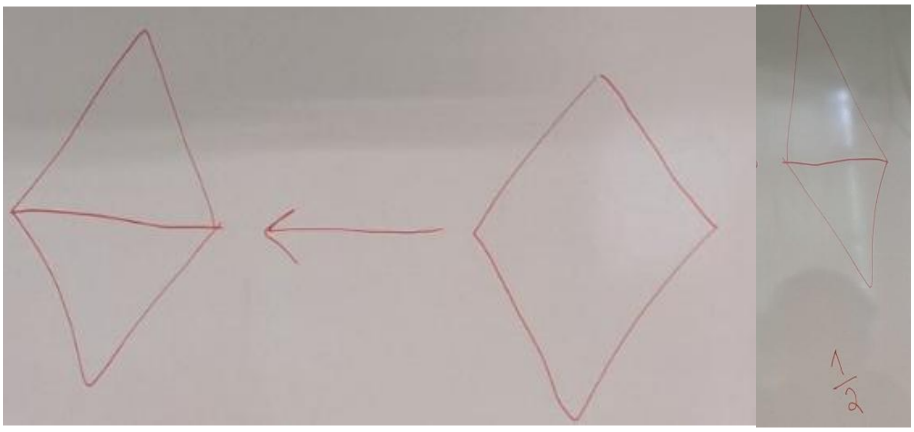
Aluno X - Sim, um triângulo é metade do losango.

Prof. Estg. - E como é que representas a metade?

Aluno X - Um meio.

Figura 43

Relação apresentada pelo aluno X



No diálogo acima, é possível observar que o aluno X identifica espontaneamente uma relação de composição e decomposição entre figuras geométricas, reconhecendo que dois triângulos formam um losango. Ao ser incentivado a reformular a explicação, o aluno demonstra compreender a noção de metade, associando a relação encontrada a um conceito matemático abstrato ("um triângulo é metade do losango"). Além disso, é ainda possível constatar que o aluno ao perceber que o triângulo é uma parte do losango utilizou o significado de parte-todo de uma fração e que para referir a fração "Um meio" utiliza uma representação verbal.

Diálogo 2 (figura 44)

Aluno X - Eu sei mais uma!

Prof. Estg. - Então diz lá.

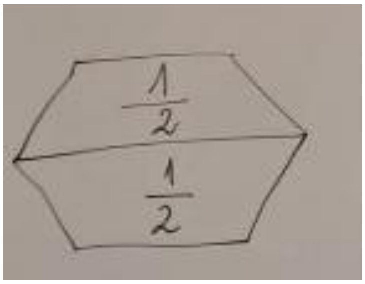
Aluno X - Dois trapézios juntos formam um hexágono.

Prof. Estg. - Consegues dizer mais alguma coisa sobre essas peças?

Aluno X - Um trapézio é um meio do hexágono.

Figura 44

Segunda relação apresentada pelo aluno X



A partir deste diálogo, é possível perceber que o aluno X demonstra identificar uma das relações entre figuras geométricas, identificando que dois trapézios formam um hexágono, mobilizando assim a relação parte-todo de uma unidade continua, e inferindo, de forma lógica, que um trapézio corresponde a metade de um hexágono. Ao utilizar a expressão "meio do trapézio", o aluno X evidencia a utilização de uma representação verbal que posteriormente é complementada pela representação visual presente na figura 44.

Diálogo 3 (figura 45)

Aluno I - Eu sei outra! Posso construi um trapézio com um triângulo e um losango.

Prof. Estg. - Vejam lá se, naquilo que o/a (Aluno I) me disse, conseguem encontrar mais alguma relação?

Aluno M - Um trapézio são três triângulos.

Prof. Estg. - Então o triângulo é o quê em relação ao trapézio?

Aluno I - Um terceiro…

Prof. Estg. - Será que é assim que se diz?

Aluno M - Um terço.

Prof. Estg. - Então e o losango é o quê em relação ao trapézio?

Aluno X - Dois terços…

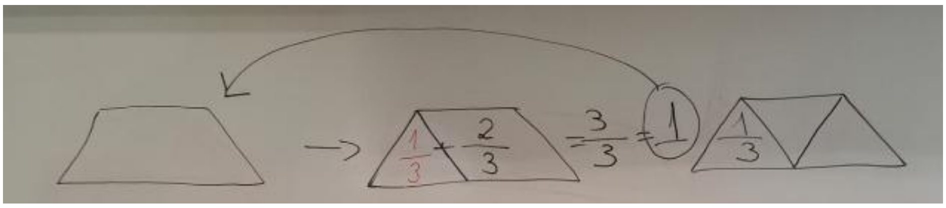
Prof. Estg. - Porquê?

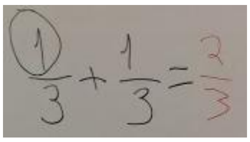
Aluno X - Então… se um triângulo é um terço e um losango são dois triângulos.

A partir do diálogo anterior, é possível perceber que o aluno I identifica uma nova relação entre figuras (um trapézio formado por três triângulos). Além disso é possível perceber que o aluno já consegue estabelecer as relações entre as peças envolvendo as frações. No entanto, é possível constatar que tanto o aluno M como o Aluno X utilizam representações verbais ao referirem "Um terço" e "Dois terços", para estabelecer as relações enunciadas. É ainda de salientar, que o aluno X consegue estabelecer uma relação parte-todo de uma unidade contínua ao compreender que um losango pode ser uma parte de um trapézio.

Figura 45

Relações apresentadas pelos alunos I e X





As ilustrações presentes na figura 45, foram construídas a partir do que o aluno explicou anteriormente, como é possível observar no diálogo anterior. Á medida que o aluno foi explicando o seu raciocínio, eu ilustrei o que o mesmo ia dizendo. No fim deste momento, o aluno revelou ainda que o um trapézio correspondia a três terços e á unidade.

Diálogo 4 (figura 46)

Prof. Estg. - E o Hexágono? Consigo dividi-lo em triângulos?" Aluno X- "Sim, em 6.

Prof. Estg. - E como é que eu representaria essa divisão?

Aluno X - Um sexto.

Aluno L - Professor encontrei outra relação!

Prof. Estg. - Diz lá que relação encontraste.!

Aluno L - A relação que eu encontrei foi que um hexágono é igual a…Se tu juntares três destes - apontando para o losango - fazes um hexágono.

Prof. Estg. - Então o losango é o que em relação ao hexágono? **Aluno L -** Um terço.

A partir do diálogo em cima apresentado, é possível identificar que estes alunos também utilizam corretamente representações verbais, como por exemplo "um sexto" e "um terço", para representar as relações entre os blocos. Por sua vez, o aluno X, apesar de forma induzida, ao identificar que pode dividir o hexágono em seis triângulos e que essa divisão é representada pela fração um sexto, o mesmo utiliza o significado de quociente de uma fração.

Figura 46

Relações apresentadas pelos alunos X e L

Por sua vez, através da figura 46, é possível constatar que os alunos X e L utilizam representações visuais e verbais para ilustrar as relações que encontraram.

Síntese da 2.ª sessão

Assim nesta segunda sessão, os alunos exploraram o conceito de fração através da manipulação de blocos padrão, construindo diferentes figuras com base na silhueta de um gato. Esta atividade permitiu observar aprendizagens significativas, nomeadamente a capacidade de alguns alunos identificarem e relacionarem as diferentes figuras geométricas (triângulo, trapézio, losango e hexágono), reconhecendo relações de equivalência e decomposição — como quando afirmavam que o trapézio correspondia a "metade do hexágono" ou que o losango era formado por "dois triângulos". Estas observações evidenciaram a existência da compreensão da relação parte-todo, fundamental para a construção do conceito de fração.

Durante a tarefa, os alunos demonstraram um grande envolvimento, curiosidade e cooperação, partilhando estratégias e comparando as suas construções. Contudo, algumas dificuldades tornaram-se evidentes, sobretudo na correspondência entre as figuras tridimensionais e a representação bidimensional no registo escrito, bem como na noção de unidade e na quantificação das partes relativamente ao todo. Apesar disso, os alunos revelaram progressos na mobilização da linguagem geométrica e na consolidação de ideias intuitivas associadas às frações.

Por outro lado, a dinamização desta sessão permitiu-me compreender melhor as conceções dos alunos sobre o conceito de fração. Constatei que, embora muitos já apresentassem algum conhecimento acerca da relação parte-todo e conseguissem estabelecer equivalências entre as diferentes peças, persistiam dificuldades na representação simbólica das frações e na identificação clara da unidade. Perante estas evidências, considerei essencial que, na tarefa seguinte — *"O Almoço da Turma do João"* —, os alunos trabalhassem com unidades contínuas e com situações mais próximas do seu quotidiano, nas quais a repartição do todo fosse mais visível e concreta. Esta decisão revelou-se pertinente, uma vez que permitiria consolidar a noção de unidade e favorecer uma compreensão mais estruturada e significativa das frações, articulando o trabalho prático da sessão anterior com uma abordagem mais formal e simbólica.

Tabela 8

Identificação das categorias e subcategorias de análise evidenciadas na tarefa "O gato da Joana"

Categorias de análise	**Subcategorias**	**Número de vezes que surgem**
Significados de fração	Relação parte-todo envolvendo unidades discretas	0
	Relação parte-todo envolvendo unidades contínuas	8
	Quociente	4
Representações	Física	7
	Verbal	6
	Visual	5
	Contextual	0
	Simbólica	4

A análise das resoluções dos alunos permitiu identificar claramente a mobilização de algumas das categorias de análise, evidenciando a forma como os alunos recorreram às diversas representações e significados de fração no trabalho com os blocos padrão.

No que diz respeito aos significados de fração, verificou-se que o significado parte–todo envolvendo unidades contínuas foi o mais recorrente, uma vez que os alunos relacionaram as diferentes peças umas com as outras considerado uma como unidade. Os alunos reconheceram que determinadas peças representavam "uma parte" de outra, mobilizando este significado sobretudo ao identificar que "o triângulo é um sexto" ou que "o trapézio é metade" da unidade.

Para além deste significado dominante, foi igualmente possível identificar manifestações do significado de fração como quociente, especialmente quando os alunos justificavam as relações que identificaram. Estas explicações revelam que alguns alunos interpretaram a fração como resultado de uma divisão — dividir o hexágono em seis partes iguais — mesmo que essa relação fosse verbalizada de forma informal.

Relativamente aos tipos de representações utilizadas, os alunos mobilizaram:

- A representação física, uma vez que a manipulação dos blocos padrão constituiu o ponto de partida para a compreensão das relações fracionárias. Através da manipulação dos blocos, os alunos puderam construir, decompor e comparar figuras, tornando visíveis as relações entre a parte e o todo.
- A representação visual também esteve fortemente presente: muitos alunos recorreram a esquemas, desenhos ou registos gráficos das peças para justificar as equivalências encontradas, representando, por exemplo, o hexágono dividido em triângulos ou os arranjos possíveis com trapézios e losangos.
- No domínio das representações simbólicas, os alunos utilizaram frações como 1/6, 1/2 ou 1/3 para expressar as relações entre as peças, traduzindo para a notação matemática aquilo que tinham descoberto através da manipulação. Em alguns casos, estes registos surgiram de forma espontânea, evidenciando o início de uma formalização do conceito.
- As representações verbais estiveram igualmente presentes nas explicações dadas durante a discussão coletiva, permitindo compreender como os alunos expressavam o seu raciocínio, justificavam equivalências e comparavam peças usando linguagem informal ou matemática.

3.ª sessão- Tarefa “ O almoço da turma do João”[3]

Nesta 3.ª sessão, dinamizada no dia 14 de maio de 2025, comecei por revelar aos alunos que, neste dia, iriam realizar uma tarefa denominada de “ O almoço da turma do João” e, em seguida, questionei “Quem se lembra quem era o João?”.

Neste primeiro momento as respostas foram bastante curiosas, uma vez que, tal como se pode verificar no diálogo abaixo, uns alunos responderam que o João era o seu colega de turma e outros relacionaram o João com a personagem do livro “Frações na Cozinha” trabalhado em sessões anteriores.

Diálogo 1:

Prof. Estg. - Hoje vão realizar a tarefa do almoço da turma do João. Quem se lembra quem era o João?

Alguns elementos da turma (ao apontar para o colega) - É ele.

Prof. Estg. - Sem ser o vosso colega.

Aluno L - O João do livro!

Este momento foi ainda complementado com um momento de revisão do livro. Além disso, com o intuito de permitir que os alunos se recordassem das personagens que fazem parte da história do mesmo, procedi à releitura do livro “Frações na cozinha”.

Diálogo 1:

Prof. Estg. - E como se chamava o livro?

Turma - Frações na Cozinha!

Prof. Estg. - E o que é que aconteceu na história?

Aluno I - O João queria fazer um bolo para a mãe, com a Gata Certinha e para o Cão trapalhão , mas só tinha uma porção de um todo!

Prof. Estg. - E qual era a porção de cada ingrediente?

Aluno I - A caixa de ovos tinha 6 e só ficaram 4.

[3] Tarefa adaptada de Canavarro et al. (2022).

Prof. Estg. - E então isso representa que fração?

Aluno M - Eu sei! Quatro sextos.

Prof. Estg. - E qual era a unidade?

Aluno L - 1!

Aluno J - 6 ovos!

Prof. Estg. - Quem se lembra com que porção da barra de chocolate ficou?

Aluno I - Ficou com metade da metade.

Prof. Estg. - E quanto é metade da metade em fração?

Aluno M - Um quarto!

Prof. Estg. - E se eu quisesse a parte do chocolate que desapareceu?

Aluno X - Se uma barra é um quarto e só sobrou uma, então foram três quartos.

A partir de deste diálogo, é possível perceber que os alunos revelaram recordarem--se do livro "Frações na Cozinha" abordado em sessões anteriores, demonstrando capacidade para relacionar o enredo do mesmo com os conteúdos matemáticos em estudo. Além disso é possível verificar que o aluno I relembra os acontecimentos principais, enquanto os colegas M, L, J e X aplicam, de forma progressiva e correta, conceitos fracionários — identificando, através de representações verbais, que quatro de seis ovos representam "quatro sextos", que "metade da metade" corresponde a "um quarto" e que, se restou apenas um quarto da barra de chocolate, então "três quartos" foram consumidos. Por outro lado, o aluno I ao referir que o João só tinha a porção de um todo, é evidenciado que o mesmo estabelece uma relação parte-todo envolvendo unidades continuas.

Após este momento inicial, distribuí uma cópia da tarefa "O almoço da turma do João" (Figura 47) a cada aluno e li o seu enunciado, esclarecendo as dúvidas dos alunos, mais concretamente, relativamente ao significado de algumas palavras.

Figura 47

Tarefa "O almoço da turma do João"

O almoço da turma do João

Quando o João voltou para as aulas, decidiu contar à professora o que acontecera em sua casa. Ao ouvir isso, a professora teve a ideia de planear um almoço na pizaria da rua com a turma. Para organizar a turma da melhor forma, resolveu formar três grupos e pediu ao João, ao Cão Trapalhão e à Gata Certinha que cada um ficasse num grupo diferente porque eles já sabiam dividir as pizas de igual forma por todos.

Cada grupo juntou o dinheiro que tinha e comprou pizas familiares **retangulares** iguais para repartir igualmente entre todos, de acordo com a tabela seguinte:

Grupos	N.º de alunos	N.º de pizas compradas pelo grupo
Do João	5	3
Da Gata Certinha	4	3
Do Cão Trapalhão	8	6

Após a hora de almoço, alguns alunos disseram que os alunos de um grupo tinham comido mais piza que os alunos dos outros grupos.

Concordas? Explica porquê.

Em seguida, dinamizei um momento de discussão onde os alunos tiveram a possibilidade de responder previamente à tarefa sem proceder a cálculos e explicar o que deveriam de fazer para resolver a mesma. Neste momento surgiu o seguinte diálogo:

Prof. Estg. - Concordam com esta afirmação? Será que comeram todos a mesma quantidade?

Aluno I - Não!

Prof. Estg. - Porquê?

Aluno I - Porque o grupo do João são 5 alunos e eles compraram 3 pizzas e se dessem 1 pizza a cada um, dois iam ficar sem.

Prof. Estg. - Então e digam-me lá uma coisa. O que é que têm de fazer neste exercício?

Aluno M - Frações!

Aluno J - Divisão!

Prof. Esg. - O que é que temos de dividir?

Aluno A - No grupo do Cão Trabalhão, temos de dividir as pizzas por oito.

Prof. Estg. - E no grupo da Gata Certinha?

Aluno J - Por quatro.

Prof. Estg. - E no do João?

Aluno J - Por cinco.

Prof. Estg. - Por cinco quê?

Aluno J - Alunos!

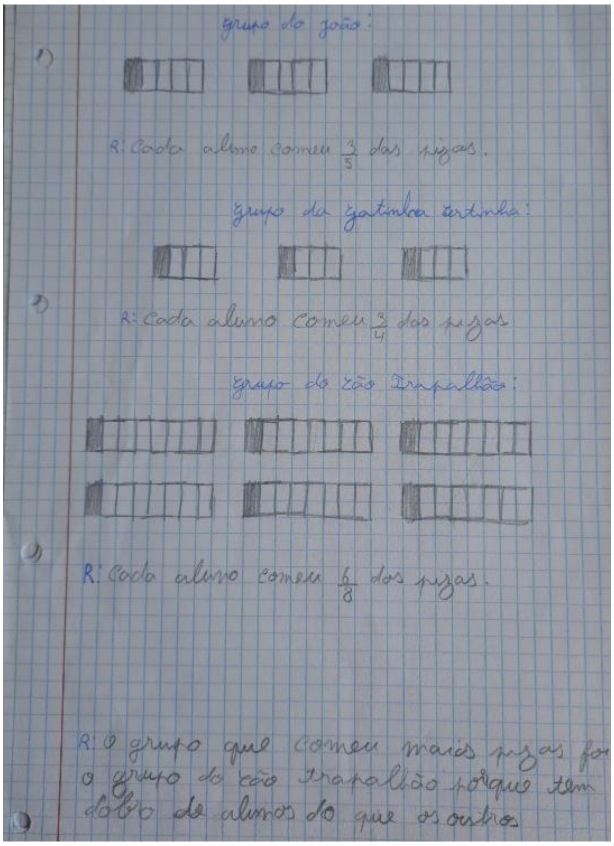
A partir do diálogo acima apresentado é possível constatar que o aluno I demonstra uma interpretação lógica e contextualizada do problema, explicando que o grupo do João, composto por cinco alunos e três pizzas, não conseguiria garantir uma pizza inteira para cada elemento. É ainda possível perceber que o aluno M identifica corretamente que o exercício envolve frações, enquanto o aluno J associa a tarefa à divisão, mostrando capacidade de relacionar a situação com operações matemáticas pertinentes e a utilização de uma representação contextual.

A intervenção do aluno J ao afirmar "Divisão!" evidencia ainda a mobilização do significado de fração como quociente, uma vez que este reconhece que a resolução do problema implica repartir uma quantidade (as pizzas) por um número de partes (os alunos). Esta compreensão é reforçada quando os alunos identificam o que deve ser dividido em cada grupo, afirmando que é necessário dividir as pizzas por oito, quatro e cinco, respetivamente. Nestes momentos, os alunos aplicam diretamente a ideia de quociente ao interpretarem a fração como o resultado de uma divisão: número de pizzas a dividir pelo número de alunos. Por sua vez, a resposta final do aluno J — "Alunos!" — demonstra que este consegue identificar corretamente o denominador da fração e reconhecer que a quantidade de partes corresponde ao número de elementos do grupo, estabelecendo assim uma clara relação parte–todo. Neste caso, trata-se de uma situação de quociente aplicada a uma unidade contínua (as pizzas), que deve ser repartida equitativamente pelos elementos do grupo.

Posteriormente, propus aos alunos que resolvessem a tarefa numa folha quadriculada à parte e que apresentassem todos os cálculos que utilizaram na mesma.

Figura 48

Resolução do aluno C à tarefa "O almoço da turma do João"



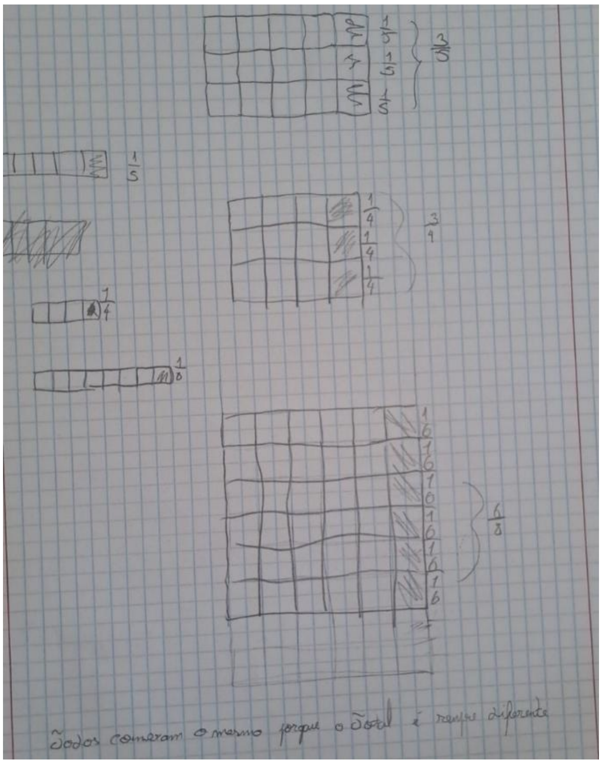
Na figura 48 é possível verificar que o aluno C, começou por utilizar representações visuais para ilustrar, através de retângulos, o número de pizas que cada grupo comprou e por dividir cada uma delas pelo número de pessoas que pertenciam a cada grupo, representando assim as fatias de piza. Posteriormente, o aluno C pintou a parte de piza que cada elemento do grupo poderia comer, optando por distribuir uma parte de cada piza a cada elemento do grupo.

De seguida, concluiu que cada aluno comeu três quintos, três quartos e seis oitavos das pizas, consoante os grupos, registando, através de representações simbólicas, corretamente as frações. Por fim, registou a resposta à questão formulada referindo que o grupo que comeu mais pizas foi o grupo do Cão Trapalhão porque tem o dobro dos alunos dos outros dois grupos.

Ao concluir que o grupo do Cão Trapalhão comeu mais pizzas por ter o dobro dos alunos dos outros grupos, o aluno C revela relacionar a quantidade total de pizza consumida com o número de participantes. No entanto, essa justificação mostra alguma confusão entre a quantidade total de pizza e a porção individual de cada elemento, indicando que o aluno ainda necessita de consolidar a relação parte-todo.

Figura 49

Resolução do aluno R à tarefa "O almoço da turma do João"



Na figura 49 é possível visualizar que, à semelhança do aluno C, este aluno começou por utilizar uma representação visual para ilustrar as pizas que cada grupo comprou e por dividi-las pelo número de pessoas pertencentes a cada grupo. Em seguida, representa com frações a parte que cada elemento do grupo comeu em cada piza e, por fim, registou a quantidade que cada aluno comeu, no total do número de pizas, em cada um dos grupos, concluindo, utilizando representações simbólicas, que cada aluno comeu três quintos, três quartos e seis oitavos, respetivamente. Como resposta ao problema, concluiu que todos os grupos comeram o mesmo porque o total é sempre diferente.

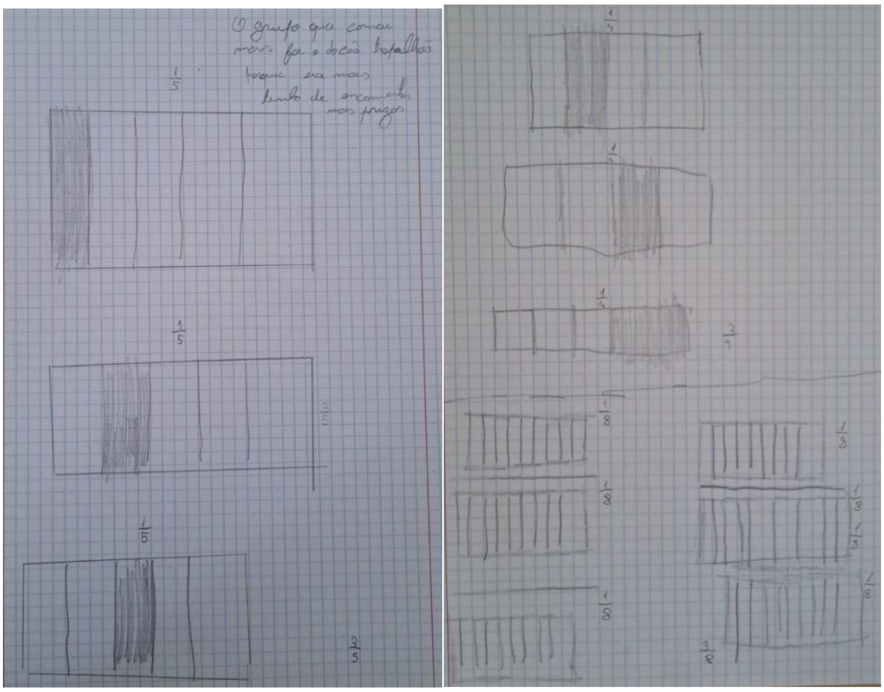
Assim é possível perceber que o aluno C demostra uma boa compreensão inicial do conceito de partilha fracionária, ao representar graficamente as pizas de cada grupo e dividi-las proporcionalmente pelo número de elementos de cada um. Assim, este aluno demonstra ainda compreender o significado de fração de quociente.

Além disso, o aluno, ao registar corretamente as frações correspondentes a cada grupo — três quintos, três quartos e seis oitavos —, evidencia um domínio do significado de fração como parte de um todo e capacidade de traduzir o raciocínio visual para a linguagem matemática, ou seja, de utilizar representações simbólicas.

Contudo, a resposta final — "todos os grupos comeram o mesmo porque o total é sempre diferente" — mostra alguma inconsistência conceptual. Embora o aluno reconheça diferenças entre os grupos, a justificação apresentada revela dificuldade em comparar frações de denominadores distintos e em interpretar o que significa "comer o mesmo" em termos de quantidade individual. Esta afirmação sugere que o aluno ainda está em fase de consolidação do pensamento proporcional e da comparação entre frações não equivalentes, apesar de demonstrar compreensão procedimental sólida na fase de representação.

Figura 50

Resolução do aluno D à tarefa "O almoço da turma do João"

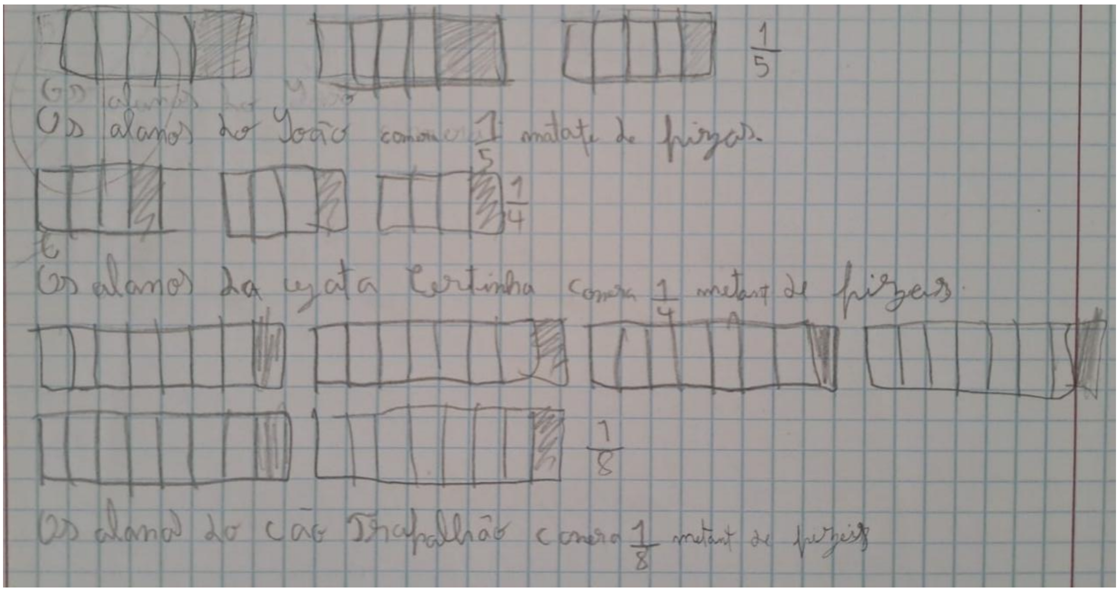


Na figura 50, é possível visualizar que, à semelhança do aluno C, o aluno D começa por utilizar uma representação visual para representar as pizas que cada grupo comprou através de retângulos e por dividir esses retângulos pelo número de elementos de cada grupo. Ainda à semelhança dos exemplos anteriores, o aluno D, utiliza as representações simbólicas para ilustrar a parte que cada aluno comeu em cada piza e no total do número de pizas, de acordo com cada um dos grupos. Como resposta à questão formulada, refere que o grupo que comeu mais foi o do Cão Trapalhão porque tinha encomendado mais pizas.

Assim, é possível perceber que, apesar do aluno dominar corretamente o significado de fração de quociente, o mesmo ainda não consegue deduzir corretamente qual o grupo que comeu mais. Isto acontece quando o aluno deduz quem comeu mais a partir da quantidade de pizas (unidade) que cada grupo possuía e não pelo tamanho de cada porção.

Figura 51

Resolução do aluno V à tarefa "O almoço da turma do João"



Na figura 51 é possível visualizar que, à semelhança dos exemplos anteriores, o aluno V utiliza as representações visuais e simbólicas para representar cada piza e divide-as pelo número de elementos de cada grupo. Contudo, apesar de parecer compreender qual a quantidade de cada piza que cada elemento do grupo comeu, representando corretamente a fração, não apresenta a quantidade total que cada elemento de cada grupo comeu, nem uma resposta à questão do problema.

Por fim e após disponibilizar um período de tempo para que os alunos resolvessem a tarefa, criei um momento de discussão final onde, à semelhança das aulas anteriores, corrigi a tarefa e respondi às dúvidas e questões dos alunos. De seguida, irei apresentar excertos deste momento de discussão:

Diálogo 1:

Prof.Estg. - Agora vamos corrigir a tarefa. Quem se recorda o que é que queríamos saber?

Aluno V - Que grupo comeu mais!

Prof. Estg. - Então e o que é que temos de fazer primeiro, para o grupo do João?

Aluno X - Desenhar as pizas.

Prof. Estg. (desenhando um círculo) - Assim?

Aluno X - Não professor! Tem de fazer três retângulos.

Aluno X - Porque as pizas são retangulares!

No diálogo acima, é evidenciado que os alunos começam por recordar o objetivo da tarefa e, em seguida, utilizam o próprio cenário das pizzas para organizar a resolução, o que revela o uso de representação contextual. Por sua vez, quando o aluno X esclarece que deve desenhar retângulos porque "as pizas são retangulares", demonstra saber interpretar o problema com base nas características reais da situação.

Além disso, os alunos recorrem frequentemente à representação verbal, explicando o que deve ser feito e justificando as escolhas ("desenhar as pizas", "três retângulos").

Diálogo 2:

Prof. Estg. - Muito Bem! E a seguir?

Aluno Z - Temos de cortar as pizas em cinco.

Prof.Estg. - Cortar? Tenta lá utilizar termos matemáticos.

Aluno X - Eu sei! Dividir cada piza por cinco!

Prof. Estg. - E porquê cinco?

Aluno X - Porque são cinco pessoas.

Prof. Estg. - E quantas fatias de piza comeu cada um?

Aluno I - Uma fatia!

Prof. Estg. - E isso representa que porção de cada piza?

Aluno X - Um quinto.

Prof.Estg. - Então e qual foi a quantidade que cada um comeu

Aluno J - Três quintos.

Prof. Estg. - Porquê? O que fizeste?

Aluno J - Um quinto mais um quinto mais um quinto!

Prof. Estg. - Ok e porque é que o resultado não é três quinzeavos?

Aluno J - Porque quando os denominadores são iguais, somam-se apenas os numeradores!

Neste segundo diálogo, é possível perceber que os alunos mobilizam o significado de fração como quociente, quando afirmam que é necessário "dividir cada pizza por cinco", interpretando assim a fração como o resultado da divisão de um todo por um número definido de partes, correspondente ao número de alunos. Por outro lado, é ainda evidenciado que os alunos utilizam representações verbais para explicar as decisões as suas respostas ("uma fatia", "um quinto", "um quinto mais um quinto mais um quinto"). Além disso, a resposta correta do aluno J, justificando que "quando os denominadores são iguais, somam-se apenas os numeradores", mostra uma compreensão formal da operação com frações e da relação parte–todo, já que contabilizam três partes iguais de um mesmo inteiro.

Diálogo 3:

Prof. Estg. - E para o grupo da Gata Certinha? Quantas pizas vamos desenhar?

Turma - Três!

Aluno D - Vamos dividir por quatro!

Prof. Estg. - E cada aluno come quantas fatias de cada piza?

Turma - Uma!

Prof. Estg. - E como é que representamos isso em fração?

Aluno Z - Um quarto!

Prof. Estg. - Então e no total cada um come quanto?

Aluno Z - Um quarto mais um quarto mais um quarto! Três quartos!

Prof. Estg. - E agora na última? Quantas pizas são?

Aluno J - 6!

Prof. Estg. - E dividimos por quanto?

Aluno J - Oito!

Prof. Estg. - Então e no total cada um come quanto?

Aluno X - Seis oitavos.

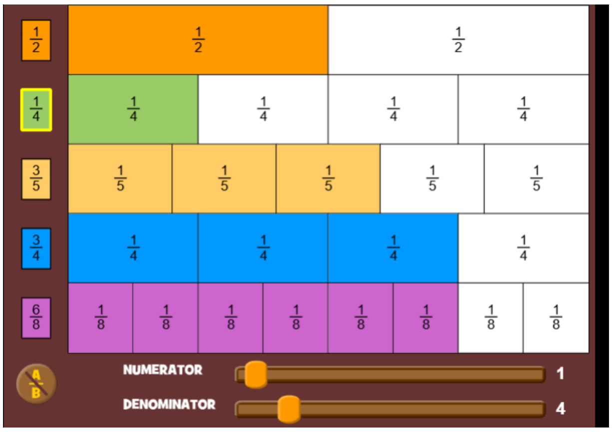
Por fim, neste último diálogo, é visível que os alunos aplicam o mesmo raciocínio aos outros grupos, novamente partindo de uma representação contextual, ao identificarem quantas pizas cada grupo tem e por quantos alunos devem ser divididas. O reconhecimento de que devem dividir por quatro ou dividir por oito mostra que continuam a mobilizar o significado de fração como quociente, repartindo as pizas pelos elementos de cada grupo. Por sua vez, é visível que estes alunos voltam a usar representações verbais para responder às questões feitas por mim, como por exemplo ao referirem " um quarto" e " seis sextos". Além disso, a relação parte–todo envolvendo unidades continuas volata e ser evidenciada, uma vez que cada fração representa a parte da pizza (parte) que cada aluno recebe em relação ao número total de divisões feitas (todo).

É importante de referir que, tal como previsto na planificação deste momento, houve a necessidade de utilizar uma plataforma digital que representasse as frações utilizadas na tarefa (figura 52), de modo a permitir que os alunos pudessem compreender qual o grupo que tinha comido mais quantidade de piza.

Ao longo deste momento, propus que os alunos me dissessem quais eram os numeradores e os denominadores de cada uma das frações, para que eu pudesse representar cada uma das frações na plataforma.

Figura 52

Exemplo construído com os alunos



Através desta tabela, projetada no quadro branco, os alunos conseguiram perceber que as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ são equivalentes, pois representam a mesma quantidade de piza que cada um comeu.

Este momento serviu para rever alguns conteúdos e conceitos que foram sendo trabalhados ao longo desta sessão e das sessões anteriores, como o a identificação do numerados e do denominador de uma fração e a leitura de uma fração.

Síntese da 3.ª sessão

Assim, nesta terceira sessão, os alunos continuaram a participar com entusiasmo e a demonstrar uma crescente autonomia na resolução da tarefa, revelando uma compreensão mais consolidada do conceito de fração em contextos de partilha. Alguns alunos, demonstraram ainda ser capazes de identificar corretamente o numerador e o denominador, compreendendo o seu significado e aplicando-o em situações de divisão de unidades contínuas. Além disso, verificou-se que alguns alunos já associam a fração à ideia de parte de um todo e conseguem representar adequadamente essas relações, tanto graficamente como numericamente. Foi também evidente a evolução no uso da linguagem matemática: as expressões informais deram progressivamente lugar a termos mais precisos, como “dividir em partes iguais” ou “três quintos do bolo”.

Apesar dos pontos evolutivos referidos anteriormente, foi possível perceber que, embora alguns alunos dominassem o significado básico da fração e a sua representação simbólica, necessitavam de aprofundar a compreensão da equivalência e da comparação entre diferentes frações. Assim, na planificação da tarefa seguinte, considerei essencial propôr situações que explorassem as frações com unidades discretas, permitindo comparar e relacionar quantidades de forma mais intuitiva e visual.

Tabela 9

Identificação das categorias e subcategorias de análise evidenciadas na tarefa “O almoço da turma do João”

Categorias de análise	**Subcategorias**	**Número de vezes que surgem**
Significados de fração	Relação parte-todo envolvendo unidades discretas	0
	Relação parte-todo envolvendo unidades continuas	7
	Quociente	6
Representações	Física	0
	Verbal	5
	Visual	5
	Contextual	4
	Simbólica	7

A análise dos dados recolhidos a terceira tarefa permitiu identificar que os alunos mobilizaram de forma predominante a relação parte–todo envolvendo unidades contínuas, uma vez que a tarefa se centrava na partilha de pizzas, objetos que representam um todo contínuo passível de ser dividido em partes iguais. Ao dividirem cada piza por um número correspondente ao número de elementos de cada grupo, os alunos revelaram compreender que cada fatia correspondia a uma parte proporcional do todo.

Além disso, emergiram manifestações claras do significado de fração como quociente, especialmente quando os alunos reconheceram que era necessário “dividir” as pizzas pelos elementos de cada grupo. Expressões como “dividir cada pizza por cinco”, “dividir por quatro” ou “dividir por oito” mostram que interpretaram a fração como o resultado de uma operação que distribui um todo por um número específico de partes iguais.

Relativamente às representações utilizadas, foi possível identificar um uso frequente de:

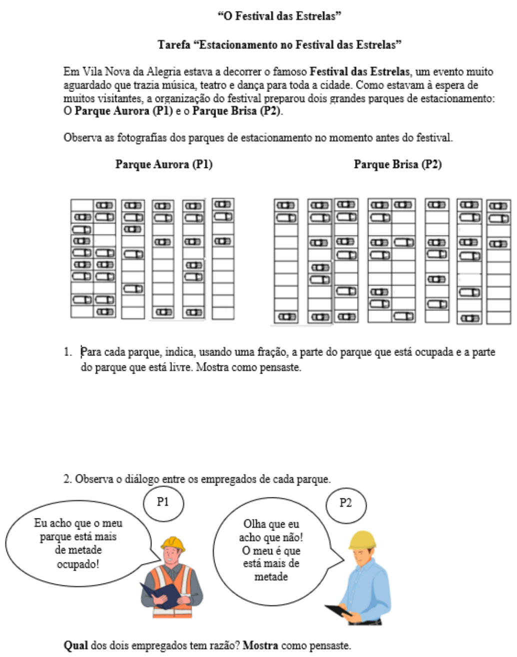
- Representações visuais, através dos desenhos das pizzas e das respetivas subdivisões, os quais serviram de apoio ao raciocínio e permitiram aos alunos visualizar a divisão equitativa das porções. As representações simbólicas também estiveram amplamente presentes, com o uso de frações como $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$ou $\frac{6}{8}$, que os alunos utilizaram para expressar de forma formal as quantidades atribuídas a cada elemento dos diferentes grupos.
- Representações verbais, quer nas explicações orais sobre os procedimentos utilizados, quer nas justificações apresentadas pelos alunos para defenderem os resultados obtidos.
- Representações contextuais, por exemplo quando os alunos referem que têm de dividir as pizas pelo número de elementos de cada grupo.

4.ª sessão - Tarefa " O Festival das Estrelas"[4]

Nesta quarta e última sessão, dinamizada no dia 4 de junho de 2025, comecei por projetar a tarefa (figura 53) numa tela branca e pedir que um dos alunos procedesse à leitura do seu enunciado em voz alta.

Figura 53

Tarefa " O Festival das Estrela



"O Festival das Estrelas"

Tarefa "Estacionamento no Festival das Estrelas"

Em Vila Nova da Alegria estava a decorrer o famoso **Festival das Estrelas**, um evento muito aguardado que trazia música, teatro e dança para toda a cidade. Como estavam à espera de muitos visitantes, a organização do festival preparou dois grandes parques de estacionamento: O **Parque Aurora (P1)** e o **Parque Brisa (P2)**.

Observa as fotografias dos parques de estacionamento no momento antes do festival.

1. Para cada parque, indica, usando uma fração, a parte do parque que está ocupada e a parte do parque que está livre. Mostra como pensaste.

2. Observa o diálogo entre os empregados de cada parque.

Qual dos dois empregados tem razão? **Mostra** como pensaste.

Em seguida, dinamizei um momento de discussão centrado no que os alunos conseguiam interpretar da tarefa que iriam realizar. Este momento de discussão inicial foi orientado através do seguinte diálogo:

Prof. Estg. - Estes retângulos grandes representam o quê?

Aluno J - Os lugares!

Aluno I - Os estacionamentos!

Prof. Estg. - E os retângulos pequenos? O que é que representam?

Aluno E - Os lugares!

---

[4] Tarefa adaptada de Ventura (2013)

Prof. Estg. - Então e porque é que uns têm carros e outros não?

Aluno A - Porque houve gente que ainda não chegou.

Prof. Estg. - Os retângulos com os carros vão representar o quê?

Aluno L - Os lugares usados.

Aluno N - Os lugares ocupados!

Prof. Estg. - E os que não têm nada?

Aluno L - Os lugares livres.

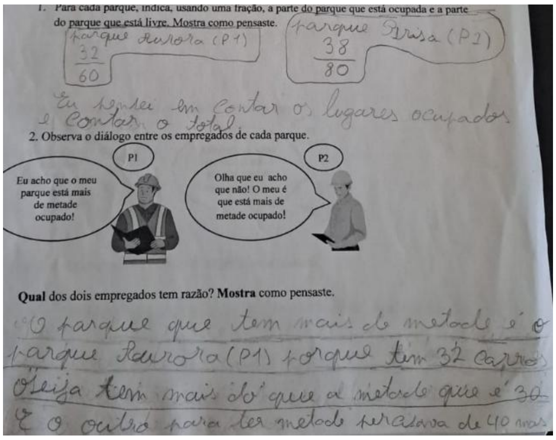
A partir do diálogo acima, é possível perceber que num primeiro momento, os alunos formulam hipóteses sobre o que os retângulos representam — alguns dizem que são "lugares", outros que são "estacionamentos". À medida que o diálogo avança, os alunos analisam as diferenças entre os retângulos com e sem carros, interpretam a ausência ou presença de elementos e constroem categorias como "lugares ocupados" e "lugares livres".

Posteriormente, pedi a um aluno que distribuísse uma cópia do enunciado da tarefa e indiquei que tinham 40 minutos para resolver autonomamente a tarefa. De forma a, posteriormente, conseguir recolher as resoluções dos alunos, pedi para os alunos registarem todas as suas respostas e a forma como resolveram e pensaram no próprio enunciado.

De seguida, irei apresentar exemplos de algumas das resoluções dos alunos (figuras 54 a 61) e proceder à sua descrição.

Figura 54

Resolução do aluno C da tarefa "O Estacionamento do Festival das Estrelas"

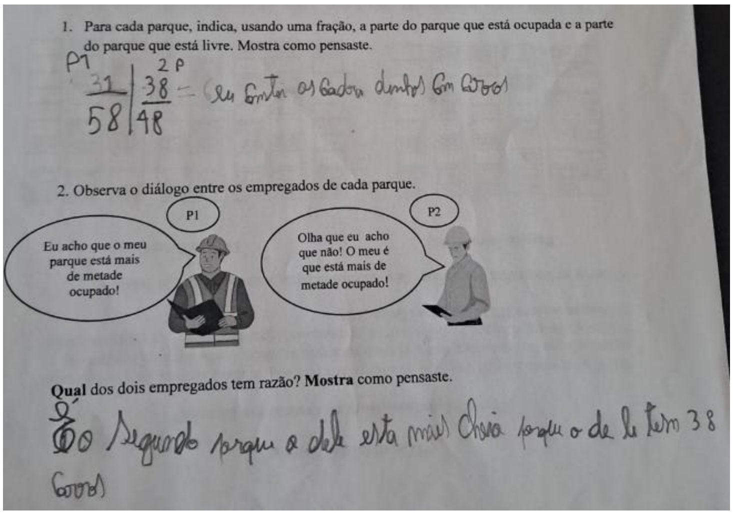


Na figura 54, é possível verificar que o aluno C, na resposta à primeira questão, apresenta o resultado correto na forma de fração relativamente aos lugares ocupados de cada parque e refere que procedeu primeiro à contagem dos lugares ocupados e depois ao total de lugares existentes em cada parque. Este procedimento revela a mobilização clara da relação parte–todo em unidades discretas, uma vez que o aluno compreende que tem de indicar os lugares ocupados/livres, ou seja uma parte, de um estacionamento, a unidade. Contudo, é possível verificar que o aluno C, apesar de utilizar representações simbólicas para representar o número de lugares, este não indicou a fração relativa ao número de lugares livres em cada parque, o que mostra uma aplicação parcial deste significado.

Como resposta à segunda questão, afirma que é o trabalhador do parque 1 que tem razão, justificando: "tem 32 carros, ou seja, tem mais do que metade que é 30. E o outro para ter metade precisava de 40 mais". Esta explicação mostra que o aluno mobiliza o conceito de metade como referência, mesmo que o argumento se apoie em números inteiros e não diretamente em frações. Ao referir que "o outro para ter metade precisava de 40 mais", evidencia que compreende a relação entre o total e a parte correspondente à metade, o que reforça novamente a mobilização da relação parte–todo, ainda que expressa de forma informal e aproximada.

Figura 55

Resolução do aluno J da tarefa "O Estacionamento do Festival das Estrelas"

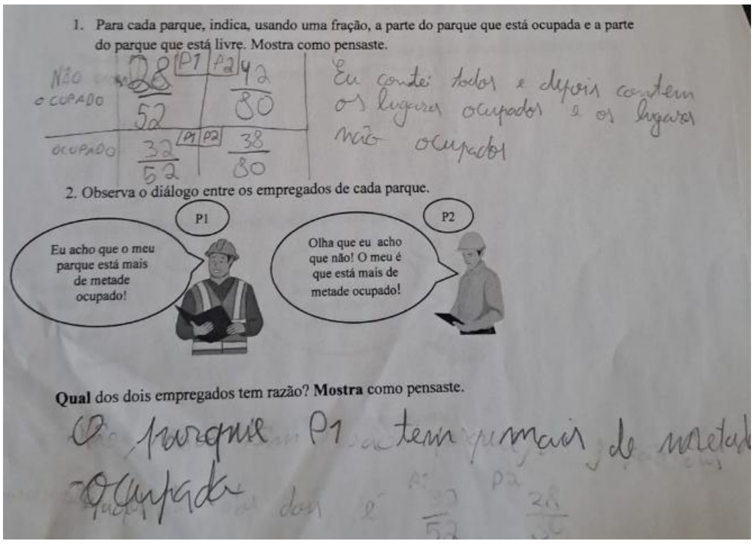


Na figura 55, é possível visualizar que o aluno J refere ter contado, usando a mesma estratégia do aluno anterior, mas, apesar de utilizar uma representação simbólica, não consegue representar uma fração correta que represente o número de lugares ocupados em cada parque, apresentando, provavelmente um engano de contagem no numerador da fração referente aos lugares ocupados do P1 e o numerador correto na fração relativa ao P2, mas errando os denominadores de ambas as frações, não sendo possível perceber como o aluno pensou para atribuir aqueles denominadores. Este aluno, também não representa o número de lugares livres em cada parque.

Como resposta à segunda questão, este aluno refere que quem tem razão é o trabalhador do parque 2, uma vez que, como tem 38 lugares ocupados e 38 é maior que 31, o parque 2 está mais cheio. Esta resposta mostra que o aluno J baseia o seu raciocínio numa comparação direta entre as quantidades absolutas, considerando apenas o número de lugares ocupados (38 e 31). Por essa mesma razão acaba por concluir que o parque 2 "está mais cheio" porque 38 é maior do que 31, sem levar em consideração o total de lugares de cada parque. Além disso, essa justificação revela ainda que o aluno apenas se limitou a realizar uma comparação numérica simples, coerente com um nível inicial de compreensão da noção de fração e de proporcionalidade.

Figura 56

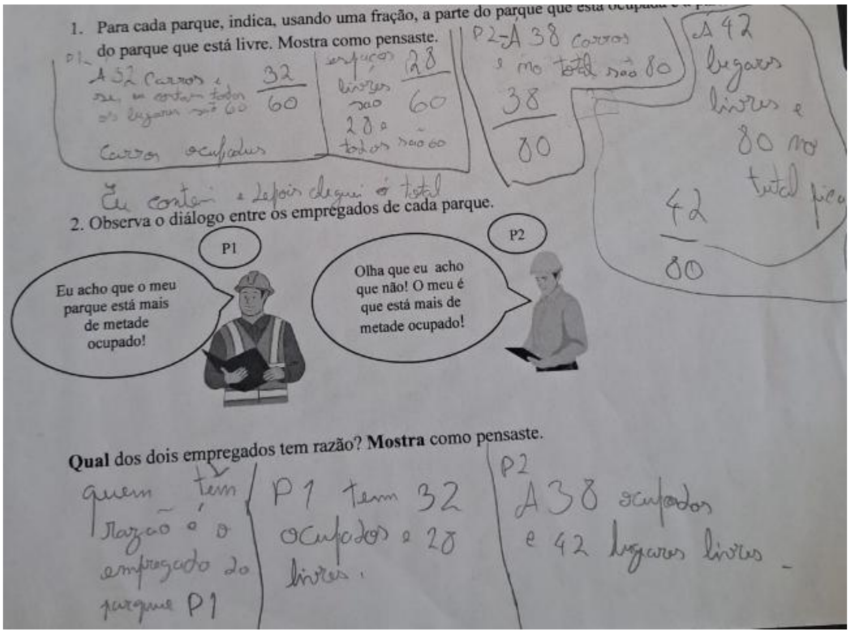
Resolução do aluno X da tarefa "O Estacionamento do Festival das Estrelas"



Na resolução da figura 56, é possível perceber que o aluno X utiliza representações simbólicas na forma de frações para representar tanto o número de lugares ocupados como o número de lugares livres, em cada parque, tal como era solicitado na primeira questão, usando uma aproximação a uma tabela de dupla entrada. Relativamente ao P1, o aluno representa corretamente os numeradores de ambas as frações (tanto para o número de lugares livres como para o número de lugares ocupados), mas erra os denominadores atribuindo 52 ao número total de lugares do parque. Este erro pode prender-se com um engano de contagem. Relativamente ao P2, este aluno apresenta corretamente frações que representam tanto o número de lugares ocupados como o número de lugares livres. Este aluno apresenta como estratégia a contagem, referindo que primeiro contou todos os lugares de cada parque e depois contou os lugares ocupados e os não ocupados. Na resposta à segunda questão, o aluno X afirma que o "parque P1 tem mais de metade ocupada", mas não mostra como pensou.

Figura 57

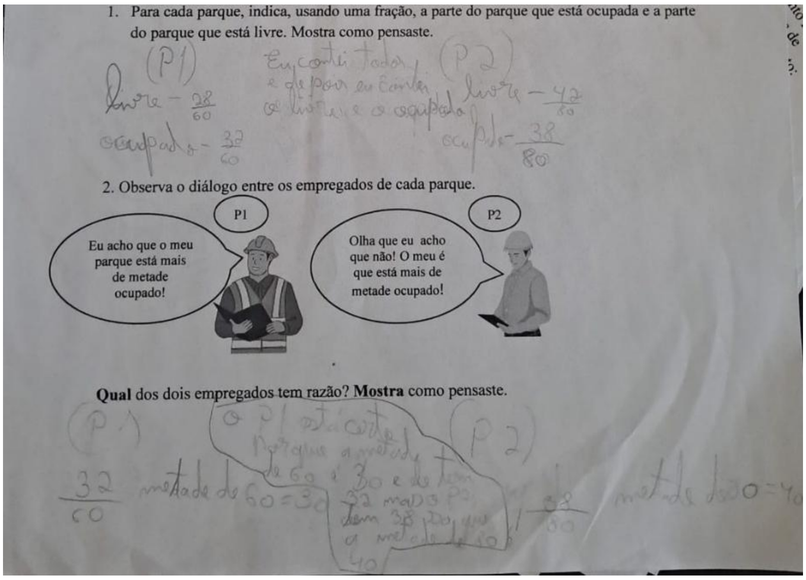
Resolução do aluno K da tarefa "O Estacionamento do Festival das Estrelas"



Na resolução do aluno K, apresentada na figura 57 é possível visualizar que o aluno usou também uma estratégia de contagem e que, á semelhança dos alunos anteriores, utiliza representações simbólicas (frações) para representar o número de lugares ocupados e o número de lugares livres, em cada parque. O aluno explica as frações, referindo tanto o número de lugares ocupados/livres como o número total de lugares, em cada parque, parecendo compreender o significado tanto do numerador como do denominador de uma fração. Por sua vez, o aluno K, como resposta à segunda questão, afirma que é o empregado do parque 1 que tem razão, uma vez que o "P1 tem 32 ocupados e 28 livres" e o "P2…38 ocupados e 42 lugares livres", não sendo claro como o aluno decidiu sobre qual o parque que tinha mais de metade ocupado, podendo deduzir-se que este aluno poderá ter considerado que se o número de lugares ocupados for maior ao número de lugares livres, isso significa que esse parque estará com mais de metade da sua ocupação.

Figura 58

Resolução do aluno N da tarefa "O Estacionamento do Festival das Estrelas"

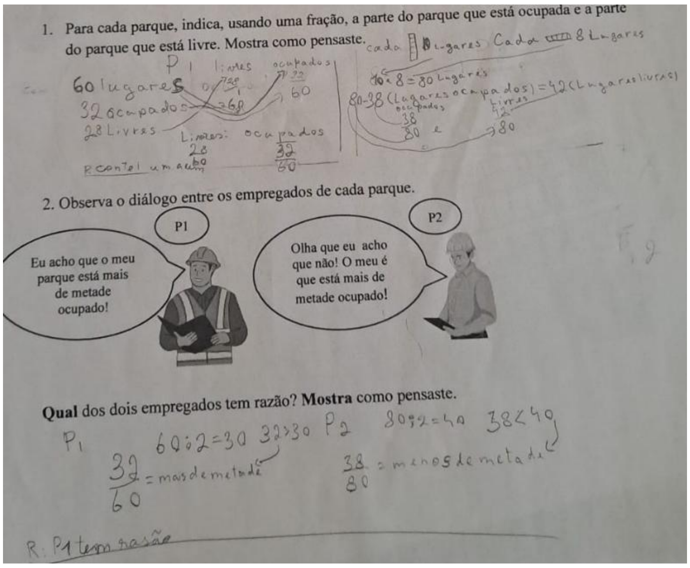


Na figura 58, é possível visualizar que o aluno utiliza as mesmas estratégias identificadas nos casos anteriores, recorrendo à representação simbólica para expressar as situações sob a forma de fração e apoiando-se na contagem direta dos lugares disponíveis e ocupados. Este procedimento evidencia novamente a mobilização da relação parte–todo em unidades discretas, uma vez que o aluno contabiliza os lugares como elementos individualizados que compõem o todo de cada parque.

Como resposta à segunda questão, o aluno afirma que é o parque 1 que está com a sua ocupação acima da metade, justificando que "metade de 60 é 30 e tem 32, mas o P2 tem 38 só que a metade de 80 é 40". Esta explicação demonstra uma compreensão clara da relação entre o todo e a parte que corresponde à metade, revelando que o aluno utiliza a referência de metade como critério comparativo. A justificação apresentada é coerente e matematicamente aceitável, mostrando que o aluno articula corretamente os valores inteiros envolvidos para determinar qual dos parques apresenta uma ocupação superior a $\frac{1}{2}$.

Figura 59

Resolução do aluno Z da tarefa "O Estacionamento do Festival das Estrelas"

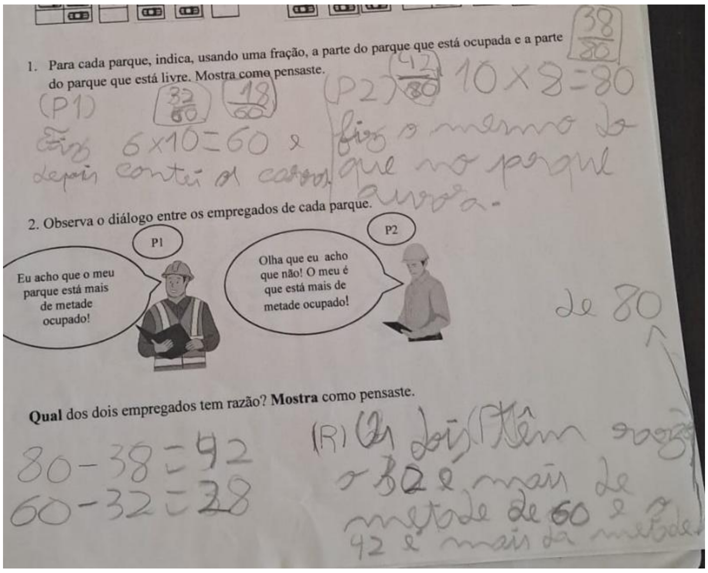


Na figura 59 é possível perceber que o aluno Z, na primeira questão, refere ter utilizado duas estratégias distintas de resolução. Num primeiro momento, menciona ter recorrido à contagem um a um dos lugares, enquanto num segundo momento apresenta a multiplicação entre o número de colunas e o número de linhas ($10 \times 8 = 80$) para determinar o número total de lugares do Parque 2. Além disso, o aluno utiliza também a subtração ($80 - 38 = 42$) para calcular o número de lugares livres, partindo do número de lugares ocupados e setas para identificar o significado dos numeradores e dos denominadores. Além disso, aluno evidencia uma mobilização clara de representações simbólicas, ao explicitar como cada parte da fração corresponde a uma quantidade específica da situação.

Na resposta à segunda questão, o aluno inicia o seu raciocínio recorrendo à divisão para determinar a metade do número total de lugares de cada parque, mobilizando assim o significado de fração como quociente, uma vez que interpreta "metade" como o resultado de dividir o todo por dois. Posteriormente, compara os lugares ocupados com a respetiva metade, utilizando os sinais de maior e menor ($32 > 30$ e $38 < 40$), concluindo corretamente que "$\frac{32}{60}$ = mais de metade" e "$\frac{38}{80}$ = menos de metade". Esta justificação mostra que o aluno consegue articular a representação simbólica das frações com o raciocínio baseado no quociente, utilizando ambos os significados de forma integrada para sustentar a sua conclusão.

Figura 60

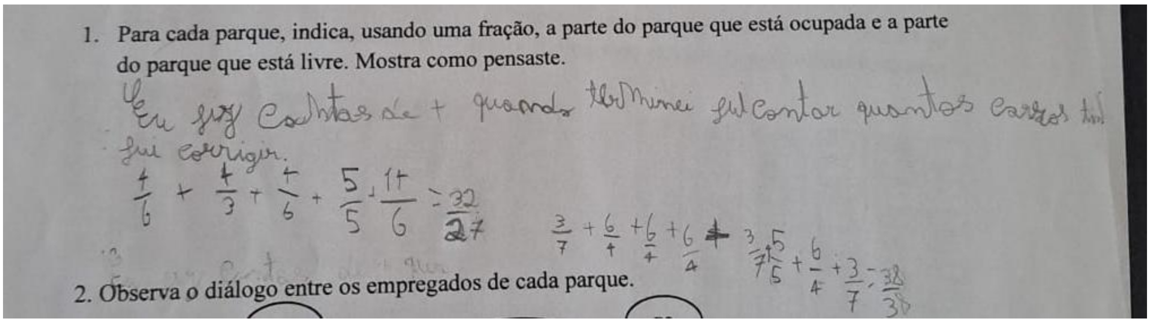
Resolução do aluno M da tarefa "O Estacionamento do Festival das Estrelas"



Na figura 60 é possível visualizar que o aluno M, na primeira questão, começa por determinar o número total de lugares através da multiplicação de colunas e linhas, referindo também que contou os carros. Além disso, utiliza representações simbólicas para ilustrar a quantidade de carros em cada uma das situações. Por sua vez, na segunda questão, apresenta subtrações para determinar o número de lugares livres a partir do número total de lugares, em cada parque, mas erra a resposta pois não usa o número de lugares ocupados no P2 (usando o número de lugares livres) para comparar com o P1, referindo incorretamente que "Os dois têm razão … o 32 é mais de metade de 60 e o 42 é mais de metade de 80".

Figura 61

Resolução do aluno E da tarefa "O Estacionamento do Festival das Estrelas"



Na figura 61 é de destacar que o aluno E, tentou resolver a primeira questão recorrendo à adição de frações. Apesar de utilizar representações simbólicas para resolver esta questão, razão pela qual as utilizou não é percetível. Por outro lado, apesar da tentativa e através do que é possível observar com a figura acima, o aluno E não conseguiu efetuar corretamente a adição de frações. De salientar que a adição e subtração de frações ainda não tinha sido ensinada pela professora titular de turma antes da intervenção pedagógica que se apresenta neste relatório.

Por fim, à semelhança das sessões anteriores, dinamizei um momento de discussão final, onde corrigi as questões presentes na tarefa e onde permiti que os alunos pudessem colocar as suas dúvidas e questões e pudessem ainda partilhar as suas estratégias, justificações e formas como pensaram para resolver a tarefa. Assim neste momento surgiram os seguintes diálogos:

Diálogo 1:

Prof. Estg. - O que é que fizeram no primeiro exercício? Vamos começar pelo P1.

Aluno L - Eu primeiro contei a parte que estava com os carros.

Prof. Estg. - E como é que contaste?

Aluno L- Eu contei um a um.

Prof. Estg. - Alguém contou de outra maneira?

Aluno T - Eu contei dois a dois.

Prof. Estg. - Então e quanto vos deu os lugares ocupados?”

Aluno L - 32!

Prof. Est. - Para além dos lugares ocupados o que é que tínhamos de saber?

Aluno T - Os lugares livres!

Prof. Estg. - E quanto eram os lugares livres?

Aluno L - 28!

Neste diálogo, observa-se que os alunos descrevem oralmente as estratégias que utilizaram para determinar o número de lugares ocupados. Por sua vez, as respostas “contei um a um” (Aluno L) e “contei dois a dois” (Aluno T) tornam explícito o pensamento matemático dos alunos e revelam diferentes formas de organizar a contagem. A contagem dos lugares do parque apoia-se na ideia de que cada lugar corresponde a uma unidade individual, o que demonstra a mobilização da relação parte–todo em unidades discretas. Os alunos identificam as partes (lugares ocupados e livres) como subconjuntos do todo, que será definido mais tarde como o total de lugares do parque.

Diálogo 2:

Prof. Estg. - Então e agora? Acabou o exercício?

Aluno L - Não! Temos de fazer frações.

Prof. Estg. - Mas que fração? Trinta e dois vinte e oitavos?

Aluno K - Não! Temos de contar os lugares todos!

Prof. Estg. - Porquê?

Aluno K - Para fazer a fração.

Prof. Estg. - Mas o total de lugares é o quê?

Aluno X - A unidade!

Prof. Estg. - Ou seja o parque inteiro. Quantos lugares tem este parque?

Aluno J - Vinte oito mais trinta e dois…sessenta!

Prof. Estg. - Alguém fez de maneira diferente?

Aluno K - Contei um a um!

Aluno M - Eu contei as colunas e as linhas e depois multipliquei.

Prof. Estg. - Qual é o número de linhas e o número de colunas?

Aluno M - Dez colunas e seis linhas… dez vezes seis…sessenta lugares.

A partir do diálogo acima, torna-se evidente que os alunos começam a transitar da simples contagem dos lugares para a compreensão da necessidade de construir frações, evidenciando assim a utilização de representações contextuais. Este tipo de representação volta a surgir quando Aluno L afirma "Temos de fazer frações", uma vez que este revela perceber que a tarefa não se limita à identificação das quantidades, mas que envolve relacionar essas quantidades com um total.

Por sua vez, ao questionar os alunos sobre o que é que o total de lugares representava, os alunos foram induzidos a identificar o todo da situação. Este entendimento constitui um claro exemplo da mobilização da relação parte–todo em unidades discretas, já que o total é construído a partir da soma de unidades individuais (lugares), previamente contadas.

Diálogo 3:

Prof. Estg. - E agora a fração para os lugares ocupados? O que é que eu ponho no numerador e no denominador?

Aluno X - Em cima os lugares ocupados e em baixo o total.

Aluno J - Trinta e dois para o numerador e sessenta para o denominador!

Prof. Estg. - E para os lugares livres?

Aluno L - Vinte e oito em cima e sessenta em baixo.

Prof. Estg. - E como é que se lê esta fração?

Aluno L - Vinte oito…sessenta avos?

Prof. Estg. - Muito bem!

Neste diálogo, observa-se um momento-chave da tarefa: a passagem da contagem dos lugares para a construção formal das frações. Quando o é feita a questão "O que é que eu ponho no numerador e no denominador?", os alunos demonstram compreender a estrutura de uma fração através de respostas como "Em cima os lugares ocupados e em baixo o total". Esta explicação constitui um exemplo claro de representação verbal, pois os alunos articulam explicitamente o significado de cada elemento da fração, transformando uma relação matemática numa descrição oral compreensível. Por outro lado, Ao afirmarem "trinta e dois para o numerador e sessenta para o denominador" e, posteriormente, "vinte e oito em cima e sessenta em baixo", os alunos mostram que conseguem relacionar corretamente as partes identificadas anteriormente (lugares ocupados e lugares livres) com o todo (total de lugares no parque). Esta correspondência direta evidencia, para além da utilização de representações verbais, a mobilização da relação parte–todo em unidades discretas, uma vez que os lugares são unidades individuais que constituem conjuntos distintos (ocupados ou livres) dentro de um todo maior (o estacionamento completo).

Diálogo 4:

Prof. Estg. - Vamos então resolver o parque 2. Quantos lugares livres são?

Aluno L - 42!

Aluno G - 41!

Prof. Estg. - Vamos confirmar!

Turma (contando um em um em conjunto com o professor) - 1,2,3,4…42!

Prof. Estg. - E o número de lugares ocupados?

Aluno L - 37!

Aluno K - 38!

Prof. Estg. - Vamos voltar a confirmar.

Turma (contando um em um em conjunto com o professor) - 1,2,3,4…38!

Prof. Estg. - Então e quantos lugares existem no total?

Aluno M- Oitenta!

Prof. Estg. - Porquê?

Aluno X - Porque 42 mais 8 é 50 e 50 mais 30 é oitenta.

Prof. Estg. - Quem é pensou de maneira diferente?

Aluno Z - 42 mais 38!

Aluno M - 10 linhas vezes 8 colunas.

A partir deste diálogo é possível constatar que os alunos procuram determinar quantos lugares livres e ocupados existem no Parque 2, existindo, porém, repostas divergentes. Depois de confirmarem as partes — 42 lugares livres e 38 ocupados — os alunos discutem o total do parque, recorrendo tanto à soma das partes como à multiplicação das linhas pelas colunas. Em ambos os casos, demonstram compreender que o total resulta da combinação de todas as partes, evidenciando a relação parte–todo, onde o todo (80 lugares) é construído a partir da soma das partes que o constituem.

Diálogo 5:

Prof. Estg.- Então, qual é a fração para os lugares livres? O que é que eu ponho no numerador?

Aluno M- 42!

Prof. Estg. - E para o denominador?

Aluno M - 80!

Prof. Estg. - E para os lugares ocupados?

Aluno L - 38 em cima 80 em baixo.

Prof. Estg. - O que é o oitenta?

Aluno X - É o parque de estacionamento todo ocupado

A partir do diálogo acima, é possível constatar que os alunos construíram as frações que representam os lugares livres e ocupados do Parque 2 através de representações verbais. Por sua vez, quando indicam "*42 em cima e 80 em baixo*" e "*38 em cima e 80 em baixo*", mostram que compreendem que a fração se forma relacionando uma parte com o total. Esta relação de parte-todo de unidades discretas, volta a ser evidenciada através da resposta "*o oitenta é o parque de estacionamento todo ocupado*", onde o denominador representa o conjunto completo de unidades (todos os lugares) e o numerador corresponde à parte considerada (livres ou ocupados).

Diálogo relativo à segunda questão:

Prof. Estg. - O que é que tínhamos de fazer primeiro?

Aluno L - Nós primeiro tínhamos de perceber qual era o parque que estava mais cheio?

Aluno M - Não! O parque não tem o mesmo tamanho! Não podemos fazer assim!

Prof. Estg. - Então o que é que temos de fazer aqui? Qual é a primeira coisa que temos de fazer?

Aluno C - Fração!

Prof. Estg. - Fração do quê?

Aluno C - Dos lugares ocupados!

Prof Estg. - E mais?

Aluno C - Saber que temos de ver qual dos parques é que está mais de metade!

Prof. Estg. - Então e como é que sabíamos isso?

Aluno C - Temos de saber qual é a metade dos lugares.

Prof. Estg. - Qual é a metade dos lugares do primeiro parque?

Aluno C - É 30!

Prof. Estg. - E do segundo parque?

Aluno C - A metade é 40!

Prof. Estg. - Então, depois de terminar a metade de cada um dos parques, conseguem-me dizer qual é que está a mais metade ocupado?

Aluno C - O parque 1!

Prof. Estg. - Porquê?

Aluno C - Porque 32 mais 32 é 64 que é mais de 60.

Aluno X - Porque 32 é mais que 30.

Prof. Estg. - Então qual é a resposta que damos a este exercício?

Aluno C - É o P1 porque o P1 um tem 32 lugares ocupados do 60.l, ou seja, tem 2 lugares a mais da metade.

No diálogo acima, é possível perceber que os alunos começam por compreender o contexto da situação — dois parques com capacidades diferentes — o que evidencia uma forte representação contextual. Essa consciência surge quando o Aluno M afirma: "O parque não tem o mesmo tamanho! Não podemos fazer assim!", mostrando que os alunos percebem que não é possível comparar apenas os números absolutos, uma vez que cada parque corresponde a um todo distinto. Por outro lado, este tipo de representação é evidenciado quando o aluno refere que têm de utilizar frações e quando refere que têm de descobrir qual é a metade dos lugares.

Além disso, neste diálogo é possível constatar que a mobilização do significado de fração como quociente, sobretudo quando os alunos recorrem à ideia de metade, interpretando-a como resultado de dividir o total de lugares por dois. Exemplos disso são as respostas "A metade é 30" e "A metade é 40", que mostram que os alunos utilizam implicitamente a operação de divisão para determinar a fração ½ de cada parque. Ao comparar os valores 32 e 38 com as respetivas metades, os alunos estão a trabalhar com o significado da fração enquanto quociente que produz um valor de referência para interpretar proporcionalmente a ocupação de cada parque.

Por sua vez, ao concluírem que "O parque 1 está mais de metade ocupado" e justificarem com expressões como "32 é mais que 30" ou "tem 2 lugares a mais da metade", os alunos articulam a relação parte–todo envolvendo unidades discretas com o raciocínio proporcional, demonstrando progressivamente maior autonomia na interpretação das frações no contexto real apresentado.

Síntese da 4.ª sessão

Assim, nesta quarta sessão, os alunos revelaram um elevado envolvimento e autonomia na realização da tarefa, demonstrando um progresso notório na compreensão do conceito de fração. É de destacar que, a maioria conseguiu identificar corretamente o numerador e o denominador, relacionando-os com a parte e o todo, e aplicando essa noção de forma adequada em situações com unidades discretas. Os alunos evidenciaram ainda uma evolução conceptual ao interpretar corretamente as frações não apenas como partes isoladas, mas como relações entre quantidades.

Por outro lado, através das discussões coletivas, foi possível constatar um maior rigor na utilização da linguagem matemática e uma crescente capacidade de justificar as suas escolhas. No entanto, persistiram algumas dificuldades na determinação do denominador – sobretudo em contextos em que o “todo” não estava imediatamente visível – e na comparação de frações. Ainda assim, a sessão evidenciou uma progressão na compreensão da relação parte-todo e uma maior flexibilidade no uso das representações fracionárias.

Tabela 10

Identificação das categorias e subcategorias de análise evidenciadas na tarefa “O Festival das Estrelas”

Categorias de análise	**Subcategorias**	**Número de vezes que surgem**
Significados de fração	Relação parte-todo envolvendo unidades discretas	6
	Relação parte-todo envolvendo unidades continuas	0
	Quociente	5
Representações	Física	0
	Verbal	6
	Visual	0
	Contextual	5
	Simbólica	6

A análise das produções dos alunos na quarta tarefa permitiu identificar de forma clara várias das categorias de análise previstas. No que diz respeito aos significados de fração, verificou-se que os alunos mobilizaram sobretudo a relação parte–todo em unidades discretas, uma vez que trabalharam com elementos individualizáveis, como os lugares ocupados e livres de cada parque. Esta contagem de unidades permitiu-lhes estruturar o raciocínio de forma organizada, distinguindo as partes que compunham o todo e reconhecendo que cada lugar correspondia a uma unidade distinta.

Para além disso, foi possível observar a mobilização do significado de fração como quociente, especialmente nos momentos em que os alunos determinaram a metade de cada parque para verificarem se a ocupação era superior ou inferior a esse valor de referência. Embora a divisão não fosse sempre explicitada, a compreensão da metade como resultado de dividir o total por dois revela que os alunos utilizavam implicitamente o significado de quociente para interpretar proporcionalmente a ocupação de cada parque.

Relativamente aos tipos de representações, destacou-se o uso frequente de representações verbais, presentes nas explicações orais dos alunos ao justificarem as suas estratégias, discutirem as diferentes formas de contagem e compararem os valores encontrados. Através da linguagem, os alunos tornaram explícito o seu raciocínio e organizaram os passos necessários para chegar à solução.

As representações simbólicas também estiveram amplamente presentes, quer na escrita das frações relativas aos lugares ocupados e livres, quer na utilização de operações numéricas para determinar totais, metades ou diferenças. A notação fracionária e o uso de valores numéricos desempenharam, assim, um papel essencial na expressão das relações parte–todo.

Por fim, as respostas dos alunos evidenciaram ainda a utilização de representações contextuais, nomeadamente na interpretação de que deveriam de utilizar frações para resolver as questões da tarefa e quais os paços que deveriam segui, como por exemplo que tinham de determinar a metade dos lugares de cada estacionamento.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente capítulo tem como principal objetivo apresentar as considerações finais deste estudo, articulando os principais resultados obtidos a partir das tarefas propostas a alunos do 3.º ano de escolaridade. Desta forna, pretendo retomar o objetivo de investigação e dar resposta às questões de investigação enumeradas previamente. Além disso, neste capítulo apresento uma reflexão sobre as potencialidades e limitações do estudo, bem como uma reflexão sobre a minha prática enquanto docente e investigador.

Assim, a presente investigação teve como objetivo compreender de que forma diferentes contextos contribuem para a compreensão do conceito de fração nos alunos do 3.º ano de escolaridade. A análise das tarefas dinamizadas em sala de aula, permitiu observar como é que os alunos mobilizam alguns significados de fração e quais as representações que utilizam e compreender as existência de diferenças consoante o contexto apresentado , tal como defendido por Monteiro e Pinto (2007).

Relativamente à primeira questão de investigação — Que significados de fração os alunos reconhecem nos diferentes contextos explorados? — verificou-se que o significado parte–todo foi o mais facilmente identificado pelos alunos, sobretudo em tarefas com unidades contínuas, como alimentos ou pizas. Nestes contextos, o reconhecimento do todo e das partes surgiu de forma mais intuitiva e consistente. Já em contextos menos explícitos, como o dos parques de estacionamento, alguns alunos demonstraram maior dificuldade em identificar a unidade e relacioná-la com as partes, apesar de, com apoio verbal, conseguirem estabilizar o significado parte–todo. O significado de fração como quociente surgiu com mais clareza na terceira tarefa, onde a própria situação de partilha favorecia naturalmente a interpretação da fração como resultado de uma divisão.

Quanto à segunda questão — Que representações os alunos usam nos diferentes contextos explorados? — observou-se que os alunos recorreram a diversas formas de representação, variando a predominância em função do contexto. As representações verbais estiveram sempre presentes e revelaram-se fundamentais na explicação dos raciocínios. As representações simbólicas surgiram sobretudo quando a tarefa exigia o registo formal das frações. As representações visuais foram amplamente utilizadas, principalmente quando o contexto favorecia o desenho do todo (pizas, figuras geométricas). Já as representações contextuais mostraram-se mais fortes em tarefas próximas da experiência quotidiana dos alunos , tal como defendido por Lesh et al. (1987) e NCTM (2017), permitindo-lhes compreender melhor o que significava dividir ou repartir. Por sua vez, as representações físicas, apenas foram aplicadas na segunda tarefa com o manuseamento dos blocos padrão para estabelecer relações matemáticas.

Após a realização deste estudo é importante ainda proceder à reflexão sobre as limitações e as potencialidades do mesmo.

Assim, as potencialidades deste estudo remetem sobretudo para a escolha de contextos diversificados, uma vez que permitiram analisar como os alunos reagem a situações distintas e como diferentes cenários influenciam a compreensão da fração. A utilização de contextos reais ou próximos do quotidiano, como a partilha de pizas ou a utilização de literatura infantil, mostraram-se particularmente eficazes para promover o significado parte–todo e o significado de fração como quociente. Além disso, a utilização de literatura infantil, como defendido por Vale e Santiago (2022), revelou-se uma estratégia eficaz para contextualizar a matemática em narrativas familiares aos alunos, permitindo-lhes compreender conceitos abstratos através de situações concretas e motivadoras.

Ainda referente às potencialidades identificadas, a integração de materiais manipuláveis, em particular os blocos padrão, permitiu aos alunos estabelecer relações entre frações, explorar decomposições de figuras e compor e decompor unidades de forma visual e concreta. O trabalho com este material contribuiu assim para uma aprendizagem mais ativa, em que os alunos puderam testar ideias, comparar representações e construir significado através da ação.

Por outro lado, os momentos de discussão, e nomeadamente as perguntas abertas que fui colocando aos alunos, permitiram observar raciocínios que dificilmente surgiriam em trabalho exclusivamente individual. Esta abordagem promoveu ainda um ambiente de colaboração e reflexão conjunta, onde os alunos desafiaram as ideias uns dos outros e aprofundaram a sua compreensão através do diálogo.

No entanto, o estudo também revelou algumas limitações, que devem ser reconhecidas e consideradas em futuras investigações, nomeadamente problemas referentes à formulação de algumas questões e à análise de algumas produções dos alunos.

Relativamente à limitação centrada na formulação de algumas questões, esta limitação surgiu em destaque na tarefa 1, onde o enunciado de uma questão revelou estar mal construído, provocando interpretações divergentes entre os alunos e dificuldades em responder a essa mesma questão. Esta limitação influenciou o número de respostas corretas à questão e consequente comprometeu a análise das respostas, uma vez que nem sempre foi possível determinar se o erro resultava da falta de compreensão do conceito de fração ou da falta de clareza da pergunta. Assim, esta limitação evidenciou que é crucial validar previamente as tarefas desenvolvidas, garantindo que a questão está bem construída e adequada à faixa etária dos alunos em questão.

Relativamente às limitações das análises das produções dos alunos, em vários casos, os registos escritos eram demasiado curtos ou pouco explícitos, especialmente quando os alunos se apoiavam principalmente em desenhos ou esquemas. Embora estes registos fossem válidos como representações visuais, nem sempre permitiam aceder de forma clara ao raciocínio subjacente. Perante esta limitação, tornou-se evidente que teria sido útil privilegiar a recolha de dados verbais, por exemplo, promovendo momentos adicionais de explicação individual ou anotando de forma mais sistemática as justificações dadas oralmente. A falta desses elementos em alguns casos dificultou a interpretação dos erros e limitou a profundidade da análise.

A realização deste estudo permitiu ainda assumir simultaneamente o papel de docente e de investigador, proporcionando uma oportunidade rica para refletir sobre as minhas decisões, a minha intervenção pedagógica e os aspetos que posso melhorar para evoluir profissionalmente. Ao longo das tarefas propostas, identifiquei que as escolhas que tomei — desde a formulação dos enunciados até às perguntas que coloco aos alunos — têm impacto direto não apenas na qualidade das aprendizagens, mas também na fiabilidade da informação recolhida enquanto investigador.

Um dos aspetos que mais se evidenciou durante este estudo foi a importância do questionamento. Ao longo do estudo, existiram momentos em que, perante erros ou respostas incompletas dos alunos, teria sido essencial questionar de forma mais clara os alunos, de modo a compreender a origem do equívoco. A ausência desse questionamento limitou tanto a minha compreensão do raciocínio dos alunos como a sua própria oportunidade de clarificar e aprofundar o pensamento. Esta constatação leva-me a reconhecer que um professor não é apenas um facilitador, mas também um mediador atento, capaz de fazer perguntas que promovam a explicitação do raciocínio, a articulação de ideias e o avanço conceptual.

A minha intervenção enquanto professor revelou ainda a necessidade de encontrar um equilíbrio mais sólido entre permitir a exploração autónoma dos alunos e oferecer apoio orientador nos momentos certos. Houve situações em que poderia ter esperado mais tempo para permitir que os alunos reconstruíssem o raciocínio por si, e outras em que uma pergunta orientadora teria sido suficiente para desbloquear ideias ou evitar frustrações desnecessárias

Por outro lado, apesar das tarefas propostas terem sido construídas com base no ensino exploratório, existiram momentos em que a minha prática não se enquadrou nas características deste tipo de ensino. Assim torna-se crucial refletir sobre as mesmas.

Um dos aspetos mais significativos diz respeito à condução das estratégias dos alunos. Em várias ocasiões, orientei os alunos para uma estratégia específica, reduzindo de forma involuntária a diversidade de procedimentos que poderiam ter emergido. Este direcionamento precoce limitou o potencial exploratório das tarefas e impediu que se desenvolvesse um leque mais alargado de estratégias que pudesse enriquecer a discussão matemática e a compreensão conceptual dos alunos.

Por outro lado, identifiquei momentos em que acabei por induzir ou fornecer respostas, comprometendo a autonomia dos alunos e reduzindo a oportunidade de construírem significados de forma independente.

Outro aspeto que merece reflexão refere-se ao facto de, perante respostas corretas dos alunos, não ter explorado ou questionado o seu raciocínio. No âmbito do ensino exploratório, é fundamental que o professor procure compreender a origem das ideias que os alunos expressam, valorizando-as e promovendo a sua partilha com o grupo. A ausência deste questionamento resultou na perda de oportunidades importantes para aceder ao pensamento dos alunos, clarificar conceções e fomentar a negociação de significados (Canavarro, 2011; Oliveira et al., 2013).

A minha intervenção revelou ainda a ausência de um momento explícito de levantamento de estratégias e ideias iniciais, tendo passado diretamente para a correção das tarefas. Este procedimento contraria a estrutura típica de uma aula exploratória, que privilegia a recolha e discussão pública das estratégias dos alunos antes da sistematização final. A inexistência desse momento reduziu a visibilidade dos raciocínios dos alunos e limitou a riqueza interpretativa da resolução coletiva (Oliveira et al., 2013).

Em síntese, os resultados obtidos ao longo deste estudo permitem concluir que a compreensão do conceito de fração pelos alunos é profundamente influenciada pelos contextos em que este é explorado, pelas representações mobilizadas e pelas práticas pedagógicas adotadas. As tarefas revelaram que os alunos tendem a mobilizar com maior facilidade o significado parte–todo e que a interpretação da fração como quociente emerge de forma mais clara em contextos de partilha. As representações verbal, visual, simbólica, contextual e física mostraram-se fundamentais para apoiar o raciocínio dos alunos, embora com predominância variável consoante a natureza das tarefas. A investigação evidenciou também um conjunto de potencialidades, nomeadamente a eficácia de contextos próximos do quotidiano, do uso de literatura infantil, de materiais manipuláveis e de momentos de discussão coletiva. Todavia, revelou igualmente limitações associadas à formulação de algumas questões e à análise de produções pouco explícitas, bem como aspetos da minha intervenção docente que se afastaram dos princípios do ensino exploratório. Esta reflexão crítica permitiu reconhecer a necessidade de ajustar práticas, melhorar o questionamento, valorizar a diversidade de estratégias e reforçar o papel mediador do professor. Assim, este estudo constituiu não apenas uma oportunidade para compreender como os alunos aprendem frações, mas também um contributo significativo para o meu desenvolvimento enquanto docente-investigador.

Referências:

Agrupamento de Escolas [redacted]. (2020). *Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas* [redacted]

Aksoy, N., & Yazlik, D. (2017). Student Errors in Fractions and Possible Causes of These Errors. *Journal of education and training studies, 5*(11), 219-233. https://doi.org/10.11114/jets.v5i11.2679

Alarcão, I. (2001). *Professor-investigador: Que sentido? Que formação?. Cadernos de Formação de Professores*, 1, 21-30. http://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/bYBeBpJDwTyw23EMBhfR3s3WujJy8MC6KbVNnqGe4PWsZKZ3sNshcj9QaXkp/alarcao01.pdf

Albarello, L., Digneffe, F., Hiernaux, J. P., Maroy, C., Ruquoy, D., & Georges, P. D. (1997). *Práticas e Métodos de Investigação em Ciências Sociais* (1.ª ed.). *Gradiva*. https://repositorioaberto.uab.pt/entities/publication/361afba0-9b17-4ad0-988b-e47e608c66a2

Almeida, M. (2011). *Insucesso na Matemática: As Percepções dos Alunos e As Percepções dos Professores*. https://repositorio.upt.pt/entities/publication/bc5e33b4-4d97-48fe-b48c-4deff06ecda2

Almeida, L., & Branco, N. (2018). Erros Cometidos Pelos Alunos De 6.º Ano A Operar Com Números Racionais. *Revista Da UI_IPSantarém*, *6*(1), 95–109. https://doi.org/10.25746/ruiips.v6.i1.16115

Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação* (2.ª ed.). Imprensa da Universidade de Coimbra. http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0879-2

Araújo, D. (2014). *As representações usadas por alunos do 2.º ano na resolução de problemas* [Master's thesis, Instituto Politécnico de Setúbal]. Repositório Comum. https://comum.rcaap.pt/entities/publication/6ce4eefc-f260-48e9-8a6e-a67a8cef5c6a

Azevedo, G.(2025). *O papel das representações matemáticas na realização de tarefas: um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade* [Master's thesis, Universidade do Porto]. Repositório aberto da Universidade do Porto. https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/168610/2/734936.pdf

Baptista, C. S. & Sousa, M. J. (2011). *Como Fazer Investigação, Dissertações, Tese e Relatórios: Segundo Bolonha* (2.ª ed.). Pactor.

Bandeira, D. (2009). *Materiais Didáticos.* (1). IESDE Brasil S:A. https://www.academia.edu/10850993/Materiais_did%C3%A1ticos

Barbosa, A., & Vale, I. (2022). As representações: Escolhas eficazes na resolução de problemas. *Educação e Matemática,* 166, 19–24.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo* (70.ª ed.). Persona. https://ia802902.us.archive.org/8/items/bardin-laurence-analise-de-conteudo/bardin-laurence-analise-de-conteudo.pdf

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos* (1 ed.). Porto Editora. https://www.academia.edu/9414081/BOGDAN_Robert_BIKLEN_Sari_Investiga%C3%A7%C3%A3o_qualitativa_em_educa%C3%A7%C3%A3o_Uma_introdu%C3%A7%C3%A3o_%C3%A0_teoria_e_as_M%C3%A9todos_pp_111_139

Botas, D., & Moreira, D. (2013) A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática – Um estudo no 1º Ciclo. *Revista Portuguesa de Educação, 26*(1), 253- 286. https://doi.org/10.21814/rpe.3259

Branco, N., Guerreiro, H. G., Brunheira, L., Canavarro, A. P., Vicente, M., Brito, S., Mestre, C., Santos, E., Jacinto, H., Almiro, J., Santos, L., Ferreira, R. T., & Espadeiro, R. G. (2025). *Capacidades matemáticas transversais no 1.º Ciclo do Ensino Básico - 3.º e 4.º anos*. Direção-Geral da Educação. https://aem.dge.mec.pt/pt/recursos/ensino-basico

Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(3), 215-232.

Bruner, J. (1999). P*ara uma teoria da Educação.* Relógio D'Água

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, pp. 11-17. https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/4265

Canavarro, A. P., Brunheira, L., Vicente, M., Brito, S. (2022). *Coletânea de tarefas - 3.º ano de escolaridade.* Direção-Geral da Educação (DGE).

https://www.dge.mec.pt/noticias/projeto-aprendizagens-essenciais-de-matematica-coletanea-de-tarefas

Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática do 3.º ano*. Direção-Geral de Educação. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Caraça, B. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Tipografia Matemática.

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da Investigação - Guia para Auto-aprendizagem* (2.ª ed.). Universidade Aberta. http://hdl.handle.net/10400.2/5963

Correia, M. (2009). *A observação participante enquanto técnica de investigação* (Repositório Comum; Vol. 13). Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Enfermagem. https://comum.rcaap.pt/entities/publication/19e55f5a-682d-4dbf-9967-3a9c7c2ac0b2

Costa, A. & Mendes, F.(2017*).* Leitura e matemática em diálogo. In AA.VV. Língua e literatura na escola do século XXI. *Atas do 12.º Encontro Nacional da Associação de Professores de Português*. APP.

Damas, S. (2023). *As histórias infantis no ensino e aprendizagem da Matemática: Perceções e práticas dos educadores e professores* (Repositório Científico do Instituto Politécnico de Santarém; p. 108). https://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/10400.15/4343/1/Vers%C3%A3o%20Final_Relat%C3%B3rio%20de%20Est%C3%A1gio_Sara%20Damas%202023_MEPE1CEB.pdf

Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. (2018). Diário da República, 1.ª série — N.º 129.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematic*s (pp. 109-122). Lawrence Erlbaum Associates Publishers

Egitpto, M. (2022). *Representações matemáticas utilizadas por alunos do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico* [Master's thesis, Instituto Politécnico de Lisboa]. Repositório do Instituto Politécnico de Lisboa. https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/15797/1/relatoriofinal_MafaldaEgipto.pdf

Francischini, R., & Fernandes, N. (2016). Os desafios da pesquisa ética com crianças. *Estudos de Psicologia*, 33(1), 61-69. https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/44476?mode=full

Gonçalves, S. P., Gonçalves, J. P., & Marques, C. G. (2021). *Manual de investigação qualitativa*. Pactor. https://static.fnac-static.com/multimedia/PT/pdf/9789896931148.pdf

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). https://www.researchgate.net/publication/269407904_Representation_in_school_mathematics_A_unifying_research_perspective

Goldin, G. A. (2018). Mathematical representations. In S. Lerman (Ed.), E*ncyclopedia of mathematics education* (pp. 409–413). Springer.

Guerreiro, H., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. *Zetetiké, 26*(2), 354-374. doi: 10.20396/zet.v26i2.865128

Graells, P. M.(2000). *Los medios didácticos y los recursos educativos.* https://s4a3aff3cebf10ee6.jimcontent.com/download/version/1523323461/module/8600186576/name/LOS%20MEDIOS%20DID%C3%81CTICOS%20Y%20LOS%20RECURSOS%20EDUCATIVOS.pdf

Heitor, B. P. (2018). *A utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem de números racionais representados na forma de fração* [Master's thesis, Instituto Politécnico de Lisboa] Repositório Científico. http://hdl.handle.net/10400.21/9592

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: the acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Hole, V. (1977). *Como ensinar matemática no básico e no secundário: através de um planeamento e apreciação adequados*. Livros Horizonte.

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 9(1), 1-21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Mansutti, M. A. (1993). Conceção e produção de materiais instrucionais em educação matemática. *Revista de Educação Matemática*, 1,1, 17-30. Sociedade Brasileira de Educação Matemática https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/352/349

Marston, J. (2010). *Developing a Framework for the Selection of Picture Books to Promote Early Mathematical Development.* https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED520914.pdf

Marques, T.I.N. (2013). *A implementação de materiais pedagógicos no 1.º Ciclo.* [Master's thesis, Escola Superior de Educação João de Deus]. Repositórios Científicos de Acesso Aberto de Portugal. https://comum.rcaap.pt/entities/publication/35576084-3446-49b6-a850-f3c3065f083c

Mata. (2012). *O Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico* [Dissertação de Mestrado]. Universidade dos Açores. https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/1668

Meireles, S., A., A., F. (2015). *Uma abordagem aos numerais mistos com recurso aos Blocos Padrão: Um Estudo de Caso com alunos do 5º ano de escolaridade*. [Master thesis, Politécnico do Porto]. Repositório do Politécnico do Porto. https://recipp.ipp.pt/entities/publication/be142595-985f-4308-8f92-f24861aad3bb

Menezes, L. (2011). *Matemática, Literatura & Aulas*. https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/1032

Meros, T., R., A. (2021). A importância da utilização de materiais didáticos diversificados nas aulas de PLA (Português como Língua de Acolhimento). [Dissertação, Faculdade de Letras da Universidade do Porto]. Repositório Aberto da Universidade do Porto. https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/137060/3/509520.pdf

Monteiro, C. & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional* (1.ª ed.). Associação de Professores de Matemática.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89–107. https://doi.org/10.48489/quadrante.22785

Moraes, J. T. & Felipe, J. (2022). "Eu não gosto dessa história de mentiras!": Sigilo, anonimato e ética na pesquisa com crianças. *Revista Portuguesa de Educação*, 35(1), 226-241. http://doi.org/10.21814/rpe.20909

Morais, C., Cerca, R., Quaresma, M., Ponte, J. P. (2014). Os números racionais no 2.º ano: Um estudo diagnóstico. https://www.apm.pt/files/files/SIEM/2014/ataspdf/_P5_53435f9479c60.pdf

Mónico, L., Alferes, V. R., Castro, P. A., & Parreira, P. M. (2017). A Observação Participante enquanto metodologia de investigação qualitativa. *Investigação qualitativa em ciências sociais,* 3(1), 972-978. https://www.researchgate.net/profile/Lisete-Monico/publication/318702823_A_Observacao_Participante_enquanto_metodologia_de_investigacao_qualitativa/links/5978963645851570a1b979f6/A-Observacao-Participante-enquanto-metodologia-de-investigacao-qualitativa.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17719/Principles%20and%20Standards%20for%20School%20Mathematics.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática.* APM.

Neves, D., S., S. (2024). *A utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem das frações no 3.º ano de escolaridade.* [Master thesis, Insituto Politécnico de Setúbal]. Repositório Comum. https://comum.rcaap.pt/entities/publication/2246b349-7897-4186-9cd8-d90b0e73833b

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22*(2), 29–54. https://doi.org/10.48489/quadrante.22895

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). *Percent: A privileged proportion*. Review of Educational Research, 65(4), 421-481. https://www.jstor.org/stable/1170703?read-now=1&seq=3#page_scan_tab_contents

Pereira, A., R., R. (2019). *Prática de ensino supervisionada - A exploração de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem.* [Master thesis, Institutio Politécnico de Bragança]. Biblioteca Digital do Instituto Politécnico de Bragança. https://bibliotecadigital.ipb.pt/entities/publication/1b44ccc4-4dda-44cc-93fc-1c89827c5b8e

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(4), 153-180. https://doi.org/10.30827/pna.v2i4.6196

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). APM

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13(2), 51-74. https://doi.org/10.48489/quadrante.22780

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8*(1), 39-48.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. https://primo.lib.umn.edu/discovery/openurl?institution=01UMN_INST&vid=01UMN_INST:TWINCITIES&ctx_enc=info:ofi%2FencUTF-8&rft_val_fmt=info:ofi%2Fkev:fmt:book&rft.pub=Lawrence%20Erlbaum%20Associates&ctx_tim=2025-02-07T21:08:34CST&rft.place=Hillsdale,%20NJ&

Quaresma, M., & Ponte, J. P. da. (2012). Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: o caso de Leonor. *Revista Interacções*, *8*(20). https://doi.org/10.25755/int.485

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (1995). *Manual de investigação em ciências sociais* (2.ª ed.). Gravida. https://tecnologiamidiaeinteracao.files.wordpress.com/2018/09/quivy-manual-investigacao-novo.pdf

Ribeiro, M., C. (2018). *Materiais manipuláveis não estruturados, como recurso pedagógico, em contexto de Educação Pré-Escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico.* [Master thesis, Instituto Politécnico de Bragança]. Biblioteca Digital do Instituto Politécnico de Bragança. https://bibliotecadigital.ipb.pt/server/api/core/bitstreams/1c00f448-8e93-489c-a26c-a790f4b17707/content

Reys, R. (1971). Considerations for Teaching using manipulative materials. In S. SMITH E. C. BADEMAN (eds), *Teacher-made aids for elementary school mathematics*. https://www.mathteachers.ab.ca/wp-content/uploads/2020/05/Monograph-No.-1-July-1973-5-14-Considerations-for-teachers-using-manipulative-materials.pdf

Rodi, S. (2018). *Frações na Cozinha*. (1.ª ed.). Texto Editores.

Santos, M. (1994). *A observação científica* (Repositório Aberto da Universidade do Porto). https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/54055

Silva, P., A., P. (2012). *Segredos & Enredos: da palavra à ficção - A importância da Literatura Infantil no desenvolvimento da imaginação da crianç*a. [Master thesis, Instituto Politécnico de Coimbra]. Repositório Comum. https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/11365/1/PATRICIA_SILVA.pdf

Silva, D. (2015). *Técnicas de Recolha de Informações.* [Sebenta]. ESTEC. https://www.academia.edu/12584789/T%C3%A9cnicas_de_recolha_de_informacoes

Silva, M. I. L. (2013). Prática educativa, teoria e investigação. *Revista Interacções*, 9(27). https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/3412

Silva, V., M., A. (1984). *Teoria da Literatura* (6.ª ed.). Almedina.

Silveira, D; Novello, T & Laurino, D (2011). O uso de materiais concretos no ensino da matemática nas primeiras etapas de escolarização. *Revista Jr de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia*, v.2, n.2, p. 19-22 http://c3.furg.br/arquivos/download/silveira_novello_laurino.pdf

Vale, V., & Santiago, A. (2022). A escola em transformação: Formação e prática docente. Instituto Politécnico de Coimbra, Escola Superior de Educação de Coimbra. https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/47338

Vale, I. (2002). Materiais Manipuláveis. Departamento de Matemática, Ciências e Tecnologia. https://www.academia.edu/6307061/Materiais_Manipul%C3%A1veis

Vale, I. (2012). Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In APM (Eds.), Actas do ProfMat 99, (pp.111-120). APM~. https://www.academia.edu/1493722/Materiais_manipul%C3%A1veis_na_sala_de_aula_o_que_se_diz_o_que_se_faz

Velez, I. (2020). Tarefas na sala de aula: prática letiva de professores do 3.º ano com representações matemáticas. [Master's thesis, Instituto de Educação]. Repositório científico da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/42865.

Veloso, G. (2017). O modelo retangular na compreensão de algoritmos operatórios com números racionais representados em fração. Educação e Matemática, 143, 5 – 9. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2433

Ventura, H. M. G. L. (2013). A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2.º ciclo do ensino básico. [Master's thesis, Universidade de Lisboa]. Repositório de Lisboa. https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/10661/1/ulsd067673_td_Helia_Ventura.pdf

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures An Investigation of Children's Mathematical Drawings. Roles of Representation in School Mathematics. 2001 Yearbook. (pp. 215-227). National Council of Teachers of Mathematics

Zabalza, A. (1998). A Prática Educativa: Como ensinar. (1.ª ed.). Artmed. https://www.ifmg.edu.br/ribeiraodasneves/noticias/vem-ai-o-iii-ifmg-debate/zabala-a-pratica-educativa.pdf

ANEXOS

Anexo A: Autorização para a participação e recolha de dados.

Exmo./Exma. Sr./Sra.
Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, enquanto professor estagiário, pretendo desenvolver atividades pedagógicas que explorem a relação entre a aprendizagem das frações e a utilização de livros infantis na matemática.

O desenvolvimento destas atividades implica a recolha e análise das produções escritas dos alunos, bem como a observação das suas ações durante a realização das mesmas. Assim, para melhor compreender os processos de aprendizagem, necessito de proceder à recolha de dados através da recolha das suas produções e de gravações de áudio.

Deste modo, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder à recolha das produções escritas e ao registo em suporte áudio das atividades realizadas em sala de aula pelo(a) seu(sua) educando(a).
Esta recolha de dados servirá exclusivamente para fins académicos. Comprometo-me a não divulgar quaisquer informações que possam identificar os participantes, garantindo o anonimato tanto da escola como dos alunos. O único objetivo é obter dados que me ajudem a aprimorar a minha prática pedagógica. Importa referir que a participação no projeto não terá qualquer impacto na avaliação escolar do(a) aluno(a). Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todos os dados recolhidos após a conclusão do projeto de investigação.

Agradeço a sua colaboração e disponibilidade.
23 de abril de 2025
O estagiário,

____
(Alexandre Oliveira)

Eu, _________________, Encarregado(a) de Educação de _________________, autorizo a participação do(a) meu(minha) educando(a) no projeto de investigação acima descrito, incluindo a recolha e o tratamento dos dados conforme as condições apresentadas.
Encarregado de Educação,

____

Anexo B: Tarefa Exploração do Livro “Frações na Cozinha”

	Propostas de trabalho e atividade esperada	Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las	Questões a colocar para apoiar as aprendizagens	Organização dos alunos
Apresentação (20 min.)	Apresentação Contextualizada: • Leitura, em voz alta, por parte do professor do livro "Frações na cozinha"- 10 minutos • Apresentação da tarefa explicando o contexto: "Análise do Livro"- 10 minutos • Leitura do enunciado e das perguntas da tarefa com a turma. • Esclarecimento de dúvidas sobre o que é solicitado através do questionamento sobre o entendimento dos alunos do que é solicitado. • Tarefa adaptada de Rodi, S. (2018). *Frações na Cozinha*. (1.ª ed.). Texto. A tarefa "Análise do livro" desafia os alunos a recordarem o conceito de fração e como é que a devem representar. Inicialmente realizar-se-á a leitura em voz alta do livro por parte do professor, com o objetivo de dar a conhecer a história do mesmo aos alunos. De seguida, os alunos terão de responder a algumas questões presentes na tarefa "Análise do livro" relacionando a sua resolução com o que foram ouvindo durante o momento de leitura. • Assim com esta tarefa o professor conseguirá perceber o que os alunos se recordam sobre as frações e se conseguem reconhecer os conceitos matemáticos abordados no livro.		– Explica, por palavras tuas, o que é pedido nesta questão. – O que se quer saber com esta questão?	Grande grupo

	A tarefa será projetada para facilitar a visualização, o acompanhamento e a interpretação do que é solicitado. • Será distribuído por aluno o enunciado da tarefa (**Anexo A**) Orientações de Trabalho: • O trabalho será realizado em grupos de 4 ou 5 elementos e os alunos devem registar por escrito como pensaram. • Definir 1 hora para o trabalho autónomo. • Enfatizar que, no final, um elemento de cada grupo será chamado para apresentar as suas respostas e resoluções.			
Exploração (60 min.)	Os alunos discutem e resolvem a tarefa: “Análise do livro” **1.** Qual é a temática principal deste livro? **2.** Quando regressou à cozinha, o João percebeu que já não tinha a quantidade certa de cada ingrediente para fazer o bolo perfeito. **2.1.** Completa a lista de ingredientes, tendo em conta as porções, mencionadas ao longo do livro, com que ficou o João. ____ do pacote farinha ____ da barra de chocolate ____ da caixa de 6 ovos ____ dos gomos da laranja.			Par

3. Oh não! Quando o João voltou à cozinha o pacote da farinha estava **a meio**.

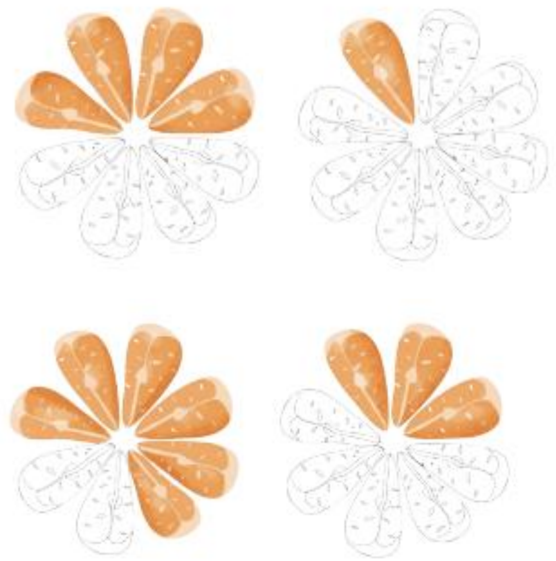
3.1. Qual é a **fração** que representa a farinha que ainda está no pacote?

3.2. E só tivesse sido **gasto um quarto** do pacote de farinha? **Desenha** como ficaria o pacote de farinha e **indica** a fração que representaria a quantidade de farinha que ainda estaria no pacote.

4. Do chocolate apenas sobrou **metade da metade**. Afinal, que parte do chocolate desapareceu? **Completa** a tabela para descobrires.

	Número de partes	Fração
Chocolate inteiro	4	$\frac{4}{4}$
Metade do chocolate		
A quarta parte do chocolate		

Chocolate que desapareceu **5.** A laranja que o João usou tinha 10 gomos. **5.1.** Faz um desenho que ilustre cada uma das seguintes frações. $\frac{5}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{12}{10}$ **5.2.** Imagina que a laranja do João tinha apenas 8 gomos. Associa a parte pintada de cada laranja a uma fração.			



$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{6}{8}$

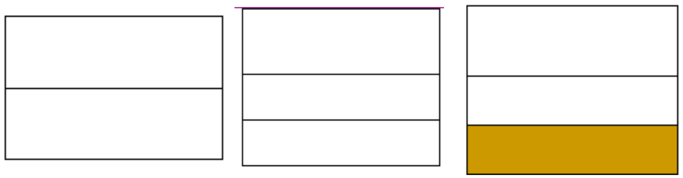
6. A mãe do João encomendou uma piza que foi repartida igualmente por ela, pelo João, pela Gata Certinha e pelo Cão Trapalhão.

6.1. Qual a fração que representa o número de fatias que cada um comeu?________

6.2. Se a piza estivesse dividida em 8 partes, quantas fatias podia comer cada um, se comessem a mesma quantidade? Explica como pensaste.

	7. No final do livro encontra-se a receita de matemática: $\frac{1}{10}$ **de curiosidade** $\frac{2}{10}$ **de entendimento** $\frac{3}{10}$ **de treino** $\frac{3}{10}$ **de motivação** **7.1.** A porção que falta é de diversão. Escreve a fração que corresponde à porção que falta na receita da matemática.			
	<u>Antecipação de estratégias de resolução da tarefa</u> Questão 1 : “Qual é a temática principal deste livro?” • Prevê-se que os alunos respondam que o tema principal deste livro é o uso das frações na cozinha.	Dificuldades em interpretar a temática do livro. Ação: incentivar os alunos a estarem atentos à leitura do livro e para o título do mesmo.	Quem me consegue fazer um resumo deste livro? O que é que aconteceu? Como é que foram representadas as porções de	

	Questão 2.1- “Completa a lista de ingredientes, tendo em conta as porções, mencionadas ao longo do livro, com que ficou o João.” • Prevê-se que os alunos respondam da seguinte forma: $\frac{1}{2}$ do pacote farinha $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate $\frac{4}{6}$ da caixa de 6 ovos $\frac{5}{10}$ dos gomos da laranja.	Dificuldade em recordar as frações mencionadas ao longo do livro. Ação: incentivar os alunos a recordar as palavras-chave mencionadas ao longo do momento da leitura e das ilustrações. Dificuldade em saber representar a	ingredientes que sobraram? Quando é que usamos as frações? Como ficou o pacote de farinha? Como é que representamos essa porção?	

	Questão 3 – “Oh não! Quando o João voltou à cozinha o pacote da farinha estava **a meio**.” Questão 3.1. – “ E só tivesse sido **gasto um quarto** do pacote de farinha? **Desenha** como ficaria o pacote de farinha e **indica** a fração que representaria a quantidade de farinha que ainda estaria no pacote.”  • Prevê-se que os alunos escrevam a fração $\frac{1}{4}$; • Prevê-se que os alunos representem das seguintes formas: ▪ Dividindo o pacote em quatro porções iguais e pintando uma delas:  ▪ Após perceber que um quarto é metade da metade, o aluno pode perceber que pode dividir o pacote a meio, dividir uma das metades a meio e pintar uma das porções:  ▪ O aluno pode considerar ¼ da parte que restou, ou seja ¼ de ½	fração neste contexto. Ação: incentivar os alunos a recordarem-se do que aconteceu com a barra de chocolate (ficou com metade da metade) Dificuldades em representar	E a barra de chocolate/ caixa de ovos? Quantos gomos de laranja sobraram? Como é que representamos esses gomos na forma de uma fração? Como é que vão representar um quarto do pacote de farinha? O que aconteceu com a barra de chocolate?	

Questão 4 – "Do chocolate apenas sobrou **metade da metade**. Afinal, que parte do chocolate desapareceu? **Completa** a tabela para descobrires."

- Possível resposta dos alunos

	Número de partes	**Fração**
Chocolate inteiro	4	$\frac{4}{4}$
Metade do chocolate	2	$\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$
A quarta parte do chocolate	1	$\frac{1}{4}$
Chocolate que desapareceu	3	$\frac{3}{4}$

corretamente as frações.

Ação: relembrar que as frações representam uma divisão e que o numerador representa o número de partes que estão a ser consideradas. E que o denominador representa o número de partes em que a unidade foi dividida.

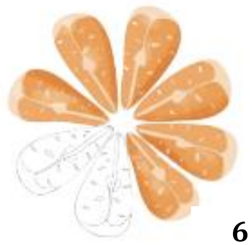
Dificuldade em perceber que a metade do chocolate são dois barras do chocolate

O chocolate estava dividido em quantas partes?

Se quisermos metade do chocolate quantas partes teríamos?

		e que podem ser representadas por $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$. Ação: desenhar a barra de chocolate e representar cada uma das frações. Dificuldade em perceber que $\frac{5}{10}$ e $\frac{1}{2}$ correspondem à mesma quantidade de gomos.	E se for a quarta parte do chocolate? Como determinavas quanto chocolate desapareceu?	

Questão 5- “A laranja que o João usou tinha 10 gomos.” Questão 5.1. –“Faz um desenho que ilustre cada uma das seguintes frações.” $\frac{5}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{12}{10}$ 	Ação: incentivar os alunos a determinar a metade dos 10 gomos. Dificuldade em perceber que a fração $\frac{12}{10}$ corresponde a mais que a unidade. Ação: relembrar que o denominador que o numerador representa o número de partes que estão a ser consideradas. E que o denominador representa o número de partes	Quantos gomos têm de desenhar em cada uma das situações? A metade dos 10 gomos corresponde a quantos gomos?	

Questão 5.2. –"Imagina que a laranja do João tinha apenas 8 gomos. Associa a parte pintada de cada laranja a uma fração." • Possível resolução dos alunos:  $\frac{1}{2}$  $\frac{1}{8}$  $\frac{6}{8}$  $\frac{3}{8}$	em que a unidade foi dividida. Dificuldade em associar corretamente a fração ao número de gomos pintado. Ação: Relembrar que o numerador representa o número de partes que estão a ser consideradas. E que o denominador representa o número de partes em que a unidade foi dividida. Dificuldade em recordar por	Que numero deve estar no numerador? Que número deve estar no denominador?	

Questão 6. –"A mãe do João encomendou uma pizza que foi repartida igualmente por ela, pelo João, pela Gata Certinha e pelo Cão Trapalhão." Questão 6.1. –" Qual a fração que representa o número de fatias que cada um comeu?" • Possível resolução dos alunos: $\frac{1}{4}$ Questão 6.2. –"Se a pizza estivesse dividida em 8 partes, quantas fatias podia comer cada um, se comessem a mesma porção? Explica como pensaste." • Possível resposta dos alunos: Os alunos podem perceber que se a pizza for dividida no dobro das fatias então cada um poderá comer o dobro das fatias de piza, logo $\frac{2}{8}$ da piza	quantas pessoas foi dividida a piza. Ação: incentivar os alunos a recordar as personagens mencionadas quando a piza foi encomendada. Dificuldade em perceber a relação do dobro neste contexto. Ação: Demonstrar a relação de forma separada e/ou utilizar desenhos para ilustrar a relação.	A piza foi dividida por quantas pessoas? A mãe do João encomendou a pizza para quem?	

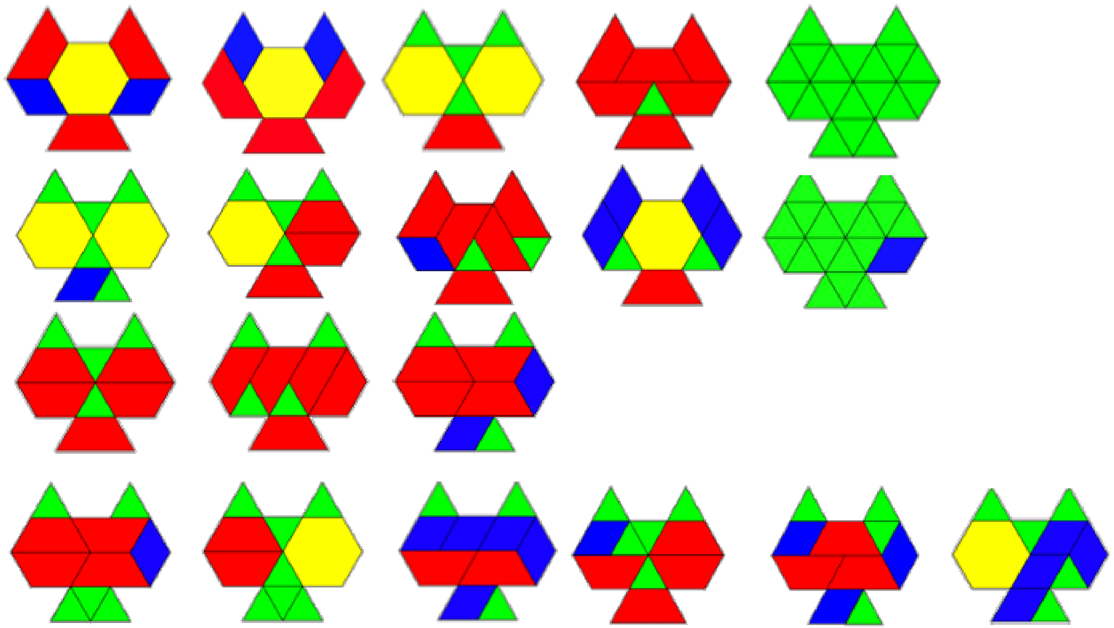
	Questão 7.1. – “Calcula a fração que corresponde à que falta na receita da matemática.” • Possível resolução dos alunos: Os alunos podem adicionar todos os numeradores: $1 + 2 + 3 + 3 = 9$ Os alunos podem perceber que a matemática está dividida em 10 partes iguais logo a diversão corresponde a um décimo: $10 - 9 = 1$ Resposta: $\frac{1}{10}$		Se o número de fatias aumenta, o que é que acontece ao número de fatias que cada um irá comer, para manter a mesma porção de fatias?	
Discussão (30 min.)	<u>Propostas de trabalho e atividade esperada:</u> • Selecionar um elemento de cada grupo para discutir e valorizar as tentativas: ○ Solicitar que os alunos expliquem como chegaram aos resultados. ○ Incentivar os alunos a justificarem as suas respostas. ○ Fomentar a discussão entre os colegas sobre diferentes estratégias e processos de raciocínio, procurando que estabeleçam conexões entre as diferentes estratégias apresentadas, e que argumentam relativamente àquela que consideram mais eficaz.			
Sistematização (10 min.)	• Questionar os alunos sobre o que estivemos a fazer nesta aula. • Consolidar os conceitos trabalhados nesta aula: ○ Fração: forma de representar em matemática uma porção ou a quantidade que foi dividida em partes iguais ○ Como representar uma fração- na forma de uma divisão onde o numerador representa o número de partes que estão a ser consideradas e o denominador representa o número de partes em que a unidade foi dividida. ○ Relacionar uma fração com a quantidade de alguma coisa: a metade ($\frac{1}{2}$), a metade da metade/ a quarta parte ($\frac{1}{4}$) **Guião de Perguntas para orientar a reflexão em grupo:** • O que é que aprenderam com a discussão da tarefa em grande grupo?			

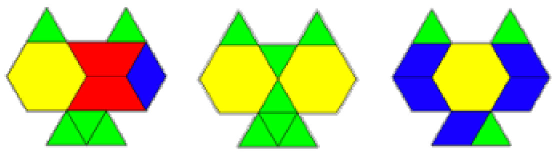
	• Houve alguma estratégia ou ideia apresentada por um colega que vos ajudou a esclarecer dúvidas ou a perceber melhor a tarefa? Qual?			

Anexo C: Tarefa "O Gato da Joana"

	Propostas de trabalho e atividade esperada	Questões a colocar para apoiar as aprendizagens	Organização dos alunos
1º momento (20 min.)	Apresentação Contextualizada: • O professor irá introduzir a tarefa apresentando o seguinte contexto: – “A Joana gosta de construir figuras diferentes recorrendo a blocos padrão. Esta semana decidiu construir o maior número de figuras com o formato de um gato.” • O professor irá projetar a silhueta do gato (Anexo A) e de seguida deve: 1. Explicar que as construções da Joana tem o mesmo formato que o da silhueta projetada no quadro branco. 2. Pedir aos alunos que tentei construir a figura do gato da Joana a partir da visualização da projeção. 3. Disponibilizar uma cópia, por grupo, da silhueta do gato (Anexo A) 4. Pedir que construam, recorrendo aos blocos padrão e à copia da silhueta do gato (Anexo A), o gato da Joana. 5. Pedir que, contornando as peças que usaram, representem a figura que construíram na folha com a silhueta do gato. 6. Perguntar aos alunos “Quantas figuras diferentes do gato conseguem construir?” 7. Disponibilizar várias cópias da silhueta do gato (Anexo A) 8. Pedir que os alunos, em grupo, construam o maior número de figuras diferentes	– Quantas figuras diferentes conseguem construir? – Se quisermos usar mais uma peça o que é que têm de fazer? – Será que é possível construir a mesma figura de outra maneira?	Grande grupo

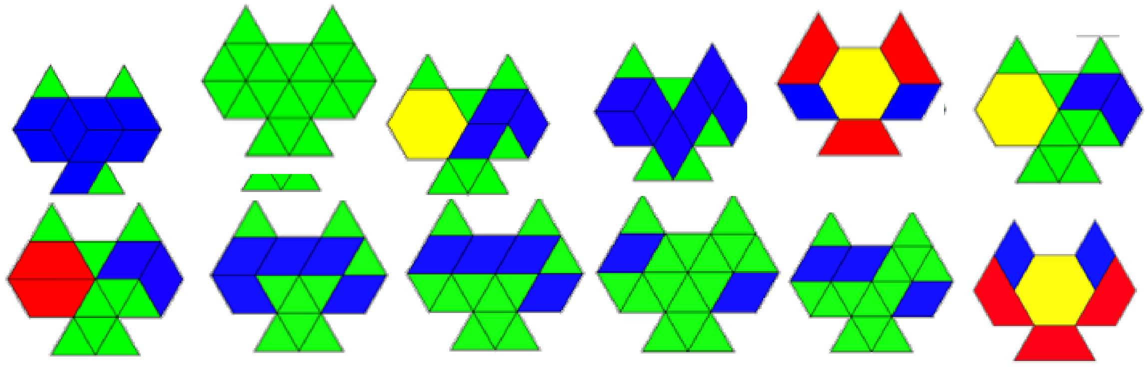
	9. Pedir que, contornando as peças que usaram, representem a figura que construíram na folha com a silhueta do gato.		
2.º momento (30 min)	Trabalho autónomo dos alunos: • O professor irá lançar um novo desafio através das seguintes questões: 1. "Será que já construíste a figura com o menor número de peças possível? Como podes saber?" 2. "Será que já construíste a figura com o maior número de peças possível? Como podes saber?" Ao longo desta etapa o professor deve indicar que os grupos devem continuar a representar as construções na folha com a silhueta do gato da Joana.	Quantas peças utilizaste? Será que podes substituir essa peça por outra de forma a usares menos/mais peças? Por qual? E que quantidade? Por onde podes começar a construir a figura? Que peças podes escolher para começar a construir a figura? O que mudou da tua primeira construção para esta nova? Quantas peças usaste nesta construção?	Grupos de 4 elementos
3º momento (40 min.)	Discussão coletiva dos momentos anteriores: – O professor deve selecionar um ou dois grupos, com resoluções diferentes para cada um dos momentos e pedir que partilhem as suas construções com os restantes grupos. Para tal, o	Quantas peças usaram nesta construção?	Grupos

professor deve projetar no quadro fotografia de cada resolução ou recorrendo à plataforma "Math play ground". <u>Possíveis representações:</u> 1.º momento: 	Será possível utilizar mais/menos peças? O que podemos fazer para aumentar/diminuir o número de peças? Qual é a peça mais pequena que temos? Quantas peças usaste nessa figura? Será que não consegues usar mais peças? Se trocássemos peças grandes por várias pequenas, quantas mais peças teríamos? Será que há uma maneira de cobrir a figura usando ainda menos blocos? Qual peça poderia substituir várias pequenas de uma vez só?	Grande Grupo



2.º momento:

Maior número de peças: 19 peças   Menor número de peças: 6 peças



- O professor deve criar um momento de discussão através da seguinte questão:
  - “Que relações conseguem descobrir entre as peças que usaram?”

Se os alunos tiverem dificuldades:

  - O que fizeram quando procuraram construir a figura com o maior/menor n.º de peças?
  - Como substituíram as peças e porquê?

Quantos triângulos usaste para cobrir completamente o hexágono?

Seis triângulos cobrem o hexágono. Cada triângulo representa que parte do todo?

	○ Identificaram relações entre as peças... umas maiores do que outras, umas que são quantas vezes maiores/menores do que outras?... Através deste momento de discussão espera-se que os alunos identifiquem as seguintes relações: ○ 6 triângulos formam 1 hexágono; ○ 3 triângulos formam 1 trapézio; ○ 2 triângulos formam 1 losango ○ 2 trapézios formam um hexágono ○ 3 losangos formam um hexágono Espera-se ainda que os alunos interliguem as relações entre as peças com as frações: ○ Um triângulo é um sexto do hexágono; ○ Um triângulo é um terço do trapézio; ○ Um triângulo é metade de um losango ○ Um trapézio é metade do hexágono ou preenche 3 terços do hexágono; ○ Um losango é um terço do hexágono ○ Um losango preenche dois terços do trapézio ○ Um losango preenche dois sextos do hexágono ○ Dois losangos preenchem 4 sextos do hexágono		
Siste matiz	• Questionar os alunos sobre o que estivemos a fazer nesta aula. • Consolidar as relações existentes entre peças.		

Anexo D: Tarefa “O Almoço da Turma do João”

	Propostas de trabalho e atividade esperada	Questões a colocar para apoiar as aprendizagens	Organização dos alunos
Apresentação (10 min.)	Apresentação Contextualizada: • Revisão do livro “Frações na Cozinha” • Apresentação da tarefa explicando o contexto: “**O almoço da turma do João**! “ • Leitura do enunciado e das perguntas da tarefa com a turma. • Esclarecimento de dúvidas sobre o que é solicitado através do questionamento sobre o entendimento dos alunos do que é solicitado. Orientações de Trabalho: • O trabalho será realizado individualmente e os alunos devem registar por escrito como pensaram. • Definir 30 minutos para o trabalho autónomo. Enfatizar que, no final, os alunos terão de apresentar as suas respostas e resoluções.	– Lembram-se do livro “Frações na Cozinha”? – Conseguem fazer um resumo do que aconteceu? – Como é que se chamavam as personagens deste livro? – O que se quer saber com esta questão?	Grande grupo

Exploração (20 min.)

Os alunos discutem e resolvem a tarefa: “**O almoço da turma do João”**

Quando o João voltou para as aulas, decidiu contar à professora o que acontecera em sua casa . Ao ouvir isso, a professora teve a ideia de planear um almoço na pizaria da rua com a turma. Para organizar a turma da melhor forma, resolveu formar três grupos e pediu ao João, ao Cão Trapalhão e à Gata Certinha que cada um ficasse num grupo diferente porque eles já sabiam dividir as pizas de igual forma por todos.

Cada grupo juntou o dinheiro que tinha e comprou pizas familiares **retangulares** iguais para repartir igualmente entre todos, de acordo com a tabela seguinte:

Grupos	N.º de alunos	N.º de pizas compradas pelo grupo
Do João	5	3
Da Gata Certinha	4	3
Do Cão Trapalhão	8	6

Após a hora de almoço, alguns alunos disseram que os alunos de um grupo tinham comido mais piza que os alunos dos outros grupos.

Concordas? Explica porquê.

Individualmente

Antecipação de resoluções:

- Espera-se que os alunos mobilizem o conceito de fração na resolução do problema.

Como podemos

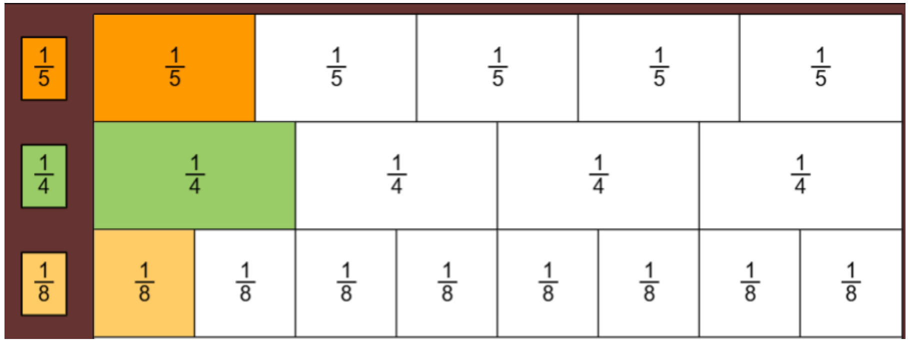
Grande grupo

	• Espera-se que os alunos reconheçam que apesar das pizas serem iguais, como, em cada grupo, há diferente número de alunos, a divisão da piza será diferente. ○ Os alunos podem resolver o problema de diferentes formas, tais como: Podem desenhar as pizas e dividir cada uma das pizas de cada grupo pelo número de alunos em cada grupo. Por exemplo, no grupo do João, dividir cada uma das 3 pizas por 5 alunos, obtendo 1/5 em cada piza e depois juntar cada fatia de cada piza para descobrir quantas fatias comeu cada aluno, fazendo, por exemplo: 3x1/5=3/5 ou 1/5+1/5+1/5=3/5 ○ Podem igualmente desenhar as pizas e dividi-las pelo número de alunos de cada grupo, mas distribuir logo as fatias que cada aluno tem direito logo desde a primeira piza. ➢ Por exemplo, no grupo do João, desenham 3 pizas e dividem cada piza em 5 partes e percebem que têm, ao todo 15 fatias e fazendo 15: 5 = 3 , descobrem que podem dar 3 fatias de piza a cada aluno. Ao usarem esta resolução, os alunos, incorretamente, podem pensar que dão 3/15 a cada aluno, esquecendo que a unidade é 1 piza. Caso isto aconteça, deve conduzir-se os alunos a perceberem qual é a unidade que está em causa e que a resposta 3/5 (correta) não é equivalente a 3/15 (incorreta). ➢ Por exemplo, no grupo da Gata Certinha, desenham 3 pizas e dividem cada piza em 4 partes e percebem que têm, ao todo 12 fatias e fazendo 12:4 =3 ,	representar o que cada aluno comeu? Cada aluno comeu a mesma quantidade? Como sabes? Como podemos comparar as quantidades que cada grupo comeu? Será que o número de pizas influencia quem come mais? Como podemos usar frações para mostrar quanto cada um comeu?	

descobrem que podem dar 3 fatias de piza a cada aluno. Ao usarem esta resolução, os alunos, incorretamente, podem pensar que dão 3/12 a cada aluno, esquecendo que a unidade é 1 piza. Caso isto aconteça, deve conduzir-se os alunos a perceber qual é a unidade que está em causa e que a resposta 3/4 (correta) não é equivalente a 3/12 (incorreta). ➢ Por exemplo, no grupo do João, desenham 6 pizas e dividem cada piza em 8 partes e percebem que têm, ao todo 48 fatias e fazendo 48: 8 = 6 , descobrem que podem dar 6 fatias de piza a cada aluno. Ao usarem esta resolução, os alunos, incorretamente, podem pensar que dão 6/48 a cada aluno, esquecendo que a unidade é 1 piza. Caso isto aconteça, deve conduzir-se os alunos são de qual é a unidade que está em causa e que a resposta 6/8 (correta) não é equivalente a 6/48 (incorreta). ○ Podem ainda dividir o n.º de pizzas pelo n.º de alunos, em cada grupo: Grupo do João: 3:5=3/5 Grupo da gata: 3:4=3/4 Grupo do cão: 6:8=6/8=3/4 • prevê-se que os alunos se recordem da representação retangular usada na barra de chocolate presente no livro "Frações na Cozinha" e que recorram a ela para resolver a tarefa, ou seja:		

¼

- Espera-se que os alunos percebam que têm de determinar a porção que cada aluno terá comido de cada piza em cada um dos grupos:



– Espera-se que os alunos percebam que o grupo do João é o grupo que terá comido menos quantidade de piza que o grupo da Gata Certinha pois o tamanho da piza é menor.

– Contudo, espera-se que os alunos percebam que ¾ e 6/8 representam a mesma porção (frações equivalentes), logo o grupo da Gata Certinha e do Cão Trabalhão comeram a mesma quantidade de piza

– Espera-se que os alunos saibam representar a unidade e que percebam que as frações 3/4 e 6/8 são equivalentes.

Discussão	<u>Propostas de trabalho e atividade esperada:</u>	Como pensaste para	

	Ao longo do momento de discussão coletiva, será feita a correção da tarefa e fomentada a discussão dos diversos conceitos trabalhados na mesma. Para que tal aconteça será necessário: • Selecionar um elemento de cada grupo para discutir e valorizar as tentativas. • Solicitar que os alunos expliquem como chegaram aos resultados. • Incentivar os alunos a justificarem os seus raciocínios. • Fomentar a discussão do conceito de frações equivalentes. Questões para guiar a discussão coletiva: ➢ Se surgirem erros como "3/15" ou "6/48": ○ Qual é a unidade que estamos a considerar aqui? ○ Estamos a dividir as pizas ou as fatias? O que representa o denominador? ○ 3 de quê? De quantas partes? ➢ Se recorrerem a desenhos: ○ Como representaram as pizas? ○ Quantas partes iguais há ao todo? Como repartiram entre os colegas? ○ Conseguem perceber, a partir do desenho, se todos comeram a mesma quantidade? ➢ Para fomentar a discussão para perceber qual grupo comeu mais quantidade de pisa: ○ Então, quem comeu mais piza? Como podemos provar? ○ Porque é que podemos dizer que houve dois grupos que comeram a mesma quantidade Conclusões esperadas: ○ No grupo do João, cada aluno comeu 3/5 de uma piza. ○ No grupo da Gata Certinha e no grupo do Cão Trapalhão, cada aluno comeu ¾ de uma piza. ○ ¾ > ⅗, logo os alunos do grupo do João comeram menos. ○ As frações ¾ e 6/8 são equivalentes, por isso esses dois grupos comeram a mesma quantidade.	resolver este problema? Qual foi a tua estratégia? Porquê escolheste essa? Alguém fez de forma diferente? O que mudou? As estratégias diferentes chegaram ao mesmo resultado? Que outras formas temos de representar estas quantidades? Qual foi a tua estratégia para resolver o problema?	Grande Grupo

	○ A unidade é 1 piza.	Desenhastes, calculaste, ou fizeste outra coisa? Qual estratégia de um colega te ajudou a entender melhor?	
Sistematização (10 min.)	• Questionar os alunos sobre o que estivemos a fazer nesta aula. • Sistematizar o que foi falado no momento de discussão coletiva: ○ A ideia de fração como divisão de um todo em partes iguais. ○ Frações equivalentes representam a mesma quantidade, mesmo que escritas de formas diferentes. ○ Que uma fração pode ser representada através de uma divisão ou de desenhos (relacionar com o livro e com a barra de chocolate) Questões para guiar este momento: • Se dividirmos a mesma piza de maneiras diferentes, a quantidade para cada aluno muda? • O que significa dizer que duas frações são equivalentes?		Grande grupo

Anexo E: Tarefa “O Festival das Estrelas”

	Propostas de trabalho e atividade esperada	Questões a colocar para apoiar as aprendizagens	Organização dos alunos

Apresentação (10 min.)	Apresentação Contextualizada:
	• Apresentação da tarefa explicando o contexto: “**O Festival das Estrelas**”
	• Leitura do enunciado e das perguntas da tarefa com a turma.
	    ○ Projetar o enunciado (sem as questões) e pedir a um aluno para ler o mesmo.
	    ○ Pedir que expliquem por palavras suas o que é pedido
	    ○ Apresentar a restante tarefa.
	• Esclarecimento de dúvidas sobre o que é solicitado através do questionamento sobre o entendimento dos alunos do que é solicitado.
	Orientações de Trabalho:
	• O trabalho será realizado individualmente e os alunos devem registar por escrito como pensaram.
	• Definir 40 minutos para o trabalho autónomo.
	Enfatizar que, no final, os alunos terão de apresentar as suas respostas e resoluções.
	TAREFA ADAPTADA DE : https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/10661/1/ulsd067673_td_Helia_Ventura.pdf
		– Lembram-se do livro “Frações na Cozinha”?
		– O que é que vocês acham que está aqui representado?
		– O que serão estes retângulos?
		– Porque é que uns têm desenhos de carros e outros não têm nada, o que significa isso?
			Grande grupo

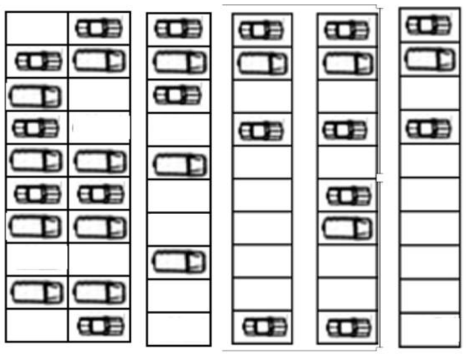
Exploração	Os alunos discutem e resolvem a tarefa: **“O Festival das Estrelas”** **“O Festival das Estrelas”**		Individualmente

Tarefa "Estacionamento no Festival das Estrelas"

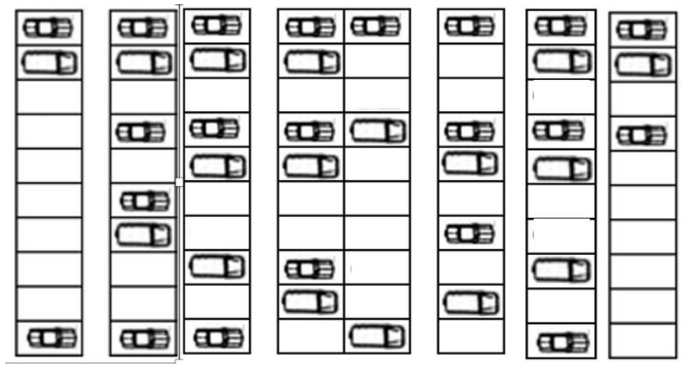
Em Vila Nova da Alegria estava a decorrer o famoso **Festival das Estrelas**, um evento muito aguardado que trazia música, teatro e dança para toda a cidade. Como estavam à espera de muitos visitantes, a organização do festival preparou dois grandes parques de estacionamento: O **Parque Aurora (P1)** e o **Parque Brisa (P2)**.

Observa as fotografias dos parques de estacionamento no momento antes do festival.

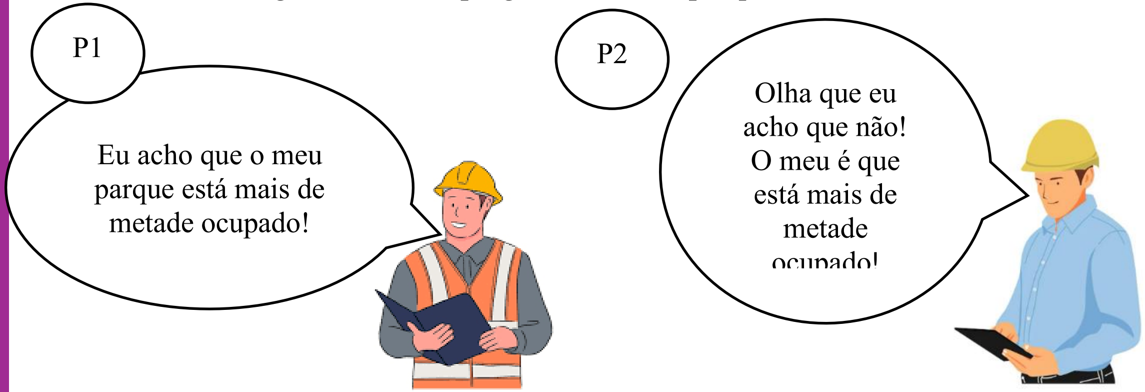
Parque Aurora (P1)



Parque Brisa (P2)



1. Para cada parque, indica, usando uma fração, a parte do parque que está ocupada e a parte do parque que está livre. Mostra como pensaste.

<table>
<tr>
<td>2. Observa o diálogo entre os empregados de cada parque.


Qual dos dois empregados tem razão? **Mostra** como pensaste.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Antecipação de resoluções:
Espera-se que os alunos mobilizem o conceito de fração como parte de um todo, utilizando unidades discretas, ao relacionarem cada lugar no parque como uma parte da unidade.
Espera-se que relacionem o número de lugares ocupados com o número total de lugares disponíveis em cada parque de estacionamento e que percebam que a soma equivale à unidade que é o parque.</td>
<td>Quantos lugares existem no parque P1? Como podes contar todos os lugares?

Quantas colunas e quantas filas tem o parque P1? Se</td>
<td>Grande grupo</td>
</tr>
</table>

- Espera-se que os alunos reconheçam que, mesmo que dois parques tenham números diferentes de lugares ou ocupações, o que importa é a relação entre os lugares ocupados e a capacidade total (fração) e que reconheçam que existem 2 unidades diferentes.

.Questão 1:

Para resolver essa questão, espera-se que os alunos:

- Determinem o total de lugares em cada parque:
  - Contando individualmente (de 1 em 1)
    - P1 → 60; P2 → 80
  - ou através do produto entre o número de colunas e o número de lugares por coluna
    - P1→ 6 x 10 = 60 ; P2→ 8 x 10 = 80
- Determinem o número de lugares ocupados, observando os carros nas imagens.
  - Contando individualmente (de 1 em 1)
    - P1→ 32 ; P2→ 38
- Calculem o número de lugares livres:
  - Lugares livres=Total de lugares−Lugares ocupados\
    - P1→ 60-32 = 28 ; P2→ 80-38= 42
- Escrevam duas frações para cada parque:
  - A fração dos lugares ocupados: nº de lugares ocupados/ nº total de lugares
    - P1→32/60 ; P2→ 38/80
  - A fração dos lugares livres: nº de lugares livres/ nº total de lugares

multiplicarmos, qual o resultado?

E no parque P2, quantos lugares existem? Como podes descobrir rapidamente?

Quantos lugares estão ocupados no parque P1? Como podes contar esses lugares?

E no parque P2, quantos lugares estão ocupados?

Quantos lugares ficam livres no parque P1? Como descobres isso?

E no parque P2, quantos lugares estão livres?

Como podes escrever o número de lugares ocupados como uma fração do total de lugares no parque P1?

	▪ P2 → 28/60 ; 42/80 Questão 2: Espera-se que os alunos: • Identifiquem que cada parque tem um número **diferente de lugares e ocupação**. • Que identifiquem a fração correspondente à metade em cada uma das situações: ▪ P1→ 30/60 ; P2→40/80 • Que percebam que o P1 possui 2/60 a mais da metade e que o P2 possui menos 2/80 de lugares ocupados • Concluam que o primeiro empregado tem razão.	E no parque P2, qual é a fração dos lugares ocupados? Agora, como escreves a fração dos lugares livres para cada parque?	
Discussão (30 min.)	Propostas de trabalho e atividade esperada: Durante a discussão coletiva, será feita a correção da tarefa e incentivada a exploração dos conceitos relacionados com frações e representações, para que os alunos consolidem a compreensão da relação entre parte e todo. Para isso, é necessário: ▪ Pedir que um aluno de cada grupo apresente as suas respostas e explicações. ▪ Pedir aos alunos que expliquem como determinaram o total de lugares, os ocupados e os livres. ▪ Incentivar os alunos a justificarem as frações que escreveram para a ocupação e para os lugares livres. ▪ Fomentar a discussão sobre a interpretação do denominador e do numerador em cada fração. ▪ Fomentar a discussão de que estamos perante duas unidades diferentes. Questões para guiar a discussão coletiva: • Para o total de lugares: o Como descobriram o número total de lugares em cada parque? o Contaram de 1 em 1 ou usaram a multiplicação? • Para os lugares ocupados e livres: o Como fizeram para saber quantos lugares estavam ocupados? o E para os lugares livres, como chegaram a esse número?	Como pensaste para resolver este problema? Qual foi a tua estratégia? Porquê escolheste essa? Alguém fez de forma diferente? O que mudou? As estratégias diferentes chegaram ao	Grande Grupo

	• Para as frações:
	  ○ O que representa o numerador e o denominador na fração que escrevemos para o parque P1?
	• Para a comparação e conclusão:
	  ○ Qual é a metade do total de lugares em cada parque?
	  ○ Em que parque havia mais do que metade dos lugares ocupados?
	  ○ Conseguem explicar isso usando as frações que calcularam?
	
	Conclusões esperadas:
	
	• Os alunos deverão compreender e aplicar o conceito de fração para representar partes de um todo, neste caso, a ocupação e a disponibilidade dos lugares em dois parques de estacionamento (P1 e P2).
	• O número total de lugares em cada parque é 60 para P1 e 80 para P2.
	• O número de lugares ocupados (32 em P1 e 38 em P2) e livres (28 em P1 e 42 em P2).
	• Os alunos compreenderam que as frações representam a parte do total ocupada (32/60 e 38/80) e livre (28/60 e 42/80).
	• Interpretaram o denominador como o total de lugares (a unidade) e o numerador como a parte correspondente a lugares ocupados ou livres.
	• Os alunos deverão perceber que cada parque constitui uma unidade diferente, e que as frações calculadas dizem respeito a essas unidades individuais.
	• Que representem a fração que represente a metade da ocupação em cada uma das situações.
		mesmo resultado?
		
		Qual estratégia de um colega te ajudou a entender melhor?	

Sistematização (10 min.)	• Questionar os alunos sobre o que estivemos a fazer nesta aula.
	• Sistematizar o que foi falado no momento de discussão coletiva:
	  ○ A ideia de fração como a relação entre uma parte (lugares ocupados ou livres) e o todo (total de lugares do parque).
	  ○ Frações representam quantidades relativas que podem ser comparadas para entender qual é maior ou menor.
	  ○ A importância de identificar corretamente o “todo” antes de interpretar uma fração.
	  ○ Como as frações podem ser representadas de forma numérica e também visualmente, por exemplo, usando barras ou desenhos divididos em partes iguais.
	  ○ Que frações simplificadas facilitam a comparação, mas representam a mesma quantidade (frações equivalentes).
			Grande grupo

	Questões para guiar este momento: • Por que é importante saber qual é o total de lugares antes de dizer qual fração está ocupada? • Se tivermos dois parques com números diferentes de lugares, como podemos saber qual está mais cheio?		