Instituto Superior de Contabilidade e
Administração de Coimbra

Avaliação de Oportunidades - Opções Compostas e Opções de Troca

Marisa Freire da Silva
iscac9286@alumni.iscac.pt

Dissertação submetida para a obtenção de grau de
Mestre em Análise Financeira

Orientador:
Prof. Doutor José Carlos Gonçalves Dias

Dedicatória

Dedico esta dissertação
Aos meus pais, pelo encorajamento, amor e por todo o apoio incondicional e incessante que me levou à concretização deste sonho.
Ao meu namorado, pelo apoio, compreensão e pela companhia ao longo desta trajetória.
Aos meus amigos e colegas do ISCAC pela paciência, apoio e por todos os momentos que me proporcionaram.
Ao meu orientador pela ajuda, força e incentivo.
Sem eles nada disso seria possível.

Agradecimentos

Agradeço,

À minha família, principalmente aos meus pais por terem sido sempre o meu pilar de apoio e por todo o esforço que fizeram para que eu chegasse aqui;

Aos meus amigos que fizeram parte deste percurso pelo apoio incondicional, ajuda e incentivo;

A todos aqueles que contribuiram para a minha formação académica, em particular, ao Prof. Dr. José Carlos Dias pela disponibilidade para orientar esta dissertação, pelo apoio, por todas as recomendações, pelo conhecimento transmitido ao longo da realização deste trabalho e por toda a paciência e compreensão que teve;

A todos aqueles que, mesmo não mencionados, contribuiram diretamente e indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho.

"O investimento em conhecimento é aquele que traz maiores retornos",
Benjamin Franklin

Marisa Silva
Coimbra, Abril 2014

Resumo

A dissertação tem como tema a "Avaliação de Oportunidades - Opções Compostas e Opções de Troca".

A elaboração da mesma será enriquecida através da análise de diversos artigos e outro material de apoio. Terá, no entanto, como suporte base o estudo de Peter Carr (1988)[12] no artigo "*The Valuation of Sequential Exchange Opportunities*".

Esta dissertação pretende, assim, expurgar a aplicação das opções reais na avaliação de projetos de investimento. Numa primeira fase, através da análise do paper base já anteriormente referido e no qual se irá apoiar todo o trabalho, será feito ainda referência de um modo pormenorizado a dois tipos de opções exóticas: compound options e exchange options.

Posteriormente, numa última parte mais prática desta dissertação, será efetuada numa primeira fase a aplicação dos Modelos de Margrabe(1978)[47], Geske (1979) [26] e de Black e Scholes (1973)[7] e Merton (1973) [52], modelo BSM, uma vez que são tidos como casos especiais no modelo de Peter Carr e onde será ainda mostrado consoante determinadas condições como é que se pode reduzir as fórmulas dos modelos referidos para o resultado obtido no modelo de BSM. Numa segunda fase será então implementada a equação fundamental para as *Compound Exchange Options* dada no paper de Peter Carr (1988), e onde é ainda feita a aplicação dessa equação que ajustada a determinadas condições colapsa para os resultados dos três primeiros modelos referidos.

Por fim é demonstrada a aplicação para Decisões de Investimento tendo em conta a metodologia utilizada por Peter Carr. As aplicações referidas nesta dissertação foram efetuadas em Excel.

Palavras-Chave: Opções Reais, *Compound Options*,*Exchange Options*, Oportunidade, Estratégia, Decisão.

Abstract

The theme of the dissertation is “Valuation Opportunities - Compound Options and Exchange Options”.

The preparation of the same will be enriched through the analysis of various articles and other material support. It will, however, be based on the study of Peter Carr(1988)[12] in the paper ”The Valuation of Sequential Exchange Opportunities”.

This dissertation thus seeks to expunge the application of real options in evaluation of investment projects. Initially, through the analysis of the base paper mentioned earlier and which will support all the work, we will made a detailed reference to two types of exotic options: exchange options and compound options.

Subsequently it will be presented a practical application of Margrabe(1978)[47], Geske (1979) [26] and Black e Scholes (1973)[7] e Merton (1973) [52], BSM model, since they are considered as special cases of the Peter Carr model and where is still shown that depending of certain conditions how can reduce the formulas of the models referred to the result obtained in the BSM model. In the second phase it will be implemented the fundamental equation for Compound Exchange Options given on the paper of Peter Carr (1988), and where is still done the application from this equation that adjusted on certain conditions collapses to the results of the first three models mentioned.

Finally, it is demonstrated the application for investment decisions having into account the methodology used by Peter Carr. The aplications referred in this dissertion were performed in Excel.

Keywords: Real Options, Compound Options, Exchange Options, Opportunity, Strategy, Decision.

Abreviaturas

CCA Contingente Claims Analysis

CEO Compound Exchange Option

CFD Cash Flow Discounted

FCD Fluxo de Caixa Descontado

ISCAC Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

MGD Movimento Browniano Geométrico

NPV Net Present Value

OPMS Option Pricing Models

SEO Simple Exchange Option

TIR Taxa Interna de Retorno

TOR Teoria das Opções Reais

VAL Valor Atual Liquido

VPL Valor Presente Líquido

Conteúdo

Abreviaturas **v**

1 Introdução **1**
1.1 Conceitos Básicos sobre Opções 1
1.2 Revisão da Literatura 6
1.3 Motivação 12
1.4 Estrutura 13
1.5 Objetivos 13

2 A Teoria das Opções Reais e Limitações da Abordagem Tradicional **15**

3 Opções Exóticas **21**
3.1 Compound options 23
3.2 Exchange Options 25

4 The Valuation of Sequential Exchange Opportunities **29**
4.1 Pressupostos e Distribuições de Resultados 30
4.2 Pressupostos de Distribuição e Fórmula 33

5 Aplicação **36**

6 Conclusões **53**

Bibliografia **55**

Lista de Figuras

1.1 *Posições Básicas das Opções* 2
1.2 Mapping an Investment Opportunity onto a Call Option 5

5.1 *Aplicação do modelo de Black Scholes (1973)* 37
5.2 *Aplicação do modelo de Margrabe (1979), obtendo o resultado de BSM* 39
5.3 *Aplicação do modelo de Geske Model (1979), obtendo o resultado de BSM* 40
5.4 *Aplicação do modelo de Geske (1979) obtendo o mesmo resultado da aplicação da eq.5.14 de Peter Carr* 42
5.5 *Aplicação do modelo de Peter Carr (1988)* 44
5.6 *Aplicação do modelo de Carr (1988) - Obtendo o resultado do modelo de Margrabe* 45
5.7 *Aplicação do modelo de Carr (1988) - Obtendo o resultado do modelo de Geske* 46
5.8 *Aplicação do modelo de Carr (1988) - Obtendo o resultado do modelo de BSM* 47
5.9 *Decisão de Investimento* 52

Lista de Tabelas

5.1 Combinação de valores de Eta e Phi 43

5.2 Pricing American call options on stocks paynd discrete dividends 49

Capítulo 1

Introdução

1.1 Conceitos Básicos sobre Opções

Importa num primeiro momento introduzir alguns conceitos básicos da TOR de forma a mostrar o seu interesse nas decisões de investimentos. A principal vantagem é o facto de considerarmos que a incerteza está sempre presente num processo de tomada de decisão. Então, além de minimizar os riscos, pode-se avaliar as oportunidades de investimento que vão surgindo nas fases de um projeto, muitas vezes pelo simples facto de existir competitividade, com a entrada e saída de investidores e através do lançamento de novos produtos.

Sendo assim, uma opção pode ser definida como um contrato que dê ao comprador o direito, mas não a obrigação de comprar (*call option*) ou de vender (*put option*) ao vendedor da opção, uma determinada quantidade, de um determinado ativo (ativo subjacente), a um determinado preço de exercício (*strike price*).

O vendedor cede o direito de exercício da opção ao comprador em troca de um determinado montante designado de preço ou prémio da opção. Este fica sempre sujeito ao direito de exercício de opção por parte do comprador.

Caso se tratem de opções Americanas, o comprador da opção pode exercer o seu direito em qualquer momento até à data de expiração da opção. No caso das opções Europeias o comprador só pode exercer o direito na própria data de expiração. A literatura financeira classifica as opções standard em dois grupos: *call options* e *put options*. A *call (put) option* dá a seu detentor o direito de comprar (vender) o ativo subjacente correspondente a um preço de exercício específico. Se o preço de exercício de uma opção de compra é menor (maior) do

que o preço à vista do ativo subjacente, é chamado de uma *in-the-money call option* (*out-of-the-money call option*). Se o preço de exercício de uma opção de compra é igual ao preço à vista do ativo subjacente, é chamado *at-the-money call*. De forma similar, se o preço de exercício de uma opção de venda é menor (maior) do que o preço á vista do ativo subjacente, é chamado de uma *out-of-the-money put option (in-the-money put option)*. Se o preço de exercício de uma opção de venda é igual ao preço à vista do ativo subjacente, é chamado *at-the-money put option*. A figura seguinte ilustra as quatro posições básicas com opções:

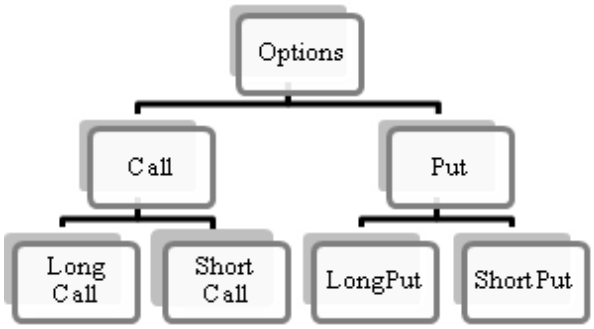

Figura 1.1: *Posições Básicas das Opções*

Um projeto de investimento pode ser visto como um conjunto de opções reais. De entre as opções reais, podem ser citadas as opções de adiar o investimento, cancelar novas etapas do investimento, alterar a escala de produção (expandir, contrair, fechar temporariamente, reiniciar), abandonar pelo valor, alterar usos (entradas e saídas) e opções de crescimento, [64].

A empresa tomará decisões de investimento e decisões operacionais, em relação a um projeto, durante toda a vida deste. Ao avaliar um projeto hoje, supõe-se que as decisões futuras serão ótimas, contudo, não se sabe ainda quais serão estas decisõs, uma vez que grande parte das informações é desconhecida. Desta forma, a possibilidade de adiar o investimento consiste numa opção importante e que não deve ser desconsiderada ao avaliar um projeto de investimento, [58].

O mercado proporciona uma variedade de prováveis investimentos. Compete ao gestor executivo considerar quais são os melhores investimentos para a organização. Neste sentido, entra a importância de quem souber fazer uma boa análise na hora de investir, pois isso levará a que se alcance o mais próximo possível o seu verdadeiro potencial de valor e evitar ao máximo os riscos.

As decisões de investimento, de uma maneira geral, partilham três características fundamentais [18]:

(i) o investimento é parcialmente ou completamente irreversível - ou seja, os seus custos iniciais são, no mínimo, parcialmente perdidos;

(ii) os fluxos de caixa futuros, gerados a partir do investimento são incertos - o máximo que podemos fazer é avaliar as probabilidades associadas aos diferentes cenários futuros ou estados da natureza;

(iii) os investimentos podem ser adiados, visando a obtenção de mais informação acerca do que pode ocorrer no futuro. Assim, as decisões ótimas de investimento tomadas pelos agentes económicos nascem a partir da interação entre estas três características.

O tempo e a incerteza são pontos-chave que incidem sobre as decisões estratégicas de investimento e a complexidade que lhes está subjacente exige a utilização de instrumentos analíticos bem fundamentados. Os modelos de avaliação de derivados exercem uma forte influência no funcionamento real dos mercados. A partir do início dos anos 50 as finanças são o domínio mais explorado pela teoria neoclássica, onde na fase pioneira sobressairam os trabalhos de Arrow (1964)[2] e de Debreu (1959)[15], que incluíram a incerteza num modelo económico determinístico [21].

São utilizados os instrumentos de modelação típicos da ciência económica, mas com diferenças relevantes ao nível metodológico, uma vez que as preocupações são fundamentalmente no sentido da relação entre os preços de diferentes ativos financeiros e não tanto para a relação com outras variáveis económicas. É importante a modelação do comportamento de um agente económico confrontado com uma situação de risco, levando à decisão sobre a aplicação no tempo.

Durante a década de 80, as limitações do VAL tradicional, ou outro tipo de análise baseada em CFD, já eram conhecidas, dado que avaliavam abaixo do valor real as oportunidades de investimento, o que levava à tomada de decisões pouco estratégicas, na medida em que este tipo de análise ignora a flexibilidade operacional dos gestores e não considera o valor de outros aspetos estratégicos importantes.

Mesmo antes do desenvolvimento da metodologia das opções reais, surgiram

vários debates na tentativa de ultrapassar as dificuldades e as limitações da utilização da abordagem tradicional de avaliação de projetos de investimento.

A moderna teoria das finanças tem as suas origens na teoria microeconómica. Consiste no estudo da racionalidade do comportamento dos agentes económicos na afetação dos seus recursos num contexto de incerteza, no tempo e no espaço, arbitrando entre consumo e investimento [21].

A moderna teoria das finanças assenta assim num conjunto de disciplinas fundamentais, cuja integração se processa tendo por base as seguintes teorias:

- Avaliação - Valuation Theory, de Modigliani e Miller[19];
- Carteiras- Portfolio Theory, de Markowitz [48];
- Avaliação de Ativos Financeiros em Equilíbrio- Capital Asset Pricing Theory, de Sharpe[65], Lintner[42] e Mossin[37];
- Eficiência de mercados financeiros, de Fama [20];
- **Avaliação das Opções - Option Pricing Theory, de Black e Scholes (1973)[7] e Merton (1973)[52].**

A ideia de que projetos de investimento podem ser entendidos como opções de compra, onde o custo inicial faz o papel do preço de exercício e o ativo subjacente é representado pelo valor presente dos fluxos de caixa futuros do projeto, surge no trabalho pioneiro de Myers (1977) [54].

A analogia entre a opção financeira e investimentos empresariais que criam oportunidades futuras são ambos intuitivamente atraentes e cada vez mais bem aceites. Luehrman (1998)[44] oferece uma estrutura que faz a ligação entre a maior complexidade matemática associada à teoria formal de valorização de opções e a aplicação correspondente a projetos reais.

Uma oportunidade de investimento das empresas é como uma opção de compra porque a empresa tem o direito, mas não a obrigação, de adquirir algo, digamos, os ativos operacionais de um novo negócio. Se fosse possível encontrar uma opção suficientemente semelhante para a oportunidade de investimento, o valor da opção mostrar-nos-ía algo sobre o valor da oportunidade. No entanto, a maioria das oportunidades de negócio são únicos, por isso a probabilidade de encontrar uma opção semelhante é baixa. A única maneira confiável de

encontrar uma opção semelhante é o de construir uma. Para tal, é necessário estabelecer uma correspondência entre as características do projeto e as cinco variáveis que determinam o valor de uma opção simples. Ao corresponder as características da oportunidade de negócio para o modelo de uma opção de compra, podemos obter um modelo de projeto que combina as suas características com a estrutura de uma opção de compra. A opção que é usada é uma *call* Europeia, a mais simples de todas as opções, porque pode ser exercida apenas numa data, a data de vencimento [17]. O diagrama "Mapping an Investment Opportunity onto a Call Option"mostra as correspondências. Muitos projetos envolvem gastar dinheiro para comprar ou construir um bem produtivo.

Investment Opportunity	Variable	Call Option
Present value of a project's operating assets to be acquired	S	Stock price
Expenditure required to acquire the project assets	X	Exercise price
Length of time the decision may be deferred	t	Time to expiration
Time value of money	rf	Risk-free rate of return
Riskiness of the project assets	σ	Volatility of returns on stock

Figura 1.2: Mapping an Investment Opportunity onto a Call Option

Gastar dinheiro para explorar uma oportunidade de negócio é semelhante ao exercício de uma opção. A quantidade de dinheiro a investir corresponde ao preço de exercício da opção (X). O valor presente do ativo construído ou adquirido corresponde ao preço das ações (S). O tempo que a empresa pode adiar a decisão de investimento, sem perder a possibilidade do tempo de expiração corresponde à opção (t). A incerteza sobre o valor futuro dos fluxos de caixa do projeto (ou seja, o grau de risco do projeto) corresponde ao desvio padrão dos retornos sobre as ações (sigma). Por último o valor do dinheiro no tempo é dado em ambos os casos pela taxa de retorno sem risco (r_f), [44].

A teoria das opções consolida um dos mais importantes instrumentos analíticos na aplicação às finanças empresariais. A função predominante das opções financeiras advém do facto de se encontrarem em todos os setores da economia contratos do tipo das opções. Dada a sua estrutura específica, as opções são

os exemplos mais simples de títulos com regras não lineares de troca, pelo que, são designados por instrumentos derivados não lineares, [53].

1.2 Revisão da Literatura

A Teoria das Opções Reais tem a sua origem na Teoria das Opções Financeiras, relacionada com a avaliação de instrumentos financeiros denominados derivados.

O mercado de derivados financeiros cresceu bastante a partir dos anos 70, principalmente desde a publicação dos artigos de Black e Scholes (1973)[7] e Merton (1973)[52], onde os autores descrevem uma fórmula fechada para o cálculo do valor de uma opção financeira.

Estes trabalhos vieram dar origem ao denominado Modelo de Black – Scholes - Merton. Desde então, tornou-se numa ferramenta muito popular. O Modelo Black – Scholes - Merton foi estendido de modo a que possa ser usado para avaliar opções sobre divisas, opções sobre índices e opções sobre contratos de futuros.

Black e Scholes (1973) argumentam ainda que a maioria do passivo das empresas pode ser visto como opções. Após derivar uma fórmula para o valor de uma *call option*, eles discutiram o preço das ações ordinárias e obrigações de uma empresa quando o capital próprio é visto como uma opção sobre o valor da empresa. Neste cenário, uma opção sobre ações ordinárias é uma opção sobre uma opção. Eles também sugeriram que, quando uma empresa tem obrigações de cupão em circulação, as ações ordinárias as e obrigações de cupão podem ser vistas como uma *compound option*. *Warrants* e ações que pagam dividendos constantes podem também ser consideradas *compound option*.

O modelo mais básico para estimar o valor de uma opção usando várias técnicas quantitativas, baseadas no conceito de neutralidade face ao risco e usando um processo estocástico, é o de Black – Scholes - Merton. Os modelos mais sofisticados são usados para modelar o efeito sorriso da volatilidade.

De um modo geral, os modelos padronizados de valorização de opções dependem de vários fatores, nomeadamente: o preço de exercício (*strike*) da opção; o preço atual de mercado do ativo subjacente; o custo de manter uma posição no subjacente, incluindo juros e dividendos; o tempo que resta até ao vencimento,

em conjunto com quaisquer restrições quanto à data em que a opção pode ser exercida, e uma estimativa de volatilidade futura do preço do subjacente durante o tempo de vida da opção.

A partir dos trabalhos de Black – Scholes - Merton para a avaliação de opções financeiras passou-se a incorporar métodos semelhantes ao problema do investimento sob condições de incerteza, o que levou à aplicação destes métodos de valorização de opções ao problema de avaliação de ativos reais.

Merton (1973)[52] mostrou que uma opção de compra americana não será exercida antecipadamente se o ativo subjacente não tiver pagamentos. Assim, as ações representadas como uma opção sobre o valor da empresa não serão exercidas antecipadamente caso a empresa, por hipótese, não faça pagamentos de dividendos ou cupões. Uma vez que a demonstração de Merton não depende de quaisquer suposições distribucionais a opção de compra composta sobre as ações não será também antecipadamente exercida.

Algumas disposições financeiras comuns são equivalentes às opções de trocar um ativo de risco por outro: os honorários do consultor de investimentos de incentivo de desempenho, a conta de margem geral, a oferta de troca e o compromisso de espera. O avanço de Black - Scholes (1973) e Merton (1973) gerou uma literatura crescente sobre a teoria das opções com diversas aplicações.

Este crescente interesse em opções levou naturalmente a uma consideração de opções reais (numa primeira fase sugerida por Myers (1977)[54]) e no desenvolvimento de métodos para valorizá-las. O processo tem sido auxiliado pela aplicabilidade de muitas técnicas desenvolvidas para a avaliação de opções financeiras para uso em cenários de opções reais (por exemplo, Brennan e Schwartz (1977)[10] com a aplicação de métodos de diferenças finitas, as opções de troca de Margrabe (1978)[47], a grelha binomial de Cox et al.(1979)[14], as *compound growth options* de Geske (1979)[26], as *sequential compound options* de Carr (1988)[12], e a técnica de quadratura de Andricopoulos et al. (2003)[1]).

Fu (1996)[24] estuda o problema de avaliação de uma opção europeia sobre a diferença de duas taxas de juros, que é análogo a uma opção de trocar um ativo por outro, estudado por Margrabe (1978). É mostrado pela primeira vez que tal opção pode ser avaliada como trocar duas taxas de juro implícitas nos preços futuros relevantes através de um modelo estendido por Black (1976)[5], e depois pelo modelo de dois fatores de Heath - Jarrow - Morton

modelo (HJM)[28],[29], que mostra que a introdução de movimentos de taxas de juros imperfeitos é essencial para valorizar tais opções, para o qual o modelo de um fator, como Ho e Lee (1986)[32] não deve ser aplicado. Este artigo discute a avaliação de um novo tipo de derivados de taxa de juro, as *yield-curve spread options*, e usá-lo como um exemplo para salientar a importância das correlações.

Brennan e Schwartz (1977)[10] utilizam métodos de diferenças finitas. Este método é útil, por exemplo, quando não existe nenhuma solução de forma fechada como é o caso da avaliação de *American put options* que permitam o exercício da opção. O caso de uma *put option* perpétua sobre ações é tratado por Merton (1973)[52]. No trabalho apresentado por Brennan e Schwartz (1977) é proposto um algoritmo para o problema de avaliação de preços de uma *put* quando esta tem uma vida finita e pode ou não ser protegida contra o pagamento de dividendos sobre o ativo subjacente. Black e Scholes (1972)[6] analisaram anteriormente o preço de *calls* no mercado, enquanto Gould e Galai (1974)[39] documentaram infrações da paridade *put-call*.

É pertinente citar ainda o artigo de Brennan e Schwartz (1985)[9], que critica o uso dos métodos tradicionais de avaliação económico-financeira com incerteza através do método do fluxo de caixa descontado a uma taxa de desconto supostamente adequada ao risco do projeto. É destacada a deficiência da abordagem tradicional a partir da negligência da incerteza dos preços e seu comportamento estocástico, principalmente em projetos envolvendo recursos naturais, onde as indústrias convivem com uma alta volatilidade de preços. Adicionalmente, é realçado também o fato de os métodos tradicionais desconsiderarem a possibilidade de respostas a estas variações de preços através da flexibilidade da gerência.

Geske (1977)[25] derivou fórmulas para avaliar obrigações de cupão e dívida subordinada como *compound options*. A fórmula derivada contém *n-dimensional multivariate normal integrals*. É mostrado que, para alguns problemas de *compound options*, a estrutura de correlação permite uma aplicação especial de uma redução integrante que pode simplificar a avaliação numérica. São discutidos os efeitos das diferentes restrições de emissão na fórmula e é apresentada uma nova fórmula para avaliar a dívida subordinada. Geske (1977) demonstra que os títulos de risco com pagamentos sequenciais podem ser avaliados como opções compostas. Roll (1977)[57] utilizou esta técnica para avaliar opções Americanas sobre ações que pagam dividendos discretos.

Muitos ativos corporativos e oportunidades de crescimento podem especialmente ser vistas como opções de compra. O valor das *real options* depende de investimento futuro da empresa. A emissão de dívida de risco reduz o valor de mercado atual de uma empresa que detem opções reais através da indução de uma estratégia de investimento subótimo ou forçando a empresa e os seus credores para suportar os custos de evitar a estratégia subótima. O artigo prevê que o endividamento das empresas é inversamente relacionado com a proporção do valor de mercado representada por opções reais. Estuda ainda outros aspetos do comportamento de empréstimo corporativo, por exemplo, a prática de combinar os vencimentos de ativos e passivos da dívida.

Geske (1979)[26], de um modo geral, desenvolve a teoria para lidar com problemas de *compound options*, isto é apresenta uma teoria para preços de opções sobre opções ou opções de compostos. O método pode ser generalizado para avaliar muitos passivos de empresas. A fórmula derivada para a *compound call option* considera uma *call option* sobre as ações que é em si uma opção sobre os ativos da empresa. Esta perspetiva incorpora efeitos de alavanca no *pricing* de opções e, consequentemente, a variância da taxa de retorno sobre as ações não é constante como Black-Scholes-Merton assumem, mas em vez disso é uma função do nível de preço das ações. A fórmula de Black-Scholes-Merton mostra-se um caso especial da fórmula *compound option*. Este novo modelo desenvolvido por Geske (1979) para *puts* e *calls* vem corrigir alguns desvios/tendências importantes do modelo Black-Scholes-Merton. Quase qualquer oportunidade com uma escolha cujo valor depende de um ativo subjacente pode ser visto como uma opção. Um contrato, especifica os termos da oportunidade, ou pormenores a que os economistas financeiros chamam de condições de fronteira. Muitas oportunidades têm uma natureza sequencial, onde as últimas oportunidades estão disponíveis apenas se as oportunidades anteriores forem realizadas. Tal é a natureza da *compound option* ou da opção sobre uma opção.

Depois de Geske (1979), as *compound options* - opções sobre opções - têm sido empregues em muitos campos em que as opções reais são aplicadas. A fórmula para uma *compound option* é conveniente para uso em projetos de investimento real, mas tem um inconveniente - os ativos subjacentes das compound options são normalmente não negociáveis. Liu (2010)[43] aborda esta questão e propõe duas novas fórmulas de preços para as *Compound Options* de forma a superar o inconveniente em questão. A formula para o preço das compound options que foi proposto pela primeira vez por Geske (1979), é amplamente utilizada no campo de opções reais para analisar muitas estratégias de investimento, como considerado por Majd e Pindyck (1987)[46], Carr (1988), Trigeorgis (1993)[63]

e Jensen e Warren (2001)[38]. Apesar de todos estes artigos proporem métodos baseados em várias opções de avaliação do projeto, um problema comum é que os ativos subjacentes do projeto são geralmente não-negociáveis. Consequentemente, são propostos dois modelos diferentes que são baseados numa melhoria no modelo de Geske, e refletem o inconveniente referido (*Good-Deal Bounds Method e Utility Indifference Pricing Method*). A teoria de avaliação de opções é baseado na formação de uma carteira de cobertura de ações e opções para encontrar o preço da opção.

As oportunidades de troca sequencial são avaliadas usando técnicas de teorias *option-pricing modernas*. O veículo para a análise é o conceito de uma *compound exchange option*. Carr (1988) deriva uma fórmula de avaliação para esta opção. Este paper também identifica várias outras situações que envolvem múltiplas trocas, a maioria dos quais são mais prováveis, mas menos óbvias. Oportunidades de troca sequencial existem sempre que uma troca de ativos cria o potencial para novas trocas. Este *paper* preocupa-se com a valorização de uma sequência de trocas potenciais. Para simplificar, assume-se que o tempo e as condições de cada possível transação são conhecidos com antecedência. O *paper* integra o trabalho sobre *compound option pricing* por Geske e com o trabalho sobre *exchange option pricing* por Fischer (1978)[23] e Margrabe (1978)[47]. É desenvolvida a fórmula de avaliação para uma *security* de uma opção de troca composta. O exercício deste instrumento envolve a entrega de um ativo em retorno de uma opção de troca. A opção recebida mediante a entrega, em seguida, pode ser usada para fazer uma outra troca numa data posterior. O *paper* demonstra que qualquer número finito de trocas pode ser valorizado.

Recentemente, Ghosh e Troutt (2012)[27] referem que um elemento chave do seu enquadramento é que a representação do conhecimento proposicional de *compound options pricing models* (OPMS) complexos devem ser acompanhados por uma camada de abstração traduzindo o conhecimento proposicional em conhecimento processual para usar o modelo. Em segundo lugar, enquanto a camada de abstração pode ser incorporado numa ferramenta de *software* para a utilização da OPM, isso deve ser feito de forma transparente, a fim de construir a confiança na ferramenta de *software*. Em terceiro lugar, na tradição de aprendizagem construtivista usando a ferramenta, deve ser ilustrada no contexto de um problema empresarial contemporâneo. Finalmente, deve ser estabelecido um circuito de acoplamento contínuo o que torna a aplicação rotineira da metodologia de *Real Options* utilizando esta ferramenta. Demonstram essas etapas no contexto de modelos para *compound options* de Geske

para investimentos de múltiplos estágios. Mostram também como aplicar a sua ferramenta para o principal problema do negócio da integração da empresa.

Outra utilização da extensão de avaliação e valorização de opções financeira aplicadas a ativos reais envolvendo *commodities* foi descrita por Paddock et al. (1988)[56]. Este artigo também ressalta a dificuldade de utilização dos métodos tradicionais de avaliação económica em cenários com importante volatilidade de preços e frequente presença de flexibilidades gerenciais nas tomadas de decisões, como nos casos de exploração e desenvolvimento de campos de petróleo. O artigo descreve as potenciais vantagens de utilização do método de opções reais para avaliação de ativos de petróleo em comparação com o método do fluxo de caixa descontado.

Cortazar et al. (1998)[13] apresentam no seu artigo, um modelo que utiliza a abordagem de opções reais para avaliar investimentos ambientais. Neste estudo são consideradas as premissas de um cenário de forte incerteza de preços, os quais, segundo assumido no modelo, tendem a seguir um Movimento Geométrico Browniano (MGD).

Outra questão importante nesta área e também estudada em vários papers é o momento para investir. Baldwin (1982)[3], Brock et al. (1983)[11] e Venezia e Brenner (1979)[36] todos analisaram o problema do momento de investir num mundo de risco neutral e obtiveram muitos dos mesmos resultados de comparações estáticas. Bernanke (1983)[4] e Venezia (1983)[35] adicionaram a aprendizagem Bayesiana para que os investidores aprendam não só sobre o valor do projeto pela espera, mas também sobre o processo estocástico subjacente.

O trabalho de McDonald e Siegel (1986)[51] estuda o melhor momento de investimento num projeto irreversível onde os benefícios do projeto e os custos de investimento seguem processos estocásticos em tempo contínuo. É derivada uma regra de investimento ótimo e uma fórmula explícita para o valor da opção de investir, assumindo que a opção é valorizada por investidores avessos ao risco que são bem diversificados. A mesma análise é aplicada para a decisão de abandono. As simulações mostraram que o valor desta opção pode ser significativo. Deste modo, exploraram a importância prática do valor de esperar para investir, assumindo que as decisões de investimento de tempo são feitas por investidores avessos ao risco que possuem portfólios bem diversificados. Derivaram fórmulas explícitas para o valor da opção de investir num projeto irreversível e a regra para quando investir quando tanto o valor do projeto

como o custo de investimento são estocásticos. As fórmulas permitem calcular exatamente o momento ideal de investimentos, bem como o valor perdido por uma empresa que leva o projeto por um tempo abaixo do ideal.

No seguimento dos estudos efetuados para o momento de investir é também importante avaliar os investimentos sob incerteza. Dixit e Pindyck (1994)[18] fornecem a primeira exposição detalhada de uma nova abordagem teórica para as decisões de investimento de capital das empresas, sublinhando a irreversibilidade da maioria das decisões de investimento e a incerteza contínua do ambiente económico em que essas decisões são tomadas. Ao fazer isso, eles respondem a questões importantes sobre as decisões de investimento e do comportamento das despesas de investimento.

Esta nova abordagem ao investimento reconhece o valor da opção de esperar por melhores (mas nunca por completo) informações. Ela explora uma analogia com a teoria de opções nos mercados financeiros, o que permite um quadro muito mais rico e dinâmico do que era possível com a teoria tradicional de investimento. Os autores apresentam a nova teoria de uma forma clara e sistemática e consolidam, sintetizam e estendem as várias vertentes de pesquisa que vêm de fora da teoria. Mostram no seu livro a importância da teoria para entender o comportamento do investimento das empresas, desenvolvem as implicações desta teoria para a dinâmica da indústria e para a política do governo sobre o investimento e mostram como a teoria pode ser aplicada a indústrias específicas e de uma grande variedade de problemas de negócios.

McDonald e Siegel (1985)[50] desenvolvem e estudam uma metodologia para avaliar projetos de investimento com risco, onde há a opção de temporalidade e sem custo de encerramento de produção, sempre que os custos variáveis excedem as receitas operacionais. É óbvio que as receitas futuras ou custos tem de ser incertos se a opção de encerrar for afetar a decisão de investimento - caso contrário, é sempre conhecido ex ante. A incerteza é introduzida neste trabalho, supondo que os preços e custos seguem um processo estocástico de tempo contínuo, nomeadamente um MGB.

1.3 Motivação

Em resposta às crescentes necessidades dos investidores, particularmente à necessidade de "proteção" face ao risco, assistimos ao aparecimento de instrumentos financeiros inovadores, cada vez mais sofisticados, dos quais se destacam as

opções. A crescente importância assumida pelas opções nos mercados financeiros, o seu contexto particular e a necessidade de avaliar o desempenho de estratégias de investimento com opções parecem assim justificar plenamente uma investigação mais profunda desta temática.

É também pertinente aprofundar as *Compound e Exchange Options*, visto que na avaliação de oportunidades de investimento é importante a análise de situações em que de uma oportunidade de investimento possa surgir uma outra oportunidade de investimento (*Compound Options*) e ainda o facto de se poder trocar um ativo por outro (*Exchange Options*). São questões interessantes no sentido em que para se tomar decisões de investimento tem de se estar preparado para os cenários e as opções possíveis a serem tomadas. No fundo, é essencial constatar que, à medida que o tempo passa, determinadas situações vão ficando mais claras para o investidor – a aprendizagem faz com que as oportunidades e as decisões que sejam necessárias tomar sejam vistas com mais facilidade e presteza.

1.4 Estrutura

O presente documento consiste na dissertação do Mestrado de Análise Financeira, realizado no Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra (ISCAC), e tem como objetivo a análise e aplicação da abordagem das Opções Reais enquanto método de avaliação de oportunidades de investimento – *Compound Options e Exchange Options*.

Numa primeira fase é feito um enquadramento teórico do tema onde são abordados os conceitos básicos sobre opções reais, a Teoria das Opções reais em relação à abordagem tradicional e opções exóticas. Posteriormente serão feitas as aplicações dos modelos de BSM, Geske, Margrabe e Carr, onde se vai evidenciar a interatividade entre os modelos e por fim com base no trabalho de Carr (1988) será feita uma aplicação prática para decisões de Investimento.

1.5 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo geral pesquisar e apresentar a metodologia de avaliação de investimentos com base na teoria de avaliação de opções reais, as suas características, limitações e aplicações.

Este trabalho terá ainda os seguintes objetivos mais específicos:

- Abordar os principais métodos de avaliação de investimentos existentes;
- Apresentar os conceitos báasicos de opções financeiras e as teorias de avaliação mais úteis;
- Apresentar a Teoria das Opções Reais como método de avaliação de investimentos;
- Aplicação prática tendo como base a metodologia desenvolvida por Carr (1988), incluindo a aplicação da fórmula de Margrabe, BSM e Geske;
- Aplicação prática para decisões de investimento de Peter Carr.

Capítulo 2

A Teoria das Opções Reais e Limitações da Abordagem Tradicional

A Teoria das Opções Reais é uma abordagem de avaliação de projetos que pode ser utilizada para analisar decisões de investimento, ou seja, a flexibilidade que um gerente tem para tomar decisões no que respeita a ativos reais. No entanto, o grande diferencial da TOR é que esta valoriza a flexibilidade para reagir a eventos incertos, ou seja, ela preenche a lacuna deixada pelos métodos dos fluxo de caixa descontados, servindo, portanto, para avaliar ativos reais (projetos de investimento).

A Teoria das Opções é um dos suportes das finanças modernas, onde o modelo de avaliação de Black-Scholes (1973) tem um papel fundamental. O modelo pioneiro de Black-Scholes foi desenvolvido para o caso particular em que o preço das ações segue uma distribuição log-normal e a ideia subjacente foi a utilização de uma carteira que replicasse o ativo subjacente e o empréstimo sem risco para cobertura do risco na opção. Visto que o preço das opções é determinado em relação ao ativo subjacente o resultado é uma avaliação parcial. A partir de então, cresceram as pesquisas académicas nas indústrias no campo das opções financeiras, bem como ocorreu uma grande procura por tais instrumentos. Merton (1973) apresentou outro método para derivar a fórmula de Black-Scholes, dando-lhe um campo de aplicação muito mais amplo. Dada a importância deste trabalho a atual teoria das finanças refere-se ao modelo Black-Scholes-Merton (1973).

Os métodos tradicionais de avaliação de projetos de investimento não se alteraram significativamente desde o início do século passado. No entanto, a

incerteza presente nos mercados reais levou a que fosse necessária a introdução desta variável nas metodologias de avaliação, através de um prémio de risco. Apesar destes progressos, vários académicos e gestores questionaram a utilização das técnicas tradicionais por não conseguirem lidar com a flexibilidade operacional e estratégica das empresas [16].

Como já foi referido, as decisões sobre investimentos são tomadas cada vez mais em ambientes de grande incerteza, principalmente devido às grandes oscilações que o mercado tem apresentado. Neste sentido torna-se essencial acompanhar a evolução dos mercados através das consequentes mudanças nos planos traçados para que possam ser tomadas decisões tornando-as dessa forma mais flexíveis. Assim sendo, no que respeita a projetos de investimento em "economia real" onde se tem em conta ações de estratégia na área financeira e de mercado, as opções reais vieram dotar os decisores de alternativas, tratando de enquadrar um investimento dentro da sua especificidade como "expandir", "aguardar" ou "abandonar". São essas possíveis mudanças nos projetos reais que constituem as chamadas opções reais.

A teoria das opções é a melhor abordagem para integrar estratégia e finanças, uma vez que considera, as opções de crescimento e a flexibilidade, ou as formas de adaptação às mudanças do ambiente empresarial, que são o cerne da estratégia empresarial.

Reconhece-se atualmente que as opções reais têm importantes implicações para as finanças empresariais e para a estratégia financeira das empresas e têm ajudado muitos gestores a focalizar a sua atenção no valor da flexibilidade operativa e estratégica tácita nas oportunidades de investimento e desinvestimento. Ao analisar a estratégia de investimento empresarial tendo por base a teoria das opções reais, a resposta à incerteza é feita de forma mais eficaz e são mais proactivos no desenvolvimento e implementação de flexibilidades operacionais e estratégicas como opções reais valiosas que estão implícitas nas suas oportunidades de investimento estratégicas [16].

Os primeiros métodos utilizados na avaliação de projetos que tiveram uma fundamentação teórica de base consideram os projetos como um conjunto de cash flows determinados exogenamente. Esta abordagem pode ser vista em três formas de análise, nomeadamente, a utilização de rácios contabilísticos como medidas de valor económico, a análise neoclássica do investimento e a abordagem tradicional baseada nos cash flows descontados (CFD). Estes dois últimos não se alteraram muito desde os trabalho de Fisher (1930)[22] e de

Hicks (1939)[31].

Tendo em conta a doutrina tradicional, o momento ótimo para uma empresa investir é obtido quando o Valor Atual Líquido (VAL) convencional do projeto é maior que zero. Apesar de esta regra ter fundamentos rigorosos coloca em questão o valor de um projeto visto que não consegue incorporar o valor da flexibilidade operacional, bem como outros aspetos existentes em ambientes de incerteza,[58].

A Teoria das Opções Reais surgiu para colmatar esta lacuna, adaptando o VAL tradicional ao contexto da flexibilidade. Tal é feito adicionando-se o valor da opção da flexibilidade ao VAL tradicional, obtendo-se o chamado VAL estratégico. O VAL tradicional assume, pelo menos implicitamente, que a oportunidade de investimento desaparecerá caso não seja aproveitada imediatamente (é como uma comparação entre o VAL de investir no momento atual com o de nunca investir).

Segundo este panorama, para que o projeto seja aceite é necessário que o seu VAL estratégico seja positivo.

$$\text{VAL Estratégico} = \text{VAL tradicional} + \text{Valor da Flexibilidade}$$

Justamente pela dificuldade em capturar a flexibilidade e de adaptar as decisões futuras em resposta ao desenvolvimento inesperado do mercado, Trigeorgis (1996) critica as abordagens do Fluxo de Caixa Descontado (FCD), que abrange o método do VAL e da TIR. O autor destaca que o FCD tradicional, implicitamente, assume um cenário esperado de fluxos e presume comprometimento passivo da gerência com uma estratégia operacional estática. No entanto, este cenário não é o que realmente se observa, mas sim um cenário onde estão presentes a incerteza, constantes mudanças e interações competitivas. Deste modo e consoante as informações vão surgindo, e a incerteza acerca do mercado se for relevando, surge a possibilidade de redirecionar o planeamento inicial.

Esta visão tradicional em termos reais mostra que a empresa não tem flexibilidade para se adaptar às mudanças que surgem no mercado. A grande maioria das oportunidades de investimento no mundo real são irreversíveis e as empresas têm a possibilidade de adiar a sua decisão de investir, tendo assim alguma flexibilidade quanto ao timing do investimento. Em vez da utilização de uma proposição do tipo *now-or-never* deve pensar-se numa estratégia do tipo *wait and see, maybe now or prabably later, maybe later or probably never* ou *now-or-later*. Assim, deve ser indicado não apenas a decisão de investir mas

também o momento de investir.

O valor da empresa depende da capacidade de criação de valor das suas operações correntes e da sua estratégia relativamente à realização de investimentos futuros. Neste sentido pode dizer-se que qualquer empresa ou cadeia de negócio consiste num conjunto de ativos tangíveis e intangíveis, os ativos em utilização e o valor das oportunidades de crescimento futuras, como é também visto no trabalho de Myers (1977)[54], em que o autor sugeriu que as oportunidades de investimento das empresas possam ser representadas como opções. A importância das opções de crescimento pode ser reconhecida atendendo à diferença entre o valor de mercado do capital próprio da empresa e o valor atual do conjunto dos seus lucros. A principal vantagem da perspetiva da opção de crescimento é que se integra no capital budgeting com planeamento de longo prazo. Dentro da estrutura, o orçamento de capital é simplesmente a execução de um plano de longo alcance da empresa. Operar com uma perspetiva da opção de crescimento permite que os executivos responsáveis se concentrem no objetivo de melhorar o valor do património líquido da empresa, Kester (1984)[41].

A flexibilidade é a questão central em qualquer atividade de negócio e esta tem valor. À medida que vão surgindo novas informações, o risco pode ser gerido através da tomada de decisões [16]. Em algumas avaliações de projetos de investimento a flexibilidade operacional é frequentemente ignorada ou avaliada incorretamente. Este controlo refere-se à capacidade que os gestores da empresa têm para alterar o sentido que determinado projeto está a tomar, através da gestão, em resposta à resolução da incerteza ao longo do tempo.

Apesar do amplo uso de técnicas tradicionais de orçamento de capital, várias críticas têm surgido contra seu uso estático. A crítica está no fato de que essas técnicas são baseadas somente no retorno financeiro: usam somente fatores tangíveis e não levam em consideração os fatores intangíveis, como futura vantagem competitiva, futuras oportunidades e flexibilidade.

Dixit e Pindyck (1994)[18] fornecem a primeira exposição detalhada de uma nova abordagem teórica para as decisões de investimento de capital das empresas, sublinhando a irreversibilidade da maioria das decisões de investimento e a incerteza contínua do ambiente económico em que essas decisões são tomadas. Segundo os autores existem três fatores importantes que influenciam as decisões de investimento, são eles o momento ótimo para a realização do investimento, a incerteza quanto a rendibilidade e o grau de irreversibilidade do projeto, ou seja, quanto pode ser recuperado do investimento inicial. Referem

ainda que os métodos tradicionais, VAL e TIR, utilizados para a análise do investimento, não têm em consideração a interação entre a irreversibilidade, incerteza e o momento ótimo para o investimento.

Hertz (1964)[30] propôs o uso da simulação através de métodos de Monte Carlo.

Magee (1964)[45] sugere as árvores de decisões como um meio de mostrar a anatomia de uma decisão de investimento e de mostrar a interação entre a decisão presente, eventos possíveis, ações de competidores e possíveis decisões futuras e as suas consequências. No entanto essas árvores podem-se tornar bastante complexas, quando se procura representar todos os pontos (nós) de decisão relevantes, assim como os eventos possíveis em cada instante.

Quanto mais complexo for o processo decisório, mais complexa será a árvore. No entanto, o modelo tem a vantagem de explicitar as opções gerenciais disponíveis, o que ajuda a entender o processo decisório, desenvolvendo a intuição de negócios.

Hodder e Riggs (1985)[33] não concordam com o facto das técnicas de CFD serem inadequados para avaliar propostas de investimento de longo prazo ou estratégico. Consideram, no entanto, que as empresas muitas vezes interpretam mal as técnicas de CFD. No seu entender, as técnicas CFD fornecem informações valiosas para ajudar a administração na tomada de decisões de investimento.

Myers (1984)[55] reforça estes argumentos ao reconhecer a existência de aplicações da abordagem tradicional incorretamente, não deixando, no entanto, de referir a existência de limitações na presença de opções operativas e estratégicas, sugerindo que para a avaliação das oportunidades de investimento em ativos reais sejam utilizados modelos baseados na teoria das opções, conciliando assim a teoria das finanças com o planeamento estratégico.

Mason e Merton (1985)[49] analisaram a *Contingent Claims Analysis* (CCA), sendo uma técnica para determinar o preço de um título cujos pagamentos dependem dos preços de um ou mais títulos. A origem da CCA encontra-se na teoria da avaliação de opções. Os autores apresentam uma visão geral da CCA e da sua aplicação a uma variedade de problemas financeiros das empresas, incluindo as decisões de *capital budgeting* e a caracterização do valor de projetos estratégicos como uma série de "opções operacionais". Demostraram, ainda, que a CCA é especialmente indicada para a tarefa de avaliar o que os

estrategistas chamam de "flexibilidade"de um projeto.
No fundo, em mercados caracterizados por mudança, incerteza e interações competitivas, a realização dos fluxos de caixa previstos numa análise irá provavelmente mudar em relação ao que se esperava inicialmente. À medida que novas informações são conhecidas e a incerteza sobre as condições do mercado é gradualmente melhor compreendida, pode existir uma flexibilidade que é importante para alterar a estratégia operacional de forma a proporcionar oportunidades futuras favoráveis ou diminuir perdas relativas às expetativas iniciais.

Este ambiente de incerteza e de competição no qual as empresas estão inseridas tem feito com que procurem uma rápida adaptação às mudanças, investindo em projetos que criem opções, tornando-as, dessa forma, mais flexíveis.

É imprescindível, e cada vez mais importante com a crise que atualmente se atravessa, ficar atento às mudanças económicas que se vão verificando, para que os gestores possam ter acesso a novas informações quanto ao cenário que se possa acontecer. Neste ponto, entra a importância de uma boa análise na hora de investir e de gerir um projeto, visto que poderá potenciar os ganhos ou limitar os riscos.

No entanto, é de realçar que a análise tradicional continua a ter valor. A análise convencional dos CFD é apropriada para avaliar um conjunto importante de problemas de decisão de investimento tendo por base uma gestão passiva. É possível a utilização do VAL tradicional na avaliação de projetos em ambientes económicos de reduzida incerteza ou volatilidade. No entanto, as técnicas tradicionais de avaliação de investimentos não demonstram de forma mais correta o valor da flexibilidade operacional existente e não incorporam o valor estratégico implícito nos projetos de investimento.

Concluindo, um gestor pode limitar-se a uma gestão passiva nas decisões de investimento, ao avaliar projetos futuros de forma menos apropriada e exata, ou poderá optar por procurar analisar da melhor forma e com métodos mais realistas o impacto da volatilidade e da incerteza nas suas decisões de investimento de modo a obter estimativas mais precisas.

Nenhuma metodologia de decisão poderá substituir a experiência, o conhecimento e o pensamento estratégico dos gestores, mas a análise das opções reais é uma metodologia de avaliação de elevado potencial para a tomada de decisões de investimento em ativos reais.

Capítulo 3

Opções Exóticas

Como já foi referido ao longo do trabalho, as opções são instrumentos financeiros utilizados no mercado financeiro. Uma opção confere, ao titular, o direito (e não a obrigação) de comprar ou de vender um determinado ativo por um determinado valor.

Nos últimos anos, os engenheiros financeiros criaram uma variedade de opções complexas que são conhecidas coletivamente como opções exóticas. Os retornos sobre essas opções são muito mais diversificados do que os retornos sobre as opções simples que considerámos.

Torna-se pertinente focar mais pormenorizadamente as opções exóticas, mais concretamente as *Compound Options* e as *Exchange Options* visto que neste trabalho será focada a avaliação de oportunidades tendo em conta essas duas opções.

Para uma *plain vanilla option*,o valor de uma opção depende a qualquer momento em particular apenas do preço atual do bem subjacente, do preço de exercício, da taxa de juro sem risco, da volatilidade do bem subjacente, do tempo até ao vencimento e da taxa de dividendo sobre o bem subjacente. Além disso, existe um bem subjacente fixo, um preço de exercício fixo e estabelecido, um tempo conhecido para a data de vencimento, e sem condições especiais sobre qualquer um dos parâmetros de opção.

No que diz respeito ao preço do bem subjacente, é importante sublinhar que o preço de uma *plain vanilla option* depende somente do preço atual do bem subjacente, então o preço da opção é independente das variações do preço do bem subjacente, ou seja é *Path-Independent*. Muitas *Exotic Options* apresentam dependência da trajetória - o preço da opção de hoje depende da trajetória do

preço anterior ou futuro seguida pelo bem subjacente. Por exemplo, o preço de uma *lookback call option* depende do preço mínimo alcançado pelo bem subjacente durante algum período. Além disso, o preço de uma opção de preço médio depende do preço médio futuro do bem subjacente. Para valorizar uma opção de trajetória-dependente devemos ter informação sobre a trajetória anterior que o preço do bem subjacente atravessou.

Cada tipo de *exotic options*, supera uma limitação particular das *plain vanilla options*. Desta forma, as *exotic options* podem, de alguma forma, servir para um propósito especial que as *standard options* não podem fazer convenientemente.

Em geral, tanto as *exotic options* como os instrumentos de opções reais, são negociados entre empresas, bancos e outros intermediários financeiras e não cotados em bolsa.

Derivados, tais como *European e American call* e *put options* são chamados de produtos *plain vanilla*. Eles têm um padrão de propriedades bem definidas e são comercializados ativamente. Os seus preços ou volatilidades implícitas são cotados por bolsas ou por corretores numa base regular. Um dos aspetos interessantes dos derivativos de mercado *over-the-counter* é o número de produtos fora do padrão que foram criados por engenheiros financeiros. Embora esses produtos geralmente sejam uma parte relativamente pequena da sua carteira, são importantes para um banco de investimento, porque eles são geralmente muito mais rentáveis e oferecem mais flexibilidade do que os produtos *plain vanilla*.

Os produtos exóticos são desenvolvidos por uma série de razões. Por vezes, encontram uma necessidade genuína de cobertura no mercado: há razões contabilísticas, fiscais, legais ou regulamentares que levam os tesoureiros das empresas, gestores de fundos e instituições financeiras a encontrar produtos exóticos atraentes. Às vezes, os produtos são projetados para refletir uma visão potencial sobre os movimentos futuros nas variáveis de mercado específicos. Ocasionalmente um produto exótico é projetado por um banco de investimento para parecer mais atraente do que é para um tesoureiro corporativo incauto ou gestor de fundos.

Existem diferentes tipos de *Exotic Options*, Hull (2005)[34]: *Packages; Nonstandard American Options; Forward start options;* ***Compound options****; Chooser Options; Barrier Options; Binary Options; Lookback Options; Shout Op-*

tions; Asian Options; ***Exchange Options****.*

3.1 Compound options

A *compound option* é uma opção sobre uma opção, isto é quando uma opção é exercida, o ativo subjacente é outra opção.

Existem diferentes tipos de *compound options*: uma *call* sobre uma *call*, uma *put* sobre uma *call*, uma *call* sobre uma *put* e uma *put* sobre uma *put*. Este contrato tem dois preços de exercício e duas datas de exercício.

São especificadas com dois preços de exercício e duas datas de vencimento, um para cada *compound option* e um para cada subjacente da opção. Existem dois prémios de opções possíveis, um é pago antecipadamente para a *compound option*. O outro é pago para a opção subjacente no caso da *compound option* ser exercida. No caso da *compound option* ser exercida, os prémios combinados irão exceder o que teria sido o prémio para a compra da opção subjacente no início.

Os valores das *compound option* são extremamente sensíveis à volatilidade. Fórmulas analíticas mostradas por Geske (1979), Hodges e Selby (1987)[61] e Rubinstein (1991)[59] incorporam a suposição de Black-Scholes de volatilidade constante. Quando é feita a suposição do movimento browniano geométrico, a *European-style compound option* pode ser avaliada analiticamente em termos de integrais da distribuição normal bivariada.

Rubinstein (1995) [60] refere que uma *compound option* é como uma opção *standard*, exceto se o seu ativo subjacente for ele mesmo uma opção *standard*. O objetivo foi valorizar o valor de uma variedade de *compound options* num ambiente de Black-Scholes, ou seja:

- Quando se assume que o ativo subjacente segue uma distribuição lognormal;

- Onde os argumentos de arbitragem permitem usar uma abordagem de avaliação de risco neutro - descontar o retorno esperado das opções no vencimento ou uma abordagem de avaliação recursiva (que se pode repetir de forma infinita), definindo o valor da opção, em qualquer período igual ao valor esperado descontado da opção do último período ou o seu valor exercício antecipado, o que for maior; e

- A taxa de juro sem de risco é utilizada como taxa de desconto e espera-se que o preço do ativo subjacente tenha a mesma taxa livre de risco.

O autor generalizou este resultado a todas as quatro combinações possíveis: *call* sobre uma *call*, *put* sobre uma *call*, *call* sobre uma *put*, e uma *put* sobre uma *put*, e inclui técnicas para opções americanas.

Na literatura das opções podemos encontrar uma fórmula para o valor de uma *call* Europeia sobre uma *call* Europeia.

O *payoff* para uma *compound option* é dado por:

$$max[0, \phi PV_t[max(0, \eta S^* - \eta k|T)] - \phi K] \tag{3.1}$$

Onde:
K, *strike price* da *compound option*;
t, tempo para a maturidade;
k, *strike price* da opção subjacente;
T>t tempo para a maturidade da opção subjacente;
S^* , valor do ativo subjacente é opção subjacente depois de t;
PV_t , valor presente depois de t do valor que resulta da operação entre [ ].;
η , variável binária que toma o valor de 1 quando a opção subjacente é uma *call* e -1 quando é uma *put*;
ϕ , variável binária que toma o valor de 1 para uma *call* sobre uma *call* ou uma *call* sobre uma *put*, e o valor de -1 para uma *put* sobre uma *call* ou de uma *put* sobre uma *put*.

Esta aplicação de *Compound Options* foi primeiro considerada por Geske (1977), seguido de forma similar por Geske (1979), [61] e Rubinstein (1991)[59].

Geske (1979), apresentou uma teoria para valorizar opções sobre opções ou *compound options*. No seu trabalho é derivada a equação de avaliação para uma *call* como uma *compound option* em tempo contínuo, usando um argumento de hedging. A solução contém um termo adicional em relação à solução de Black-Scholes (1973), o que reflete a posição de endividamento da empresa. É esta alavancagem financeira que altera o risco total ou volatilidade do património do acionista como o mercado continuamente reavalia a perspetiva dos fluxos de caixa da empresa. A fórmula derivada tem os atributos desejáveis do modelo Black-Scholes na medida em que não depende de saber o retorno esperado de cada ação ou dos ativos da empresa. Mostra-se que uma abordagem alternativa de cobertura, uma abordagem de risco neutro, e uma abordagem em tempo discreto conduzirão todos ao mesmo resultado. Assim, o modelo

proposto por Geske (1979) tem o potencial para corrigir várias distorções importantes do modelo de Black-Scholes.

Na maioria dos casos qualquer oportunidade com uma escolha cujo valor depende de um ativo subjacente pode ser visto como uma opção. Um contrato especifica as condições da oportunidade. Muitas oportunidades têm uma natureza sequencial, onde as últimas oportunidades estão disponíveis apenas se as oportunidades anteriores forem realizadas.

A principal dificuldade em usar a equação diferencial de Black-Scholes quando se trata de *compound options* é que ele assume que a taxa de variação do retorno da ação é constante. No entanto, com opções de compostos esta variação não é constante, mas depende do nível do preço das ações, ou, mais precisamente, sobre o valor da empresa.

Uma vez que são *European Options*, o detentor da *compound option* não pode exercer antes da data de vencimento da *compound option*. Se a *compound option* for exercida é imediatamente recebida a *call* subjacente. Quando a *compound option* está na data de vencimento, a escolha é simples: paga-se o preço de exercício e recebe-se a opção subjacente ou então não se faz nada e deixa-se expirar a opção. Quando a *compound option* atinge a maturidade, o seu detentor irá exercer a *compound option* se o preço de exercício da *call* subjacente valer mais do que o preço de exercício da *compound option*. Na data de vencimento da *compound option*, a *call* (ou *put*) subjacente pode ser valorizada de acordo com o modelo de Merton.

Antes da data de vencimento da *compound option*, o valor da *compound option* depende do valor do bem subjacente na forma composta. Primeiro, o valor da opção subjacente é em grande parte uma função do valor do bem subjacente, que é a opção subjacente á *compound option*.

3.2 Exchange Options

As *exchange options* surgem em vários contextos. Uma opção para comprar yen com *dollars* australianos, do ponto de vista do investidor, é uma opção para trocar um ativo em moeda estrangeira por outro ativo em moeda estrangeira. Uma oferta pública de aquisição é uma opção de trocar ações num stock por ações noutro stock.

Mediante o exercício, o ativo possuído é trocado por bens adquiridos. A valorização de uma opção de troca depende dos parâmetros habituais para os ativos individuais - preço, risco e taxa de dividendos. Além disso, o tempo até ao vencimento e a correlação de retornos entre os ativos que afetam a avaliação.

Embora as *Exchange Options* tenham sido inicialmente introduzidas por Margrabe (1978) com o seu trabalho "The value of an option to exchange one asset for another", essas opções já existem há algum tempo, sob a forma de regime de incentivo de taxas, contas de margem, ofertas de troca e compromissos de espera.

Margrabe (1978) desenvolveu no seu trabalho uma equação para o valor de uma opção de trocar um ativo por outro dentro de um prazo estipulado. Esta teoria cresceu fora da solução de Black-Scholes (1973) para o problema de avaliação de uma *call option*, que supõe que o preço de uma obrigação de desconto sem risco cresce exponencialmente à taxa de juro sem risco e da extensão de Merton (1973)[52], em que o valor a título de desconto é estocástico, até ao vencimento.

As *Exchange Options* são consideradas como um tipo de opção arco-íris (a única opção ligada a dois ou mais ativos subjacentes. Todos os ativos subjacentes devem mover-se na direção pretendida), em que o payoff de duas variáveis correlacionadas que se identificam da seguinte forma:

$$C = max(0, S_1 - S_2) \tag{3.2}$$

Uma *exchange option* em dois ativos: S_1 e S_2 é essencialmente uma *long call position* em S_1 com um *strike price* de X_2 ou uma *long put position* em S_2 com um *strike price* de X_1.

Blenman e Clark (2005)[8] mostram os resultados de preços para uma opção de trocar o valor de um ativo elevado a uma potência ($S_1^{\alpha 1}$) para o valor de outro ativo elevado a uma potência ($S_2^{\alpha 2}$). Referimo-nos a tais opções como *power exchange options*, uma vez que, simultaneamente, generalizam resultados para ambos os tipos de opções de Fischer-Margrabe de trocar de um ativo por outro e *power options*. Explicitamente resolveram para o preço da *European power exchange option* sob a hipótese de risco-neutro. Usaram também os seus resultados para preços das opções pagando os poderes melhores ou piores de dois ativos. Finalmente, estabelecem condições suficientes para a equivalência dos problemas de preços das *American and European power Exchange options*.

De forma independente, Fischer (1978) e Margrabe (1978) derivam fórmulas

de valorização sob o pressuposto de neutralidade de risco para opções com pagamentos:

$$(S_1(T) - S_2(T))^+ \tag{3.3}$$

Na abordagem de Fischer, S_2 é interpretado como um preço de exercício estocástico em que um ativo S_1 pode ser adquirido, enquanto Margrabe na sua abordagem interpreta o contrato como uma opção de trocar um ativo por outro. A pequena diferença na aparência entre as suas fórmulas de preços é devido ao facto de Fischer permitir a possibilidade de que o preço de exercício estocástico não seja o preço de um ativo comercializado. Assim, é necessário determinar o preço de mercado do risco do preço de exercício, a fim de aplicar a fórmula de Fischer. Na versão do Margrabe, presume-se que ambos os processos são os preços dos ativos negociados.

Blenman e Clark (2005) investigaram uma generalização da opção de Fischer-Margrabe. Especificamente, apresentaram resultados sobre opções de preços, cujos pagamentos são:

$$\phi S_1(T), S_2(T) := (\lambda_1 S_1^{\alpha 1}(T) - \lambda_2 S_2^{\alpha 2}(T))^+ \tag{3.4}$$

Referimo-nos aos contratos que possuem tais pagamentos como *power exchange options*. Estas opções não foram estudadas anteriormente na literatura, apesar de representarem uma generalização simultânea das *Exchange options* de Fischer-Margrabe, bem como *power options*, ambos têm encontrado uma série de aplicações úteis[1].

As *Exchange Options* revelaram-se particularmente úteis no campo do projeto de compensação em que a compensação de opção de ações executivas depende do desempenho relativo das ações de uma empresa em relação a um índice de referência (por exemplo, Johnson e Tian (2000)[40]). Tompkins (1999)[62] discute diversas aplicações de *power options* na cobertura de riscos não-lineares, tais como os provenientes de posições de opção que alterem os níveis de volatilidade implícita.

Na área de criação da compensação, as *power exchange options* podem ser usadas para capturar os ganhos de eficiência de indexação permitindo ao mesmo tempo um melhor controlo das propriedades de alinhamento de incentivos através de uma maior flexibilidade na parametrização do contrato. Os autores mostraram isto demonstrando que as *power exchange options* proporcionam

[1] Zhang (1997) ou Tompkins (1999) para os resultados de valorização de *power options*.

uma generalização natural das opções de ações executivas indexadas estudadas por Johnson e Tian (2000)[40].

Capítulo 4

The Valuation of Sequential Exchange Opportunities

O artigo base já referido anteriormente (i.e. Carr (1988)) suscitou interesse uma vez que demonstra como uma *Compound Exchange Option* pode ser usada em *capital budgeting*. A oportunidade de investir num projeto pode ser caracterizada como uma opção de compra simples sobre o valor dos *cash inflows* do projeto com o preço de exercício igual ao investimento. Se investir num projeto revelar outras oportunidades a *compound option* é adequada.

As oportunidades de troca sequencial são avaliadas usando técnicas de teorias *option-pricing* modernas. O veículo para a análise é o conceito de uma *compound Exchange option*. Neste *paper* é derivada uma fórmula de avaliação para esta opção.

O artigo integra o trabalho de Geske (1979) sobre *compound option pricing*, com o trabalho de Fischer (1978) e Margrabe (1978) sobre *exchange option pricing*.

É desenvolvida a fórmula de avaliação para uma *security* designada de *Compound Exchange Option*, em que o exercício deste instrumento envolve a entrega de um ativo em retorno de uma opção de troca. A opção recebida mediante a entrega, em seguida, pode ser usada para fazer uma outra troca numa data posterior.

Sempre que uma troca de ativos cria o potencial para novas trocas, existem oportunidades de troca sequencial. Para simplificar, assume-se que o tempo e as condições de cada possível transação são conhecidos com antecedência.

É mostrado que qualquer número finito de trocas pode ser avaliado. No entanto, e mais uma vez para simplificar, apenas as duas últimas operações em qualquer série foi normalmente examinada. Para manter a análise tratável, o ativo entregue em cada troca é assumido como sendo o mesmo. Apesar desta limitação, a fórmula pode ser utilizada numa grande variedade de contextos.

É ainda de referir que Black e Scholes (1973) no seu trabalho examinam como os acionistas de uma empresa alavancada são considerados detentores de uma *call option* sobre os ativos da empresa e como os pagamentos de cupões compõem este tipo de opções. Com apenas dois pagamentos remanescentes, os acionistas têm a opção de pagar o cupão ou de abandono. Ao fazer o penúltimo pagamento, os acionistas recebem a opção de default no vencimento da obrigação. Modelando o capital desta forma, Geske (1977) explicitamente valoriza isto como uma *compund call option*. Também o capital próprio pode ser visto como uma *compound exchange option* se for tido em conta que os títulos com vencimento (obrigações prestes a vencer) são entregues em vez de ser feito o pagamento. Visto desta forma, também é possível valorizar o capital próprio se a dívida estiver denominada em moeda diferente da dos ativos. Neste caso, o capital próprio é uma *compound exchange option*, em que o ativo entregue em cada troca é um título estrangeiro.

A avaliação de uma *compound exchange option* também tem implicações fora das finanças corporativas. Margrabe (1978) discute como as taxas de incentivo ao desempenho podem ser avaliados como *exchange options*. Supondo que a taxa de um gestor de carteiras será composta por uma porção da diferença de valor, se positiva, entre a sua carteira e algumas carteiras de referência (benchmark), então, a taxa do gerente é proporcional ao lucro obtido a partir da troca da carteira de referência pela gerida.

4.1 Pressupostos e Distribuições de Resultados

O primeiro grande resultado de Carr (1988) é uma generalização da paridade *put-call* para as *compound exchange options*. Um segundo resultado desenvolve condições em que uma *American exchange option* pode ser avaliada como Europeia. São ainda desenvolvidos os limites de preços para as *compound exchange options*.

Todos os ativos derivados examinados no trabalho são *exchange options*. Esta

opção dá ao seu titular o direito de trocar um ativo por outro.

- O ativo cedido é denominado o ativo de entrega. O ativo recebido é chamado o objeto da opção. Esses ativos são referidos coletivamente como ativos subjacentes.

- A *exchange option* pode ser simples ou composta. Se um ativo subjacente é outra opção, a opção original é considerada composta. Caso contrário, a opção de troca é simples.

- A *exchange option* pode ainda ser classificada como Americana ou Europeia.

A fórmula de avaliação desenvolvida é para *European compound exchange options*. No entanto, a fórmula é apresentada para se aplicar às opções americanas sob determinados pressupostos.

São eles:

- Mercados sem fricção: Não há custos de transação, indivisibilidades ou impostos diferenciais. A venda a descoberto é permitida sem restrições.

- Distribuição de ativos idênticos: Todas as opções da série têm a mesma vantagem de entrega.

- Termos de troca conhecidos: Os tempos e os termos de cada transação possível são conhecidos na data da avaliação.

- Não há pagamentos: Nenhum ativo faz quaisquer pagamentos ao longo da vida das opções.

- Duas últimas trocas: Um investidor pode comprar uma *Compound Exchange Option* (CEO), escrito sobre uma *Simple Exchange Option* (SEO).

De seguida, apresenta-se a notação utilizada:

q, relação de troca da CEO (é obtido para ser constante, ou no máximo, uma função determinística do tempo);

t,data da avaliação/valorização;

T_c, data de expiração da CEO;

$\tau_c \equiv T_c - t$, tempo para a expiração da CEO;

T_s, data da maturidade do SEO onde $T_s > T_c$;

$\tau_s \equiv T_s - t$, tempo para a maturidade da SEO;

$\tau \equiv \tau_s - \tau_c$, tempo entre a expiração das duas opções;

C, indica o valor de uma *American CEO*;

c, indica o valor de uma *European CEO*;

S, indica o valor de uma *American SEO*;

s, indica o valor de uma *European SEO*;

V, indica o valor de do ativo opcional do SEO;

D, indica o valor dos ativos de entrega comuns.

Usando esta notação, a relação funcional entre o valor da *Simple Exchange Option* e as variáveis relevantes podem ser expressas como $s(V, D, \tau_s)$.
A distribuição de resultado da paridade *Put-Call* para *European Exchange option* é generalizada por Margrabe [3].

Teorema da paridade: *European Exchange options satisfy*

$$s(V, D, \tau_s) = V - D + s(D, V, \tau_s) \tag{4.1}$$

Uma vez que uma opção americana nunca tem um preço abaixo do seu valor de exercício, o facto de poder ser exercida antecipadamente é redundante.

Como esse recurso é a única distinção entre uma opção americana e europeia, um segundo teorema mostra[4] :

[3]Todos os teoremas dependem dos cinco primeiros pressupostos. A suposição de não-pagamento é particularmente crítica para o Teorema da Equivalência.

[4]Quando os dois ativos pagam dividendos a taxas constantes, o Teorema de equivalência vale quando a taxa de dividendos do ativo objeto da opção é menor do que a entrega do bem. Este resultado explica porque as *American calls* não sejam exercidas antecipadamente, enquanto *American puts* podem ser.

Teorema da Equivalência: Uma *American Exchange option* será avaliada como se fosse uma *Europeian Exchange option.*

$$S(V, D, \tau_s) = s(V, D, \tau_s) \tag{4.2}$$

Este teorema permite que a equação de paridade seja reexpressa em termos de opções americanas.

4.2 Pressupostos de Distribuição e Fórmula

Para este propósito foi adicionado um pressuposto sobre a dinâmica de retorno dos ativos subjacentes. A fórmula contém as soluções de Black e Scholes (1973), Margrabe (1978) e Geske (1979) como casos especiais, assumindo que os investidores concordam com o seguinte processo estocástico para o retorno do ativo.

- Retorno dinâmico do ativo subjacente: As taxas de retorno dos ativos subjacentes V e D são descritas pelas equações diferenciais estocásticas:

$$\frac{d\tilde{V}}{V} = \alpha_v dt + \sigma_v d\tilde{Z}v \tag{4.3}$$

e

$$\frac{d\tilde{D}}{D} = \alpha_d dt + \sigma_d d\tilde{Z}d \tag{4.4}$$

onde:

α_v e α_d, são as taxas de retorno esperadas sobre os dois ativos por unidade de tempo;

σ_v^2 e σ_d^2, são as taxas de variação correspondentes;

dZv e DZd são os incrementos para processos *standard Wiener* com coeficiente de correlação p.

Esta dinâmica tem a importante propriedade da distribuição de retorno ao longo de qualquer intervalo ser independente do nível de preços inicial. Para processos com essa característica, pode ser provado o seguinte teorema:

Teorema da homogeneidade:A função de preço C do CEO é linearmente homogénea no preço do ativo subjacente V e D.

$$\forall \lambda \geq 0, C(S(\lambda V, \lambda D, \tau_s), q\lambda D, \tau_c) = \lambda C(S(V, D, \tau_s), qD, \tau_c) \tag{4.5}$$

Equação de Avaliação de uma CEO:

A equação para a avaliação de uma *Compound Exchange Option* é a solução da equação fundamental que implica que o retorno deve ser zero (sendo que como a carteira de cobertura é sem custos e sem risco, a condição de não arbitragem implica essa condição face ao retorno), sujeita com as condições de fronteira usando a solução de Margrabe,$VN_1(d_1(P)) - DN_1(d_2(P)) \geq C \geq 0$, e condição terminal $C(S, qD, 0) = max(0, VN_1(d_1(P)) - DN_1(d_2(P)) - qD)$:

$$\begin{aligned} C(S(V, D, \tau_s), qD, \tau_c) = & \; VN_2(d_1(\frac{P}{P^*}, \tau_c), d_1(P, \tau_s)) \\ & - DN_2(d_2(\frac{P}{P^*}, \tau_c), d_2(P, \tau_S)) \\ & - qDN_1(d_2(\frac{P}{P^*}, \tau_c)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $N_2(a, b, c)$ é a função de distribuição normal bivariada, $N_2(a, b, \rho) = \int_{-\infty}^{a} f(x) N_1(\frac{b-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}) dx$,com coeficiente de correlação $\rho = \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau_s}}$ e N_1 é a distribuição normal univariada, $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$d_1(y, \tau) \equiv \frac{\ln y + (r_f - q + 0,5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{4.7}$$

$$d_2(y, \tau) \equiv \; d_1(y, \tau) - \sigma\sqrt{\tau} \tag{4.8}$$

$$P \equiv \; \frac{V}{D} \tag{4.9}$$

Relativamente à fórmula 4.7 foi necessário fazer uma retificação em relação à que consta no artigo de Carr (1988), na página 1243.

Tal como a fórmula de Black-Scholes, não há dependência direta sobre as taxas de retorno não observáveis esperadas α_v e α_d. Como a fórmula de Margrabe não presume que a estrutura de termo das taxas de juros são flat ou mesmo conhecida, e à semelhança da fórmula de Geske, o resultado não depende diretamente do valor da opção simples, S, o que poderá não ser observável em certas aplicações.

Sob restrições de determinados parâmetros, a solução produz as fórmulas de avaliação de Margrabe (1978), Geske (1979), e Black e Scholes (1973) como casos especiais, e que serão demonstrados mais a frente na aplicação prática.

- Se a relação de troca desaparece ($q = 0$), de modo a que a *Compound Exchange Option* possa ser exercida livremente, a fórmula colapsa para o resultado de Margrabe para uma *Simple Exchange Option* com maturidade τ_s.

- Se a relação de troca, q, for positiva, mas o ativo de entrega não for aleatório ($\sigma_d = 0$), então a fórmula tende para a solução de Geske, para a *Compound Call Option*, sobre a condição de uma taxa de juro constante r.

- Se a relação de troca, q e o ativo de entrega σ_d, for nulo então a fórmula tende para a solução de Black-Scholes (1973).

Capítulo 5

Aplicação

De um modo geral, o funcionamento do mercado de opções baseia-se na possibilidade de comprar uma opção de compra ou de venda de ativos, tendo em conta um preço acordado, até uma data futura determinada.

Se o valor do ativo ultrapassa o valor acordado dentro do período, o comprador da opção compra o ativo, caso contrário, não há necessidade de comprá-lo.

Como já foi referido anteriormente, a aplicação prática desta dissertação irá ter por base o trabalho de Carr (1988) onde é desenvolvida uma fórmula para as *European Compound Exchange Options* (que poderá ser aplicada para *American Options* sob determinados pressupostos).

Em primeiro lugar foram feitas as aplicações dos modelos de BSM (1973) para *standard options*, de Margrabe (1979) para *Exchange options* e de Geske (1979) para as *compound options* e é mostrado em simultâneo como se pode obter o resultado de BSM através dos restantes modelos tendo em conta determinadas condições.

Podemos então observar na tabela abaixo a aplicação do **modelo de Black Scholes para as *Standard Options***.

As fórmulas utilizadas para este modelo foram as seguintes:

$$c_t = S_t e^{-q(T-t)} N(+d_1) - K e^{-r(T-t)} N(+d_2) \tag{5.1}$$

$$p_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d_2) \tag{5.2}$$

BSM Model (1973)		
Inputs of the BSM model		
Stock price	S_t	10.00
Strike price	K	2.00
Riskless interest rate	r	0.00%
Time to maturity	*tau* = T - t	5.0000
Stock volatility	s	20.00%
Dividend yied	q	0.00%
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1	d_1	3.822419
Parameter d_2	d_2	3.375206
Cumulative normal distribution for d_1	$N(d_1)$	0.999934
Cumulative normal distribution for d_2	$N(d_2)$	0.999631
Cumulative normal distribution for $-d_1$	$N(-d_1)$	0.000066
Cumulative normal distribution for $-d_2$	$N(-d_2)$	0.000369
European option prices using the BSM model		
Call option price	c_t	8.000077
Put option price	p_t	0.000077

Figura 5.1: *Aplicação do modelo de Black Scholes (1973)*

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - q + 0.5\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \tag{5.3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \tag{5.4}$$

onde:

Ct, é o preço da *call option* ou do prémio da *call option* em t;

Pt, é o preço da *put option* ou do prémio da *put option* em t;

St, é o stock price em t;

K, é o preço de exercício ou *strike price* da opção;

T, é a maturidade da opção;

r, é a taxa de juro sem risco;

q, é o *dividend yield.*

A fórmula de BSM utiliza na sua equação seis variáveis (valor do ativo, valor de exercício da opção, taxa de juro, prazo, volatilidade e *dividend yield*) para obter o preço justo das opções.

O parâmetro $N(d_2)$, dá-nos a probabilidade da opção terminar ITM (*In-the-money*), em que interessa exercer o direito da opção, enquanto que o parâmetro $N(-d_2)$, nos dá a probabilidade da opção terminar OTM (*Out-of-the-money*), onde não interessa exercer o direito da opção. Isto para uma call option na ótica do comprador.

O trabalho de BSM fornece um quadro teórico geral para a avaliação de opções de ações e deriva uma fórmula simples para avaliar uma opção de compra europeia para ações que não pagam dividendos. Existem no entanto extenções do modelo que permitem avaliar outro tipo de opções.

Este modelo pode ainda ser ajustado de modo a ser utilizado para avaliar a situação líquida de uma empresa alavancada. Neste caso o valor da situação líquida é tida em conta como uma opção de compra europeia sobre o valor da empresa.

Neste caso temos um S_t de 10 e opção de compra com c_t= 8. Só interessa exercer a opção se $S_T > K$, mas só será possível tomar essa decisão em T. Analisando $N(d_2)$ e $N(-d_2)$, verificamos que a opção está deep ITM, por isso é que c_t é elevado face ao strike. Para o valor da put option, só interessa exercer o direito da opção de vender caso $S_T < K$.

Relativamente ao **modelo de Margrabe para as *Exchange Options***, podemos ver na tabela que se segue, que o mesmo tende para o resultado de BSM, quando temos $\sigma_2 = 0$, $x_2 = K$, $q_2 = r$ e $q_1 = q$.

A fórmula de avaliação de Margrabe (1978) é dada por:

$$W(x_1, x_2, t) = x_1 e^{-q_1 \tau} N(d_1) - x_2 e^{-q_2 \tau} N(d_2) \tag{5.5}$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2} + (y_2 - y_1 + 0.5v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}} \tag{5.6}$$

Margrabe Model (1979)			
Inputs of the Margrabe model			
Price of asset one	x_1		10.00
Price os asset two	x_2		2.00
Time to maturity	*tau* = T - t		5.0000
Volatility of asset 1	$sigma_1$		20.00%
Volatility of asset 2	$sigma_2$		0.00
Dividend yield of asset 1	q_1		0.000%
Dividend yield of asset 2	q_2		0.000%
Correlação	*rho*		0.00
Cumulative normal distribution computations			
Volatility	sigma		0.200000
Parameter d_1	d_1		3.822419
Parameter d_2	d_2		3.375206
Cumulative normal distribution for d_1	$N(d_1)$		0.999934
Cumulative normal distribution for d_2	$N(d_2)$		0.999631
Cumulative normal distribution for $-d_1$	$N(-d_1)$		0.000066
Cumulative normal distribution for $-d_2$	$N(-d_2)$		0.000369
European option prices using the Margrabe model			
European option prices to exchange one asset for another	w	ct	8.000077
		pt	0.000077

Figura 5.2: *Aplicação do modelo de Margrabe (1979), obtendo o resultado de BSM*

$$d_2 = d_1 - v\sqrt{t^* - t} \tag{5.7}$$

onde:

$w(x_1, x_2, t)$ *European option prices to exchange one asset for another*;

x_1 e x_2 são o preço do ativo 1 e o preço do ativo 2 respetivamente;

q_1 e q_2 são o dividend yield do ativo 1 e 2 respetivamente.

Estes tipos de opções permitem no fundo que o detentor da opção possa trocar um ativo por outro e são usados normalmente nos mercados de câmbio, mercados de títulos e mercados de ações, entre outros.

Por exemplo: A uma empresa-alvo é oferecida a oportunidade de trocar as ações da empresa-alvo por ações da empresa adquirente. Os acionistas da empresa-alvo passam a deter uma *Exchange option* para trocar as suas ações

pelas da adquirida. O valor desta opção pode variar desde zero até a um valor considerável. Analisando este exemplo tendo em conta a aplicação acima mostrada teríamos um valor da opção de 8.

Por fim relativamente ao **modelo de Geske para as *Compound Options*** de modo a que o resultado tenda para a solução de BSM é necessário que se pressuponha uma firm's debt=0, T=infinito ou M=0. É ainda necessário assumir que q=0. Neste caso tomei como pressuposto colocar M próximo de 0. A implementação deste modelo teve ainda como suporte o trabalho de Hull (2005) para as *Compound Options*.

Geske Model (1979)		
Inputs of the Geske model		
Valor de mercado da ação	S	1.20
Current market value of the firm	V	10.00
Critical value of firm assets	V*	2.00
Second face value of the debt	M	0.0000001
First face value of the debt	K	2.0000
Riskless interest rate	r_F	0.00%
Time to maturity	tau = T - t	4.0000
Volatility	$sigma$	20%
Instantaneous variance of the return on the assets of the firm	$sigma_V^2$	4.00%
Desvio Padrão - volatilidade	$sigma_V$	20.00%
Time to expiration of the CEO	tau_1=t*-t	5.0000
Time to maturity of the SEO	tau_2=T-t	5.0000
Dividend yied	q	0%
Binary variable for the underlying option	h	1
Binary variable for the compound option	f	1
Cumulative normal distribution computations		
Parameter h	h	3.822418
Parameter h_1	h_1	3.375205
Parameter k	k	41.413501
Parameter k_1	k_1	40.966288
Cumulative normal distribution for h	N(h)	0.999631
Bivariate cumulative normal distribution computations		
Bivariate cumulative normal distribution function	N_2 (h+$sigmav$*raizQtau_1,k+sigmav*raizQtau_2)	0.999934
Bivariate cumulative normal distribution function	N_2(h,k)	0.999631
Correlation coefficient		1.000000
European option prices using the Geske model		
Valor de mercado da opção de Compra	C	
Call on a call		8.000077

Inputs of the BSM model		
Critical asset price	S*	2.00
Strike price of the underlying asset	K_2	0.00
Riskless interest rate	r	0.00%
Time to maturity	tau = T - t	4.0000
Stock volatility	s	20%
Dividend yied	q	0%
Cumulative normal distribution		
Parameter d_1	d_1	42.2281
Parameter d_2	d_2	41.8281
Cumulative normal distribution for d N(hd_1)		1
Cumulative normal distribution for d N(hd_2)		1
European-style option price using the BSM		
Option price		2.0000
Error		0.0069

Figura 5.3: *Aplicação do modelo de Geske Model (1979), obtendo o resultado de BSM*

A fórmula de Geske (1979) é dada por:

$$
\begin{aligned}
C = & VN_2(h + \sigma_V\sqrt{\tau_1}, k + \sigma_V\sqrt{\tau_2}; \sqrt{\tau_1/\tau_2}) \\
& - Me^{-r_F\tau_2}N_2(h; k; \sqrt{\tau_1/\tau_2}) \\
& - Ke^{(-r_F\tau_1)}N_1(h)
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

$$
h = \frac{\ln(\frac{V}{V}) + (r_F - 0.5\sigma_V^2)\tau_1}{\sigma_V\sqrt{\tau_1}} \tag{5.9}
$$

$$
K = \frac{\ln\frac{V}{M} + (r_F - 0.5\sigma_V^2)\tau_2}{\sigma_V\sqrt{\tau_2}} \tag{5.10}
$$

Onde:

C é o valor da *compound option*;
V é o valor de mercado da empresa;
V* é o valor crítico dos ativos da empresa;
K é o primeiro valor da dívida;
M é o segundo valor da dívida;
rf é a taxa de juro sem risco;
h e f são a variável binária da opção subjacente e a variável binária da *compound option* respetivamente;
τ_1 e τ_2 são o tempo para a maturidade da CEO e da SEO respetivamente.

Como o valor das *compound options* é sensível à volatilidade, esta fórmula analítica mostrada por Geske assume, tal como em Black Scholes, que a volatilidade é constante.

Nesta aplicação é mostrado o cálculo de uma *call* sobre uma *call*. Na primeira data de exercício τ_1 o detentor da *compound option* tem o direito de pagar o primeiro preço de exercício, K1, e receber a call option. A call option dá ao detentor o direito de comprar o ativo subjacente pelo segundo preço de exercício, M, na segunda data de exercício, τ_2.

A *compound option* será exercida na primeira data de exercício se e só se o valor da opção na data for maior do que o primeiro preço de exercício, o que se verifica nesta aplicação, K=2 e o valor da opção é de 8.

O proprietário da *compound call*, tem até à data de vencimento da compound option para decidir se exerce a opção. Em caso afirmativo, vai receber a call

option subjacente, com o seu próprio preço de exercício e tempo até ao vencimento. Se essa opção subjacente for exercida, recebe o ativo subjacente.

Importa ainda mostrar este último modelo sem as condições acima definidas para que se possa verificar que se consegue obter o mesmo resultado quando utilizada a fórmula 5.14 (que é demonstrada numa aplicação mais á frente) de Carr (1988).

Geske Model (1979)

Inputs of the Geske model		
Valor de mercado da ação	S	1.20
Current market value of the firm	V	10.00
Critical value of firm assets	V*	8.46
Second face value of the debt	M	9.00
First face value of the debt	K	2.0000
Riskless interest rate	r_F	5.75%
Time to maturity	*tau* = T - t	4.0000
Volatility	*sigma*	20%
Instantaneous variance of the return on the assets of the firm	$sigma_V^2$	4.00%
Desvio Padrão - volatilidade	$sigma_V$	20.00%
Time to expiration of the CEO	tau_1=t*-t	1.0000
Time to maturity of the SEO	tau_2=T-t	5.0000
Dividend yied	*q*	0%
Binary variable for the underlying option	*h*	1
Binary variable for the compound option	*f*	1
Cumulative normal distribution computations		
Parameter h	h	1.221968
Parameter h_1	h_1	1.021968
Parameter k	k	1.102070
Parameter k_1	k_1	0.654856
Cumulative normal distribution for h	N(h)	0.846602
Bivariate cumulative normal distribution computations		
Bivariate cumulative normal distribution function	N_2 (h+*sigmav**raizQtau_1,k+sigmav*raizQtau_2)	0.793221
Bivariate cumulative normal distribution function	N_2(h,k)	0.669226
Correlation coefficient		0.447214
European option prices using the Geske model		
Valor de mercado da opção de Compra	C	
Call on a call		1.815519
Put on a Put		1.438534
Call on a put		0.000403
Put on a call		0.003145

Inputs of the BSM model		
Critical asset price	S*	8.46
Strike price of the underlying asset	K_2	9.00
Riskless interest rate	*r*	5.75%
Time to maturity	*tau* = T - t	4.0000
Stock volatility	*s*	20%
Dividend yied	*q*	0%
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1	d_1	0.6211673
Parameter d_2	d_2	0.2211673
Cumulative normal distribution for d_1	N(hd_1)	0.7327552
Cumulative normal distribution for d_2	N(hd_2)	0.5875189
European-style option price using the BSM		
Option price		2.0000
Error		0.0000

Figura 5.4: *Aplicação do modelo de Geske (1979) obtendo o mesmo resultado da aplicação da eq.5.14 de Peter Carr*

Combinando os valores de eta e phi, como se pode verificar na tabela que apresento, obtém-se cada uma das quatro possíveis *compound options* do paper de Rubinstein (1991)[59].
Podemos verificar que a *Call on a Call* nos dá o resultado dado pela eq. 5.8 (Geske 1979) e o valor dado pela eq. 5.14 (Peter Carr 1988). Phi e eta tomam

	eta - η	phi - ϕ
Call on a Call	1	1
Call on a Put	-1	1
Put on a Call	1	-1
Put on a Put	-1	-1

Tabela 5.1: Combinação de valores de Eta e Phi

o valor de 1 e tem de se assumir que $q = 0$.

Ainda de referir que para se obter o *Critical value of firm assets* (V*) utilizou-se a ferramenta "Solver" do excel, em que se obriga a célula de "Error"a tomar o valor de 0 por alteração da célula "Critical Asset Price", na tabela auxiliar que se apresenta nas aplicações deste modelo (Inputs of the BSM model).

Em que, V^*= valor de V para que $S_t^* - K = 0$.

$$S_t^* - K = VN_1(k + \sigma_v\sqrt{\tau} - Me^{-rF\tau}N_1(k) - K = 0 \tag{5.11}$$

De seguida é então apresentada a **aplicação de *real options*** para o modelo apresentado por Carr (1988) e desenvolvido no capitulo anterior, utilizando a fórmula de avaliação aí desenvolvida (f. 4.6).

Podemos então verificar que utilizando a fórmula 4.6 obtemos uma *European Compound Exchange Option* de 8 aproximadamente. Para se obter o Critical price ratio (P*) utilizou-se a ferramenta "Solver" do excel, em que a célula de destino é a do Critical Value, para obter o valor de 0 por alteração de P*. Sendo P* definido por:

$$P^*N_1(d_1(P^*)) - N_1(d_2(P^*)) = q \tag{5.12}$$

Através deste modelo conseguimos também obter as soluções dos casos particulares de Margrabe (1979), Geske (1979) e de BSM (1973), tendo em conta determinados pressupostos sendo eles:

1) Se $q = 0$ tende para o resultado de Margrabe;:

2) Se $q > 0$ e $\sigma_d = 0$ tende para o resultado de Geske;

3) Se $q = 0$ e $\sigma_d = 0$ tende para o resultado de BSM.

Peter Carr Model (1988)		
Inputs of the Peter Carr model		
Optioned asset of the SEO (Simple Exchange option)	V	10.00
Critical ratio	P*	0.13
Common delivery asset	D	2.00
Option Price	P=V/D	5.0000
Riskless interest rate	r_F	5.75%
Time between the expirations of the two options	tau = T - t	4.0000
Time to expiration of the CEO	tau_c=T_c-t	1.0000
Time to maturity of the SEO	tau_s=T_s-t	5.0000
Exchange ratio of the CEO	q	0.00
Instantaneous variance	$sigma_V^2$	4.0%
Desvio Padrão - volatilidade	$sigma_V$	20%
	$sigma_d$	0%
	$sigma$	20%
	$sigma^2$	4%
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1 (P/P*,tau_c)	d_1 (P/P*,tau_c)	18.534004
Parameter d_1 (P, tau_s)	d_1 (P,tau_s)	3.822419
Parameter d_2 (P/P*,tau_c)	d_2 (P/P*,tau_c)	18.334004
Parameter d_2 (P, tau_s)	d_2 (P,tau_s)	3.375206
Cumulative normal distribution for d_2 (P/P*,tau_c)	N(d_2) (P/P*,tau_c)	1.0000
Bivariate cumulative normal distribution computations		
Bivariate cumulative normal distribution function for d_1 ((P/P*,tau_c),(P,tau_s))	N_2(d_1) (P/P*,tau_c), (P,tau_s)	0.9999
Bivariate cumulative normal distribution function for d_2 ((P/P*,tau_s),(P,tau_s))	N_2(d_2) (P/P*,tau_c), (P,tau_s)	0.9996
Correlation coefficient		0.4472
European Compound Exchange option using the Peter Carr model		
European Compound Exchange option (CEO)	**C(S(V,D,tau_s), qD, tau_c)**	**8.000077**
Critical Value		
Parameter d_1 (P*, tau)	d_1 (P*,tau)	-4.9934
Parameter d_2 (P*, tau)	d_2 (P*,tau)	-5.4406
Cumulative normal distribution for d_1 (P*, tau)	N(d_1) (P*,tau)	0.0000
Cumulative normal distribution for d_2 (P*, tau)	N(d_2) (P*,tau)	0.0000
Critical value		0.0000

Figura 5.5: *Aplicação do modelo de Peter Carr (1988)*

De outra forma e aplicando as fórmulas simplificadas, dadas neste paper de Peter Carr, para cada um dos casos e as condições já referidas podemos ver que se obtém os mesmos resultados.

Neste sentido, **utilizando o pressuposto 1), a fórmula colapsa para o resultado de Margrabe (1978)**, eq.5.5, para uma *Simple Exchange Option* com maturidade τ_s :

$$C(S(V, D, \tau_s), 0D, \tau_c) = VN_1(d_1(P)) - DN_1(d_2(P)) = S(V, D, \tau_s) \qquad (5.13)$$

Peter Carr Model (1988) - Margrabe Result		
Inputs of the Peter Carr model		
Optioned asset of the SEO (Simple Exchange option)	V	10.00
Common delivery asset	D	2.00
Option Price	P=V/D	5.0000
Riskless interest rate	r_F	5.75%
Time between the expirations of the two options	tau = T - t	5.0000
Time to expiration of the CEO	tau_c=T_c-t	
Time to maturity of the SEO	tau_s=T_s-t	5.0000
Exchange ratio of the CEO	q	0.00
Instantaneous variance	$sigma_v^2$	4%
Desvio Padrão - volatilidade	$sigma_v$	20%
	$sigma_d$	0%
	$sigma$	20%
	$sigma^2$	4%
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1 (P, tau_s)	d_1 (P,tau_s)	3.822419
Parameter d_2 (P, tau_s)	d_2 (P,tau_s)	3.375206
Cumulative normal distribution for d_1 (P, tau_s)	d_1 (P,tau_s)	0.999934
Cumulative normal distribution for d_2 (P, tau_s)	d_2 (P,tau_s)	0.999631
European Simple Exchange option using the Peter Carr model		
European Compound Exchange option (CEO)	C(S(V,D,tau_s), qD, tau_c) = S(V,D,tau_s)	8.000077

Figura 5.6: *Aplicação do modelo de Carr (1988) - Obtendo o resultado do modelo de Margrabe*

Utilizando o **pressuposto 2)** e com uma condição adicional em que a taxa de juro, r, seja constante então a fórmula **tende para a solução de Geske (1979)**, eq. 5.8, para a *Compound Call Option*.

$$\begin{aligned} C(S(V,D,\tau_c),K,\tau_s) = & \, V N_2(d_1(\frac{V}{V^* e^{-r\tau_c}}), d_1(\frac{V}{F^* e^{-r\tau_s}}) \\ & - F e^{-r\tau_s} N_2(d_2(\frac{V}{V^* e^{-r\tau_c}}), d_2(\frac{V}{F e^{-r\tau_s}})) \\ & - K e^{-r\tau_c} N_1(d_2(\frac{V}{V^* e^{-r\tau_c}}) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Em que,

K, é o preço de exercício da *simple call*
F, preço de exercício da *compound call*,
V*, valor critico que se obtém através de:

$$V^* N_1(d_1(\frac{V^*}{F\exp^{-r\tau}})) - Fe^{-r\tau} N_1(d_2(\frac{V^*}{Fe^{-r\tau}})) = K \tag{5.15}$$

Mais concretamente o valor de V^* obtém-se utilizando a ferramenta "Solver"do excel, em que a célula de destino é a do "*Critical value*", para obter o valor de 2 (K) por alteraçãoo de V^*.

Peter Carr Model (1988) - Geske Result		
Inputs of the Peter Carr model		
Optioned asset of the SEO (Simple Exchange option)	V	10.00
Critical Ratio	V*	8.46
Exercice price of compound calls	F	9.00
Exercice price of simple calls	K	2.0000
Riskless interest rate	r_F	5.75%
Time between the expirations of the two options	tau = T - t	4.0000
	$sigma$	20%
Time to expiration of the CEO	tau_c=T_c-t	1.0000
Time to maturity of the SEO	tau_s=T_s-t	5.0000
Exchange ratio of the CEO	q	0.01
Instantaneous variance	$sigma_v^2$	4%
Desvio Padrão - volatilidade	$sigma_v$	20%
	$sigma_d$	0%
	$sigma$	20%
	$sigma^2$	4%
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1 (V/V*e^{-rtau_c})	d_1 (V/V*e^{-rtau_c})	1.221968
Parameter d_1 (V/Fe^{-rtau_s})	d_1 (V/Fe^{-rtau_s})	1.102070
Parameter d_2 (V/V*e^{-rtau_c})	d_2 (V/V*e^{-rtau_c})	1.021968
Parameter d_2 (V/Fe^{-rtau_s})	d_2 (V/Fe^{-rtau_s})	0.654856
Cumulative normal distribution for d_2(V/V*e^{-rtau_c})	N(d_2) (V/V*e^{-rtau_c})	0.8466
Bivariate cumulative normal distribution computations		
Bivariate cumulative normal distribution function for d_1 ((V/V*e^{-rtau_c}), (V/Fe^{-rtau_s}))	N_2(d_1) (V/V*e^{-rtau_c}), (V/Fe^{-rtau_s})	0.793221
Bivariate cumulative normal distribution function for d_2 ((V/V*e^{-rtau_c}), (V/Fe^{-rtau_s}))	N_2(d_2) (V/V*e^{-rtau_c}), (V/Fe^{-rtau_s})	0.669227
Correlation coefficient		0.447214
European Compound Exchange option using the Peter Carr model		
European Compound Exchange option (CEO)	C(S(V,F,tau_c), K, tau_s)	1.815519
Parameter d_1 (V*/Fe^{-rtau})	d_1 (V*/Fe^{-rtau})	0.62117
Parameter d_2 (V*/Fe^{-rtau})	d_2 (V*/Fe^{-rtau})	0.22117
Cumulative normal distribution for d_1(V*/Fe^{-rtau})	N(d_1) (V*/Fe^{-rtau})	0.732755
Cumulative normal distribution for d_2(V*/Fe^{-rtau})	N(d_2) (V*/Fe^{-rtau})	0.587519
Critical value		1.999999

Figura 5.7: *Aplicação do modelo de Carr (1988) - Obtendo o resultado do modelo de Geske*

Se $phi = 1$ e $eta = 1$, obtém-se o valor dado pela eq.5.8 de Geske (1979) e o valor dado pela eq. 5.14 de Carr (1988).

Por último para que a fórmula tenda para a **solução de Black Sholes (1973)**, eq. 5.1, utiliza-se o **pressuposto 3)**.

$$C(S(V, F, \tau_s), 0 \times K, \tau_c) = VN_1(d_1(\frac{V}{Fe^{-r\tau_s}})) - Fe^{-r\tau_s}N_1(d_2(\frac{V}{Fe^{-r\tau_s}})) \quad (5.16)$$

Peter Carr Model (1988) - BSM Result		
Inputs of the Peter Carr model		
Optioned asset of the SEO (Simple Exchange option)	V	10.00
Exercice price of compound calls	F	2.00
Riskless interest rate	r_F	0.00%
Time between the expirations of the two options	tau = T - t	5.0000
Time to expiration of the CEO	tau_c=T_c-t	
Time to maturity of the SEO	tau_s=T_s-t	5.0000
Exchange ratio of the CEO	q	0%
Instantaneous variance	$sigma_v^2$	4%
Desvio Padrão - volatilidade	$sigma_v$	20%
	$sigma_d$	0%
	$sigma$	20%
	$sigma^2$	4%
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1 (V/Fe^{-rtaus})	d_1 (V/Fe^{-rtaus})	3.822419
Parameter d_2 (V/Fe^{-rtaus})	d_2 (V/Fe^{-rtaus})	3.375206
Cumulative normal distribution for d_1(V/Fe^{-rtaus})	N(d_1) (V/Fe^{-rtaus})	0.999934
Cumulative normal distribution for d_2(V/Fe^{-rtaus})	N(d_2) (V/Fe^{-rtaus})	0.999631
European Compound Exchange option using the Peter Carr model		
European Compound Exchange option (CEO)	C(S(V,F,tau_s), tau_c)	8.000077

Figura 5.8: *Aplicação do modelo de Carr (1988) - Obtendo o resultado do modelo de BSM*

A Decisão de Investimento

Feitas as aplicações em opções financeiras, pretende-se de forma mais concreta mostrar a aplicação para a tomada de decisão com aplicação em opções reais.

De forma resumida e de forma a enquadrar a aplicação em questão recordemos que na abordagem tradicional o $NPV > 0$ indica á partida que se deve aceitar o projeto. Muitos autores reconhecem que atrasar um projeto pode ter um NPV maior do que aceitar imediatamente um NPV positivo, o que é mais aceitável uma vez que as decisões sobre investimentos são tomadas cada vez mais em ambientes de grande incerteza sendo necessário ponderar as decisões.

Este momento da opção (atrasar o projeto) foi avaliado por McDonald e Siegel (1985)[50] como uma *American Exchange Option.*

Posto isto, o investimento num projeto corresponde ao exercício de uma opção. O valor de uma *finite-lived American Exchange Option* pode ser determinado utilizando a teoria de avaliação CEO.
McDonald e Siegel (1985)[50], mostram que o valor corrente da *European Exchange Option* é determinada por:

$$S(V, D, \tau_s, \delta_v, \delta_d) = Ve^{-\delta_v \tau_s} N_1(d_1(Pe^{-\delta \tau_s})) - De^{-\delta_d \tau_s} N_1(d_2(Pe^{-\delta \tau_s})) \quad (5.17)$$

Onde $\delta = \delta_v - \delta_d$, sendo δ_v e δ_d, a diferença constante entre o equilíbrio das taxas de retorno esperadas μ_v e μ_d e as taxas de variação percentuais esperadas.

De referir que para uma yield estritamente positiva ($\delta_d > 0$), o exercício prematuro da American Option é racional apenas para valores suficientemente elevados do ativo de entrega, V. Assim sendo a fórmula acima referida apenas é aplicável a American Options caso $\delta_v = 0$.

Para avaliar uma *American Exchange Option*, supõem-se inicialmente que só pode ser exercida em T_c ou em T_s. Se o projeto for rejeitado agora, pode ser aceite apenas em T_c ou em T_s. Em T_c, caso aceite o projeto a empresa recebe o VPL do projeto $\tilde{V} - \tilde{D}$ (valor das receitas – valor dos custos). No caso de rejeitar, a pseudo-*American Exchange Option* reverte numa opção de troca simples dada pela fórmula 33.

A empresa só atrasa o projeto em T_c caso o benefício de atrasar exceda o custo de oportunidade:

$$Pe^{-\delta_v \tau} N_1(d_1(Pe^{-\delta\tau}) - e^{-\delta_d \tau_s} N_1(d_2(Pe^{-\delta\tau})) > P - 1 \tag{5.18}$$

Seja Q* é o valor de P que torna a equação 32, uma igualdade. Deve ser interpretado como um *threshold* point que vai influenciar o exercício da opção em Tc.

Se P<Q*, a opção não será exercida em T_c e reverte numa *European Exchange Option* com o valor de S(V,D,tau).

Se P>Q*, a opção é exercida em T_c e rende V-D.

	At time Tc	
At Valuation Date	**If P<Q***	**If P>Q***
Long s(V,D,τ_s)	(V,D,τ)	(V,D,τ)
Long s(V,Q*D,τ_c)	0	V-Q*D
Short c(s(V,D,τ_s),(Q*-1)*D,τ_c)	0	Q*D-D-(V,D,τ)
	(V,D,tau)	V-D

Tabela 5.2: Pricing American call options on stocks paynd discrete dividends

A tabela mostra um portfolio de três *European Exchange Options*, que foi desenvolvida por Roll (1977)[57], para a avaliação de *American Exchange Options*:

- A primeira opção é a *European* contraparte da *American Option* para ser replicada;
- A segunda opção implica trocar Q* unidades de D por uma de V;
- A terceira opção é a CEO que envolve trocar Q*-1 unidades de D pela primeira *European Option*.

Para que se possa entender melhor, a pseudo-*American Exchange Option* é semelhante ao portfolio de duas *European Exchange Options* cada uma com uma data possível. No entanto se a opção Americana for exercida antecipadamente não pode ser exercida na maturidade.

Esta característica é contabilizada escrevendo uma *compound option* na opção de *long-maturity*. Os termos de troca na *compound option* e *short-maturity* são definidos de modo a que os dois sejam exercidos sempre que o exercício precoce seja racional. Neste caso o exercício simultâneo das duas EEO leva

ao recebimento do valor de exercício e entrega da long-maturity option. Se o exercício antecipado for injustificável, então estas duas opções expiram inutilmente e a *European Option* é retida.

As duas primeiras opções podem ser calculadas pela f.5.17. A terceira opção pode ser calculada utilizando a fórmula para a *European CEO*:

$$\begin{aligned} c(s(V, D, \tau_s, qD, \tau_c; \delta_v, \delta_d)) = & Ve^{-\delta_v \tau_s} N_2(d_1(\frac{Pe^{-\delta\tau_c}}{P^*}), d_1(Pe^{-\delta\tau_s})) \\ & - De^{-\delta_d \tau_s} N_2(d_2(\frac{Pe^{-\delta\tau_c}}{P^*}), d_2(Pe^{-\delta\tau_s}) \\ & - qD^{-\delta_d \tau_c} N_1(d_2(\frac{P^{-\delta\tau_c}}{P^*})) \end{aligned} \tag{5.19}$$

Onde: δ_v e δ_d , são dividend yields das taxas de retorno esperadas μ_v e μ_d respeticamente.

Em que P* satisfaz:

$$P^* e^{-\delta_v \tau} N_1(d_1(P^* e^{-\delta\tau}) - e^{-\delta_d \tau} N_1(d_2(P^* e^{-\delta\tau})) = q \tag{5.20}$$

Tendo em conta o paper de Carr (1988) para a Decisão de Investimento, os passos que segui para a análise foram os seguintes:

1º Cálculo do valor de atrasar e o custo de oportunidade, uma vez que a empresa só atrasa o projeto em Tc caso o benefício de atrasar exceda o custo de oportunidade;

2º Cálculo da EEO pela equação 5.17, uma vez que se obteve no passo anterior um valor de atrasar superior ao custo de oportunidade;

3º Cálculo da pseudo-American timing option (t.o):

$$\begin{aligned} t.o. = & Ve^{-\delta_v \tau_s} N_2(-d_1(\frac{Pe^{-\delta\tau_c}}{Q^*}), d_1(Pe^{-\delta\tau_s}); -\sqrt{\frac{\tau_c}{\tau_s}}) \\ & - De^{-\delta_d \tau_s} N_2(-d_2(\frac{Pe^{-\delta\tau_c}}{Q^*}), d_2(Pe^{-\delta\tau_s}; -\sqrt{\frac{\tau_c}{\tau_s}}) \\ & + Ve^{-\delta_v \tau_c} N_1(d_1(\frac{Pe^{-\delta\tau_c}}{Q^*})) \\ & - De^{-\delta_d \tau_c} N_1(d_2(\frac{Pe^{-\delta\tau_c}}{Q^*})) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Importa ainda realçar que nesta aplicação utilizei uma yield estritamente positiva ($\delta_v > 0$). Assim sendo a fórmula para a *European Exchange Option* não é aplicável a *American Options*.

Podemos então verificar que o valor de atrasar o projeto é superior ao custo de oportunidade. Sendo assim a empresa opta por atrasar o projeto em T_c, desta forma a pseudo-*American Exchange Option* reverte numa *Simple Exchange Option* dada pela equação 31 do paper.

O mesmo se verifica analisando o P de 1,1 tendo um Q* de 2. Ficamos com um t.o de 1,79. P<Q*. A opção não é exercida em T_c e passa para EEO.

Fazendo a mesma análise mas com um P de 1,1 tendo um Q* de 0,1 ficamos com um t.o de 0,94. P>Q*. A opção é exercida em T_c e rende V-D.

Peter Carr (1988) - Investment Decision		
Inputs		
Optioned asset of the SEO (Simple Exchange option)	V	10.00
Common delivery asset	D	9.00
Option Price	P=V/D	1.1111
Time between the expirations of the two options	tau = T - t	4.0000
Time to expiration of the CEO	tau_c=T_c-t	1.0000
Time to maturity of the SEO	tau_s=T_s-t	5.0000
Dividend Yield	δ_v	1.00%
	δ_d	0.50%
	δ	0.50%
Desvio Padrão - volatilidade	$sigma$	20%
	Q^*	2.0000
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1	d_1	0.413401
Parameter d_2	d_2	0.013401
Cumulative normal distribution for d_1	$N(d_1)$	0.660344
Cumulative normal distribution for d_2	$N(d_2)$	0.505346
Benefit of delaying		0.2096
Oportunity cost	**P-1**	0.1111
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1	d_1	0.403298
Parameter d_2	d_2	-0.043915
Cumulative normal distribution for d_1	$N(d_1)$	0.656636
Cumulative normal distribution for d_2	$N(d_2)$	0.482486
European Exchange option	**S(V,D,tau_s; yv, yd)**	2.0110
Cumulative normal distribution computations		
Parameter d_1	d_1	-2.863933325
Parameter d_2	d_2	-3.063933325
Cumulative normal distribution for d_1	$N(d_1)$	0.0021
Cumulative normal distribution for d_2	$N(d_2)$	0.0011
Parameter d_1	d_1	0.4480
Parameter d_2	d_2	0.0008
Cumulative normal distribution for d_1	$N(d_1)$	0.6729
Cumulative normal distribution for d_2	$N(d_2)$	0.5003
Bivariate cumulative normal distribution computations		
Bivariate cumulative normal distribution function for d_1	$N_2(d_1)$	0.670879
Bivariate cumulative normal distribution function for d_2	$N_2(d_2)$	0.499282
Correlation coefficient		0.447214
Timing Option		
t.o		1.7852
V-D		1.0000

Figura 5.9: *Decisão de Investimento*

Capítulo 6

Conclusões

Do trabalho realizado constatou-se que os tradicionais métodos existentes para a avaliação de projetos, não se alteraram significativamente. Apesar disso oferecem vantagens, nomeadamente no caso do VAL, a facilidade de cálculo, mas apenas depois de conhecida uma taxa de atualização apropriada e é conceptualmente mais perfeito e complexo que o período de retorno uma vez que considera a totalidade dos fluxos assim como o custo de oportunidade do capital utilizado.

No entanto, estes métodos não conseguem lidar com a flexibilidade operacional e estratégica da empresa, o que é um fator fundamental na avaliação de projetos para que se consigam tomar decisões em ambientes de incerteza e constante mudança, sendo esta uma realidade cada vez mais presente.

Para atenuar estas situações surgiu a teoria das opções reais, que consegue moldar o VAL ao contexto da flexibilidade.

Neste sentido, procurou-se com este trabalho apresentar os conceitos mais revelantes relacionados com opções financeiras, de forma a proporcionar uma melhor compreensão da metodologia de avaliação de investimentos reais através da teoria das opções reais.

Em seguida procurou-se apresentar de forma sucinta os métodos tradicionais de avaliação, focando as suas limitações e dificuldades no processo decisório e a flexibilidade e a incerteza que permeiam a tomada de decisões de investimentos.

É ainda apresentado de um modo geral o conceito e as principais características de duas opções exóticas: *Exchange Option* e *Exotic Option*.

Nas aplicações efetuadas é usada a teoria moderna de avaliação. Pretendeu-se implementar vários modelos de opção reais que podem ser utilizados e demonstrar como uns podem ser casos particulares de outros obtendo-se os mesmos resultados consoante determinadas condições. Foi ainda mostrado como é que se pode tomar uma decisão de investimento através de opções reais.

Pretende-se assim com estre trabalho contribuir para a compreensão dos mecanismos de avaliação de projetos de investimento e de opções financeiras aplicadas a investimentos reais. Sendo este um assunto bastante amplo e passível de muitas outras pesquisas, pretendeu-se ainda ter chamado a atenção para estes aspetos específicos e a sua importância para as finanças.

Ao implementar os modelos de opções reais demonstrados ao longo deste trabalho percebi que são de alguma complexidade matemática, o que talvez seja um fator de resistência para a adoção mais ampla destas metodologias.

Sendo assim, poderia ser feita uma pesquisa futura no desenvolvimento informático destas metodologias, que permitissem ao usuário criar facilmente simulações.

Em conclusão e de acordo com o entender de Ferreira [21], a teoria das opções é cada vez mais complexa e o seu impacto nas estruturas financeiras aponta no sentido favorável atinente ao alargamento das possibilidades de transação e à modificação estrutural do sistema financeiro. Neste sentido as opções não parecem ser ativos redundantes, tendendo, por isso, a produzir alterações nos preços relativos dos vários ativos e no equilíbrio de bem-estar da economia.

Bibliografia

[1] Peter W. Duck David P. Newton Ari D. Andricopoulos, Martin Widdicks. Universal option valuation using quadrature methods. *Journal of Financial Economics*, 67:447–471, 2003.

[2] K. J. Arrow. The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing. *Review of Economic Studies*, 31:91–96, 1964.

[3] C. Baldwin. Optimal sequential investment when capital is not readily reversible. *Journal of Finance*, 37:43–64, 1982.

[4] Ben S Bernanke. Irreversibility, uncertainty, and cyclical investment. *Quart. Journal Econ.*, 98:85–106, 1983.

[5] F. Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3:167–179, 1976.

[6] F. Black and M. Scholes. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *Journal of Finance*, 27:399–418, 1972.

[7] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy,*, 81:503–515, 1973.

[8] Clark Steven P. Blenman, Lloyd P. Power exchange options. *Finance Research Letters*, 2:97–106, 2005.

[9] M. Brennan and E. Schwartz. Evaluating natural resource investments. *Journal of Business*, 58:135–157, 1985.

[10] M. J. Brennan and E. S. Schwartz. The valuation of american put options. *Journal of Finance*, 32:449–462, 1977.

[11] Michael Rothschild Brock William and Joseph Stightz. Stochastic capital theory. *University of Wisconsin SSRI Working Paper*, 1983.

[12] P. Carr. The valuating of sequential exchange opportunities. *The Journal of Finance*, 43:1235–1256, 1988.

[13] Schwartz E. S. Salinas M. Cortazar, G. Evaluating environmental investments: A real options approach. *Management Science*, 44:1059–1070, 1998.

[14] Ross S. Rubinstein M. Cox, J. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–263, 1979.

[15] G. Debreu. *The Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium.* New York: John Wiley, 1959.

[16] J. C. Dias. *Investimentos em Ativos Reais e Estratégia Financeira.* 2006.

[17] J. C. Dias. *Real option Valuation.* 2012.

[18] A. Dixit and R. Pindyck. *Investment Under Uncertainty.* Princeton U. press, 1994.

[19] F. Mdigliani e M. Miller. The cost of capital, corporation finance and the theory of investiment. *The American Economic Review*, 47:261–297, 1958.

[20] E. Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25:383–417, 1970.

[21] Domingos Ferreira. *Opções Financeiras – Gestão de Risco, Especulação e Arbitragem*, volume 2. Edições Silabo, 2009.

[22] S. Fischer. The theory of interest. *Macmillan, New York*, 1930.

[23] S. Fischer. Call option pricing when the exercise price is uncertain, and the valuation of index bonds. *Journal of Finance*, 33:169–176, 1978.

[24] Q. Fu. On the valuation of an option to exchange one interest rate for another. *Journal of Banking and Finance*, 20:645–653, 1996.

[25] R. Geske. The valuation of corporate liabilities as compound options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12:541–552, 1977.

[26] R. Geske. The valuation of compound options. *Journal of Financial Economics*, 7:169–172, 1979.

[27] S. Ghosh and M. D. Troutt. Complex compound option models – can practitioners truly operationalize them? *European Journal of Operational Research*, 222:542–552, 2012.

[28] R Jarrow e A. Morton Heath, D. Bond pricing and the term structure of interest rates: A discret time aproximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25:419–440, 1990.

[29] R Jarrow e A. Morton Heath, D. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology. *Econometrica*, 60:77–105, 1992.

[30] D. B. Hertz. Risk analysis in capital investment. *Harvard Business Review*, 42:95–106, 1964.

[31] J. R. Hicks. Value and capital. *Clarendon Press, Oxford*, 1939.

[32] T. S. Y. Ho and S. B. Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41:1011–1029, 1986.

[33] J. E. Hodder and H. E. Riggs. Pitfalls in evaluating risky projects. *Harvard Business Review*, 63:128–135, 1985.

[34] John C. Hull. *Options, Futures and other Derivatives*, volume 6. Pearson Prentice, 2005.

[35] Venezia Itzhak. A bayesian approach to the optimal growth period problem. *Journal of Finance*, pages 237–46, 1979.

[36] Venezia Itzhak and Menachem Brenner. The optimal duration of growth investments and search. *Journal of Business*, pages 393–407, 1979.

[37] Mossin J. Equilibrium in a capital asset marquet. *Econometrica*, 34:768–783, 1966.

[38] K. Jensen and P. Warren. The use of options theory to value research in the service sector. *R D Management*, 31:173–180, 2001.

[39] P. Gould John and D. Galai. Transactions costs and the relationship between put and call prices. *Journal of Financial Economics*, 1:105–129, 1974.

[40] Tian Y.S. Johnson, S.A. Indexed executive stock options. *Journal of Finance*, 57:35–64, 2000.

[41] W. C. Kester. Today's options for tomorrow's growth. *Harvard Business Review*, 62:153–160, 1984.

[42] John Lintner. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47:13–37, 1965.

[43] Yu-Hong Liu. Valuation of compound option when the underlying asset is non-tradable. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13:441–458, 2010.

[44] Timothy A. Luehrman. Investment opportunities as real options: Getting started on the numbers. *The Journal of Finance*, 76:51–67, 1998.

[45] J. F. Magee. How to use decision trees in capital investments. *Harvard Business Review*, pages 126–28, 1964.

[46] S. & R.S. Pindyck Majd. Time to build, option value, and investment decisions. *Journal of Financial Economics*, 18:7–27, 1987.

[47] W. Margrabe. The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance*, 33:177–186, 1978.

[48] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.

[49] S. P. Mason and R. C. Merton. The role of contingent claims analysis in corporate finance. *Division of Research Graduate School of Business Administration Harvard University*, 1985.

[50] R. L. McDonald and D. R. Siegel. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down. *International Economic Review*, 23:331–349, 1985.

[51] R. L. McDonald and D. R. Siegel. The value of waiting to invest. *The Quarterly Journal of Economics*, 101:707–727, 1986.

[52] R. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3:125–144, 1973.

[53] R. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics & Management*, 4:141–183, 1973.

[54] S. C. Myers. Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics*, 5:147–175, 1977.

[55] S. C. Myers. Finance theory and financial strategy. *Interfaces*, 14:126–137, 1984.

[56] Siegel D. Paddock, J. and J. Smith. Option valuation of claims on real assets: The case of offshore petroleum leases. *Quarterly Journal of Economics*, 103:479–508, 1988.

[57] R. Roll. An analytic valuation formula for unprotected american call options on stocks with known dividends. *Financial Economics*, 5:251–258, 1977.

[58] S.A Ross. *Uses, Abuses, andd alternatives to the net-present-value rule.*, volume 3. Business Management, 1995.

[59] M. Rubinstein. One for another. *Risk 4*, pages 30–32, 1991.

[60] M. Rubinstein. Double trouble. *Risk 5*, 1995.

[61] Hodges S. D. Selby, M. J. P. On the evaluation of compound options. *Management Science*, 33:347–355, 1987.

[62] R.G. Tompkins. Power options: Hedging nonlinear risks. *Journal of Risk*, 2:29–45, 2000.

[63] L. Trigeorgis. The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options. *The Journal of Financial and Quantitative Analysise*, 28:1–20, 1993.

[64] Lenos Trigeorgis. *Real options in Capital Investmente.* 1995.

[65] Sharpe W. Capital asstet prices: a theory of marquet equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19:425–442, 1964.