



Hugo Emanuel
Penelas dos Santos

A EFICIÊNCIA DO CRITÉRIO DE KELLY: TESTE COMPARATIVO COM ÍNDICES DE AÇÕES

Relatório de Dissertação do Mestrado em
Contabilidade e Finanças

ORIENTADOR

Doutor Francisco Leote

Fevereiro 2022

Hugo Emanuel
Penelas dos Santos

**A EFICIÊNCIA DO CRITÉRIO DE
KELLY: TESTE COMPARATIVO
COM ÍNDICES DE AÇÕES**

JÚRI

Presidente: Professora Doutora, Susana Silva,
Instituto Politécnico Setúbal

Orientador: Professor Doutor, Francisco Leote,
Instituto Politécnico Setúbal

Vogal: Professor Doutor, Nuno Teixeira, Instituto
Politécnico Setúbal

Fevereiro 2022

Primeiramente, dedico este trabalho a Deus, por me dar o dom da vida e a capacidade intelectual de o ter terminado.

Dedico também este trabalho aos meus pais José e Lurdes bem como aos meus tios Jorge e Olga, por terem sempre estado do meu lado e acreditarem sempre em mim.

“Não há lugar para a sabedoria onde não há paciência”

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me ter dado a graça da conclusão deste trabalho, agradeço também a toda a minha família, em especial aos meus pais José e Lurdes, tios Jorge e Olga, Luis e Paula e aos meus primos Jorge e Tânia, pois sem eles não seria a pessoa que sou hoje,

Agradeço de uma forma especial ao meu primo Fernando Afonso, por todo o apoio e ajuda na elaboração deste trabalho.

Tenho também que agradecer ao Dr. André Bittencourt pela indicação de alguns autores e locais para pesquisa.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao Instituto Politécnico de Setúbal, em especial ao meu orientador, Professor Doutor Francisco Leote, por toda a paciência que teve que ter para me ajudar a terminar este meu trabalho.

Resumo

Segundo Damodaran (2009), o risco é o principal impulsionador da evolução humana, desde as primeiras ferramentas criadas até a terapia genética. Como é sabido, o maior receio de um investidor, é perder o investimento, isso significa que os investidores procuram sempre métodos de se protegerem do risco a que estão expostos quando fazem uma aplicação financeira.

Neste sentido o objetivo deste trabalho é testar o critério de Kelly, para perceber se com a sua adoção existe uma maximização do lucro e mitigação das perdas.

Para demonstrar a eficiência do critério de Kelly foram aplicados alguns testes práticos do seu funcionamento, nomeadamente testes de Monte Carlo.

Para responder ao objetivo do trabalho desenvolveu-se uma análise comparativa de investimentos em alguns dos principais índices de mercado, para o período de 2001 a 2020. Para isso, foi testado um investimento anual de 10.000,00€ no PSI20, FTSE100 e Dow Jones, e posteriormente foi feito o mesmo exercício, mas utilizando o critério de Kelly como base para o investimento.

Após esta análise, concluiu-se que para o PSI20 embora o índice tenha tido uma queda de quase 60% no decurso das duas últimas décadas, com a adoção do critério de Kelly existem ganhos de aproximadamente 4% no investimento. Nos casos do FTSE100 e do Dow Jones, houve uma diferença, pois ambos os índices tiveram uma evolução positiva, e um investidor que aplicasse o seu capital nestes dois índices teria tido ganhos superiores ao obtido através da aplicação do critério de Kelly. Porém é importante sublinhar, que com a adoção do critério de Kelly tanto no caso do FTSE100 que teve ganhos de aproximadamente 5% como no Dow Jones que teve ganhos de aproximadamente 50%, nos períodos de queda dos índices, esta foi muito menor por conta da proteção que o critério de Kelly dá ao investidor.

Palavras-chave: Critério de Kelly; Risco financeiro; Mercado financeiro; Bolsas de valores

Abstract

According to Damodaran (2009), risk is the main driver of human evolution, since/from the first tools created to gene therapy. As is known, the biggest fear of an investor is to lose the investment, which means that investors always look for methods to protect themselves from the risk they are exposed to when making a financial investment.

In this sense, the objective of this work is to test the Kelly criterion, to see if with its adoption there is a maximization of profit and mitigation of losses.

To demonstrate the efficiency of the Kelly criterion, some practical tests of its operation were carried out, namely Monte Carlo tests.

To respond to the objective of the work, a comparative analysis of investments in some of the main market indices was developed, for the period from 2001 to 2020. For this, an annual investment of € 10,000.00 was tested in PSI20, FTSE100 and Dow Jones , and later the same exercise was performed, but using the Kelly criterion as base for the investment.

After this analysis, it was concluded that for the PSI20, although the index has fallen by almost 60% over the last few decades, with the adoption of the Kelly criterion, there were gains of approximately 4% in investment. In the cases of the FTSE100 and the Dow Jones, it was different, as both had a positive evolution, and an investor who put his capital in these two indices would obtain higher gains if he used the Kelly criterion.

However, it is important to emphasize that with the adoption of the Kelly criterion, both in the case of the FTSE100, which had gains of approximately 5%, and in the Dow Jones, which had gains of approximately 50%, in periods of falling indices this was much lower due to the protection that the Kelly criterion gives the investor.

Keywords: Kelly Criterion; Financial risk; Financial market; stock exchanges

Índice

Introdução	1
1 História do mercado financeiro.....	3
1.1 Origem do mercado financeiro	3
1.2 Idade Media.....	5
1.3 Era moderna	7
2 Mercados Financeiros de ações	9
2.1 Risco dos mercados de ações.....	10
2.2 Índices de mercados financeiros.....	12
2.2.1 Dow Jones.....	13
2.2.2 FTSE100	15
2.2.3 PSI 20	17
3 Critério de Kelly	19
3.1 A origem do critério de Kelly	19
3.2 A aplicação do critério de Kelly em investimentos no mercado de ações	19
4 Metodologia	31
5 Resultados	38
5.1 Evolução do Psi 20.....	38
5.2 Evolução FTSE100.....	40
5.3 Evolução Dow Jones	43
5.4 Comparação dos índices.....	46
6 Conclusão	50
7 Bibliografia.....	52
8 Apêndices	55
8.1 Evolução índices	55
8.2 Evolução índices	66

Índice Gráficos

Gráfico 1: Evolução Dow Jones	14
Gráfico 2: Evolução semestral FTSE100	16
Gráfico 3: Evolução Semestral PSI20	18
Gráfico 4: 25 Investimentos Dispersão	24
Gráfico 5: 50 Investimentos Dispersão	24
Gráfico 6: 75 Investimentos Dispersão	25
Gráfico 7: 100 Investimentos Dispersão	26
Gráfico 8: Média Retorno do Investimento	27
Gráfico 9: PSI 20 vs Kelly	40
Gráfico 10: FTSE100 vs Kelly	43
Gráfico 11: Dow Jones vs. Kelly.....	45
Gráfico 12: Comparação Rendibilidades.....	46
Gráfico 13: Investimento 10.000€ nos Índices.....	47
Gráfico 14: Investimento 10.000€ com Kelly	49

Índice Tabelas

Tabela 1 : Resultado dos Investimentos	23
Tabela 2 : Taxa Livre de risco 2000-2020.....	32
Tabela 3 : Total Risco Mercado	33
Tabela 4 : Evolução de Mercado	34
Tabela 5 : Rendibilidade 2000.....	35
Tabela 6 : Variância 2000	36
Tabela 7 : Desvio Padrão 2000.....	36
Tabela 8 : Investimento PSI20 10.000€	38
Tabela 9 : Investimento PSI20 com Kelly 10.000€.....	39
Tabela 10 :Retorno FTSE100 (10000€)	41
Tabela 11 : Retorno FTSE100 com Kelly	42
Tabela 12 : Retorno Dow Jones 10.000€.....	44
Tabela 13 : Retorno com Kelly 10.000€	45

Introdução

Segundo Damodaran (2009), o risco é o principal impulsionador da evolução humana, desde as primeiras ferramentas criadas até a terapia genética. O risco está associado à incerteza relativamente ao futuro. Ele existe porque no presente, não é possível estimar com exatidão as ocorrências futuras (Pinho & Tavares, 2012). Com isto, pode afirmar-se que o risco é proporcional à recompensa, quanto maior for o risco, maior é também a recompensa.

Como é sabido, o maior receio de um investidor, é perder o capital que aplica, isso significa que os investidores financeiros procuram sempre métodos de se protegerem do risco a que estão expostos quando fazem uma aplicação financeira.

A perda de capital em investimentos financeiros é uma realidade muito presente na vida dos investidores. Desta forma, os investidores tentam proteger-se deste risco de diversas formas, nomeadamente com a diversificação de investimentos, aplicações em fundos de investimento ou mesmo aplicações em índices de mercado.

Embora existam diversos modelos e técnicas de análise de risco financeiro no mercado de capitais, e de como os investimentos devem ser aplicados, neste trabalho será testado o critério de Kelly quanto a sua eficiência e eficácia para este propósito.

Um dos investidores que mais utilizou o critério de Kelly com sucesso foi o Dr Thorp, porém não foi o único, Thorp foi um dos primeiros a testar o critério de Kelly com sucesso, tanto no mercado financeiro como nas mesas de jogos (Poundstone William, 2005).

Mais recentemente investidores como Mohnish Pabrai e Warren Edward Buffett, que confessaram usar o critério de Kelly em todas as aplicações que realizam e com muito sucesso. No artigo de Kuepper (2021), é explicado como pode ser aplicado o critério de Kelly, tanto em apostas, como no mercado financeiro.

É também demonstrado por Yoder (2021), que o critério tem uma grande eficiência. Neste trabalho é testado um investimento, com uma probabilidade de sucesso de 52% e com a adoção do critério, ao final de 1.000 aplicações, a riqueza do investidor aumentou 44%, o que para uma tão baixa probabilidade de vitória, é algo notável.

O principal objetivo deste trabalho, é perceber se com a adoção do critério de Kelly, é possível ter uma maximização do lucro e uma mitigação do risco de investimento. Sabendo que investindo com o critério de Kelly, pode ser feita uma aplicação em apenas um produto financeiro, não necessitando de diversificar a carteira para se proteger do risco de mercado. O

critério de Kelly oferece ao seu utilizador a certeza de no médio longo prazo exponenciar os ganhos do investimento e nunca chegar a falência.

Para demonstrar a eficiência do critério de Kelly foram aplicados alguns testes práticos do seu funcionamento, nomeadamente testes de Monte Carlo.

Para responder ao objetivo do trabalho desenvolveu-se uma análise comparativa dos resultados de um investimento com base no critério de Kelly com os resultados de alguns dos principais índices de mercado, para o período de 2001 a 2020. Para isso, foi testado um investimento anual de 10.000,00€ no PSI20, FTSE100 e Dow Jones, posteriormente foi feito o mesmo exercício, mas utilizando o critério de Kelly como base para o investimento. No final comparam-se os resultados para analisar a eficiência do critério de Kelly no que a proteção do risco e a maximização do lucro diz respeito.

Para isso, os dados dos riscos dos países e da evolução do mercado foram extraídos dos sites do Pordata e do site do Aswath Damodaran, sendo os dados da evolução dos índices recolhidos do site do investing.com.

Este trabalho, está estruturado da seguinte forma, em primeiro lugar uma descrição da evolução do mercado financeiro desde os seus primórdios até ao momento atual. Passando depois a abordar o tema do critério de Kelly, com uma breve introdução ao seu criador, John Kelly JR. e a uma abrangente explicação de todos os passos para o cálculo do critério.

Posteriormente é feita a análise e comparação dos resultados obtidos no estudo, sendo calculados e analisados os resultados obtidos. Por fim encontram-se as conclusões sobre o desempenho do critério de Kelly no que a mitigação do risco e maximização dos resultados diz respeito.

1 História do mercado financeiro

1.1 Origem do mercado financeiro

Existem indícios, que muito antes do surgimento da primeira moeda, em alguns lugares eram realizadas atividades que podem muito bem ser consideradas como o início das funções financeiras. Uma das atividades mais importantes e talvez primordial em relação à atividade financeira, tenha sido o escambo¹, atividade que ajudou o comércio por muito tempo. Embora não seja propriamente considerada uma atividade financeira, pode ser descrita como um dos seus primórdios.

Na antiguidade os poderes sociais estavam na dependência dos clérigos e dos monarcas. Pois além do poderio militar, da robustez dos palácios e da santidade dos templos que tinham o respeito de toda a população, os habitantes das aldeias deslocavam-se a estes locais para mediante pagamento, poderem ter todos os seus bens guardados como as colheitas e os materiais de trabalho, uma vez que as suas habitações não dispunham de segurança alguma. Assim sendo pode-se afirmar que a primeira função similar à bancária foi a guarda de bens.

Segundo Alfredo (2002), foi na Assíria e na Babilônia que surgiram os primeiros documentos relacionados com a atividade financeira. Em especial na Babilônia, foram criados documentos de ordem de pagamento. Porém, foi com o advento da moeda que novas atividades foram criadas, tal como a especialidade de gestão de dinheiro, como os Trapezita (é assim que os gregos especialistas em lidar com dinheiro eram chamados na Babilônia). Estes começaram por operar inicialmente em cidades portuárias onde desempenhavam a função de cambistas, faziam e recebiam depósitos em dinheiro com o intuito de emprestar aos seus clientes. Surgiram posteriormente os krematistas e os Kolobistas, que também eram especializados no câmbio de moedas bem como os Daneístas (Babilônia era a pessoa que trabalhava com o Trapezita, principalmente na colocação de depósitos em dinheiro).

Foi depois do Século V a.C. que foram criados os livros diários chamados Efemérides e Trapézities, com os quais melhoraram os seus processos contabilísticos e substituíram as mesas de barro que usavam originalmente.

Ainda segundo Alfredo (2002), no Século VI a.C., são criadas casas comerciais, destacando-se: o Igbí, o Sippar, o Marashu e o de Nippur, todos proibidos da cobrança de juros pela Lei de Moisés, exceto para estrangeiros. Houve ainda a proibição dos juros nos empréstimos por parte da Igreja prescritos pelo Concílio de Nicéia no século IV e pelo Concílio

¹ Troca de mercadorias

de Paris e de Latrão nos séculos IX e XII, situação que contribuiu para um lento desenvolvimento do setor financeiro. Esses concílios também intervieram na venda e aluguer de casas e terrenos.

Assim sendo, pode-se afirmar que as origens das atividades financeiras, estão intimamente ligados aos templos, principalmente os de Delfos, Samos e Éfeso, cujas principais atividades eram as de empréstimos e depósitos. Particularmente no templo de Delphi havia uma cobrança sobre os empréstimos correspondente a uma taxa de juros de 10%, essa cobrança era menor para os estrangeiros (Alfredo, 2002).

No Egito, a economia era regida pela troca de mercadorias (escambo), sendo que de acordo com alguns papiros greco-egípcios, o dinheiro apareceu aproximadamente no ano de 1.800 a.C., passando desde essa época a ser utilizado como meio de troca. Foi graças ao monopólio, que os egípcios alcançaram grande desenvolvimento efetuando para isso atividades como: cobrança de impostos, contratos, pagamentos a terceiros por ordem dos seus clientes, ordens de pagamento e autorização de concessões.

Na Roma antiga, haviam pessoas cuja especialidade era controlar as finanças, eram conhecidos como *Argentarius* e tinham como especialidade o câmbio de moedas. Os *Nummularius*, eram cidadãos romanos cuja especialidade era reconhecer a veracidade e o valor das moedas estrangeiras cambiadas.

O estado romano concedeu aos cambistas o fórum da cidade para realizarem as suas atividades financeiras. Porém como ainda praticavam altas taxas de juro, a aristocracia romana passou a realizar operações de câmbio em nome próprio, tendo inclusive financiado o governo com taxas inferiores às praticadas pelos cambistas. À medida que estas atividades alcançavam maior crescimento, foram desenvolvidas e aprimoradas técnicas financeiras e foi assim que se iniciou o mercado financeiro.

Ao contrário dos gregos, que tinham uma forte intervenção pública nas suas atividades financeiras, os romanos tinham essa distinção muito bem definida. Os *Argentarius* ficaram conhecidos pelas assessorias que prestavam aos seus clientes, bem como pelo uso de livros para registar as suas atividades, onde formalizavam os contratos marítimos.

Deste modo, pode afirmar-se que tudo isso foi o início do desenvolvimento das atividades financeiras em Roma, entre elas: câmbio, transporte de dinheiro, recebiam depósitos regulares e irregulares, havia serviço de caixa, intervinham na compra e venda de móveis e imóveis e em leilões públicos, sendo a sua atividade principal o empréstimo como investimento de capital. A contabilidade romana era controlada por uma espécie de códice ou livro de contas

à ordem assinado pelo devedor e duas testemunhas, livro tornado obrigatório pelo imperador Justiniano, assim como o livro de caixa, que registava as entradas e saídas de dinheiro.

1.2 Idade Media

A transição entre os períodos foi longa e complexa. Vários problemas afetaram o desenvolvimento económico, entre os mais notórios está a queda do Império Romano, as invasões islâmicas, a proibição de juros de empréstimos pela Igreja e as cruzadas. Todos estes eventos quase determinaram o desaparecimento dos indivíduos e casas que exerciam funções financeiras. Mas ao mesmo tempo todos esses eventos exigiram dinheiro e justamente com essa necessidade deu-se o advento do reaparecimento de velhas e novas atividades na função financeira.

Inicialmente e durante séculos, os primeiros banqueiros eram exclusivamente judeus, que não eram regidos pelas leis da Igreja e cuja função principal era a de agiotas. Estes estabeleceram-se na Lombardia para se dedicarem à banca, conseguindo assim operar numa grande área territorial e até mesmo com alguns monarcas como Luis IX.

Por outro lado, os cristãos realizaram operações como a associação a sociedades comerciais por meio de créditos autorizados pela igreja, e pelos quais participavam dos lucros em vez de cobrar juros. A Igreja inspirou-se em conceitos éticos protelados por Aristóteles, Platão, Catão, Sívueca e as doutrinas hebraicas, que condenam a cobrança de juros como injusta, por isso foi estabelecida a proibição canónica do empréstimo com juros.

Génova era uma cidade muito ativa no setor bancário. Já no século XII os “*banchieri*” eram conhecidos como cambistas que operavam sentados nos seus bancos nas praças públicas. Os cambistas recebiam depósitos que por sua vez eram investidos em operações de câmbio marítimo, faziam provisões de fundos em nome dos seus clientes na própria Génova na forma de um giroscópio e no exterior, por meio dos seus correspondentes ou das suas subsidiárias, utilizando letras de câmbio. Nessa época, o comércio de dinheiro, de forma rudimentar, era confiado aos cambistas locais para reconhecer as moedas cunhadas em várias cidades e identificar as que eram falsificadas, estabelecendo também com precisão o conteúdo e o peso corretos dos metais preciosos.

Os cambistas eram regidos por estatutos, associações muito respeitáveis e até por príncipes. É no ano de 1400, que a palavra banco começa a ser diferenciada para designar as entidades, em 1407 a Casa de São Jorge passou a ser chamada de Banco de San Jorge de Génova e era criado no formato mais moderno de um banco. Este foi dividido em duas seções: a

primeira, recebia depósitos e fazia transferências; a segunda, exercia funções de uma administração autónoma da dívida pública de Génova.

Quanto à origem da palavra banco, sabe-se que deriva do nome do móvel usado pelos cambistas italianos - um simples banco - assim como os Trapézistas o usavam na antiguidade. Outras versões indicam que a palavra banco é um derivado da mesa e do banco que os banqueiros usavam nas feiras. Diz-se que quando os seus negócios faliram “quebravam” a banca na mesa em sinal de falência, daí o surgimento de a frase -banco quebrado-. Outra pesquisa indica que a palavra banco vem da palavra italiana -monte- que foi usada para nomear o primeiro banco veneziano.

Em Veneza, durante o século XII, foi estabelecido o mais antigo banco depositário, cujo objetivo era cobrir as necessidades financeiras do Estado causadas pelas guerras. Além disso, algumas disposições legais foram criadas, incluindo, a criação de um documento do ano 1270 em que os banqueiros são obrigados a conceder uma caução a ser depositada aos cónsules dos mercadores, visto que eram eles a autoridade encarregue do tráfego. Em 1374, foi imposta outra disposição legal que proibia os banqueiros de negociar ferro, estanho, cobre, açafrão e prata, por serem considerados negócios de alto risco. Por sua vez em 1403, foi estabelecido que as exposições de crédito dos bancos não deveriam ser superiores às do Estado e, em 1523, foi criado um departamento denominado "Fornecedores em Bancos", cuja missão era fiscalizar os bancos.

Foi nos séculos XII a XIV que surgiu uma grande variedade de operações: depósitos com juros, empréstimos, adiantamentos, levantamentos, investimentos, bem como, o aperfeiçoamento da contabilidade e do sistema de partidas dobradas. Também após algumas experiências desagradáveis, foi decretada a separação das atividades financeiras e comerciais. Com essa separação, grandes benefícios foram obtidos, de tal forma que a maioria dessas práticas é utilizada até os dias de hoje. Tendo sido nesta época criado por credores da república o Monte Vecchio, a compra e venda de títulos da dívida pública como papel comercial. Nesta fase o comércio interno e externo foi facilitado, uma vez que os bancos recebiam dinheiro das pessoas, gerando crédito nos registos que eram transmitidos de uma pessoa para a outra, ou seja, havia apenas anotações nos registos e nenhuma movimentação de moedas.

Os Toscanos e os Luccase, eram comerciantes da cidade de Siena e principalmente Florença que viajavam para muitos lugares com o intuito de estabelecer subsidiárias, e não obstante dos riscos, conseguiram acumular grandes lucros e desenvolveram técnicas bancárias, instituindo letras, transferências de dinheiro e garantias. No caso particular dos toscanos, foram

designados para a coleta da doação de São Pedro no estrangeiro em nome da Santa Sé, motivo pelo qual eram chamados de “*usurari papae*”. Eles traziam as suas mesas, caixas e livros para cada feira a que compareciam e um grande número de comerciantes usava-os para depositar o seu dinheiro.

Com o crescimento do Cristianismo, os Templários substituíram os Judeus nas funções bancárias e tiveram um grande destaque na Europa medieval, não só pelo seu carácter Religioso-militar, mas também pela sua apetência para a gestão financeira e bancária. Os Templários representaram a maior organização financeira já conhecida, atingindo o seu auge durante o século XIII, terminando no início do século XIV de uma forma muito trágica.

No decurso do século XIII existiam algumas instituições financeiras que recebiam depósitos de particulares, aos quais efetuavam o pagamento de juros. Também administravam recursos do governo e concediam empréstimos, eram chamados de “montes”. Porém, como a cobrança e pagamento de juros não era bem aceite pelo clero, em resposta aos “montes” no ano de 1463 em Orvieto, foi criado com a autorização Papal, o primeiro Monte de Piedad ou Montepío, como uma resposta da Igreja à atividade usurária.

1.3 Era moderna

Uma vez mais, a passagem do tempo testemunha a transição dos grandes acontecimentos que deram origem à era moderna, as descobertas. A colonização da América, a formação de estados europeus, a unificação de moedas e instituições, as constantes guerras, a quantidade do ouro da América, o crescimento e subsequente declínio da Espanha e Portugal, os avanços da Inglaterra, França e Holanda, a perda de primazia nas cidades italianas, longe das rotas marítimas e a expansão do comércio internacional, cada um destes eventos interveio de alguma forma nas funções bancárias e financeiras. Todos estes factos contribuíram para que no período de 1512 a 1517, tenha sido discutido nos concílios Lateranense e Leão X, o direito canônico e as exigências do mundo laico. Com isso os Montepios foram autorizados a conceder e reclamar juros, porém apenas na medida necessária para cobrir as despesas de gestão.

De acordo com Capie (2003), a diferença mais relevante e espetacularmente óbvia entre a velha e a nova era foi a descoberta pelos europeus do Novo Mundo das Índias Ocidentais, e pelo menos em linhas gerais, as Américas do Norte e do Sul, a maior parte da África, Sudeste Asiático e, depois de um longa pausa, Austrália e Nova Zelândia. Muito mais importante do que a descoberta de novas terras foi a descoberta de novas rotas para os já conhecidos centros comerciais do antigo Oriente. Entre as muitas motivações, esta foi provavelmente a principal razão por trás das primeiras viagens de descoberta. Registos oficiais dos motivos dos primeiros

exploradores portugueses deixam "claro que nenhum deles jamais se deu ao trabalho de navegar para um lugar onde não houvesse esperança certa de lucro" (Press & Studies, 1972). Os grandes oceanos do mundo abriram-se com a ousadia do marinheiro europeu, apoiado por patrocínios reais e financiamento por ações.

Na realidade, de acordo com Zubair Abbasi (2010), as primeiras ações emitidas, foram em Amsterdão. O surgimento desta sociedade por ações, surgiu-o após um desastre naval, pois dos vinte e dois navios que zarparam em 1598, apenas uma dúzia voltou em segurança. Por essas razões, fazia sentido que os comerciantes unissem os seus recursos. Em 1600, havia cerca de seis empresas incipientes das Índias Orientais que operavam nos principais portos holandeses. Movidos tanto por cálculos estratégicos quanto pela motivação do lucro, os estados gerais holandeses, o parlamento das Províncias Unidas, propuseram fundir as empresas existentes em uma única entidade. O resultado obtido foi a “*United East India Company*” - a *Vereenigde Nederlandsche Geocroyeerde Oostindische Compagnie (United Dutch Chartered East India Company)* ou VOC formalmente fretada em 1602 para desfrutar do monopólio de todo o comércio holandês a leste do Cabo da Boa Esperança e oeste do Estreito de Magalhães.

A estrutura da VOC era inovadora em vários aspetos. É verdade que, de acordo com os seus estatutos, deveria durar um período fixo, neste caso vinte e um anos, porém, o Artigo 7 dos seus estatutos estabelecia que os investidores teriam o direito a retirar os seus investimentos ao final de apenas dez anos, quando o primeiro balanço geral fosse estabelecido. Porém a escala da empresa não tinha precedentes. A subscrição do capital da empresa estava aberta a todos os residentes das Províncias Unidas e a carta não estabelecia um limite máximo de quantas pessoas ou entidades poderiam subscrever as ações, assim sendo houveram mercadores, artesãos e até criados que fizeram parte da primeira companhia estabelecida nestes moldes. E assim segundo o que se conhece, nasce o primeiro investimento em títulos de ações.

2 Mercados Financeiros de ações

As bolsas de valores são locais onde são negociados títulos emitidos por empresas de capital aberto. Desde o século XV, em plena Idade Média, quotas de participações em companhias, metais preciosos e moedas eram comercializados no meio das ruas, nas calçadas, semelhantemente a qualquer outro produto vendido na época. Após a criação do VOC mais empresas foram surgindo nestes moldes, e com o decurso dos anos, a supremacia financeira foi obtida pelo império britânico.

Esta hegemonia do Império Britânico foi deposta cerca de duzentos anos mais tarde pela sua antiga colônia, os Estados Unidos da América. O governo americano no ano de 1790 para ajudar a recuperação da guerra fez uma emissão de 80 milhões de dólares de dívida pública, a qual era vendida nas Ruas de Wall Street².

Grande parte destes vendedores reduziram as taxas de comissão. Para combater essa redução, 24 corretores juntaram-se e firmaram o “*buttonwood agreement*”, que estabeleceu um clube fechado, onde os membros concordaram que apenas negociariam entre eles. Assim definiram que haveria uma comissão fixa de 0.25% por transação. Após este acordo, estes negociantes deixaram de efetuar os seus negócios nas ruas de Wall Street e começaram a reunir-se no “*Tontine Coffee House*”, assim surgiu aquela que é a maior bolsa de valores até a data de hoje.

Na atualidade pode considerar-se que a Bolsa de valores é indispensável para as organizações, pois permite que elas ampliem os seus horizontes de crescimento, sem que precisem recorrer a empréstimos ou financiamentos. Ao vender parte do seu capital social, a empresa financia os investimentos e, ao mesmo tempo, recebe a confiança dos investidores.

Além disso, as empresas utilizam a estrutura da Bolsa de valores para se protegerem das variações cambiais, com o uso de produtos financeiros como contratos futuros, realizam investimentos em outros segmentos e desenvolvem estratégias financeiras para se capitalizarem. Pode afirmar-se que o crescimento econômico mundial e de um país está diretamente ligado à Bolsa de valores.

Resumindo, é através da Bolsa de valores que as empresas ganham investidores e, por meio desses investimentos aumentam de dimensão. A Bolsa atua como se fosse o coração da economia, concentrando capitais e movimentando-os para as demais áreas da economia. Com

² New York stock Exchange:
https://www.nyse.com/publicdocs/American_Stock_Exchange_Historical_Timeline.pdf (15-01-2022)

isso, novos empregos são criados direta e indiretamente, aumentando a riqueza, produção, crédito e prosperidade do país.

2.1 Risco dos mercados de ações

De acordo com Pinho & Tavares (2012), o risco está associado à incerteza relativamente ao futuro. Ele existe porque no presente, não é possível estimar com exatidão as ocorrências futuras. Assim sendo, quanto maior a incerteza maior é o risco suportado pelo investidor.

Segundo Damodaran (2009), é possível defender a tese de que todos os avanços da civilização, desde a invenção das ferramentas rudimentares pelo homem da caverna até a atual terapia genética, foram possíveis simplesmente porque alguém se dispôs a correr riscos e desafiar o estado das coisas. Assim, ao longo dos anos, algumas inovações foram criadas para auxiliar os investidores e as empresas a protegerem-se contra riscos, surgindo assim os primeiros exemplos concretos de apólices de seguros (Oprean & Tănăsescu, 2013).

O risco deriva não só de fatores isolados, mas de uma série de fatores em conjunto, tais como: a instabilidade da procura, a volatilidade dos preços, a volatilidade dos custos de produção, as taxas de juro, as taxas de inflação, entre outros. Todos estes fatores podem influenciar os preços das ações e conseqüentemente o risco do investimento.

Para isso, a análise de um investimento é realizada com o objetivo de, por um lado contribuir para a decisão de investir, e por outro, para que as situações de decisão possam ser classificadas de acordo com o grau de conhecimento que permitam ao investidor uma decisão mais segura e consistente (Santos, 2012).

Como não é possível prever com exatidão cada um destes fatores, a rentabilidade esperada de uma ação, ou carteira de ações, está sempre sujeita a incerteza e é sempre um investimento arriscado (Hertz, 1979).

A análise ao investimento deverá ter sempre em consideração a presença de um conjunto de situações incertas, que definem o risco de um investimento. Neste contexto, referem-se algumas definições de risco de investimento, tais como:

- A possibilidade de que algum acontecimento venha a ocorrer de forma diferente do esperado;
- A probabilidade de efetivamente ganhar menos do que o retorno esperado;
- É essencialmente a possibilidade de perda financeira. É usado como sinónimo de incerteza e refere-se à instabilidade dos retornos associados a um investimento.

Assim, o risco caracteriza-se por uma medida da incerteza associada a determinadas ocorrências, que poderão ter como consequência um verdadeiro impacto sobre os resultados esperado (Santos, 2012)

Pode também categorizar-se o risco em:

- Risco interno, que são caracterizados por riscos no investimento, tais como impostos que são cobrados.

- Risco externo, são riscos que saem fora do controlo do investidor, tais como desastres naturais, atentados terroristas, guerras entre outros.

Posto isto, o risco é tanto maior quanto maiores forem os cenários existentes para a evolução dos preços das ações. Uma ação cujo preço não sofre alterações no decorrer dos anos, é menos arriscada que uma ação cujo preço oscila com frequência. E sabendo que o investidor é racional, ele vai exigir uma maior rentabilidade dos títulos mais arriscados.

Um dos princípios fundamentais em finanças empresariais é que, os investidores exigem maiores rentabilidades dos investimentos mais arriscados do que dos investimentos mais seguros (Snowdon, 2021).

Neste sentido, os investidores procuram formas de poderem mitigar ou controlar o risco que é inerente ao investimento financeiro. Para isso são adotadas diversas estratégias mediante o grau de aversão ao risco do investidor.

Quando um investidor aplica o seu capital em uma ação ou produto financeiro, deve ter em conta o risco que está disposto a correr. Por exemplo um investidor muito avesso ao risco pode aplicar os seus recursos em bilhetes ou obrigações do tesouro, que têm um risco que tende para zero e uma rentabilidade espera bastante baixa. No caso de o investidor não ter aversão ao risco pode investir em mercados ou ações que tenham volatilidades elevadas, onde se espera uma rentabilidade mais elevada.

Existem diversas formas de se estimar o risco de uma ação ou mercado, desde as mais simples, como a mera observação do histórico desse mercado, para perceber como tem sido a volatilidade ao longo dos anos, até formas de diversificação de investimentos, mais técnica, tentando reduzir ao mínimo o risco interno.

Segundo Pinho & Tavares (2012), a observação e análise da volatilidade de mercado, é uma forma muito válida de se poder perceber a magnitude do risco inerente de um mercado ou ação.

Quanto à diversificação dos investimentos, torna-se um pouco mais complexa e técnica. Segundo Pinho & Tavares (2012), “a diversificação funciona, porque os preços de diferentes valores mobiliários não variam exatamente da mesma forma. Isto é, a variação dos preços das ações tem uma correlação imperfeita.” Ou seja, quanto mais diversificada for a carteira e menor correlacionadas estejam as ações que compõem a carteira, menor é o risco interno, passando o portfólio a estar basicamente sujeito ao risco externo. Porém este equilíbrio é extremamente difícil de alcançar, pois num mundo globalizado, não é fácil que se encontrem correlações lineares negativas.

Para mitigar este problema das correlações das carteiras de investimentos, existe um “produto financeiro” chamado fundos de investimento. Consiste em uma aglomeração de investidores que se juntam para investir e adquirir diversos produtos financeiros. Desta forma conseguem ter um capital de investimento bastante avultado o que permite fazer uma ampla diversificação da carteira. Existem no mercado financeiro diversos fundos caracterizados pelo nível de risco e rentabilidade das suas carteiras.

Desta forma, pode-se concluir que o risco inerente aos mercados financeiros é o principal motivo para que existam investidores, pois sem risco não existe rentabilidade. E o maior desafio de um investidor é fazer uma adequada gestão do risco do investimento, de forma a obter a melhor rentabilidade do seu capital, estando exposto ao mínimo risco possível.

2.2 Índices de mercados financeiros

Um índice de ações, é composto por um conjunto de empresas onde cada uma delas, representa uma fração do índice. Para calcular o valor de um índice ponderado de uma forma simplista, basta encontrar a soma dos preços das ações de cada empresa e dividi-la pelo número de empresas. Geralmente esse divisor é ajustado para manter a continuidade em caso de desdobramento ou alteração da lista de empresas que compõem o índice. Num índice ponderado pelo preço, uma ação que aumenta de 110€ para 120€ terá o mesmo efeito que uma ação que aumenta de 10€ para 20€, pois ambas tiveram uma variação de 10€, mesmo que o movimento percentual para o segundo caso seja muito maior do que o movimento percentual do primeiro caso. Isto faz com que ações com preços mais altos exercem uma maior influência na direção geral do índice.

Os índices ponderados por preços são úteis pois o valor do índice tende a ser igual (ou pelo menos proporcional) ao preço médio das ações das empresas incluídas no índice. Isso permite a construção de índices que acompanharão o desempenho do preço médio das ações de um setor ou mercado específico. Um dos índices de ações ponderadas por preço mais populares

é o Dow Jones Industrial Average (DJIA). Este índice é composto pelo valor das ações das 30 empresas de setores diferentes, onde as empresas de maior valor têm uma maior influência no índice.

Com o acompanhamento deste e outros índices todos os investidores, institucionais ou individuais, podem acompanhar a evolução da economia de um país ou setor, minimizando assim os riscos na hora do investimento. De salientar que o facto destes índices serem compostos por ações de diferentes empresas e áreas de atividade, fazem com que o risco de investimento nos mesmos seja bastante mitigado.

2.2.1 Dow Jones

O índice Dow Jones foi criado pelo editor do *Wall Street Journal* Charles Dow e pelo seu sócio, Edward Jones, no dia 26 de maio de 1896, o que o torna o segundo índice mais antigo dos Estados Unidos (EUA). Uma das principais razões para a sua criação, foi a de ser um meio simples de se poder acompanhar o desempenho do mercado de ações dos EUA, num período da história onde o fluxo de informações era muito limitado³.

No seu início o Dow Jones, era composto por apenas 12 empresas de capital aberto consideradas importantes para a economia dos EUA. O mix de empresas era diversificado, variando do tabaco ao açúcar e do carvão ao ferro, como representantes da economia. Todas as empresas do Dow Jones eram focadas em “*commodities*”⁴. As 12 empresas originais eram: American Cotton Oil; American Sugar; American Tobacco; Chicago Gas; Distilling & Cattle Feeding; General Electric; Laclede Gas; National Lead; North American; Tennessee Coal & Iron; U.S. Leather; United States Rubber. O primeiro valor publicado do Dow Jones foi de, \$40,94, e foi calculado tomando o preço médio de mercado das 12 empresas. No ano de 1928, o Dow Jones ampliou para 30 empresas, número esse que se mantém até a data de hoje (NYSE, (2021).

Para os cálculos diários do índice, são utilizadas as médias dos picos das altas e baixa do valor do índice em vez do preço de encerramento. Esta metodologia implica que todas as ações atingem os seus pontos altos e baixos simultaneamente, uma ocorrência rara na realidade. No entanto, este método de cálculo do Índice Dow Jones fornece uma melhor imagem dos valores em que o índice é negociado durante o horário de mercado.

³ Investopedia: https://www-investopedia-com.translate.google/ask/answers/100214/when-did-dow-jones-industrial-average-djia-begin.asp?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-PT&_x_tr_pto=sc

⁴ São um termo que corresponde a produtos básicos não industrializados, matérias-primas que não se diferenciam quem as produziu ou da sua origem, sendo definidos os seus preços pela oferta e procura internacional.

A composição do índice muda regularmente, à medida que as ações e os setores que ele representa caem e perdem a preferência. Com o tempo, a sua composição mudou para refletir as alterações na economia do país. Por exemplo, a gigante das telecomunicações AT&T, que foi adicionada ao Dow Jones em 1916, foi substituída pela gigante tecnológica Apple Inc. (AAPL) em 2015. Em 24 de agosto de 2020, a Salesforce, a Amgen e a Honeywell foram adicionadas ao Dow Jones, substituindo Exxon-Mobil, Pfizer e Raytheon Technologies. Não há informações detalhadas sobre os critérios para a inclusão de uma empresa no Dow Jones. Tudo o que se conhece é que um comitê, que inclui funcionários da S&P, Dow Jones Indices e do *The Wall Street Journal*, toma a decisão sobre quais as empresas que devem ser incluídas e removidas da lista. As empresas que compõem Dow Jones estão em mudança contínua, de modo que a lista não é estática. No entanto, consiste nas empresas mais proeminentes da economia norte americana e, portanto, os nomes das empresas são familiares para o cidadão comum. O índice inclui nomes como Microsoft, Apple, McDonald's, JPMorgan Chase, Boeing, Nike, Visa, Verizon, Walmart e Coca-Cola.

Nas últimas duas décadas, a evolução do índice, foi a seguinte:

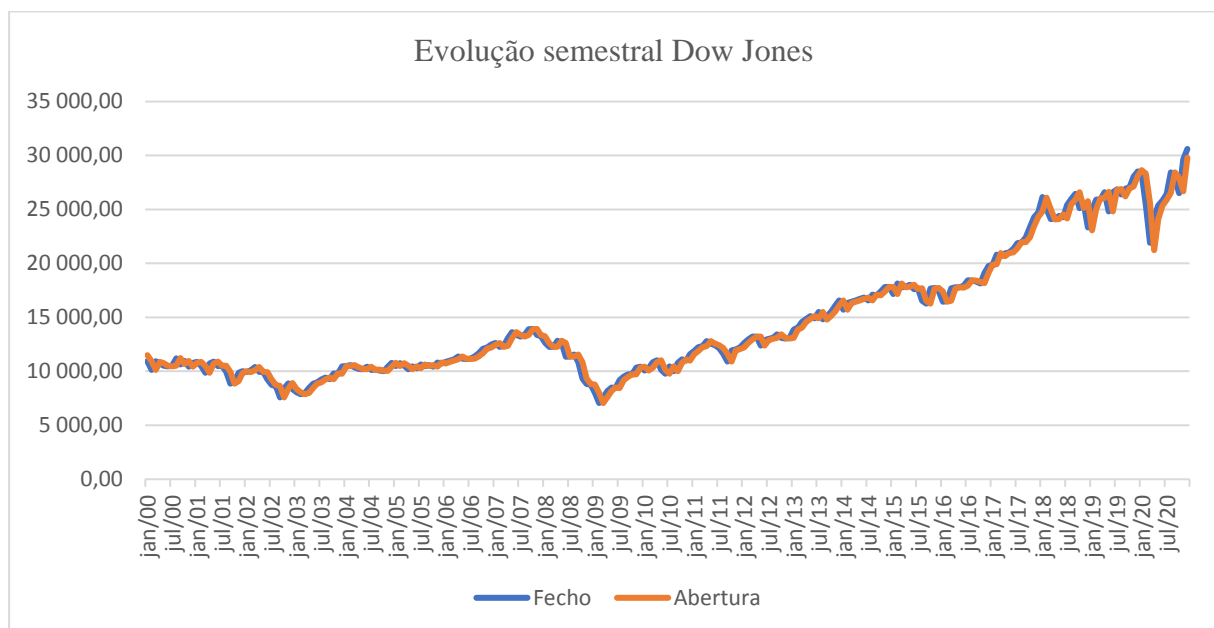


Gráfico 1: Evolução Dow Jones

Como se pode ver pelo gráfico 1, o índice tem uma evolução extremamente positiva nas últimas duas décadas. Tendo tido as suas principais quedas, à semelhança do PSI20 e do FTSE100 no ano de 2007 a 2009, resultante da crise do “*subprime*”⁵, bem como mais

⁵ Crise que começou com a queda do Dow Jones motivada pela concessão de empréstimos hipotecários de alto risco. Situação que arrastou varos bancos para a falência

recentemente no ano de 2019 por via da pandemia mundial do Covid 19. Porém, é de suma importância destacar que o ano 2020 já foi de crescimento. É muito relevante perceber que o Dow Jones nestas duas décadas teve um crescimento de aproximadamente cento e sessenta e seis por cento, passando dos onze mil e quinhentos pontos na abertura de janeiro do ano 2000 para os trinta mil pontos no fecho do mês de dezembro de 2020.

2.2.2 FTSE100

O índice FTSE100 é composto pelas 100 maiores empresas do Reino Unido por valor de mercado total, este valor é calculado, fazendo a multiplicação do número total de ações emitidas pelo preço da ação. O FTSE100, foi lançado a 3 de Janeiro de 1984, como uma “*joint venture*” entre o “*Financial Times*” e a “*London Stock Exchange*”, e veio substituir o FT30. Este índice é controlado pelo FTSE Group e tem atualizações em tempo real e publicadas a cada segundo. Algumas destas empresas têm um foco internacional, o que pode querer dizer que a evolução deste índice possa ser diferente da evolução económica do Reino Unido. Mesmo com essa condicionante, o FTSE 100 é de longe o indicador do mercado de ações do Reino Unido mais amplamente utilizado.

Para ser incluída no índice, uma empresa deve atender a uma série de requisitos estabelecidos pelo FTSE Group. Os requisitos incluem estar cotada no Serviço de Negociação Eletrónica da Bolsa de Valores de Londres com um preço denominado em libras esterlinas ou euros, atender a certos testes de nacionalidade, de *free float*⁶ e de liquidez.

Nos índices FTSE, os preços das ações são ponderados pela capitalização *free float*, de forma que as empresas maiores, têm mais peso para o índice do que as empresas menores.

O fator de ajuste de *free float* representa o percentual de todas as ações emitidas prontamente disponíveis para negociação, arredondado para o múltiplo mais próximo de 5%. A capitalização de *free float* de uma empresa é a capitalização de mercado multiplicada pelo seu fator de ajuste de *free float*. Portanto, não inclui ações restritas, como aquelas detidas por pessoas de dentro da empresa.

Nas últimas décadas a evolução do FTSE100 foi a seguinte:

⁶ É o percentual das ações de uma empresa que estão em circulação na bolsa de valores livres para compra

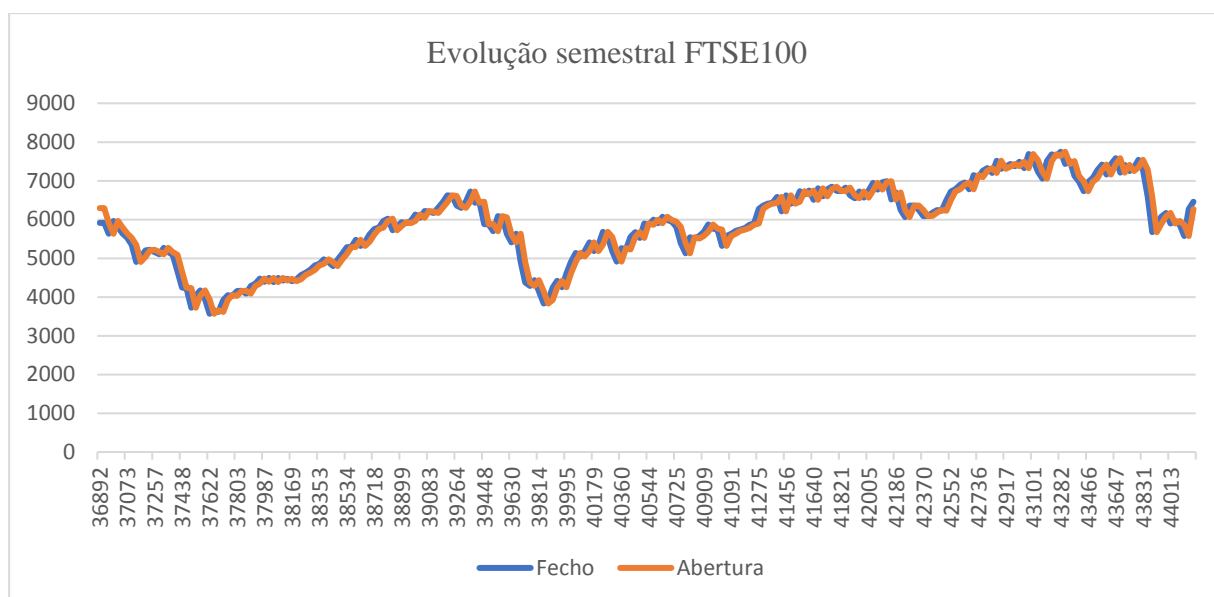


Gráfico 2: Evolução semestral FTSE100

No que ao FTSE100 diz respeito, vemos que houve uma queda desde 2001 até ao final do ano de 2003. Para isso contribuíram os atentados de onze de setembro em Nova York, que tiveram impacto nas bolsas de valores mundiais, pode também ter contribuído as eleições ganhas em 2001 pelo partido dos trabalhadores que já se encontrava no poder desde o ano de 1997.

Em 2003, rompe-se o ciclo de queda e começa a haver um crescimento exponencial no índice até o ano de 2007. Este crescimento, foi exponenciado pela invasão conjunta dos Estados Unidos da América e do Reino Unido ao Iraque. O ano de 2005, foi muito marcante para a Grã-Bretanha, pois verificaram-se eleições, ganhas uma vez mais pelo partido dos trabalhadores e dois meses depois ocorreram os atentados terroristas em Londres, o que impactou a evolução da bolsa, tendo estagnado o crescimento desse ano.

O ano de 2007 foi negro para os mercados mundiais, com a crise do “*subprime*” todas as bolsas do mundo despencaram. Em 2009 começou a verificar-se uma inversão nos valores do índice, começando a crescer, este crescimento deu-se até ao ano de 2015. Nos primeiros anos este crescimento deveu-se muito ao investimento feito para os jogos olímpicos de Londres 2012, sendo que as eleições de 2010 que colocaram como chefe de governo David Cameron do partido conservador, causaram algum impacto no índice britânico.

Em 2015 o partido conservador voltou a ganhar as eleições no Reino Unido, porém devido ao referendo do “*brexit*”⁷ em 2017 voltou a haver eleições, reconduzindo a conservadora Theresa May no comando da Grã-Bretanha. De notar que mesmo no meio desta confusão política o índice britânico teve um crescimento superior a mil e quinhentos pontos neste período.

No ano de 2019, o FTSE100 teve uma queda muito acentuada devido à paralisação planetária causada pelo vírus do Covid19. De salientar que os dados de 2020, demonstram que o índice está a dar indicações de começar a recuperar.

2.2.3 PSI 20

O PSI20 é o principal índice do mercado Português, tendo sido criado no dia 31 de dezembro de 1992, para substituir a antiga bolsa de derivados do Porto (BDP), e valia à data 3.000 pontos. As empresas que compunham o índice à data eram: Banco Espírito Santo (BES); Banco Portugues de Investimento (BPI); Banco Comercial Português (BCP); Banco Português do Atlantico (BPA); BCI indústrias; Banco Totta & Açores; Caixa Banco de Investimentos; CIN; C^a Seguro Mundial Confiança; Corticeira Amorim; Efacec; Lisnave; Lusotur; Somague; Mota & C^a; Engil; Mundicenter; Radio Marconi; Soares da Costa Construções e Sonae SGPS.

O PSI 20 é calculado através da média ponderada (pelo peso do valor do *free float*) das cotações das ações que integram o índice a cada momento. O PSI 20 não contabiliza o retorno dado pelos dividendos, sendo que para obter esse retorno será necessário utilizar os índices PSI 20 GR (gross return) ou PSI 20 NR (net return).

O número de constituintes que compõe o índice deve variar entre dezoito e vinte empresas que para poderem participar devem cumprir a seguinte regra – “o valor em *free float* deve ser superior a cem milhões de euros”. As entradas e saídas do PSI20 são definidas no mês de março de cada ano e, por ocasião da revisão anual.

A evolução do PSI20 nos últimos 20 anos foi a seguinte:

⁷ Referendo realizado no dia 23 junho 2016, no Reino unido, que referendava se os britânicos queriam a premência na União Europeia.

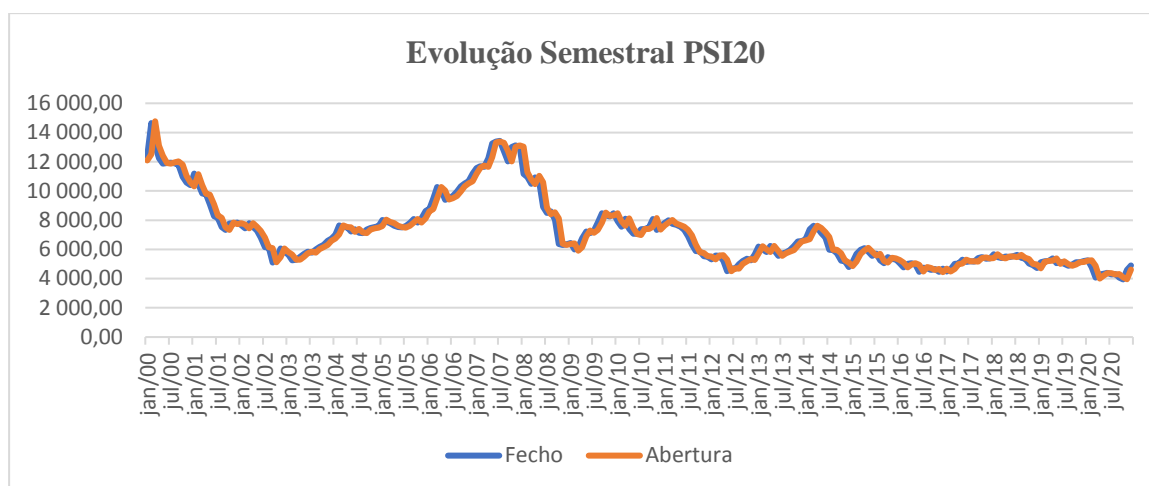


Gráfico 3: Evolução Semestral PSI20

Pode constatar-se pelo gráfico 3 que a evolução do PSI20 nas últimas décadas não tem sido muito favorável. Verificamos que do ano 2000 até ao final do ano de 2020, o índice teve uma queda de aproximadamente sete mil e duzentos pontos, o que corresponde a uma queda de 60%.

Pode observar-se que existe uma queda muito acentuada entre o início do ano 2001 e o final de 2003. Estes foram anos politicamente conturbados onde neste período de tempo houveram três chefes de estado diferentes (Antonio Guterres, Durão Barroso e Santana Lopes).

No ano de 2004 até meados de 2007, vê-se que houve um crescimento muito interessante no mercado, atingindo valores muito próximos dos do início do século. Isto deveu-se ao fato de nesses anos ter existido um enorme investimento público na economia portuguesa.

Nos anos seguintes, foram muito complicados à escala mundial. No dia 24 de julho de 2007, houve uma crise do “*subprime*”⁸, o que desencadeou a queda de todos os índices de mercado bem como a falência de alguns bancos históricos. Esta grave crise foi um dos principais motivos para que a 6 de abril de 2011 Portugal tenha recorrido pela terceira vez na sua história à ajuda externa do FMI, Comissão Europeia e BCE. Portugal esteve intervencionado até 17 de maio de 2014.

De 2014 até a presente data, pode notar-se que existe uma queda do índice, porém com uma oscilação muito menor.

⁸ Crise que começou com a queda do Dow Jones motivada pela concessão de empréstimos hipotecários de alto risco. Situação que arrastou varos bancos para a falência

3 Critério de Kelly

3.1 A origem do critério de Kelly

O critério de Kelly é uma ferramenta para se conseguir maximizar os lucros ou rendimentos e mitigar o risco da falência (Edward, 2008; Poundstone William, 2005). O critério de Kelly permite ao utilizador estimar a percentagem do capital a aplicar num determinado investimento, no sentido de maximizar o rendimento e mitigar o risco de falência.

John Kelly Jr, criador do critério de Kelly, nasceu no dia 26 de dezembro de 1923 em Corsicana, Texas.

Em 1953, concluiu o seu doutoramento com o tema “Investigação de Propriedades Elásticas de Segunda Ordem de Vários Materiais.” Este trabalho foi de suma importância para Kelly, pois proporcionou a sua proposta de emprego na “*Bell Labs*”, que naquele período era o mais prestigiado centro de pesquisa do mundo.

Dentro da *Bell Labs*, a carreira de Kelly passou por áreas bastante diferentes. Onde estudou formas de comprimir dados da televisão, isto levou a que tivesse que estudar uma nova disciplina, a Teoria da Informação, o que o levou a conhecer profundamente os trabalhos de Shannon sobre a teoria da informação.

Em 7 de junho de 1955, a CBS, lançou um quiz show chamado *\$64.000 questions*, onde como o nome indica o vencedor poderia ganhar 64.000 dólares. Sucede que o programa foi gravado em Nova York e foi transmitido ao vivo na costa Leste. Porém como existe uma diferença horária da costa Leste para a costa Oeste, apenas foi transmitido nesta última três horas depois. À data tal como hoje existia o hábito dos americanos de apostar no vencedor dos programas, mas como houve esta diferença horaria, um telespetador da costa Oeste teve acesso à informação do vencedor antes da transmissão televisiva, o que fez com que pudesse apostar no concorrente vencedor. Com esta ocorrência, Kelly foi capaz de criar uma ligação entre as teorias da informação de Shannon e as apostas, (Poundstone William, 2005).

3.2 A aplicação do critério de Kelly em investimentos no mercado de ações

À primeira vista pode ser tentador vislumbrar uma estratégia com um grande retorno esperado como sendo a mais favorável, afinal, é de interesse dos investidores o retorno. Porém como facilmente se pode imaginar, existem vantagens e desvantagens na utilização de tais estratégias.

De acordo com MacLean, Thorp e Ziemba (2010), as principais vantagens na utilização das estratégias com grande retorno esperado são essencialmente duas.

A propriedade básica do critério que maximiza a taxa de retorno logarítmica esperado ($\max E[\log G]$) do investimento. Por si só essa é uma propriedade, de grande interesse para uma ampla gama de investidores. Esse critério, além de maximizar o log-retorno, maximiza a utilidade dos investidores com funções de utilidade logarítmicas. Isso implica de certa forma que investidores que gostam de usar estratégias que usam expressões logarítmicas estejam “mais satisfeitos”. Sob condições favoráveis, $\max E[\log G]$, também maximiza a mediana dos retornos logarítmicos, algo útil para manter o investidor na estratégia. O investidor que utiliza a estratégia Kelly, sob os pressupostos do modelo, está fora de risco de uma falência, apesar de teoricamente poder atingir níveis arbitrariamente pequenos em cenários adversos.

Uma outra vantagem referida é a facilidade de escolha. Na moderna teoria de portfólio, no modelo de análise de media-variância (Markowitz, 1952) mesmo tendo apenas um ativo (ou fundo de ativos) de risco e um ativo livre de risco, podem ser construídos infinitos portfólios eficientes e racionais, com diferentes riscos e retornos. Com base na aversão ao risco, então, um dos portfólios será escolhido. O problema é supor o conhecimento do nível de aversão ao risco dos agentes, algo demonstrado por Kahneman (2012) como problemático e ambíguo. No critério de Kelly, é gerado apenas um portfólio (dado somente um ativo de cada uma das duas categorias) bastando supor que o investidor está interessado em maximizar o seu retorno logarítmico.

Por outro lado, há fatores no critério de Kelly que podem torná-lo desfavorável para os investidores.

Como não há análise da aversão ao risco, para alguns agentes, o risco desse portfólio pode ser muito superior ao que estão dispostos a suportar.

Samuelson, (1971 e 1979) escreveu diversas críticas. As suas críticas concentram-se principalmente na função de utilidade logarítmica. Na verdade, não é um pressuposto do modelo e para os agentes utilizarem o modelo como estratégia ótima. Samuelson (1979) demonstra que para qualquer outra função de utilidade o critério é uma estratégia não ótima, pois a sua complexidade matemática, está além do alcance de muitos investidores. Outra crítica refere-se ao longo prazo. A estratégia maximiza o retorno com certeza, porém o tempo pode tender para o infinito e com isso a maximização do retorno em períodos finitos pode nunca ocorrer. Entretanto, no curto prazo (e por vezes no longo prazo) a estratégia pode ter retornos muito fracos ou mesmo negativos.

A última desvantagem apontada por Samuelson (1971 e 1979) e talvez a mais preocupante para os investidores é que erros na estimativa dos parâmetros podem levar o

investidor erroneamente a investir mais ou menos que a proporção ideal. Caso o investidor aplique $f < f^*$, sendo f o valor investido e f^* o valor exato do cálculo do critério de Kelly, terá um crescimento menor que o máximo, mas também terá uma volatilidade menor. Para o caso de aplicar $f > f^*$ além de ter um crescimento menor que o máximo, terá uma volatilidade maior também, tornando esse caso mais perigoso que o anterior.

Para tentar sobrepor essa questão, Ziemba & MacLean (1999) propõem investir uma fração de f^* , estratégia conhecida como half Kelly. A ideia é que como sobre estimar f^* é mais oneroso que subestimar, ao intencionalmente investir menos, o investidor protege-se contra os efeitos da sobrestimação a um custo relativamente baixo.

Os autores testam $f = 0,5f^*$. Nesse caso, se f^* estiver corretamente estimado, o investidor tem um crescimento 25% menor que $G(f^*)$ (sendo $G(f^*)$ o retorno logarítmico médio) e uma volatilidade 50% menor. Para um $p = 0,75$ (sendo p a probabilidade de vitória ou sucesso), a volatilidade é 25% menor, enquanto o crescimento é apenas 6,25% menor.

Descrito desta forma, parece algo bastante positivo e simples, veremos como pode funcionar na prática o critério de Kelly.

Imagine-se que é feito a seguinte proposta: um investimento onde só existem duas hipóteses, e onde só se pode escolher uma delas. No caso de escolher a hipótese vencedora dobra o capital inicialmente investido, caso contrário perde a totalidade do capital investido. A rentabilidade esperada pode ser facilmente calculada como sendo de 100%. Portanto é um investimento vantajoso e uma pessoa racional aceitaria o risco. A questão é, quanto deve investir? Se colocar todo o capital, vai-se maximizar a expectativa de lucro, porém têm alguma probabilidade de perder todo o dinheiro e não poder fazer novos investimentos para recuperar o capital perdido. Por outro lado, se investir 0, está a minimizar o risco, porém não está a usufruir do benefício de um retorno⁹ esperado positivo.

Conclui-se que o valor ideal deve ser intermediário entre esses dois extremos 0% a 100% do capital. Como as probabilidades e retornos são constantes, então o investimento deve ser constante. E o montante investido deve ser absoluto ou relativo, fixo ou variável? Ou seja, deve sempre investir uma quantidade monetárias ou uma percentagem do capital? Por exemplo se investir 100 unidades e ganhar 20, têm uma rentabilidade de 20%. Mas se investir um capital de 1000 unidades monetárias, a rentabilidade é de apenas 2%, mediante o crescimento do capital, a rentabilidade marginal vai decrescendo. Já com uma fração fixa, a rentabilidade

⁹ Para efeitos deste trabalho o retorno será analisado como sendo o capital investido mais a rentabilidade. A rentabilidade é a taxa de rendimento gerada pelo investimento (Pinho & Tavares, 2012)

marginal será constante, sendo assim mais lógico. Pois se das 1000 unidades monetárias investir 20% teremos uma rendibilidade de 200 unidades monetárias (Kuepper, 2021).

Posto isto, deve-se utilizar uma percentagem fixa do capital para o investimento f . Para definir esse valor, primeiro deve-se definir um critério, um objetivo que se pretende alcançar. Para maximizar a probabilidade de dobrar o capital após um investimento, então f deve ser 100%, ou se quiser maximizar a probabilidade de manter o capital inicial após n investimentos f deverá ser 0%. O critério que se procura é maximizar o retorno no longo prazo.

No seu trabalho, Kelly (1956) propõe este mesmo problema e deduz a sua solução pela primeira vez. Focado na engenharia, Kelly trata o problema em termos de teoria da informação (Poundstone William, 2005). Inclusive a incerteza do resultado final do evento ocorre porque o resultado (real) é transmitido por um "canal de comunicação" sujeito a erros. Apesar de John Kelly ter sido o criador, Edward Thorp foi sem dúvida um dos seus maiores estudiosos e quem mais aplicou o Critério na prática, tanto em apostas quanto em investimentos (Poundstone William, 2005)

Se investirmos uma fração f do capital num investimento que pague b para cada unidade investida mais o investimento original em caso de vitória, e nada, no caso de derrota, o capital após n rodadas será:

$$s_n = s_0(1 + fb)^V(1 - f)^D \quad (1)$$

Sendo s_n o capital após o investimento, s_0 o capital inicialmente investido, fb fração do capital mais a rendibilidade esperada, f a fração do capital apostado, V a quantidade de vitórias, D a quantidade de derrotas logo $V + D = n$. Como o que interessa é maximizar a taxa de crescimento esperado do capital, a seguinte equação será muito útil:

$$e^{n \log \left(\frac{s_n}{s_0}\right)^{1/n}} = \frac{s_n}{s_0} \quad (2)$$

Sendo e uma constante dos logaritmos naturais. Logo, o crescimento na rodada n em função da proporção do capital alocado, $Gn(f)$,

$$Gn(f) = \log\left(\frac{s_n}{s_0}\right)^{1/n} = \frac{v}{n} \log(1 + fb) + \frac{d}{n} \log(1 - f) \quad (3)$$

Em termos de expectativa, v/n é a probabilidade p de vitória numa rodada e d/n é a probabilidade q de derrota. Logo, o crescimento esperado, $g(f)$ será:

$$G(f) = p \log(1 + fb) + q \log(1 - f) \quad (4)$$

Para achar a fração f^* que maximiza $G(f)$, $\max[G(f)]$ ocorre quando $\partial g(f) / \partial f = 0$ Resolvendo a maximização acima, obtém-se a fração f^* que maximiza $g(f)$ é:

$$f^* = \frac{bp-q}{b} \quad (5)$$

E como se sabe que $q = 1 - p$, temos:

$$f^* = \frac{p(b+1)-1}{b} \quad (6)$$

Para demonstrar a aplicação do critério de Kelly apresenta-se o seguinte exemplo, foi proposto um investimento de 1.000,00€, cuja probabilidade de vitória é de 60%, conseqüentemente a probabilidade de derrota é 40%. Assim sendo (p) é de 0.6 e o que é pago (b) é 1, pode ver-se que:

$$f^* = \frac{0.6(1+1)-1}{1} = 0.20$$

$$G(f) = 0.6 \log(1 + 0.20 * 1) + 0.4 \log(1 - 0.20) = 0.0087447 = 0.874\%$$

Ou seja, para maximizar o retorno no longo prazo, é necessário apostar 20% do capital em cada investimento, alcançando assim um retorno logarítmico médio de 0.87%, como se constata na tabela 1.

Desenvolvendo em Excel um modelo de Monte Carlo, para exemplificar e explicar melhor o funcionamento do critério de Kelly, com os dados do exemplo apresentado ($p=0.6$, $q=0.4$ e $b=1$), este teste foi feito mil vezes e com 25, 50, 75 e 100 investimentos, os resultados ao final dos investimentos foram os seguintes;

Investimentos	25	50	75	100
Média	2 737,82 €	6 202,91 €	18 647,41 €	45 077,63 €
Mínimo	96,82 €	31,64 €	23,26 €	11,40 €
Máxima	42 398,32 €	157 815,52 €	391 615,19 €	2 186 512,02 €

Tabela 1 : Resultado dos Investimentos

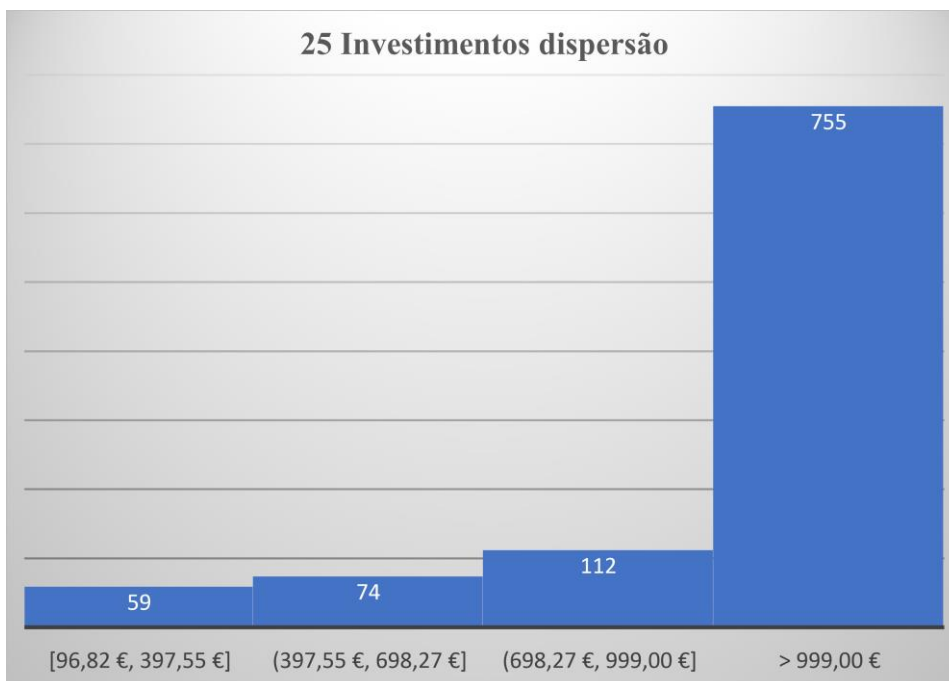


Gráfico 4: 25 Investimentos Dispersão

Foram realizados mil testes de 25 investimentos. Deles resultou que em 755 dos 1000 testes o resultado obtido foi superior a novecentos e noventa e nove euros, logo lucro. Assim constata-se que só existiu prejuízo em 25% dos testes realizados.

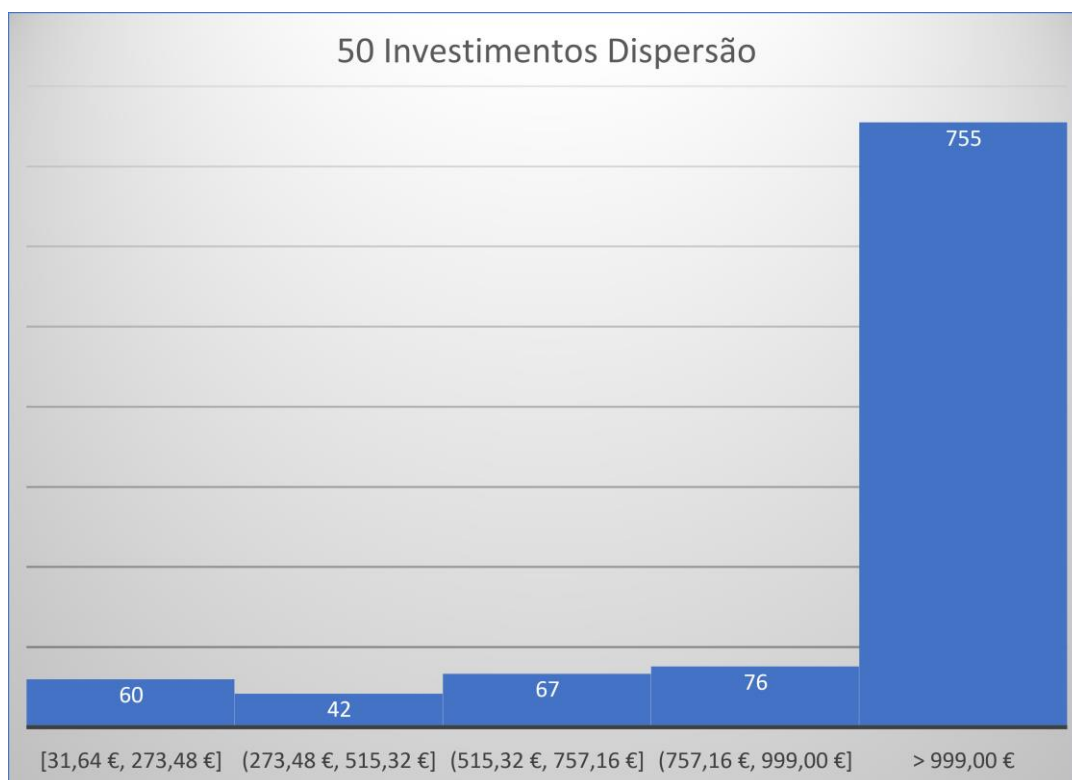


Gráfico 5: 50 Investimentos Dispersão

À semelhança do gráfico 4, o gráfico 5 mostra como se comporta o mesmo investimento feito 50 vezes e testado em 1000 ocasiões. Constatou-se que os resultados superiores a novecentos e noventa e nove euros se mantêm nas 755 ocorrências. Porém há um ligeiro aumento nas ocorrências inferiores a duzentos e setenta e três euros, que ultrapassam as 59.

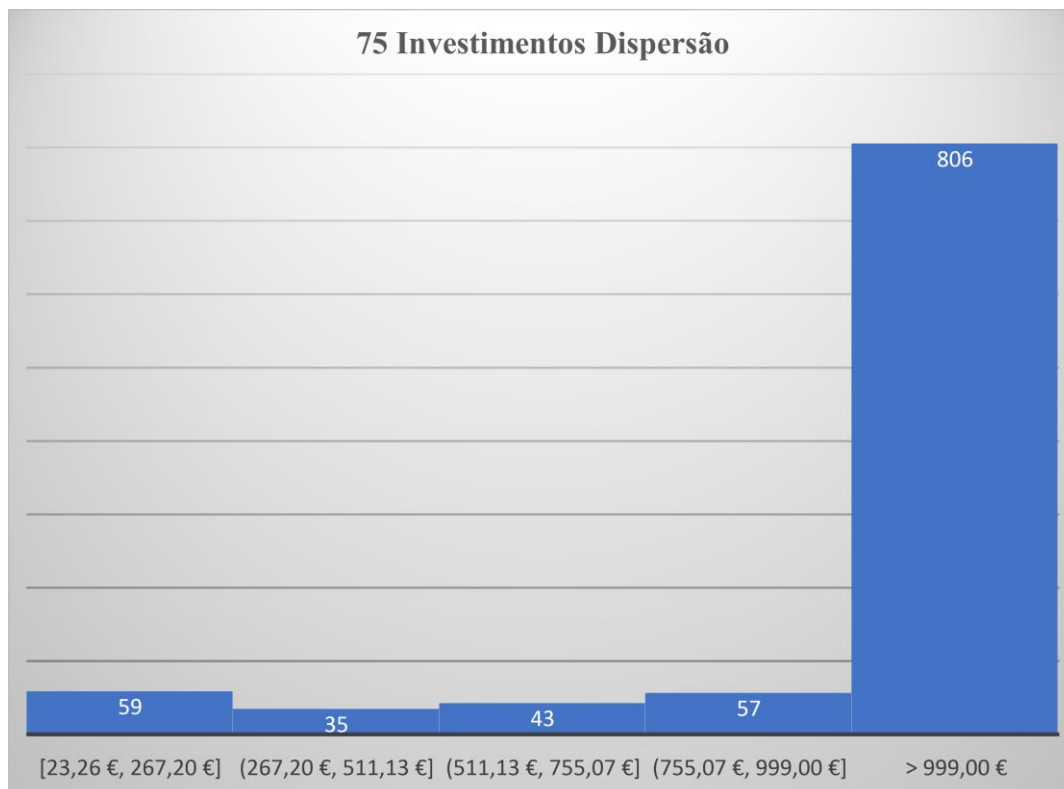


Gráfico 6: 75 Investimentos Dispersão

No gráfico 6 pode ver-se, que das 1.000 vezes que foram testados 75 investimentos, obtiveram-se resultados iguais ou superiores ao capital inicial investido em 806 ocasiões. O que é um aumento significativo face ao constatado no gráfico 5. O que indica que com o avolumar dos investimentos, esta situação ocorra ainda mais vezes.

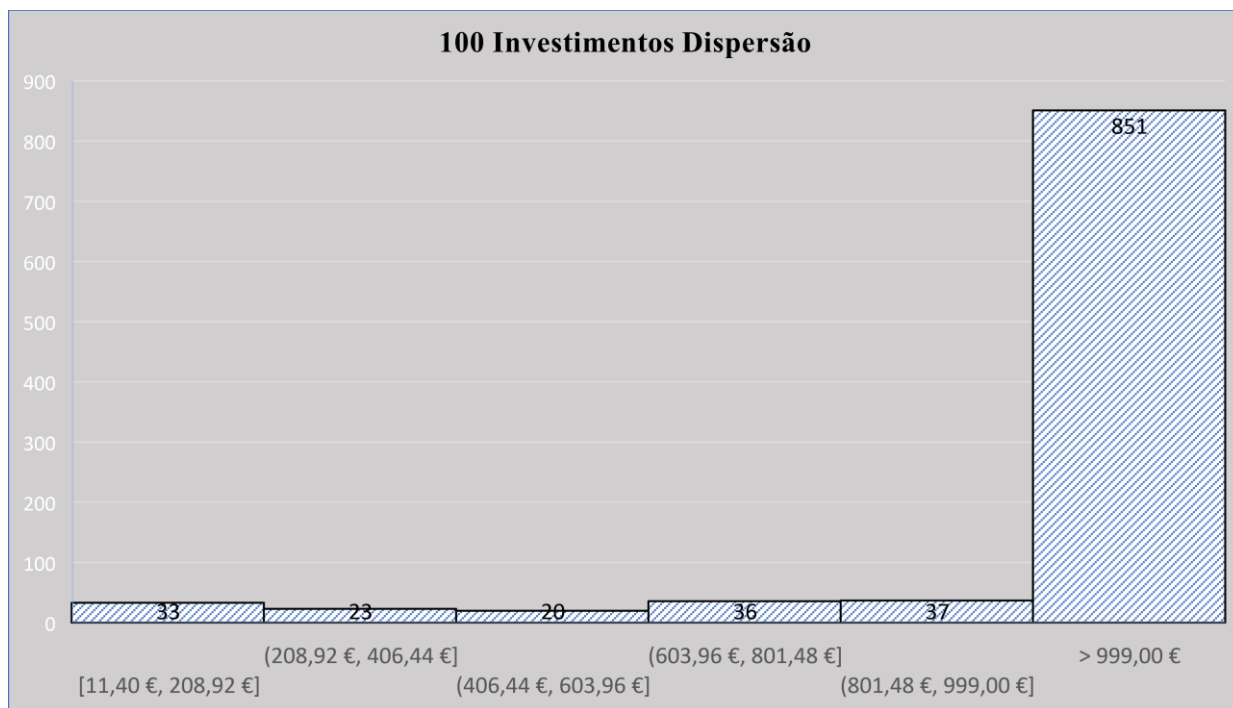


Gráfico 7: 100 Investimentos Dispersão

Como se observa no gráfico 7, a grande maioria dos resultados obtidos após os cem investimentos, verifica-se que são francamente positivas, o que demonstra que a teoria apresentada acompanha o que acontece na prática, ou seja o critério de Kelly maximiza o lucro e mitiga as perdas. Pode ainda observar-se que os resultados mais observados após os cem investimentos estão situados em valores superiores a 999 €, ou seja lucro, o que faz com que em mil tentativas de cem apostas haja um retorno positivo em oitocentas e cinquenta e uma vezes.

De salientar que quanto maior for o número de investimentos mais o resultado tende a aumentar, e a atingir cifras mais elevadas.

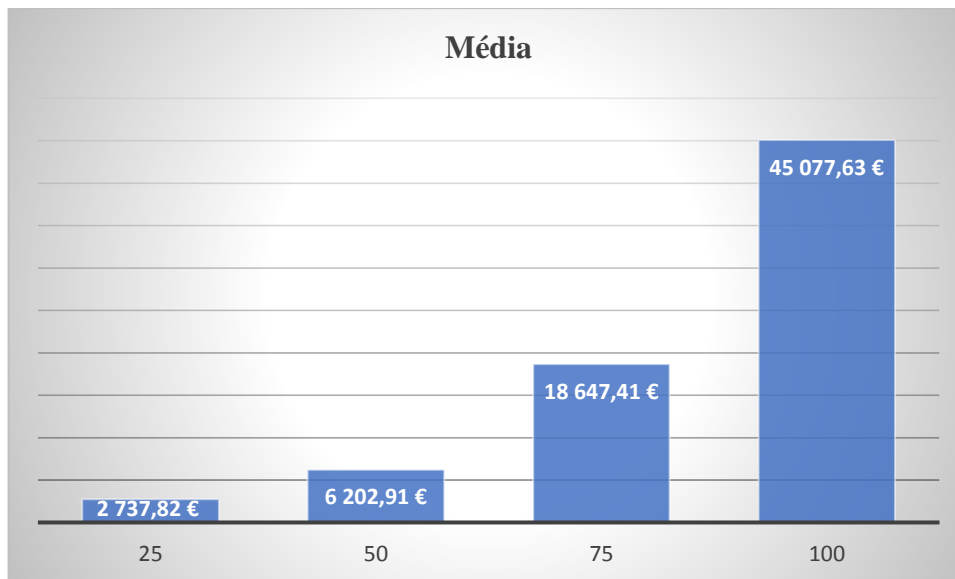


Gráfico 8: Média Retorno do Investimento

Como se pode observar pelo gráfico 8, em média ao fim de 100 investimentos, o retorno esperado é de aproximadamente de quarenta e cinco mil euros. Por outro lado, quando o investimento é efetuado 25 vezes o retorno é de aproximadamente dois mil e setecentos euros. O que mostra que com o aglomerar de investimentos o retorno tende a aumentar.

Apesar de peculiaridade, a ideia acima parece ter pouca aplicabilidade prática. Investimentos com retornos esperados muito positivos são operações pouco comuns normalmente com vida curta.

Pode destacar-se alguns casos como o de contagem de cartas no *Blackjack*. Descrito e utilizado, pela primeira vez por Edward Thorp (1966). Entretanto, a aplicação de tal estratégia requer muita habilidade e trabalho, tal como descrito em Poundstone William (2005).

Outro caso curioso explorado por Ziemba (2001) é o de se escolher combinações de números pouco selecionados em loterias, como por exemplo o Euromilhões. Escolher números “impopulares” pode trazer uma rendibilidade esperada positiva, pois caso sejam sorteados, dificilmente o prémio será dividido por mais de um vencedor. Ziemba (2001) demonstra estatisticamente que tal estratégia pode ter um retorno esperado positivo, porém, demonstra também que pode não ser suficiente o tempo de uma vida humana, para que tal facto ocorra.

Estes dois exemplos demonstram que o caso binomial do critério é pouco aplicável na prática, porém um dos locais onde melhor se pode adotar o critério é no mercado financeiro. Como é sabido, o mercado financeiro de ações tem retornos esperados positivos. Para além dos

retornos esperados positivos, o mercado das bolsas de valores reúne outras qualidades muito valiosas para o modelo, como:

- A facilidade de investir, não sendo necessário ser nenhum expert para operar;
- Os investimentos surgem em janelas alargadas de tempo;
- Não existem limitações quanto ao capital a ser investido e pode-se ter uma expectativa positiva do retorno bem como mensurar o risco que se corre.

Enquanto no caso binomial existe o ganho no caso de vitória e a probabilidade de vitória, no mercado acionista há o retorno esperado e a volatilidade do mercado.

Aplicar um modelo ao investimento em ações que possa maximizar os retornos no longo prazo pode ser de extremo interesse para investidores institucionais e individuais. À primeira vista não é possível aplicar as variáveis de retorno esperado e volatilidade nas equações (1) e (6). Porém pode-se deduzir equações para investimentos com payoffs¹⁰ contínuos utilizando a ideia original de John Kelly. No seu artigo Edward (2006) parte da mesma ideia utilizada para se deduzir a equação de *Black-Scholes-Merton*¹¹. A variação do preço das ações, em frações de tempo infinitesimais, pode assumir dois valores, $m \pm s$, sendo m a rentabilidade esperada e s o desvio padrão. Dessa forma, o caso binomial pode ser aplicado para frações de tempo infinitesimais e com um pouco de manuseamento algébrica e séries de potência obtém-se uma solução para qualquer intervalo de tempo real.

Partindo do pressuposto que as ações seguem o GBM¹² (movimento browniano geométrico), pode chegar-se à mesma solução apresentada por Thorp (2008), maximizando o movimento/rentabilidade esperada no GBM.

A rentabilidade esperada de um ativo "s" é dado pela função:

$$E\left(\ln\left(\frac{st}{s_0}\right)\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \quad (7)$$

Para um portfólio composto de uma fração f em um ativo s , com drift μ (rentabilidade), t tempo, desvio padrão σ e uma fração $(1-f)$ num título que paga uma taxa de juros conhecida r . A taxa de retorno esperado, $G(f)$, passa a ser:

$$G(f) = \left(f\mu - \frac{(f\sigma)^2}{2}\right)t + ((1-f)r)t \quad (8)$$

¹⁰ Ganhos inerentes de investimentos financeiros.

¹¹ Refere-se a três conceitos relacionados, um modelo de precificação de ativos não direcionais; uma equação diferencial parcial; uma fórmula, cujo resultado obtido (pela solução da equação mencionada acima), projeta uma estimativa teórica do preço de tal opção.

¹² O movimento geométrico browniano é usado para modelar os preços das ações no modelo Black-Scholes e é o modelo mais utilizado no comportamento do preço das ações.

Resolvendo, $\max G(f)$. Onde f^* representa o valor de f que maximiza $G(f)$,

$$\frac{\partial G(f)}{\partial f} = \mu - \frac{2f\sigma^2}{2} - r = 0 \quad (9)$$

Assim sendo:

$$f^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \quad (10)$$

Sendo r a taxa de juro sem risco. Esta última é inclusive a fórmula que será adotada para a realização da nossa análise de investimento.

Aplicado f^* em $G(f)$, temos que:

$$G(f^*) = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \quad (11)$$

Como só há um ativo de risco, a volatilidade do portfólio é proporcional à quantidade desse ativo,

$$\sigma_p = \sigma f \quad (12)$$

Ou seja, para f^* temos que:

$$\sigma_{p^*} = \sigma f^* = \sigma \frac{\mu - r}{\sigma^2} = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (13)$$

Ohlsson (2017), estudou a aplicação do critério de Kelly no mercado Sueco de ações no período de 2005 até o ano de 2015. Os resultados obtidos, comparando o critério de Kelly com outras estratégias de investimento, o critério de Kelly demonstrou resultados cinco vezes superiores às demais estratégias de investimento.

Li et al. (2020), inovou e utilizou uma combinação de estratégias de investimento no CSI300¹³, onde adotou o LSTM¹⁴ juntamente com o critério de Kelly. Esta inovação, teve uma repercussão no crescimento do investimento de 44,9% num período de dez dias. Isto tem uma enorme relevância, o critério de Kelly é conhecido pelos retornos financeiros no medio longo prazo e nunca em um período tão curto.

Thorp (2007), mostra que o critério de Kelly é utilizado por dois dos maiores investidores da história, Mohnish Pabrai e Warren Edward Buffett. Neste artigo, é mostrado que nos principais negócios efetuados por estes dois investidores, são sempre tidos em conta os cálculos do critério de Kelly. Warren Edward Buffett afirmando inclusive que nunca faz

¹³ O CSI 300 é um índice do mercado de ações ponderado por capitalização projetado para replicar o desempenho das 300 principais ações negociadas na Bolsa de Valores de Xangai e na Bolsa de Valores de Shenzhen

¹⁴ LSTM- Long short-term memory é uma arquitetura de rede neural artificial usada no campo da aprendizagem.

investimentos inferiores a vinte e cinco por cento do capital disponível para investir, podendo em casos excepcionais chegar a investir setenta e cinco por cento do capital.

Yoder (2021), testou a aplicação do critério de Kelly em um investimento cuja probabilidade de sucesso era de 52%, conseqüentemente, a probabilidade de insucesso era de 48%. Com a adoção do critério de Kelly ao final de 1.000 aplicações o investidor tinha uma riqueza maior em 44% face ao capital inicial. O que com uma taxa de sucesso esperada tão próxima da taxa de insucesso, é um resultado muito favorável.

O critério Kelly é uma estratégia viável para se ter em conta na ótica do investimento financeiro e na mitigação do risco de falência.

4 Metodologia

Neste trabalho, ver-se-á o comportamento dos índices: português (PSI20); inglês (FTSE100) e americano (Dow Jones). Vai ser comparada a sua evolução ao longo dos últimos 20 anos, utilizando o critério de Kelly a fim de se perceber se com o uso do critério têm um retorno mais favorável do que sem ele. Para isso vamos analisar toda a metodologia adotada.

A fórmula adotada para calcular a percentagem do capital que deve ser investido segundo o critério de Kelly é representada pela seguinte expressão: $f^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$. Onde μ corresponde à rendibilidade esperada do investimento, o r é a renda fixa do mercado e o σ^2 é a volatilidade ao quadrado do mercado.

Visto isto, percebe-se que existem algumas incógnitas que se terá que estimar. A primeira delas o μ . Para isso, tem que se encontrar uma forma de poder no momento inicial estimar a rendibilidade do investimento. De acordo com Neves (2002) e Pinho & Tavares (2012), uma das formas de melhor fazer essa estimativa é utilizando o CAPM¹⁵.

Neves (2002), refere que o “CAPM deve ser o modelo mais utilizados pelos analistas financeiros para estimar o custo dos capitais próprios. O modelo indica de forma direta a relação entre o risco e a rendibilidade exigida pelo acionista, isto é, o custo do capital próprio.”

Para a exatidão da estimativa deste modelo, ter-se-á que ter em conta dois pressupostos fundamentais:

- A eficiência dos mercados, para que haja uma relação consistente entre o risco e a rendibilidade dos ativos.
- Que a relação entre o risco e a rendibilidade seja razoavelmente estável ao longo do tempo.

O CAPM, representa-se da seguinte forma:

$$r_e = r_f + \beta(r_m - r_f) \quad (14)$$

Aonde temos que r_e = rendibilidade esperada pelo acionista, r_f corresponde à taxa de juro sem risco, r_m é a rendibilidade da carteira de mercado e o β é o índice de risco do ativo financeiro.

Assim para se obter a taxa de juro sem risco (r_f) usou-se o site da Pordata¹⁶, onde se pode consultar a informação das taxas de juro sem risco para todos os anos.

¹⁵ Capital Asset Pricing Model trata-se de uma fórmula de analisar e investigar as relações existentes entre o risco e o retorno esperado de um investimento.

¹⁶ Pordata é uma base de dados contemporânea com estatísticas oficiais sobre diversos países.

Ano	Taxa Livre de Risco Portugal	Taxa Livre de Risco Inglaterra	Taxa Livre de Risco Estados Unidos América
1999	0,0480		
2000	0,0560	0,04483	0
2001	0,0520	0,04598	0
2002	0,0500	0,04679	0
2003	0,0420	0,04598	0
2004	0,0410	0,04656	0
2005	0,0340	0,04336	0
2006	0,0390	0,04114	0
2007	0,0440	0,04491	0
2008	0,0450	0,04420	0
2009	0,0420	0,04304	0
2010	0,0540	0,04303	0
2011	0,1020	0,03948	0
2012	0,1050	0,03123	0
2013	0,0630	0,03422	0
2014	0,0380	0,03247	0
2015	0,0240	0,02530	0
2016	0,0320	0,01994	0
2017	0,0310	0,01842	0
2018	0,0180	0,01845	0
2019	0,0080	0,01417	0
2020	0,0040	0,00807	0

Tabela 2 : Taxa Livre de risco 2000-2020

A rendibilidade da carteira de mercado (r_m), é dada quando somado o prémio de risco de mercado e a taxa de juro sem risco (r_f). Porém consultando o site Adamodar¹⁷, pode conhecer-se o prémio de risco do mercado, tendo assim todas as informações necessárias para o cálculo do r_m .

¹⁷ http://people.stern.nyu.edu/adamodar/New_Home_Page/dataarchived.html#discrate (Damodaran)

Ano	Taxa Risco Mercado Português	Taxa Risco Mercado Britânico	Taxa Risco Mercado Estados Unidos América
2001	6,46%	5,51%	5,51%
2002	6,11%	5,51%	5,51%
2003	5,79%	4,51%	4,51%
2004	5,80%	4,82%	4,82%
2005	5,82%	4,84%	4,84%
2006	5,63%	4,80%	4,80%
2007	5,66%	4,91%	4,91%
2008	5,54%	4,79%	4,79%
2009	6,50%	5,00%	5,00%
2010	5,40%	4,50%	4,50%
2011	6,28%	5,00%	5,00%
2012	10,13%	6,00%	6,00%
2013	10,68%	5,80%	5,80%
2014	10,40%	5,60%	5,00%
2015	9,50%	6,35%	5,75%
2016	10,17%	6,88%	6,25%
2017	9,24%	6,25%	5,69%
2018	7,96%	5,65%	5,08%
2019	9,02%	6,65%	5,96%
2020	7,37%	5,69%	5,20%

Tabela 3 : Total Risco Mercado

Por fim para poder calcular o CAPM, necessita-se saber o valor do β . Pinho & Tavares (2012), definem o β como sendo a medida de sensibilidade de um título ou carteira de títulos, relativamente às oscilações de mercado. Porém, como se está a trabalhar com o principal índice da bolsa de valores dos países analisados, a variação dos títulos ou carteira de títulos que vai ser analisada é sempre igual a variação do mercado, consequentemente o β vai ser sempre um.

Para o cálculo do f^* , é necessário determinar σ^2 que representa a volatilidade ao quadrado do mercado. Segundo Neves (2002) e Pinho & Tavares (2012), a volatilidade (σ) é igual ao desvio padrão que por sua vez é igual à raiz quadrada da variância (s^2).

Deste modo para calcular a variância anual de um índice de mercado, é necessário conhecer as suas variações mensais no valor do índice.

Data	PSI20		FTSE100		Dow Jones	
	Fecho	Abertura	Fecho	Abertura	Fecho	Abertura
jan/02	7 660,57	7 799,61	5 164,80	5 217,40	9 920,00	10 021,71
fev/02	7 448,82	7 698,23	5 101,00	5 164,80	10 106,13	9 923,04
mar/02	7 796,00	7 445,05	5 271,80	5 101,00	10 403,94	10 111,04
abr/02	7 531,69	7 793,64	5 165,60	5 271,80	9 946,22	10 402,07
mai/02	7 280,48	7 547,44	5 085,10	5 165,60	9 925,25	9 944,90
jun/02	6 809,25	7 263,51	4 656,40	5 085,10	9 243,26	9 923,94
jul/02	6 145,65	6 805,07	4 246,20	4 656,40	8 736,59	9 239,25
ago/02	6 119,85	6 151,20	4 227,30	4 246,20	8 663,50	8 732,58
set/02	5 106,52	6 090,80	3 721,80	4 227,30	7 591,93	8 659,27
out/02	5 445,90	5 128,85	4 039,70	3 721,80	8 397,03	7 593,04
nov/02	6 058,00	5 478,14	4 169,40	4 039,70	8 896,09	8 395,64
dez/02	5 824,70	6 053,51	3 940,40	4 169,40	8 341,63	8 902,95
jan/20	5252,03	5 239,19	7 286,01	7 542,44	28 256,03	28 638,97
fev/20	4765,73	5 248,19	6 580,61	7 286,01	25 409,36	28 319,65
mar/20	4069,55	4 882,59	5 671,96	6 580,61	21 917,16	25 590,51
abr/20	4284,18	4 002,41	5 901,21	5 671,96	24 345,72	21 227,38
mai/20	4330,67	4 206,46	6 076,60	5 901,21	25 383,11	24 120,78
jun/20	4390,25	4 376,04	6 169,74	6 076,60	25 812,88	25 342,99
jul/20	4295,82	4 367,54	5 897,76	6 169,74	26 428,32	25 879,38
ago/20	4301,08	4 293,98	5 963,57	5 897,76	28 430,05	26 542,32
set/20	4067,02	4 307,52	5 866,10	5 963,57	27 781,70	28 439,61
out/20	3945,12	4 099,88	5 577,27	5 866,10	26 501,60	27 940,63
nov/20	4604,72	3 957,00	6 266,19	5 577,27	29 638,64	26 691,28
dez/20	4898,36	4 620,07	6 460,52	6 266,19	30 606,48	29 797,50

Tabela 4 : Evolução de Mercado

Com estas informações, é possível calcular a rentabilidade mensal do índice, a tabela pode ser consultada na íntegra no ponto 8 apêndice do trabalho.

$$\text{rentabilidade mensal do índice} \quad (R_m) = \frac{\text{valor fecho} - \text{valor abertura}}{\text{valor abertura}} \quad (15)$$

Após o cálculo da rentabilidade mensal do índice para todos os meses, calcula-se a variância do ano.

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (16)$$

Sendo o s^2 a Variância da amostra, x_i o valor de uma observação, o \bar{x} o valor medio de todas as observações e o n o número de observações.

Após a estimação da variância é possível calcular a volatilidade (σ), da seguinte forma:

$$\sigma = \sqrt{s^2} \quad (17)$$

Tendo por base toda esta explicação, pode agora exemplificar o cálculo do critério Kelly para o ano de 2001, tendo em conta que estamos no dia 31/12/2000, para um investimento no índice PSI20

O nosso r_f como se pode ver na tabela 2 é de 0,0520. De acordo com a Tabela 3 o premio de risco de mercado para o ano de 2001 é de 0,0646. Com estas informações já se pode calcular o r_m , que como visto anteriormente é igual ao somatório r_f e do prémio de risco de mercado. Logo o r_m é de 0,1166 (0,0646+0,0520). Sabendo que o β é 1, temos que:

$$r_e = 0,0520 + 1(0,1166 - 0,0520)$$

$$r_e = 0,116600$$

Para o cálculo do critério de Kelly é ainda necessário calcular qual o σ . Porém têm que se ter em atenção que no dia 31/12/2000, data em que está a ser calculado o Kelly, não existe como saber a rendibilidade do ano, logo terá de se utilizar a rendibilidade do ano de 2000 para calcular a variância e posteriormente o desvio padrão para se estimar a volatilidade.

data	Fecho	Abertura	Rentabilidade
jan/00	12 385,55	12 098,58	0,0237
fev/00	14 644,27	12 505,23	0,1711
mar/00	13 127,09	14 768,54	-0,1111
abr/00	12 235,62	13 086,32	-0,0650
mai/00	11 864,13	12 427,19	-0,0453
jun/00	11 923,37	11 923,93	0,0000
jul/00	11 937,44	11 869,18	0,0058
ago/00	11 900,26	11 960,62	-0,0050
set/00	11 778,95	12 033,17	-0,0211
out/00	10 981,81	11 798,03	-0,0692
nov/00	10 571,90	11 042,66	-0,0426
dez/00	10 404,09	10 588,15	-0,0174

Tabela 5 : *Rendibilidade 2000*

Tendo calculado os valores da rendibilidade, calcular-se-á a variância do mercado

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (17)$$

$$s^2 = 0,004842926$$

data	VAR	Rentabilidade
jan/00	0,004842926	0,0237
fev/00		0,1711
mar/00		-0,1111
abr/00		-0,0650
mai/00		-0,0453
jun/00		0,0000
jul/00		0,0058
ago/00		-0,0050
set/00		-0,0211
out/00		-0,0692
nov/00		-0,0426
dez/00		-0,0174

Tabela 6 : Variância 2000

A volatilidade do mercado no ano 2000

$$\sigma = \sqrt{(0,004842926)}$$

$$\sigma = 0,069591135$$

data	DP σ	VAR	Rentabilidade
jan/00	0,069591135	0,004842926	0,0237
fev/00			0,1711
mar/00			-0,1111
abr/00			-0,0650
mai/00			-0,0453
jun/00			0,0000
jul/00			0,0058
ago/00			-0,0050
set/00			-0,0211
out/00			-0,0692
nov/00			-0,0426
dez/00			-0,0174

Tabela 7 : Desvio Padrão 2000

Já estimados todos os valores necessários para o calculo do Kelly para o ano de 2001, assim sendo temos:

$$f^* = \frac{0,116600 - 0,0520}{0,069591135^2}$$

$$f^* = 13,33904319$$

Posto isto, é de fácil constatação que segundo o critério de Kelly, deveríamos investir 13,33% do nosso capital no PSI20.

Este cálculo foi repetido para todos os anos analisados e todos os índices estudados, para assim se poder ter uma comparação fidedigna dos seus resultados.

5 Resultados

Nesta fase do trabalho, será testado o comportamento dos índices PSI20, FTSE100 e Dow Jones nos últimos 18 anos. Para isso simula-se um investimento de 10.000,00€ no mês de janeiro do ano de 2002 e retirar-se-á o capital investido acrescido das mais ou menos valias no dia 31 de dezembro do mesmo ano. O retorno do investimento será aplicado no mês de janeiro do ano seguinte e este processo repetir-se-á em todos os índices e até ao ano de 2020.

Posteriormente, os resultados serão comparados com um investimento similar, porém utilizando o critério de Kelly. O valor inicial da carteira, também será de 10.000,00€, porém o investimento do mês de janeiro será o valor da carteira multiplicado pela percentagem de Kelly para esse ano. O retorno do investimento será aplicado no mês de janeiro do ano seguinte e este processo repetir-se-á em todos os índices e até ao ano de 2020. Depois, serão comparados os resultados obtidos a fim de perceber se o critério de Kelly maximiza os investimentos e mitiga os riscos.

5.1 Evolução do Psi 20

Da evolução do PSI 20 nas duas últimas décadas pode observar-se o seguinte resultado:

Ano	Fecho	Abertura	Rentabilidade anual	Retorno PSI20
2001	7 831,49	10 318,31	-0,241010398	
2002	5 824,70	7 799,61	-0,25320625	7 467,94 €
2003	6 747,41	5 816,73	0,16000055	8 662,81 €
2004	7 600,16	6 748,00	0,126283343	9 756,78 €
2005	8 618,67	7 592,93	0,13509146	11 074,84 €
2006	11 197,60	8 599,19	0,302169158	14 421,31 €
2007	13 019,40	11 172,35	0,165323321	16 805,49 €
2008	6 341,34	13 026,66	-0,513202924	8 180,86 €
2009	8 463,85	6 379,03	0,326823984	10 854,57 €
2010	7 588,31	8 475,45	-0,104671728	9 718,40 €
2011	5 494,27	7 649,87	-0,281782566	6 979,92 €
2012	5 655,15	5 518,05	0,024845734	7 153,35 €
2013	6 558,85	5 721,19	0,146413596	8 200,69 €
2014	4 798,99	6 605,71	-0,273508828	5 957,73 €
2015	5 313,17	4 857,60	0,093784997	6 516,48 €
2016	4 679,20	5 274,38	-0,112843595	5 781,13 €
2017	5 388,33	4 675,79	0,152389222	6 662,12 €
2018	4 731,47	5 405,83	-0,124746801	5 831,04 €
2019	5 214,14	4 695,08	0,110554027	6 475,68 €
2020	4 898,36	5 239,19	-0,065053949	6 054,42 €

Tabela 8 : Investimento PSI20 10.000€

Como se pode constatar pela tabela 8, o PSI20 teve um comportamento muito interessante entre o período de 2002 e 2007, tendo atingido neste último o seu máximo. Com o investimento inicial, de 10.000€, no ano de 2007 o investidor teria uma quantia acumulada de 16.805€.

O ano de 2008 foi um ano muito negro para o mercado financeiro mundial, e não foi exceção para o mercado português que caiu em um ano aproximadamente cinquenta por cento. Passando de um resultado de 16.805€ no final de 2007 para 8.180€ no final de 2008.

Após este ano trágico, houve uma ligeira recuperação no ano de 2009, porém de 2010 em diante com alguns altos e baixos, a tendência foi sempre descendente.

Ocorre então que caso um investidor fizesse investimentos anuais no PSI20, começando em 2001 com a quantia de 10.000€ chegaria ao final de 2020 com apenas 6.054€, o que resulta em uma perda de 3.946€ ou seja trinta e nove por cento do capital investido.

Comparar-se-á agora com os mesmos pressupostos o que ocorreria caso o investidor utilizasse o critério de Kelly para investir os seus 10.000€ de capital.

Ano	Fecho	Abertura	Rentabilidade anual	σ^2	μ	r	Kelly	Retorno Kelly
2001	7 831,49	10 318,31	-0,241010398	0,0427	0,1011	0,0460	13,34%	
2002	5 824,70	7 799,61	-0,25320625	0,0580	0,1019	0,0468	20,86%	9 471,69 €
2003	6 747,41	5 816,73	0,16000055	0,0439	0,0911	0,0460	11,39%	9 644,32 €
2004	7 600,16	6 748,00	0,126283343	0,0182	0,0948	0,0466	51,40%	10 270,31 €
2005	8 618,67	7 592,93	0,13509146	0,0233	0,0918	0,0434	49,55%	10 957,84 €
2006	11 197,60	8 599,19	0,302169158	0,0228	0,0891	0,0411	57,82%	12 872,19 €
2007	13 019,40	11 172,35	0,165323321	0,0255	0,0940	0,0449	35,88%	13 635,72 €
2008	6 341,34	13 026,66	-0,513202924	0,0615	0,0921	0,0442	30,64%	11 491,54 €
2009	8 463,85	6 379,03	0,326823984	0,0547	0,0930	0,0430	10,68%	11 892,52 €
2010	7588,31	8475,45	-0,104671728	0,0500	0,0880	0,0430	23,62%	11 598,54 €
2011	5 494,27	7 649,87	-0,281782566	0,0386	0,0895	0,0395	17,55%	11 024,87 €
2012	5 655,15	5 518,05	0,024845734	0,0354	0,0912	0,0312	78,66%	11 240,33 €
2013	6 558,85	5 721,19	0,146413596	0,0296	0,0922	0,0342	27,06%	11 685,62 €
2014	4 798,99	6 605,71	-0,273508828	0,0266	0,0885	0,0325	47,09%	10 180,42 €
2015	5 313,17	4 857,60	0,093784997	0,0383	0,0888	0,0253	25,44%	10 423,31 €
2016	4 679,20	5 274,38	-0,112843595	0,0238	0,0887	0,0199	33,81%	10 025,64 €
2017	5 388,33	4 675,79	0,152389222	0,0243	0,0810	0,0184	37,12%	10 592,75 €
2018	4731,47	5 405,83	-0,124746801	0,0333	0,0750	0,0184	66,87%	9 709,15 €
2019	5214,14	4 695,08	0,110554027	0,0289	0,0807	0,0142	87,73%	10 650,81 €
2020	4898,36	5 239,19	-0,065053949	0,0687	0,0650	0,0081	49,24%	10 309,67 €

Tabela 9 : Investimento PSI20 com Kelly 10.000€

A tabela 9 demonstra qual a percentagem do capital o investidor deve utilizar, com base nisso, vamos perceber os resultados que esse investimento teria, caso fossem aplicados os 10.000€ no ano de 2001.

Pode observar-se também pela tabela 9, que o investidor que adote o critério de Kelly para efetuar a aplicação de 10.000€ no ano de 2001, teria em 2020 um valor acumulado de 10.309€. Esta quantia, é absolutamente extraordinária, visto que está a investir num mercado que teve nesse período uma queda de aproximadamente quarenta por cento. Ou seja, enquanto o mercado caiu drasticamente, o investidor que utilizou o critério de Kelly, teve um ganho de aproximadamente quatro por cento. Pode ver-se no Gráfico 9 como se expressa essa diferença.

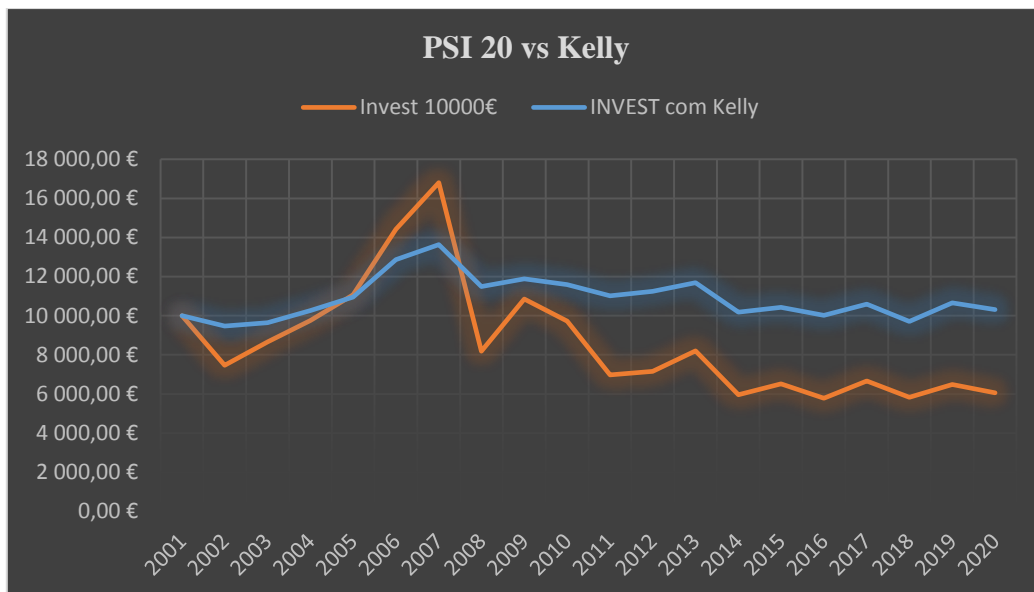


Gráfico 9: PSI 20 vs Kelly

Como se pode constatar no geral, o investimento com o critério de Kelly, teve sempre um desempenho superior ao investimento usando apenas o PSI 20. Foi apenas exceção o período entre 2005 e 2007, onde houve um crescimento muito significativo do mercado português. Porém salvo essa exceção a aplicação com o critério de Kelly teve sempre uma performance superior.

5.2 Evolução FTSE100

À semelhança da abordagem adotada no ponto anterior, vai agora ser feita a análise de um investimento de 10.000,00€ no FTSE100. O investimento é realizado no início do ano de 2002 e é resgatado no final desse mesmo ano. O processo é repetido até ao ano de 2020, com o propósito de perceber se o investimento tem um retorno positivo. Posteriormente, repetir-se-á

o investimento utilizando o critério de Kelly, de forma a compreender se a adoção desta estratégia é vantajosa para o investidor.

Ano	Fecho	Abertura	Rendibilidade anual	Retorno FTS100
2001	5 217,40	6 297,50	-0,171512505	
2002	3 940,40	5 217,40	-0,244757925	7 552,42 €
2003	4 476,87	3 940,40	0,136146077	8 580,65 €
2004	4 814,30	4 476,90	0,07536465	9 227,33 €
2005	5 618,76	4 814,30	0,16709802	10 769,20 €
2006	6 220,81	5 618,80	0,107142094	11 923,03 €
2007	6 456,91	6 220,80	0,037954925	12 375,57 €
2008	4 434,17	6 456,90	-0,313266428	8 498,72 €
2009	5 412,88	4 434,17	0,220719999	10 374,56 €
2010	5 899,94	5 412,88	0,089981673	11 308,08 €
2011	5 572,28	5 899,94	-0,055536158	10 680,07 €
2012	5 897,81	5 572,28	0,058419534	11 304,00 €
2013	6 749,09	5 897,81	0,144338322	12 935,60 €
2014	6 566,09	6 749,09	-0,027114767	12 584,85 €
2015	6 242,32	6 566,09	-0,049309406	11 964,30 €
2016	7 142,83	6 242,32	0,144258865	13 690,26 €
2017	7 687,77	7 142,83	0,07629189	14 734,71 €
2018	6 728,13	7 687,77	-0,124826835	12 895,42 €
2019	7 542,44	6 728,13	0,121030658	14 456,17 €
2020	6 460,52	7 542,44	-0,143444297	12 382,51 €

Tabela 10 :Retorno FTSE100 (10000€)

Da tabela 10 pode deduzir alguns factos muito interessantes, nomeadamente que o FTSE100 tem uma correlação positiva¹⁸ com o PSI20 e que as quedas mais significativas estão relacionadas com acontecimentos externos ao país, nomeadamente em 2001, onde houve os atentados do onze de setembro e em 2007 onde houve um crash que originou a crise do subprime.

Posto isto, ver-se-á agora como termina o ano de 2020 se no ano de 2002 tivesse sido investido 10.000€

Como se pode constatar tabela 10, com exceção dos anos de 2002 até 2004 e o ano de 2008, o resultado foi sempre positivo. Tal como abordado anteriormente estas quedas mais abruptas devem-se aos incidentes internacionais. De salientar, que mesmo com o referendo do brexit e com a saída do Reino Unido da zona Euro, mesmo com todos os impactos que estão

¹⁸ Correlação positiva, é quando dois ativos ou index, tem um comportamento semelhante, ou seja se um aumenta ou diminui, o outro tem um movimento similar.

inerentes, o índice nesses anos teve um comportamento muito positivo, o que resultou em ganhos financeiros bastante significativos. Em termos absolutos, na hipótese colocada, conseguimos constatar que a carteira de tal investimento teria tido um crescimento a rondar os vinte e quatro porcentos no intervalo de 2002 a 2020, o que pode considerar-se como bastante significativo.

Agora para o mesmo investimento utilizando o critério de Kelly, para perceber quanto da carteira deve ser investido e se esse investimento tem um retorno positivo no decurso do período analisado.

Ano	Fecho	Abertura	Rentabilidade anual	σ	μ	r	Kelly	Retorno com Kelly
2001	5 217,40	6 297,50	-0,171512505	0,042708404	0,101075	0,0460		
2002	3 940,40	5 217,40	-0,244757925	0,057985399	0,101891667	0,0468	30%	9 260,63 €
2003	4 476,87	3 940,40	0,136146077	0,043948366	0,091076539	0,0460	13%	9 429,75 €
2004	4 814,30	4 476,90	0,07536465	0,018206466	0,094758781	0,0466	25%	9 607,10 €
2005	5 618,76	4 814,30	0,16709802	0,023336	0,091763885	0,0434	100%	11 212,42 €
2006	6 220,81	5 618,80	0,107142094	0,022785184	0,089138766	0,0411	88%	12 271,31 €
2007	6 456,91	6 220,80	0,037954925	0,025545655	0,094007672	0,0449	95%	12 711,79 €
2008	4 434,17	6 456,90	-0,313266428	0,061499384	0,092095252	0,0442	73%	9 788,84 €
2009	5 412,88	4 434,17	0,220719999	0,054680792	0,093035785	0,0430	13%	10 074,47 €
2010	5 899,94	5 412,88	0,089981673	0,050033575	0,08803293	0,0430	15%	10 210,90 €
2011	5 572,28	5 899,94	-0,055536158	0,038646937	0,08948133	0,0395	20%	10 097,64 €
2012	5 897,81	5 572,28	0,058419534	0,029612403	0,091231462	0,0312	40%	10 334,61 €
2013	6 749,09	5 897,81	0,144338322	0,03539467	0,092222294	0,0342	66%	11 321,25 €
2014	6 566,09	6 749,09	-0,027114767	0,026559162	0,088467605	0,0325	45%	11 184,03 €
2015	6 242,32	6 566,09	-0,049309406	0,038314423	0,088797605	0,0253	90%	10 687,58 €
2016	7 142,83	6 242,32	0,144258865	0,023825184	0,088742346	0,0199	47%	11 410,16 €
2017	7 687,77	7 142,83	0,07629189	0,024257103	0,080965592	0,0184	100%	12 280,66 €
2018	6 728,13	7 687,77	-0,124826835	0,033334558	0,074969153	0,0184	96%	10 808,16 €
2019	7 542,44	6 728,13	0,121030658	0,028901434	0,080658954	0,0142	60%	11 590,86 €
2020	6 460,52	7 542,44	-0,143444297	0,068737647	0,064965156	0,0081	68%	10 458,40 €

Tabela 11 : Retorno FTSE100 com Kelly

Como se pode observar pela tabela 11, adotando o critério de Kelly como estratégia de investimento financeiro, verifica-se que face ao momento inicial temos um aumento da carteira em aproximadamente cinco por cento. Muito interessante constatar também que o valor mínimo atingido foi de nove mil duzentos e sessenta euros, ou seja, um valor muito próximo do inicialmente investido. O que demonstra que adotando o critério de Kelly o risco de falência é bastante mitigado.

Vamos comparar agora a evolução do investimento no FTSE100 sem a utilização do critério de Kelly e com a utilização do critério.

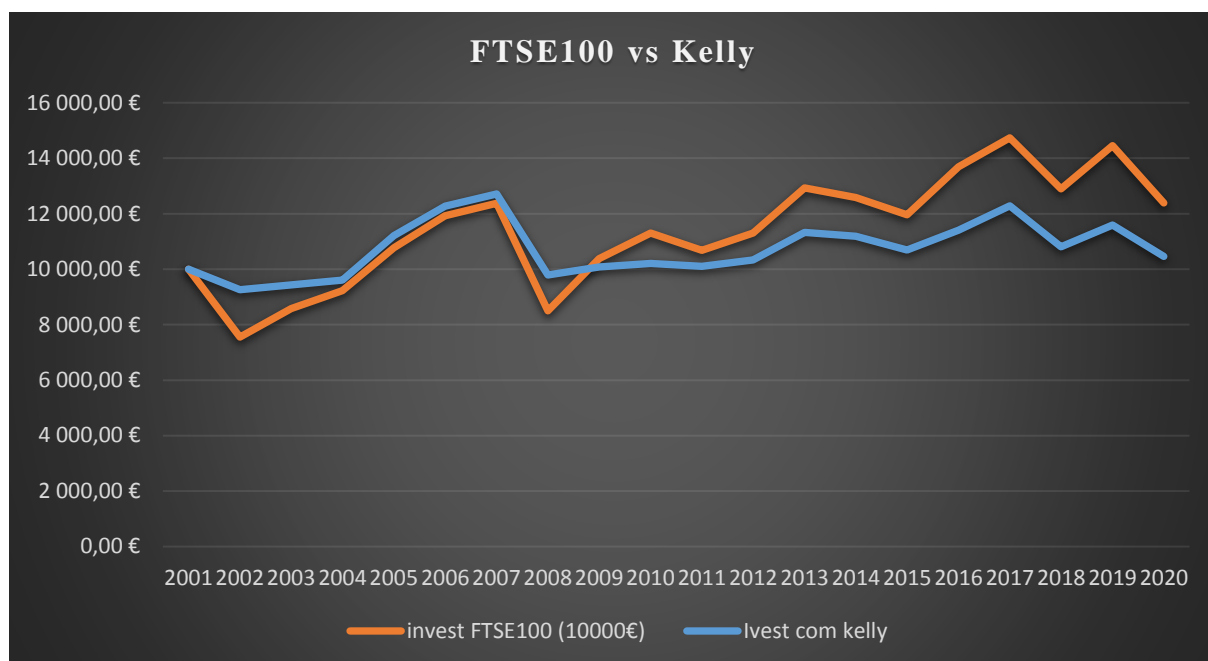


Gráfico 10: FTSE100 vs Kelly

Como pode ser visualizado no gráfico 10 e pela tabela 11, efetivamente o índice acaba por ter um desempenho melhor que o critério de Kelly, mas isso seria uma análise demasiado básica e linear. Sabendo que o critério de Kelly é uma estratégia de investimento com base no valor percentual da carteira, se o mercado ou ações do mercado tiverem um crescimento muito elevado, este será sempre superior ao do índice. Porém não se pode descorar o que foi escrito anteriormente, logo sabemos que o critério de Kelly é uma estratégia de médio longo prazo, e no caso analisado apenas foram feitos 18 investimentos.

Ainda assim houve um crescimento de quase cinco pontos percentuais face ao valor inicial e o mínimo atingido no período da análise, foi no primeiro investimento e cifrou-se nos 9.260€ enquanto que sem a adoção desta estratégia o valor atingido nesse ano foi de 7.550€ o que mostra que o critério se mostrou bastante eficiente a prevenir as perdas potenciais.

5.3 Evolução Dow Jones

Neste ponto, será feita uma abordagem bastante similar à efetuada nos dois últimos pontos, tendo em consideração que o índice analisado será o Dow Jones. Far-se-á então um investimento de 10.000,00€ no Dow Jones. O investimento é realizado no início do ano de 2001 e é resgatado no final desse mesmo ano. O processo é repetido até ao ano de 2020, com o propósito de perceber se o investimento tem um retorno positivo. Posteriormente, repetir-se-á o investimento

utilizando o critério de Kelly, de forma a compreender se a adoção desta estratégia é vantajosa para o investidor.

Ano	Fecho	Abertura	Rendibilidade anual	Retorno
2000	10 787,99	11 501,85	-0,062064798	
2001	10 021,57	10 790,92	-0,071296053	9 287,04 €
2002	8 341,63	10 021,71	-0,167644045	7 730,12 €
2003	10 453,92	8 342,38	0,253110024	9 686,69 €
2004	10 783,01	10 452,74	0,0315965	9 992,76 €
2005	10 717,50	10 783,75	-0,006143503	9 931,37 €
2006	12 463,15	10 718,30	0,162791674	11 548,11 €
2007	13 264,82	12 459,54	0,0646316	12 294,49 €
2008	8 776,39	13 261,82	-0,3382213	8 136,23 €
2009	10 428,05	8 772,25	0,18875431	9 671,98 €
2010	11 577,51	10 430,69	0,109946705	10 735,38 €
2011	12 217,56	11 577,43	0,0552912	11 328,95 €
2012	13 104,14	12 221,19	0,072247465	12 147,44 €
2013	16 576,66	13 104,30	0,264978671	15 366,25 €
2014	17 823,07	16 572,17	0,075481968	16 526,13 €
2015	17 425,03	17 823,07	-0,022332853	16 157,05 €
2016	19 762,60	17 405,48	0,135424016	18 345,10 €
2017	24 719,22	19 872,86	0,243868271	22 818,89 €
2018	23 327,46	24 809,35	-0,059731109	21 455,90 €
2019	28 538,44	23 058,61	0,237647889	26 554,84 €
2020	30 606,48	28 638,97	0,068700446	28 379,17 €

Tabela 12 : Retorno Dow Jones 10.000€

Como pode ser visto na tabela 12, a rendabilidade foi quase sempre positiva, com exceção dos anos 2001 e 2002, que foram marcados pelos atentados terroristas das torres gémeas, 2008, que teve uma queda gigantesca devido a grave crise financeira do subprime que se espalhou mais tarde para o setor bancário, levando à falência alguns bancos históricos do mercado americano. No ano de 2015, também houve uma ligeira queda, que teve muita influência da crise política que se viveu nesse período, onde foram fechados os serviços públicos por falta de verba para pagamento de salário e manutenção dos espaços federais.

O crescimento num investimento de 10.000€ no Dow Jones é enorme. Esta ocorrência dá-se devido ao facto de o período analisado corresponder a mais longa fase de crescimento do índice da sua história, tendo um crescimento de aproximadamente 166% face ao ano 2000.

Tudo isto junto, faz com que um investimento de 10.000€ no ano de 2001 se converta em um valor superior a 28.000€ no ano de 2020.

Estes resultados são muito positivos e demonstram que o índice Americano tem um comportamento muito diferente dos outros dois índices analisados. Será agora feita uma análise similar, adotando o critério de Kelly como estratégia de investimento.

Ano	Fecho	Abertura	Rendibilidade anual	σ	μ	r	Kelly	Retorno com Kelly
2000	10 787,99	11 501,85	-0,062064798	0,048656714		0,00		
2001	10 021,57	10 790,92	-0,071296053	0,058032126	0,0551	0,00	23%	9 834,07 €
2002	8 341,63	10 021,71	-0,167644045	0,062323893	0,0551	0,00	16%	9 564,33 €
2003	10 453,92	8 342,38	0,253110024	0,033516435	0,0451	0,00	12%	9 845,41 €
2004	10 783,01	10 452,74	0,0315965	0,021090132	0,0482	0,00	43%	9 978,89 €
2005	10 717,50	10 783,75	-0,006143503	0,025254927	0,0484	0,00	100%	9 917,59 €
2006	12 463,15	10 718,30	0,162791674	0,013631365	0,048	0,00	75%	11 132,62 €
2007	13 264,82	12 459,54	0,0646316	0,029554307	0,0491	0,00	100%	11 852,13 €
2008	8 776,39	13 261,82	-0,3382213	0,051720316	0,0479	0,00	55%	9 653,81 €
2009	10 428,05	8 772,25	0,18875431	0,063886365	0,05	0,00	19%	9 994,41 €
2010	11 577,51	10 430,69	0,109946705	0,050139436	0,045	0,00	11%	10 115,56 €
2011	12 217,56	11 577,43	0,0552912	0,041275357	0,05	0,00	20%	10 226,80 €
2012	13 104,14	12 221,19	0,072247465	0,028084553	0,06	0,00	35%	10 487,02 €
2013	16 576,66	13 104,30	0,264978671	0,026729772	0,058	0,00	74%	12 530,43 €
2014	17 823,07	16 572,17	0,075481968	0,024249301	0,05	0,00	70%	13 192,32 €
2015	17 425,03	17 823,07	-0,022332853	0,03994614	0,0575	0,00	98%	12 904,23 €
2016	19 762,60	17 405,48	0,135424016	0,031674967	0,0625	0,00	39%	13 588,71 €
2017	24 719,22	19 872,86	0,243868271	0,018106354	0,0569	0,00	57%	15 468,08 €
2018	23 327,46	24 809,35	-0,059731109	0,044525705	0,0508	0,00	100%	14 544,15 €
2019	28 538,44	23 058,61	0,237647889	0,039931935	0,0596	0,00	30%	15 583,23 €
2020	30 606,48	28 638,97	0,068700446	0,083428002	0,052	0,00	33%	15 932,35 €

Tabela 13 : Retorno com Kelly 10.000€

Como se pode observar pela tabela 13 , o resultado obtido, é bastante interessante, pois de um capital inicial de 10.000€ no ano de 2001, termina-se o ano de 2020 com aproximadamente 16.000€ o que representa um crescimento de 60%.

Interessante também de constatar que o mínimo que é atingido com o critério de Kelly foi no ano de 2002, onde o investimento atingiu os 9,564.33€. Nem no ano de 2008, que foi o ano imediatamente após a crise do subprime e a queda de bancos históricos, chegou a esse valor. O que mostra que a estratégia de Kelly protegeu o investimento nesses anos mais complicados.

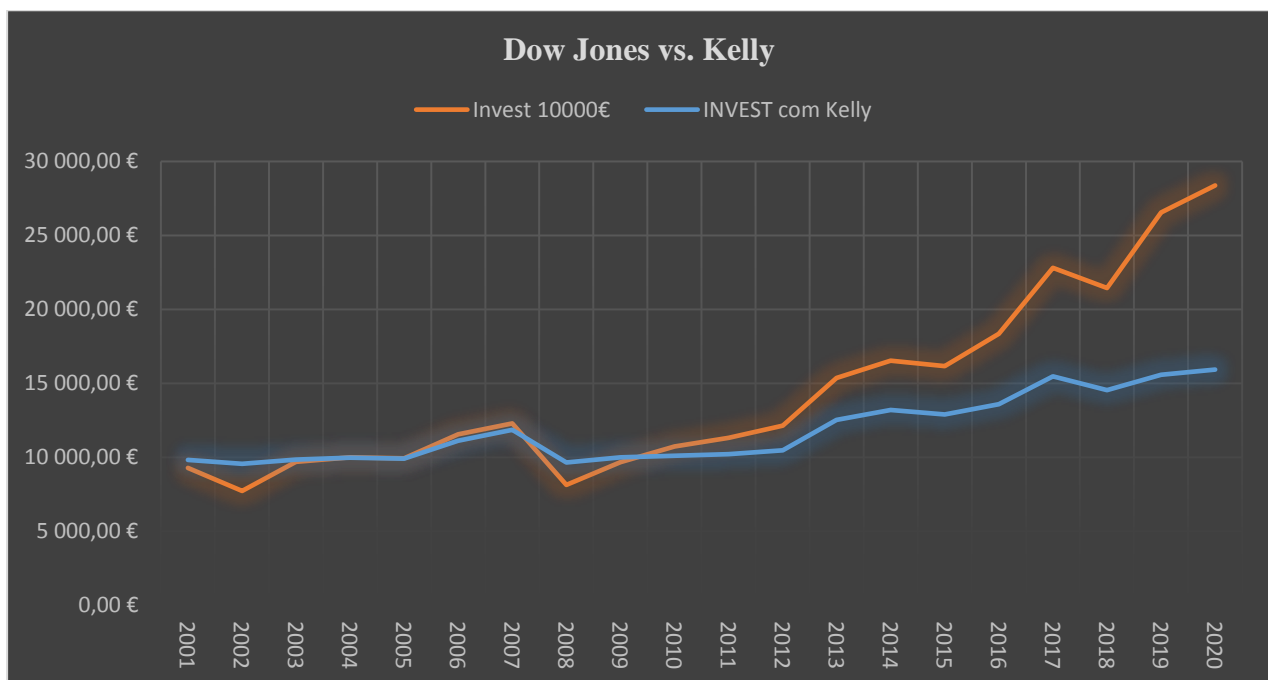


Gráfico 11: Dow Jones vs. Kelly

Percebe-se que investir com o critério de Kelly deixa mais protegidos quanto ao risco e que mesmo num espaço de tempo tão curto permite ter ganhos muito significativos.

No gráfico 11 está bastante bem ilustrado que um investimento adotando o critério, mesmo nas alturas mais desfavoráveis do mercado, nunca deixou que existissem perdas significativas, tendo sido sempre inferiores a 500.00€ enquanto que no investimento usando apenas o Dow Jones esse mínimo foi de aproximadamente 7.700€, o que representa uma perda de 2.300€ ou seja 23% do capital inicial.

É verdade que o resultado no final do ano de 2020, também é muito diferente, porém é importante ressaltar que o critério de Kelly, tem os seus melhores resultados no médio longo prazo. É muito significativo, mesmo em um espaço tao curto de dezanove investimentos já se verificar um crescimento de capital na ordem dos 60%

5.4 Comparação dos índices

Após a análise individual de cada um dos índices e da aplicação do critério de Kelly a cada um dos índices, vai agora fazer-se uma análise conjunta dos três, para se perceber algumas características do mercado e do desempenho do critério de Kelly.

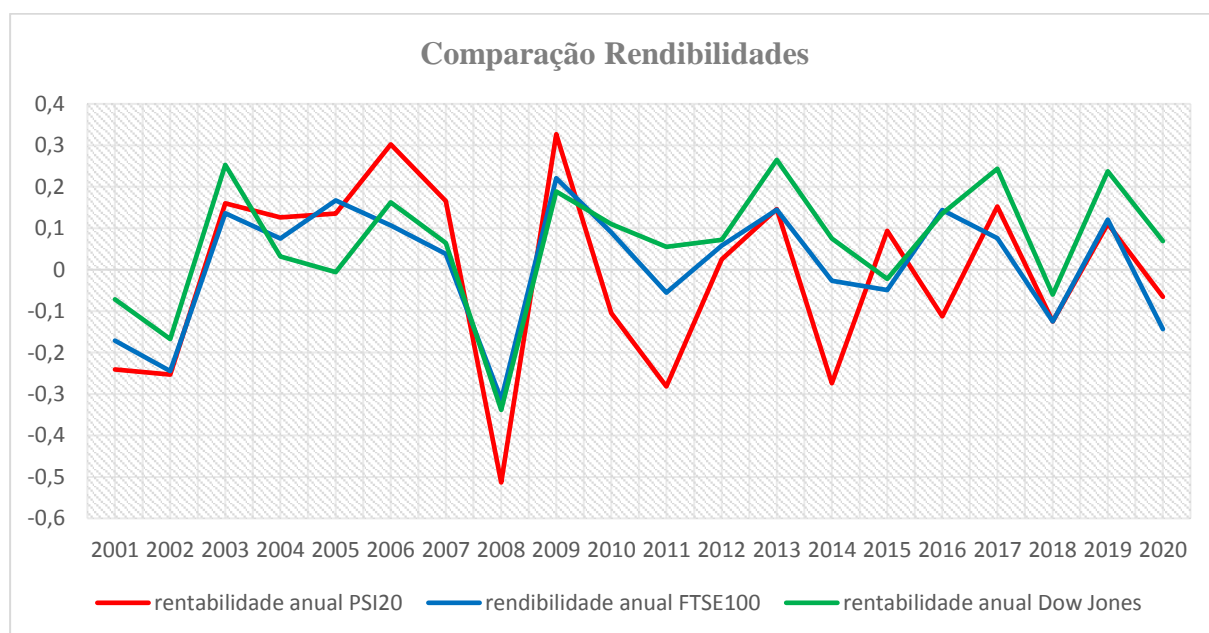


Gráfico 12: Comparação Rendibilidades

Observando o gráfico 12, pode constatar-se primeiramente que os três índices estudados têm uma correlação positiva, pois embora não seja na mesma proporção, ambos têm movimentos de ganhos e de perdas muito similares.

O PSI20 é sem dúvida o índice que se encontra por mais anos com rendibilidades negativas, essa situação explica-se, pois Portugal passou nas últimas duas décadas alguns

períodos muito complicados, em especial a crise imobiliária e bancária de 2007 e o resgate financeiro de 2013. Embora tenha sido dos três países o que mais sofreu com a crise de 2007, foi o que teve também as melhores rendibilidades no período de 2002 a 2006 e superou também nos pós crise de 2009 a rendibilidade do FTSE100 e Dow Jones.

Por outro lado, o FTSE100, foi o índice que se manteve mais estável, pois embora também tenha tido algumas oscilações, manteve-se grande parte do tempo com rendibilidades positivas e no período de maior crise em 2007 foi dos três o que teve uma queda menos acentuada. De notar que de 2017 em diante tem tido um comportamento muito similar ao do PSI20, tendo inclusive uma rendibilidade menor em 2019 e 2020.

O Dow Jones é o índice que apresenta a melhor rendibilidade dos índices analisados. Com exceção do ano de 2007, que a rendibilidade foi bastante negativa, ele teve de 2008 a 2018 o maior crescimento de toda a sua história.

A rendibilidade mais alta encontrada no período analisado, não é do Dow Jones e sim do PSI20. Porém o Dow Jones foi dos três índices analisados o que esteve mais tempo com uma rendibilidade positiva, o que ajuda a perceber melhor o gráfico 13.

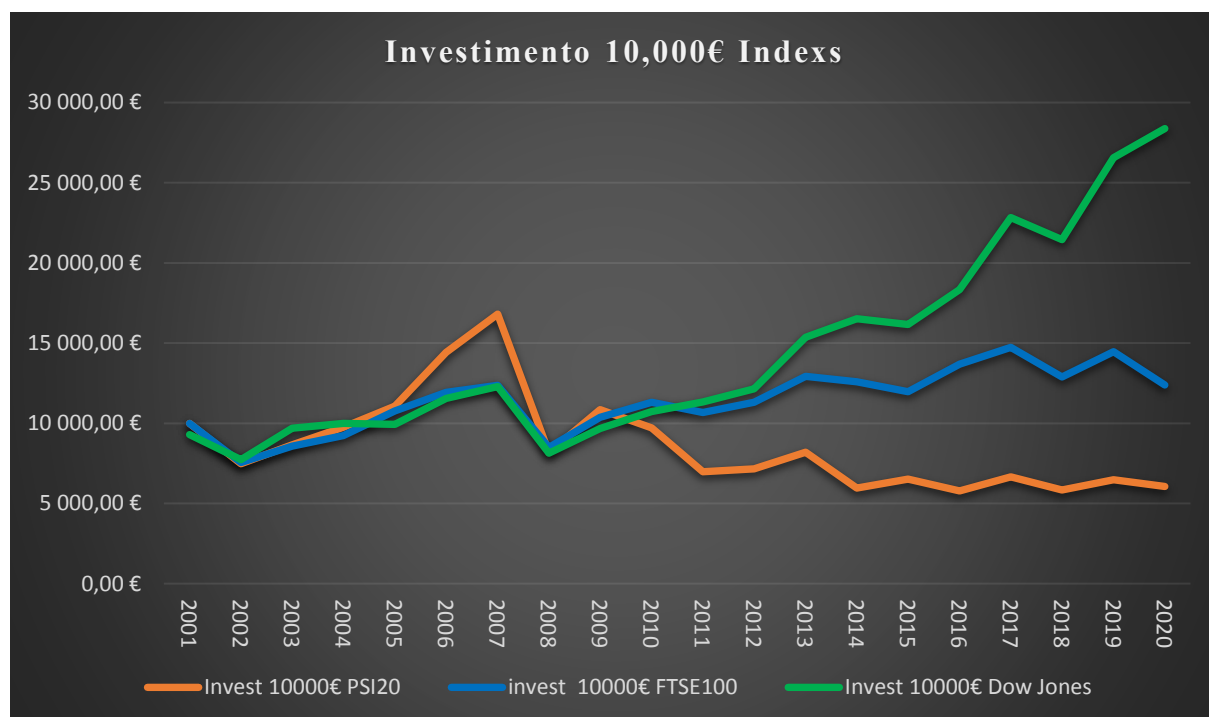


Gráfico 13: Investimento 10.000€ nos Índices

Embora os movimentos de subida e descida dos três índices sejam bastante similares ao longo dos 19 anos, percebe-se no gráfico 13 que a percentagem da rendibilidade por ano, face ao valor inicial investido é elevada, ou seja, o PSI20 termina o período analisado com um capital

final menor em cerca de 40% que o capital inicial, enquanto o Dow Jones termina com um capital final quase três vezes superior ao capital inicial e mais de quatro vezes maior que o capital final do PSI20.

Por sua vez o FTSE100 mantém-se sempre em uma posição intermédia entre os outros dois índices. Termina o período analisado com um ganho de aproximadamente 23% face ao capital inicialmente investido, duplica o resultado final do PSI20 e apresenta valores 57% inferiores aos do Dow Jones.

As diferenças começam a notar-se após o ano de 2010 e tornam-se mais evidentes no ano de 2011, onde existe uma queda no PSI20, o FTSE100 mantém sensivelmente os mesmos resultados e o Dow Jones demonstra um crescimento até 2017, período onde o investimento no Dow Jones já tinha sensivelmente quadruplicado o valor do PSI20 e duplicado o valor do FTSE100.

No gráfico 14 percebe-se que o impacto do investimento adotando o critério de Kelly, faz com que haja uma harmonização dos resultados obtidos, por exemplo no caso do PSI20 passa-se de uma perda de 40% sem o uso do critério para um ganho de 4.50% com o uso do mesmo. Assim sendo pode afirmar-se que além de gerar uma rentabilidade positiva a adoção do critério de Kelly no caso do PSI20 ainda fez com que o investimento não tenha perdido 40%.

No caso do Dow Jones, embora após os dezanove investimentos, haja um capital final de aproximadamente 16.000€, vemos que este valor é cerca de 75% inferior ao valor que obteríamos no caso de se investir a totalidade do capital no índice. Porém no caso de se fazer esse investimento, estaria o investidor expostos ao risco, enquanto utilizando o critério de Kelly está protegido da falência, como é demonstrado no caso do PSI20.

No caso do FTSE100, verifica-se que também termina o período de análise com um capital final superior ao capital inicial, sendo que à semelhança do Dow Jones este valor final é menor em aproximadamente 15% do que seria caso o investidor aplicasse tudo no índice.

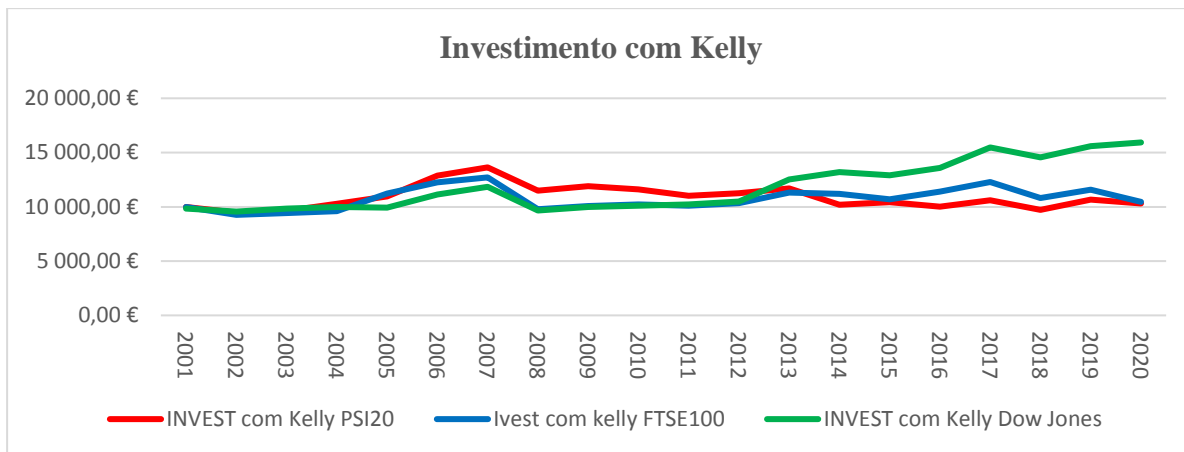


Gráfico 14: Investimento 10.000€ com Kelly

6 Conclusão

Com a elaboração deste trabalho, é possível demonstrar que adotando o critério de Kelly o investidor está a mitigar o risco de falência e a maximizar os ganhos na aplicação financeira.

Pode assumir-se que o critério teve um excelente desempenho, pois nos casos abordados, teve sempre performances muito relevantes. Primeiramente, demonstra-se com base num exemplo empírico realizado através do teste de “*monte carlo*” e um investimento cuja probabilidade de ganho era de 60%, logo a possibilidade de perda era de 40%. Utilizando o critério de Kelly, conclui-se que a percentagem do capital a investir deveria ser de 20% da carteira.

Este investimento foi testado em mil ocasiões, com a frequência de 25, 50,75 e 100 investimentos. Nos 25 investimentos, houve sucesso, ou seja, lucro em 75.5% das mil ocasiões testadas, o mesmo resultado, foi atingido quando se fez o investimento 50 vezes. Quando foram realizados os 75 investimentos, a percentagem de sucesso aumentou para os 80.6%, tendo com os 100 investimentos chegado aos 81.5% de sucesso.

Pode então perceber-se que com o aumento dos investimentos a taxa de sucesso do critério de Kelly vai aumentando. Com um investimento de 1.000,00€, ao fim de 100 aplicações, o investidor que utiliza o critério de Kelly terá ganho em média aproximadamente 45.000,00€ o que equivale a um ganho de 4.500%. Por outro lado, caso faça apenas 25 investimentos, terá em média um ganho aproximado de 2.700,00€.

Desta análise, extrai-se também que em nenhuma ocasião o resultado obtido da aplicação foi de falência, tendo os resultados mais negativos vindo a diminuir com o aumento do número de investimentos. Pode então concluir-se que com o aumento das aplicações as perdas existentes tendem a desaparecer.

Posteriormente com base num estudo de caso, envolvendo três índices de ações Português (PSI20), Britânico (FTSE100) e Americano (Dow Jones), analisou-se o efeito do critério de Kelly na mitigação do risco de investimento.

No PSI20 foi possível observar que embora o índice tenha tido uma queda de quase 60% no decurso das duas últimas décadas, com a adoção do critério de Kelly em um investimento anual de 10.000,00€, no final do período testado, existiram ganhos de aproximadamente 4%. O que demonstra que mesmo em um mercado que teve uma queda de 60% e com um baixo número de investimentos, o critério de Kelly defendeu o investidor da perda e ainda permitiu que houvesse um ganho de aproximadamente 4%.

Nos casos do FTSE100 e do Dow Jones, houve uma diferença, pois ambos os índices tiveram uma evolução positiva, e um investidor que aplicasse o seu capital nestes dois índices teria tido ganhos superiores ao obtido através da aplicação do critério de Kelly. Estes resultados justificam-se dado o critério de Kelly ser mais eficiente quanto maior for o número de aplicações. Neste trabalho, apenas foram feitos cerca de 20 investimentos, o que é um número de aplicações baixo. Porém é muito relevante, que tanto no caso do FTSE100 que teve ganhos de aproximadamente 5% como no Dow Jones que teve ganhos de aproximadamente 50%, com a adoção do critério de Kelly, nos períodos de queda do índice, esta foi muito menor por conta da proteção que o critério de Kelly dá ao investidor.

Desta forma, conclui-se que a adoção do critério de Kelly permite mitigar o risco de perda e de falência dos investidores, bem como utilizado no médio longo prazo maximiza os ganhos do investidor.

As limitações deste trabalho foram a complexidade matemática para o cálculo do critério de Kelly, bem como a pouca literatura que existe sobre esta temática, pois embora o critério de Kelly seja bastante adotado por investidores e *traders*, não existe muita literatura, e a que existe parte maioritariamente dos mesmos autores.

Para futuros trabalhos, é relevante estudar o critério de Kelly na temática do *Trade* desportivo, pois é um novo mercado que está a emergir e que nos próximos anos vai ganhar muitos investidores. De salientar que o cálculo do critério de Kelly pode muito facilmente ser adaptado para este tipo de investimentos, visto que o *trade* desportivo opera com *odds*, que nada mais são que probabilidades de vitória. Também devem ser realizados trabalhos onde sejam testado o critério de Kelly mais vezes, ou seja, utilizar os pressupostos deste trabalho, mas fazendo investimentos mais periódicos, como investimentos semestrais ou trimestrais, para se perceber se com a adoção de mais aplicações o investimento tem um comportamento diferente.

7 Bibliografia

- Adamodar. (n.d.). *Total Risk Premium*. Retrieved October 1, 2021, from <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiAkN-kgKrzAhXdCGMBHbNSAsIQFnoECAIQAAQ&url=https%3A%2F%2Fpeople.stern.nyu.edu%2Fadamodar%2Fpc%2Fdatasets%2Fctryprem.xls&usg=AOvVaw2xvh9be0WrP3vG-eRLIDzS>
- Alfredo, kuthy C. (2002). *Fusiones bancarias: el caso de bancomer*.
- Capie, F. (2003). A History of Money From Ancient Times to the Present Day (3rd Edn.). In *Economic Affairs* (Vol. 23, Issue 4). <https://doi.org/10.1111/j.1468-0270.2003.0448b.x>
- Damodaran, A. (n.d.). *Premio de risco*. Retrieved December 1, 2021, from http://people.stern.nyu.edu/adamodar/New_Home_Page/dataarchived.html#discrate
- Damodaran, A. (2009). *Valuing Financial Service Firms Financial Service firms – The Big Picture*. April, 1–34.
- Edward, T. O. (2006). *The Kelly Criterion In Blackjack Sports Betting, And The Stock Market*.
- Edward, T. O. (2008). Understanding the Kelly Criterion. *Wilmatt Magazine*, 8.
- Hertz, D. B. (1979). *Risk Analysis in Capital Investment*. Finance and Investing. <https://hbr.org/1979/09/risk-analysis-in-capital-investment>
- J. L. Kelly, J. (1956). S New Interpretation of InformationRate. *Bell Siystem Technical Jornal*.
- Kuepper, J. (2021). *Using the Kelly Criterion for Asset Allocation and Money Management*. <https://www.investopedia.com/articles/trading/04/091504.asp>
- Li, B., Xie, K., Lu, S., Lin, J., & Wang, Z. (2020). *LSTM-Based Quantitative Trading Using Dynamic K-Top and Kelly Criterion*.
- Neves, J. C. das. (2002). *Avaliação de Empresas e Negócios*.
- NYSE. (n.d.). *NYSE*. \. Retrieved October 11, 2021, from <https://www.nyse.com/index>
- Ohlsson, E. O. M. (2017). *Bachelor Thesis in Finance Application of the Kelly Criterion on a*

Self-Financing Trading Portfolio.

- Oprean, C., & Tănăsescu, C. (2013). The Speed of Incorporating Information into Prices. *Procedia Economics and Finance*, 6(13), 675–682. [https://doi.org/10.1016/s2212-5671\(13\)00188-3](https://doi.org/10.1016/s2212-5671(13)00188-3)
- Paul A. Samuelson. (1971). *The “Fallacy” of Maximizing the Geometric Mean in Long Sequences of Investing or Gambling.*
- Paul A. Samuelson. (1979). Why We Should Not Make Mean Log Of Wealth Big Though Years To Act Are Long. *Jornal Of Banking and Fiance*, 3.
- Pinho, C. S., & Tavares, S. (2012). *Análise Financeira e Mercados.*
- Pordata. (n.d.). *Risk Free Rate.* Retrieved October 1, 2021, from <https://www.pordata.pt/en/Portugal/Return+rate+of+treasury+bonds-2803>
- Poundstone William. (2005). *Fortune’s formula.*
- Press, M., & Studies, C. (1972). *University of Michigan Press U of M Center For Chinese Studies Chapter Title : Translators Introduction Book Title : Transport in Transition Book Subtitle : The Evolution of Traditional Shipping in China Published by : University of Michigan Press , U of M Center For Chinese Studies . (1972) Stable URL : <https://www.jstor.org/stable/10.3998/mpub.19931.4>.*
- Santos, S. (2012). *O risco na análise de investimento.*
- Snowdon, M. (2021). *A Guide to Types of Investment Risk.* NCOA. <https://www.ncoa.org/article/a-guide-to-types-of-investment-risk>
- Thorp, E. O. (2007). *Understanding the Kelly Criterion.* September 2008, 1–22.
- Yoder, N. (2021). *The Kelly Criterion. How to apply the famous betting formula in investment, trading and professional gambling.* <https://nickyoder.com/kelly-criterion/>
- Ziemba, W. T. (2001). *A stochastic programming model using an endogenously determined worst case risk measure for dynamic asset allocation.* <https://link.springer.com/article/10.1007/PL00011400#article-info>
- Ziemba, W. T., & MacLean, L. C. (1999). *Efficiency concepts in capital.* 2029–2037.
- Zubair Abbasi, M. (2010). *The Ascent of Money: A Financial History of the World.* In

International Journal of Law and Management (Vol. 52, Issue 4).

<https://doi.org/10.1108/17542431011059359>

8 Apêndices

8.1 Evolução índices

	PSI20		FTSE100		Dow Jones	
data	Fecho	Abertura	Fecho2	Abertura3	Fecho4	Abertura5
jan/00	12 385,55	12 098,58			10 940,53	11 501,85
fev/00	14 644,27	12 505,23			10 128,31	10 937,74
mar/00	13 127,09	14 768,54			10 921,92	10 128,11
abr/00	12 235,62	13 086,32			10 733,91	10 863,28
mai/00	11 864,13	12 427,19			10 522,33	10 749,42
jun/00	11 923,37	11 923,93			10 447,89	10 532,27
jul/00	11 937,44	11 869,18			10 521,98	10 450,36
ago/00	11 900,26	11 960,62			11 215,10	10 523,81
set/00	11 778,95	12 033,17			10 650,92	11 219,54
out/00	10 981,81	11 798,03			10 971,14	10 659,06
nov/00	10 571,90	11 042,66			10 414,49	10 966,21
dez/00	10 404,09	10 588,15			10 787,99	10 416,76
jan/01	11 194,37	10 318,31	5 917,90	6 297,50	10 887,36	10 790,92
fev/01	10 459,51	11 140,42	5 917,90	6 297,50	10 495,28	10 884,82
mar/01	9 826,88	10 402,32	5 633,70	5 917,90	9 878,78	10 493,25
abr/01	9 759,71	9 808,55	5 966,90	5 633,70	10 734,97	9 877,16
mai/01	9 094,25	9 743,50	5 796,10	5 966,90	10 911,94	10 734,05
jun/01	8 274,44	9 085,20	5 642,50	5 796,10	10 502,40	10 913,57
jul/01	8 152,32	8 311,60	5 529,10	5 642,50	10 522,81	10 504,95
ago/01	7 540,99	8 171,04	5 345,00	5 529,10	9 949,75	10 527,38

set/01	7 324,91	7 513,08	4 903,40	5 345,00	8 847,56	9 946,98
out/01	7 768,01	7 330,38	5 039,70	4 903,40	9 075,14	8 845,97
nov/01	7 790,75	7 828,19	5 203,60	5 039,70	9 851,56	9 087,45
dez/01	7 831,49	7 717,94	5 217,40	5 203,60	10 021,57	9 848,93
jan/02	7 660,57	7 799,61	5 164,80	5 217,40	9 920,00	10 021,71
fev/02	7 448,82	7 698,23	5 101,00	5 164,80	10 106,13	9 923,04
mar/02	7 796,00	7 445,05	5 271,80	5 101,00	10 403,94	10 111,04
abr/02	7 531,69	7 793,64	5 165,60	5 271,80	9 946,22	10 402,07
mai/02	7 280,48	7 547,44	5 085,10	5 165,60	9 925,25	9 944,90
jun/02	6 809,25	7 263,51	4 656,40	5 085,10	9 243,26	9 923,94
jul/02	6 145,65	6 805,07	4 246,20	4 656,40	8 736,59	9 239,25
ago/02	6 119,85	6 151,20	4 227,30	4 246,20	8 663,50	8 732,58
set/02	5 106,52	6 090,80	3 721,80	4 227,30	7 591,93	8 659,27
out/02	5 445,90	5 128,85	4 039,70	3 721,80	8 397,03	7 593,04
nov/02	6 058,00	5 478,14	4 169,40	4 039,70	8 896,09	8 395,64
dez/02	5 824,70	6 053,51	3 940,40	4 169,40	8 341,63	8 902,95
jan/03	5 641,52	5 816,73	3 567,40	3 940,40	8 053,81	8 342,38
fev/03	5 259,14	5 654,92	3 655,60	3 567,40	7 891,08	8 053,74
mar/03	5 305,22	5 285,02	3 613,30	3 655,60	7 992,13	7 890,24
abr/03	5 482,49	5 303,08	3 926,00	3 613,30	8 480,09	7 992,83
mai/03	5 697,22	5 497,39	4 048,10	3 926,00	8 850,26	8 478,48
jun/03	5 843,33	5 743,50	4 031,20	4 048,10	8 985,44	8 851,45
jul/03	5 776,82	5 843,68	4 157,00	4 031,20	9 233,80	8 983,66
ago/03	5 998,17	5 786,07	4 161,06	4 157,00	9 415,82	9 232,68
set/03	6 161,55	6 013,33	4 091,31	4 161,10	9 275,06	9 416,67
out/03	6 303,82	6 159,18	4 287,59	4 091,30	9 801,12	9 276,80
nov/03	6 584,71	6 296,57	4 342,60	4 287,60	9 782,46	9 802,46
dez/03	6 747,41	6 585,60	4 476,87	4 342,60	10 453,92	9 785,35
jan/04	7 011,72	6 748,00	4 390,68	4 476,90	10 488,07	10 452,74
fev/04	7 630,46	7 027,75	4 492,21	4 390,70	10 583,92	10 487,78
mar/04	7 540,45	7 643,29	4 385,67	4 492,20	10 357,70	10 582,25
abr/04	7 500,35	7 538,16	4 489,69	4 385,70	10 225,57	10 357,52
mai/04	7 223,18	7 515,17	4 430,69	4 489,70	10 188,45	10 227,27

jun/04	7 387,30	7 212,10	4 464,07	4 430,70	10 435,48	10 187,18
jul/04	7 126,80	7 391,59	4 413,08	4 464,10	10 139,71	10 434,00
ago/04	7 113,67	7 159,18	4 459,32	4 413,10	10 173,92	10 138,45
set/04	7 359,15	7 121,45	4 570,77	4 459,30	10 080,27	10 170,12
out/04	7 460,94	7 352,36	4 624,21	4 570,80	10 027,47	10 082,04
nov/04	7 523,10	7 453,47	4 703,18	4 624,20	10 428,02	10 028,73
dez/04	7 600,16	7 492,50	4 814,30	4 703,20	10 783,01	10 425,80
jan/05	8 016,90	7 592,93	4 852,31	4 814,30	10 489,94	10 783,75
fev/05	7 896,74	8 024,47	4 968,50	4 852,30	10 766,23	10 489,72
mar/05	7 786,61	7 877,39	4 894,37	4 968,50	10 503,76	10 769,04
abr/05	7 607,81	7 785,52	4 801,68	4 894,40	10 192,51	10 504,57
mai/05	7 524,04	7 627,46	4 963,97	4 801,70	10 467,48	10 192,00
jun/05	7 510,58	7 539,16	5 113,16	4 964,00	10 274,97	10 462,86
jul/05	7 595,76	7 493,26	5 282,30	5 113,20	10 640,91	10 273,59
ago/05	7 817,99	7 612,50	5 296,92	5 282,30	10 481,60	10 641,78
set/05	8 088,64	7 830,61	5 477,71	5 296,90	10 568,70	10 481,44
out/05	7 836,55	8 078,85	5 317,28	5 477,70	10 440,07	10 569,50
nov/05	8 114,57	7 827,48	5 423,17	5 317,30	10 805,87	10 437,51
dez/05	8 618,67	8 130,10	5 618,76	5 423,20	10 717,50	10 806,03
jan/06	8 769,79	8 599,19	5 760,26	5 618,80	10 864,86	10 718,30
fev/06	9 476,82	8 757,70	5 791,54	5 760,30	10 993,41	10 862,14
mar/06	10 262,56	9 499,96	5 964,57	5 791,50	11 109,32	10 993,25
abr/06	10 052,90	10 266,16	6 023,14	5 964,60	11 367,14	11 113,00

mai/06	9 403,80	10 036,16	5 723,81	6 023,10	11 168,31	11 367,78
jun/06	9 502,94	9 405,61	5 833,42	5 723,80	11 150,22	11 169,03
jul/06	9 665,43	9 498,03	5 928,33	5 833,40	11 185,68	11 149,34
ago/06	9 957,57	9 658,11	5 906,13	5 928,30	11 381,15	11 184,80
set/06	10 305,50	9 956,08	5 960,81	5 906,10	11 679,07	11 382,75
out/06	10 515,60	10 314,76	6 129,22	5 960,80	12 080,73	11 678,99
nov/06	10 662,60	10 517,70	6 048,85	6 129,20	12 221,93	12 080,25
dez/06	11 197,60	10 659,04	6 220,81	6 048,80	12 463,15	12 220,97
jan/07	11 565,10	11 172,35	6 203,09	6 220,80	12 621,69	12 459,54
fev/07	11 693,00	11 590,42	6 171,47	6 203,10	12 268,63	12 617,20
mar/07	11 653,30	11 741,23	6 308,03	6 171,50	12 354,35	12 265,59
abr/07	12 244,30	11 654,99	6 449,21	6 308,00	13 062,91	12 354,52
mai/07	13 256,60	12 297,28	6 621,45	6 449,20	13 627,64	13 062,75
jun/07	13 384,90	13 316,69	6 607,90	6 621,40	13 408,62	13 628,69
jul/07	13 434,20	13 373,04	6 360,11	6 607,90	13 211,99	13 409,60
ago/07	12 711,40	13 286,72	6 303,30	6 360,10	13 357,74	13 211,09
set/07	12 024,40	12 754,01	6 466,79	6 303,30	13 895,63	13 358,39
out/07	13 005,50	12 030,68	6 721,57	6 466,80	13 930,01	13 895,71
nov/07	13 120,70	13 007,16	6 432,45	6 721,60	13 371,72	13 924,16
dez/07	13 019,40	13 125,91	6 456,91	6 432,50	13 264,82	13 368,22
jan/08	11 163,90	13 026,66	5 879,78	6 456,90	12 650,36	13 261,82
fev/08	10 952,60	11 281,85	5 884,28	5 879,80	12 266,39	12 638,17
mar/08	10 495,90	10 805,28	5 702,11	5 884,30	12 262,89	12 264,36

abr/08	10 917,40	10 476,60	6 087,30	5 702,10	12 820,13	12 266,64
mai/08	10 597,90	11 045,13	6 053,50	6 087,30	12 638,32	12 818,34
jun/08	8 904,14	10 595,59	5 625,90	6 053,50	11 350,01	12 637,67
jul/08	8 496,58	8 872,68	5 411,90	5 625,90	11 378,02	11 344,64
ago/08	8 600,31	8 414,58	5 636,61	5 411,90	11 543,55	11 379,89
set/08	8 033,23	8 545,86	4 902,45	5 636,60	10 850,66	11 545,63
out/08	6 360,51	8 114,61	4 377,34	4 902,50	9 325,01	10 847,40
nov/08	6 300,41	6 390,10	4 288,01	4 377,34	8 829,04	9 326,04
dez/08	6 341,34	6 314,70	4 434,17	4 288,01	8 776,39	8 826,89
jan/09	6 438,19	6 379,03	4 149,64	4 434,17	8 000,86	8 772,25
fev/09	6 003,75	6 406,76	3 830,09	4 149,64	7 062,93	8 000,62
mar/09	6 174,74	5 902,32	3 926,14	3 830,09	7 608,92	7 056,48
abr/09	6 755,70	6 145,58	4 243,71	3 926,14	8 168,12	7 606,13
mai/09	7 223,90	6 885,20	4 417,94	4 243,71	8 500,33	8 167,41
jun/09	7 110,88	7 299,17	4 249,21	4 417,94	8 447,00	8 501,53
jul/09	7 292,99	7 140,10	4 608,36	4 249,21	9 171,61	8 447,53
ago/09	7 828,32	7 327,36	4 908,90	4 608,36	9 496,28	9 173,65
set/09	8 474,95	7 837,60	5 133,90	4 908,90	9 712,28	9 492,32
out/09	8 341,42	8 510,55	5 044,55	5 133,90	9 712,73	9 711,60
nov/09	8 253,96	8 300,84	5 190,68	5 044,55	10 344,84	9 712,13
dez/09	8 463,85	8 326,57	5 412,88	5 190,68	10 428,05	10 343,82
jan/10	7 927,31	8475,45	5 188,52	5 412,88	10 067,33	10 430,69
fev/10	7 559,17	7914,74	5 354,52	5 188,52	10 325,26	10 068,99
mar/10	8 102,15	7611,85	5 679,64	5 354,52	10 856,63	10 326,10
abr/10	7 408,45	8123,03	5 553,29	5 679,64	11 008,61	10 857,31
mai/10	7 072,01	7473,13	5 188,43	5 553,29	10 136,63	11 009,60
jun/10	7 065,65	7047,63	4 916,87	5 188,43	9 774,02	10 133,94
jul/10	7 371,79	6988,6	5 258,02	4 916,87	10 465,94	9 773,27
ago/10	7 394,15	7406,7	5 225,22	5 258,02	10 014,72	10 468,82

set/10	7 507,57	7 403,23	5 548,62	5 225,22	10 788,05	10 016,01
out/10	8 082,76	7 550,21	5 675,16	5 548,62	11 118,49	10 789,72
nov/10	7 322,89	8 150,66	5 528,27	5 675,16	11 006,02	11 120,30
dez/10	7 588,31	7 357,39	5 899,94	5 528,27	11 577,51	11 007,23
jan/11	7 819,12	7 649,87	5 862,94	5 899,94	11 891,93	11 577,43
fev/11	7 995,16	7 828,90	5 994,01	5 862,94	12 226,34	11 892,50
mar/11	7 753,45	8 021,72	5 908,76	5 994,01	12 319,73	12 226,49
abr/11	7 677,82	7 775,51	6 069,90	5 908,76	12 810,54	12 321,02
mai/11	7 556,86	7 672,39	5 989,99	6 069,90	12 569,79	12 810,16
jun/11	7 323,78	7 553,09	5 945,71	5 989,99	12 414,34	12 569,41
jul/11	6 895,39	7 324,83	5 815,19	5 945,71	12 143,24	12 412,07
ago/11	6 320,08	6 961,04	5 394,53	5 815,19	11 613,53	12 144,22
set/11	5 891,06	6 317,57	5 128,48	5 394,53	10 913,38	11 613,30
out/11	5 870,12	5 792,84	5 544,22	5 128,48	11 955,01	10 912,10
nov/11	5 536,32	5 758,47	5 505,42	5 544,22	12 045,68	11 951,53
dez/11	5 494,27	5 528,25	5 572,28	5 505,42	12 217,56	12 046,21
jan/12	5 325,05	5 518,05	5 681,61	5 572,28	12 632,91	12 221,19
fev/12	5 580,52	5 324,52	5 871,51	5 681,61	12 952,07	12 632,76
mar/12	5 556,81	5 573,77	5 768,45	5 871,51	13 212,04	12 952,29
abr/12	5 233,86	5 599,15	5 737,78	5 768,45	13 213,63	13 211,36
mai/12	4 513,38	5 285,06	5 320,86	5 737,78	12 393,45	13 214,16
jun/12	4 697,96	4 512,71	5 571,15	5 320,86	12 880,09	12 391,56
jul/12	4 688,08	4 714,45	5 635,28	5 571,15	13 008,68	12 879,71

ago/12	4 998,86	4 681,66	5 711,48	5 635,28	13 090,84	13 007,47
set/12	5 202,76	5 011,92	5 742,07	5 711,48	13 437,13	13 092,15
out/12	5 355,96	5 195,58	5 782,70	5 742,07	13 096,46	13 437,66
nov/12	5 256,38	5 343,05	5 866,82	5 782,70	13 025,58	13 099,19
dez/12	5 655,15	5 268,96	5 897,81	5 866,82	13 104,14	13 027,73
jan/13	6 201,43	5 721,19	6 276,88	5 897,81	13 860,58	13 104,30
fev/13	5 987,71	6 210,15	6 360,81	6 276,88	14 054,49	13 860,58
mar/13	5 822,09	5 999,34	6 411,74	6 360,81	14 578,54	14 054,49
abr/13	6 248,52	5 816,71	6 430,12	6 411,74	14 839,80	14 578,54
mai/13	5 939,43	6 229,67	6 583,09	6 430,12	15 115,57	14 839,80
jun/13	5 556,88	5 895,07	6 215,47	6 583,09	14 909,60	15 123,55
jul/13	5 721,46	5 563,67	6 621,06	6 215,47	15 499,54	14 911,60
ago/13	5 807,76	5 731,58	6 412,93	6 621,06	14 810,31	15 503,85
set/13	5 953,51	5 849,91	6 462,22	6 412,93	15 129,67	14 801,55
out/13	6 245,84	5 942,62	6 731,43	6 462,22	15 545,75	15 132,49
nov/13	6 537,77	6 258,18	6 650,57	6 731,43	16 086,41	15 558,01
dez/13	6 558,85	6 543,53	6 749,09	6 650,57	16 576,66	16 087,12
jan/14	6 696,67	6 605,71	6 510,44	6 749,09	15 698,85	16 572,17
fev/14	7 379,76	6 698,48	6 809,70	6 510,44	16 321,71	15 697,69
mar/14	7 607,55	7 228,20	6 598,37	6 809,70	16 457,66	16 321,71
abr/14	7 456,91	7 622,31	6 780,03	6 598,37	16 580,84	16 458,05
mai/14	7 112,91	7 460,78	6 844,51	6 780,03	16 717,17	16 580,26
jun/14	6 802,20	7 173,80	6 743,94	6 844,51	16 826,60	16 716,85

jul/14	5 979,49	6 844,18	6 730,11	6 743,94	16 563,30	16 828,53
ago/14	5 942,78	5 980,24	6 819,75	6 730,11	17 098,45	16 561,70
set/14	5 740,50	5 968,39	6 622,72	6 819,75	17 042,90	17 097,42
out/14	5 222,13	5 737,34	6 546,47	6 622,72	17 390,52	17 040,46
nov/14	5 176,14	5 241,99	6 722,62	6 546,47	17 828,24	17 390,90
dez/14	4 798,99	5 102,69	6 566,09	6 722,62	17 823,07	17 827,27
jan/15	5 144,55	4 857,60	6 749,40	6 566,09	17 164,95	17 823,07
fev/15	5 689,70	5 171,44	6 946,66	6 749,40	18 132,70	17 169,99
mar/15	5 968,53	5 696,99	6 773,04	6 946,66	17 776,12	18 134,05
abr/15	6 094,68	5 941,45	6 960,63	6 773,04	17 840,52	17 778,52
mai/15	5 839,50	6 115,78	6 984,43	6 960,63	18 010,68	17 859,27
jun/15	5 551,94	5 852,24	6 520,98	6 984,43	17 619,51	18 017,82
jul/15	5 715,61	5 589,61	6 696,28	6 520,98	17 689,86	17 638,12
ago/15	5 261,15	5 697,54	6 247,94	6 696,28	16 528,03	17 696,74
set/15	5 047,29	5 206,37	6 061,61	6 247,94	16 284,70	16 528,03
out/15	5 468,69	5 106,21	6 361,09	6 061,61	17 663,54	16 278,62
nov/15	5 350,36	5 430,57	6 356,09	6 361,09	17 719,92	17 672,62
dez/15	5 313,17	5 377,85	6 242,32	6 356,09	17 425,03	17 719,72
jan/16	5 065,67	5 274,38	6 083,79	6 242,32	16 466,30	17 405,48
fev/16	4 767,28	5 095,77	6 097,09	6 083,79	16 516,50	16 453,63
mar/16	5 020,61	4 774,86	6 174,90	6 097,09	17 685,09	16 545,67
abr/16	5 052,52	4 966,94	6 241,89	6 174,90	17 773,64	17 661,74
mai/16	4 957,85	5 054,34	6 230,79	6 241,89	17 787,20	17 783,78

jun/16	4 453,66	4 945,29	6 504,33	6 230,79	17 929,99	17 754,55
jul/16	4 747,72	4 476,48	6 724,43	6 504,33	18 432,24	17 924,24
ago/16	4 711,91	4 797,22	6 781,51	6 724,43	18 400,88	18 434,50
set/16	4 597,29	4 722,62	6 899,33	6 781,51	18 308,15	18 396,57
out/16	4 651,93	4 597,96	6 954,22	6 899,33	18 142,42	18 279,60
nov/16	4 454,87	4 663,22	6 783,79	6 954,22	19 123,58	18 158,24
dez/16	4 679,20	4 444,03	7 142,83	6 783,79	19 762,60	19 149,20
jan/17	4 475,03	4 675,79	7 099,15	7 142,83	19 864,09	19 872,86
fev/17	4 647,90	4 484,48	7 263,44	7 099,15	20 812,24	19 923,81
mar/17	5 007,85	4 666,56	7 322,92	7 263,44	20 663,22	20 957,29
abr/17	5 033,66	4 993,88	7 203,94	7 322,92	20 940,51	20 665,17
mai/17	5 289,98	5 022,33	7 519,95	7 203,94	21 008,65	20 962,73
jun/17	5 152,96	5 294,07	7 312,72	7 519,95	21 349,63	21 030,55
jul/17	5 189,23	5 190,43	7 372,00	7 312,72	21 891,12	21 392,30
ago/17	5 156,67	5 191,43	7 430,62	7 372,00	21 948,10	21 961,42
set/17	5 409,58	5 166,42	7 372,76	7 430,62	22 405,09	21 981,77
out/17	5 475,67	5 412,04	7 493,08	7 372,76	23 377,24	22 423,47
nov/17	5 363,07	5 442,73	7 326,67	7 493,08	24 272,35	23 442,90
dez/17	5 388,33	5 374,85	7 687,77	7 326,67	24 719,22	24 305,40
jan/18	5 663,44	5 405,83	7 533,55	7 687,77	26 149,39	24 809,35
fev/18	5 468,21	5 666,21	7 231,91	7 533,55	25 029,20	26 083,04
mar/18	5 405,57	5 454,71	7 056,61	7 231,91	24 103,11	25 024,04
abr/18	5 512,29	5 374,09	7 509,30	7 056,61	24 163,15	24 076,60

mai/18	5 468,67	5 514,59	7 678,20	7 509,30	24 415,84	24 117,29
jun/18	5 528,50	5 511,24	7 636,93	7 678,20	24 271,41	24 542,09
jul/18	5 619,80	5 476,58	7 748,76	7 636,93	25 415,19	24 161,53
ago/18	5 422,58	5 614,68	7 432,42	7 748,76	25 964,82	25 461,63
set/18	5 359,27	5 426,57	7 510,20	7 432,42	26 458,31	25 916,07
out/18	5 030,71	5 346,72	7 128,10	7 510,20	25 115,76	26 598,36
nov/18	4 914,14	5 018,95	6 980,24	7 128,10	25 538,46	25 142,08
dez/18	4 731,47	4 972,43	6 728,13	6 980,24	23 327,46	25 779,57
jan/19	5 129,02	4 695,08	6 968,85	6 728,13	24 999,67	23 058,61
fev/19	5 185,43	5 136,24	7 074,73	6 968,85	25 916,00	25 025,31
mar/19	5 206,61	5 202,21	7 279,19	7 074,73	25 928,68	26 019,67
abr/19	5 390,56	5 237,84	7 418,22	7 279,19	26 592,91	26 075,10
mai/19	5 043,99	5 385,30	7 161,71	7 418,22	24 815,04	26 639,06
jun/19	5 137,47	5 018,71	7 425,63	7 161,71	26 599,96	24 830,16
jul/19	5 010,90	5 192,99	7 586,78	7 425,63	26 864,27	26 805,86
ago/19	4 887,63	4 997,19	7 207,18	7 586,78	26 403,28	26 879,86
set/19	4 973,76	4 887,70	7 408,21	7 207,18	26 916,83	26 198,26
out/19	5 119,62	4 960,06	7 248,38	7 408,21	27 046,23	26 962,54
nov/19	5 127,43	5 123,63	7 346,53	7 248,38	28 051,41	27 142,95
dez/19	5 214,14	5 149,89	7 542,44	7 346,53	28 538,44	28 109,74
jan/20	5 252,03	5 239,19	7 286,01	7 542,44	28 256,03	28 638,97
fev/20	4 765,73	5 248,19	6 580,61	7 286,01	25 409,36	28 319,65
mar/20	4 069,55	4 882,59	5 671,96	6 580,61	21 917,16	25 590,51

abr/20	4 284,18	4 002,41	5 901,21	5 671,96	24 345,72	21 227,38
mai/20	4 330,67	4 206,46	6 076,60	5 901,21	25 383,11	24 120,78
jun/20	4 390,25	4 376,04	6 169,74	6 076,60	25 812,88	25 342,99
jul/20	4 295,82	4 367,54	5 897,76	6 169,74	26 428,32	25 879,38
ago/20	4 301,08	4 293,98	5 963,57	5 897,76	28 430,05	26 542,32
set/20	4 067,02	4 307,52	5 866,10	5 963,57	27 781,70	28 439,61
out/20	3 945,12	4 099,88	5 577,27	5 866,10	26 501,60	27 940,63
nov/20	4 604,72	3 957,00	6 266,19	5 577,27	29 638,64	26 691,28
dez/20	4 898,36	4 620,07	6 460,52	6 266,19	30 606,48	29 797,50

8.2 Evolução índices

Ano	PSI20				FTSE100				Dow Jones			
	rentabilidade anual PSI20	Invest 10000€ PSI20	Kelly PSI20	INVEST com Kelly PSI20	rendibilidade anual FTSE100	invest 10000€ FTSE100	KELLY FTSE100	Ivest com kelly FTSE100	rentabilidade anual Dow Jones	Invest 10000€ Dow Jones	Kelly Dow Jones	INVEST com Kelly Dow Jones
2001	-0,241010398	10 000,00 €	13,34%	10 000,00 €	-0,171512505	10 000,00 €		10 000,00 €	-0,071296053	9 287,04 €	23%	9 834,07 €
2002	-0,25320625	7 467,94 €	20,86%	9 471,69 €	-0,244757925	7 552,42 €	30%	9 260,63 €	-0,167644045	7 730,12 €	16%	9 564,33 €
2003	0,16000055	8 662,81 €	11,39%	9 644,32 €	0,136146077	8 580,65 €	13%	9 429,75 €	0,253110024	9 686,69 €	12%	9 845,41 €
2004	0,126283343	9 756,78 €	51,40%	10 270,31 €	0,07536465	9 227,33 €	25%	9 607,10 €	0,0315965	9 992,76 €	43%	9 978,89 €
2005	0,13509146	11 074,84 €	49,55%	10 957,84 €	0,16709802	10 769,20 €	100%	11 212,42 €	-0,006143503	9 931,37 €	100%	9 917,59 €
2006	0,302169158	14 421,31 €	57,82%	12 872,19 €	0,107142094	11 923,03 €	88%	12 271,31 €	0,162791674	11 548,11 €	75%	11 132,62 €
2007	0,165323321	16 805,49 €	35,88%	13 635,72 €	0,037954925	12 375,57 €	95%	12 711,79 €	0,0646316	12 294,49 €	100%	11 852,13 €
2008	-0,513202924	8 180,86 €	30,64%	11 491,54 €	-0,313266428	8 498,72 €	73%	9 788,84 €	-0,3382213	8 136,23 €	55%	9 653,81 €
2009	0,326823984	10 854,57 €	10,68%	11 892,52 €	0,220719999	10 374,56 €	13%	10 074,47 €	0,18875431	9 671,98 €	19%	9 994,41 €
2010	-0,104671728	9 718,40 €	23,62%	11 598,54 €	0,089981673	11 308,08 €	15%	10 210,90 €	0,109946705	10 735,38 €	11%	10 115,56 €
2011	-0,281782566	6 979,92 €	17,55%	11 024,87 €	-0,055536158	10 680,07 €	20%	10 097,64 €	0,0552912	11 328,95 €	20%	10 226,80 €
2012	0,024845734	7 153,35 €	78,66%	11 240,33 €	0,058419534	11 304,00 €	40%	10 334,61 €	0,072247465	12 147,44 €	35%	10 487,02 €
2013	0,146413596	8 200,69 €	27,06%	11 685,62 €	0,144338322	12 935,60 €	66%	11 321,25 €	0,264978671	15 366,25 €	74%	12 530,43 €
2014	-0,273508828	5 957,73 €	47,09%	10 180,42 €	-0,027114767	12 584,85 €	45%	11 184,03 €	0,075481968	16 526,13 €	70%	13 192,32 €
2015	0,093784997	6 516,48 €	25,44%	10 423,31 €	-0,049309406	11 964,30 €	90%	10 687,58 €	-0,022332853	16 157,05 €	98%	12 904,23 €
2016	-0,112843595	5 781,13 €	33,81%	10 025,64 €	0,144258865	13 690,26 €	47%	11 410,16 €	0,135424016	18 345,10 €	39%	13 588,71 €
2017	0,152389222	6 662,12 €	37,12%	10 592,75 €	0,07629189	14 734,71 €	100%	12 280,66 €	0,243868271	22 818,89 €	57%	15 468,08 €
2018	-0,124746801	5 831,04 €	66,87%	9 709,15 €	-0,124826835	12 895,42 €	96%	10 808,16 €	-0,059731109	21 455,90 €	100%	14 544,15 €
2019	0,110554027	6 475,68 €	87,73%	10 650,81 €	0,121030658	14 456,17 €	60%	11 590,86 €	0,237647889	26 554,84 €	30%	15 583,23 €
2020	-0,065053949	6 054,42 €	49,24%	10 309,67 €	-0,143444297	12 382,51 €	68%	10 458,40 €	0,068700446	28 379,17 €	33%	15 932,35 €