J. PINTO PEIXOTO • F. R. DIAS AGUDO • J. TIAGO DE OLIVEIRA • J. CAMPOS FERREIRA
MARGARITA RAMALHO • A. RIBEIRO GOMES • ARMANDO POLICARPO • F. DUARTE SANTOS
J. GOMES FERREIRA • L. A. MENDES VICTOR • MANUEL LARANJEIRA • M. GOMES GUERREIRO
J. CÂNDIDO DE OLIVEIRA • ROBALO CORDEIRO • J. CELESTINO DA COSTA • A. CASTRO CALDAS
BARAHONA FERNANDES • ARANTES E OLIVEIRA • A. F. CARVALHO QUINTELA • A. BARBOSA
DE ABREU • GOUVÊA PORTELA • L. BRAGA CAMPOS • J. J. DELGADO DOMINGOS • A. F.
OLIVEIRA FALCÃO • DOMINGOS MOURA • H. CAMPOS NETO • A. LARCHER BRINCA • J. F.
QUINTINO ROGADO • M. AMARAL FORTES • M. BAPTISTA BRAZ • M. PEREIRA COUTINHO
FERNANDO ESTÁCIO • P. O. PEREIRA SANTOS • A. A. MONTEIRO ALVES • BRITALDO RODRIGUES • L. AIRES DE BARROS • MATOS ALVES • M. PORTUGAL FERREIRA • ANTÓNIO RIBEIRO
FRANCISCO GONÇALVES • TELLES ANTUNES • LUÍS ARCHER • J. MONTEZUMA DE CARVALHO
J. FIRMINO MESQUITA • ABÍLIO FERNANDES • J. MALATO-BELIZ • ARSÉNIO PATO DE
CARVALHO • A. XAVIER DA CUNHA • ALLEN DEBUS • J. SIMÕES REDINHA • SEBASTIÃO
J. FORMOSINHO • A. M. A. ROCHA GONSALVES • L. ALMEIDA ALVES • OLIVEIRA CABRAL
FRAÚSTO DA SILVA • JOSÉ V. PINA MARTINS • AMÉRICO COSTA RAMALHO • FERNANDO
REBELO • C. ALBERTO MEDEIROS • ILÍDIO DO AMARAL • MANUEL GARRIDO ARAÚJO
MANUEL VIEGAS GUERREIRO • A. SIMÕES LOPES • A. SOUSA FRANCO • ONÉSIMO T. ALMEIDA
JUSTINO MENDES DE ALMEIDA • FRANCISCO GAMA CAEIRO • RÓMULO DE CARVALHO

HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO DA CIÊNCIA EM PORTUGAL NO SÉC. XX

I VOLUME

PUBLICAÇÕES DO II CENTENÁRIO DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA
LISBOA • 1992

ASPECTOS DA ÁLGEBRA EM PORTUGAL NO SÉCULO XX

MARGARITA RAMALHO *

Foi com alguma hesitação que aceitei participar neste Colóquio, com a responsabilidade de analisar a actividade científica, em Portugal, no domínio da Álgebra, até cerca de metade dos anos sessenta; os projectos de trabalho que tinha entre mãos não me deixariam disponível o tempo suficiente para o trabalho de análise cuidada que tal tarefa requeria. Mas, dada a circunstância de ter sido discípula de A. Almeida Costa, que teve uma acção ímpar na renovação dos estudos algébricos em Portugal, e ainda a conveniência de que esse trabalho fosse feito por alguém não demasiadamente envolvido nessa actividade, durante o período em referência, senti que não deveria recusar a minha colaboração. Limitar-me-ei a deixar aqui apenas algumas pistas que poderão ser melhor analisadas, posteriormente, por alguém melhor qualificado do que eu para este tipo de questões.

Focarei alguns aspectos da evolução deste domínio da Matemática, em especial daquelas áreas que foram mais divulgadas e investigadas entre nós. Seguir essa trajectória não me foi tão difícil como pensava. Na sua obra máxima, *Cours d'Algèbre Générale*, A. Almeida Costa deixou-nos material mais do que suficiente para nos documentarmos; em três volumes, num total de mil e novecentas páginas, é-nos oferecido um autêntico tratado de Álgebra, cobrindo a maior parte das áreas existentes. As contribuições portuguesas foram também aí incorporadas ou referenciadas. Uma ampla bibliografia, relativa a cada assunto tratado, facilita consideravelmente o trabalho de qualquer estudioso que se interesse pela evolução destes assuntos.

---

* Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa.

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

É a Álgebra um domínio matemático essencialmente do século XX. De facto, só por volta de 1930 terá sido reconhecida como domínio matemático autónomo, coincidindo esse reconhecimento com a publicação da *Moderne Algebra* de van der Waerden, o mais célebre dos tratados de Álgebra. As raízes de algumas áreas da Álgebra podem detectar-se já na primeira metade do século XIX e os progressos conseguidos, nas duas últimas décadas desse século, foram decisivos para o seu desenvolvimento. Surgiu da necessidade, que se foi progressivamente fazendo sentir, de unificar teorias, criando novos contextos abstractos que permitissem interpretar factos que, embora em campos distintos, pudessem, por abstracção do seu contexto específico, ser justificados por uma mesma sequência de argumentos. A tarefa para os algebristas modernos consistia em extrair o que existe de essencial em certos factos e montar um esquema, o mais reduzido possível, mas suficiente para nele poderem ser interpretados e justificados, de uma só vez, factos distintos em áreas distintas. Os esquemas adequados para a interpretação dos factos algébricos foram os sistemas algébricos ou álgebras, constituídos por um conjunto de elementos desprovido de qualquer conteúdo concreto e por operações sujeitas a determinadas condições; assim surgiram os grupos, os grupos comutativos ou Abelianos, os anéis comutativos e não comutativos, os corpos, os anéis de divisão, os espaços vectoriais, os sistemas hipercomplexos, as álgebras de Boole, os reticulados e muitos outros. A vantagem de tal procedimento (formalização abstracta) era nítida para os algebristas: as propriedades deduzidas para tais sistemas algébricos abstractos, dariam por especificação a qualquer contexto concreto, propriedades específicas que não careciam já de ser demonstradas. Os objectivos visados no estudo de certas classes de sistemas algébricos foram: a obtenção de teoremas de estrutura, dizendo respeito à possibilidade de descrever os sistemas algébricos em termos de outros mais simples e a obtenção de teoremas de representação. O campo de aplicação de certos ramos da Álgebra estendeu-se a outros domínios da Matemática e da Física.

Teoria dos grupos e áreas afins

A área da Álgebra que primeiro se desenvolveu e se impôs, pela importância que veio a assumir noutros domínios da Matemática e da Física, foi a Teoria dos Grupos.

Os grupos inicialmente considerados eram grupos de substituições, ou permutações, e é bem conhecida a importância dos trabalhos de E. Galois, sobre resolubilidade de equações por radicais, na génese desta teoria. Na introdução às *Obras Completas de Aureliano de Mira Fernandes*, J. Vicente Gonçalves dá-nos a conhecer em nota de rodapé os seguintes excertos de uma publicação de Miller de 1909-10: «a teoria dos grupos como ciência autónoma pode dizer-se que foi fundada por Cauchy durante os anos de 1844-46» e «o estudo formal dos grupos de substituições foi iniciado por Ruffini na sua bem conhecida *Teoria generalle della equazione*, Bologna, 1799». O conceito abstracto de grupo só surgiu em 1882-83, em artigos de Walther Dyck.

Em Portugal, deve ter sido A. de Mira Fernandes um dos primeiros a interessar-se por grupos e resolubilidade algébrica. Em 1911, um ano após a licenciatura, recebeu o grau de Doutor pela Universidade de Coimbra, com uma dissertação inaugural intitulada: *Teoria de Galois. I: Elementos da teoria dos grupos de substituições*. Em 1931, publicou ainda um trabalho sobre grupos de substituições e resolubilidade algébrica, que incluía o primeiro.

É de 1932 uma dissertação sobre resolução algébrica de equações por A. J. Madureira e Sousa para provimento de um lugar de professor.

A Teoria dos grupos, incluindo representações dos mesmos, foi introduzida em Portugal por A. Almeida Costa. Será oportuno juntar algumas notas biográficas. Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências do Porto em 1924, com vinte e um anos de idade, recebeu os prémios de Gomes Teixeira e Gomes Ribeiro. Foi docente no grupo das Matemáticas Aplicadas da mesma Faculdade até 1937, altura em que lhe foi concedida uma bolsa do Instituto para a Alta Cultura, com o fim de estudar Física Teórica na Universidade de Berlim. Frequentou durante o primeiro ano vários cursos de Física com muito sucesso; mas, no ano lectivo seguinte (1938-39), pareceu-lhe conveniente frequentar Teoria dos Quanta, Aplicação da Teoria dos Grupos à Teoria dos Quanta, Teoria da Representação na Mecânica Quântica. Daí resultou a sua orientação para a teoria das representações de grupos e, consequentemente, para a Álgebra Moderna, à qual viria a dedicar toda a sua actividade científica (até ao seu falecimento em 1978).

Regressado ao Porto em 1939, continuou a aprofundar vários assuntos de Álgebra relacionados com a teoria da representação dos grupos, seguindo com grande interesse os progressos que iam sendo realizados em várias áreas. Começou a publicar os resultados dos seus novos estudos

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

em 1942, nas publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto. Este Centro de Estudos, dirigido por Ruy Luís Gomes, encontrava-se organizado em três domínios: o de Álgebra Moderna, tendo como responsável A. Almeida Costa, o de Medida e Integração, da responsabilidade de Ruy Luís Gomes, e o de Topologia Geral, dirigido por A. A. Monteiro. A convite da Junta de Investigação Matemática dirigiu as publicações de Álgebra Moderna da mesma Junta. A convite da Sociedade Portuguesa de Matemática, pronunciou em Lisboa, em 1945, algumas conferências sobre Álgebras em Quântica.

Nomeado professor catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa, por convite do grupo da Matemática, em 1952, aí dirigiu seminários semanais versando temas de Álgebra, Mecânica e Física Matemática. Sobre os fundamentos matemáticos e físicos da Mecânica Quântica encontramos uma publicação de 1957 da autoria de A. Almeida Costa, F. Veiga de Oliveira, J. Tiago de Oliveira e A. Coimbra de Matos.

Foi A. Almeida Costa um dos primeiros a empenhar-se na orientação de doutoramentos em Matemática, em Portugal, e os projectos de investigação do Instituto de Alta Cultura, que dirigiu nos anos 50 e na primeira metade dos anos 60, visavam o estudo aprofundado e eventual obtenção de novos resultados nas áreas de grupos e suas generalizações e de anéis e suas generalizações. Em testemunho do sucesso desses projectos encontramos, por exemplo, na *Revista da Faculdade de Ciências* de 1954-55 um artigo da autoria de Fernando Dias Agudo sobre grupos com operadores e teoria das matrizes, um outro de A. Almeida Costa sobre módulos e anéis com operadores e um outro de J. Tiago de Oliveira sobre bases normais e módulos semi-simples. As generalizações de grupos estudadas foram os quase-grupos e os sistemas de divisão. Sobre os primeiros encontramos trabalhos de Almeida Costa e Tiago de Oliveira; sobre os segundos versava a tese de doutoramento de A. Coimbra de Matos, orientada por Almeida Costa. Os quase-grupos são as generalizações de grupos obtidas quando se consideram apenas as operações binárias de divisão à esquerda e à direita; admitem uma interpretação geométrica o que, já por si, é motivo de interesse, mas têm também alguma importância em questões de combinatória. O seu estudo teve início em artigos de A. Albert de 1943 e 1944, a que se seguiram outros de Bruck. Os sistemas de divisão constituem por sua vez uma generalização dos quase-grupos e foram introduzidos por Reinhold Baer em 1939.

Teoria dos reticulados

Na primeira metade do século XIX, Augustus De Morgan e George Boole deram início à algebrização da lógica. Particularmente G. Boole, em importantes trabalhos publicados em 1847 e 1854, procurou interpretar a Lógica formal dedutiva como uma álgebra de certo tipo. Esta álgebra é hoje designada pelo nome de álgebra de Boole e são bem conhecidos os seus modelos finitos — toma-se o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto finito, incluindo o próprio conjunto e o conjunto vazio, e consideram-se as operações de união, intersecção e passagem ao complementar.

A noção de reticulado é uma generalização da noção de álgebra de Boole, obtida negligenciando a operação de complementação e enfraquecendo as condições satisfeitas pelas operações de união e intersecção de conjuntos. Tal como tinha acontecido com a noção de grupo, a noção de reticulado foi sendo reconhecida em trabalhos de diversas áreas, publicados nas últimas décadas do século passado. Aparece em trabalhos de R. Dedekind sobre inteiros algébricos, com o nome de grupo dual; na verdade, trata-se de um tipo particular de reticulados, que vieram posteriormente a ser designados por reticulados modulares e vieram a desempenhar um papel importante na interpretação das geometrias projectivas. Aparece em trabalhos de Schröder a propósito da fundamentação geral das operações da aritmética elementar. Mas a teoria dos reticulados só veio a desenvolver-se plenamente a partir dos trabalhos de Birkhoff, já nos anos trinta. O desenvolvimento conseguido por Birkhoff foi de tal ordem que é justamente considerado como «o pai da teoria dos reticulados». Na 1.ª edição (1937) do livro *Lattice Theory*, Birkhoff revela o importante papel que essa teoria desempenha na simplificação, unificação e generalização de muitos aspectos da Matemática. Outras edições (ampliadas) daquele livro se seguiram, dando conta de novos desenvolvimentos.

É, também, na segunda metade dos anos trinta que M. H. Stone faz um estudo sistemático das álgebras de Boole, pondo em evidência as ligações destas álgebras com um certo tipo de anéis, os chamados anéis de Boole, e obtendo representações topológicas.

Mas, perguntam-se os analistas da história dos Reticulados, porque motivo teria tardado tanto a desenvolver-se essa teoria, estando afinal tão fortemente sugerida nos trabalhos de Dedekind e Schröder. De entre os motivos que têm sido apontados, parecem-me de referir: estilo axio-

mático de Dedekind, mal aceite na época; afastamento de Dedekind e Schröder dos grandes centros de investigação, ausência de estímulo de colegas em seminários avançados, falta de discípulos que pudessem continuar a explorar o assunto.

Em Portugal, já nos anos quarenta, eram divulgados e analisados alguns aspectos da teoria dos reticulados entre jovens matemáticos de então, talvez, a princípio, não pela teoria em si, mas porque a ela conduziam certas questões de Topologia Geral e de Teoria de Grupos. São nomes dessa época os de Aniceto Monteiro, Hugo Ribeiro, José Morgado e Alfredo Pereira Gomes. Embora o último viesse a orientar-se para a Análise Matemática, na sua tese (1946) faz referência às estruturas, nome dado na altura aos reticulados.

A. Aniceto Monteiro, nascido em 1907, doutorou-se em 1936 na Universidade de Paris, onde estudara como bolseiro da Junta de Educação Nacional (mais tarde Instituto para a Alta Cultura). O orientador da tese tinha sido Maurice Fréchet, eminente matemático daquela Universidade, o criador dos espaços métricos, na sua dissertação de doutoramento em 1906. Regressado a Lisboa, fundou em 1937 a revista *Portugaliae Mathematica*. Promoveu a realização de seminários onde se faziam exposições sistemáticas e se discutiam tópicos de Análise Geral, que incluía Análise Real e Topologia Geral, com o objectivo de despertar o interesse pela investigação nessas áreas. A partir destes seminários foi criado a Seminário de Análise Geral e o Centro de Estudos Matemáticos do IAC. Juntamente com Aureliano de Mira Fernandes e Ruy Luís Gomes criou, em 1943, a Junta de Investigação Matemática, cujo primeiro objectivo era promover o desenvolvimento da investigação matemática. Pode apreciar-se o resultado dessa dinamização através das contribuições portuguesas, publicadas nos primeiros volumes da *Portugaliae Mathematica*. A. A. Monteiro abandonou Portugal em 1945, tendo vivido no Brasil e na Argentina, onde se fixou definitivamente tomando a nacionalidade argentina. Nesses países prosseguiu os seus trabalhos sobre os aspectos algébricos da Lógica Matemática que têm por base os reticulados distributivos e várias são as referências que deles são feitas por outros autores. Do período português em análise refiram-se: um artigo sobre operadores de fecho em conjuntos parcialmente ordenados (de colaboração com Hugo Ribeiro), outra publicação sobre caracterização de operadores de fecho através de um único axioma, que nos surge como exercício referenciado, no livro *Lattice Theory* de Birkhoff, e outra publicação sobre a aritmética dos filtros primos em reticulados

distributivos. Neste último nota-se já a influência de um dos artigos que foram determinantes para o desenvolvimento da teoria dos reticulados distributivos — o artigo de M. H. Stone de 1937, sobre representações topológicas de reticulados distributivos e lógicas de Brouwer. Para uma informação mais completa sobre o trabalho posterior de A. A. Monteiro veja-se o volume 39 (1980) da *Portugaliae Mathematica*, publicado em sua homenagem após o seu falecimento em 1980.

Hugo Ribeiro licenciou-se pela Faculdade de Ciências de Lisboa em 1939 e, entre 1940 e 1944, publicou na *Portugaliae Mathematica* pequenos trabalhos sobre espaços topológicos, obtendo um prémio da Academia das Ciências. Pertenceu, até Outubro de 1942, ao Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa dirigido por A. A. Monteiro. A partir dessa altura foi bolseiro do IAC em duas escolas superiores de Zurich. Dinamizou na FCL reuniões sobre a Teoria dos Reticulados até cerca de 1947. Por estímulo dessas reuniões um dos participantes, o então estudante Fernando Dias Agudo publicou, na *Gazeta de Matemática*, um trabalho intitulado «Sobre a estrutura dos divisores de um grupo». Hugo Ribeiro doutorou-se na Suíça, em 1949, com um tese intitulada: «*Lattices*» *des groupes abéliens finis*. Partiu depois para os Estados Unidos, tendo-se dedicado à Lógica Matemática.

Um texto de 120 páginas, sobre conjuntos parcialmente ordenados, da autoria de José Morgado, foi publicado pela Junta de Investigação Matemática, em 1956. J. Morgado era nessa altura um dos colaboradores do CEM do Porto, com grande interesse por Álgebra. Aquele texto, o primeiro publicado em Portugal sobre a matéria, constituiria o primeiro capítulo de uma projectada publicação intitulada *Reticulados*; no seu prefácio, não deixa o autor de referir a projecção da Teoria dos Reticulados nos mais diversos domínios da Matemática. Obrigado a emigrar para o Brasil por motivos políticos, aí veio a publicar em 1962 uma *Introdução à Teoria dos Reticulados*, com três capítulos. Este texto inclui resultados originais do seu autor sobre operadores de fecho e sobre congruências completas em reticulados completos, publicados na *Portugaliae Mathematica* e com referências de autores estrangeiros.

A. Almeida Costa dedica à teoria dos reticulados os caps. III e IV do seu *Cours d'Algèbre Générale*, reconhecendo-os no prefácio do primeiro volume como «o primeiro grande exemplo de uma 'álgebra'». O interesse de A. Almeida Costa pelos reticulados foi anterior a 1960, segundo dizia, por influência da obra de Birkhoff (*Lattice Theory*, 1948), dos trabalhos da escola francesa de Dubreil-Jacotin, Lessieur, Croisot

ACADEMIA SCIENTIARUM LUSITANA
ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

(1953) de Hermes (1955) e de Morgado (*Reticulados*, 1956). Durante os anos sessenta, incluiu nos seus cursos de Álgebra do 2.º Ano da Licenciatura em Matemática, toda a teoria dos reticulados necessária para provar que as geometrias projectivas podem ser interpretadas por certos tipos de reticulados.

Teoria dos anéis e áreas afins

O desenvolvimento em que se encontrava a Teoria dos Anéis não Comutativos, a meio dos anos quarenta, era já considerável. Nathan Jacobson publicara em 1943 a monografia *The Theory of Rings*, um trabalho de síntese, reunindo importantes resultados obtidos pelos mais eminentes algebristas, tais como E. Artin, E. Noether, W. Krull e por ele próprio. Com uma grande admiração pelos trabalhos destes algebristas, A. Almeida Costa dedicou-se, de maneira especial, a esta Teoria. Trabalhando com extraordinária tenacidade, superava a desvantagem de só ter enveredado por Álgebra perto dos quarenta anos. Numa série de publicações ocupou-se de problemas de dimensão de módulos sobre certos tipos de anéis, de questões relativas a extensões inseparáveis de corpos, de questões da teoria dos anéis. É de 1948 o seu volume *Sistemas Hipercomplexos e Representações*, publicado pelo CEM do Porto. De 1948 a 1951 deu contribuições significativas para a teoria dos anéis de endomorfismos. Na bibliografia de um novo livro de N. Jacobson figuram 14 dos seus trabalhos. Figuram aí, também, 2 trabalhos de J. Tiago de Oliveira, um dos quais, sobre residuais de sistemas e radicais de anéis, foi a tese de doutoramento feita sob a orientação de Almeida Costa.

O novo livro de Nathan Jacobson, publicado em 1956 e intitulado *The Structure of Rings*, era um denso volume de 300 páginas. O autor esclarecia, no prefácio, que se tinha tornado necessário e urgente relatar alguns dos desenvolvimentos importantes que tinham tido lugar depois da publicação do seu livro de 1943. Este continha a teoria da estrutura dos anéis com condições de finitude; mas, entretanto, tinha sido desensenvolvida a teoria de estrutura para anéis gerais e, o que era surpreendente ..., as ferramentas imaginadas para atacar o caso geral proporcionavam melhores demonstrações para os resultados do primeiro livro sobre o caso particular. Uma parte significativa do primeiro livro ficava, assim, praticamente ultrapassada. Deve referir-se que, em 1944, tinha sido publicado um dos mais célebres artigos de G. Birkhoff, no qual

provava um teorema de estrutura para qualquer sistema algébrico, que veio a influenciar trabalhos de McCoy, publicados entre 1945/55 e incluídos no livro de Jacobson.

Mas, não eram factos destes que poderiam fazer diminuir o entusiasmo de A. Almeida Costa pela Álgebra e por tentar fazer algum trabalho de investigação. Mesmo depois dos cinquenta, não receava abrir caminho em novas áreas. Participou, em 1962, no Simpósio da Teoria dos Anéis, em Oberwolfach, organizado pela Sociedade de Matemática da RFA. Fez conferências no Instituto Henri Poincaré, em Paris (Seminário Dubreil-Pisot), e tomou parte nas Jornadas de Álgebra realizadas, neste mesmo Seminário, por ocasião do centenário da Sociedade Matemática de França. Apresentou aí os resultados de outro dos projectos de investigação bem sucedidos: o que visava o desenvolvimento da teoria dos semianéis. Os semianéis, introduzidos por H. S. Vandiver em 1934, generalizam os anéis e generalizam, igualmente, os reticulados distributivos.

Com vários trabalhos publicados nesta área e uma dissertação sobre a teoria de Noether-Krull em semianéis, orientada por A. Almeida Costa, Maria Luísa Galvão obteve, em 1963, o grau de Doutora pela Universidade de Lisboa. Nessa tese é, pela primeira vez, introduzido o conceito de semianel reticulado. A. Almeida Costa ocupou-se também dos semianéis reticulados, contribuindo para o esclarecimento da sua estrutura no tocante a radicais e ideais mínimos. O conceito de anel-μ, introduzido por Almeida Costa em 1960, foi também estendido a semianéis por Maria Luísa Galvão.

*
* *

Nos últimos vinte e cinco anos, novas linhas de investigação em Álgebra se vieram a desenvolver em Portugal. Os núcleos de investigação actualmente com mais relevo são: a linha de Álgebra, do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, e o Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa, tendo este evoluído do antigo projecto LM4 dirigido por Almeida Costa.

ACADEMIA SCIENTIARUM LUSITANA
ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

Referências

AGUDO, F. R. Dias, «The Groups with Operators and the Theory of Matrices», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, 2.ª Série, **4** (1954/55), 225-244.

ALBERT, A. A., «Quasi-Groups I», *Trans. AMS*, **54** (1943), 507-519.

——, «Quasi-Groups II», *Trans. AMS*, **55** (1944), 401-419.

COSTA, A Almeida, *Elementos da teoria dos grupos*, CEM Fac. Ci. Porto, 153, pg., 1942.

——, «Sobre os grupos Abelianos», *Anais Fac. Ci. Porto*, tomo xxvii, 38 pg., 1942.

——, *Grupos Abelianos, anéis e ideais não comutativos, sistemas hipercomplexos e representações*, CEM Fac. Ci. Porto, 173 pg., 1942.

——, *Elementos da Teoria dos Anéis*, CEM Fac. Ci. Porto, 282 pg., 1943.

——, «Sobre os anéis semiprimários», *Anais Fac. Ci. Porto*, tomo xxix, 32 pg., 1944.

——, «Sobre os corpos comutativos», *Anais Fac. Ci. Porto*, tomo xxxi, 16 pg., 1946.

——, *Sistemas hipercomplexos e representações*, CEM Fac. Ci. Porto, 518 pg., 1948.

——, «Sobre nilideais e ideais quase-regulares», *Anais Fac. Ci. Porto*, **34** (1950), 65-74 e 129-144.

——, «Sobre a Teoria dos Anéis e ideais não cumutativos», Tomo I das *Actas do XIII Congresso Luso Espanhol para o Progresso das Ciências*, 1950.

——, «Sobre anéis de endomorfismos», *Gazeta de Matemática*, Lisboa, 1950.

——, «Über Kontraktions und Vernichtungsideale in der allgemeinen Modulntheorie», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **1** (1951), 297-344.

——, «Sobre ideias de contracção e aniquiladores na Teoria Geral dos Módulos», *Anais Fac. Ci. Porto*, **35** (1950/51), 79-158.

——, «Para a história dos domínios multiplicativos associativos», *Memórias do XXI Congr. Assoc. Esp. Progr. Ciencias*, Madrid, 1951.

——, «Über die unterdirekten Modulnsummen», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **2** (1952), 115-160.

——, *Três Lições Sobre a Teoria Geral dos Anéis*. 1.ª Lição: «Radical-G. Anti-Radical. Ideal Regular Máximo dum Anel»; 2.ª Lição: «Anéis Primitivos»; 3.ª Lição: «Somas Subdirectas de Anéis. Anéis Semi-Simples», *Anais Fac. Ci. Porto*, **36** (1952).

——, «Três Lições Sobre a Teoria Geral dos Anéis, Aplicações e Complementos I (Somas Subdirectas de Módulos, Módulos Semi-Simples, Submódulo-G)», *Anais Fac. Ci. Porto*, **37** (1953).

——, «Três Lições Sobre a Teoria Geral dos Anéis, Aplicações e Complementos II (Módulos e Anéis com Operadores, Anéis Simples e Álgebras Simples)», *Anais Fac. Ci. Porto*, **38** (1954).

——, «Matrizes constantes e periódicas», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **3** (1954), 61-74.

——, *Curso de Álgebra Abstracta*, Lisboa, 1954.

——, «On modules and rings with operators», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **4** (1954/55), 5-62.

——, «Über die nichtassoziativen Ringe, die halbeinfache Moduln sind», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **5** (1955).

——, «Über die Fastgruppentheorie», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **5** (1956), 265-328.

——, «Sur les anneaux demi-premiers», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1958), 89-104.

——, «Sur le suprêmum d'une famille de relations d'equivalence», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1958).

——, *Elementos de Álgebra Linear e de Geometria Linear*, Lisboa, 1958.

——, «μ-systèmes et π-systèmes d'idéaux», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1959), 235-243.

——, «μ-anneaux et μ_0-anneaux», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **8** (1960), 131-144.

——, *Sur la Théorie Générale des Demi-Anneaux I, II*, Paris, «Séminaire Dubreil-Pisot», 1960-1961.

——, «Filtres et réseaux», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **8** (1961), 311-332.

——, «Sur la théorie générale des demi-anneaux», *Publ. Math. Debrecen*, **10** (1963), 14-29.

——, «Sur les μ-demi-anneaux», *Math. Z.*, **108** (1968), 10-14.

——, «Sur les idéaux nucléaires d'un demi-anneaux», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **11** (1968), 277-293.

——, *Cours d'Algèbre Générale*, I. Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa, 1964 (2.ª ed. 1969).

——, *Cours d'Algèbre Générale*, II. Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa, 1968.

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

——, *Cours d'Algèbre Générale*, III. Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa, 1974.

COSTA, A. Almeida e GALVÃO, M. L., «Sur le demi-anneau des nombres naturels», *Anais Fac. Ci. Porto*, **68** (1965), 35-39.

——, «Sur les demi-anneaux réticulés», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **14** (1973), 195-208.

COSTA, A. Almeida; OLIVEIRA, F. Veiga; OLIVEIRA, J. Tiago e MATOS, A. Coimbra de, *Fundamentos matemáticos e físicos da Mecânica Quântica*, Lisboa, 1957.

GUIMARÃES, A. Andrade, *Noção de Número Real (dos Números Naturais aos Números Racionais)*, Junta de Investigação Matemática, Lisboa, 1947.

ARTIN, E., «Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen», *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, v. **5** (1927), 251-260.

BAER, R., «Nets and Groups», *Trans. AMS*, **46** (1939), 110-141.

BIRKHOFF, G., *Lattice theory*, AMS Colloq. Publ., 1940, 1948, 1967.

——, «Subdirect unions in universal algebra, *Bull. AMS*, **50** (1944), 764-768.

MATOS, A. Coimbra de, «Sobre sistemas de divisão direita com unidade direita», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1959), 5-56.

GALVÃO, M. L., «On the theory of residuals», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1959), 283-300.

——, «Sur les idéaux réguliers d'un semi-anneau des nombres naturels», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **8** (1960), 169-173.

——, «Sobre a teoria de Noether-Krull em semi-anéis», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **8** (1961), 175-276.

JACOBSON, N., *The Theory of Rings, Mathematical Surveys* I, AMS, 1943.

——, *Structure of Rings, Mathematical Surveys* XXXVII, AMS, 1956, 1964.

SOUSA, A. J. Madureira e, *Resolução Algébrica das Equações*, Porto, 1932.

FERNANDES, A. Mira, *Grupo de Substituições e Resolubilidade Algébrica II*, Lisboa, 1931.

MONTEIRO, A. A. e RIBEIRO, H., «L'opération de fermeture et ses invariants dans les systèmes partiellement ordonnés», *Portugal. Math.*, **3** (1942), 171-184.

MONTEIRO, A. A., «Caractérisation de l'opération de fermeture par un axiome», *Portugal. Math.*, **4** (1943-45), 158-160.

——, «L'arithmétique des filtres premiers», *C. R. Acad. Sci. Paris*, **225** (1947), 846-848.

——, *Filtros e Ideais I e I*, Rio de Janeiro, 1948.

MORGADO, J., *Reticulados*. Vol. I: *Conceitos fundamentais*. Junta de Investigação Matemática, Portugal, 1956.

——, «On the automorphisms of the lattice of closure operators of a complete lattice», *Rev. Un. Math. Argentina*, **20** (1960), 188-193.

——, «Some results on closure operators of partially ordered sets», *Portugal. Math.*, **19** (1960), 101-139.

——, «Note on the automorphisms of the lattice of closure operators of a complete lattice», *Indag. Math.*, **23** (1961), 211-218.

——, «Quasi-isomorphisms between complete lattices», *Portugal. Math.*, **20** (1961), 17-31.

——, «Some remarks on quasi-isomorphisms between finite lattices», *Portugal. Math.*, **20** (1961), 137-145.

——, *Introdução à teoria dos reticulados*. Tomo I e II. Textos de Matemática, Univ. Recife, 1962.

NOETHER, E., «Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie», *Math. Z.*, **30** (1929), 641-692.

——, «Nichtkommutative Algebra», *Math. Z.*, **37** (1933), 514-541.

RAMALHO, M., «Sur quelques théorèmes de la théorie des groupes», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **8** (1961), 333-337.

RIBEIRO, H., «'Lattices' des groupes abélians finis». *Comment. Math. Helv.*, **23** (1949), 1-17.

——, «A remark on Boolean algebras with operators», *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 163-167.

——, «Topological groups and Boolean algebras with operators», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **4** (1954), 195-200.

STONE, M. H., «Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics», *Casopis pro Pestovani Mathematiky a Fysiky*, 67 (1937), 1-25.

OLIVEIRA, J. Tiago de, «Residuais de Sistemas e Radicais de Anéis», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **5** (1956), 177-245.

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

——, «Identities in Quasigroups», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1959), 359-370.

——, «Nota sobre os Quase-grupos», *Actas do XXVI Cong. Luso-Espanhol Prog. Ci.*, Porto, 1962.

VANDIVER, H. S., «Note on a simple type of algebra in which the cancelation law of addition does not hold», *Bull. AMS*, **40** (1934), 914-920.

GONÇALVES, J. Vicente, «On groups having a set of p-Sylow subgroups», *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **2** (1952), 161-168.

GONÇALVES, J. Vicente (Editor), *Obras Completas de Aureliano de Mira Fernandes*, I, CEEE do ISCEF, 1971.

WAERDEN, B. L. van der, *Moderne Algebra*, tomo 1, 1930 (2.ª ed. 1937); tomo 2, 1931.

——, *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*. Berlin, 1932.

——, *Gruppen von linearen Transformationen*. Ergebnisse der Mathematik, Bd. IV, 1935.

HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO DA MATEMÁTICA APLICADA, EM PORTUGAL, NO SÉCULO XX

ANTÓNIO RIBEIRO GOMES *

Introdução

O convite que o Senhor Prof. Doutor J. Tiago de Oliveira me dirigiu para participar no Colóquio sobre *História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal no Século XX*, ocupando-me do tema Matemática Aplicada, constitui para mim motivo de honra e satisfação, embora a experiência que me falta no tratamento e desenvolvimento histórico dos domínios científicos, mesmo aqueles a que eu estou mais ligado, constituísse imperioso motivo para recusar tão honroso convite.

Não o fiz porque considero que é chegado o momento em que «o espírito se torna incapaz de longas e profundas meditações» [1] e que, portanto, haverei de encontrar a disponibilidade para «reviver», dedicando-me à análise de temas históricos, e porque senti a responsabilidade de aceitação do convite de mão dada com a minha qualidade — que muito prezo — de sócio correspondente desta Academia.

Neste Colóquio sobre *História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal no Século XX* foi-me cometido, como referi, o encargo de analisar o tema Matemática Aplicada.

Uma pergunta ocorre de imediato: o que é a Matemática Aplicada? Que parcela do conhecimento matemático devemos englobar sob esta designação?

* Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA