Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

PATRÍCIA DO ROSÁRIO CLARO

180140012

AS AÇÕES E DESAFIOS DO PROFESSOR NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DOS ALUNOS DURANTE AS DISCUSSÕES COLETIVAS

Relatório do Projeto de Investigação do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º ciclo do Ensino Básico

ORIENTADORA

Professora Doutora Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado

Junho, 2021

PATRÍCIA DO ROSÁRIO CLARO

180140012

AS AÇÕES E DESAFIOS DO PROFESSOR NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DOS ALUNOS DURANTE AS DISCUSSÕES COLETIVAS

JÚRI

Presidente: Professora Doutora Mariana Abrantes de Oliveira Pinto Alte da Veiga

Arguente: Professora Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes

Orientadora: Professora Doutora Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado

Junho, 2021

Agradecimentos

Com o fim do presente trabalho chega o fim também de mais uma etapa do meu percurso. Marca o fim de um caminho cheio de aprendizagens em que cresci tanto pessoalmente como profissionalmente.

Ao longo desta caminhada foram muitas as pessoas que me acompanharam e a quem não posso deixar de agradecer:

À minha mãe que sempre esteve disponível e que nunca deixou de acreditar em mim e com paciência e confiança sempre me incentivou a seguir o meu percurso.

À minha professora orientadora Professora Doutora Catarina Delgado, por ter estado sempre disponível para me orientar na elaboração deste estudo.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação e que ao longo desta me apoiaram.

Agradeço também à minha colega e amiga Ana que deste os primeiros tempos da licenciatura sempre me apoiou e incentivou mesmo quando nos separámos por diferentes caminhos e que tenho a certeza que levarei para o resto da vida.

Obrigado a todas as educadoras e professoras cooperantes que nos estágios curriculares procuraram transmitir os seus conhecimentos e me deram espaço para intervir em contexto educativo.

Por fim, agradeço aqueles que mesmo de fora, mas sempre presentes me quiseram bem e me apoiaram nos bons e maus momentos. E não me posso esquecer da minha estrelinha e de Deus porque sem Ele não era possível.

Divido convosco os méritos desta conquista porque ela também pertence a vocês!

Resumo

O presente estudo, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º ciclo do Ensino Básico foca-se nas ações e desafios do professor no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos durante as discussões coletivas. Tem como objetivo analisar e compreender de que modo posso conduzir as discussões coletivas com vista ao desenvolvimento do raciocínio matemático. Mais concretamente, visa responder às seguintes questões: (i) Que ações se destacam na minha prática de condução de discussões coletivas que promovem o raciocínio matemático dos alunos?; (ii) Com que desafios me deparo na condução de discussões coletivas tendo em vista o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos?

A fundamentação teórica engloba a discussão e aprofundamento de temas essenciais, como o raciocínio matemático, entendimento e processos, e a importância do seu desenvolvimento nos primeiros anos; o ensino exploratório e o desenvolvimento do raciocínio matemático; características das tarefas que promovem o raciocínio matemático; as ações do professor que promovem o raciocínio matemático durante a exploração das tarefas.

No que respeita à metodologia de investigação, este estudo enquadra-se numa abordagem qualitativa mais propriamente corresponde a uma investigação sobre a prática. O estudo está pensado para ser realizado, em contexto de intervenção, com uma turma do 3.º ano de escolaridade do 1.º ciclo do Ensino Básico, do distrito de Setúbal. Os principais métodos propostos para a recolha de dados são a observação participante, incluindo notas de campo, manuscritas e gravações de áudio e de vídeo e a recolha documental.

Devido às restrições impostas no âmbito da situação pandémica (Covid-19) não foi possível obter dados empíricos. Assim, as considerações finais salientam e antecipam desafios, com que me deparei ou posso vir a deparar, na preparação e exploração de tarefas que visam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. De entre os desafios é de salientar: (i) a escolha e conceção das tarefas; (ii) a antecipação de estratégias dos alunos; (iii) a previsão de dificuldades e de formas de as adereçar ; (iv) a criação e gestão de ambiente estimulante em sala de

aula; (v) a interpretação do raciocínio dos alunos e o reconhecimento e potencialização dos processos utilizados.

Palavras-chave: Raciocínio matemático; Ações e desafios do professor; Discussões coletivas; 1.º ciclo de escolaridade.

Abstract

The study in the scope of the Master in Pre-school Education and Teaching of the 1st cycle of Basic Education, focuses on the actions and challenges of the teacher in the development of students' mathematical reasoning during collective discussions. It´s aim is to analyse and understand how can I conduct collective discussions with a view to the mathematical reasoning development. More specifically, it aims to answer the following questions: (i) Which actions stand out in my practice of conducting collective discussions that promote students' mathematical reasoning?; (ii) What challenges do I face when conducting collective discussions with a view to developing students' mathematical reasoning?

The theoretical foundation encompasses the discussion and deepening of essential themes, such as mathematical reasoning, understanding and processes and the importance of its development in the early years; exploratory teaching and the development of mathematical reasoning; characteristics of tasks that promote mathematical reasoning; teacher's actions that promote mathematical reasoning during the exploration of tasks.

With regard to the research methodology, this study is part of a qualitative approach, more specifically an investigation of the practice. The study is designed to run in a context of intervention, on class from the 3th year of schooling of the 1st cycle of Basic Education, in the district of Setúbal. The methods proposed for data collection are mainly participant observation, including field notes handwritten, audio and video recordings, and documentary collection.

In consequence of the restrictions imposed in the context of the pandemic situation (Covid-19), it was not possible to obtain empirical data. Thus, the final considerations highlight and anticipate the challenges, which I came or may come across, in the preparation and exploration of tasks aimed at the development of the students´ mathematical reasoning. Among the challenges is to highlight: (i) the choice and design of tasks; (ii) anticipating students' strategies; (iii) the prediction of difficulties and ways of adhering to them; (iv) the creation and management of stimulating environment in the classroom; (v) the interpretation of students' reasoning and the recognition and potentiation of the processes used.

Keywords: Mathematical reasoning; Teacher's actions and challenges; Collective discussions; 1st cycle of schooling.

ÍNDICE

Capítulo I – INTRODUÇÃO 11

1.1. Motivação, pertinência, objetivo e questões do estudo 11

1.2. Estrutura e organização do relatório 14

Capítulo II – REVISÃO DA LITERATURA 15

2.1. O Raciocínio Matemático 15

2.1.1. Entendimento e Processos 15

2.1.2. Importância do desenvolvimento do Raciocínio Matemático nos primeiros anos 19

2.2. O ensino exploratório e o desenvolvimento do raciocínio matemático 21

2.3. Características das tarefas que promovem o raciocínio matemático 24

2.4. Ações do professor que promovem o raciocínio matemático durante a exploração das tarefas 30

Capítulo III - METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO 41

3.1. Opções metodológicas 41

3.2. Descrição dos dispositivos e dos procedimentos de recolha de dados 43

3.2.1. Observação participante 43

3.2.2. Recolha documental 44

3.3. Descrição do dispositivo e do procedimento de análise dos dados 45

3.4. Participantes do estudo 46

Capítulo IV - PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA 47

4.1. Designação da Tarefa: *Chupa-Chupas* 47

4.2. Designação da Tarefa: *Mais Descobertas sobre Sólidos Geométricos* 52

4.3. Designação da Tarefa: *Cartões com números* 57

4.4. Designação da Tarefa: *Os trabalhos da Catarina* 60

Capítulo V - CONSIDERAÇÕES FINAIS 63

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 69

ANEXOS 72

Anexo A: Modelo de apoio à planificação 72

Anexo B: Tarefa 1 - *Chupa-Chupas* 73

Anexo C: Tarefa 2 - *Mais Descobertas sobre sólidos Geométricos* 73

Anexo D: Tarefa 3 - *Cartões com Números* 75

Anexo E: Tarefa 4 - *Os trabalhos da Catarina* 77

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Características das tarefas organizadas por níveis de exigência (NCTM, 2017, p. 18). 26

Figura 2 - Parte da tabela "Tarefas e ações do professor para promover o raciocínio" de Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020, p. 11). 33

Figura 3 - Tarefa Chupa-chupas: hipótese de resposta 1. 49

Figura 4 - Tarefa Chupa-chupas: hipótese de resposta 2. 49

Figura 5 - Tarefa Chupa-chupas: hipótese de resposta 3. 50

Figura 6 - Tarefa Cartões com números: hipótese de resposta........................... 58

Figura 7 - Tarefa Os trabalhos de Catarina: hipótese de resposta 1. 61

Figura 8 - Tarefa Os trabalhos de Catarina: hipótese de resposta 2. 61

Capítulo I – INTRODUÇÃO

1.1. Motivação, pertinência, objetivo e questões do estudo

A identificação de um foco de interesse que me permitisse investigar uma temática relevante, tanto do ponto de vista da aprendizagem dos alunos como para mim enquanto futura professora, foi um dos impasses com que me deparei na escolha do tema para a elaboração deste projeto de investigação que se enquadra na Unidade Curricular de Estágio IV, num contexto de estágio com os alunos de uma turma de 3.º ano de escolaridade. À partida as diferentes áreas de ensino do 1.º ciclo de escolaridade constituem um contexto interessante e diversificado de temáticas que poderia aprofundar e que serviriam este propósito. Contudo, procurava que essa escolha recaísse num tema que me desafiasse e que, simultaneamente, estivesse relacionado com uma área de que gosto particularmente.

Efetivamente, a Matemática foi desde sempre uma área com bastante interesse para mim e na qual senti mais facilidade ao longo do meu percurso de estudante. A possibilidade de, enquanto futura professora, poder aprofundar mais alguns aspetos referentes ao ensino desta disciplina, para além do que foi aprendido ao longo das várias Unidades Curriculares durante a formação inicial, constitui uma fonte de motivação importante.

Contudo, vários aspetos associados à aprendizagem da matemática constituíam para mim pontos de partida interessantes para o desenvolvimento de um projeto de investigação. Perceber onde focar o meu olhar, de entre os diversos aspetos relacionados com o ensino e a aprendizagem da matemática, foi um caminho que tive de percorrer. Tal como afirma Quivy (1992), "(…) não é fácil conseguir traduzir o que vulgarmente se apresenta como um foco de interesse ou uma preocupação relativamente vaga num projecto de investigação." (p. 31).

No decorrer das aulas de Didática da Matemática foi abordado o tema do raciocínio matemático, o que me suscitou bastante interesse, pois nunca tinha pensado que a aprendizagem da matemática ia para além de chegar a um resultado, a uma solução ou saber propriedades e conhecimentos matemáticos, mas que envolve todo um pensamento matemático com justificações, exemplos, generalizações e procura de outras alternativas, conexões e ideias (Lannin, Ellis e Elliot, 2011). Surge assim o interesse de compreender melhor como, enquanto futura professora, posso contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Tentar compreender os desafios com que me deparo para apoiar os alunos a desenvolverem-no é a grande fonte de motivação para a realização deste projeto.

Para isso, os momentos de discussão coletiva são escolhidos como os momentos foco desta investigação, uma vez que constituem a ocasião mais rica para estudar as ações do professor relacionadas com o raciocínio. Estes momentos de discussão coletiva potenciam o surgimento de situações que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2016).

O presente projeto de investigação tem como tema as ações e desafios do professor no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos durante as discussões coletivas. O seu objetivo é analisar e compreender de que modo posso conduzir discussões coletivas orientadas para o desenvolvimento do raciocínio matemático, tendo subjacentes as seguintes questões:

- Que ações se destacam na minha prática de condução de discussões coletivas que promovem o raciocínio matemático dos alunos?
- Com que desafios me deparo na condução de discussões coletivas tendo em vista o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos?

A pertinência da realização de estudos focados no raciocínio matemático está associada a três ordens de razão: (i) à importância que o desenvolvimento do raciocínio matemático assume desde os primeiros anos de escolaridade, (ii) aos desafios que pode constituir para o professor a promoção desse desenvolvimento e (iii) por constituir um tema ainda relativamente pouco estudado, em particular, no nosso país e focado no 1.º ciclo de escolaridade.

O desenvolvimento do raciocínio matemático é um dos grandes objetivos do ensino da matemática. Lannin, Ellis e Elliot (2011) acreditam "que o raciocínio matemático é a essência da atividade matemática e que, sem raciocínio matemático, não há matemática" (p. 7). A importância do raciocínio matemático advém também da ajuda que este nos dá a compreender a existência de relações matemáticas e de este ser “fundamental para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda da matemática” (p. 7).

O desenvolvimento do raciocínio matemático é crucial para os alunos, mas, simultaneamente, é desafiante para os professores (Lannin, Ellis & Elliot, 2011). Faz parte da função do professor propor aos alunos tarefas que promovam o raciocínio matemático, mas segundo Boaler (2010, p. V) esta questão é complexa e tem sido pouco discutida.

O raciocínio matemático envolve “processos mentais complexos em que intervêm elementos, fortemente imbricados, de natureza lógica, matemática, epistemológica, biológica, psicológica e até emocional” (Oliveira, 2008, p. 8) e é devido a esta complexidade que se procura conhecer melhor como é que este se desenvolve. A investigação mostra que tarefas que envolvam discussões entre os alunos, onde estes argumentem e refutam as ideias uns dos outros são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático, ao contrário da resolução de exercícios rotineiros, sem compreensão e que apelam à memorização de conceitos matemáticos e propriedades (Oliveira, 2008).

Segundo Mata-Pereira e Ponte (2016) o ensino exploratório é promotor do desenvolvimento do raciocínio matemático e inclui três momentos de trabalho em torno das tarefas – o lançamento da tarefa, a resolução autónoma da tarefa pelos alunos e a discussão coletiva. Nesta abordagem, os alunos “assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução” (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020, p. 10). É dada a oportunidade aos alunos de apresentar e justificar os seus raciocínios, construindo e aprofundando conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas.

Cabe ao professor criar as condições que ajudem os alunos a desenvolver o raciocínio matemático, através de um ambiente intelectual onde este está presente (Mata-Pereira & Ponte, 2016). No entanto, não basta organizar a exploração das tarefas tendo em conta os três momentos acima referidos. Durante a exploração das tarefas, as ações do professor são fundamentais na promoção do raciocínio matemático. Em particular, destacam-se o conjunto de ações do momento de discussão coletiva que deve incluir as ações de questionar, incentivar à partilha de ideias e valorizá-las (parciais, incorretas e corretas), pedir demonstrações e incitar a ir mais além (Mata-Pereira & Ponte, 2016).

A complexidade de que se revestem as discussões coletivas e a importância do papel do professor nestes momentos é salientada por diversos autores (Canavarro, 2011; Delgado, 2013). Neste estudo, pretendo focar-me nas minhas ações que potenciam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos durante essas discussões, tentando, simultaneamente, identificar com que desafios me deparo. Identificar estes desafios e analisá-los, tendo por base a minha prática, poderá constituir mais um contributo para a investigação em Educação Matemática que se foca nesta problemática, em particular no contexto da formação inicial.

1.2. Estrutura e organização do relatório

Este projeto de investigação está organizado por capítulos, correspondendo o primeiro ao presente capítulo no qual abordo o tema e as questões de investigação, explícito as motivações e a pertinência do mesmo e apresento a estrutura deste relatório.

No Capítulo II é apresentada a revisão da literatura focada no tema do projeto, mais propriamente o entendimento e processos do raciocínio matemático, as características das tarefas que o promovem, a relação entre o ensino exploratório e o desenvolvimento do mesmo e as ações do professor durante a exploração das tarefas tendo em conta o objetivo proposto.

O Capítulo III corresponde à metodologia adotada neste estudo e a apresentação e justificação das opções metodológicas.

No Capítulo IV encontram-se as quatro planificações das tarefas propostas com o objetivo de recolher dados que respondam às questões levantadas neste estudo.

Por fim, no Capítulo V são apresentadas as considerações finais, em que são abordados os desafios sentidos no decorrer deste estudo e antecipados outros que pudessem ter ocorrido durante a implementação das tarefas.

Capítulo II – REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo é realizada uma abordagem teórica relativa ao tema deste relatório - o raciocínio matemático, apoiada em vários autores e encontra-se dividido em quatro secções. Na primeira secção aborda-se o entendimento e processos do raciocínio matemático e a importância do desenvolvimento deste nos primeiros anos. Na segunda secção referem-se aspetos associados ao ensino exploratório e ao desenvolvimento do raciocínio matemático. As características das tarefas que promovem o raciocínio matemático são discutidas na terceira secção e, por último, na quarta secção são abordadas as ações do professor que promovem o raciocínio matemático durante a exploração das tarefas.

2.1. O Raciocínio Matemático

2.1.1. Entendimento e Processos

Lannin, Ellis e Elliot (2011), citando Russel (1999), referem que o raciocínio matemático assenta na justificação e no uso de generalizações matemáticas. Para Oliveira (2008) a "expressão «raciocínio matemático» designa um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtém novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3). O mesmo defende Mata-Pereira e Ponte (2016, 2020), que referem que o raciocínio matemático é mais do que simplesmente pensar e está presente quando a partir de informação já existente e do conhecimento baseado em ideias, propriedades ou definições matemáticas se conseguem obter novas conclusões devidamente fundamentadas e justificadas. Por sua vez, Stylianides (2008), citado por Stylianides, Stylianides e Shilling-Trana (2013), defende que raciocinar envolve investigar como as "coisas funcionam" em matemática, recorrendo a uma identificação de padrões, novos argumentos e conjeturas que permitem concluir se determinada afirmação corresponde a uma verdade ou a um falso resultado. Raciocinar resulta numa justificação falada ou escrita que apresenta garantias de uma conclusão aceitável pela comunidade onde se insere (Douek, 2005 & Krummheuer, 1995, citado por Brodie, 2010).

Segundo Ball e Bass (2003), citado por Brodie (2010), o raciocínio matemático é uma competência essencial, básica, para um sem número de tarefas desde a compreensão dos conceitos matemáticos à reconstrução de conhecimentos já adquiridos, mas, entretanto, esquecidos. Os mesmos autores defendem que os alunos que utilizam o raciocínio matemático na aprendizagem da matemática podem perceber melhor a sua utilidade e vê-la como algo útil, como também relacioná-la com outras atividades ou com o seu quotidiano. Segundo Lannin, Ellis e Elliot (2011) o raciocínio matemático é um processo matemático em que se sabe o porquê de certas coisas serem matematicamente apropriadas e se é capaz de resolver determinados problemas.

Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020) defendem que o raciocínio não é exclusivo da matemática uma vez que esta capacidade abrange outras disciplinas e aspetos da vida do aluno, mas é no ensino da matemática que este pode e deve ser desenvolvido. Esta transversalidade do raciocínio matemático também é defendida por Oliveira (2008) quando refere que o "raciocínio matemático envolve processos mentais complexos em que intervém elementos, fortemente imbricados, de natureza lógica, matemática, epistemológica, biológica, psicológica e até emocional" (p. 8). Esta ideia também é defendida por Kilpatrick et al. (2001), citado por Brodie (2010).

A ação de raciocinar pode ser feita individualmente ou em grupo, num ato de cooperação e coprodução das justificações de uma conjetura. Assim, a comunicação é importante quando se fala em raciocínio matemático, seja quando já existe um trabalho prévio e quer-se obter novo conhecimento ou quando se trabalha em conjunto para um novo conhecimento, sendo que os textos produzidos comunicam os resultados desse trabalho (Brodie, 2010).

Jeannotte e Kieran (2017) ressalvam a importância da comunicação quando definem o "raciocínio matemático como um processo de comunicação com outros e consigo próprio que permite inferir afirmações matemáticas a partir de outras afirmações matemáticas" (p. 7). Os processos presentes no raciocínio matemático têm uma componente cognitiva, mas também meta-discursivos já que deles surgem conjeturas sobre objetos ou relações através da exploração das relações entre estes (Jeannotte & Kieran, 2017).

O raciocínio matemático engloba vários processos de raciocínio, tais como elaborar conjunturas, generalizar, identificar padrões, comparar e classificar, que permitem encontrar semelhanças ou diferenças e justificar (Jeannotte & Kieran, 2017). A justificação e a generalização são processos fundamentais do raciocínio em matemática (Jeannotte & Kieran, 2017; Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020; Widjaja, Vale, Herbert, Loong & Bragg, 2020). O processo exemplificar apoia todos os outros processos de raciocínio (Jeannotte & Kieran, 2017).

Para Carraher, Martinez e Schliemann (2008), citados por Mestre e Oliveira (2008), a **generalização** envolve "uma afirmação de que uma propriedade ou técnica é válida para um conjunto de objetos matemáticos" (p. 3). A generalização pode surgir a partir do trabalho não de apenas um aluno, mas também de vários, das tarefas por eles realizadas e através das discussões coletivas onde lhes é permitido falar, discutir, argumentar, escrever e representar as conjeturas (Ellis, 2011 & Jurrow, 2004, citado por Mestre & Oliveira, 2008). Este processo compreende a identificação de pontos em comum entre os casos e em que se amplia o raciocínio para além do ponto inicial. Ocorre, portanto, quando os alunos se concentram em um determinado aspeto do problema ou ideia e pensam nele de uma forma mais ampla.

A generalização pode adotar várias formas que podem não ser facilmente detetadas, mas não deixam de ser válidas como é o caso da descrição verbal. No entanto, é importante utilizar e esclarecer o uso deste ou aquele termo, símbolo ou representação matemática (Lannin, Ellis & Elliot, 2011). Jeannotte e Kieran (2017) referem a generalização como sendo "um processo que infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou a relação entre objetos do conjunto de um dos seus subconjuntos" (p. 9). Brodie (2010), citando vários autores, refere que ao fazer generalizações também se resolve problemas e permite aos alunos identificar a estrutura de uma classe de problemas mais ampla ou de ideias que lhes estão subjacentes (Brousseau & Gibel, 2005; Kilpatrick et al., 2001; Russel, 1999).

O processo de raciocínio **conjeturar** é, para Jeannotte e Kieran (2017), um processo que consiste na construção de uma narrativa com base na procura de semelhanças e diferenças sobre um valor epistémico, de provável valor, que pode vir a potenciar uma evidência matemática. Segundo Stylianides (2008), citado por

Jeannotte & Kieran (2017), conjeturar corresponde a um processo, que envolve a procura de semelhanças e diferenças, no qual se faz uma inferência a que está associada um valor epistémico (ou seja pode ser verdadeira ou falsa), mas que pode ter potencial para ser validada.

No que diz respeito ao processo de **identificar um padrão** Stylianides (2008), citado por Jeannotte e Kieran (2017), referem-no como sendo o processo que também através da procura de semelhanças e diferenças, se constata recorrentemente uma relação entre objetos ou relações. Identificar um padrão é mais do que simplesmente observar, pois recorre a uma procura insistente das semelhanças ou diferenças.

Em relação ao processo de **comparação** este possibilita inferir uma ideia sobre objetos ou relações através das semelhanças e diferenças encontradas, enquanto o processo de **classificar** permite juntar ou separar objetos matemáticos, inferindo-lhes uma classe baseada em definições e propriedades matemáticas existentes (Jeannotte & Kieran, 2017). Comparar e classificar envolve contrapor objetos entre si de modo que seja possível estabelecer uma organização entre eles.

No que diz respeito à **justificação**, esta é crucial no raciocínio matemático e é fundamental para reconhecer se uma conjetura é válida ou não. Para isso, é necessário que os alunos forneçam uma sequência lógica de afirmações baseadas em ideias, pensamentos ou afirmações que já estão dadas como verdadeiras, explicando os motivos e assim mostrando que a afirmação é correta. A justificação deve ser válida para todos os casos do domínio em questão (objeto ou sistema matemático para o qual a conjetura é definida), tendo em atenção as relações subjacentes. Uma justificação válida não só mostra que a afirmação é verdadeira, como explica o porquê de o ser e fornece informações sobre as relações subjacentes, ou seja, mostra porque essa afirmação é verdadeira (Lannin, Ellis & Elliot, 2011).

Para Kilpatrick et al. (2001), citados por Brodie (2010), justificar é um elemento-chave do raciocínio e este processo significa proporcionar uma razão para que algo seja considerado válido. Defendem que os alunos têm de ser capazes de justificar e explicar ideias de modo que sejam claros ao mesmo tempo que desenvolvem as suas capacidades de raciocínio e melhoram a sua compreensão dos conceitos. Para Ball e Bass (2003), também citados por Brodie (2010), o conhecimento não justificado não foi alvo de raciocínio e é irracional. Corroboram na defesa de que a justificação é uma prática matemática fundamental que possibilita que sejam feitas ligações entre ideias e partes de uma conjetura, valida afirmações e conjeturas, permite resolver discordâncias e desenvolver novos conhecimentos matemáticos.

Por fim, a **exemplificação** permite lidar com os dados de um problema que, posteriormente, podem ser utilizados como apoio a outros processos de raciocínio, como já referido anteriormente. Trata-se de recorrer exemplos ou contraexemplos que validam ou não as condições do problema (Jeannote & Kieran, 2017).

2.1.2. Importância do desenvolvimento do Raciocínio Matemático nos primeiros anos

Segundo o NCTM (2017), o desenvolvimento do raciocínio matemático tem vindo a ser incluído nos aspetos importantes referidos para a aprendizagem matemática ou proficiência matemática. A adequação de raciocínios em conjunto com a competência estratégica está ligada à necessidade de os alunos desenvolverem formas de pensar matematicamente e posteriormente usarem-nas para resolver problemas do quotidiano ou até de outras áreas do conhecimento.

Ao analisar o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013), com facilidade nos apercebemos que existe uma atenção especial para a necessidade de aprofundar o raciocínio dos alunos. A "apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa" (Bivar et al., 2013, p.2) que estão bem presentes no ensino da Matemática e constituem as bases do raciocínio hipotético-dedutivo, têm um papel fulcral na estruturação do pensamento, sendo este uma das finalidades destacadas pelos autores para o ensino da Matemática. O trabalho destas competências desenvolve nos alunos a capacidade de elaborarem análises objetivas e coerentes, de argumentação e/ou de justificação sobre uma determinada posição e de descobrir falácias e raciocínios (Bivar et al., 2013, p.2). Os autores deste programa realçam que o raciocínio indutivo desempenha um papel fundamental para a formulação de conjeturas, que os alunos deverão saber estabelecer. Salientam também que o raciocínio dedutivo é fundamental para a justificação de propriedades já que este permite recorrer à demonstração como forma de justificação.

Como podemos constatar no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017), também o raciocínio e resolução de problemas e o pensamento crítico e criativo são duas das competências-chave essenciais que contribuem para a construção do conhecimento no âmbito escolar e ao longo da vida. A sua mobilização permite aos alunos "intervir na vida e na história dos indivíduos e das sociedades, tomar decisões livres e fundamentadas sobre questões naturais, sociais e éticas, e dispor de uma capacidade de participação cívica, ativa, consciente e responsável" (Martins et al., 2017, p. 10).

O mesmo documento refere que as competências associadas ao raciocínio e resolução de problemas dizem respeito aos "processos lógicos que permitem aceder à informação, interpretar experiências e produzir conhecimento" (p. 23). Conduzem também ao encontro de respostas, fomentam a tomada de decisões e mesmo até a formulação de novas questões. No que diz respeito ao pensamento crítico e criativo, as competências a ele associadas obrigam a uma observação, identificação, análise e atribuição de sentido às informações, experiências e ideias e argumentar tendo em conta diferentes premissas e variáveis. Também envolve a aplicação de ideias em novos contextos específicos, olhá-las por outras perspetivas e identificar soluções novas construindo novos cenários (Martins et al., 2017, p.24).

Lannin, Ellis e Elliot (2011) defendem que o raciocínio matemático é um aspeto muito importante do ensino da matemática referindo mesmo que este é a essência desta disciplina e que sem ele esta não existe. É fundamental para se compreender ideias e estabelecer variadas relações. Ressaltam que é essencial desenvolver práticas que promovam o raciocínio dos alunos, mas salientam que estas práticas se apresentam como um grande desafio para os professores.

Para estes autores e para o NCTM (2007), o raciocínio matemático exige que não se conheçam apenas as ideias ou fórmulas, mas também que se compreenda como elas se relacionam e que este se desenvolve à medida que surgem novas análises, argumentos, justificações e relações entre ideias que permitem aos alunos chegar à conclusão do que está correto e do que está errado. NCTM (2007) acrescenta, ainda, que ter uma ideia que acaba por ser inválida pode consistir num ponto de partida para conjeturas e descobertas matemáticas importantes e que são parte integrante do processo.

O trabalho relacionado com raciocínio matemático e os seus processos não é exclusivo dos anos escolares mais avançados, devendo começar a ser desenvolvido nos primeiros anos (Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020; NCTM, 2007). Boavida et al. (2008) concordam com esta ideia e afirmam que as crianças, mesmo quando estão ao nível das operações concretas em relação ao seu desenvolvimento, são capazes de fazer ações articuladas com objetos diferentes de forma a justificar uma ideia, usando assim o raciocínio dedutivo. Referem ainda que existem muitos estudos que revelam que:

> em ambientes adequados, os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, são capazes de explicar e de justificar os raciocínios usados durante o processo de resolução de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir da análise de casos particulares, de compreender o que significa um contra-exemplo, de reflectir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em Matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos. (p. 81)

2.2. O ensino exploratório e o desenvolvimento do raciocínio matemático

Um dos aspetos importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático prende-se com o modo de trabalho que o professor adota na sua sala de aula. Aulas nas quais se adote um ensino expositivo, caracterizadas por o papel principal se encontrar centrado na figura do professor, em que este ensina diretamente conceitos, procedimentos e algoritmos, propõe aos alunos a resolução de exercícios, explicados por ele e onde o aluno somente aplica procedimentos, dificilmente criam a oportunidade do desenvolvimento do raciocínio matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2016; Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020; Ponte, 2005).

Segundo Ponte (2005), no ensino expositivo é o professor que fornece toda a informação necessária aos alunos, esforçando-se por a transmitir de um modo sistematizado e apresentando exemplos e fazendo comentários. No fundo o professor transmite os conhecimentos com base nos manuais e outros materiais didáticos, cumprindo o programa pré-estabelecido. Ao aluno é pedido que esteja atento durante a aula para que absorva todo o conhecimento transmitido e responda a eventuais questões que o professor lhe coloque. Também é pedido a estes a prática de exercícios que lhes permitam consolidar os conceitos e fórmulas previamente explicadas e exemplificadas pelo professor. Ainda que o professor recorra à formulação de perguntas de modo a dinamizar um pouco a aula, poder avaliar a aprendizagem do aluno ou para o conduzir para um determinado resultado, neste tipo de ensino não é pedido ao aluno nenhum envolvimento especial. A exposição da 'matéria' é o objetivo principal complementado pela realização de exercícios, pois é através da realização destes que o professor antevê que o aluno aplique os conhecimentos transmitidos, coloque dúvidas e treine todo o tipo de exercícios que podem surgir em momentos de avaliação.

O ensino exploratório apresenta-se como um tipo de ensino mais adequado para desenvolver o raciocínio matemático, por estimular os alunos a fazerem conjeturas e a procurar confirmar ou negar as mesmas quando questionados (NCTM, 2007). O mesmo é defendido por Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020) ao afirmarem que os alunos são desafiados a "construir ou aprofundar a sua compreensão sobre conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas" (p. 10). Segundo Ponte (2005), a principal característica do ensino exploratório é promover em sala de aula a discussão coletiva da exploração de tarefas que constituam oportunidades importantes para a construção do pensamento. É proposto aos alunos que resolvam uma tarefa, trabalhem-na autonomamente e que haja uma partilha e discussão com toda a turma, que potenciará a aprendizagem e evolução do raciocínio.

Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020) acrescentam que neste modelo os alunos envolvem-se na exploração e descoberta de relações e ideias matemáticas ao resolverem as tarefas propostas, têm de escolher as estratégias de resolução adequadas, construindo-as com base em conhecimento já adquirido, uma vez que não detêm um método de resolução imediato. Assim, mais uma vez, é sublinhado nesta abordagem o papel do aluno "na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução" (Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020, p. 10). Segundo Boaler (2010), o aluno torna-se mais independente do professor e dos livros, pelo que a ‘autoridade’ transita do professor para o domínio da matemática. Para o NCTM (2007) “Há claras evidências que, em aulas onde o raciocínio é privilegiado, os alunos se envolvem, de facto, em processos de raciocínio e, ao fazê-lo, aprendem a discernir aquilo que constitui uma explicação matemática aceitável” (p. 220).

O ensino exploratório proporciona "momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva" (Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020, p. 10) visto que obriga a que tanto o aluno como o professor têm de estar à vontade com as questões, reações ou críticas dos restantes, estando abertos à necessidade de explicar e justificar o seu raciocínio. O aluno deve estar predisposto a aprender a detetar erros, argumentar e contrapor o raciocínio de um colega. Por serem encorajados a exporem as suas ideias e a ouvirem a opinião dos colegas precisam previamente de dispor de tempo e de oportunidade para formularem e explorarem as suas conjeturas. O confronto com experiências variadas também os ajuda a desenvolver a capacidade de construir uma argumentação forte e válida quer seja para defender a sua conjetura quer seja para contra-argumentar a dos outros (NCTM, 2007).

Esta abordagem assenta, assim, num ambiente de sala de aula baseado na comunicação que permite aos alunos participar, partilhando as suas opiniões e descobertas e refletir com os colegas e professor sobre as mesmas, especialmente no momento de discussões coletivas. Mais do que obter resultados é valorizada a estratégia utilizada para resolver a tarefa e a sua justificação (Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020). Outro aspeto importante no ensino exploratório, que merecerá um aprofundamento da secção seguinte, é a escolha das tarefas a propor aos alunos. Segundo Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020), as tarefas devem ser “apropriadas, suscetíveis de promover a construção de conceitos, a formulação de estratégias de resolução de problemas, conjeturas e justificações” (p. 10). A abordagem exploratória, assente nas características enunciadas anteriormente, proporciona um ensino da matemática com compreensão e potencia o desenvolvimento do raciocínio matemático.

2.3. Características das tarefas que promovem o raciocínio matemático

As tarefas matemáticas propostas aos alunos têm como finalidade envolvê-los na matemática levando-os a desenvolver certos conceitos e práticas matemáticas (Brodie, 2010). Segundo o NCTM (2017), as tarefas a propor aos alunos têm como objetivo motivá-los para a aprendizagem e envolvê-los na resolução de problemas, ajudando-os a construir novos conhecimentos. A investigação em educação matemática salienta os seguintes aspetos relativos às tarefas (NCTM, 2017, p. 17)

> 1. Nem todas as tarefas proporcionam as mesmas oportunidades para o pensamento e aprendizagem dos alunos (Hiebert et al. 1997; Stein et al. 2009).
>
> 2. Há mais aprendizagens em aula onde as tarefas, de forma consistente, encorajem o pensamento e o raciocínio de nível elevado do que naquelas em que as tarefas são habitualmente rotineiras e centradas nos procedimentos (Boaler & Staples 2008; Hiebert & Wearne 1993; Stein & Lane 1996).
>
> 3. As tarefas de nível de exigência cognitiva elevado são as mais difíceis de explorar devidamente e, muitas vezes transformam-se noutras, de menor exigência, durante a sua exploração (Stein, Grover & Henningsen 1996; Stigler & Hiebert 2004).

Brodie (2010) defende que o tipo de tarefa no qual os alunos se envolvem, o modo como se eles se envolvem nessas tarefas e como interagem entre si e com o professor enquanto as realizam é o segredo para o sucesso do desenvolvimento do raciocínio matemático. No entanto, esta autora, citando Ball e Bass (2003), alerta para que não é suficiente apresentar aos alunos problemas matemáticos abertos que requerem raciocinar matematicamente para que os ajude a aprender e a desenvolver o raciocínio matemático, nem tão pouco limitar-se a pedir que eles expliquem o seu pensamento. É necessário ter o cuidado na escolha das tarefas, de forma que estejam adequadas aos alunos e o professor ter um padrão de interação mais complexo que não se limite às apresentações das respostas dos alunos.

Stein et al. (2000) organizam as tarefas matemáticas em dois níveis de exigência cognitiva. Consideram que as tarefas para as quais apenas se utiliza a memória, sem que seja necessário proceder a ligações entre conceitos, são tarefas de nível de exigência inferior. No entanto, as tarefas matemáticas de nível de exigência superior requerem o uso de procedimentos para desenvolver uma compreensão mais aprofundada dos conceitos e envolvem a conexão de diferentes representações e procedimentos. As tarefas de memorização apenas requerem que o aluno repita os conhecimentos previamente adquiridos sem que para tal seja necessário que os explique, isto é o aluno não necessita de realizar conexão entre procedimentos, limitando-se a utilizar factos, regras, fórmulas ou definições já conhecidos. Deste modo, estas tarefas apenas produzem resultados corretos, mas não desenvolvem a compreensão matemática. Já as tarefas que exigem o estabelecimento de relações permitem ao aluno aprofundar a compreensão de conceitos e desenvolver ideias matemáticas. Para realizar estas tarefas os alunos usam os seus conhecimentos sem, no entanto, terem de seguir um procedimento específico. Este tipo de tarefas exige que os alunos usem a sua criatividade para encontrar a sua própria resolução.

Segundo NCTM (2017), Smith e Stein (1998) organizam as características das tarefas dos vários níveis diferentes em quatro categorias pela ordem da sua exigência cognitiva como mostra a figura abaixo.

Níveis de Exigência

Exigência baixa (memorização)

- Envolvem, quer a reprodução de factos, regras, fórmulas ou definições previamente aprendidos, quer a memorização de factos, regras, fórmulas ou definições.
- Não podem ser resolvidas utilizando procedimentos, porque não existe nenhum ou porque o intervalo de tempo de realização da tarefa é demasiado curto para aplicar o procedimento.
- Não são ambíguas. Estas tarefas envolvem a reprodução exata de material anteriormente estudado e o que deve ser reproduzido é pedido clara e diretamente.
- Não têm qualquer conexão com conceitos ou significados subjacentes aos factos, regras, fórmulas ou definições que estão a ser aprendidas ou reproduzidas.

Exigência baixa (procedimentos sem conexões)

- São algorítmicas. A utilização do procedimento é explicitamente pedida ou é evidente a partir do que foi ensinado previamente e da experiência anterior ou pela colocação da tarefa numa série repetitiva.
- A exigência cognitiva, para se completar com sucesso a tarefa, é limitada. Praticamente não há ambiguidade com o que tem de ser feito e como deve ser feito.
- Não existem conexões com os conceitos e o significado subjacentes ao procedimento utilizado.
- O foco está na produção de respostas corretas e não no desenvolvimento da compreensão matemática.
- Não são requeridas explicações a não ser, eventualmente, a descrição do procedimento utilizado.

Exigência alta (procedimentos com conexões)

- Chamam a atenção dos alunos para, quando utilizarem procedimentos, desenvolverem níveis mais profundos na compreensão de conceitos e ideias matemáticas.
- Sugerem, implícita ou explicitamente, que se sigam procedimentos gerais e amplos que têm conexões estreitas com ideias conceptuais subjacentes, em contraste com algoritmos fechados e opacos no que respeita aos conceitos que estão na sua base.
- Geralmente fazem uso de múltiplas representações, como sejam diagramas, materiais manipulativos, símbolos e situações problemáticas. Desenvolve-se o sentido estabelecendo conexões entre as diversas representações.

- Exigem um certo grau de esforço cognitivo. Apesar de poderem ser seguidos procedimentos gerais, isso não é feito descuidadamente. Os alunos devem ocupar-se com as ideias conceptuais subjacentes para que a tarefa seja concluída com sucesso, o que desenvolve a compreensão.

Exigência alta (fazer matemática)

- Requerem um pensamento complexo e não algorítmico - não é sugerido explicitamente um caminho ou uma abordagem, na tarefa, nas instruções ou a partir de um exemplo já trabalhado.
- Exigem que os alunos explorem e compreendam a natureza dos conceitos, relações e processos matemáticos.
- Exigem uma automonitorização ou autorregulação dos processos cognitivos de cada um.
- Requerem que os alunos acedam a conhecimentos e experiências relevantes, utilizando-os de forma apropriada ao trabalho realizado durante a tarefa.
- Requerem que os alunos analisem a tarefa e examinem de perto constrangimentos que podem limitar possíveis estratégias de resolução e soluções.
- Requerem um esforço cognitivo considerável e podem provocar algum nível de ansiedade nos alunos, devido a caráter imprevisível do processo de resolução necessário.

Figura 1 - Características das tarefas organizadas por níveis de exigência, retirado de NCTM (2017, p. 18).[1]

As características das tarefas definem o nível de exigência cognitiva e essas características podem ser a variedade de estratégias de solução, quantidade e natureza das representações usadas e os requisitos de comunicação, como referem Stein et al. (1996). Estes autores defendem que as tarefas cuja resolução pode ser através de diferentes modos, exigindo dos alunos que recorram a representações diferenciadas tendo de as explicar, justificar e partilhar com os outros as suas ideias, são tarefas mais exigentes a nível cognitivo. O mesmo não acontece com as tarefas que apenas apresentam uma solução para a sua resolução e que não pedem ao aluno que explique ou justifique a sua ideia. Assim, Brodie (2010) defende que é importante que o professor proponha tarefas aos alunos que lhes permitam um nível de envolvimento variado, de preferência tarefas com um nível de exigência superior, de modo a promover o desenvolvimento do raciocínio matemático. Efetivamente, se forem propostas aos alunos apenas tarefas de exigência inferior, estes tenderão a ter maior dificuldade em resolver tarefas de nível de exigência superior (Brodie, 2010).

Tendo em consideração estas conclusões de investigação, torna-se importante que os professores selecionem tarefas que procurem incentivar o raciocínio dos alunos, a resolução de problemas e permitam uma aprendizagem da matemática com compreensão. Contudo, para Ponte (2005) não é suficiente escolher boas tarefas, é necessário ter um especial cuidado como estas são

[1] Quadro elaborado com base no trabalho de Doyle (1988) sobre tarefas académicas, no trabalho de Resnick (1987) sobre a capacidade de pensamento de nível elevado e no trabalho realizado no âmbito do projeto QUASAR (Stein, Grover & Henningsen, 1996; Stein, Lane & Silver, 1996).

propostas e como são conduzidas na sala de aula. Através da conceção de tarefas adequadas, que podem surgir por iniciativa do professor, do aluno ou ser o resultado de uma negociação entre ambos, o professor incentiva a atividade do aluno. Estas podem ser apresentadas explicitamente aos alunos no início de trabalho ou ir sendo construídas, por vezes de modo implícito, à medida que este decorre (Ponte, 2005).

Há ainda a salientar que mediante a escolha e a exploração de uma determinada tarefa, considerada à partida de nível de exigência cognitiva elevado, não significa que os alunos se envolvam num raciocínio de nível elevado (NCTM, 2017). O professor ao escolher uma tarefa deve ter em consideração o conhecimento e as experiências prévias dos alunos. Efetivamente, o nível de exigência de uma tarefa não é estanque, podendo numa fase inicial ser de nível elevado, mas posteriormente pode tornar-se rotineira para os alunos, pelo que deverá ser alvo de uma adaptação para que continue a ser desafiante e potenciadora do desenvolvimento do raciocínio matemático (NCTM, 2017). Também Mata-Pereira e Ponte (2016) e Boavida et al. (2008) defendem que as tarefas apresentadas aos alunos são cruciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram que a proposta de tarefas estruturadas em sala de aula que incentivam os alunos a partilhar as suas conjeturas, levando a uma melhoria dos seus argumentos, fomentam o desenvolvimento do raciocínio matemático. Boavida et al. (2008) referem que estas atividades devem conferir "experiências de aprendizagem diversificadas e significativas que proporcionem uma visão global da Matemática e uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos e no desenvolvimento do raciocínio" (p. 8).

O estudo realizado por Francisco e Maher (2011), citado por Mata-Pereira e Ponte (2016), evidencia que as explorações e investigações realizadas no âmbito do ensino exploratório desempenham um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. As tarefas que incluem investigações não são mais que problemas abertos que permitem ter mais do que uma forma de chegar à, ou a uma, solução. Os alunos para resolverem estas tarefas efetuam explorações que lhes permitem descobrir padrões e formular conjeturas, incrementando assim a sua capacidade de raciocínio e melhorando o seu espírito crítico e a sua capacidade de reflexão (Boavida et al., 2008). Ponte (2005) refere a importância dos problemas dizendo que a justificação desta importância é similar à justificação da do recurso a investigações. Ainda assim, salienta que as investigações, mais que os problemas, proporcionam também o envolvimento dos alunos na formulação das questões a explorar. Segunda Pólya (1975, 1981), citado por Ponte (2005), a proposta deste tipo de tarefas permite, para além de desafiar os alunos e promover a construção de novos conhecimentos, é imprescindível para desenvolverem o gosto pela Matemática e perceberem a sua verdadeira natureza.

Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020) defendem que as tarefas selecionadas com vista ao desenvolvimento do raciocínio devem ser de natureza variada e de diferentes graus de desafio (questões de exploração ou problemas), admitir o recurso a várias estratégias de resolução, suscitar a formulação de conjeturas e de generalizações e solicitar justificações das respostas e estratégias usadas.

A equipa do Projeto *Reason* (2019) elaborou um documento onde reúne vários princípios para a elaboração de tarefas que promovem o raciocínio matemático baseado em diversos autores. Estabelecem três princípios gerais, ou seja, que não são alocados a um processo de raciocínio específico. Esses princípios consistem em as tarefas a propor aos alunos terem de incluir questões que (i) permitem a existência de várias estratégias de resolução ou vários resultados, que (ii) envolvam uma variedade de representações, e que (iii) levem a que os alunos reflitam sobre os processos de raciocínio utilizados.

Os autores do Projeto *Reason* (2019) enunciam também um conjunto de princípios para as tarefas direcionados para cada processo de raciocínio em específico (generalização, justificação e classificação). No caso do processo de generalização referem que as questões devem incentivar os alunos a formular generalizações baseadas no que observam. Uma vez que a generalização envolve a procura de semelhanças e diferenças, uma das formas de a promover é criar oportunidades que levem os alunos a focarem-se em casos específicos generalizando o que observam (Jeannote & Kieran, 2017 e Lin et al., 2012, citados pela Equipa do Projeto *Reason*, 2019). Defendem, também, que as tarefas devem incluir questões que orientem para a formulação de generalizações, usando os conhecimentos prévios. Num terceiro princípio, salientam que as tarefas devem permitir que esse conhecimento prévio (generalizações já conhecidas) seja transformado e alargado para outros objetos matemáticos (Lin et al., 2012 e Carraher, Martinez & Schliemann, 2008, citados pela Equipa do Projeto *Reason*, 2019).

Para promover a justificação deve-se incluir questões que apelem ou levem à justificação de respostas, estratégias de resolução ou afirmações e questões que permitam que seja possível perceber se determinada afirmação matemática é verdadeira ou falsa. As questões a incluir também devem requerer ou levar a que surjam justificações de natureza diversa, com base na coerência lógica, recorrendo a exemplos genéricos ou contraexemplos. Por fim, incluir questões que encorajem os alunos a fazer a análise de justificações não dadas pelo próprio (Equipa do Projeto *Reason*, 2019).

Já no que respeita ao processo de raciocínio de classificação é importante que as questões orientem para que seja estipulada uma organização de objetos baseada na identificação do que os define e questões que levem à organização que respeite uma hierarquia ou classes já definidas matematicamente (Equipa do Projeto *Reason*, 2019).

2.4. Ações do professor que promovem o raciocínio matemático durante a exploração das tarefas

Para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático, o professor deve entendê-lo profundamente, independentemente do tópico matemático a ser trabalhado (Lannin, Ellis & Elliot, 2011). Compete ao professor criar um ambiente de aprendizagem, propício e estimulante para os alunos investigarem, discutirem entre si e chegarem a conclusões sem deixarem de acreditar de que tudo, incluindo a matemática, faz sentido e que pode e deve ser compreendida (NCTM, 2007).

É aos professores que cabe a difícil tarefa de propor aos seus alunos situações que os levem a raciocinar matematicamente. Boaler (2010) refere que "seria desonesto fingir que as abordagens de ensino que convida os estudantes a comunicar os seus pensamentos matemáticos e a fazer conexões entre ideias são fáceis ou bem compreendidas" (p. v). Lannin, Ellis e Elliot (2011) defendem que este não é um processo linear e que por isso não existe uma receita a seguir que leve ao sucesso, mas ser conhecedor dos processos de raciocínio que se pretende que os alunos alcancem ao longo de cada momento da tarefa e conduzir as discussões coletivas de forma que estes generalizem e justifiquem, leva ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos seus alunos.

Brodie (2010) refere que não é apenas a escolha acertada de tarefas de exigência cognitiva elevada que ajuda o aluno a desenvolver o raciocínio matemático, mas também a forma como elas são exploradas na sala de aula. Stein et al. (1996) referem que o nível de exigência pode mudar entre o momento em que se estruturam as tarefas e o momento da sua implementação. Esta alteração deve-se ao modo como os alunos se envolvem na resolução da tarefa e o modo como os professores interagem com os mesmos. Isto acontece com alguma frequência, as tarefas são caracterizadas como de exigência superior, mas diminuem de exigência ao longo da sua implementação (Stein et al., 1996). Bauersfeld (1988), citado por Brodie (2010), atribui esta alteração à escolha do modo como os alunos decidem resolver a tarefa, em um nível inferior ao exigido recorrendo à resolução mais rápida e fácil, evitando assim recorrer a uma resolução mais criativa e complicada ou então pela intervenção do professor que orienta a resolução da tarefa e não dá espaço que os alunos desenvolvam o seu raciocínio matemático.

Stein et al. (1996) defendem que as normas de sala de aula, as circunstâncias em que é proposta a tarefa, os hábitos e disposições dos professores e alunos podem influenciar a manutenção do nível de exigência cognitiva da tarefa.

Smith e Stein (1998) indicam como fatores que estão associados à manutenção do nível de exigência elevado, (i) o apoio ao pensamento e raciocínio do aluno, (ii) o apelo à justificação e à explicação por meio de novas questões, comentários e feedbacks, (iii) a escolha de tarefas de acordo com o conhecimento prévio dos alunos, (iv) o estabelecer de ligações entre conceitos, (v) o professor ou alguns alunos revelarem desempenhos de nível elevado, (vi) a colocação de meios para os alunos se autoavaliarem, e por fim, (vii) dar tempo suficiente para que os alunos explorem a tarefa. No entanto, outros fatores contribuem para a redução da exigência cognitiva, como por exemplo: (i) as tarefas apresentarem sempre o mesmo tipo de problemas, (ii) o professor destacar mais um significado, conceito ou compreensão de modo a indicar qual a resposta correta, (iii) não ser bem gerido o tempo dado para a resolução da tarefa, sendo insuficiente ou em demasia levando os alunos a distraírem-se, (iv) a existência de problemas de gestão de sala de aula, (v) apresentar uma tarefa inadequada ao grupo de alunos ou, ainda, o professor não responsabilizar os alunos pelos resultados ou processos de nível elevado aceitando explicações incorretas ou dando a falsa impressão de que o seu trabalho não é tido em conta para a avaliação (Smith & Stein, 1998).

Ellis, Özgür e Reiten (2019) citam vários autores que reconhecem a importância da intervenção do professor na implementação das tarefas e em como esta intervenção influencia o nível de exigência da mesma. Práticas que validem ideias importantes presentes nas respostas dos alunos, em vez de métodos pré-determinados, e que tenham subjacente um apoio à participação dos alunos, constituem exemplos destas práticas (Wood, 1994,1998 e Staples, 2007, citados por Ellis, Özgür & Reiten, 2019). Também Lampert et al. (2013) e Frank et al. (2009) citados pelos mesmos autores, analisaram o modo como os professores podem apoiar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos seus alunos, concluindo que é fundamental o professor interpretar as ideias apresentadas pelo aluno e ajudá-lo a desenvolver as suas explicações. Wood (1998), citado por Ellis, Özgür e Reiten (2019), conclui que os alunos a quem foi permitido explorar, raciocinar e partilhar as suas ideias são alunos que desenvolvem uma maior compreensão sobre a matemática e assim conseguem um maior desenvolvimento do raciocínio matemático.

Ellis, Özgür e Reiten (2019) referem que o grupo TMSSR (*Teacher Moves For Supporting Student Reasoning*) organizam as ações dos professores em quatro grupos dependendo da sua função na promoção do raciocínio matemático. Esses quatros grupos são provocar/questionar, responder, facilitar e expandir/ampliar.

No que diz respeito ao primeiro grupo, os professores podem provocar os alunos a apresentar uma resposta direta para uma tarefa, que apresentem ideias sobre a resolução de uma tarefa ou que apresentem conceitos relevantes para essa tarefa. No entanto, é esta última a que melhor potencia o raciocínio dos alunos. Provocar permite ao professor identificar, clarificar e compreender as ideias e argumentos dos alunos e assim perceber quais os seus conhecimentos e aprendizagens. Ao se envolver na discussão coletiva levantando questões, o professor avalia o pensamento do aluno naquele momento e assim gera factos básicos ou estratégias para a resolução. Nesta fase, o professor pode também estimular a compreensão de uma nova ideia, perceber o grau em que os conceitos dos alunos estão ligados a princípios matemáticos mais complexos e estimular a capacidade dos alunos para explicarem a sua ideia.

No que se refere ao segundo grupo, os autores indicam que o professor ao intervir na fase de exploração da tarefa pode por um lado validar as respostas destes, retificar raciocínios ou soluções incorretas ou por outro lado, pode encorajá-los a que sejam os próprios a fazerem-no.

Em relação ao terceiro grupo, Ellis, Özgür e Reiten, (2019) defendem que os professores também podem ajudar os alunos orientando-os na construção do seu pensamento, dando-lhes mais informações e/ou explicações ou então motivando-os a desenvolver soluções diferentes. Estas ações facilitadoras ajudam o aluno a desenvolver o raciocínio matemático, incentiva-os a elaborar conjeturas e identificar padrões de modo, não só a comparar ou classificar, como também a sistematizar as suas ideias e a introduzir conceitos e ideias matemáticas importantes. Segundo o grupo TMSSR, é importante ter atenção a ações que se limitam a guiar os alunos, como por exemplo o Topaze Effect, que consiste na divisão das tarefas em partes menores, criando mais questões, afunilando assim a tarefa, já que este tipo de ação não promove o raciocínio matemático. No entanto, pode ser uma oportunidade para ajudar o aluno a ter sucesso posteriormente em tarefas de níveis de exigência elevados.

O último grupo consiste em ações que permitam ampliar o raciocínio dos alunos como generalizar as estratégias e ideias dos mesmos e desenvolver a suas justificações matematicamente apropriadas.

Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020) divide as ações que um professor deve pôr em prática para desenvolver o raciocínio dos alunos nos três momentos de exploração da tarefa - lançamento da tarefa, durante o trabalho autónomo e discussão coletiva, tal como mostra a tabela 3.

Ações do professor durante a realização da tarefa		
No lançamento da tarefa	**Durante o trabalho autónomo**	**Na discussão coletiva**
• Assegurar que todos os alunos compreendem os termos matemáticos do enunciado; • Assegurar que todos os alunos compreendem o contexto; • Desenvolver uma linguagem comum para descrever os aspetos essenciais da tarefa; • Destacar processos de raciocínio que podem estar envolvidos na tarefa, como conjeturar, generalizar e justificar; • Promover o envolvimento dos alunos na realização da tarefa sem diminuir o seu grau de desafio.	• Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o seu grau de desafio; • Para os alunos com dificuldades em formular ou concretizar uma estratégia de resolução, dar sugestões ou colocar questões facilitadoras que os ajudem a chegar por si próprios a uma estratégia; • Para os alunos que rapidamente resolvem a tarefa, propor extensões, envolvendo a exploração de novas questões, possíveis conjeturas e generalizações ou a formulação de justificações alternativas.	• Encorajar a partilha de ideias; • Explorar desacordos entre alunos, levando-os a argumentar as suas posições; • Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique; • Solicitar a explicação do "porquê", a apresentação de justificações de respostas ou estratégias de resolução e a formulação de justificações alternativas; • Solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, destacando o que as valida; • Promover a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados; • Propor demonstrações sempre que pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos; • Desafiar os alunos a formular novas questões e estabelecer novas conjeturas e generalizações.

Figura 2 - Parte da tabela "Tarefas e ações do professor para promover o raciocínio" de Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020, p. 11).

No momento do lançamento da tarefa, o professor introduz a tarefa aos alunos, as ferramentas que estão disponíveis para serem usadas e trabalhadas pelos mesmos e o que é esperado pelo professor que os alunos produzam (Stein et al., 2008). É essencial que o professor assegure que todos os alunos compreendem os termos matemáticos usados no enunciado, que compreendem o seu contexto e que entendem a linguagem utilizada na descrição da tarefa. Ainda nesta fase, também é importante o professor destacar processos de raciocínio que podem estar envolvidos na tarefa, como a generalização, a justificação e o conjeturar, assim como, procurar que todos os alunos se envolvam na resolução da tarefa sem diminuir a dificuldade do desafio (Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020).

No momento do trabalho autónomo, os alunos trabalham na tarefa que lhes foi proposta, algumas vezes discutindo em pares ou em pequenos grupos. Para além de resolverem a tarefa, preparam a partilha das suas resoluções que farão para toda a turma (Stein et al., 2008). É fundamental o professor procurar acompanhar os alunos sem que lhes dê informações que reduzam o grau do desafio da tarefa (Lannin, Ellis & Elliot, 2011). Se os alunos apresentarem dificuldades na formulação ou na concretização de uma estratégia de resolução, é importante que o professor procure dar sugestões ou colocar questões facilitadoras que ajudem esses alunos a conseguir chegar a uma estratégia. Para os alunos que apresentam facilidade na resolução da tarefa, é importante que o professor estimule o seu raciocínio, colocando questões de modo a alcançar outras conjeturas, possíveis generalizações e justificações (Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020; NCTM, 2017). Se pelo contrário, é o professor que se apropria do pensamento que era suposto ser dos seus alunos, então apenas os deixa praticar um procedimento previamente definido afastando destes a hipótese de desenvolverem o seu próprio raciocínio, de procurarem estratégias de resolução diferentes e assim enredar-se na descoberta de uma solução com um nível cognitivo superior (NCTM, 2017).

Como já foi referido anteriormente, o trabalho em grupo revela ser importante no desenvolvimento do raciocínio matemático por permitir que os alunos confrontem e discutam as suas ideias com os seus pares, partilhando assim as suas aprendizagens e descobertas. No entanto, como defende Pournara (2005), citado por Brodie (2010), não é suficiente que os alunos trabalhem em grupos sem a intermediação do professor para que estes consigam desenvolver o seu raciocínio. Até as discussões promovidas em sala de aula com toda a turma exigem que o professor intervenha, o que poderá ser uma tarefa difícil para o mesmo, pois poderá tornar-se complicado dar resposta às ideias e pensamentos dos alunos (Heaton, 2000, citado por Brodie, 2010).

No momento de discussão coletiva, o professor adota a postura de mediador, encorajando a partilha de ideias, enquanto explora a discussão entre os alunos com opiniões diferentes levando-os a argumentar essas posições e assim ajuda-os a alargar o raciocínio matemático (Boavida et al., 2008; Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2016; NCTM, 2007). Com as comparações de resoluções e questionamentos entre alunos, estes "poderão começar a aprender a descrever relações encontradas em vários exemplos, e a desenvolver e defender argumentos sobre as razões pelas quais aquelas relações podem ser generalizadas e a que casos se podem aplicar" (Maher & Martino, 1996, citado por NCTM, 2007, p. 222).

Ponte (2005) defende que os alunos após apresentarem as suas ideias, conclusões e justificações, são interpelados pelos colegas e também pelo professor. Durante este momento, o professor empenha-se em esclarecer conceitos e procedimentos, procura que se equacione o valor dos argumentos apresentados e que sejam estabelecidas as devidas conexões dentro e fora da matemática. Surge durante a discussão coletiva uma oportunidade essencial para o entendimento de significados e consequentemente para a construção de novos conhecimentos. Dada a intervenção de alunos e professor que argumentam entre si, a discussão constitui-se como um aspeto fundamental da comunicação matemática. Entre perguntas e respostas, afirmações e questões, a discussão tem sempre um objetivo, quer seja definir a estratégia a seguir para a resolução da tarefa, quer seja avaliar o seu resultado ou mesmo analisar o decorrer da tarefa.

O papel que o professor assume no momento da discussão coletiva é, assim, de um moderador que vai orientando a continuidade das intervenções. Wood e Turner-Vorbeck (2001), citado por NCTM (2017), alertam mesmo para a possibilidade de facilmente uma discussão passar a ser apenas apresentações ou exposições mais elaboradas. Ponte (2005) realça que são, no entanto, os alunos que possuem uma grande abertura para intervir e influenciam o sentido dos acontecimentos, quer seja de uma forma individual quer seja de uma forma coletiva. Isto não acontece no ensino expositivo no qual o professor assume o papel principal. O mesmo autor defende que a discussão coletiva é uma aprendizagem que tanto o professor como os alunos devem desenvolver.

Segundo Brodie (2010), as contribuições dos alunos que se apresentam incorretas ou parciais são cruciais para serem aproveitadas pelo professor para promover a discussão entre os alunos de modo a desconstruí-las, complementálas ou clarificá-las. Heaton (2000), citado por Brodie (2010), defende que apenas dizer ao aluno que está errado não altera necessariamente o modo como ele pensa, é importante que se explore a resposta certa ou errada com o aluno, questionando como ele chegou a essa conclusão. Mesmo que a resposta esteja incorreta, pedir ao aluno que explique como chegou àquele resultado ajuda-o a aprofundar o seu próprio pensamento assim como ajuda os restantes alunos. A mesma autora, citando Yackel e Cobb (1996), refere que esta ação do professor também reforça a ideia de que em matemática todas as respostas devem ser justificadas.

Outra ação do professor importante no desenvolvimento do raciocínio matemático é pedir sempre aos alunos que justifiquem as suas respostas ou estratégias de resolução e pedir-lhes que identifiquem o que as valida ou as torna inválidas (Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020). Brodie (2010) defende que o professor através de perguntas e sugestões, pode apoiar o pensamento dos alunos, ajudando a mudar de perspetiva, levando-os a comparar, verificar, explicar e justificar as suas conjeturas. Esta ação pode ser difícil para o professor pois os alunos nem sempre respondem da maneira como este espera, ou os alunos não estão habituados a fazê-lo e remetem-se ao silêncio pensando que cometeram um erro (Ball, 2003, citado por Brodie, 2010).

Também é importante que o professor promova a reflexão sobre os processos de raciocínio que utilizaram e sugerir aos alunos, quando for necessário e de acordo com os conhecimentos deles, que provem a sua conjetura ao mesmo tempo que lhes lança o desafio de formular novas questões e de estabelecerem novas generalizações (Boavida et al., 2008; Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2016; Mata-Pereira, Ponte & Quaresma, 2020).

A importância da discussão coletiva é salientada pelo NCTM (2017) quando assumem que a envolvência dos alunos no discurso matemático, quer seja com a troca de ideias através da discussão na sala de aula, quer seja através de outras formas de comunicação verbal, visual e escrita, promove a aprendizagem matemática de toda a turma. Estes momentos criam condições para que os alunos partilhem ideias, possam esclarecer dúvidas, criar argumentos claros em torno de como e qual a razão para o funcionamento das coisas. Também fomentam o desenvolvimento da linguagem usada para explicarem as ideias matemáticas e para perceberem como podem ver as coisas de outro ponto de vista.

Em geral, o professor se formular questões limitadas e pouco desafiantes não contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos (Bauersfeld, 1988; Edwards & Mercer, 1987; Mehan, 1979; Nystrand & Gamoran, 1991, citados por Brodie, 2010). Pelo contrário, ao questionar os alunos do porquê desta ou daquela afirmação está a ajudar a estimular o raciocínio e promove que os alunos verbalizem as suas conclusões usando termos mais precisos, assim como, se esforcem por perceber as argumentações dos outros. Esta ação também vai permitir que o professor decida sobre que conteúdos matemáticos deve abordar e introduzir outros que os alunos ainda não tenham apreendido e assim adequar a sua prática às necessidades dos alunos. Cabe ao professor estimular os alunos para que estes sejam capazes de formular conjeturas e colocarem questões de modo a construírem o seu conhecimento a partir do que já aprenderam. O professor deve "lançar" questões que sirvam de apoio ao aluno e ao seu raciocínio, assim como, introduzir a linguagem correta que estes ainda não tenham adquirido e relacionado com os conceitos matemáticos (NCTM, 2007).

Walsh e Sattes (2005), citado por NCTM (2017), referem que não é só o tipo de perguntas que o professor faz que é importante, mas também o padrão das perguntas colocadas no momento de pergunta/resposta entre o professor e o aluno. Mehan (1979), citado por NCTM (2017) e Brodie (2010), considera que no padrão IRA (Iniciar-Responder-Avaliar) o professor começa por colocar uma questão que lhe dá hipótese de recolher alguma informação, mas tendo já pensada uma dada resposta. Após a resposta do aluno, o professor avalia essa resposta. O NCTM (2017) alerta para o curto período de tempo que é dado ao aluno para dar a sua resposta e ainda menos para que justifiquem a mesma. Este padrão de questionamento dá pouca hipótese aos alunos para pensar, não cria oportunidade de o professor perceber se os alunos estão a compreender a matemática envolvida ou como o estão a tentar fazer e não dá espaço a contribuições espontâneas por parte dos mesmos. O NCTM (2017) faz também referência a outros padrões de questionamento que pretendem mais do que perguntas diretas e que apelam simplesmente à memória. Dois destes são o afunilamento, em que é utilizado uma série de perguntas que conduz os alunos para determinada conclusão colocando de parte as respostas que não estão certas. Outro desses padrões é o da focagem em que o professor tem em atenção o pensamento dos alunos, pede que eles apresentem com clareza o seu raciocínio e que reflitam sobre os seus pensamentos e os dos outros alunos. O professor que utiliza este padrão de questionamento está recetivo a que a tarefa que propôs tenha mais do que uma estratégia de investigação, prepara questões e os pontos principais que deve destacar baseando-se nos conhecimentos dos alunos.

Kilpatrick, Swafford e Findell (2001), citados por Lannin, Ellis & Elliot (2011) e Brodie (2010), estabelecem normas a implementar na sala de aula para promover o raciocínio matemático. Uma delas é desenvolver o hábito em sala de aula de que a correção matemática de uma resposta tenha por base a validade da justificação matemática que é dada, ao contrário de ter por base alguma autoridade externa. Outra é incentivar que os alunos se sintam à vontade em partilhar com os outros os seus argumentos e justificações e responsabilizar todos os alunos pela compreensão. Por fim, incentivar os alunos a assumir os seus argumentos e o seu raciocínio estabelecendo normas para conjeturar, generalizar e justificar de modo que todos se sintam livres na sua partilha. Brodie (2010) também acrescenta que deve ser dada aos alunos a oportunidade de colocar questões sobre o raciocínio do professor e não apenas os dos seus colegas.

Stein et al. (2008) criaram um modelo de cinco práticas de forma que professores que não estejam familiarizados com discussões matemáticas possam precaver certos aspetos e estar bem preparados para expandir o conhecimento matemático da turma como um todo. A primeira prática consiste em antecipar as respostas matemáticas dos alunos, sendo que esta vai para além de avaliar se a tarefa é do nível de exigência adequada aos alunos ou se é do interesse dos mesmos, ou ainda se estes irão acertar na resposta correta. Significa criar expectativas sobre como os alunos irão interpretar a tarefa, que estratégias poderão utilizar (corretas e incorretas) e como essas estratégias se relacionam com os objetivos matemáticos da tarefa (Lampert, 2001, Schoenfeld, 1998, Yoshida,1999, citados por Stein et al., 2008). Esta prática requer que o professor resolva as tarefas matemáticas antecipadamente e que, ao contrário dos alunos que só têm de usar uma estratégia, o professor registe as estratégias diversificadas possíveis, sendo que desta forma também poderá identificar aspetos que os alunos irão ter dificuldades em interpretar.

A segunda prática projetada por Stein et al. (2008) consiste na monitorização atenta das respostas dos alunos aquando da fase de exploração autónoma da tarefa, circulando pelos alunos enquanto estes trabalham. O objetivo da monitorização é identificar possíveis estratégias ou representações usadas pelos alunos que possam ser importantes serem partilhadas com toda a turma no momento de discussão coletiva (Brendehur & Frykholm, 2000, Lampert, 2001 citados por Stein et al., 2008). Algumas estratégias que podem ajudar o trabalho do professor é este tomar notas enquanto monitoriza, assistir às partilhas entre os alunos sobre os seus raciocínios ou até questionar os alunos.

A terceira prática consiste na seleção intencional das resoluções dos alunos para partilhar ao resto da turma no momento de discussão coletiva, pedindo a um específico grupo para apresentar o seu trabalho ou pedir voluntários, permitindo os alunos fazerem contribuições espontâneas, sendo que o professor escolhe aquele que à partida sabe que a sua ideia é relevante para a turma.

Sequenciar as respostas dos alunos é a quarta prática proposta por Stein et al. (2008). O professor ao ter escolhido quais as estratégias dos alunos que serão apresentadas também poderá escolher por que ordem estas são partilhadas ao resto da turma (Schoenfeld, 1998 e West, 1994 citados por Stein et al., 2008). Com esta escolha os professores poderão criar mais oportunidades para que os objetivos matemáticos nas discussões sejam atingidos. O professor poderá querer que a estratégia mais utilizada pelos alunos seja apresentada em primeiro lugar de forma a validar o trabalho dos alunos e a que a discussão fique acessível à maioria destes (West, 1994, citado por Stein et al., 2008). Com isto, poderá ser mais fácil os alunos perceberem posteriormente estratégias mais complexas e assimilarem melhor o problema. Outras formas de sequenciar poderá ser a apresentação primeiro de uma estratégia básica baseada numa má interpretação e clarificá-la de forma a poderem trabalhar em outras estratégias sem desentendimentos. Pode também começar por estratégias reveladoras de um nível de aprendizagem mais baixo e evoluir para estratégias que traduzem um nível de aprendizagem mais elevado.

A última prática é referente ao professor fazer/ajudar a fazer a conexão entre as resoluções dos alunos e as ideias matemáticas a elas subjacentes. Com isto, os alunos são ajudados a fazer julgamentos sobre as diferentes abordagens que se podem fazer a um problema e aplicarem-nas em outros problemas tornando-se mais eficiente na sua resolução. Poderá, também, ajudar a compreender como uma ideia matemática pode estar presente em várias estratégias.

Assim, as cinco práticas que os professores devem ter em conta para uma utilização efetiva das intervenções dos alunos no momento de discussão coletiva começam ainda antes da aula, com a antecipação das respostas que os alunos podem dar. Depois, já na sala de aula, segue-se a analise do trabalho dos alunos nas tarefas, a escolha das estratégias que vão ser apresentadas à turma e a sua ordenação. Por fim, é importante que o professor estabeleça conexões entre as diferentes estratégias de modo a relacioná-las com ideias chave da matemática.

Capítulo III - METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Este capítulo encontra-se dividido em quatro secções. Na primeira secção apresento e justifico as opções metodológicas subjacentes ao desenvolvimento do presente estudo. De seguida, na segunda e terceira secção, são descritos os procedimentos e dispositivos de recolha e de tratamento de dados, respetivamente.

3.1. Opções metodológicas

A investigação proposta enquadra-se numa investigação qualitativa pois, segundo Coutinho (2016) consiste numa permanente observação, naturalista e participante, sempre acompanhada pela reflexão contínua sobre a proposta de trabalho desenvolvida.

> A abordagem interpretativa e qualitativa das questões sociais e educativas procura penetrar no mundo pessoal dos sujeitos, "(...) para saber como interpretam as diversas situações e que significado tem para eles" (Latorre et al., 1996, p. 42), tentando "...compreender o mundo complexo do vivido desde o ponto de vista de quem vive" (Mertens, 1998, p. 11). Se a ação humana é intencional, pensam, há que interpretar e compreender os seus significados num dado contexto social. (Coutinho, 2016)

Para que uma investigação seja considerada como qualitativa: (i) deve ser descritiva, (ii) tem como fonte direta dos dados o ambiente natural, (iii) foca-se mais no processo do que nos resultados, (iv) tem subjacente uma análise dos dados realizada de forma indutiva e (v) o significado adquire uma importância vital (Bogdan & Biklen, 1994).

Este estudo ao ter como intuito compreender os desafios do professor no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, implica claramente a utilização de uma abordagem qualitativa. As suas características estarão presentes no meu estudo visto que irei utilizar todas as informações que recolher enquanto professora e investigadora, quer seja através da utilização de notas de campo, transcrição de diálogos que possam ocorrer entre os alunos e entre os alunos e eu própria enquanto professora estagiária visando uma descrição detalhada dos momentos de discussão coletiva. A segunda característica referida acima também está presente, pois todas as informações serão recolhidas em ambiente de sala de aula, que irei depois tratar, focando-me nos desafios em conduzir discussões coletivas. Não descartando nenhuma informação, mas pelo contrário tendo todas as informações em consideração poderei analisar de forma indutiva as mesmas e assim identificar e compreender todos os desafios com que me deparo ao preparar e dinamizar as discussões coletivas. Por fim, e de acordo com Bogdan e Biklen (1994) o objetivo dos investigadores qualitativos é perceber aquilo que os participantes experimentam, o modo como interpretam as experiências e como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem. Neste estudo será de grande importância analisar os significados que eu enquanto professora estagiária atribuirei às minhas ações e, assim, compreender melhor a minha própria prática.

A investigação qualitativa integra várias abordagens, sendo uma delas a investigação sobre a prática. Esta tem como característica fundamental a realização da investigação ao mesmo tempo que decorre a prática profissional (Ponte, 2002).

Ponte (2002) defende que a investigação sobre a prática profissional é decisiva para a identidade profissional dos professores, pois é através desta que lhe é permitido analisar e refletir sobre as suas práticas, o modo como atua em sala de aula e interage com os alunos, ou o modo como se comporta num determinado contexto de aprendizagem ou determinado tema em estudo. De acordo com o autor "A investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente" (p. 3).

O processo de reflexão é um dos aspetos mais importantes numa investigação sobre a prática. Para Oliveira e Serrazina (s.d.) a prática reflexiva é uma ferramenta que permite ao professor pôr em questão a sua prática de ensino permitindo que este melhore a mesma (p. 29). De acordo com as mesmas autoras, "O pensamento crítico ou reflexivo tem subjacente uma avaliação contínua de crenças, de princípios e de hipóteses face a um conjunto de dados e de possíveis interpretações desses dados" (p. 31).

Assim sendo, uma vez que a investigação sobre a prática "pode visar principalmente alterar algum aspeto da prática, uma vez que estabelecida a necessidade dessa mudança e, por outro lado, pode procurar compreender a natureza dos problemas que afetam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior, de uma estratégia de ação" (Ponte, 2002, p. 3), penso que será este o caso da minha investigação. Será através das minhas vivências e interpretação, análise e avaliação das mesmas em contexto de sala de aula que pretendo detetar os desafios com que se deparam os professores no desenvolvimento do raciocínio matemático.

3.2. Descrição dos dispositivos e dos procedimentos de recolha de dados

Com base nos objetivos inerentes à presente investigação, descrevo e justifico em seguida os dispositivos e procedimentos que me permitem recolher informações pertinentes. Estes incluem a observação participante, com recurso a gravações de áudio e vídeo, e a recolha documental.

3.2.1. Observação participante

De acordo com Afonso (2005), "A observação é uma técnica de recolha de dados particularmente útil e fidedigna, na medida em que a informação obtida não se encontra condicionada pelas opiniões e pontos de vista dos sujeitos, como acontece nas entrevistas e nos questionários" (p. 91). Assim, o procedimento de recolha de dados mais utilizado será a observação participante, que irá englobar uma componente participativa do investigador e não apenas a presença do mesmo enquanto elemento observador. Esta é a característica que difere esta técnica em relação às outras técnicas de recolha de dados pois permite uma análise global e intensiva do tema em estudo.

Afonso (2005) defende que no processo de observação existe a distinção entre a observação estruturada e a observação não estruturada, sendo que a observação que será realizada será a observação não estruturada, isto é a observação livre sem que exista à partida um elemento base de observação (p.92). De acordo com o mesmo autor,

> Os produtos de um dispositivo de observação não estruturada consistem em diversos tipos de textos que constituem o conjunto dos registos de observação. Em primeiro lugar são produzidas as notas de campo manuscritas ou gravadas em áudio durante a observação ou imediatamente a seguir. Em segundo lugar são

> redigidos os relatórios de campo constituídos por textos mais elaborados e reflexivos a partir das notas de campo. (Afonso, 2005, p. 93)

A utilização desta técnica ao longo de todo o período de estágio vai permitir que consiga detetar os meus desafios, enquanto professora, durante a prática com vista ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Com a produção de notas de campo manuscritas e gravações de áudio e vídeo, permitindo recordar aquilo que poderá não ter sido registado por lapso de memória, será possível a análise posterior mais rigorosa das dificuldades sentidas durante os momentos de discussão coletiva. Serão transcritos todos os momentos de discussão coletiva sendo estes os momentos fulcrais para discussão do trabalho. Assim, a observação participante constituirá um processo fundamental de recolha de informação na presente investigação.

3.2.2. Recolha documental

A recolha documental será mais uma técnica de recolha de dados a ser utilizada neste estudo. Os documentos escritos são classificados por Bogdan e Biklen (1997) como documentos pessoais ou oficiais. De acordo com Bardin (1977), citando Chaumier (1974), a análise documental é "uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob a forma diferente do original, a fim de facilitar num estado ulterior, a sua consulta e referenciação" (p. 45). A análise documental tem como fim modificar a informação que consta em determinado documento, tornando-a mais fácil de consultar. De acordo com o mesmo autor,

> O propósito a atingir é o armazenamento sob uma forma variável e a facilitação do acesso ao observador, de tal forma que este obtenha o máximo de informação (aspecto quantitativo), com o máximo de pertinência (aspecto qualitativo). A análise documental é, portanto, uma fase preliminar da constituição de um serviço de documentação ou de um banco de dados. (p.45)

Concretamente, neste estudo, a recolha documental inclui o projeto curricular de turma, o projeto educativo da escola/agrupamento, as planificações que efetuarei no decorrer do projeto e as produções escritas dos alunos resultantes da resolução das tarefas propostas do projeto de intervenção pedagógica (apresentadas no capítulo seguinte). Analisar estes documentos torna-se fundamental, dado que o objetivo do estudo é tirar conclusões sobre os desafios e ações que se destacam na condução de discussões coletivas enquanto professora.

3.3. Descrição do dispositivo e do procedimento de análise dos dados

Tendo em conta os dispositivos e procedimentos de recolha de dados escolhidos na secção anterior, descrevo e justifico em seguida o dispositivo e procedimento que me permitem analisar as informações recolhidas – a análise de conteúdo.

Apesar de neste projeto não haver a possibilidade de efetuar a análise dos dados, perspetivo o desenvolvimento deste processo em dois momentos. Um primeiro momento corresponderia ao momento de intervenção pedagógica em que à medida que vou implementando as tarefas em sala de aula vou refletindo sobre as minhas ações e as suas implicações no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Um segundo momento corresponderia à análise de todos os dados tendo em vista a redação do relatório de investigação.

Relativamente ao segundo momento, numa primeira fase iria organizar todos os documentos num dossiê por aula, nomeadamente as transcrições de cada uma, sobretudo o que é relativo ao momento de discussão coletiva, incluir também as produções dos alunos associadas à resolução da tarefa explorada nessa aula e as notas de campo produzidas por mim nessa aula. Numa segunda fase, iria identificar nas produções dos alunos os processos de raciocínio usados na resolução das tarefas relativamente à transcrição da aula, iria também identificar os processos de raciocínio evidenciados pelo discurso dos alunos e, para além disso, iria assinalar as minhas ações associadas ao uso dos processos de raciocínio usados pelos alunos. Utilizaria um código de cores tanto para os processos como para as ações. Ainda nesta fase, iria identificar nas minhas notas de campo os desafios diretamente relacionados com ações que visassem o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

Para analisar as minhas ações enquanto professora teria como referência o quadro de ações identificado na figura 2 - Parte da tabela "Tarefas e ações do professor para promover o raciocínio" de Mata-Pereira, Ponte e Quaresma (2020,

p. 11), do capitulo da revisão da literatura, em particular as que são respetivas à discussão coletiva. Esta fase corresponderia a uma análise de conteúdo dos documentos acima referidos.

A análise de conteúdo é uma técnica de tratamento de dados que pode ser utilizada de variadas formas tendo em atenção os diferentes conteúdos. De acordo com Bardin (1977) “A análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise de comunicação, visando obter através de procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens” (p. 42). Assim, nesta investigação, será utilizada a análise de conteúdo enquanto instrumento de exploração das minhas ações enquanto professora, analisando as transcrições das aulas e as notas de campo.

3.4. Participantes do estudo

O estudo está pensado para ser realizado, em contexto de intervenção, com uma turma do 3.º ano de escolaridade de uma escola do 1.º ciclo do Ensino Básico, do distrito de Setúbal. Eu, como investigadora, também farei parte deste estudo como participante, visto este incidir sobre as minhas ações enquanto professora e as dificuldades com que eu me irei deparar na condução das discussões coletivas.

A minha proposta para desenvolver esta investigação é a de propor quatro tarefas que visem o desenvolvimento do raciocínio matemático, tarefas essas que são “Chupa chupas”, seguida pela tarefa “Mais descobertas sobre os sólidos geométricos”, depois “Cartões com números” e por fim “Os Trabalhos de Catarina”. Estas tarefas serão apresentadas de uma forma mais pormenorizada no capítulo seguinte denominado por proposta de intervenção pedagógica.

Capítulo IV - PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Neste capítulo são apresentadas as tarefas matemáticas que escolhi de acordo com o modelo de apoio às planificações, seguindo os itens indicados para a planificação do trabalho a realizar na sala de aula, no âmbito da Unidade Curricular Estágio cujo documento se encontra no anexo A.

Como foi referido no capítulo anterior irei apresentar a planificação de quatro tarefas que foram escolhidas ou adaptadas para que promovessem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. A primeira tarefa - *Chupa Chupas,* foi selecionada a partir dos materiais utilizados pela Equipa do projeto *Reason* como também a segunda tarefa - *Mais Descobertas sobre sólidos Geométricos*. A terceira tarefa - *Cartões com números*, também está incluída nos materiais do Projeto *Reason*, no entanto, ao contrário das outras tarefas já mencionadas, foi adaptada, não incidindo na adição e subtração, mas sim na multiplicação e divisão. A quarta tarefa - Os *trabalhos da Catarina,* foi adaptada da brochura *A Experiência Matemática no Ensino Básico* (Boavida et al., 2008).

4.1. Designação da Tarefa: *Chupa-Chupas*

Objetivos

- ➔ Compreender os conceitos de múltiplo e de divisor
- ➔ Relacionar a divisão por partilha com o conceito de múltiplo.
- ➔ Desenvolver processos de raciocínio matemático: exemplificação, justificação e generalização.

Conteúdos de ensino/aprendizagem (conceitos, procedimentos, atitudes, valores, …)

- Múltiplo e divisor.
- Divisão por partilha.

Recursos

- Enunciado da tarefa *Chupa-chupas* (anexo B):

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

Apresentação da tarefa

No lançamento da tarefa, distribuirei o respetivo enunciado pelos alunos e pedirei para que estes o leiam em silêncio. De seguida, de forma a perceber se os alunos perceberam todos os aspetos do enunciado, vou pedir a dois ou três alunos que expliquem por palavras suas a interpretação que fizeram do enunciado. É importante garantir que os alunos compreendem a situação proposta, sendo que um aspeto chave para essa compreensão é perceber que após a distribuição dos chupa-chupas por 2 alunos, se reinicia a sua distribuição por 5, com o mesmo total de chupa-chupas. Caso perceba que pode ser útil, juntamente com os alunos, simularei a situação recorrendo a objetos que representem chupa-chupas.

Exploração da tarefa

- **Organização dos alunos**

A tarefa será explorada a pares, uma vez que permite a partilha da procura de várias soluções e justificações que a tarefa suscita.

- **Propostas de trabalho e atividade esperada**

No momento de trabalho autónomo é esperado que os alunos analisem a pares a situação proposta. A situação consiste numa partilha de chupa-chupas, primeiro por duas crianças na qual restou um chupa-chupa e de seguida, por mais três amigos que também queriam chupa-chupas. O aparecimento de mais três amigos requer que se volte a juntar todos os chupa-chupas já distribuídos e o que sobrou e que se redistribua pelas cinco crianças, sobrando assim dois chupa-chupas. A questão da situação proposta é quantos chupa-chupas estariam no saco antes da distribuição e pede para justificar o pensamento que os alunos tiveram até chegar a uma solução.

É esperado que os alunos percebam o ponto de partida do problema, que a distribuição foi feita duas vezes e, que a partir daí, descubram que o número total de chupa-chupas terá de ser um número que dividido por 2 resta 1 e que dividido por 5 resta 2, em simultâneo, ou seja um número ímpar e múltiplo de 5+2 (que o valor das unidades seja 7). Também é esperado que os pares de alunos saibam justificar o raciocínio que os levou à sua resposta.

Esta tarefa permite que os alunos representem de variadas formas, podendo ser representações icónicas (imagens, desenhos, esquemas) ou simbólicas (símbolos, linguagem, vocabulário matemático) e permite também uma variedade de soluções, uma vez que o resultado tanto pode ser 7 como 17 ou 27 ou outros números ímpares múltiplos de 5+2 que estará correto.

Neste momento circularei pelos grupos apoiando-os e questionando-os. Numa primeira fase, esse apoio consiste, sobretudo, em encorajar a exploração da tarefa sem avançar com sugestões concretas e depois consistirá no apoio da descoberta de novas soluções (para além do 7), através da colocação de questões.

Algumas das respostas dos alunos (estratégias usadas) poderão ser:

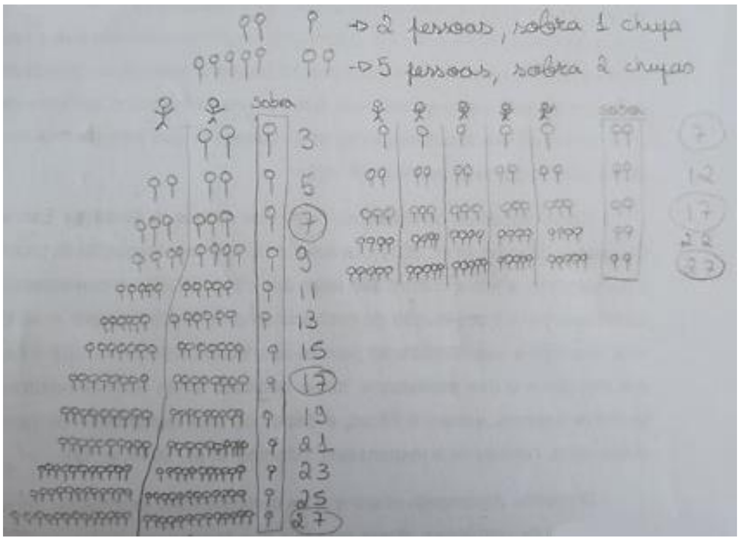


Figura 3 - Tarefa *Chupa-chupas*: hipótese de resposta 1.

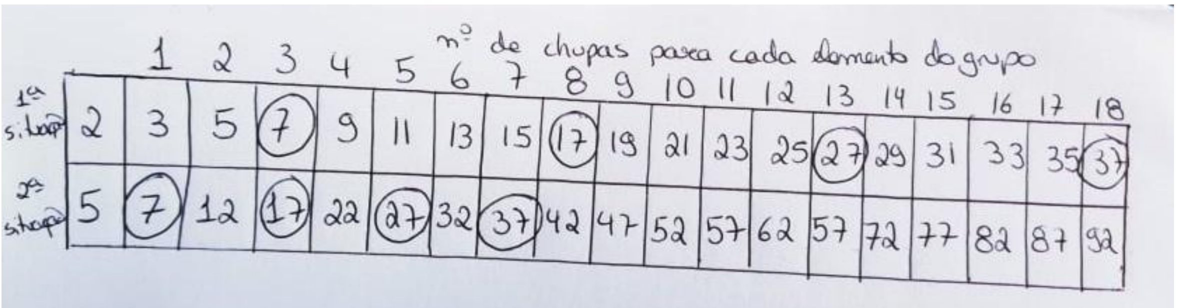


Figura 4 - Tarefa *Chupa-chupas*: hipótese de resposta 2.

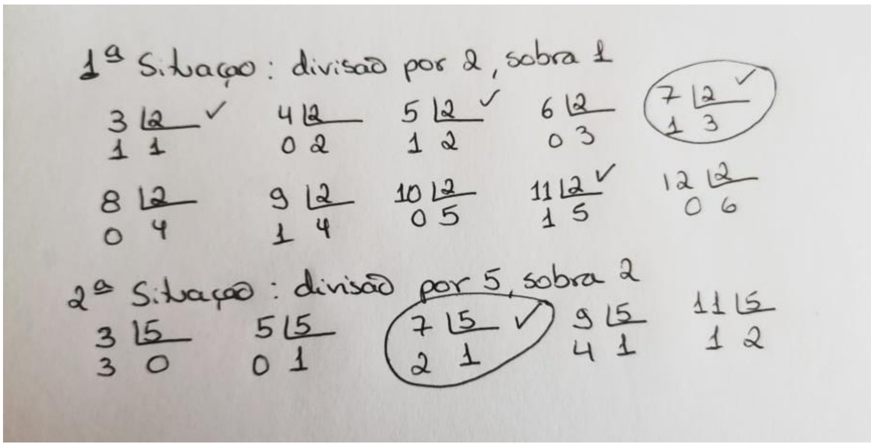


Figura 5 - Tarefa *Chupa-chupas*: hipótese de resposta 3.

- **Dificuldades previstas**

Os alunos podem ter dificuldade em perceber que a tarefa proposta tem duas situações que têm de ter em conta - a distribuição por duas pessoas em que sobra 1 chupa-chupa e a distribuição por 5 pessoas em que sobram 2 chupa-chupas, aspetos que podem tender a contemplar isoladamente.

Quando incentivados a generalizar poderão ter dificuldade em justificar essa situação, dizendo que o número tem nas suas unidades um sete.

- **Questões a colocar para apoiar as aprendizagens**

Durante a discussão colocarei questões tipo “Porquê?” ou “Como pensaste?”. Neste caso concreto, antecipo as seguintes questões:

Como é que sabes que nem todos os números ímpares são soluções da tarefa?

O que queres dizer com darem todos os ímpares?

Consegues provar que todos os números terminados em 7 são soluções do problema?

Discussão e sistematização

Pedirei a alguns pares que apresentem os seus resultados e estratégias de resolução, sendo que começam os pares que as suas contribuições estejam incorretas ou incompletas. Desta maneira, poderei promover a discussão, desconstrução e clarificação da tarefa. Para esta escolha, durante o momento de trabalho autónomo, circularei pela sala e identificarei as representações e estratégias mais interessantes para discussão em sala de aula, ou seja, aquelas que possam contribuir para a clarificação de procedimentos e ideias ou que contribuam para a discussão entre os alunos para que estes fortaleçam a sua justificação. De entre as estratégias que antecipo, se hipoteticamente forem as usadas pelos alunos, depois de apresentada uma estratégia incorreta, seguir-se-á a apresentação das hipóteses 1 e 3 e por fim a hipótese 2, de forma a poder-se discutir a diferença entre estas, uma vez que as hipóteses 1 e 3 são menos espectáveis, dado que que se inventariam todos os casos de forma exaustiva.

4.2. Designação da Tarefa: *Mais Descobertas sobre Sólidos Geométricos*

Objetivos

- ➔ Desenvolver os conceitos de prisma e de pirâmide, compreendendo que se trata de duas classes de sólidos cujos elementos (arestas, faces e vértices) se organizam de modos específicos;
- ➔ Desenvolver processos de raciocínio matemático: justificação e generalização.

Conteúdos de ensino/aprendizagem (conceitos, procedimentos, atitudes, valores, …)

- Prismas.
- Pirâmides.

Recursos

- Enunciado da Tarefa *Mais Descobertas sobre Sólidos Geométricos* (anexo C).

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

Apresentação da tarefa

No lançamento da tarefa, distribuirei o enunciado da tarefa pelos alunos e leio-a em conjunto com os alunos. No fim da leitura, de forma a entender se todos perceberam todos os aspetos do enunciado, tentarei perceber se existem dúvidas ou incompreensões questionando os alunos e pedirei a 2 ou 3 alunos que expliquem por palavras suas a interpretação que fizeram do enunciado.

Exploração da tarefa

- **Organização dos alunos**

A tarefa será explorada por pares para que assim os alunos possam confrontar as suas ideias.

- **Propostas de trabalho e atividade esperada**

No momento de trabalho autónomo é esperado que os alunos resolvam a tarefa que consiste num conjunto de seis questões sobre sólidos geométricos.

A primeira questão pede que os alunos descrevam o sólido geométrico representado na imagem. Este sólido é um prisma triangular e é desejado que os alunos o descrevam como um prisma com duas bases triangulares e três faces quadrangulares e que contém seis vértices e nove arestas.

A segunda questão pretende que os alunos respondam algumas questões após analisarem a imagem que representa um pentágono, feito de pauzinhos e plasticina, que servirá de base para um prisma que a Sara e o Pedro estão a construir. Primeiro os alunos terão de responder quantos pauzinhos faltam para a conclusão do prisma, e para isto terão de contar quantos pauzinhos foram usados para a base e quantos vértices a base tem e adicionarem esses números que resultará em 10 pauzinhos que faltam (5+5=10). Em segundo lugar terão de calcular quantos pauzinhos a Sara e o Pedro precisam ao todo para a construção do prisma e para isso ao número que calcularam no passo anterior tem de somar cinco pauzinhos que representam a base já construída na imagem. E no último passo desta questão, os alunos terão de saber quantas bolinhas precisam ao todo, o que sabem ao multiplicar por dois o número das bolinhas da imagem (5x2=10). Nesta questão, os alunos poderão responder erradamente se confundirem um prisma com uma pirâmide.

Na terceira questão é esperado que os alunos descubram qual a figura da base de um prisma com 30 arestas e justifiquem a sua resposta. Para que estes respondam terão de dividir 30 por três (número de arestas das duas bases mais as arestas que ligam ambas) o que resultará em 10 arestas que formarão a base.

Na quarta questão é apresentado ao aluno um diálogo entre a Sara e o Pedro, em que a Sara quer construir um prisma com 25 vértices, mas o Pedro não concorda pois acha que com 25 vértices só se consegue construir uma pirâmide e não um prisma. É questionado ao aluno qual dos dois tem razão e pedido para justificar. É esperado que o aluno divida os 25 vértices em dois e perceba que quem tem razão é o Pedro. Um prisma não pode ter o número de total vértices ímpar pois cada aresta está ligada a dois vértices, ao contrário das pirâmides que as arestas que advém de cada vértice da base são ligadas a apenas um vértice do topo.

Na quinta pergunta o aluno é desafiado a escrever uma adivinha sobre um prisma ou pirâmide para depois ser apresentado em grande grupo e ser resolvido por todos.

Por último, é pedido ao aluno que complete o quadro apresentado com as descobertas realizadas ao longo da restante tarefa sobre os prismas e as pirâmides em relação aos seus vértices, arestas, faces e bases, como por exemplo: o número de vértices de um prisma é sempre um número par, enquanto nas pirâmides é sempre um número ímpar; o número de faces de um prisma é sempre igual ao número dos vértices de uma das suas bases mais 2.

Durante a exploração desta tarefa, caso seja necessário, colocarei à disposição uns palitos e pequenos pedaços de plasticina para construírem prismas ou formas que os ajudem na sua resolução. Circularei por entre os alunos com o objetivo de responder a dúvidas que, entretanto, surjam, apoiar o raciocínio dos mesmos através de perguntas que ajudem o raciocínio destes sem diminuir o nível de exigência da tarefa.

- **Dificuldades previstas**

Os alunos poderão ter dificuldade em:

- Na 1ª questão, enunciar todas as características do sólido apresentado, desde as suas bases, vértices, arestas e faces ao seu nome.

- Na segunda questão, chegar ao resultado sem usar uma estratégia de representação desde o desenho ao uso de palitos e pedaços de plasticina.

- Na terceira questão, perceber a relação entre as arestas e os vértices de um prisma, tendo o aluno de chegar à resposta por tentativa e erro.

- Na quarta questão, perceber que o número de vértices de um prisma é sempre par enquanto o número de vértices de uma pirâmide é sempre ímpar.

- Na quinta questão, a dificuldade pode estar em formular a adivinha a partir do sólido que escolheu.

- Na sexta questão, uma vez não percebida as relações nas questões anteriores, irá interferir quando completarem o quadro.

- **Questões a colocar para apoiar as aprendizagens**

Durante a discussão colocarei questões tipo "Porquê?" ou "Como pensaste?". Neste caso concreto, antecipo as seguintes questões:

1ª Questão:

- Como se chama este prisma? Quantos vértices e arestas tem este prisma? Qual é o polígono que está nas suas bases? E nas restantes faces?

2ª Questão:

- Como podemos formar um prisma que tenha como base um pentágono?

3ª Questão:

- Que relação existe entre o número de arestas de cada uma das bases e o número das arestas que ligam as bases? Como fizeram para descobrir o número de arestas da base de um prisma com 30 pauzinhos?

4ª Questão:

- Qual a relação que existe entre o número de arestas e de vértices de um prisma? E de uma pirâmide? Porque é que o número de vértices de um prisma é sempre par? E o que podemos dizer no caso das pirâmides?

5ª Questão:

- Que características tem o prisma que escolheste? Quantas arestas e vértices tem? Quais os polígonos das suas bases e faces?

6ª Questão:

- Que relações encontraram nas outras questões do enunciado? Quais as diferenças que encontramos entre os prismas e as pirâmides?

Discussão e sistematização

No momento de discussão coletiva da tarefa que estiveram a resolver, irei discutir com a turma cada questão individualmente.

Para a discussão das **1ª** e **6ª questões,** irei pedir para que cada pequeno grupo leia a sua descrição e, à medida que os grupos o fazem, escreverei no quadro as suas respostas para posteriormente a turma discutir se as características do prisma descritas e as generalizações encontradas são válidas ou não.

Já para a apresentação das **2ª, 3ª e 4ª questões**, pedirei a alguns pares que apresentem os seus resultados e estratégias de resolução, sendo que começarão os pares que as suas contribuições estejam incorretas ou incompletas. Para esta escolha, durante o momento de trabalho autónomo, circularei pela sala e identificarei as representações e estratégias mais interessantes para discussão em sala de aula, ou seja, aquelas que possam contribuir para a clarificação de relações e ideias ou que contribuam para a discussão entre os alunos para que estes fortaleçam a sua justificação.

Em relação à apresentação da resolução da **5ª questão,** cada par apresentará a sua adivinha à turma e os alunos que souberem a resposta colocarão o dedo no ar, seguindo-se de uma discussão e explicação referente à resposta correta feita pelo aluno que respondeu e se for necessária alguma ajuda é sugerido a outro aluno que o faça.

4.3. Designação da Tarefa: *Cartões com números*

Objetivos

- ➔ Usar factos numéricos
- ➔ Reconhecer a relação inversa da multiplicação e divisão.
- ➔ Estabelecer relações numéricas para descobrir novos valores.
- ➔ Desenvolver processos de raciocínio matemático: Generalização, justificação e exemplificação.

Conteúdos

- Divisão e Multiplicação de números naturais

Recursos

- Enunciado da Tarefa *Cartões com números* (anexo D).

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

Apresentação da tarefa

No lançamento da tarefa, começarei por distribuir os cartões aos pares que foram previamente organizados, assim como o enunciado que além das questões da tarefa também tem um esquema onde os alunos irão anotar as expressões cujo resultado eles conhecem e as expressões cujo resultado não conseguem de imediato identificar. Um dos alunos procederá à leitura do enunciado em voz alta e no final tentarei perceber se existe alguma dúvida ou incompreensão, interpelando dois ou três alunos que o expliquem por palavras próprias o que está a ser pedido.

Exploração da tarefa

- **Organização dos alunos**

Para a resolução da tarefa, os alunos estarão organizados em pares para que possam debater ideias entre eles.

- **Propostas de trabalho e atividade esperada**

No momento de trabalho autónomo é esperado que os alunos resolvam a tarefa que consiste na utilização de conceitos previamente conhecidos de modo a estabelecer relações numéricas e calcular novos valores a partir de valores conhecidos.

Os alunos começam por dividir os cartões de acordo com o facto de saberem rapidamente ou não o valor da expressão numérica e anotam a respetiva expressão no quadro que se encontra no enunciado. De seguida é pedido aos alunos que resolvam as expressões numéricas dos cartões cujo valor não conseguiram descobrir rapidamente utilizando os cartões dos valores que conhecem. Por exemplo, para se conhecer o resultado da expressão numérica 18:6 teremos de recorrer à tabuada do 6 para perceber que se utilizar o cartão com a expressão numérica 6x3 cujo resultado é 18 então o resultado de 18:6 é 3.

Para conseguir responder a dúvidas que possam eventualmente surgir ou apoiar o raciocínio dos alunos com perguntas que os ajudem nesse processo, irei circular entre eles.

Uma das respostas que antecipo para esta tarefa é a seguinte:

Sei rapidamente o valor	Não sei rapidamente o valor
15x2 =30	30:2 =15 Se 15x2 é igual a 30 então 30:2 é igual a 15.
2x50 =100	25x4 =100 Se 2x50 é igual 100 e 25+25 é igual a 50 então 25x4, sendo 4 o dobro de 2 e 25 metade de 50, então o resultado será 100.
100:2 =50	100:4 =25 Se 25x4 é igual a 100, então 100:4 é igual a 25.
3x25 =75	75:3 =25 Se 3x25 é igual a 75, então 75:3 é igual a 25. 25 é um terço de 75.
9x2 =18	18:2 =9 Uma vez que 9x2 é igual a 18, então 18 é o dobro de 9.
3x6 =18	18:6 =3 Se 3x6 é igual a 18, então 18:6 é igual a 3. 18 é o triplo de 6.

Figura 6 - Tarefa *Cartões com números*: hipótese de resposta.

- **Dificuldades previstas**

Os alunos poderão ter dificuldade em perceber a relação entre os cartões e o respetivo valor, não saberem a tabuada e também não perceberem que podem recorrer à operação multiplicação para efetuarem cálculos de divisão.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens

Durante a discussão colocarei questões tipo “Porquê?” ou “Como pensaste?” e para esta tarefa, antecipo as seguintes questões: Dos cartões cujo resultado vocês já conhecem qual pode ajudar a descobrir o valor desse? Porquê? Que relação existe entre esses valores? Como chegaste a essa conclusão?

Discussão e sistematização

Durante o momento de trabalho autónomo e enquanto circulo pelos pares irei tomar atenção a quais os grupos que não estão a conseguir uma estratégia correta ou que está incompleta ou que pelo contrário apresentam resultados e estratégias corretas. Esta observação servirá para escolher os pares que vão fazer a sua apresentação dos resultados e estratégias de resolução. A escolha irá recair sobre os pares que apresentem as representações e estratégias mais interessantes para a discussão em sala de aula e irão iniciar esses mesmos pares, ou seja, representações e estratégias que promovam a discussão entre os alunos, a clarificação de ideias e que assim permitam a consolidação da sua justificação.

4.4. Designação da Tarefa: *Os trabalhos da Catarina*

Objetivos

➔ Desenvolver processos de raciocínio matemático: exemplificação, justificação e generalização.

Recursos

- Enunciado da Tarefa *Os trabalhos da Catarina* (anexo E):

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

Apresentação da tarefa

No lançamento da tarefa e após distribuir o enunciado da mesma pelos alunos pedirei para que estes o leiam em silêncio e sendo importante que eu perceba se eles compreenderam todos os aspetos do enunciado, posteriormente pedirei a 2 ou 3 alunos que o expliquem por palavras suas.

Exploração da tarefa

- **Organização dos alunos**

Esta tarefa será explorada por pares permitindo assim a discussão das ideias entre os alunos que o formam.

- **Propostas de trabalho e atividade esperada**

No momento de trabalho autónomo é desejado que os alunos analisem a pares a situação proposta. A situação consiste em descobrir o número de molas necessárias para que sejam estendidos os guardanapos consoante o número pedido. Na resolução da primeira questão, 5 guardanapos, é esperado que os alunos descubram a solução ao analisar a figura anexa ao enunciado, sendo que desta forma os alunos chegarão à conclusão que, excluindo o primeiro guardanapo, quando se aumenta o número de guardanapos aumenta-se uma mola. Para as duas questões seguintes os alunos seguirão a mesma estratégia, ao acrescentar um guardanapo aumentam uma mola. Para a questão dos 10 e 20 guardanapos é expectável que os alunos analisem os resultados das primeiras três questões, comparem e generalizem e cheguem à conclusão que basta acrescentar 1 ao número de guardanapos em causa, ou seja o número de molas é igual ao número de guardanapos mais um. À semelhança das tarefas anteriores é esperado que os alunos saibam justificar aos outros, o raciocínio que elaboraram para chegar a determinado resultado.

Esta tarefa permite que os alunos representem de variadas formas, podendo recorrer a representações icónicas (imagens, desenhos, esquemas) ou simbólicas (símbolos, linguagem, vocabulário matemático).

Neste momento circularei pelos grupos apoiando-os na resolução da tarefa, questionando-os, sem avançar para uma sugestão concreta, Por fim, suscitarei a sua generalização, questionando-os em relação a outros números maiores.

Algumas das respostas dos alunos (estratégias usadas) poderão ser:

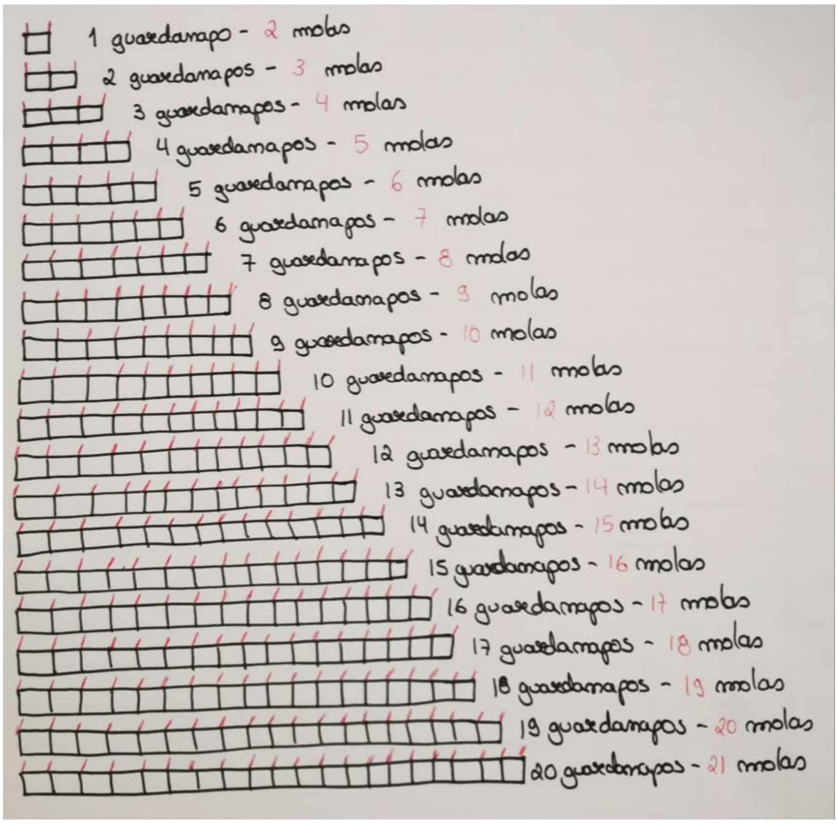


Figura 7 - Tarefa *Os trabalhos de Catarina*: hipótese de resposta 1.

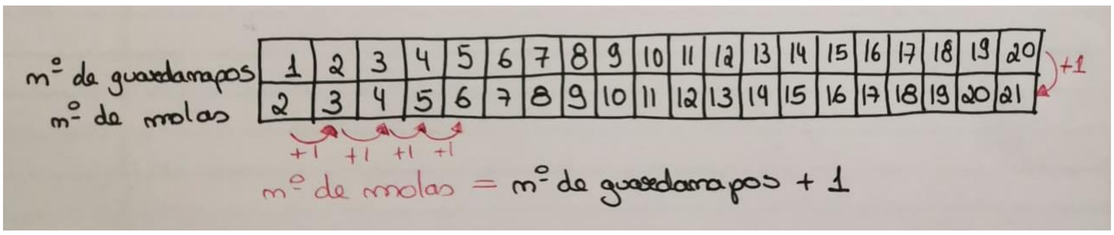


Figura 8 - Tarefa *Os trabalhos de Catarina*: hipótese de resposta 2.

- **Dificuldades previstas**

Durante o momento da resolução da tarefa os alunos poderão não perceber de imediato que a organização dos guardanapos no estendal é a que está na figura do enunciado, assim como não perceberem que para encontrarem a resposta para a primeira questão será suficiente que analisem a figura. Em relação aos seguintes números de guardanapos pedidos no enunciado, os alunos se não chegarem à conclusão de que o número de molas é igual ao número de guardanapos mais um, só chegarão à resposta através de uma representação exaustiva de todos os casos até ao número pedido.

- **Questões a colocar para apoiar as aprendizagens**

Durante a discussão colocarei questões tipo "Porquê?" ou "Como pensaste?". Neste caso concreto, antecipo as seguintes questões: Quantas molas prendem 1 guardanapo, e se forem 2 guardanapos? Observando a figura do enunciado o que podemos concluir que acontece se aumentarmos o número de guardanapos? Que ligação podemos observar entre o número de guardanapos e o número de molas?

Discussão e sistematização

A apresentação dos resultados e das estratégias de resolução será pela ordem que eu escolher previamente durante o momento de trabalho autónomo, pois irei identificar as representações e estratégias mais interessantes para a discussão em sala de aula, começando os pares cujas contribuições estejam incorretas ou incompletas. Deste modo, irei promover a clarificação de ideias e contribuir para que a discussão entre alunos permita que estes fortaleçam a sua justificação. De seguida irão apresentar os pares que terão escolhido as formas de representar mais exaustivas, que não resultam para casos de números de guardanapos elevados, como por exemplo o 100, seguindo-se das representações que levem à generalização.

Capítulo V - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo foca-se nas ações e desafios que se destacariam na minha prática aquando das discussões coletivas com vista ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, espelhado nas questões elaboradas no capítulo da introdução. No entanto, devido à pandemia que se instalou no mundo (Covid-19) tornou-se impossível o desenvolvimento deste estudo na prática. Porém, neste capítulo, partilho alguns desafios com que me deparei na preparação das tarefas com vista à sua exploração na prática e também antecipo algumas dificuldades com que me poderia deparar nessa prática.

Com vista à preparação das discussões coletivas das tarefas propostas no âmbito deste projeto tive por base as cinco práticas indicadas por Stein et al. (2008) e também considerei com cuidado a escolha e/ou adaptação das tarefas que ia propor de forma a atender ao tema do estudo. O primeiro desafio com que me deparei foi precisamente a escolha e a adaptação das tarefas. Estas tinham de ser as mais indicadas para que promovessem discussões coletivas produtivas e que garantissem o desenvolvimento de processos de raciocínio matemático.

Fazendo uma análise a cada uma das tarefas selecionadas, procurei verificar se seriam tarefas apelativas e se estariam de acordo com os objetivos curriculares do 3.º ano. Outra preocupação foi a de acautelar que escolhia tarefas que fossem ao encontro dos princípios enumerados pela Equipa do Projeto *Reason* (2019), já mencionados no capítulo da revisão da literatura deste projeto de investigação, ou seja, que incluíssem questões que permitissem mais do que uma estratégia de resolução, mais do que uma representação e que favorecessem a reflexão sobre os processos de raciocínio.

No caso da tarefa dos "Chupa-chupas", esta permite variadas estratégias de resolução e de representações. Os alunos podem, a partir de números, experimentar se os mesmos podem ser a solução da tarefa. Por exemplo, um aluno pode escolher o número dez e chegar à conclusão de que o resto seria zero e que por esse motivo esse número não serve. Também é possível aos alunos apoiarem-se em representações que podem ser representações icónicas (imagens, desenhos, esquemas) ou simbólicas (símbolos, linguagem, vocabulário matemático). Assim, os alunos têm a possibilidade de fazer uso de estratégias e representações mais acessíveis para eles e de se confrontarem com as soluções que os seus pares apresentam, o que leva a que aprofundem os processos de raciocínio e a compreensão dos conceitos matemáticos inerentes. Esta tarefa conduz os alunos a elaborar uma generalização sobre o número de chupas que podem estar dentro do saco, com base na observação das características desse número referidas no enunciado. Os alunos ao observar o número que lhes é dado vão perceber que não podem ser números pares porque divididos por dois não sobra um, mas que também nem todos os números ímpares servem já que nem todos divididos por dois restam dois, como é o caso do número 15. Este raciocínio não só se enquadra numa generalização por observação , como também poderá originar a justificação recorrendo a contraexemplos, pois os alunos sentem a necessidade de justificar o porquê deste ou aquele número não servir. A generalização por observação e a justificação recorrendo a contraexemplos, dois princípios que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático inerentes a cada processo de raciocínio.

Já no caso da tarefa “Mais Descobertas sobre Sólidos Geométricos” esta apresenta algum interesse por fomentar a reflexão sobre os processos de raciocínio. Este é o caso da quarta questão onde é apresentado ao aluno um diálogo entre a Sara e o Pedro, em que a Sara quer construir um prisma com 25 vértices, mas o Pedro não concorda pois acha que com 25 vértices só se consegue construir uma pirâmide e não um prisma. É questionado ao aluno qual dos dois tem razão e pedido para justificar. Para que os alunos respondam a este desafio, precisam de, com base nos conhecimentos já adquiridos sobre prismas e pirâmides, analisar a resposta do Pedro e apresentar uma justificação para a sua conclusão. Assim, e para conseguirem apresentar uma justificação válida, eles têm de analisar a fundo os seus processos de raciocínio, assim como os do Pedro. Esta tarefa também destaca o processo de justificação e comparação quando em várias das suas questões estimulam os alunos a justificar as respostas dadas e as estratégias usadas. Podemos verificar isto mesmo na questão três quando “O António pede à professora trinta pauzinhos para construir um prisma. Como será a base do prisma que ele quer construir? Porquê?” e na quarta questão já mencionada em cima. Outro processo realçado nesta tarefa é o da generalização quando é pedido aos alunos que através do preenchimento de uma tabela, nomeiem os sólidos geométricos de acordo com o número de vértices, arestas, faces e bases em prismas ou pirâmides e quando utilizando conhecimentos previamente adquiridos concluem que o número de vértices é sempre o dobro do número de vértices da base e que as arestas dos prismas são sempre o triplo, formam generalizações mesmo que incompletas. No entanto, os alunos demonstram ser capazes de distinguir uma pirâmide de um prisma a partir da identificação das características desses sólidos.

Quanto à tarefa “Cartões com números” esta promove essencialmente o processo de justificação em vez do de generalização já que pede aos alunos que façam vários cálculos de multiplicação e divisão, fazendo a distinção entre as que conseguem fazer e as que são mais difíceis. No decorrer da tarefa é expectável que os alunos justifiquem muitas das suas soluções através da comparação com as soluções encontradas para outras operações. Por exemplo, 18 a dividir por 6 é igual a 3, porque se 3 vezes 6 é igual a 18, então 18 a dividir por 6 é igual a três e 18 é o triplo de 6.

Por fim, em relação à tarefa “Os trabalhos da Catarina”, esta permite que os alunos utilizem variadas representações icónicas ou simbólicas. É permitido que se socorram de estratégias e representações mais acessíveis, promovendo o confronto de ideias entre eles e assim potenciando o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático. Esta tarefa realça os princípios da comparação e da generalização além do princípio da justificação. Quando é pedido aos alunos que calculem o número de molas necessários para prender 10 e 20 guardanapos espera-se que eles analisem os resultados anteriores, comparem, generalizem e percebam que basta acrescentar 1 ao número de guardanapos em causa, ou seja o número de molas é igual ao número de guardanapos mais um. Depois é esperado que os alunos saibam justificar aos outros, o raciocínio que elaboraram para chegar a determinado resultado.

Quando planifiquei cada tarefa enumerada em cima deparei-me com outro desafio, o de antecipar estratégias que os alunos pudessem elaborar, prever dificuldades que surgissem da exploração das tarefas, assim como as respostas a essas dificuldades pois, assim como refere Canavarro (2011) ao antecipar “o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos e a tomar decisões acerca de como estruturar as apresentações e gerir as discussões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática" (p. 13). Também Stein et al. (2008) referem que os professores são confrontados várias vezes com um grande número de alunos que apresentam resoluções das tarefas que correspondem a um nível cognitivo mais baixo tendo a necessidade de encontrar formas de, partindo dessas resoluções, levá-los a aprofundar as ideias matemáticas subjacentes à tarefa. Este é um dos meus maiores receios, o de não conseguir prever todas as estratégias que os alunos possam utilizar e por isso não poder antecipar as minhas estratégias para lidar com elas.

Canavarro (2011) refere que tanto a antecipação das estratégias, quanto a antecipação das dificuldades e o modo como lidar com elas, permite ao professor estar mais preparado para as possíveis respostas e questões que tenha de elaborar durante o momento de discussão coletiva. Já no momento de implementação das tarefas em sala de aula receio encontrar resoluções que não compreendi completamente e assim não conseguir esclarecer dúvidas que possam surgir na sala de aula. Isto pode levar a que tenha de recorrer ao improviso, o que com a pouca experiência que tenho não revela ser algo em que me sinta confiante. Isto vai ao encontro do que apresenta Stein et al. (2008), quando menciona que para uma improvisação ser bem-sucedida é necessário que o professor tenha um extenso conhecimento do conteúdo abordado, conhecimento pedagógico e conhecimento dos alunos como aprendizes. Smith (1996), citado por Stein et al. (2008), alerta para o facto de os professores que iniciam a sua prática poderem ficar surpresos com o que os alunos dizem e fazem e muitas vezes não sabem o que responder no meio de uma discussão, fazendo-os sentir despreparados e fora de controlo, reduzindo a sua eficácia como professores e tornando a discussão muito menos eficaz. Efetivamente, prevejo que um dos desafios com que me poderei deparar prende-se com uma total compreensão do raciocínio dos alunos, dos processos que estão a ser mobilizados e como poderei contribuir para o desenvolvimento destes processos.

O momento da monitorização também se poderá apresentar desafiante, já que tenho alguma preocupação em lidar com o momento em que os alunos colocam algumas dúvidas sobre as estratégias que eu possa não ter antecipado.

Serei capaz de colocar questões que os ajude a ultrapassar essas dificuldades e, simultaneamente, não alterar o nível cognitivo das tarefas? Ou seja, até que ponto as minhas respostas serão adequadas para apoiar os alunos na resolução da tarefa sem a “facilitar”? Ainda em relação ao modo como lidar com as estratégias que não antecipei também receio sentir dificuldades em escolher e sequenciar as novas estratégias que os alunos utilizam e assim tomar as melhores opções sobre a ordem pela qual elas deverão ser apresentadas. Além de escolher aquelas que se mostram interessantes do ponto de vista matemático, também vou querer que sejam apresentadas aquelas que melhor promovam a discussão com toda a turma. Este aspeto leva-me a antecipar outro desafio: o de estar capacitada para criar um ambiente estimulante em sala de aula, no qual o espírito de partilha e de discussão de ideias está presente enquanto os alunos realizam as tarefas e no momento de apresentação das suas resoluções. Segundo Canavarro (2011), os alunos deverão ser “(…) encorajados a participar ativamente, a desenvolver o seu próprio trabalho e a querer saber do dos outros, a ouvir, a falar, a explicar, a questionar” (p.17). Sei que terei de ter em conta a turma que me estiver atribuída, se os alunos estão habituados a realizar as tarefas matemáticas de acordo com o ensino exploratório e a partilhar ideias, de forma a evitar que tal como refere Ball (2001), citada por Stein et al. (2008), a discussão coletiva se resuma a uma apresentação de resultados corretos.

Para a realização deste projeto de investigação foi essencial aprofundar questões associadas ao raciocínio matemático e o meu conhecimento sobre este. Constatei que é um assunto complexo e que para o compreender implica algum estudo. De facto, quando comecei a estudá-lo, apercebi-me que para identificar quais seriam as dificuldades do professor para fomentar o raciocínio matemático dos seus alunos, teria de começar por conhecer e refletir mais aprofundadamente sobre os meus conhecimentos no que diz respeito ao raciocínio matemático, às características que as tarefas têm de ter para permitir o seu desenvolvimento e as ações que o professor pode desencadear para o promover em todos os momentos da exploração da tarefa - lançamento, realização e discussão coletiva. As planificações ajudaram-me a refletir em como eu o poderia fazer tendo em conta uma tarefa concreta. Constituiu para mim um desafio acrescido o facto de perspetivar o trabalho a realizar em sala de aula, sem ter por base o conhecimento da turma e das suas rotinas de sala de aula no que respeita à exploração de tarefas de matemática.

Enquanto investigadora este projeto de investigação permitiu-me compreender como se desenvolve um estudo sobre a própria prática e como poderia recolher dados que permitisse esse desenvolvimento. Permitiu-me também experienciar desafios na seleção, adaptação e preparação de tarefas que visam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e antecipar alguns associados à exploração dessas tarefas na sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: Um guia prático e crítico* (1.ª ed.). Porto: Edições ASA.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M.C. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática - Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência

Boaler, J. (2010). The road to reasoning. In *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms* (pp. v-vii). New York, NY: Springer.

Boavida, A. M. R. et al. (2008). *A experiência matemática no ensino básico: programa de formação contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R. & Bliken, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.* School of Education, University of the Witwatersrand: Johannesburg, South Africa

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. In *Educação e Matemática,* 115, 11-17.

Coutinho, C. P. (2016). *Metodologia de Investigação em Ciências e Humanas: teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina.

Delgado, C. (2013). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número: um estudo no 1.º ciclo.* Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa: Instituto de Educação.

Ellis, A., Özgür, Z. & Reiten, L. (2019). Teacher Moves For Supporting Student Reasoning. In *Mathematics Education Research Journal*, 31, 107-132.

Equipa do Projeto Reason (2019). *Princípios para a elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos.* Projeto Reason: Raciocínio Matemático e Formação de Professores: Draft

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). *A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics.* Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal, Montréal, QC, Canada

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrilho, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, & R., Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2016). Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. In *Educação e Matemática, 137*, 38-41.

Mata-Pereira, J., Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, *156*, 7-11.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2014). A construção coletiva da generalização num contexto de ensino exploratório com alunos do 4.º ano, In *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, 283 - 308. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática.* Lisboa: APM.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (s.d.). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 30-42). Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. In *Educação e Matemática*, nº 100, (pp. 3-9). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM

Quivy, R. (1992). A pergunta de partida. In *Manual de investigação em ciências sociais* (pp. 29-46). Lisboa: Gradiva.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating; Mathematical Tasks: From Research to Practice. In *Mathematics Teaching in the Middle School* 3(5), 344-349.

Stein MK, Grover BW, Henningsen MA (1996). *Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms.* Am Educ Res J 33(2), 455-488.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.* Teachers College Press: New York.

Stein, M. K., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for help teachers move beyond show and tell. In *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers` challenges in teaching reasoning-and-proving. In *International Journal of Science and Mathematics Education*. 11, pp. 1463-1490.

Widjaja, W., Vale, C., Herbert, S., Loong, E. Y., & Bragg, L. A. (2020). Linking comparing and contrasting, generalising and justifying: a case study of primary students´ levels of justifying. In *Mathematics Education Research Journal*. pp. 1-23.

ANEXOS

Anexo A: Modelo de apoio à planificação

MESTRADO em EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR e ENSINO do 1º CICLO do ENSINO BÁSICO

MODELO de APOIO à PLANIFICAÇÃO

I- Organização do trabalho semanal

Semana de .... a....

Áreas curriculares Dia	2ª feira (data) (exemplos)	3ª feira (data)	4ª feira (data)
Língua Portuguesa	Ex: Tarefa *Aprendendo com o Principezinho* ...		
Matemática	Ex: Tarefa *Comprando brinquedos* ...		
Estudo do Meio	—		
Expressões: - Dramática - Plástica - Musical - Físico-Motora	Ex: Tarefa *Dramatizando a história do Principezinho* ...		
Atividades transversais	Exemplos: Registo de presenças; registo do tempo que faz; sistematização das aprendizagens do dia, ...		

II - Planificação das situações de ensino e aprendizagem a partir de tarefas

- Designação da tarefa
- Objetivos visados
- Conteúdos de ensino/aprendizagem (conceitos, procedimentos, atitudes, valores, ...)
- Recursos
- Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem
  - Apresentação da tarefa
  - Exploração da tarefa
    - ✓ Organização dos alunos
    - ✓ Propostas de trabalho e atividade esperada
    - ✓ Dificuldades previstas
    - ✓ Questões a colocar para apoiar as aprendizagens

  - Discussão e sistematização

Anexo B: Tarefa 1 - *Chupa-Chupas*

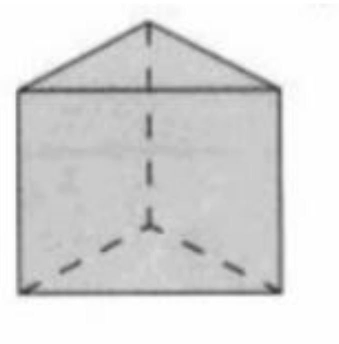
O André e a Rute receberam um saco de chupa-chupas. Partilharam os chupa-chupas entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram os seus amigos, a Ana, o Rui e o António que também queriam chupa-chupas. Decidiram então partilhá-los novamente e sobraram 2 chupa-chupas.

Quantos chupa-chupas podiam estar no saco? Porquê?

Anexo C: Tarefa 2 - *Mais Descobertas sobre sólidos Geométricos*

Tarefa *Mais Descobertas sobre sólidos Geométricos*

1. Descreve o sólido geométrico da imagem.



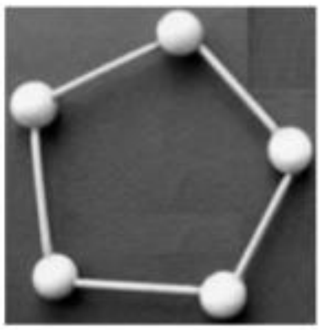
____

____

____

____

2. A Sara e o Pedro estão a construir prismas com pauzinhos e bolinhas de plasticina. Observa o que já fizeram e responde.



Quantos pauzinhos lhe faltam? ______

Quantos pauzinhos precisam ao todo? ______

E quantas bolinhas de plasticina precisam ao todo? ______

3. O António pede à professora 30 pauzinhos para construir um prisma. Como será a base do prisma que ele quer construir? Porquê?

____

____

4. Em seguida, a Sara diz ao Pedro: “Vamos construir um prisma com 25 vértices”, mas o Pedro não concorda e diz-lhe: “Um prisma não consegues, só uma pirâmide”. Achas que o Pedro tem razão? Porquê?

____

____

____

____

5. Inventa uma adivinha sobre um prisma ou uma pirâmide e escreve-a no papel que te foi dado. Atenção, não escrevas a solução!

6. A pares, preenche o quadro seguinte com as tuas descobertas.

	Prismas	Pirâmides
Número de Vértices		
Número de Arestas		
Número de Faces laterais		
Número de Bases		

Anexo D: Tarefa 3 - *Cartões com Números*

2 X 50	100 : 4	30 : 2
15 X 2	100 : 2	25 X 4
75 : 3	3 X 25	18 : 2
9 X 2	3 X 6	18 : 6

Tarefa 3 - *Cartões com Números*

Separa os cartões de que sabes o valor daqueles que não sabes.

Consegues chegar ao valor dos que não sabes, utilizando os cartões que sabes? Como?

Sei rapidamente o valor	Não sei rapidamente o valor

Anexo E: Tarefa 4 - *Os trabalhos da Catarina*

Os trabalhos da Catarina

A Catarina vai pôr a secar muitos guardanapos pendurando-os, ordenadamente, como se mostra.
Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 5, 6, 7, 10 ou 20 guardanapos.