Instituto Politécnico de Setúbal

Carina Helena José Oliveira

Raciocinando matematicamente com números racionais: Um estudo com alunos do 5.º ano de escolaridade

Relatório da componente de investigação do relatório de estágio orientado pela Prof.ª Doutora Ana Maria Roque Boavida

Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico

Dezembro de 2015

Resumo

O presente documento incide sobre um projeto de investigação desenvolvido no âmbito da unidade curricular *Estágio no 2.º Ciclo*, do curso de Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico. O estudo que desenvolvi tem como principal objetivo analisar e compreender o raciocínio matemático de alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de problemas envolvendo números racionais não negativos. Neste sentido, formularam-se as seguintes questões: (i) Como se caracteriza o raciocínio matemático usado pelos alunos na resolução de problemas envolvendo números racionais não negativos? (ii) A que conhecimentos e representações recorrem para desenvolver e explicitar o seu raciocínio? (iii) Que dificuldades experienciam?

O enquadramento teórico aborda a importância do raciocínio matemático, o seu significado e caracterização. Além disso, foca, nomeadamente o papel das representações, do conhecimento matemático e das tarefas que se propõem aos alunos no desenvolvimento do raciocínio e, ainda, a necessidade de se criarem, na sala de aula, condições para promover e apoiar hábitos de raciocínio.

Do ponto de vista metodológico, o estudo constitui uma investigação sobre a prática que se enquadra no paradigma interpretativo e numa abordagem qualitativa. Neste âmbito, foram realizados dois estudos de caso. Os dados empíricos foram obtidos através da observação participante, recolha documental e entrevistas clínicas realizadas aos alunos caso. Estes dados foram, posteriormente, objeto de uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas.

Os resultados da investigação mostram que os alunos envolvidos no estudo evidenciam atividades associadas ao raciocínio matemático como a explicação, a justificação, a formulação de conjeturas e a generalização. No entanto, as explicações e justificações surgiram com maior frequência do que as outras atividades. Para resolverem as tarefas propostas, recorreram sobretudo, a conhecimentos relacionados com os números racionais representados sob a forma de fração, tanto ao nível do conceito, como dos procedimentos de cálculo, mobilizando, com frequência, relações matemáticas. Além disso, usaram representações icónicas, simbólicas e ativas, nalguns casos para resolverem a mesma tarefa, predominando as icónicas e as simbólicas. Quer os conceitos, relações e procedimentos matemáticos conhecidos, quer as representações utilizadas e as conexões que estabeleceram entre elas, revelaram-se importantes recursos de apoio do raciocínio matemático. Entre as dificuldades encontradas estão, nomeadamente as relacionadas com o explicar e justificar algumas afirmações e com a seleção de estratégias, particularmente, no que se refere à escolha da representação dos números racionais que melhor se adequa ao contexto da tarefa proposta.

Palavras-chave: Aprendizagem da Matemática; Raciocínio matemático; Números racionais; Tarefas; Representações matemáticas.

Abstract

This document is focused on a research project developed within the course "Estágio no 2º Ciclo" of the Master Degree in Teaching in Upper Primary School (levels 1 to 6). The main goal of this project is to analyse and to understand the mathematical reasoning of the 5^{th} grade students when they solve problems involving non-negative rational numbers. In this regard, the following questions were formulated: i) How is characterized students mathematical reasoning in solving problems involving non-negative rational numbers? ii) To which knowledge and representations do they appeal to develop and explain their reasoning? iii) Which difficulties do they experience?

The theoretical framework addresses the importance of the mathematical reasoning, its meaning and main characteristics. Besides, it is focused, particularly, on the role of representations, on the mathematical knowledge and the tasks proposed to student, on reasoning development and, also, on the importance of creating conditions to promote and support reasoning habits within the classroom.

Methodologically, the study is a research into practice that it is framed on the interpretative paradigm and on a qualitative approach. In this sense, were performed two case studies. The empirical data was obtained through participant observation, documental collection and clinical interviews with the case students. This data was, afterwards, object of a qualitative content analyses of content by theme categories.

The study shows that the case students, perform activities associated to mathematical reasoning, such like explanation, justification, conjectures formulation and generalization. However, the explanations and justifications arise more frequently than the other activities. To solve the proposed tasks, the students appealed manly to knowledge related to the rational numbers represented by fractions, both at the conceptual level, as the calculation procedures, often mobilizing mathematical relations. Furthermore, they used iconic, symbolic and active representations, in some cases, to solve the same tasks, predominating the iconic and the symbolic ones. Both the concepts, relations and procedures known, as the representations used and the connections established between them, revealed to be important support resources of mathematical reasoning. Among the difficulties founded are, namely, the ones related to explain and to justify some statement and to the selection of strategies, particularly in what refer to the choice of the representation of rational numbers that best suits to the proposed task context.

Keywords: Mathematics learning; Mathematical reasoning; Rational numbers; Tasks; Mathematical representations.

Agradecimentos

Chega ao fim uma importante etapa na minha vida. Aquela em que alcancei um sonho há muito desejado. Ao longo deste percurso, foram várias as pessoas que me acompanharam, a quem não posso deixar de agradecer.

Quero agradecer, em primeiro lugar, aos meus pais e aos meus irmãos. Peço desculpa por todos os dias em que não fui a filha e a irmã mais paciente e em que o meu mau feitio se deixou levar pela pressão e pelo *stress* que senti. Foi graças a vocês que conquistei esta vitória.

Aos meus padrinhos. Em especial, à minha madrinha, a minha estrelinha guia. Tenho a certeza de que, mesmo não podendo comemorar comigo, está muito orgulhosa de mim.

À minha orientadora, a Professora Ana Maria Boavida, por toda a dedicação e paciência. Pelo tempo que despendeu para me ajudar. Por ser uma professora sempre disponível e pronta a ajudar os seus alunos. Agradeço-lhe toda a ajuda e amizade, ao longo de todo o meu percurso.

A todos os professores cooperantes das escolas onde realizei os estágios porque me possibilitaram crescer, tanto a nível profissional como a nível pessoal. Em especial, à Professora Judite, que possibilitou a realização do meu projeto de investigação.

A todos os meus alunos, por serem uns queridos e por estarem sempre prontos para novos desafios e novas aprendizagens e por terem colaborado comigo, sempre.

À Isabel, amiga e companheira em todos os estágios. Pela paciência para me aturar e para ouvir os meus desabafos, por me aconselhar e por estar sempre ali. Obrigada!

À Lauriana, grande amiga e companheira de trabalho. Pelo apoio ao longo de todo o meu percurso, pela ajuda nas nossas “maratonas” de trabalho. Por tudo…

A todas as pessoas com quem me fui cruzando ao longo deste percurso, amigas e colegas de curso, de Licenciatura e de Mestrado pelos muitos momentos partilhados.

A todas as pessoas que me apoiaram, que acreditaram em mim e me fizeram acreditar que “eu sou capaz!”.

Obrigada!

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

Capítulo I – Introdução

O presente documento incide sobre um projeto de investigação desenvolvido no âmbito da unidade curricular Estágio no 2.º Ciclo, do curso de Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico, cujo foco é a análise dos processos de raciocínio matemático de alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de tarefas envolvendo números racionais não negativos.

Este capítulo está estruturado em três secções. Na primeira apresento a pertinência do estudo, na segunda o objetivo da investigação e respetivas questões e, por último, refiro a organização do documento.

1.1. Pertinência do estudo

Desde sempre gostei de Matemática. Nesta área, o meu foco de interesse sempre esteve relacionado com o raciocínio matemático dos alunos que, no programa de Matemática de 2007, fazia parte do que era designado por "capacidades transversais". Este programa indica que na atividade matemática

> a resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjecturas, a generalização e a demonstração, e a elaboração e refinamento de modelos são algumas das suas dimensões principais. A abstracção e a formalização, e a argumentação lógica e o raciocínio demonstrativo, têm nela um lugar de relevo. (ME, 2007, p. 2)

O atual programa de Matemática (MEC, 2013) faz referência ao raciocínio matemático como um tema transversal a todos os anos de escolaridade. Com efeito, no documento intitulado *Metas curriculares do Ensino Básico – Matemática* (MEC, 2013), que descreve as metas "que os alunos devem atingir durante o Ensino Básico" (p. 1), pode ler-se:

> Os temas transversais referidos no Programa de 2007, como a Comunicação ou o Raciocínio matemático, referem-se a capacidades estruturais indispensáveis ao cumprimento dos objectivos elencados, estando contemplados neste documento de forma explícita ou implícita em todos os descritores. (p.2)

O supramencionado programa refere, ainda, que "a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo" (MEC, 2013, p. 2).

A escolha do tema do projeto que desenvolvi está, também, associada à minha experiência em alguns dos momentos de estágios anteriores (no 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico) onde trabalhei, no domínio Números e Operações, os números racionais não negativos. Nessa altura, constatei que os alunos, para resolverem uma mesma tarefa, podem usar vários raciocínios e utilizar várias representações.

Aquando a realização do estágio no 2.º ciclo, onde desenvolvi o estudo que apresento, os alunos estavam a trabalhar conteúdos relacionados com *números racionais não negativos* representados, nomeadamente sobre a forma de fração.

Ora "o conceito de número racional é fundamental no desenvolvimento matemático dos alunos no ensino básico" (Ventura & Oliveira, 2014, p. 84). Além disso, é também um conceito muito complexo e que levanta várias dificuldades aos alunos devido, por exemplo: (i) aos diferentes significados dos números racionais; (ii) à "comparação de quantidades através das diferentes representações" (*idem*, p. 85); e (iii) à utilização de modelos não adequados para o ensino e aprendizagem deste conteúdo (*ibidem*). Tendo em conta estas dificuldades, Ventura e Oliveira (2014) salientam que o desenvolvimento do sentido de número racional passa, entre outros aspetos, por trabalhar os diferentes significados dos números racionais, as suas diversas representações e como se interligam e, ainda, por desenvolver a destreza no trabalho com estes números.

Assim, a opção pelo tema do projeto que desenvolvi enraíza-se, antes de mais, em motivações pessoais e na sua pertinência contextual. Simultaneamente, decorre da relevância curricular e teórica do tema.

Com efeito, o desenvolvimento do raciocínio matemático tem ganho, progressivamente, uma importância, cada vez maior, no ensino e aprendizagem desta disciplina uma vez que "ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática" (National Council of Teachers of Mathematics, 2007, p. 61). Trata-se de um aspeto essencial em todas as áreas da Matemática e que deve ser trabalhado "independentemente dos ciclos de ensino em que [os alunos] se encontram" (Martins, 2010, p. 54). Dar uma maior ênfase ao raciocínio matemático conduz à importância do ensino e aprendizagem da Matemática deixar de ser conceptualizado como a transmissão de conhecimentos baseados na memorização de regras e procedimentos a que, muito frequentemente, os alunos não atribuem sentido, para passar a focar-se na compreensão dos conceitos e das ideias matemáticas, ou seja, passar a centrar-se na compreensão do "porquê das coisas" (Boavida, 2008; Henriques, 2012).

Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos implica que se conheçam e compreendam os aspetos a ele associados. Na verdade, "a essência dos processos de raciocínio na abordagem e resolução de problemas matemáticos desafiantes não está ainda profundamente desenvolvida e é desconhecida da maioria dos professores" (Henriques, 2012, p. 139). Assim, e sendo o raciocínio matemático

> uma capacidade a desenvolver nos alunos de forma transversal a todos os temas matemáticos e a todos os níveis educativos, é de crucial importância a investigação nesta área que permita compreender melhor como se processa o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, e que tarefas e ações do professor poderão potenciar esse mesmo desenvolvimento. (Domingos & Rodrigues, 2013, pp. 381, 382)

No âmbito do estudo que desenvolvi, assumi que o raciocínio matemático é toda

> a atividade intelectual que o aluno desenvolve quando se envolve com tarefas de natureza problemática com o intuito de as resolver e, para tal, procura dar sentido à situação em causa, relaciona matematicamente os elementos relevantes e produz, em consequência, uma resposta, a qual consegue explicar e/ou justificar de forma coerente por meios próprios. (Canavarro & Pinto, 2012, p. 52)

A atividade intelectual referida por Canavarro e Pinto (2012) é favorecida se se possibilitar que os alunos contactem com tarefas desafiadoras e que, simultaneamente, lhes permitam progredir na aprendizagem da Matemática. Este é um dos aspetos que, enquanto professora valorizo pois, como bem sublinha Ponte (2014), "as tarefas que o professor propõe na sala de aula marcam de forma fundamental o ensino que este realiza" (p. 17) e "o modo como as tarefas são trabalhadas (...) tem uma influência decisiva na aprendizagem dos alunos" (p. 25).

Considero que as tarefas matemáticas são o ponto de partida para a atividade matemática desenvolvida pelos alunos (Delgado, 2013). Estas tarefas podem corresponder, segundo Ponte (2014), a tarefas de desafio elevado (problemas e investigações) ou de desafio reduzido (exercícios e explorações).

A relação entre as tarefas propostas em sala de aula e o desenvolvimento do raciocínio matemático tem sido também alvo de diversos estudos (Canavarro & Pinto, 2012; Henriques, 2012; Ponte, 2014; Santos, 2013; Velez & Ponte, 2013). Neste sentido, Santos (2013) refere que

> o contexto de aprendizagem que o professor proporciona aos alunos é uma dimensão essencial (…) para o desenvolvimento das diferentes atividades do raciocínio matemático. Este contexto é, em particular, construído a partir do modo como as tarefas propostas são exploradas e das aprendizagens valorizadas (…). (p. 26)

Muitos autores consideram que as tarefas matemáticas de desafio elevado, como os problemas e as investigações, constituem um meio privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Por exemplo, para Abrantes (mencionado por Santos, 2013) a resolução de problemas está estreitamente relacionada com o desenvolvimento do raciocínio matemático. Também no documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* é referido que "a resolução de problemas constitui um pilar de toda a matemática escolar. Sem a capacidade de resolver problemas, a utilidade e o poder das ideias, capacidades e conhecimento matemáticos ficam severamente limitados" (NCTM, 2007, p. 212). Boavida, Paiva, Cebola, Vale, e Pimentel (2008) referem que

> a resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjecturas. Trata-se de uma actividade muito absorvente, pois quem resolve um problema é desafiado a pensar além do ponto de partida, a pensar de modo diferente, a ampliar o seu pensamento e, por estas vias, a raciocinar matematicamente. (p. 14)

As mesmas autoras referem ainda que "confrontar os alunos com problemas (…) facilita o desenvolvimento do raciocínio, da organização do pensamento e da capacidade de elaborar estratégias para lidar com situações desconhecidas pelo que estimula a maturidade intelectual" (p. 127).

O desenvolvimento do raciocínio impõe, então, que o professor proponha aos alunos tarefas cuja solução não seja logo atingível através da mera aplicação de conhecimento imediatamente disponível e que, seguindo vários autores (por exemplo, Boavida, Paiva, Cebola, *et al.*, 2008; Lampert, 2001; Vale e Pimentel, 2004), designarei por problemas. Simultaneamente, requer a "participação ativa e empenhada dos alunos, o que implica que lhes seja dado tempo para as desenvolverem e refletirem sobre elas [tarefas]" (Abrantes *et al.*, citados por Santos, 2013, p. 23). Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), "a ausência de elementos de compreensão, raciocínio e resolução de problemas nas actividades dos alunos pode mesmo ser responsável por grande parte das dificuldades que muitos sentem em realizar procedimentos aparentemente simples" (p. 25).

1.2. Objetivo e questões de investigação

A investigação que desenvolvi tem como principal objetivo analisar e compreender o raciocínio matemático de alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de problemas envolvendo números racionais não negativos. Neste âmbito, formulei as seguintes questões:

1. Como se caracteriza o raciocínio matemático usado pelos alunos na resolução de problemas envolvendo números racionais não negativos?
2. A que conhecimentos e representações recorrem para desenvolver e explicitar o seu raciocínio?
3. Que dificuldades experienciam?

1.3. Estrutura do documento

O presente relatório é constituído por cinco capítulos, dos quais este é o primeiro.

No segundo capítulo é apresentado o enquadramento teórico que serviu de referência ao desenvolvimento da investigação. Em primeiro lugar, procurarei clarificar a importância, significado e caracterização do raciocínio matemático. Posteriormente, apresento orientações curriculares no que se refere ao raciocínio matemático, refiro relações entre representações utilizadas pelos alunos e o seu raciocínio matemático e foco o desenvolvimento de hábitos de raciocínio e a seleção e exploração de tarefas na sala de aula. Por fim, debruço-me sobre dificuldades dos alunos.

No terceiro capítulo apresento a metodologia de investigação. Descrevo as principais opções metodológicas, o contexto em que ocorreu a intervenção pedagógica concretizada e os principais contornos associados ao seu desenvolvimento.

A análise de dados é apresentada no quarto capítulo. Está organizada em duas secções distintas, cada uma das quais corresponde a um dos casos estudados.

Por último, no quinto capítulo, apresento as conclusões do estudo baseadas nos resultados obtidos e tendo em conta o objetivo e questões formuladas. Termino este capítulo com uma secção intitulada *Considerações finais* em que procurarei evidenciar, nomeadamente mais-valias que a realização deste trabalho teve para a minha aprendizagem profissional.

Capítulo II – Enquadramento teórico

O presente capítulo constitui a apresentação do quadro teórico de referência sobre as temáticas fundamentais para o estudo que desenvolvi e encontra-se organizado em três secções principais. Na primeira, centro-me na importância, significado e caracterização do raciocínio matemático. Na segunda secção, foco orientações curriculares relacionadas com o raciocínio matemático, a importância das representações matemáticas e das tarefas que se propõem aos alunos para apoiar o desenvolvimento do raciocínio, e hábitos de raciocínio que importa incentivar. Por último, foco-me em dificuldades dos alunos.

2.1. O raciocínio matemático

Esta secção está organizada em torno de três eixos: importância, significado e caracterização do raciocínio matemático.

2.1.1. Importância

O raciocínio matemático é essencial para que as crianças aprendam Matemática com compreensão (Martin & Kasmer, 2009). É, por isso, importante que, ao longo dos anos, desenvolvam métodos de raciocínio cada vez mais sofisticados e que o foco do ensino da Matemática deixe de ser a mera memorização de procedimentos e algoritmos passando a ser a exploração de ideias matemáticas importantes, a formulação de conjeturas, o estabelecimento de conclusões e a enunciação de generalizações (Martin & Kasmer, 2009).

Por essas razões, raciocinar matematicamente é apontado por Semana e Santos (2008) "como um objectivo central do ensino e da aprendizagem da Matemática" (p. 51) desde há muito tempo. Apoiando-se nas ideias de Dewey, estas autoras referem que "é através do raciocínio que acedemos à compreensão de situações matemáticas, que examinamos um problema sobre vários ângulos e que, analisando e estabelecendo relações, transformamos as ideias iniciais em hipóteses que dão origem à formulação de conjecturas" (*ibidem*).

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), realça, no documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), cuja versão original data do ano 2000, que "ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática" (p. 61) e que "os alunos deverão perceber e acreditar que a matemática faz sentido, através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjecturas matemáticas” (*ibidem*).

No mesmo documento destaca-se, também, que, para além de ser uma característica definidora da Matemática, o raciocínio deve ser transversal a todas as áreas de conteúdo e a todos os anos de escolaridade, apesar de ter diferentes exigências quanto à profundidade e rigor.

2.1.2. Significado

Como referi, a aprendizagem da Matemática com compreensão está intimamente relacionada com o raciocínio matemático e com o seu desenvolvimento. No entanto, Yackel e Hanna (2003) referem que “é complicado escrever sobre raciocínio em Matemática porque o termo *raciocínio*, tal como *compreensão*, é amplamente usado tendo subjacente a hipótese implícita que há acordo universal sobre o seu significado” (p. 228). Estas autoras sublinham que “na realidade, a maior parte dos matemáticos e educadores matemáticos usam o termo sem o clarificarem” (*ibidem*).

Face a esta situação, são vários os autores e publicações que tentam elucidar e caracterizar o significado de raciocínio matemático (Boavida, 2008; Lannin, Ellis, & Elliott, 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2012; NCTM, 2009; Oliveira, 2008;).

O NCTM (2009) indica que, “em termos gerais, o raciocínio pode ser pensado como um processo de obter conclusões com base em evidência ou hipóteses estabelecidas” (p. 4)[1]. Esta organização indica que “o raciocínio em matemática é, muitas vezes, entendido como abarcando o raciocínio formal, ou prova, em que as conclusões são deduzidas logicamente a partir de hipóteses e definições” (*ibidem*). Contudo, sublinha que esta visão do raciocínio matemático é redutora. Com efeito,

> o raciocínio matemático pode assumir várias formas, que vão desde explicações e justificações informais a deduções formais, bem como observações indutivas. O raciocínio começa, frequentemente, com explorações, conjeturas a vários níveis, falsas partidas, e explicações parciais antes do resultado ser alcançado”. (NCTM, 2009, p. 4)

Tal como a publicação *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), também Lannin, Ellis e Elliott (2011) consideram que o raciocínio matemático é um processo matemático. Este processo “significa compreender porque é que certas

[1] Tradução adotada para “In the most general terms, reasoning can be thought of as the process of drawing conclusions on the basis of evidence or stated assumptions” (NCTM, 2009, p. 4).

coisas são matematicamente apropriadas e ser capaz de resolver tipos particulares de problemas" (p. 2).

As considerações tecidas sobre o raciocínio matemático pelo NCTM (2007; 2009), bem como o significado que lhe é atribuído por Lannin, Ellis e Elliott (2011), têm vários pontos de contacto com as ideias apresentadas a este propósito por vários outros autores. Por exemplo, Mata-Pereira e Ponte (2012) indicam que "raciocinar é fazer inferências, ou seja, usar a informação existente para chegar a novas conclusões" (p. 82); Oliveira (2008) vê o raciocínio matemático como "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3); Yackel e Hanna (2003), entendem que "o raciocínio matemático é uma atividade coletiva em que os alunos participam enquanto interagem uns com os outros para resolver problemas matemáticos" (p. 228)[2]; Boavida (2008) refere que

> etimologicamente, raciocinar remete para calcular, mas também para usar a razão para julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir, o que conduz a que, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam afirmações ou posicionamentos, ao tentar convencermo-nos a nós próprios, ou a outros, da razoabilidade destas justificações ou ao procurar explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências. (p. 1)

Russel (1999) destaca que "antes de mais, o raciocínio matemático é essencialmente acerca do desenvolvimento, justificação e utilização de generalizações matemáticas" (p. 1). Trata-se de "um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011, p. 12) que não é linear, como pretende ilustrar a figura 1.

[2] Atividade coletiva é a tradução adotada para "communal activity".

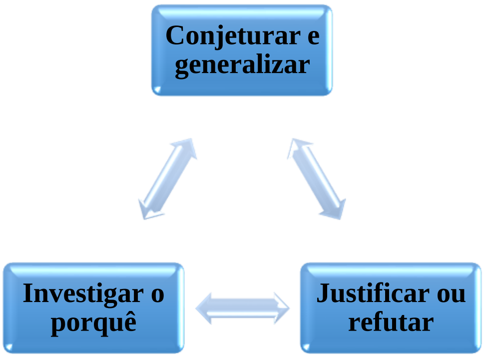


Figura 1 – Um modelo do processo de raciocínio matemático (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011, p.11)

Este processo não é fácil de compreender pelos alunos. Lannin, Ellis e Elliott, (2011) referem que, muitas vezes, começa com a formulação e justificação de conjeturas. Posteriormente, é analisada a validade das conjeturas e identificadas razões que permitem fundamentar porque é que são válidas, ou não, para, se necessário, voltar a rever as conjeturas originais. Uma vez que este é um processo dinâmico, os alunos podem mover-se para trás e para a frente entre as várias atividades em qualquer momento do ciclo (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011).

Uma atividade que o NCTM (2009) considera estar intimamente entrelaçada com o raciocínio matemático é a construção de sentido[3] que consiste em desenvolver a "compreensão de uma situação, contexto ou conceito relacionando-a com o conhecimento existente" (p. 4).

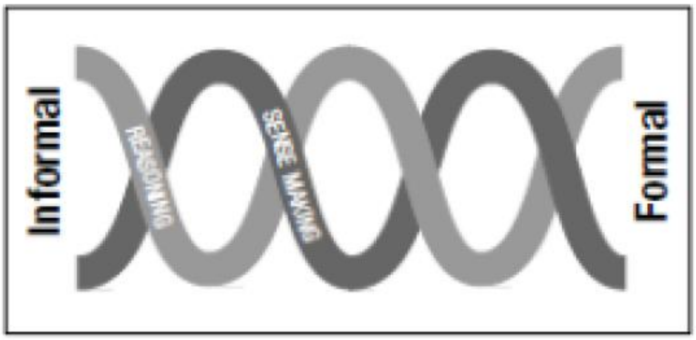


Figura 2 – A relação entre raciocínio matemático e construção de sentido (NCTM, 2009, p.4)

A figura 2 pretende ilustrar que o raciocínio matemático e a construção de sentido estão interligados num processo contínuo que vai das observações informais às deduções formais (NCTM, 2009). Por um lado, o raciocínio matemático formal pode basear-se na construção de sentido em que se identificam aspetos comuns ao longo de um determinado número de observações e se percebe como é que estes aspetos se relacionam com

[3] Construção de sentido foi a tradução adotada para *sense making* (NCTM, 2009, p. 4).

experiências e conhecimentos anteriores. Por outro lado, a construção de sentido entrelaça-se com o raciocínio na medida em que uma "boa prova" (NCTM, 2009, p. 4) contribui para a compreensão do significado do que está a ser provado, ou seja, permite não só ver o que é verdade, mas também porque é verdade (NCTM, 2009).

2.1.3. Caracterização

Como foi sublinhado anteriormente, é difícil definir raciocínio matemático. Apesar disso, é possível distinguir vários tipos de raciocínio. Uma distinção clássica é a referida por Pimentel e Vale (2012):

> classicamente há dois tipos fundamentais de raciocínio: o raciocínio indutivo e o raciocínio dedutivo. O primeiro parte do particular para o geral; parte da observação de dados, sobre os quais formula hipóteses explicativas, e, com base na experimentação em vários outros casos, generaliza a conclusão a um conjunto mais vasto. O segundo surge da necessidade de verificar a validade dessa generalização, e baseia-se em argumentos lógicos. (p. 38)

Aliseda (mencionada por Mata-Pereira & Ponte, 2013), situa o raciocínio matemático no campo dedutivo, caracterizando-o como uma "inferência lógica, em que existe um relação necessária e irrefutável entre premissas e conclusão" (p. 236). No entanto, Rivera e Becker (mencionados por Mata-Pereira & Ponte, 2013)

> alargam o raciocínio matemático ao campo *indutivo*, em que se formulam generalizações a partir da identificação de características comuns a diversos casos, bem como ao campo *abdutivo*, em que se formulam generalizações estabelecendo relações entre diversos aspetos de certa situação. (p. 236, itálico acrescentado)

O raciocínio abdutivo, referido por Rivera e Becker, é também sublinhado por Pimentel e Vale (2012) que consideram "a abdução como uma inferência não necessária que se designa por suposição (*guessing*), uma hipótese explicativa prévia, surgindo assim como uma evidência de como as ideias aparecem incialmente na mente" (p. 39).

Entre as atividades envolvidas no raciocínio matemático estão, segundo Lannin, Ellis e Elliott, (2011), *conjeturar e generalizar*, *investigar porquê* e *justificar ou refutar*. Há muitos outros autores que referem estas atividades, mantendo ou não a mesma designação, ou indicam outras que, de certo modo, com elas se inter-relacionam. Entre estas estão, por exemplo, explicar, argumentar e demonstrar/provar[4]. Foco-me, em

[4] Embora haja autores que, em Matemática, distingam demonstração de prova, neste trabalho considerei as duas palavras sinónimas.

seguida, numa caracterização mais detalhada dos vários tipos de atividades envolvidas no processo de raciocinar matematicamente.

Conjeturar e generalizar. Para Lannin, Ellis e Elliott (2011), "conjeturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver enunciados que provisoriamente se pensa serem verdadeiros, embora não se saiba se o são"[5] (p. 12). Esta atividade é central em Matemática. Mason, Burton e Stacey (1982), definem conjetura como "uma afirmação que parece razoável, mas cuja a verdade não está demonstrada. Por outras palavras, não está justificada convincentemente e ainda não se sabe se foi contrariada por algum contra-exemplo, nem se conhece que tenha algumas consequências falsas" (pp. 71-72).

A formulação de conjeturas é um processo cíclico que

> compreende a seguinte sequência de fases: formular uma conjectura e acreditar nela aquando do seu surgimento; verificar que a conjectura cobre todos os casos conhecidos e exemplos; desconfiar da conjectura, tentando refutá-la, encontrando um contra-exemplo ou usá-la para fazer predições que também podem ser verificadas; compreender por que razão é que a conjectura é verdadeira ou como é que tem de ser modificada. (Martins , 2010, p. 70)

De acordo com Mason (mencionado por Martins, 2010) "toda a enunciação de conjecturas é feita para sugerir ideias, para exteriorizar e depois considerar criticamente algumas noções, seja a abordagem a um problema, a um argumento ou «conhecimento», ou reflexões sobre a aprendizagem e o ensino" (p. 70). É importante que os alunos se envolvam na atividade de formulação de conjeturas "porque são essas ideias que lhes permitem aprender Matemática nova e compreender a Matemática que já aprenderam e usaram" (Henriques, 2012, p. 141).

As "conjeturas podem ou não ser generalizações" (Lannin, Ellis e Elliott, 2011, p. 14), ou seja, "podem ser expandidas de modo a expressar situações ou relações matemáticas em termos gerais, isto é, a formar generalizações" (*ibidem*). Se, por exemplo, um aluno souber que tanto $\frac{5}{8}$ como $\frac{4}{5}$ são números menores que 1, pode conjeturar que $\frac{5}{8}+\frac{4}{5}$ é um número menor que 2 e, a partir daqui, formular uma nova conjetura que é uma generalização: se adicionar uma fração menor que 1 com outra também menor que 1, a soma será sempre menor que dois.

[5] Tradução adotada para: "Conjecturing involves reasoning about mathematical relationships to develop statements that are tentatively thought to be true but are not known to be true." (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011, p. 12)

De acordo com Lannin, Ellis e Elliott (2011), “a generalização envolve identificar semelhanças entre casos ou estender o raciocínio para além do caso que o originou (...) [bem como] identificar a aplicação da generalização através do reconhecimento do domínio relevante” (p. 12). Estes autores destacam que “os alunos generalizam quando se focam num aspeto particular de um problema ou numa ideia e pensam nesse aspeto de forma mais abrangente” (p. 16).

A generalização pode partir, então, “de uma conclusão ou conjetura específica para formular uma conjetura de âmbito mais geral (…) [e] começa quando nos apercebemos da existência de uma regularidade, isto é, quando observamos certas características comuns a muitos exemplos particulares e ignoramos outras” (Henriques, 2012, p. 141).

Pelo que referi, constata-se que a generalização é uma atividade intimamente associada à formulação de conjeturas. Segundo Lannin, Ellis e Elliott (2011) ambas as atividades envolvem “usar e clarificar o significado de termos, símbolos e representações” (p. 12).

Pimentel e Vale (2012) referem que “as generalizações são construídas através de representações e argumentações e vão sendo expressas de um modo gradualmente mais formal de acordo com a idade” (p. 40). As mesmas autoras defendem que a generalização é “crucial na atividade matemática” (*ibidem*) e que, na sala de aula, não proporcionar aos alunos oportunidades para generalizar é sinónimo de uma aula onde não ocorre pensamento matemático.

Investigar porquê. Esta característica do raciocínio matemático remete para a atividade de “investigar diversos factores potenciais que podem explicar *porque é que* uma generalização é verdadeira ou falsa” (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011, p. 12). Trata-se de um “eixo essencial no raciocínio matemático” (*idem*, p. 30) que inclui atender a aspetos particulares que proporcionem *insights* sobre relações passíveis de encontrar a referida explicação (*ibidem*).

São vários os autores e organizações que sublinham a importância desta atividade, para além de Lannin, Ellis e Elliott (2011). Por exemplo, o NCTM (2007) refere que “juntamente com a formulação e investigação de conjecturas, os alunos deverão aprender a responder à questão Porque é que isto resulta?.” (p. 63). Também Boavida (2008) defende que “criar condições para os alunos aprenderem a raciocinar matematicamente passa não apenas, nem sobretudo, por propor-lhes tarefas com determinadas características, mas por ajudá-los a desenvolver um hábito de pensamento que tem a ver com o «porquê das coisas»" (p. 1). Porém, investigar porque é que uma afirmação é verdadeira ou falsa é uma atividade frequentemente negligenciada no que diz respeito ao raciocínio matemático (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011).

Justificar e refutar. A justificação matemática é, segundo Lannin, Ellis e Elliott (2011) "um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas" (p. 35). Os mesmos autores referem que "os alunos constroem justificações para convencerem a si próprios e aos outros sobre o porquê de uma afirmação particular ser verdadeira" (*idem*).

A justificação é "um elemento central no raciocínio matemático" (Henriques, 2012, p. 141) que "envolve várias componentes importantes" (*ibidem*). Entre estas componentes estão

> criar argumentos, explicar porque é que são verdadeiros e compreender o papel das definições e contra-exemplos nesse processo. Deste modo, a justificação não só fornece razões convincentes para as conjeturas estabelecidas, como permite aos alunos tornar o seu raciocínio claro e aumentar a sua compreensão conceptual. (Henriques, 2012, p. 141)

A propósito da justificação, o documento *Príncipios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) refere que "os alunos dos primeiros anos de escolaridade terão tendência para justificar afirmações gerais utilizando casos específicos" (p. 63) e que, "nos últimos anos do 1.º ciclo e princípio do 2.º ciclo, as justificações deverão ser mais gerais e podem ser construídas a partir de outros resultados matemáticos" (*ibidem*). O mesmo documento indica que "os alunos precisam de explicar e justificar o seu raciocínio e de aprender a detectar falácias e a criticar os raciocínios dos colegas" (*idem*, p. 220).

Uma justificação pode estar matematicamente correta, ou não. Além disso, pode estar mais ou menos completa. A esse respeito, Lannin, Ellis, e Elliott (2011) referem que as tentativas iniciais para formular justificações incluem afirmações válidas e inválidas ou que precisam de ser mais aprofundadas. Para os autores "justificações válidas devem mostrar porque é que uma afirmação é verdadeira para qualquer caso envolvido numa generalização" (p. 35). Por exemplo, para mostrar que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes, um aluno pode justificar a equivalência dizendo que pode dividir por 2 o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{4}$ e obtém a fração $\frac{1}{2}$ e que, por isso, a fração $\frac{2}{4}$ representa o mesmo número que $\frac{1}{2}$, podendo aplicar este processo a quaisquer duas frações. Apesar de formular uma conclusão válida, baseada num exemplo específico, a justificação que apresenta refere-se a uma forma geral para encontrar frações equivalentes. No entanto, esta justifcação não apresenta uma razão para que este processo permita encontrar frações equivalentes. Com efeito, esta justificação é insuficiente uma vez que deixa algumas dúvidas sobre a relação descrita: "*porque é que ao dividir o numerador e o denominador por 2 permite obter frações equivalentes? Será que esta relação se verifica se adicionarmos 2 ao numerador e denominador?*" (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011, p. 38, itálico acrescentado).

Com efeito, "desenvolver uma justificação válida para uma generalização é complexo" (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011, p. 41). Isto porque deve utilizar uma "linguagem geral que revele que se aplica a mais do que um exemplo particular" (*idem*, p. 35) e usar um raciocinio que "apoie o estabelecimento da relação geral e que mostre que ela se mantém para todos os casos do domínio" (*idem*, 41).

Quando a justificação prova que as afirmações produzidas são falsas, estamos perante uma refutação dessas afirmações. Refutar, como referem Lannin, Ellis e Elliott (2011), "envolve mostrar que uma determinada afirmação é falsa" (p. 41). Estes autores sublinham que, uma vez que conjeturar origina afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas, refutar e validar essas afirmações é de extrema importância.

Para refutar uma conjetura basta um contraexemplo. Contudo, na maioria das vezes, os alunos não consideram um contraexemplo o suficiente para refutar as afirmações produzidas e, consequentemente, a sua conjetura (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011, p. 43). Posto isto, é importante que os alunos reconheçam que "um único contraexemplo pode invalidar uma conjetura" (*ibidem*).

Boavida, Paiva, Cebola, *et al.* (2008) referem que as conjeturas

> são sempre "suspeitas" e, se não se conseguir encontrar um contra-exemplo que as refute, devem ser seguidas de outras actividades – procurar porquê e explicar porquê, ou seja, produzir uma *argumentação convincente e matematicamente válida*, que terá de convencer um leitor/ouvinte crítico (p. 100)

evidenciando, assim, a estreita relação que existe entre *conjeturar*, *generalizar*, *justificar*, *refutar*, *explicar* e *argumentar*.

Explicar, argumentar e provar. Na sala de aula a atividade de justificar aparece, muito frequentemente, entrelaçada com a de explicar (Boavida, Paiva, Cebola, *et al.*, 2008).

Mota (2014), mencionando Bishop e Goffree, refere que "explicar é mais do que dizer e descrever" (p. 17). Para estes autores (citados por Mota, 2014) explicar é um "processo sem fim de representar as conexões, as relações entre a ideia que se está a explicar e as outras ideias" (*ibidem*). Balacheff (2013) situa a explicação ao nível do sujeito que a apresenta (o locutor). É, antes de mais, para si próprio que a explicação "estabelece e garante a validade de uma proposição" (p. 1). Simultaneamente, refere que se trata de "um discurso que visa tornar inteligível a um outro a verdade da proposição já adquirida pelo locutor" (p. 2). Yackel (2001) refere que as explicações matemáticas quer dos alunos, quer dos professores, têm como principal objetivo "clarificar aspetos do seu pensamento matemático que pensam não ser prontamente evidentes para outros" (p. 13).

Relativamente à argumentação, Boavida, Paiva, Cebola, *et al.* (2008) referem que esta corresponde a "uma tentativa de justificar uma ideia, ou um conjunto de enunciados, a partir daquilo que se crê como verdadeiro, um processo em que as inferências se apoiam, principalmente, sobre os conteúdos daquilo que se enuncia" (p. 84). As autoras referem que, na argumentação, têm importante destaque

> a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê e de determinados resultados ou situações, a formulação, teste e prova de conjecturas e a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático. (Boavida, Paiva, Cebola, *et al.*, p. 84)

Também os argumentos estão sujeitos a uma avaliação da sua validade. Com efeito, Lannin, Ellis, e Elliott (2011) destacam que

> avaliar a validade dos argumentos não é apenas uma questão de decidir se eles são válidos em termos das suas conclusões. Também envolve determinar se eles incluem corretas ou incorretas afirmações, conclusões válidas com lógicas incorretas, ou argumentos válidos que, apesar disso, explicam apenas uma parte da afirmação. (p. 45)

A atividade de argumentar está estreitamente relacionada com a atividade de justificar e, por esta via, com a de provar. Por exemplo, Sowder e Harel (1998), consideram que as provas matemáticas são, talvez, o derradeiro objectivo das justificações. Estes autores, referem que provar ou justificar um resultado envolve a verificação – ou seja, convencer-se a si próprio – e a persuasão – isto é, convencer os outros.

Para refletirem sobre as justificações dos alunos, Sowder e Harel (1998) apresentam a noção de *esquema de prova*, sublinhando que, nesta noção, a palavra prova é usada no amplo e psicológico sentido de justificação em vez de no sentido mais restrito de prova matemática. Estes autores indicam que um esquema de prova de um aluno consiste em tudo o que constitui verificação e persuasão para esse aluno e organizam os esquemas de prova em três categorias: (i) esquemas de prova baseados externamente, (ii) esquemas de prova empíricos, e (iii) esquemas de prova analíticos, alertando para o facto de existirem esquemas de prova mais sofisticados do que outros.

Os esquemas de prova baseados externamente, que se podem distinguir em autoritários, rituais e simbólicos, dizem respeito a tudo o que convence os alunos ou que os alunos utilizam para convencer os outros e cuja proveniência é uma fonte de autoridade exterior. Ao recorrer a um esquema de prova autoritário, o aluno acredita poder apoiar-se, por exemplo, num manual ou nas afirmações do professor para justificar uma determinada afirmação ou resultado. Um aluno que analisa se um argumento está, ou não correto, pela sua forma e não pelo seu conteúdo usa um esquema de prova ritual. Por exemplo, aceita como prova matemática aquela cujo formato está em duas colunas. Um esquema de prova simbólico é utilizado quando o aluno utiliza símbolos matemáticos para apresentar justificações. Ao utilizar este esquema, os alunos podem usar símbolos sem lhes atribuir qualquer significado ou então evidenciar um bom domínio dos símbolos. Este domínio é importante, especialmente em álgebra.

Os esquemas de prova empíricos caracterizam-se por serem justificações baseadas em exemplos. Neste âmbito, Sowder e Harel (1998) distinguem os esquemas perceptuais dos baseados em exemplos. Nos esquemas de prova perceptuais os alunos baseiam as suas justificações em desenhos, ao contrário do que acontece nos esquemas de prova baseados em exemplos onde os alunos justificam e avaliam as suas conjeturas através de um ou mais exemplos.

No que diz respeito aos esquemas de prova analíticos, Sowder e Harel (1998) consideram-nos como as justificações mais elaboradas matematicamente. Subdividem estes esquemas em transformacionais e axiomáticos. Um aluno utiliza um esquema transformacional quando relaciona aspetos mais gerais de uma determinada situação de modo a formular conjeturas gerais. Nos esquemas de prova axiomáticos os resultados são estabelecidos como consequências lógicas de resultados anteriores. Uma organização cuidada destes esquemas requer termos indefinidos, definições, hipóteses e teoremas.

O conjunto dos esquemas apresentados permite, de acordo com os autores, avaliar as justificações dadas pelos alunos o que permite guiá-los para raciocínios mais sofisticados.

Relativamente à atividade de provar, Boavida, Paiva, Cebola, *et al.* (2008) referem que é "na atitude de procurar justificações para as afirmações que se fazem e os resultados que apresentam que se pode enraizar e ganhar sentido a actividade de demonstrar" (p.

13). Neste sentido, “uma boa prova é aquela que, para lá de convencer, explica, faz avançar na compreensão de uma ideia, problema ou resultado matemático e clarifica porque é que uma relação funciona ou não” (*idem*, p. 88).

2.2. Criando condições para o desenvolvimento do raciocínio matemático na sala de aula

Esta secção está estruturada em quatro subsecções: o raciocínio matemático no currículo, a sua relação com as representações do conhecimento matemático, o desenvolvimento de hábitos de raciocínio e a seleção e exploração de tarefas matemáticas na sala de aula.

2.2.1. O raciocínio matemático no Currículo

Tal como já foi referido na secção anterior, o raciocínio matemático é, cada vez mais, um aspeto central no ensino e aprendizagem da matemática. Em *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007, p. 220), são destacados os seguintes aspetos, no que diz respeito à norma *Raciocínio* e *Demonstração*[6] nos programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano: i) reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspetos fundamentais da matemática; ii) formular e investigar conjeturas matemáticas; iii) desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas; iv) selecionar e usar diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração.

No que diz respeito aos anos de escolaridade compreendidos entre o 3.º e o 5.º, o mesmo documento refere que, ao longo destes anos, “a formulação de conjecturas e a sua avaliação perante as evidências deverá ser a norma” (*ibidem*). Nestes níveis de ensino, o trabalho deverá centrar-se no raciocínio sobre as relações matemáticas, identificando relações e analisando se e porque são verdadeiras e onde podem ser aplicadas (NCTM, 2007).

As ideias apresentadas neste documento vão ao encontro do que é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em 2007. Aqui o raciocínio matemático é apresentado como um objetivo importante e como uma capacidade transversal a todo o currículo sendo descrito como uma

[6] No original, *Reasoning and Proof*

> capacidade fundamental, envolvendo a formulação e teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo. Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria. (ME, 2007, p. 8)

Considerar que o raciocínio é uma capacidade transversal que todos os alunos devem desenvolver,

> reforça a assunção de que o conhecimento matemático não ocorre por mera transmissão de informação que o aluno treina, resolvendo tarefas rotineiras, e reproduz. Antes, assenta na consideração de que o conhecimento matemático se constrói, e que nesse processo assume particular importância a intuição, a experimentação, a formulação de conjeturas, a generalização e a construção de cadeias argumentativas que a valide. (Cabrita & Fonseca, 2012, p. 540)

O atual programa de matemática, publicado em 2013, apesar de seguir uma linha diferente do programa anterior, faz também referência à importância do desenvolvimento do raciocínio matemático desde o 1.º ciclo do ensino básico:

> é decisivo para a educação futura dos alunos que se cultive de forma progressiva, desde o 1.º ciclo, algumas características próprias da Matemática, como o rigor das definições e do raciocínio, a aplicabilidade dos conceitos abstratos ou a precisão dos resultados. (MEC, 2013, p. 2)

Neste documento, relativamente aos desempenhos dos alunos, o verbo *justificar* é apenas enunciado no 3.º Ciclo. No entanto, se lermos o que é dito em relação aos outros ciclos, deparamo-nos com várias situações onde os alunos são levados a enveredar por atividades associadas ao raciocínio matemático como, por exemplo, *justificar* e *argumentar*.

No 1.º Ciclo, o raciocínio matemático, ainda que implicitamente, aparece associado aos desempenhos *estender* – "o aluno deve utilizar corretamente a designação referida, reconhecendo que se trata de uma generalização" (p. 3) – e *reconhecer*: "o aluno deve reconhecer intuitivamente a veracidade do enunciado em causa em exemplos concretos. Em casos muito simples, poderá apresentar argumentos que envolvam outros resultados já estudados e que expliquem a validade do enunciado" (*ibidem*). O mesmo acontece no 2.º Ciclo, nos mesmos desempenhos, embora com diferentes níveis de exigência.

No programa de matemática de 2013, considera-se que "o raciocínio matemático é por excelência o hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental, uma vez que preside, em Matemática, à formulação de conjeturas” (MEC, p. 4). No entanto, como refere Boavida (2015), “dar a primazia ao raciocínio hipotético-dedutivo remetendo para plano secundário processos intuitivos, observações indutivas, explicações, justificações e métodos informais de matematização, é caminhar em sentido contrário ao que fez progredir a Matemática, eliminando bases poderosas para a aprendizagem” (p. 1).

2.2.2. Representações e raciocínio matemático

A maior parte, se não toda, a atividade matemática, depende intimamente de uma grande diversidade de representações “que apoiem a compreensão e favoreçam a comunicação de ideias matemáticas” (Henriques, 2012, p. 142).

Quaresma e Ponte (2013), estabelecem uma estreita relação entre o raciocínio matemático e as representações, defendendo que “só é possível compreender o modo de pensar e de raciocinar dos alunos observando as suas representações” (p. 279).

Quanto ao significado de representações matemáticas, Rico (2009) considera que estas correspondem a

> todas aquelas ferramentas – signos ou gráficos – que tornam presentes os conceitos e procedimentos matemáticos e com as quais os sujeitos abordam e interagem com o conhecimento matemático, ou seja, registam e comunicam o seu conhecimento matemático. (p. 3)

Tripathi (2008) perspetiva uma representação matemática como “uma construção mental ou física que descreve aspetos de uma estrutura inerente a um conceito e as relações entre o conceito e outras ideias” (p. 438). A autora refere que as representações são uma forma de “interpretar, comunicar e discutir uma ideia com os outros” (p. 438).

Esta perspetiva tem pontos de contacto com o significado atribuído a representação pelo NCTM no documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007): “o termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação expressa de uma determinada forma e à forma, em si mesma” (p. 75). O mesmo documento salienta, também, que este “termo é aplicável tanto aos processos observados externamente, como aos que ocorrem “internamente”, nas mentes dos indivíduos quando fazem matemática” (*ibidem*) remetendo, assim, para a existência de dois tipos distintos de representações: as internas e as externas. Tal como referido anteriormente, as representações internas são aquelas que ocorrem nas “mentes dos indivíduos” (NCTM, 2007, p. 75) e as externas “têm existência física, seja em papel, seja num ecrã de computador, seja num outro suporte qualquer" (Ponte, 2014, p. 23 mencionando Goldin).

Para a investigação desenvolvida, foco-me apenas nas representações externas. A propósito destas representações, são vários os autores que apresentam diferentes categorizações (por exemplo, Brunner, 1999; Coelho, 2010; Preston & Garner, 2003; Tripathi, 2008).

Tripathi (2008) sublinha que uma "representação [de um conceito matemático] deveria incluir componentes concretas, verbais, numéricas, gráficas, contextuais, pictóricas ou simbólicas que retratam aspetos do conceito" (p. 438). Brunner refere representações de três tipos:

> i) representações ativas, relativas ao conjunto de ações adequadas para referir ou alcançar certo resultado; ii) representações icónicas, relativas ao conjunto de imagens ou gráficos que sucintamente se referem a uma certa ideia ou processo; iii) representações simbólicas, relativas ao conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições. (Canavarro & Pinto, 2012, p. 55, mencionando Brunner)

A categorização de Brunner é, também, referida por Boavida, Paiva, Cebola, *et al.* (2008) que apresentam um modelo que permite destacar as relações entre os vários tipos de representações indicadas por este autor (figura 3).

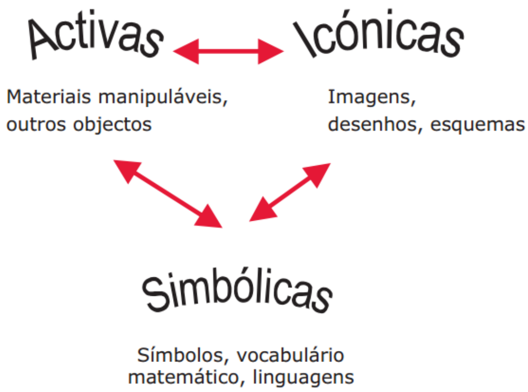


Figura 3 - Modos de representação (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008, p. 72)

No que diz respeito às representações icónicas, Canavarro e Pinto (2012) distinguem três tipos distintos: (i) desenhos, (ii) símbolos não convencionais, e (iii) diagramas. Além disso, as autoras referem-se ainda às representações simbólicas como "representações simbólicas convencionais" (p. 61).

Apoiando-se nas ideias de Smole e Diniz, as autoras referem que "o desenho serve como recurso de interpretação do problema e também como registo da solução" (p. 56).

Além disso, permitem “representar alguns elementos ou a totalidade da situação apresentada no enunciado, sem expressar relações que identifiquem as transformações numéricas” (Canavarro & Pinto, 2012, p. 57 mencionando Cavalcanti).

Os símbolos não convencionais dizem respeito a representações utilizadas “pelas crianças para representar determinados elementos do real” (p. 57) podendo apresentar-se “sob a forma de traços verticais, traços horizontais, círculos, setas, etc…” (*ibidem*).

Os diagramas, também designados por esquemas, correspondem a representações visuais. Canavarro e Pinto (2012) salientam que “podem ser encarados como representações da estrutura dos problemas e podem transformar-se em verdadeiras ferramentas de apoio ao raciocínio matemático por permitirem desocultar as relações matemáticas em presença” (p. 58).

Para as autoras, as representações simbólicas convencionais correspondem “ao conjunto de símbolos específicos da Matemática (…) símbolos esses que representam noções abstratas e relações” (Canavarro & Pinto, 2012, p. 62). Os algarismos, sinais de operações e gráficos cartesianos são alguns desses símbolos.

Dados os diferentes usos das representações, Preston e Garner (2003) apresentam uma tabela em que, para além de explicitarem diferentes tipos, sintetizam, nomeadamente os seus usos típicos (tabela 1).

Tabela 1 – Representações: tipos e usos (Preston & Garner, 2003, p. 42)

REPRESENTAÇÃO	**USOS TÍPICOS**
Verbal	Apresentação do problema original, comunicar com outros durante a resolução do problema e relatar os resultados finais.
Pictórica	Recolha de informação a partir do problema; modelar movimentos num problema de ação.
Numérica/Tabelar	Usada como trabalho preliminar na compreensão de um problema; encontrar exemplos específicos que se ajustem ao contexto; prever e testar; muitas vezes organizada em forma de tabela.
Gráficas	Útil para mostrar aumentos, reduções, máximos, mínimos, interseções; particularmente útil na comunicação de resultados.

Algébricas	Quando os alunos começam a sentir-se suficientemente confiantes com o contexto para generalizar; uma minoria dos alunos acompanha, naturalmente, esta representação.

Apesar de, na literatura, surgirem categorizações distintas das representações, há uma ideia que é comum: a importância das conexões entre diferentes representações. Tripathi (2008) salienta que "uma representação matemática destaca, muitas vezes, apenas um aspeto de um conceito matemático" (p. 438) sublinhando que "um quadro holístico do conceito começa a emergir apenas quando (…) observamos a ideia a partir de diferentes perspetivas" (*ibidem*). Por seu turno, Coelho (2010), mencionando Scheuermann e Garderen, refere que recorrer a diversas formas de representação na sala de aula permite que os alunos visualizem "de uma forma menos abstracta, determinadas ideias ou conceitos, tornando mais acessível a sua compreensão" (p. 46). Indo na mesma linha, o documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) refere que "representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações ou conceitos complexos" (p. 77) sendo fundamental que os alunos contactem com "uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão" (*ibidem*). Por essa razão, defende que "a importância da utilização de múltiplas representações deverá ser privilegiada ao longo da educação matemática dos alunos" (NCTM, 2007, p. 77). A mesma ideia é também salientada por Henriques (2012) quando refere que "os alunos devem tornar-se familiares com uma variedade de representações que suportem o seu raciocínio e ser capazes de as usar, de forma flexível, na resolução de problemas matemáticos e para desenvolver compreensão dos conceitos" (p. 143). Com efeito, "quanto mais diversificadas as representações a que os alunos têm oportunidade de ligar novos conceitos ou procedimentos, mais provável é que possam recorrer a conhecimentos anteriores que constituam âncoras para as novas ideias" (Boavida, Paiva, Cebola, *et al.*, 2008, p. 74).

Neste sentido,

> dar a possibilidade aos alunos de contactarem e usarem diversas formas de representar, incentiva-os a criarem as suas próprias representações para resolver problemas. Ajuda-os, ainda, a estabelecer conexões entre diferentes representações, favorecendo a criação de condições para que disponham, não só de mais recursos comunicativos, mas, sobretudo, para que aprofundem a sua compreensão de ideias matemáticas assim como das suas relações. (Coelho, 2010, pp. 59, 60)

As representações dos “alunos podem conter uma riqueza de informação incalculável, nomeadamente sobre o que os alunos entendem e conseguem fazer em Matemática” (Coelho, 2010, p. 46) e, portanto, ao analisar, questionar e interpretar estas representações “os professores poderão aperceber-se do raciocínio dos alunos e da sua apreensão dos conceitos matemáticos” (NCTM, 2007, p. 160). Assim, ao observar as suas representações, torna-se mais fácil, para o professor, compreender a interpretação e o raciocínio dos alunos (Mata-Pereira & Ponte, 2012, p. 85).

O NCTM (2007) refere que as representações são um aspeto central no estudo da Matemática uma vez que “os alunos podem desenvolver e aprofundar os seus conhecimentos sobre conceitos e relações matemáticas, à medida que criam, comparam e utilizam representações diversas” (p. 332). À semelhança do raciocínio matemático, também a representação é uma das normas de processo indicadas por esta organização Neste âmbito, defende que, ao longo do seu percurso escolar, os alunos devem ficar habilitados a: (i) “criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; [(ii)] selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas; [(iii)] usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos” (NCTM , 2007, p. 75).

Em síntese, as representações dos alunos possuem muita informação útil para que se consiga aceder ao seu raciocínio, particularmente, ao que os alunos entendem e conseguem fazer em Matemática (Coelho, 2010). Posto isto, para além de beneficiarem as aprendizagens e incentivarem o pensamento dos alunos, as representações fornecem aos professores informação sobre a aprendizagem dos seus alunos e são, ainda, um importante suporte para a apresentação e comunicação de ideias.

Uma vez que os conteúdos trabalhados durante o estudo incidiram nos números racionais, é importante referir que “o numeral decimal, a fracção, a percentagem, a recta numérica e as linguagens natural e pictórica são representações que um número racional pode tomar e que os alunos devem compreender” (Ponte & Quaresma, 2011, p. 57). Contudo, Ponte e Quaresma (2011) referem algumas dificuldades dos alunos tendo em conta estas diferentes representações.

2.2.3. Desenvolver hábitos de raciocínio na sala de aula

O desenvolvimento do raciocínio matemático ocorre gradualmente, ao longo da escolaridade dos alunos, e é parte fundamental da atividade matemática. Assim sendo, colocar o foco do ensino e aprendizagem da Matemática no raciocínio matemático implica proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que lhes permitam desenvolver hábitos de raciocínio matemático (NCTM, 2009).

Os hábitos de raciocínio são, segundo o NCTM (2009), formas produtivas de pensar que se tornam comuns no processo de pesquisa matemática[7] e de construção de sentido. Entre os hábitos de raciocínio indicados pelo NCTM (2009) estão:

i) Analisar um problema: nomeadamente, identificar conceitos, procedimentos ou representações matemáticas relevantes que revelem informação importante sobre o problema e contribuam para a sua resolução; procurar padrões e relações; considerar casos especiais ou problemas análogos mais simples; fazer deduções preliminares e formular conjeturas, o que inclui prever o que a solução de um problema pode envolver ou introduzir restrições em soluções;

ii) Implementar uma estratégia: nomeadamente, usar procedimentos com propósitos; organizar a resolução; fazer deduções lógicas com base no progresso e testar conjeturas; monitorizar o processo de resolução;

iii) Procurar e usar conexões entre diferentes domínios matemáticos, diversos contextos e várias representações;

iv) Refletir sobre a solução do problema: nomeadamente, interpretar uma solução obtida e de que forma responde ao problema; considerar a razoabilidade de uma solução; justificar ou validar uma solução; refinar argumentos; generalizar uma solução para uma classe mais ampla de problemas e procurar conexões com outros problemas.

Para que os alunos desenvolvam os hábitos de raciocínio referidos, é fundamental que, por exemplo, o professor: i) proponha tarefas que exijam que os alunos representem coisas por eles próprios; ii) lhes solicite que expliquem o problema por palavras suas, incluindo quaisquer hipóteses que possam ter formulado; iii) os questione de forma a incentivar o seu raciocínio – por exemplo, "porque é que isto funciona?" ou "como é que sabes?"; iv) lhes dê tempo para formularem os seus próprios raciocínios; v) os encoraje a questionarem-se a si próprios e aos seus colegas; os incentive a comunicarem o seu raciocínio a outros usando vocabulário matemático apropriado (NCTM, 2009).

Nesta linha de ideias, Quaresma e Ponte (2013) referem que é importante que os alunos

[7] Pesquisa matemática foi a tradução adotada para *mathematical inquiry* (NCTM, 2009, p. 9)

> (i) Façam justificações através de argumentos lógicos baseados em ideias já compreendidas anteriormente, (ii) justifiquem refutações partindo do facto de uma determinada afirmação ser falsa, (iii) avaliem a validade dos argumentos utilizados, (iv) tenham presente que uma justificação matemática não é um argumento baseado na autoridade, perceção, senso comum ou exemplos particulares, e (v) procurem justificar o porquê de uma generalização ser verdadeira ou falsa investigando quais os fatores que podem influenciar essa generalização. (p. 280)

Para que isso aconteça, é imprescindível que seja estabelecido na sala de aula um ambiente onde os alunos se sintam à vontade para partilharem as suas ideias e raciocínios com os seus colegas, o que requer capacidade de escuta, respeito, confiança e ajuda mútua. Esse ambiente é necessário para que os alunos se sintam confortáveis a partilhar a forma como pensaram e analisar de uma forma crítica tanto os seus argumentos como os dos seus colegas de modo a que, em conjunto, compreendam ideias matemáticas relevantes (Boavida, 2008; NCTM, 2009).

2.2.4. Seleção e exploração de tarefas matemáticas

Como referi anteriormente, um dos aspetos importantes para o desenvolvimento dos hábitos de raciocínio indicados são as tarefas que o professor propõe aos alunos, a que acrescento a forma como as explora na sala de aula.

Walls (2005) indica que tipicamente os professores propõem tarefas matemáticas com diversos propósitos entre os quais estão a "introdução de novas ideias matemáticas, a prática de destrezas previamente aprendidas, a avaliação de destrezas matemáticas dos alunos, [e] a identificação e agrupamento dos alunos de acordo com os seus desempenhos matemáticos" (p. 752). Seja qual for o propósito, parece não haver grandes dúvidas que as tarefas "fornecem os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos" (Ponte, 2014, p. 16, referindo o NCTM). As tarefas matemáticas são, por isso, essenciais para a aprendizagem dos alunos porque "exprimem mensagens sobre o que é a matemática e o que significa fazer Matemática" (Henriques, 2012, p. 144).

Importa, por isso, clarificar o que se entende por "tarefa matemática". Autores como Christiansen e Walther (mencionados por Delgado, 2013) referem que "a tarefa constitui o objeto de atividade dos alunos, o que significa que a atividade de aprendizagem matemática que estes desenvolvem está relacionada com a tarefa proposta" (pp. 67, 68).

Assumindo, para os efeitos da minha investigação, que *tarefa matemática* corresponde ao "ponto de partida para o desenvolvimento da (…) atividade matemática" (Ponte, Boavida, Graça, & Abrantes, 1997, p. 73) dos alunos, considero que é fundamental que o professor dê "maior atenção à seleção e construção de tarefas"

(Delgado, 2013, p. 68). Com efeito, "a proposta de tarefas em conjunto com as ações a elas respeitantes realizadas pelo professor constitui o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja transmitida aos alunos". (Christiansen e Walther, citados por Ponte, 2014, p. 15).

As tarefas podem assumir diferentes formas. Com efeito, podem ser "questões, atividades, problemas, práticas, novas aprendizagens, lições, exemplos, experiências de aprendizagem, programas de trabalho, projetos, investigações ou propostas de trabalho de casa" (Walls, 2005, p. 752).

Também Ponte (2005), distingue diferentes tipos de tarefas tendo em conta o grau de desafio e o grau de estrutura. O grau de desafio está relacionado com "percepção da dificuldade de uma questão" (p. 17) e varia entre o grau reduzido e o grau elevado. O grau da estutura varia entre aberto e fechado: uma tarefa aberta "comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido ou em ambas as coisas" (*ibidem*); uma tarefa fechada é aquela em que é explicito aquilo que é dado e pedido (Ponte, 2005). Cruzando estas duas dimensões, o autor apresenta um diagrama onde situa os vários tipos de tarefas (figura 4).

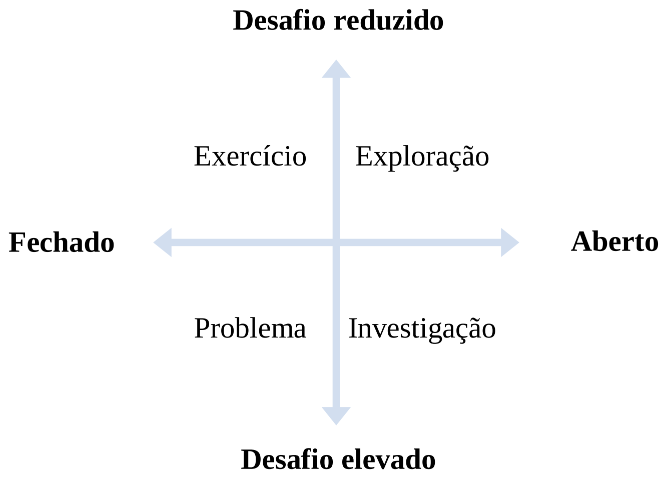


Figura 4 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 17)

Analisando a figura 4 constata-se que: i) os exercícios são tarefas fechadas de desafio reduzido; ii) os problemas são tarefas fechadas de desafio elevado; iii) as explorações são tarefas abertas de desafio reduzido; iv) as investigações são tarefas abertas de desafio elevado (Ponte, 2005).

Por vezes distingue-se exercício de problema fazendo referência ao contexto da tarefa. Se se trata de um contexto puramente matemático, a tarefa designa-se por exercício. Caso contrário é um problema. Só que esta distinção é enganadora. Com efeito, ao contrário dos exercícios, que se resolvem "habitualmente por processos mecanizados e repetitivos" (Vale & Pimentel, 2004, p. 13) e conhecidos de antemão, "a resolução de problemas implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. Para encontrar a solução, os alunos deverão explorar os seus conhecimentos e através deste processo desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos" (NCTM, 2007, p. 57). Assim, uma dada situação pode ser um problema para um aluno e um exercício para outro (Boavida, *et al.*, 2008; Delgado, 2013; Vale & Pimentel, 2004).

Todos os tipos de tarefas têm potencialidades educativas. Com efeito, segundo Ponte (2014),

- as "de natureza mais fechada (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados" (p. 21);
- as tarefas mais acessíveis, como as explorações e os exercícios, possibilitam aos alunos mais sucesso, o que contribui para o desenvolvimento da sua autoconfiança;
- as tarefas desafiantes, como os problemas e as investigações, "são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática" (p. 22);
- As tarefas de natureza aberta permitem o desenvolvimento da autonomia dos alunos e da sua capacidade de lidar com situações mais complexas.

Delgado (2013) chama a atenção para que a escolha das tarefas a explorar na sala de aula não deve ter apenas em conta o nível cognitivo da tarefa. É, também, essencial que se atente nos alunos, ou seja, que se considere as suas idades, o nível de aprendizagem em que se encontram, os conhecimentos que já possuem e as suas experiências anteriores.

A propósito de tarefas a propor aos alunos com vista ao desenvolvimento do raciocínio matemático, Semana e Santos (2008) referem que

> os problemas e as investigações apresentam-se como contextos privilegiados para esse trabalho, mas meros exercícios ou acontecimentos do quotidiano da aula podem constituir-se como pretextos para o professor desafiar os alunos a argumentarem, a confrontarem e a discutirem as suas ideias. (p. 52)

A resolução de problemas é, segundo Santos (2013), "um meio favorável ao desenvolvimento, por parte do aluno, do raciocínio matemático, capacidade estreitamente relacionada com a atividade matemática" (p. 26). O documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) considera que a resolução de problemas é a base de toda a matemática escolar e que sem ela a utilidade, as ideias, as capacidades e os conhecimentos matemáticos ficam limitados.

As atividades de investigação são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático uma vez que "investigar significa aqui desenvolver e usar um conjunto de processos característicos da atividade matemática, como testar e provar conjeturas, argumentar, usar procedimentos de natureza metacognitiva" (Abrantes, Ferreira & Oliveira, citados por Santos, 2013, p. 27).

As oportunidades para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos são favorecidas se estes "forem desafiados, a um nível adequado, com tarefas não rotineiras, em oposição a exercícios em que um procedimento conhecido é aplicado, as oportunidades para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e a sua aprendizagem saem reforçadas" (Henriques, 2012, p. 144). Se o objetivo é o desenvolvimento do raciocínio matemático, então devem ser propostas tarefas que desafiem cognitivamente os alunos, "dando-lhes oportunidade de investigar, analisar, explicar, conjeturar e justificar o seu raciocínio e interagir com os seus colegas" (*ibidem*).

Para o estudo desenvolvido, as tarefas incidiram, como já foi referido, no conteúdo *números racionais não negativos*. Assim, sobre a seleção de tarefas para trabalhar os números racionais, é importante que, para além de proporcionar o desenvolvimento do raciocínio matemático, estas permitam aos alunos utilizar diferentes representações dos números racionais e desenvolver diferentes estratégias de resolução. Posteriormente, tal como referido sobre a exploração das tarefas, estas devem possibilitar aos alunos explicar e justificar os seus raciocínios e assumir uma atitude crítica perante as contribuições dos seus colegas (Carvalho & Ponte, 2014).

Monteiro e Pinto (2007) referem que "a resolução de problemas em contextos significativos para as crianças é o ponto de partida para trabalhar os números racionais" (p. 9). Neste sentido, ao trabalhar os números racionais, o professor deve promover o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática com vista à sua utilização na construção, consolidação e mobilização dos conhecimentos matemáticos (Menezes, Rodrigues, Tavares, & Gomes, 2009).

3. Dificuldades dos alunos

O raciocínio matemático é, como procurei salientar, ao longo das secções 1 e 2, um processo complexo que envolve diferentes formas de explicitação e apresenta níveis de exigência distintos, de acordo com a idade e o nível de escolaridade dos alunos, com o qual os alunos se debatem (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011). Torna-se ainda mais complexo se processos como *conjeturar, generalizar*, *investigar porquê*, *justificar, refutar, explicar*, *argumentar* e *provar* forem preteridos a favor de um ensino da Matemática focado em regras e procedimentos rotineiros sem compreensão.

Neste sentido, a grande dificuldade dos alunos em raciocinar matematicamente surge, na maioria das vezes, quando este é um hábito pouco frequente no seu quotidiano.

Um estudo realizado por Quaresma e Ponte (2013), com alunos do 6.º ano de escolaridade, mostra que estes não produzem muitas generalizações e que consideram como justificação os cálculos realizados na resolução dos problemas. Com efeito, como discutido na secção 2, as justificações apresentadas pelos alunos podem conter falhas ou basearem-se em premissas inválidas apesar de conduzirem a resultados corretos. Para além disso, podem incluir raciocínios válidos e, simultaneamente, raciocínios inválidos conduzindo a conclusões incorretas ou podem ser válidas apenas para um subconjunto do domínio da generalização (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011).

Henriques (2012), no seu estudo com alunos universitários, concluiu que, por surgirem de forma mais automática, associadas a raciocínios essencialmente indutivos, as conjeturas formuladas nem sempre são corretas.

Outro estudo, realizado com alunos do 1.º Ciclo, mostra que estes evidenciam dificuldades em formular, comunicar e comprovar o seu raciocínio matemático, também porque, a resolução de tarefas com a sua participação ativa não era comum na sala de aula (Sezões, 2014).

Um estudo realizado Boavida (2005), permite concluir que os alunos apresentam algumas dificuldades ao nível da formulação de conjeturas. Isto porque além de não atribuírem qualquer importância à validade das conjeturas formuladas, a prova dessa validade "residia na sua verificação por exemplos" (p. 899).

No que diz respeito às dificuldades relacionadas com o conteúdo *Números racionais não negativos*, Monteiro e Pinto (2005) salientam que

> algumas das dificuldades que os alunos do ensino básico enfrentam no seu percurso para compreender os números fraccionários, são identificadas na literatura com os diferentes significados das fracções, com a concepção da unidade e com o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos. (p. 89)

Ponte e Quaresma (2011) referem que "muitos alunos têm dificuldades na aprendizagem dos números racionais" (p. 57). Os autores dizem ainda que os alunos "por vezes, perdem de vista a necessidade de todas as partes em que a unidade está dividida serem iguais, contam as partes incorrectamente e, dada uma parte, têm dificuldade em relacioná-la com o todo correspondente” (*ibidem*). De acordo com estes autores, quanto às diferentes representações, os alunos podem revelar dificuldades ao nível dos numerais decimais, quando confundem décimas e centésimas, o número de algarismos e a grandeza e consideram, por exemplo, não existir “números racionais entre 0,1 e 0,2” (p. 57, 58) e ao nível das percentagens quando, por exemplo, não compreendem o símbolo % e fazem conversões incorretas.

Síntese

Em suma, o desenvolvimento do raciocínio matemático torna-se imprescindível quando se pensa num ensino da Matemática com compreensão. No entanto, e tal como foi discutido, atividades como *explicar, justificar, argumentar, conjeturar* e *generalizar* são, muitas vezes, ignoradas nas aulas de Matemática a favor de um ensino transmissivo de regras e procedimentos matemáticos. Intimamente ligado ao desenvolvimento do raciocínio matemático está o uso, pelos alunos, de representações diversificadas e a importância do estabelecimento de conexões entre os vários tipos de representações. Estas são “elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros” (NCTM, 2007, p. 75).

Cabe ao professor potenciar o desenvolvimento do raciocínio matemático, não só através da seleção de tarefas cognitivamente desafiadoras e adequadas aos alunos como também proporcionando a aquisição de hábitos de raciocínio, ou seja, possibilitando aos alunos experiências matemáticas diversificadas em que haja momentos para confrontar os resultados e discutir estratégias de uma forma crítica e fundamentada.

Capítulo III – Metodologia

O presente capítulo foca-se na metodologia usada para o desenvolvimento da investigação. Aqui apresento as principais opções metodológicas, a que se segue a caracterização do contexto e a descrição da intervenção pedagógica. Em último lugar, apresento os procedimentos de recolha e da análise de dados.

3.1. Principais opções metodológicas

Em educação, investigar é um "processo sistemático, flexível e objectivo de indagação que contribui para explicar e compreender os fenómenos sociais" (Coutinho, 2011, p. 7). É através desta atividade que "se reflecte e problematizam os problemas nascidos na prática, que se suscita o debate e se edificam as ideias inovadoras" (*ibidem*).

O objetivo da investigação realizada é analisar e compreender o raciocínio matemático de alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de problemas envolvendo números racionais não negativos. Tendo em conta este objetivo, considerei que seria adequado situar-me, em termos metodológicos, num paradigma interpretativo e numa abordagem qualitativa. Aires (2011) considera que um paradigma é "um conjunto de crenças que orientam a acção" (p. 18). Deste modo, "cada paradigma faz exigências específicas ao investigador, incluindo as questões que formula e as interpretações que faz dos problemas" (*ibidem*).

O paradigma interpretativo procura entrar no mundo pessoal dos sujeitos "para saber como interpretam as diversas situações e que significado tem para eles" (Latorre *et al.*, citados por Coutinho, 2011, p. 16). Para Afonso (2005), este é caracterizado

> pela preocupação em compreender o mundo social a partir da experiência subjectiva. Consequentemente, as abordagens interpretativas procuram analisar a realidade social a partir do interior da consciência individual e da subjectividade, no contexto da estrutura de referência dos actores sociais. (p. 34)

Uma vez que o meu objetivo é entender o significado do que os alunos fazem e dizem quando raciocinam matematicamente tendo em vista a resolução de problemas matemáticos, considero que o meu estudo se enquadra neste paradigma.

Simultaneamente, a investigação que desenvolvi insere-se, como referi, numa abordagem qualitativa. Coutinho (2011) sublinha que, numa investigação qualitativa, o objeto de estudo são "as intenções e situações, ou seja, trata-se de investigar ideias, de descobrir *significados* nas *ações individuais* e nas *interacções sociais* a partir da perspectiva dos actores intervenientes no processo" (p. 26). A autora menciona que "a inter-relação do investigador com a realidade que estuda faz com que a construção da teoria se processe, de modo indutivo e sistemático, a partir do próprio terreno à medida que os dados empíricos emergem" (*ibidem*) (figura 5).

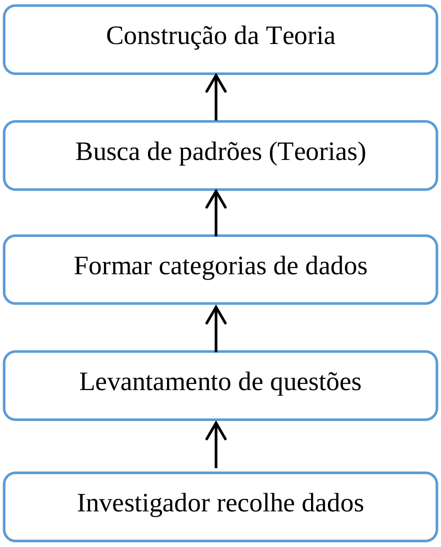


Figura 5 – O desenrolar de uma investigação qualitativa (Coutinho, 2011, p. 26)

A investigação qualitativa difere da investigação quantitativa na medida em que "a palavra qualitativa implica uma ênfase em processos e significados que não são examinados nem medidos (…) rigorosamente, em termos de quantidade, volume, intensidade ou frequência" (Denzin e Lincoln citados por Meirinhos e Osório, 2010, p. 50). Meirinhos e Osório (2010) destacam que "na investigação qualitativa, é essencial que a capacidade investigativa do investigador nunca perca o contacto com o desenvolvimento do acontecimento" (p. 51).

No que diz respeito à abordagem qualitativa da investigação em educação, Bogdan e Biklen (1994) destacam cinco características essenciais:

- O ambiente natural é a fonte direta de dados sendo, o investigador, o seu instrumento principal, ou seja, são os investigadores que, inserindo-se num determinado contexto, recolhem a informação de que necessitam recorrendo, para isso, a várias técnicas;
- É descritiva, uma vez que os investigadores "tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48) com o intuito de compreender, de forma mais clara, todas as informações disponíveis acerca do seu objeto de estudo;

- Para os investigadores qualitativos, o processo é mais importante do que os resultados ou produtos;
- Os dados recolhidos são analisados de forma indutiva, ou seja, são analisados de forma a construir uma "teoria fundamentada" (Glaser e Strauss, mencionados por Bogdan & Biklen, 1994, p. 50) acerca do objeto de estudo, partindo das questões mais amplas para, posteriormente, questões mais específicas.
- O significado tem uma importância decisiva para o investigador, pois permite compreender o sentido que os sujeitos de um determinado contexto atribuem às situações.

Tendo por base as características referidas por Bogdan e Biklen (1994), considero que o meu estudo segue uma abordagem qualitativa de investigação, uma vez que a fonte direta dos dados foi a sala de aula, ou seja, um ambiente natural onde não foram feitas quaisquer alterações e todos os dados foram recolhidos por mim, investigadora, tanto na sala de aula como nas entrevistas clínicas. Para além disso, considero que esta investigação é descritiva pois assenta na compreensão das informações recolhidas sobre o raciocínio matemático dos alunos e todos os dados são analisados de forma a compreender o sentido e o significado deste raciocínio em situações específicas, neste caso, em tarefas matemáticas específicas.

A investigação que realizei é uma investigação sobre a prática, no sentido de Ponte (2002), que considera tratar-se de uma investigação que ajuda os professores "a lidar com os problemas da sua prática" (p. 1). Numa investigação sobre a prática, "o investigador tem uma relação muito particular com o objecto de estudo – ele estuda não um objecto qualquer mas um certo aspecto da sua prática profissional" (Ponte, 2008, p. 156). O autor refere que

> a investigação sobre a sua prática [do professor] é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente. (p. 3)

Na investigação sobre a prática, o professor assume um papel de professor-investigador. Para Alarcão (2001), "ser professor-investigador é, primeiro que tudo, ter uma atitude de estar na profissão como intelectual que criticamente questiona e se questiona" (p. 6); é, também, "ser capaz de se organizar para, perante uma situação problemática, se questionar intencional e sistematicamente com vista à sua compreensão e posterior solução” (*ibidem*). A mesma autora considera que a investigação faz parte da “essência” de ser professor:

> Realmente não posso conceber um professor que não se questione sobre as razões subjacentes às suas decisões educativas, que não se questione perante o insucesso de alguns alunos, que não faça dos seus planos de aula meras hipóteses de trabalho a confirmar ou informar no laboratório que é a sala de aula, que não leia criticamente os manuais ou as propostas didácticas que lhe são feitas, que não se questione sobre as funções da escola e sobre se elas estão a ser realizadas. (p. 6)

Ao investigar sobre a sua prática, o professor “pode tomar como ponto de partida problemas relacionados com os alunos e a aprendizagem, mas também com as suas aulas, a escola ou o currículo” (Ponte, 2002, p. 11). Ponte (2002) também refere que, para a realização de uma investigação sobre a nossa própria prática, é necessário uma atitude questionante e reflexiva e “uma predisposição para examinar a sua própria prática de uma forma crítica e sistemática” (Alarcão, citada por Ponte, 2002, p. 11).

A investigação que desenvolvi é uma investigação sobre a prática pois, apesar de procurar compreender como os alunos raciocinam matematicamente, tem em vista, no futuro como docente de matemática, a definição de estratégias de ação que possibilitem a promoção e o desenvolvimento do raciocínio matemático na sala de aula (Ponte, 2002).

No âmbito da investigação sobre a minha prática realizei dois estudos de caso. Bogdan e Biklen (1994) referem que “o estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico” (p. 89). Para Coutinho (2011), a realização de um estudo de caso “envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida: o caso” (p. 293). A autora refere, também, que num estudo de caso “examina-se o caso (ou um pequeno número de casos) em detalhe, em profundidade, no seu contexto natural, reconhecendo-se a sua complexidade e recorrendo-se, para isso, a todos os métodos que se revelem apropriados” (Coutinho, 2011, p. 293).

Os estudos de caso que realizei são, de acordo com Coutinho e Chaves (2002), estudos de caso instrumentais. Um estudo de caso é instrumental

> quando um caso é examinado para fornecer instrospecção sobre um assunto, para refinar uma teoria, para proporcionar conhecimento sobre algo que não é exclusivamente o caso em si; o estudo de caso funciona como um *instrumento* para compreender outro(s) fenómeno(s). (Coutinho & Chaves, 2002, p. 226)

Com efeito, e tendo por base o que é referido por Coutinho e Chaves (2002), selecionei duas alunas – Filipa e Márcia – de uma turma do 5.º ano de escolaridade para tentar compreender o raciocínio matemático de alunos deste nível de ensino. Duarte

(2008) salienta que a seleção de casos específicos e “a sua compreensão levará a um melhor entendimento, até a uma melhor teorização, acerca de uma ainda maior colecção de casos” (p. 120). O mesmo autor refere que “o importante numa selecção de casos a estudar de entre os possíveis é, tendo em conta as características do universo, escolher casos que possam ajudar na procura de respostas aos problemas em estudo” (p. 121).

Apesar disso, e no que diz respeito à seleção dos casos, Coutinho (2011 citando Stake) refere que “o estudo de caso não é uma investigação baseada em amostragem. Não se estuda um caso para compreender outros casos, mas para compreender o caso” (p. 298).

Para o desenvolvimento do estudo optei, como referi, pela seleção de duas alunas, ou seja dois casos centrados na análise dos seus raciocínios matemáticos durante a resolução de um conjunto de tarefas que envolviam o recurso a números racionais não negativos. Considerei que este número era adequado por duas razões. Em primeiro lugar, dado o pouco tempo disponível para a realização do estudo e a importância de analisar, em profundidade, os raciocínios matemáticos dos alunos, não entendi ser viável elaborar um número maior de estudos de caso. Em segundo lugar, esperava que a possibilidade de me debruçar sobre a atividade de dois alunos, e não de um só, me poderia permitir uma compreensão mais ampla dos processos de raciocínio matemático de alunos do 5.º ano de escolaridade. Os critérios que utilizei para a seleção das duas alunas foram, primeiramente, possuírem uma boa capacidade de comunicação e, em segundo lugar, terem diferentes níveis de desempenho em Matemática: uma aluna de nível 5 (Márcia) e uma aluna de nível 4 (Filipa).

3.2. Intervenção pedagógica

Esta secção organiza-se em três subsecções. Começo por caracterizar o contexto em que desenvolvi o estudo, em seguida descrevo a intervenção pedagógica concebida e concretizada e, por último, refiro as técnicas de recolha e de análise de dados que utilizei.

3.2.1. Contexto do estudo: A escola e a turma

A escola básica onde desenvolvi o estudo é a escola sede de um agrupamento de escolas que pertence ao concelho de Palmela, distrito de Setúbal. Este agrupamento é abrangido pelo Programa dos Territórios Educativos de Intervenção Prioritária (TEIP) que, de acordo com o seu projeto educativo, “tem como objetivo principal a melhoria da qualidade das aprendizagens e o sucesso educativo dos alunos” (*idem*, p.7) prevendo um conjunto de medidas para alcançar esse objetivo. Enquanto escola TEIP, tem alguns pontos fracos, como: "taxas de sucesso na avaliação externa inferiores às médias nacionais"; "abandono escolar precoce"; "indisciplina"; "fraca articulação entre os diferentes ciclos de ensino"; "poucas estratégias que promovam a proximidade ao longo do ano, das famílias e dos encarregados de educação ao agrupamento", entre outros (Projeto Educativo, 2013, p. 18).

Neste âmbito, um dos projetos da escola é o designado por "Turma X", desenvolvido nas disciplinas de Matemática e Português com as turmas do 5.º e 7.º anos de escolaridade. Este projeto tem por objetivo possibilitar uma melhoria no processo de ensino e aprendizagem dos alunos e, consequentemente, melhorar os seus resultados nestas disciplinas.

Para isso, por cada duas turmas é organizada uma Turma X (figura 6), sendo os professores da respetiva disciplina a selecionar um grupo, entre 5 a 8 alunos, para a integrarem (assinalados a cor verde na figura 6). O critério principal de seleção é o nível de avaliação dos alunos. Neste sentido, com o projeto Turma X, tentam criar uma turma mais pequena e com características mais semelhantes (no fundo, tentam criar um grupo de trabalho o mais homogéneo possível) para que seja mais fácil trabalhar os diversos conteúdos e proporcionar uma melhoria nos seus resultados:

> Cada grupo específico de alunos, durante o tempo em que integrar o Projeto Turma X continuará a trabalhar os conteúdos programáticos que a sua turma de origem (mãe) está a desenvolver, no entanto, beneficiará de um apoio mais individualizado tendo em conta que se encontra integrado num grupo de trabalho que apresenta alguma homogeneidade e não vê aumentada a sua carga horária semanal. (Documento *Proposta de projeto Turma X*, s.d., p. 2)

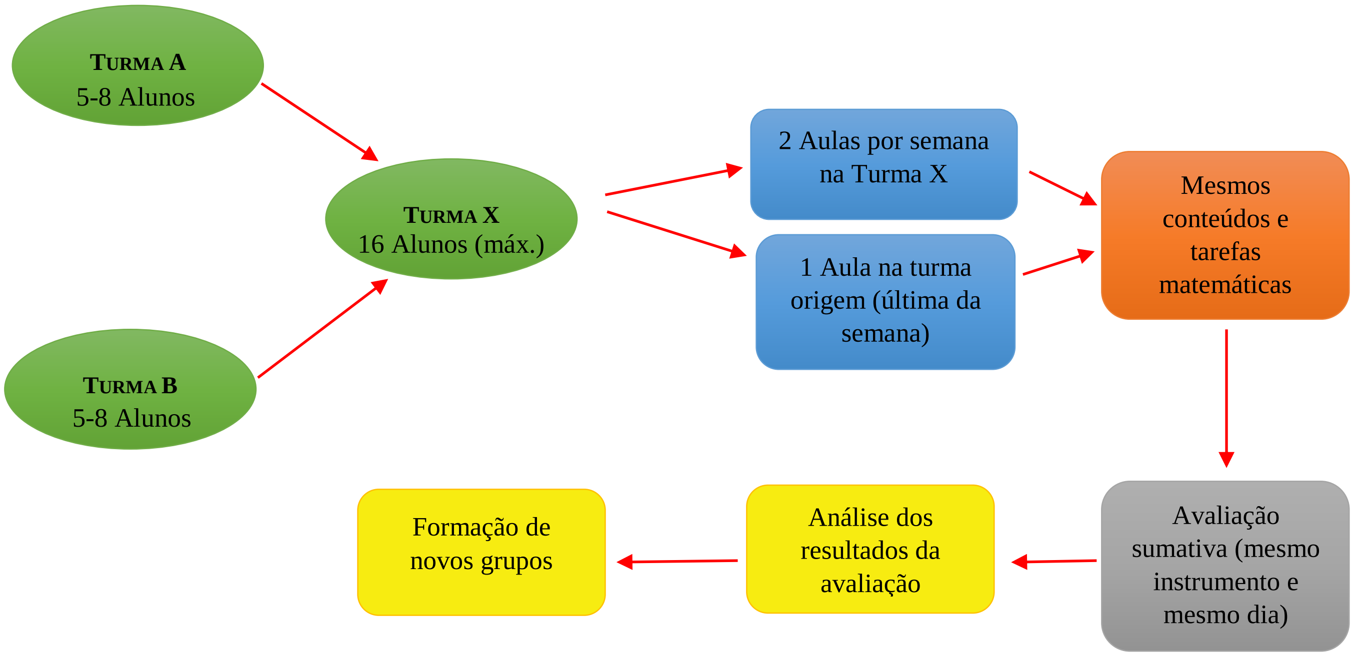


Figura 6 – Formação e funcionamento de uma "Turma X"

É definido pelos departamentos de Matemática e Português que as três turmas (as duas turmas de origem dos alunos e a Turma X) devem trabalhar em simultâneo os mesmos conteúdos e realizar as mesmas tarefas (figura 6, zona a laranja). Isto porque, e tendo em conta que numa semana os alunos têm três aulas de Matemática, na última aula da semana (figura 6, zona a azul), os alunos voltam à turma de origem para não perderem o contacto com os seus colegas, com o seu professor e com aquilo que está a ser trabalhado. Para que isso seja possível, os vários professores do departamento da disciplina de Matemática reúnem-se semanalmente para definir quais são os conteúdos que irão ser trabalhados na semana seguinte, que tarefas vão propor e que material vão utilizar. Para além disso, também os momentos de avaliação sumativa ocorrem simultaneamente (figura 6, zona a cinzento) e é após a realização dos testes que são selecionados novos grupos de alunos para a Turma X e que os alunos que lá estavam regressam à turma de origem (figura 6, zona a amarelo).

Esta situação acabou por constranger a realização do estudo que desenvolvi uma vez que era necessário estar sempre a par das restantes turmas. No entanto, apesar de ter de trabalhar os mesmos conteúdos, a professora cooperante, bem como os restantes professores do departamento, deram-me alguma liberdade para propor tarefas diferentes das previstas para as restantes turmas, acabando por, também, apresentar algumas das "minhas" tarefas nas suas turmas.

Desenvolvi a minha prática docente numa turma do 5.º ano de escolaridade. Quando a iniciei, a turma era composta por 22 alunos (11 rapazes e 11 raparigas). Destes, dois rapazes encontravam-se em situação de abandono escolar, pelo que não frequentaram as aulas. Além disso, dois repetiam o 5.º ano e um, de nacionalidade brasileira, chegou à escola apenas em janeiro.

De acordo com o que observei, os alunos eram, na sua maioria, assíduos e pontuais e não existia qualquer problema de comportamento. Eram, também, muito interessados e participativos. Contudo, grande parte não atribuía qualquer importância aos trabalhos de casa e, por essa razão, não os realizava.

3.2.2. Os problemas propostos com vista ao desenvolvimento do raciocínio matemático

A intervenção pedagógica, realizada no âmbito da unidade curricular *Estágio no 2.º Ciclo*, decorreu no período de 23 de fevereiro a 10 de abril de 2015. Esta intervenção teve vários objetivos. Entre eles, levar os alunos a compreender os conteúdos relacionados com os números racionais não negativos, a mobilizar os seus conhecimentos na resolução das tarefas e, fundamentalmente, a tentar criar condições para o desenvolvimento do raciocínio matemático através de tarefas matemáticas que Ponte (2005) designa por desafio elevado. Estas tarefas foram realizadas em grupos (pares ou grupos de, no máximo, quatro elementos). A figura 7 representa a forma como foram exploradas em sala de aula.

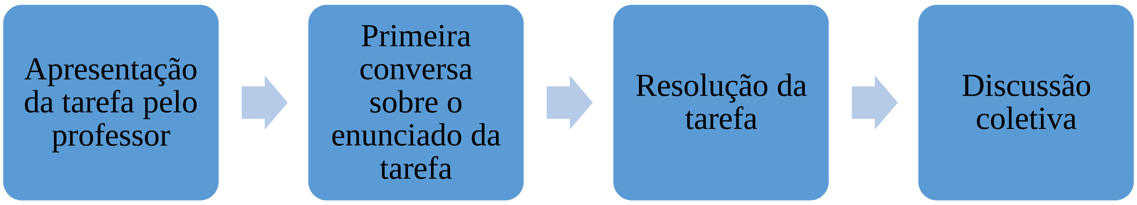


Figura 7 – Etapas da exploração das tarefas matemáticas em sala de aula

Tal como mostra a figura 7, a tarefa era proposta por mim. Em alguns casos, optei por apresentar o enunciado da tarefa como se tratasse de uma história. Noutros, pedi a alunos que lessem o enunciado em voz alta, seguindo-se uma conversa sobre o que tinha sido lido. Essa conversa tinha como objetivo esclarecer dúvidas sobre o enunciado e permitir aos alunos contribuir com algumas ideias que poderiam ser importantes para a sua resolução. Depois da resolução da tarefa, em trabalho de pares/grupos, seguia-se sempre um momento de discussão coletiva onde os alunos eram incentivados a partilharem as suas resoluções, a explicarem e justificarem como tinham pensado e a colocarem questões sobre eventuais dúvidas que tivessem. Esses momentos revelaram-se, inicialmente, muito difíceis de gerir uma vez que os alunos evitavam questionar os colegas sobre os seus raciocínios e sobre as suas ideias matemáticas.

Como já referi anteriormente, devido aos constrangimentos impostos pelo projeto Turma X, foi necessário intercalar as tarefas que selecionei para a investigação a realizar (assinaladas a azul na tabela 2) com tarefas do manual, o recurso mais utilizado nas aulas.

Tabela 2 – Calendarização e classificação dos tipos de tarefas (tipologia apresentada por Ponte, 2005)

Organização geral da intervenção pedagógica		
Data	**Designação da tarefa/Propostas de trabalho**	**Tipologia de tarefa matemática**
23 de fevereiro	Tarefa “Problema na distribuição de baguetes”	Problema
24 de fevereiro	Tarefa “Investigando dízimas”	Investigação
27 de fevereiro	Tarefa “Comparando racionais”	Problema
2 de março	Realização de tarefas focadas na comparação e ordenação de números racionais (p. 38, 39 do manual)	Exercícios/Problemas
3 de março	Tarefa “Terrenos nas aldeias”	Problema
6 de março		
9 de março		
10 de março	Ficha de trabalho com tarefas diversificadas sobre comparação, adição e subtração de numerais racionais (revisões para a ficha de avaliação sumativa)	Exercícios/Problemas
13 de março	Ficha de avaliação sumativa	

16 de março	Introdução à multiplicação de frações[8] – revisitando o "Problema na distribuição de baguetes"	Problema
17 de março	Correção da ficha de avaliação sumativa	
20 de março	Resolução de tarefas sobre multiplicação de frações (p. 46 e 47 do manual)	Exercícios/Problemas
7 de abril	Tarefa "Piquenique"	Problema
10 de abril		
10 de abril	Resolução de tarefas sobre divisão de frações (p. 52 e 53 do manual)	Exercícios/Problemas

A tabela 2 mostra como foram organizadas as tarefas propostas em sala de aula, bem como a data em que foram exploradas. Observando a tabela, é possível identificar três conjuntos de aulas, assinaladas a azul, onde propus tarefas de desafio elevado e que estão, mais diretamente, associadas ao objetivo principal do estudo que se prendia com a compreensão do raciocínio matemático dos alunos em tarefas que envolviam os números racionais não negativos.

Para além dessas, existiram também: i) duas aulas associadas à realização de uma ficha de avaliação sumativa, assinaladas a laranja, (13 e 17 de março) que englobaram a realização de uma ficha de revisão de conteúdos e a ficha de avaliação sumativa; ii) quatro aulas, assinaladas a verde, onde forneci aos alunos fichas de trabalho e/ou indiquei tarefas do manual que foram resolvidas, na sua maioria, em trabalho de grupo ou pares. O principal objetivo era que os alunos revisitassem e aplicassem conceitos e conteúdos anteriormente trabalhados (2 de março, 20 de março e 10 de abril).

As tarefas de desafio elevado (cor azul), permitiram introduzir e trabalhar determinados conteúdos matemáticos associados aos números racionais (23, 24 e 27 de fevereiro, 3 de março e 7 de abril). Foco-me, em seguida, no essencial da atividade desenvolvida neste último conjunto de aulas.

[8] Para efeitos de simplificação de linguagem, usa-se o termo *fração* para designar um número representado sob a forma de fração.

Problema na distribuição de baguetes

A tarefa intitulada por *Problemas na distribuição de baguetes* (anexo 1) tinha como objetivo que os alunos descobrissem a quantidade de baguete que cada pessoa que foi a uma visita de estudo comeu em cada grupo (figura 8) para perceber e justificar se a distribuição das baguetes pelos vários grupos havia sido justa. Assim, a sua resolução envolvia conteúdos como a simplificação de frações, a ordenação e comparação de números racionais representados por frações, a adição de números racionais não negativos representados sob a forma de fração e ainda a multiplicação de um número inteiro por uma fração.

A tarefa foi proposta na aula do dia 23 de fevereiro. Nas aulas anteriores, os alunos tinham explorado algumas tarefas com o objetivo de revisitar os conteúdos associados aos números racionais representados sob a forma de fração, trabalhados no 4.º ano de escolaridade.

Optei por, em primeiro lugar, informar os alunos que iriam trabalhar em grupos fazendo, em seguida, a sua distribuição por cada grupo de trabalho. Depois, antes de organizar a disposição dos grupos na sala, e para que todos prestassem atenção enquanto estavam virados para o quadro, decidi iniciar a apresentação da tarefa com a projeção de uma tabela ilustrativa dos locais da visita de estudo e do número de baguetes distribuído a cada grupo que participou na visita (figura 8) e contando uma história como se a situação, na realidade, tivesse acontecido comigo e com alunos meus.

PROBLEMA NA DISTRIBUIÇÃO DE BAGUETES

	Número de alunos	Número de baguetes
Planetário	5	3
Centro Ciência Viva	4	3
Museu de Arte Moderna	5	4
Biblioteca Nacional	8	7
Total	22 Alunos	17 baguetes

Figura 8 – Diapositivo com a distribuição de baguetes por cada grupo de alunos

Enquanto fazia essa apresentação, optei por tornar a aula um pouco mais dinâmica perguntando aos alunos se já tinham visitado algum daqueles locais. Depois de “contada a história”, iniciei uma pequena discussão no sentido de perceber se consideravam que a distribuição tinha sido justa e de chegar a um consenso sobre o significado de “ser justo”. O episódio 1 ilustra momentos dessa discussão:

Episódio 1

1. **Professora:** (…) como eles depois foram lanchar todos ao pé uns dos outros, começaram a discutir e a conversar porque acharam que não era justo esta distribuição, certo? O que é que vocês acham? Houve alguém que comeu mais, alguém que comeu menos…? Foi justo, não foi justo?
2. **Joana:** [rapidamente] Não foi justo!
3. **Professora:** Porquê Joana?
4. **Joana:** Porque… aaah… Porque tinha… devia ser o mesmo número de…
5. **Filipa:** [interrompendo a Joana] Por exemplo, no planetário deviam ser cinco baguetes (…)
6. **Professora:** Já estou a perceber… Então, Joana, estás a dizer que o número de baguetes devia ser igual ao número de alunos?
7. **Joana:** Sim.
8. **Professora:** Então eu vou escrever aqui as ideias importantes: "número de baguetes igual ao número de alunos". E assim cada um comia o quê?
9. **Joana:** Um…
10. **Professora:** Cada um comia uma. Mas pronto, já vimos que isso não é possível. O que é que vocês acham…

(…)

11. **Filipa:** Não, vamos dividir as baguetes pelo número de alunos.

(…)

12. **Professora:** Há algum grupo que come mais ou comem todos o mesmo?
13. **Filipa:** O da biblioteca nacional come mais.
14. **Professora:** O da biblioteca… vou escrever aqui: o da biblioteca come mais. Porquê?
15. **Filipa:** Porque tem mais baguetes.
16. **Professora:** Então e em relação ao número de alunos?
17. **Joana:** São mais do que as baguetes.
18. **Professora:** [Daniela diz qualquer coisa impercetível] Diz lá, diz lá Daniela.
19. **Daniela:** Nos outros [grupos] também são mais alunos do que baguetes.

    (…)
20. **Professora:** (…) O que é que é ser justo? O que é que significa ser justo?

    (…)
21. **Filipa:** Justo é terem todos o mesmo número de baguetes.

Durante esta discussão, fui registando no quadro algumas ideias importantes que iam sendo apresentadas uma vez que estas poderiam ser pistas a explorar, ou não, durante a realização do trabalho de grupo. Foi interessante ver que os alunos responderam imediatamente que não tinha sido justo (§2) e que para ser justo o número de baguetes teria de ser igual ao número de alunos (§6-§9; §21). O contributo de Filipa (§11) acabou por dar uma pista aos restantes alunos de como poderiam resolver a tarefa.

Depois desta discussão inicial, distribuí os diferentes grupos de trabalho (dois grupos de três alunos e dois de quatro) pela sala, dando-lhes a tabela que fora projetada no quadro (figura 8), com a informação relativa ao número de baguetes e de alunos por cada grupo da visita, e uma folha A_3 informando-os que deveriam usá-la para elaborar um cartaz com a sua resolução.

Enquanto discutiam em grupo, fui circulando pela sala para tentar perceber como os alunos estavam a pensar, que representações decidiam utilizar e como fundamentavam o que faziam. Esta opção permitiu não só dar algum auxílio aos grupos, como também recolher evidências para o meu estudo e selecionar que grupos apresentariam os seus cartazes na discussão coletiva e por que ordem o fariam. No final da aula, todos os cartazes foram expostos no quadro. De entre os quatro cartazes elaborados, selecionei três grupos para apresentar uma vez que a resolução de um dos grupos não acrescentava, face aos restantes, nenhuma novidade que tornasse a sua discussão produtiva para a aprendizagem.

A apresentação e discussão iniciou-se ainda nesta aula mas foi necessário continuar na aula seguinte (24 de fevereiro). Inicialmente, foi muito difícil estabelecer um clima de discussão coletiva uma vez que senti muita dificuldade, por parte dos alunos, em questionarem os colegas que apresentavam os seus processos de resolução. Quando colocavam as questões, dirigiam-nas sempre para mim, tendo eu de pedir-lhes que as remetessem para os colegas. No entanto, penso que com o desenrolar da discussão, os alunos foram ficando mais despertos para este papel, a que estavam pouco habituados. O episódio 2 e a figura 9 constituem, respetivamente, um excerto da apresentação de um dos grupos e o cartaz que elaborou.

Episódio 2

1. **Márcia:** Primeiro fizemos por contas. E fizemos as três baguetes a dividir pelos cinco alunos, o que nos deu seis décimas [escreve 0,6 no quadro]. E depois fizemos por esquemas e cada um comeu uma baguete e mais um quinto de uma metade.
2. **Professora:** Foi o que elas disseram… [o grupo que tinha apresentado anteriormente]

3. **Márcia:** Que eram seis décimas [escreve $\frac{6}{10}$ no quadro].

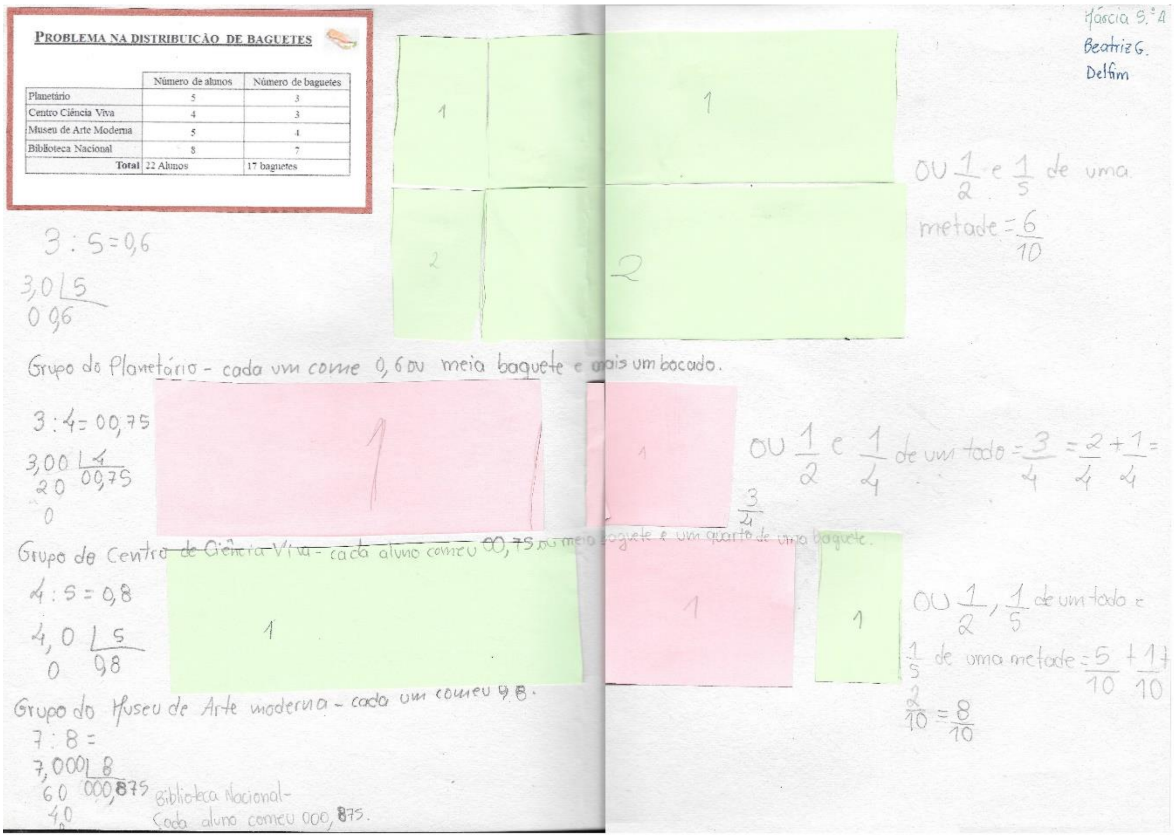


Figura 9 – Cartaz do grupo de Márcia

Através da apresentação deste grupo foi possível, por exemplo, estabelecer conexões entre a representação decimal dos números (§1) e a respetiva representação em fração (§3), o que acabou por ser importante para os restantes grupos que não haviam utilizado os números decimais na resolução da tarefa.

No final, foi possível introduzir a comparação de números racionais não negativos e as respetivas regras (para comparar frações e para comparar números decimais) e, assim, chegar a um possível cenário de resposta.

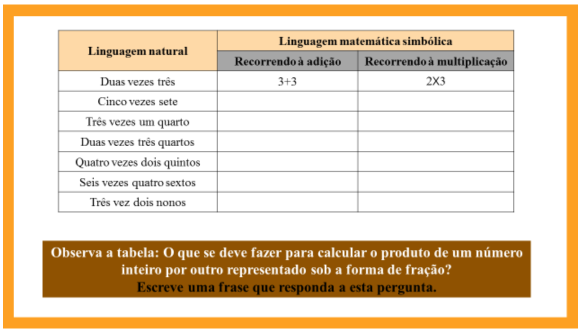
A tarefa *Problema na distribuição de baguetes* foi, também, o ponto de partida para, posteriormente (dia 16 de março), introduzir a multiplicação de frações. Nessa aula, comecei por perguntar aos alunos se se recordavam da tarefa da distribuição de baguetes mostrando, depois, o diapositivo com a tabela apresentada na figura 8. Em seguida, questionei alguns alunos sobre como tinham pensado para descobrir que quantidade de baguete tinha comido cada aluno da visita de estudo (episódio 3):

Episódio 3

1. **Professora:** Leonardo, como é que o teu grupo resolveu? Estás a dizer que não te lembras, pensa lá um bocadinho…
   (…)
2. **Leonardo:** Pusemos as três baguetes e dividimos por cinco.
3. **Professora:** Ah, fizeram o desenho das baguetes e depois dividiram-nas por cinco. Então vamos começar por aí. Eu tenho aqui três baguetes para quatro alunos. Foi mais ou menos assim que vocês fizeram, o vosso grupo. Eles fizeram as três baguetes e dividiram por quatro alunos porquê, Leonardo?
4. **Leonardo:** Porque era o número de alunos.
5. **Professora:** Porque era o número de alunos. E dava um bocadinho a cada aluno.
6. **Filipa:** Um bocadinho de cada baguete.
7. **Professora:** Quanto é que é um bocadinho de cada baguete aqui? Quanto é que é este bocadinho?
8. **Leonardo:** Um quarto.
9. **Professora:** Um quarto. Então, cada aluno comia…?
10. **Leonardo:** Três quartos.
    (…)
11. **Professora:** Como é que chegamos lá ao três quartos? Como é que pensaste? Vai pensando… vão pensando também porque eu já vou perguntar.
12. **Leonardo:** Fizemos uma parte que ele comia, mais a outra e mais a outra.
13. **Professora:** Tomás, tu não eras do grupo deles. (…) Eles podiam ter feito de outra maneira para chegar ao três quartos?
    (…)
14. **Tomás:** Ali estão três baguetes e eles comem um quarto.
15. **Professora:** Então como é que podíamos fazer?
16. **Tomás:** Um quarto vezes três.

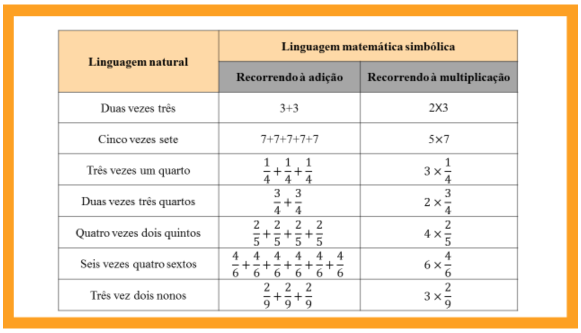
A partir da intervenção dos alunos (§1-§12), aproveitando o que foi dito por Leonardo sobre como tinha pensado (§12), segui para a multiplicação de frações, neste caso, de um número natural por um número representação sob a forma de fração, tentando relacioná-la quer com aquilo que o aluno referiu, quer com o conhecimento que os alunos já tinham sobre a multiplicação de números naturais.

Com a intervenção de Tomás (§16), apesar de não estar formalmente correta, uma vez que deveria ter dito três vezes um quarto, foi possível estabelecer uma relação entre a representação da quantidade de baguete que os alunos comiam por esquemas, a sua representação através da adição e, posteriormente, a sua representação utilizando a multiplicação. De seguida, propus aos alunos o preenchimento de uma tabela (figura 10, tabela da esquerda).



Linguagem natural	Linguagem matemática simbólica	
	Recorrendo à adição	Recorrendo à multiplicação
Duas vezes três	3+3	2X3
Cinco vezes sete		
Três vezes um quarto		
Duas vezes três quartos		
Quatro vezes dois quintos		
Seis vezes quatro sextos		
Três vez dois nonos		

Observa a tabela: O que se deve fazer para calcular o produto de um número inteiro por outro representado sob a forma de fração?
Escreve uma frase que responda a esta pergunta.



Linguagem natural	Linguagem matemática simbólica	
	Recorrendo à adição	Recorrendo à multiplicação
Duas vezes três	3+3	2X3
Cinco vezes sete	7+7+7+7+7	5×7
Três vezes um quarto	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$3\times\frac{1}{4}$
Duas vezes três quartos	$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$	$2\times\frac{3}{4}$
Quatro vezes dois quintos	$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$	$4\times\frac{2}{5}$
Seis vezes quatro sextos	$\frac{4}{6}+\frac{4}{6}+\frac{4}{6}+\frac{4}{6}+\frac{4}{6}+\frac{4}{6}$	$6\times\frac{4}{6}$
Três vez dois nonos	$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}$	$3\times\frac{2}{9}$

Figura 10 – Diapositivo de exploração de várias conexões

A tabela da direita (figura 10) surgiu no final da exploração da tabela vazia (esquerda). A partir da exploração da tabela (por preencher) foram estabelecidos vários tipos de conexões: (i) entre a linguagem natural e simbólica, (ii) entre a adição e a multiplicação de números naturais, e (iii) entre a adição de números representados por frações e a multiplicação de um número inteiro por uma fração. Além disso, a pergunta assinalada a castanho (na tabela da esquerda) incentiva os alunos a formularem uma conjetura de um algoritmo, ou seja, conjunto de passos necessários, para multiplicar um número natural por um número representado sob a forma de fração (episódio 4).

Episódio 4

1. **Professora:** Três vezes um quarto (…)
2. **Cláudio:** Dá três quartos.
3. **Professora:** Dá três quartos, diz o Cláudio. Então Cláudio (…) como é que passo daqui para aqui? Como é que tu pensaste?
4. **Cláudio:** Três vezes um.
5. **Professora:** Fizeste como?
6. **Cláudio:** Três vezes um. (…) Só que o denominador não muda.

Para os alunos compreenderem como se multiplicam números representados sob a forma de fração foi também importante refletir sobre o significado matemático da expressão "um quinto de metade", que surgiu aquando a introdução da tarefa e também na resolução, por exemplo, do grupo de Márcia, na primeira aula em que foi explorada (figura 9). Com efeito, quando lhes perguntei como poderiam multiplicar frações, Filipa respondeu, de imediato, que podiam multiplicar os numeradores pelos numeradores e os denominadores pelos denominadores. Posteriormente, todos os alunos escreveram no seu caderno uma regra para multiplicar frações, que foi elaborada coletivamente, seguindo-se algumas tarefas de aplicação.

Investigando dízimas

A tarefa *Investigando dízimas* (anexo 2) foi proposta após a conclusão da exploração da intitulada *Problema na distribuição de baguetes*. Apesar de não ter sido planeado, decidi partir de um erro de Márcia na representação dos números decimais, exposto pela aluna no quadro (figura 11), para introduzir a tarefa.

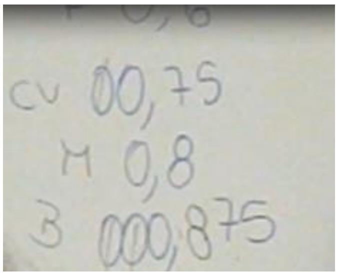


Figura 11 – Erro de Márcia: representação da quantidade de baguete que cada aluno comia em cada grupo

Depois de se corrigir a notação de Márcia, retirando os zeros à esquerda da vírgula, optei por trabalhar a ordenação de números representados sob a forma de numeral decimal[9]. Foi interessante ver, por exemplo, a estratégia mencionada por Filipa e que permitiu avançar para a comparação de outros números decimais (figura 12).

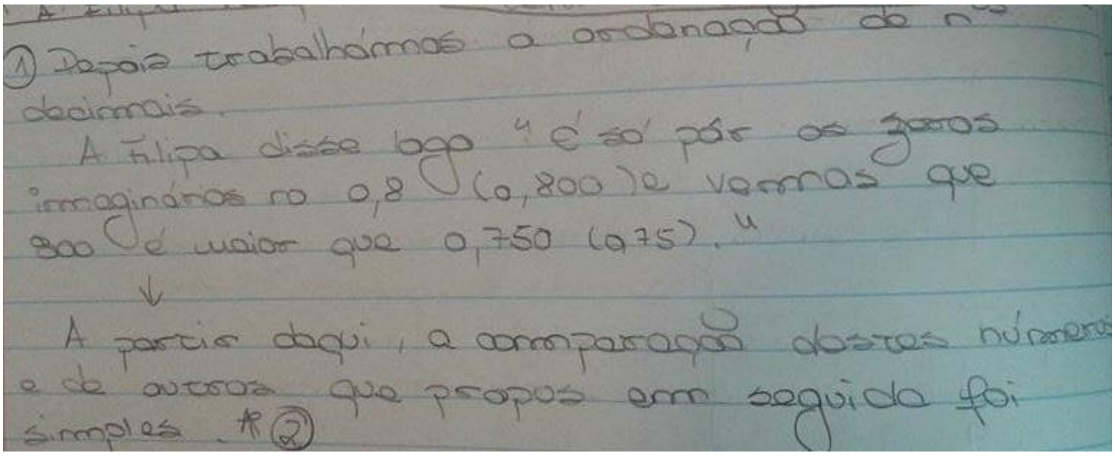

① Depois trabalhámos a ordenação de n.os decimais.
A Filipa disse logo "é só pôr os zeros imaginários no 0,8 (0,800) e vemos que 800 é maior que 0,750 (0,75)."
↓
A partir daqui, a comparação destes números e de outros que propus em seguida foi simples. ②

Figura 12 – Notas de campo sobre a intervenção de Filipa

A figura 12 tenta ilustrar que Filipa, para comparar 0,8 e 0,75 sugeriu acrescentar zeros até que ambos os números ficassem com o mesmo número de casas decimais, ou seja, 0,800 e 0,750. De seguida explicou que bastava observar os números à direita da vírgula e concluir que 800 é maior que 750 logo 0,8 é maior que 0,75.

Após esta abordagem inicial perguntei aos alunos o que observavam em relação ao número de casas decimais, esperando que algum identificasse que todos aqueles números correspondiam a dízimas finitas, o que não aconteceu. Filipa, respondendo à minha questão, acabou por associar os números decimais a frações dizendo, por exemplo,

9 Para efeitos de simplificação de escrita, designarei estes números por números decimais.

que “0,6 é seis décimas, logo é $\frac{6}{10}$” e que 0,75 corresponde a 75 centésimas, logo é representado pela fração $\frac{75}{100}$, o que favoreceu a compreensão pelos outros elementos da turma, tal como registei nas minhas notas de campo (figura 13).

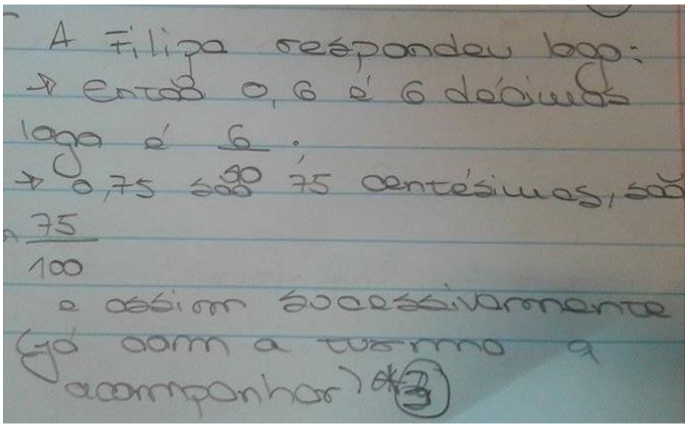


Figura 13 – Notas de campo sobre a intervenção de Filipa sobre números decimais e a respetiva representação em fração

A partir daqui, explorei a noção de número decimal e de fração decimal e, em seguida, escrevi no quadro os números 0,6 e 0,36513218… pedindo que identificassem a diferença entre eles, como ilustra o episódio 5.

Episódio 5

1. **Professora:** Qual é a diferença… o que é que observamos, Mariana, entre este número e este?
2. [A Mariana não responde]
   (…)
3. **Professora:** Joana.
4. **Joana:** É porque o seis é décimas e esse número muito grande…
5. **Professora:** Isto ainda continua, ainda tem muitos números.
6. **Joana:** É por isso que é grande. Não é décimas, é…
   (…)
7. **Filipa:** O 0,6 é décimas…
8. **Professora:** Foi o que a Joana disse.
9. **Filipa:** E é dízima finita. E o outro é infinita.

Foi através da intervenção de Filipa (§9) que foi possível chegar aos conceitos de dízima finita e infinita e revê-los, uma vez que estes eram essenciais para o desenrolar da tarefa *Investigando dízimas* (figura 14).

Ainda antes de iniciar a tarefa pedi aos alunos que, a pares, pensassem numa fração e vissem se correspondia a uma dízima finita ou infinita. Esta abordagem inicial permitiu-me trabalhar e rever vários conceitos relacionados com os números racionais não negativos (número decimal, fração decimal, comparação de números decimais, dízima). Em seguida, dei início à exploração da tarefa *Investigando dízimas* (figura 14) cujo objetivo era que os alunos descobrissem as dízimas representadas por frações unitárias e que investigassem se há alguma relação entre o tipo de dízimas obtido e os denominadores das frações.

INVESTIGANDO DÍZIMAS

- Uma fração unitária é aquela que tem numerador igual a 1.

Exemplo: $\frac{1}{2}$

Dada uma fração, se dividires o numerador pelo denominador obténs uma **dízima**.

1. Que tipo de dízimas são geradas pelas frações unitárias? Existe alguma relação entre o tipo de dízimas geradas e os denominadores das frações?

Investiga e formula hipóteses.

Figura 14 – Enunciado da tarefa

Já na exploração da tarefa, verifiquei que houve algumas dúvidas quanto ao conceito de fração unitária e quanto às frações a utilizar para responder às questões, havendo necessidade de algum auxílio da minha parte (figura 15).

* inicialmente houve dúvidas sobre frações unitá-
rias e que frações usar.

Figura 15 – Notas de campo sobre as dúvidas identificadas na exploração inicial da tarefa

Nesta tarefa, optei por organizar os alunos em pares e distribuí uma calculadora a cada par uma vez que esta permitiria determinar mais rapidamente as dízimas, deixando os alunos com mais tempo para a investigação de regularidades. Tiveram cerca de 15 minutos para pensarem autonomamente sobre a tarefa, seguindo-se a discussão coletiva, cujo início é ilustrado no episódio 6.

Episódio 6

1. **Professora:** Já alguém descobriu alguma relação? (…) Joana, dá lá um exemplo de uma fração que represente uma dízima finita, fração unitária.
2. **Joana:** Um sobre dezasseis.
3. **Professora:** Um sobre dezasseis, Joana, que dá…?
4. **Joana:** Zero vírgula…
5. **Professora:** Zero vírgula…
   (…)
6. **Joana:** 0,0625.

A exemplo do que ocorreu no momento da aula correspondente ao episódio 6, ao longo da discussão, os alunos foram apresentando algumas das frações analisadas (§2) e identificando se representavam dízimas finitas ou infinitas. No final, e uma vez que o objetivo da tarefa, era descobrir uma relação entre o tipo de dízimas geradas pelas frações unitárias e os seus denominadores, tentei que fossem os alunos a explicitar coletivamente essa relação. No entanto, e uma vez que nenhum havia identificado nenhum tipo de regularidade, fui eu quem teve de dar algumas pistas (episódio 7).

Episódio 7

1. **Professora:** Então vamos lá olhar [apontando para os denominadores]. E se transformarmos estes denominadores em multiplicações?
2. **Joana:** Podia.
3. **Professora:** Podia ser? Então como é que ficava este [$\frac{1}{16}$]?
4. **Filipa:** Dezasseis? Aaahh… oito vezes dois.

No final da discussão (figura 16), já com os denominadores transformados em produtos cujos fatores são 2 e 5, foi possível chegar à “regra”, nas palavras de Filipa, de que “nas finitas [frações] conseguimos que o denominador seja uma multiplicação com o 2 e com o 5. Nas outras não” (figura 17). Posteriormente, a conjetura de Filipa foi aperfeiçoada de modo a torná-la mais precisa e rigorosa do ponto de vista matemático e, por esta via, a turma formulou, coletivamente, uma conjetura que não foi, no entanto, matematicamente provada, dada a maturidade matemática dos alunos.

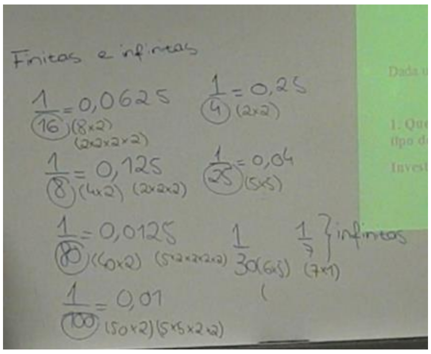
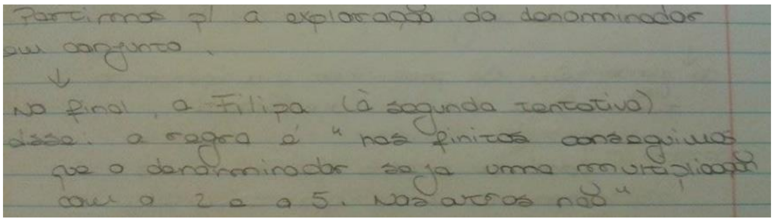


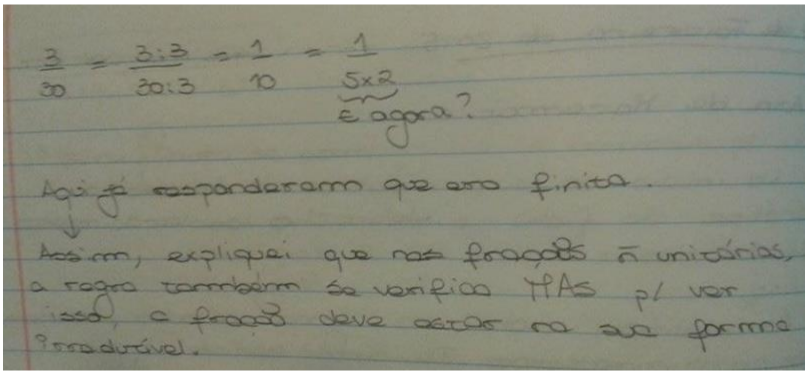
Figura 16 – Fotografia do quadro que mostra a decomposição dos denominadores em fatores 2 e 5



Partimos p/ a exploração do denominador em conjunto.
↓
No final, a Filipa (à segunda tentativa) disse: a regra é "nos finitos conseguimos que o denominador seja uma multiplicação com o 2 e o 5. Nos outros não"

Figura 17 – Notas de campo com a relação encontrada por Filipa

A tarefa tinha uma segunda parte que consistia em investigar se existia o mesmo tipo de relação nas frações não unitárias. Contudo, devido ao tempo, essa investigação ficou como trabalho de casa, sendo explorada na aula seguinte (27 de fevereiro). A exploração foi feita no quadro. À semelhança da aula anterior, os denominadores das frações indicadas foram decompostos, sempre que possível, em fatores de 2 e 5. Aplicando a "regra" descoberta na aula anterior, os alunos facilmente identificaram frações que representavam dízimas finitas e infinitas, até surgir a fração $\frac{3}{30}$ que levantou algumas dúvidas. Isto porque a decomposição do seu denominador era 5×2×3 logo, para eles, representava uma dízima infinita. Sugeri-lhes então que tornassem a fração irredutível e depois decompusessem o denominador. Assim, já foi possível verificar que se mantinha a relação encontrada para as frações unitárias (figura 18).



$\frac{3}{30} = \frac{3:3}{30:3} = \frac{1}{10} = \frac{1}{\underbrace{5\times 2}_{\text{E agora?}}}$

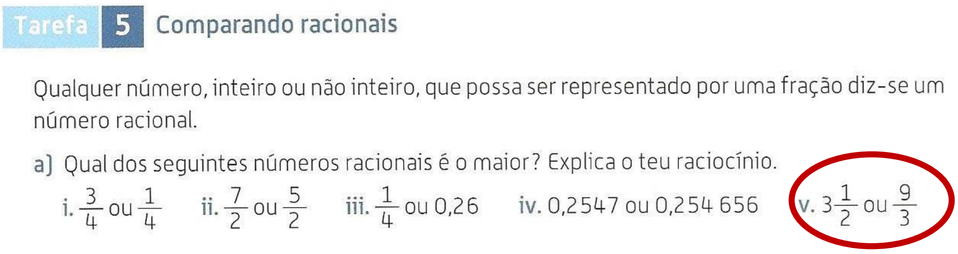
Aqui já responderam que era finita.
↓
Assim, expliquei que nas frações ñ unitárias, a regra também se verifica MAS p/ ver isso, a fração deve estar na sua forma irredutível.

Figura 18 – Notas de campo sobre a relação encontrada em frações não unitárias

<u>Comparando racionais</u>

A tarefa *Comparando racionais* (anexo 3), retirada do manual do aluno e adaptada em algumas alíneas, tinha como principal objetivo a comparação e ordenação de números racionais não negativos nas suas diversas representações, neste caso, frações (próprias e impróprias), números decimais e numerais mistos.

Antes de iniciar a tarefa, organizei os alunos por grupo. Depois disso, começaram a resolver as várias alíneas. Possivelmente porque a comparação de frações e de números decimais tinha sido trabalhada na aula não há muito tempo, as primeiras dificuldades surgiram associadas à alínea a), particularmente na subalínea v., pois existia um numeral misto, noção que ainda não havia sido abordada com os alunos (figura 19, assinalado a vermelho).



Tarefa 5 Comparando racionais

Qualquer número, inteiro ou não inteiro, que possa ser representado por uma fração diz-se um número racional.

a) Qual dos seguintes números racionais é o maior? Explica o teu raciocínio.

i. $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{4}$ ii. $\frac{7}{2}$ ou $\frac{5}{2}$ iii. $\frac{1}{4}$ ou 0,26 iv. 0,2547 ou 0,254 656 v. $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{3}$

Figura 19 – Alínea a)

Face à situação, optei por ajudar os alunos a perceber o significado de numeral misto (episódio 8).

Episódio 8

1. **Professora:** Isto que está aqui chama-se numeral misto. O numeral misto é misto porquê? Pensem lá, o que é uma coisa mista?
2. **Leonardo:** Tipo uma tosta.
3. **Professora:** Tipo uma tosta. O que é uma tosta mista?
4. **Vários alunos:** É de queijo e fiambre.
(…)
5. **Professora:** Então este número aqui, acham que é um número quê?
6. **Vários alunos:** Misto.
7. **Professora:** E este [apontando para o número inteiro], é um número…?
8. **Joana:** Misto!
(…)
9. **Professora:** É o número três. E o três é um número quê?
10. **Vários alunos:** Inteiro.
11. **Professora:** Inteiro. Então o três é um número inteiro. E o um sobre dois…? É fracionário…

Os alunos associaram a palavra "misto" a uma tosta mista (§2-§4) e, daí, parti para a definição de numeral misto e para a representação sob a forma de fração. Depois, questionei os alunos sobre o que significava, então, ter o número 3 e a fração $\frac{1}{2}$ (§9-§11). Uma vez que nenhum aluno sabia, optei por utilizar esquemas para representar o numeral misto e, assim, chegar à fração que o representava (figura 20).

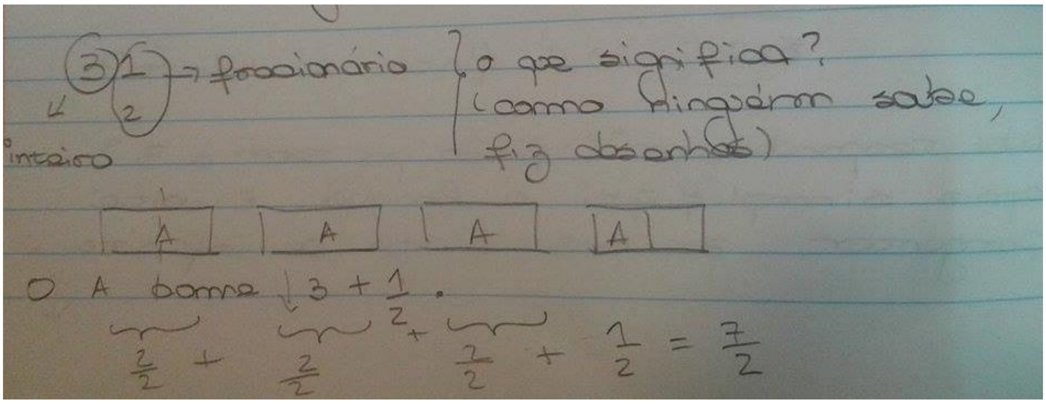


Figura 20 – Notas de campo que ilustram o esquema utilizado para chegar à fração representada pelo numeral misto

Depois deste esquema, expliquei que havia outra forma que nos permitia transformar um numeral misto numa fração. Rapidamente, a Carlota interveio dizendo que era possível fazer $\frac{(3\times2)+1}{2} = \frac{7}{2}$. A partir daqui, aplicou-se o que a Carlota havia dito a outros exemplos e a turma conseguiu avançar na tarefa. No entanto, não foi possível concluí-la, pelo que algumas alíneas ficaram para a aula seguinte (2 de março). Nessa aula, devido ao tempo que a exploração da tarefa estava a ocupar, decidi, em conjunto com a professora cooperante, que o melhor era continuar a resolução no quadro, com a participação coletiva dos alunos, tentando sempre alertá-los para os aspetos mais importantes sobre a comparação de números racionais e para as relações entre as diferentes representações dos números racionais não negativos. No entanto, esta estratégia acabou por ser ineficaz pois, mesmo assim, não houve tempo para resolver algumas das alíneas da tarefa nem para a ficha de trabalho que tinha preparado, pelo que foram como trabalho de casa. Na aula seguinte (3 de março) foram resolvidas no quadro, por alunos que indiquei (figura 21).

Figura 21 – Aluna resolve uma alínea de uma tarefa no quadro

Terrenos nas aldeias

A tarefa *Terrenos nas aldeias* (anexo 4) era constituída por duas partes: a primeira envolvia a identificação da fração correspondente a cada quantidade de terreno e operações com frações e, a segunda, em que se pretendia que os alunos escrevessem um algoritmo para a adição e subtração de números racionais não negativos representados sob a forma de fração.

A exploração da tarefa teve início no dia 3 de março, com a organização da turma em pares de trabalho (excetuando-se um grupo de três alunos), e com a distribuição de uma folha A_3, para a produção de um cartaz, e de material manipulável que pensei poder ser útil à realização da tarefa (figura 22). Este material, que foi distribuído já recortado de modo a que os pedaços coloridos com diferentes cores ficassem separados, permitia aos alunos, por exemplo, ver quantas vezes um terreno "cabia" noutro e, por esta via, poderiam chegar, mais facilmente, à fração do terreno de cada uma das famílias referidas no enunciado e/ou a uma adição ou subtração de frações.

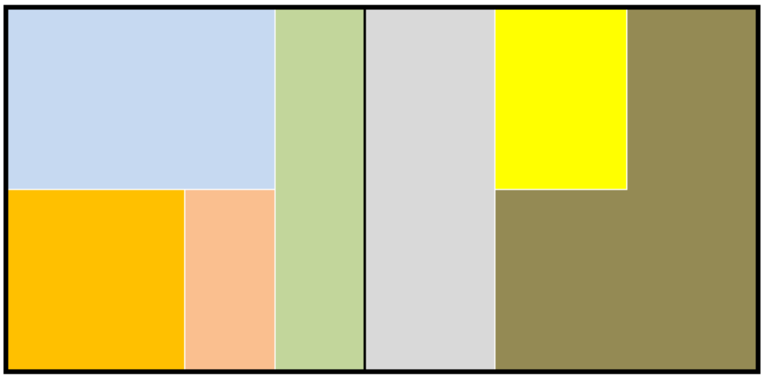


Figura 22 – Imagem do material manipulável distribuído aos alunos para a realização da tarefa

O enunciado da tarefa foi projetado no quadro e lido em conjunto, esclarecendo-se as dúvidas que surgiram. Depois da leitura, os pares iniciaram o seu trabalho e eu fui circulando pela sala para apoiar os alunos, mas também para ir identificando e selecionando alguns grupos para apresentarem os seus cartazes na discussão final. Enquanto circulava pelos grupos, identifiquei estratégias bastante distintas, umas com mais sucesso do que outras, tal como é visível nas figuras 23, 24 e 25.

A Beatriz e a Mariana começaram por identificar que podiam dividir a Aldeia Amarela ao meio e obtinham 50% de cada lado e, depois, a Família Faro tinha 25% (pq era metade de 50%) fazendo depois a transformação p/ $\frac{1}{4}$.

Figura 23 – Notas de campo sobre a estratégia utilizada por Beatriz e Mariana

O Delfim e a Joana também tiveram dificuldades p/ começar. Quando lá voltei já tinham dividido as aldeias (de acordo c/ as linhas do terreno) e, na Aldeia Amarela

Figura 24 – Notas de campo sobre a estratégia utilizada por Joana e Delfim

No grupo da Márcia e do Diogo, ambos trabalharam e chegaram às frações dos terrenos vendo quantas vezes um terreno cabia noutro.
Como já estavam adiantados, fiz-lhes algumas questões sobre as frações dos terrenos. P/ ex: Na família Lopes, como é que podiam pensar p/ chegar a $\frac{3}{8}$ sem ser contado os $\frac{1}{8}$ do terreno?

Figura 25 – Notas de campo sobre a estratégia utilizada por Márcia e Diogo

Na aula seguinte (6 de março), dei mais tempo aos alunos para continuarem a resolução da tarefa e observei que alguns grupos continuavam com dificuldades na identificação das frações de cada terreno (figura 26).

Alguns grupos continuam c/ muita dificuldade na identificação das frações (Carina, Carlota Tomás e Micaela). A ideia que lhes dei, foi que vissem quantas vezes o terreno mais peq. cabia na respetiva aldeia.

Figura 26 – Notas de campo sobre as dificuldades encontradas nos grupos de trabalho

Por questões de tempo, após, aproximadamente, 25 minutos do início da aula, foi necessário dar início à apresentação e discussão coletiva de estratégias de resolução. Durante esta fase surgiram abordagens diferentes à tarefa e ideias importantes que foram discutidas coletivamente. Os episódios 9 e 10 constituem excertos das apresentações feitas por dois dos grupos.

Episódio 9

1. **Joana:** Ai, na aldeia amarela. Fomos dividir as famílias todas. E depois fomos…
2. **Professora:** Como é que dividiram? Porque é que dividiram em oito?
3. **Joana e Delfim:** Era para saber quanto terreno é que cada família tinha.
4. **Professora:** Então, mas eu podia dividir em seis, em quatro, em três… Porque é que dividiram em oito?
5. **Joana:** Porque…
6. **Professora:** O que é que vos ajudou a dividir em oito?
7. **Joana:** Foi a família Faro.
8. **Professora:** Foi a família Faro? Foi essa peça verde? Olharam para a peça verde e pensaram "Ah isto é um oitavo!".
9. **Joana:** Não! Dividimos primeiro tudo e depois… e depois fomos contar… como se fosse aquilo tudo uma unidade e vimos que tudo era um oitavo.
10. **Professora:** Sim… E o que é que descobriram?
11. **Joana:** Descobrimos que a família Moura tem dois oitavos.
12. **Delfim:** Igual a um oitavo mais um oitavo.
13. **Joana:** E a família Ilídio tem um oitavo.
14. **Delfim:** O Faro tem dois oitavos e o Lopes mais um oitavo…
15. **Joana:** O Lopes tem três oitavos, um oitavo mais um oitavo mais um oitavo.

(Grupo de Joana e Delfim)

Episódio 10

1. **Professora:** Então como é que vocês começaram? Expliquem lá, começaram a partir de onde?
2. **Beatriz S.:** Nós começamos pela Faro.
3. **Professora:** Porquê? Explica lá… viram o quê?
4. **Beatriz S.:** Porque vimos que o Faro valia um quarto, que é 25%. Mas primeiro dividimos ao meio o terreno do Lopes e vimos que aqui estava metade, aqui ficava uma metade, aqui ficava outra. A Faro vimos que era um quarto, o Lopes também era um quarto, aqui… depois vamos fazer esta parcelazinha assim por todo o terreno e vimos que dava um oitavo.

(Grupo de Mariana e Beatriz S.)

Analisando os episódios 9 e 10, é possível identificar dois modos distintos de pensar sobre a tarefa. No grupo de Joana e Delfim, os alunos optaram por dividir a aldeia tendo em conta a família que tinha a quantidade mais pequena de terreno. Através desta divisão observaram que a aldeia ficou dividida em oito partes e que este terreno correspondia a $\frac{1}{8}$ (Episódio 9, §6-§15). Mariana e Beatriz S. optaram por utilizar as percentagens e viram que o terreno da família Faro, cabia quatro vezes na aldeia, era um quarto que correspondia a 25% (Episódio 10, §4).

Em seguida, seguimos para a segunda parte da tarefa (criação do algoritmo). Após a leitura desta parte, alguns alunos manifestaram algumas dúvidas. Optei por pedir a outros alunos que explicassem aos colegas o que era pedido. No entanto, foi necessário explicar a noção de algoritmo, tendo indicado que se tratava de um conjunto finito de passos necessários para obter um produto final, seja ele um cálculo ou, por exemplo, um bolo.

Uma vez que não foi possível concluir a segunda parte da tarefa, a aula seguinte (9 de março) iniciou-se com a apresentação, por parte do grupo de Filipa, do que tinham descoberto relativamente ao algoritmo solicitado. O episódio 11 mostra um excerto da sua apresentação.

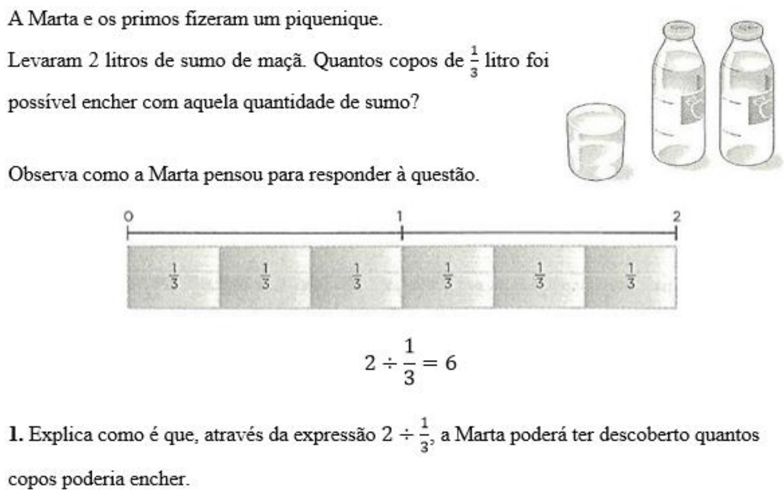
Episódio 11

1. **Filipa:** Nós fizemos a explicação das frações com o mesmo denominador e com (…) Com denominadores diferentes e com denominadores iguais. Nos denominadores iguais é só preciso somar os numeradores e pôr lá o denominador correspondente às mesmas. E nos denominadores diferentes, pomos… achamos uma fração equivalente a uma delas com o mesmo denominador da outra ou uma fração equivalente das duas com o mesmo denominador e depois fazemos o mesmo procedimento das com o denominador igual.

Filipa explicou todos os passos necessários para adicionar frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes (§1) explicando, posteriormente, que para subtrair frações procederia da mesma forma. A esta explicação, sucederam-se, para concluir a tarefa, algumas expressões numéricas de aplicação do algoritmo da adição e da subtração com frações.

Piquenique

A tarefa *Piquenique* (anexo 5) tinha como objetivo introduzir a divisão de frações. Aqui era importante que os alunos analisassem e compreendessem o esquema ilustrativo incluído no enunciado e que explicassem como é que a Marta, usando a expressão indicada ($2 \div \frac{1}{3} = 6$), poderia ter descoberto o número de copos de um terço de litro que poderia encher com dois litros de sumo (figura 27).


A Marta e os primos fizeram um piquenique.
Levaram 2 litros de sumo de maçã. Quantos copos de $\frac{1}{3}$ litro foi possível encher com aquela quantidade de sumo?

Observa como a Marta pensou para responder à questão.

$$2 \div \frac{1}{3} = 6$$

1. Explica como é que, através da expressão $2 \div \frac{1}{3}$, a Marta poderá ter descoberto quantos copos poderia encher.

Figura 27 – Contexto da tarefa e primeira questão

Considerei que era importante que os alunos colocassem a questão "Quantas vezes um terço de litro cabe em dois litros?" para depois chegar à expressão envolvendo a divisão. Para isso, distribui aos alunos material manipulável (figura 28) que representava os litros de sumo (duas tiras retangulares de papel, representadas a verde), copos com $\frac{1}{3}$ de litro (pedaços da tira, representados a lilás), copos com $\frac{1}{6}$ de litro (pedaços da tira, representados a branco), a tarte (retângulo representado a laranja) e pedaços de tarte (retângulo representado a azul).

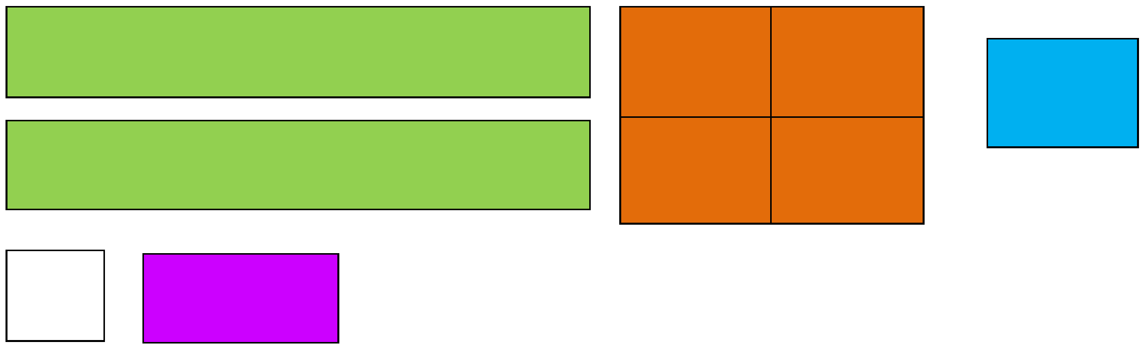


Figura 28 – Material manipulável útil à resolução da tarefa

Antes de se iniciar a exploração da tarefa, dividi os alunos por grupos de três e de quatro elementos distribuindo, em seguida, o enunciado da tarefa que foi lido e discutido coletivamente para clarificar algumas dúvidas. Depois desta introdução, os grupos tiveram, aproximadamente, 30 minutos para resolverem o máximo de alíneas da tarefa para, posteriormente, se iniciar a discussão coletiva das estratégias usadas e resultados obtidos. O episódio 12 ilustra um momento desta discussão.

Episódio 12

1. **Professora:** Mostra lá Tiago. Para que é que usaram esses esquemas?
2. **Tiago:** A Marta pensou que um litro tinha três terços. Mas eram dois litros. Então tinham mais três terços. O que dava no total, seis terços.
   (…)
3. **Professora:** (…) foi ver quantos copos de um terço cabiam em dois litros. E por isso desenhou, como fez o grupo da Márcia… desenhou o quê? O que é que desenhou a Marta?
4. **Joana:** Os dois litros.
5. **Professora:** E foi ver o quê?
6. **Joana:** Quanto cabe um terço em dois litros.
   (…)
7. **Filipa:** Porque os copos… cada copo levava um terço. E cada litro só cabia três terços.
8. **Professora:** Mariana… diz lá, repete lá para a Mariana ouvir, Filipa.
9. **Filipa:** Cada copo equivalia a um terço e em cada litro só cabiam três terços.
10. **Professora:** Explica lá o que é que a Filipa… ela disse que em cada litro só cabem três terços.
11. **Mariana:** Em cada litro só dá para encher três copos.
12. **Professora:** Sim e porque é que em cada litro só cabem três copos, só dá para encher três copos?
13. **Mariana:** Porque um terço de litro só dá um copo, se são três…
    (…)
14. **Márcia:** Porque três terços é uma unidade e como é só um terço, tínhamos que dividir em três.

Neste episódio podemos observar que Tiago, partindo do esquema disponibilizado no enunciado, identificou que num litro havia seis terços (§2). A partir daqui, Joana conseguiu identificar que Marta (menina referida no enunciado da tarefa) tinha visto quantos terços cabiam em dois litros (§3-§6). De forma a tentar perceber se os alunos tinham compreendido por que razão um litro só permitia encher três copos de um terço de litro, questionei a Mariana (§8-§10). Como revelou algumas dificuldades em explicar, Márcia avançou com uma justificação que permitiu aos restantes alunos associarem a unidade com o total de partes em que está dividida (§14).

No final de discutir as resoluções das três primeiras questões da tarefa, e antes de avançar para a quarta questão, cujo objetivo era encontrar uma relação entre as expressões encontradas (com recurso à divisão) e os resultados obtidos, preparei um diapositivo, cuja exploração, do meu ponto de vista, permitia aos alunos chegarem, mais facilmente a uma conclusão sobre essa relação e, assim, conseguirem compreender como se dividem números representados por frações (figura 29).

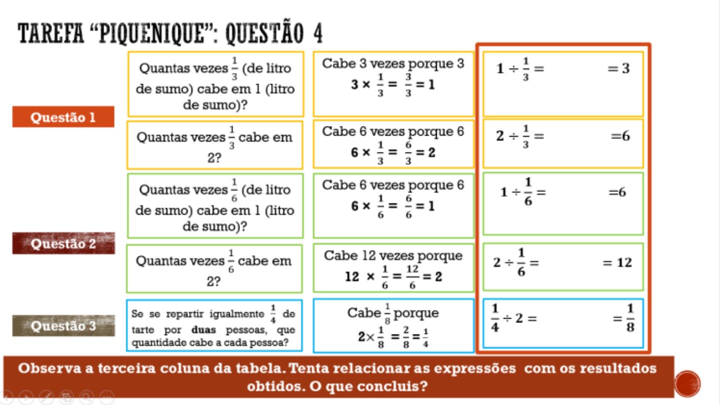


Figura 29 – Diapositivo com as relações estabelecidas entre as questões da tarefa

Apesar de iniciar a análise do diapositivo na aula, não foi possível terminá-la, tendo continuado na aula seguinte (10 de abril). Apresentei aos alunos uma tabela que pretendia agrupar, tendo em conta a forma como a Marta (menina do enunciado) pensou, a forma como raciocinaram para descobrir os resultados das restantes questões da tarefa. Esta tabela possibilitou estabelecer relações entre as questões e, posteriormente, escrever uma regra matematicamente correta para dividir frações. Para isso, foi necessário rever a linguagem matemática associada à divisão, como é possível observar no Episódio 13.

Episódio 13

1. **Professora:** Então vá, Cláudio, dita lá a regra. Como é que eu começo? Para…
2. **Cláudio:** Para dividir o dividendo…
3. **Professora:** Espera… vou dividir o quê? O dividendo?
4. **Cláudio:** Não.
5. **Professora:** Vou dividir o quê? Números…
6. **Vários alunos:** Racionais…
7. **Professora:** Vamos pôr "representados sob a forma de fração…

   (…)
8. **Professora:** Multiplicamos o…
9. **Vários alunos:** dividendo…
10. **Professora:** Multiplicamos o dividendo…
11. **Vários alunos:** Pelo inverso do divisor.

O episódio 13 ilustra o momento em que os alunos chegam a uma regra que permite dividir números representados sob a forma de fração (§2-§11). Posteriormente, para que ficassem com um registo no caderno, ditei a “regra” que foi elaborada com o contributo de todas as suas ideias. No final, seguiram-se tarefas de aplicação da mesma.

3.3. Procedimentos e técnicas de recolha de dados

Para a realização do estudo utilizei como técnicas de recolha de dados a observação participante, a recolha documental e entrevistas clínicas aos alunos caso. Na tabela 3, refiro estas técnicas bem como as fontes de dados e o material empírico associado a cada técnica.

Tabela 3 – Recolha de dados e material empírico

TÉCNICAS DE RECOLHA DE DADOS	FONTES	MATERIAL EMPÍRICO
Observação participante	Aulas	• Notas de campo; • Gravações vídeo e áudio das aulas lecionadas (transcrições de excertos das gravações);
Recolha documental	Alunos	• Produções dos alunos (fichas de trabalho resolvidas pelos alunos)
Entrevistas clínicas	Dois alunos selecionados	• Gravação vídeo e áudio de cada entrevista, no total de 4 entrevistas a cada aluno caso (transcrições integrais das gravações).

3.3.1. Observação participante

A observação é uma técnica de recolha de dados onde o investigador “observa em directo e presencialmente o fenómeno em estudo” (Coutinho, 2011, p. 317). Afonso (2005) refere que esta técnica é

> particularmente útil e fidedigna, na medida em que a informação obtida não se encontra condicionada pelas opiniões e pontos de vista dos sujeitos, como acontece nas entrevistas e nos questionários. Os produtos da observação tomam a forma de registos escritos pelo investigador, ou registos em vídeo realizados pelo investigador ou por outrem sob a sua orientação. (p. 91)

A falta de rigor dos registos produzidos aquando da observação é um dos principais problemas desta técnica (Afonso, 2005). O investigador deve estar atento a este problema e “em qualquer caso (…) deve descrever as próprias observações e não as inferências elementares derivadas dessas observações" (Pelto e Pelto, citados por Afonso, 2005, p. 94).

A observação pode ser participante e não-participante (Carmo & Ferreira, 1998). Na investigação que realizei a "observação foi participante propriamente dita" (*idem*, p. 107) uma vez que, como observadora, assumi de forma explícita um "papel estudioso junto da população observada" (*ibidem*). Este tipo de observação tem como principal vantagem "a possibilidade de entender profundamente o estilo de vida de uma população e de adquirir um conhecimento integrado da sua cultura" (*idem*, p. 108).

A observação, como técnica de recolha de dados, é, na maioria das vezes, apoiada por outros meios que permitem registar os dados recolhidos.

As observações podem ser anotadas "*a)* no momento em que ocorrem, ou *b)* no momento após a ocorrência" (Máximo-Esteves, 2008, p. 88). Neste caso, dependendo do momento das anotações, são utilizadas diferentes ferramentas de registo.

- No momento em que ocorrem, "quando se exigem maior fidelidade no registo do que está acontecer" (*idem*, p. 88). Em particular,

> pode recorrer-se ao suporte áudio, no caso da observação de ocorrências ou conversações, que serão posteriormente transpostas para registo escrito sob a forma de transcrição integral, de notas resumidas ou comentários, ou pode recorrer-se também ao suporte de imagem (fotografia ou vídeo) quando, por exemplo, se pretende registar as expressões das crianças ou a movimentação na sala (Máximo-Esteves, 2008, p. 88).

- Depois da ocorrência, "as notas de campo tomam a forma de registo escrito" (Máximo-Esteves, 2008, p. 88). Consistem em "anotações extensas, detalhadas e reflexivas, elaboradas depois da aula; neste caso, deve proceder-se ao seu registo o mais rapidamente possível, enquanto a memória retém os pormenores (…) dos acontecimentos" (*ibidem*).

  Segundo Bogdan e Biklen (1994),

> as notas de campo podem originar em cada estudo um diário pessoal que ajuda o investigador a acompanhar o desenvolvimento do projecto, a visualizar como é que o plano de investigação foi afectado pelos dados recolhidos, e a tornar-se consciente de como ele ou ela foram influenciados pelos dados. (pp. 150-151)

Os diários correspondem aos registos descritivos da observação e uma outra parte onde se "inclui os sentimentos, as emoções e as reacções a tudo o que rodeia o professor-investigador" (Máximo-Esteves, 2008, p. 98). Esta ideia enquadra-se, do meu ponto de vista, com o que Bogdan e Biklen (1994) referem quanto ao conteúdo das notas de campo:

> As notas de campo consistem em dois tipos de materiais. O primeiro é descritivo, em que a preocupação é a de captar uma imagem por palavras do local, pessoas, acções e conversas observadas. O outro é reflexivo – a parte que apreende mais o ponto de vista do observador, as suas ideias e preocupações. (p. 152)

Na investigação que desenvolvi, utilizei, como registos de apoio as notas de campo e o registo vídeo e áudio das aulas e das entrevistas. Este registo foi feito em todas as aulas (13 aulas), exceto na aula em que decorreu a ficha de avaliação sumativa, e ainda em todas as entrevistas clínicas realizadas (8 entrevistas), depois de obtida a devida autorização dos encarregados de educação.

3.3.2. Recolha documental

De uma forma geral, a pesquisa documental "visa selecionar, tratar e interpretar informação bruta existente em suportes estáveis (…) com vista a dela extrair algum sentido" (Carmo & Ferreira, 1998, p. 59).

No caso da investigação realizada, a recolha documental baseou-se, essencialmente, nas produções dos alunos, nas tarefas *Problema na distribuição de baguetes*, *Terrenos nas Aldeias*, *Fazendo bolos deliciosos* e *O aniversário da Ana e Daniel e o leite*. A análise destes documentos "produzidos pelas crianças é indispensável quando o foco da investigação se centra na aprendizagem dos alunos" (Máximo-Esteves, 2008, p. 92). De acordo com Máximo-Esteves (2008), esta técnica de recolha de dados é normalmente utilizada pelos professores que, "partindo de uma prática que pretendem aperfeiçoar, analisam metodicamente amostras de trabalhos elaborados pelos alunos, para compreenderem como é que as crianças processam a informação, resolvem problemas e lidam com tópicos e questões complexas" (p. 92). Por esta via, podem "aprender muito sobre a forma como ensinam e como podem orientar as necessidades dos seus alunos" (*ibidem*).

3.3.3. Entrevistas

Segundo Bogdan e Biklen (1994), "uma entrevista consiste numa conversa intencional, geralmente entre duas pessoas, (…) dirigida por uma das pessoas, com o ojectivo de obter informações sobre a outra" (p. 134). A entrevista pode ser utilizada como a técnica dominante da recolha de dados ou em conjunto com outras técnicas, como a observação participante e a análise de documentos.

Numa entrevista, cabe ao entrevistador gerir "três problemas em simultâneo" (Carmo & Ferreira, 1998, p. 126): a influência do entrevistador no entrevistado, as diferenças culturais que podem existir entre eles e, por fim, a sobreposição de canais de comunicação, ou seja, os vários tipos de entoação com que são colocadas as questões ao entrevistado.

Para o desenvolvimento da investigação, optei por realizar entrevistas clínicas (Hunting, 1997). As entrevistas clínicas são um método de recolha de dados que reconhecem o papel da linguagem e a importância da clarificação de significados quando, em contacto com questões e problemas, as crianças falam sobre as suas ideias matemáticas e explicam as suas ações, ou seja, aquilo que fizeram (*ibidem*). Este tipo de entrevistas possibilita um melhor conhecimento sobre os alunos e as suas aprendizagens, permitindo ao professor planificar e adaptar as suas estratégias; fornece elementos que complementam a avaliação dos alunos e possibilita um desenvolvimento do conhecimento sobre aprendizagem e conceções dos alunos.

No caso específico da investigação que realizei, as entrevistas clínicas possibilitaram o desenvolvimento de um conhecimento mais aprofundado acerca dos raciocínios matemáticos utilizados pelas alunas caso na resolução das tarefas propostas, bem como as representações e conhecimentos mobilizados e as dificuldades com que se confrontaram.

As entrevistas clínicas consistiram em entrevistas com resolução de problemas onde foram propostos problemas às alunas, que os resolveram por escrito e, em simultâneo, foram falando sobre os seus raciocínios, ou seja, deram a conhecer como estavam a pensar. Cada entrevista teve uma duração média de cerca de 30 a 40 minutos.

A tabela 4 mostra como foram organizadas as tarefas propostas ao longo das entrevistas.

Tabela 4 – Organização das entrevistas clínicas

<table>
<tr><th>Data da entrevista</th><th>Tarefa proposta</th><th>Objetivo da entrevista</th></tr>
<tr><td>16 de março de 2015</td><td rowspan="2">Problema da distribuição de baguetes</td><td rowspan="4">Análise e explicitação dos raciocínios utilizados na resolução das tarefas propostas em sala de aula.</td></tr>
<tr><td>18 de março de 2015</td></tr>
<tr><td>4 de maio de 2015</td><td rowspan="2">Terrenos nas Aldeias</td></tr>
<tr><td>5 de maio de 2015</td></tr>
</table>

11 de maio de 2015	Fazendo bolos deliciosos	Resolução da tarefa proposta acompanhada da explicitação dos raciocínios e representações utilizadas.
12 de maio de 2015		
26 de maio de 2015	O aniversário da Ana e o Daniel e o leite	
3 de junho de 2015		

Para a realização das entrevistas, optei por escolher duas das tarefas propostas em sala de aula (*Problemas na distribuição de baguetes* e *Terrenos nas Aldeias*) para, posteriormente, e após análise das resoluções, entrevistar ambas as alunas caso. Além disso, propus às alunas a resolução de duas outras tarefas matemáticas apresentadas apenas nas entrevistas (*Fazendo bolos deliciosos* e *O aniversário da Ana e Daniel e o leite*).

3.4. Análise de dados

A análise de dados corresponde ao

> processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua [do investigador] própria compreensão desses materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205)

A análise e interpretação dos dados remete para "a utilização dos mesmos para responder às questões de investigação" (Tuckman, 2000, p. 527).

Para analisar os dados recolhidos, optei pela análise de conteúdo, "uma técnica de investigação que permite fazer uma descrição objectiva, sistemática e quantitativa do conteúdo manifesto das comunicações, tendo por objectivo a sua interpretação" (Berelson citado por Carmo & Ferreira, 1998, p. 251). Neste sentido, "tudo o que é dito ou escrito é susceptível de ser submetido a uma análise de conteúdo" (Henry & Moscovici citados por Bardin, 1977, p. 33).

Uma análise de conteúdo requer que o investigador tire "partido do tratamento das mensagens que manipula, para inferir (deduzir de maneira lógica) conhecimentos sobre o emissor da mensagem ou sobre o seu meio, por exemplo" (Bardin, 1977, p. 39). Tendo em conta a natureza da minha investigação e os dados recolhidos, considerei pertinente a realização de uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas onde “a noção de importância implica a novidade, o interesse, o valor de um tema” (Carmo & Ferreira, 1998, p. 253).

Segundo Bardin (1977) “as categorias, são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (…) sob um título genérico, agrupamento esse efectuado em razão dos caracteres comuns destes elementos” (p. 177). Se o critério de categorização for semântico, está-se na presença de categorias temáticas (*idem*, pp. 177, 178). Este autor refere que “a categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o género (analogia), com os critérios previamente definidos” (p. 177), sublinhando que esta operação acaba por orientar a análise de conteúdo.

As categorias de análise podem ser definidas *a priori* (antes de se iniciar o processo de recolha de dados) *ou a posteriori* (apenas depois de uma primeira fase de análise). É importante referir, no entanto, que durante o processo de análise, vão sendo “aperfeiçoadas” e ajustadas tendo sempre por referência o objetivo e nas questões de investigação.

No caso do estudo que desenvolvi as categorias não foram propriamente definidas *a priori* ou *a posteriori*. Quero com isto dizer que, antes de iniciar a investigação já tinha alguma ideia de aspetos que pretendia analisar mas estas só ficaram completamente definidas após uma primeira análise dos dados recolhidos.

O processo de análise dos dados que recolhi teve três fases principais. A primeira, ocorreu em simultâneo com a recolha de dados. Consistiu na constituição de dois *dossiers*, um por cada aluna caso, onde os dados eram arquivados tarefa a tarefa, incluindo, as possíveis estratégias de resolução de cada tarefa e um plano geral das entrevistas clínicas realizadas, bem como algumas anotações importantes relativamente a estas entrevistas.

Terminada a recolha de dados, iniciei a segunda fase da análise. Esta fase consistiu numa leitura flutuante (Bardin, 1977) das transcrições das entrevistas, de forma a poder criar um conjunto de categorias para elaborar uma análise de conteúdo mais aprofundada. Neste âmbito, foram definidas as seguintes categorias: (i) os raciocínios das alunas – nomeadamente, a existência de explicações, justificações, generalizações e formulação de conjeturas; (ii) os recursos utilizados – conhecimentos matemáticos mobilizados e representações usadas; (iii) dificuldades experienciadas – nomeadamente, raciocínios incorretos total ou parcialmente, hesitações ou desconhecimento de conceitos ou procedimentos matemáticos e outros obstáculos que constrangeram a resolução fundamentada das tarefas propostas.

A terceira fase da análise teve como objetivo elaborar os estudos de caso e responder às questões da investigação. Tendo em conta as categorias definidas, analisei, relativamente a cada aluna, cada uma das tarefas revisitadas ou resolvidas nas entrevistas clínicas. Apesar de todos os dados recolhidos serem importantes, os cartazes produzidos pelas alunas relativamente às duas tarefas exploradas na aula, bem como as gravações vídeo e áudio das respetivas aulas, foram, nesta fase, particularmente relevantes para compreender os seus raciocínios. Quanto às duas tarefas exploradas na sala de aula e que foram, também, exploradas nas entrevistas, analisei, em simultâneo, os cartazes produzidos pelos alunos, episódios da sala de aula e as transcrições das entrevistas e respetivas gravações (áudio e vídeo). Relativamente às duas tarefas resolvidas apenas nas entrevistas, analisei as resoluções das alunas em simultâneo com as transcrições das entrevistas e as respetivas gravações. Esta fase da análise foi organizada em duas etapas distintas. Primeiro analisei todos os dados relacionados com uma das alunas caso – Filipa – e redigi o respetivo estudo de caso. Em seguida, foquei-me na outra aluna – Márcia – procedendo do mesmo modo.

Capítulo IV – Análise de dados

Este capítulo foca-se na apresentação e análise dos dados recolhidos ao longo da minha investigação. Divide-se em duas secções que correspondem aos casos analisados: Filipa e Márcia. Cada secção foi organizada em quatro subsecções relativas às quatro tarefas que foram revisitadas ou propostas no âmbito das entrevistas. A análise da atividade matemática das alunas, associada a cada uma das tarefas, é apresentada tendo em conta os seguintes organizadores: (i) raciocínios; (ii) recursos utilizados e (iii) dificuldades na resolução das tarefas.

4.1. Filipa

Filipa, aluna de nacionalidade portuguesa, tem onze anos e frequenta o 5.º ano de escolaridade pela primeira vez. É extrovertida, muito participativa e uma ótima comunicadora. Contudo, revela uma participação desorganizada e tem por hábito sobrepor a sua voz às dos restantes colegas mostrando que "ela é quem sabe". Por essa razão, na realização de trabalhos de grupo, não deixa muito espaço para que estes exponham os seus raciocínios.

É boa aluna e mantém um bom desempenho (nível 4) à maioria das disciplinas. No que diz respeito à disciplina de matemática, revela uma boa aprendizagem e compreensão dos conhecimentos sendo uma aluna de nível 4-5.

4.1.1. Tarefa *Problema na distribuição de baguetes*[10]

Esta tarefa tinha como objetivo geral que os alunos descobrissem a quantidade de baguete que cada aluno comeu em cada grupo de uma visita de estudo, para perceber e justificar se a distribuição das baguetes pelos vários grupos havia sido justa (anexo 1). A sua exploração ocupou, como referi no capítulo *Metodologia*, cerca de duas aulas.

Raciocínios de Filipa

A figura 30 mostra a estratégia utilizada pelo grupo de Filipa para descobrir a quantidade de baguete que coube a cada aluno do grupo do Planetário.

[10] Tarefa apresentada no capítulo anterior, na secção *Intervenção Pedagógica*.

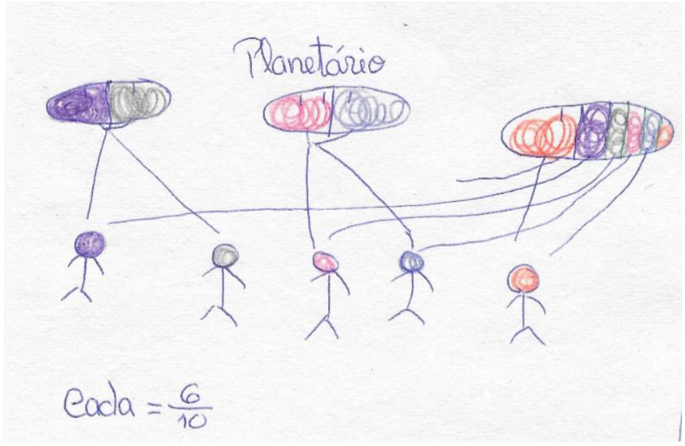


Figura 30 – Resolução do grupo de Filipa para o Planetário

Analisando a figura 30, é possível ver que o grupo começou por dividir cada uma das baguetes ao meio, distribuindo uma metade por cada um dos cinco alunos que visitou o planetário. Uma vez que sobrava metade de uma baguete, o grupo dividiu-a em cinco partes para voltar a distribuir cada uma destas partes por aluno. O extrato 1 ilustra, nas palavras de Filipa, o modo como pensaram.

Extrato 1

1. **Filipa:** Nós fizemos o número de alunos e o número de baguetes [refere-se à representação apresentada na figura 30]. Depois dividimos as baguetes ao meio e deu uma metade para cada um e sobrou outra metade que dividimos em cinco porque eram cinco alunos. E então, como este equivale a cinco, este também equivale. Então, cada metade equivale a cinco [refere-se a porções/pedaços] logo é dez, cada baguete. Então comiam seis décimos porque comiam um bocadinho daqui e um bocadinho daqui, então era seis décimos.
2. **Professora** (apontando para metade da baguete)**:** Então qual é a fração deste bocadinho?
3. **Filipa:** É um meio.
4. **Professora:** Um meio … e como é que juntaste um meio com … Isto é o quê? Qual é a fração deste bocadinho [apontando para uma das divisões de baguete correspondente a $\frac{1}{10}$]?
5. **Filipa:** Um décimo.
6. **Professora:** Como é que sabes que é um décimo?
7. **Filipa:** Porque se este está dividido em cinco, este também devia estar dividido em cinco.
8. **Professora:** Então, no total … explica lá melhor.
9. **Filipa:** No total é dez porque aqui tem cinco. Cinco mais cinco dá dez.

(Transcrição EF1[11], p. 1)

11 **EXY:** Sigla adotada para designar as entrevistas realizadas em que **X** representa a inicial do nome da aluna e **Y** o número da entrevista (que varia entre 1 e 4).

No §1, para além de explicar a sua representação, Filipa diz que cada aluno come seis décimos. Para chegar a esse resultado, e através das representações que utilizaram para resolver a tarefa (figura 30), era necessário "juntar" metade de uma baguete com um décimo de outra baguete.

Analisando globalmente este extrato, constato que a aluna explica como pensou para chegar ao valor $\frac{6}{10}$ (§4-§9), tornando claro o seu raciocínio. Além disso, nos §7 e §9, também justifica porque é que a fração correspondente ao pedaço mais pequeno é $\frac{1}{10}$, referindo que, se metade de uma baguete está dividida em cinco partes a outra metade também está e, por isso, toda a baguete tem dez partes. A figura 31 permite elucidar a forma como Filipa pensou.

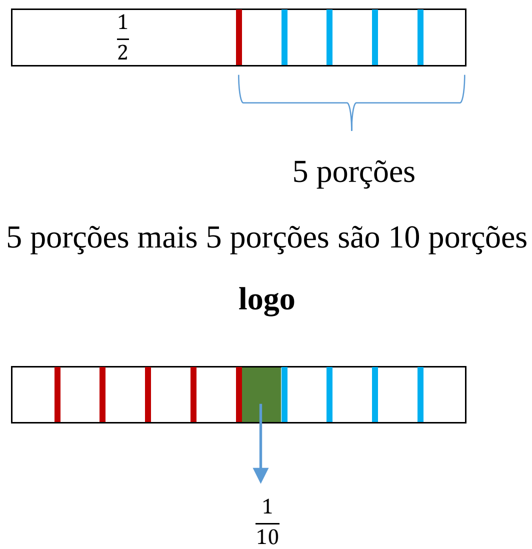


Figura 31 – Forma como Filipa e o grupo pensaram para chegar à fração da porção de baguete mais pequena

O extrato 2 permite conhecer o modo como Filipa pensou quando a questionei sobre como adicionou um décimo e um meio.

Extrato 2

1. **Filipa:** Porque isto equivale a cinco e cinco mais um é seis. E depois, seis décimos.
2. **Professora:** Aaah. A metade é quê?
3. **Filipa:** É cinco.
4. **Professora:** Cinco quê?
5. **Filipa:** Cinco décimas.

(Transcrição EF1, p. 1)

Recorrendo ao que havia explicado e justificado anteriormente (Extrato 1, §7-§9), a aluna justificou (§1) que adicionou as frações transformando um meio em cinco décimas, como ilustra a figura 31. Recorrendo às suas representações, Filipa sabe que metade da baguete corresponde a cinco décimas (Extrato 2, §3-§6).

A figura 32 mostra a representação feita pelo grupo de Filipa no cartaz que elaborou no que se refere ao grupo do Museu de Arte Moderna.

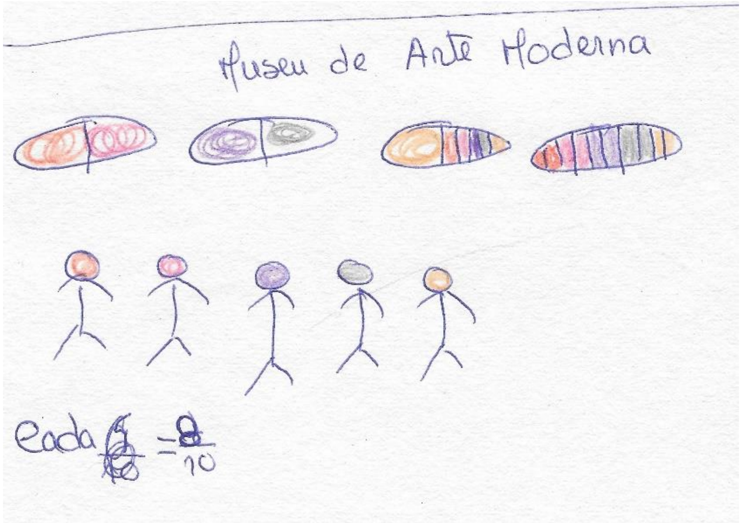


Figura 32 – Resolução do grupo de Filipa para o Museu de Arte Moderna

Mais uma vez, através de um sistema de cores utilizado pelos alunos, é possível observar que o grupo de Filipa começou por dividir todas as baguetes ao meio, atribuindo uma metade a cada aluno. Depois, dividiram a metade restante de uma baguete em cinco partes e a baguete que sobrou em dez partes. No extrato 3, Filipa explica como pensaram.

Extrato 3

1. **Professora:** Humm. Está bem. E agora o museu da arte moderna?
2. **Filipa:** Fizemos a mesma coisa. Fizemos o número de alunos e o número de baguetes. Então depois pintámos a carinha dos meninos [dos bonecos] com a cor correspondente e depois dividimos as baguetes ao meio e sobrou-nos três metades. Uma dessas metades dividimos pelo número de alunos que eram cinco, dividimos em cinco. E a outra baguete dividimos em dez porque cinco mais cinco … se uma metade é cinco, a outra metade também é cinco, então deu-nos dez. Então tinha sobrado quinze, quinze bocadinhos. Então íamos dividir. Calhou oito décimos porque aqui era cinco, calhou aqui cinco a cada um. Cinco mais um bocadinho daqui, mais um bocadinho daqui, mais um bocadinho daqui [aponta para cada metade da três metades que sobraram].
3. **Professora:** Então explica lá melhor aqui na folha porque isso foi muito rápido.
   (…)
4. **Professora:** Vai dizendo o que estás a fazer.

5. **Filipa:** Já fiz o número de baguetes e agora estou a fazer o número de alunos. Agora dividi as baguetes ao meio e liguei … [liga cada metade a cada boneco]. Agora tinha sobrado este, este e este. Três. E estes três dividimos… estes três dividimos em cinco, porque eram cinco alunos e aqui também. E aqui dividimos em cinco também. E depois pintámos isto e isto porque haa… se aqui está dividido em dez ia calhar dois bocadinhos a cada. E aqui está dividido em cinco, era um bocadinho a cada. E como eles comiam cinco, cinco mais dois, mais um igual a oito. Então dá oito décimos porque cada baguete está dividida em dez.

(Transcrição EF1, p. 2)

Analisando o esquema de cores utilizado pelos alunos (figura 32) é possível que os alunos tenham chegado à resposta adicionando $\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}$. Contudo, no §2, a forma como a aluna explica a representação do seu grupo, dá a entender que pensaram em $\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$. O extrato mostra, portanto, que a representação elaborada pelo grupo (figura 32) não corresponde exatamente ao que Filipa explicou no §2. Assim, não é possível afirmar com certeza se os alunos dividiram todas as baguetes ao meio e as restantes três metades em cinco partes ou se, como referi anteriormente, dividiram a metade restante da quarta baguete em cinco partes e a quinta baguete em dez partes. Isto porque, no §5, enquanto explica através de uma nova representação (igual à utilizada na aula), Filipa mostra ter chegado ao resultado pensando em $\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}$.

Na entrevista, apresenta uma outra estratégia para descobrir a quantidade de baguete distribuída aos alunos do grupo do Museu de Arte Moderna (extrato 4).

Extrato 4

1. **Professora:** Qual é a outra forma de fazer? Estou a perguntar se há outra forma de fazer … para chegar a oito décimos.
2. **Filipa:** Acho que sim [hesitação].
3. **Professora:** Então faz lá …
4. **Filipa:** Acho que fazíamos as baguetes a dividir pelo número de alunos: quatro a dividir por cinco [faz o algoritmo]. Era oito décimas.
   (…)
5. **Professora:** É uma divisão. Porque é que fizeste a divisão?
6. **Filipa:** Que era para dividir o número de baguetes pelo número de alunos.

(Transcrição EF1, p. 3)

O extrato apresentado anteriormente apresenta uma estratégia diferente da usada na aula e que corresponde a um esboço de uma generalização. Com efeito, nas palavras de Filipa, para descobrir a quantidade de baguete para os alunos do grupo do Museu de Arte Moderna, basta “dividir o número de baguetes pelo número de alunos” o que pode ser aplicado aos restantes grupos, independentemente do número de baguetes e/ou de alunos existente.

Até então, enquanto explicou e justificou a forma como pensou para descobrir a quantidade de baguete que coube a cada aluno e como a representava na forma de fração, Filipa acaba por utilizar o conhecimento que tem sobre frações equivalentes, embora nunca utilize essa designação. Posteriormente, usa-a, como ilustra o extrato 5.

Extrato 5

1. **Filipa:** Estes os dois são diferentes [referindo-se aos numeradores das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$]. Mas se puséssemos aqui o dez [no denominador de $\frac{1}{2}$] e aqui o cinco [no numerador de $\frac{1}{2}$], também dava.
2. **Professora:** E como é que punhas aqui o dez e aqui o cinco?
3. **Filipa:** Porque um meio é metade e cinco décimos também é metade. São frações equivalentes.
4. **Professora:** Aaaaah. Pronto, está bem. Já percebi. São equivalentes porque?
5. **Filipa:** Porque cinco a dividir por dez [calcula mentalmente] dá 0,5.
6. **Professora:** E um meio?
7. **Filipa:** Dá … 0,5.
8. **Professora:** Então elas são equivalentes porquê?
9. **Filipa:** Porque as duas dão o mesmo produto. Ai, o mesmo quociente.

(Transcrição EF1, p. 5-6)

Filipa reconhece que os numeradores das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$ são diferentes e que, para poder observar alguma relação entre as frações, poderia transformar a fração $\frac{1}{2}$ em $\frac{5}{10}$ (§1). Além disso, a aluna justifica que as duas frações são equivalentes porque ambas representam metade. Nos §5-§9 Filipa apresenta, implicitamente, uma generalização. Isto porque mostra saber que duas frações são equivalentes quando o quociente entre o numerador e o denominador também o é, ou seja, quando duas frações representam o mesmo quociente (§9). Esta generalização está, portanto, associada ao significado de fração como quociente uma vez que, é dividindo o numerador pelo denominador que Filipa conclui que as frações são equivalentes (§5-§7).

Para chegar à quantidade de baguete que come cada aluno de cada grupo, Filipa e o seu grupo começaram por distribuir a cada aluno do grupo da visita de estudo metade de uma baguete. Em seguida, repartiram equitativamente as restantes baguetes pelo número de alunos existente. A análise da resolução apresentada no cartaz (figura 33), da representação elaborada na entrevista (figura 34) e do extrato 6, em que Filipa explica como pensaram, permite fundamentar esta ideia.

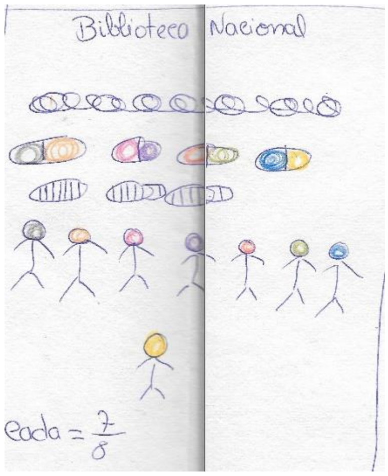


Figura 33 – Resolução do grupo de Filipa para a Biblioteca Nacional

Extrato 6

1. **Filipa:** Isto é sete [conta as baguetes e desenha-as na folha (figura 34). Desenha também os oito alunos]. Dividimos ao meio [divide todas as baguetes desenhadas ao meio] e dividimos [liga uma metade a cada aluno] e sobrou-nos três baguetes.
2. **Professora:** Sim.
3. **Filipa:** Cada baguete dividimos em oito porque eram oito meninos. Então íamos dividir em oito [divide as três baguetes em oito bocadinhos].
   (…)
4. **Professora:** E agora, como é que fizeram a seguir?
5. **Filipa:** Depois distribuímos um por cada e chegámos à conclusão que cada um comia quatro daqui [aponta para metade de uma baguete].
6. **Professora:** E porque é que aí são quatro?
7. **Filipa:** Porque aqui são quatro [aponta para a metade das baguetes que sobraram] e porque a metade de oito é quatro.
8. **Professora:** Ah ok.
9. **Filipa:** E depois dividimos assim cada … [pinta um oitavo de cada baguete das três baguetes que sobraram].

(Transcrição EF1, p. 7)

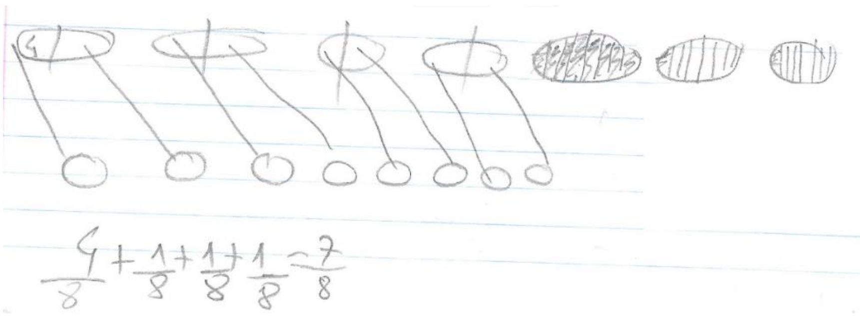


Figura 34 – Resolução de Filipa para o grupo da Biblioteca Nacional (entrevista)

Na figura 33 é possível observar que o grupo de trabalho da aluna, utilizando novamente um sistema de cores, repartiu as baguetes dividindo-as ao meio e, posteriormente, dividindo as baguetes restantes em oitavos. No extrato 6, Filipa torna inteligível o seu raciocínio explicando que dividiram as baguetes ao meio e distribuíram cada metade pelos oito alunos tendo sobrado três baguetes inteiras. A aluna explica que dividiram essas baguetes em oitavos e justifica que dividiram em oito "porque eram oito meninos". A figura 34, que corresponde à representação usada por Filipa na entrevista, ilustra novamente a forma como o seu grupo pensou. Para além disso, mostra que a aluna regista corretamente, em linguagem simbólica, quer a quantidade de baguete quer a forma como obtê-la.

Quando questionei Filipa sobre a segunda questão da tarefa – *será que a distribuição de baguetes foi justa?* – refere que para que tal acontecesse, o número de baguetes deveria ser igual ao número de alunos (tal como havia dito na aula[12]). No entanto, posteriormente, acaba por comparar corretamente as frações correspondentes à quantidade que coube aos alunos de cada grupo (extrato 7).

Extrato 7

1. **Professora:** Ok. Então nós aqui estamos a trabalhar com…
2. **Filipa:** Com frações.
3. **Professora:** Frações. Quando estamos a ver quem é que come mais ou menos estamos a fazer o quê?
4. **Filipa:** A comparar.
   (…)
5. **Filipa:** Por exemplo, temos seis décimos e três quartos [regista as frações $\frac{6}{10}$ e $\frac{3}{4}$ lado a lado]. Tínhamos que pôr este com o denominador deste [aponta para os denominadores de cada uma das frações].
6. **Professora:** Sim.

12 Ver *Intervenção pedagógica*, Episódio 1, §21

7. **Filipa:** Então, como a professora ensinou, vezes 4 [referindo-se ao denominador de $\frac{6}{10}$] e vezes 10 [referindo-se ao denominador de $\frac{3}{4}$]. Porque o 4 não há na tabuada do 10 nem o 10 há na tabuada do 4.
8. **Professora:** Exatamente.
9. **Filipa:** Então 6 vezes 4 dá 24, 10 vezes 4 dá 40. Três vezes 10, trinta e quarenta [referindo-se à fração $\frac{3}{4}$ e ao numerador e denominador da fração equivalente a esta quando se multiplica 3 e 4 por 10: $\frac{30}{40}$]. O que agora, do Planetário e do Centro Ciência Viva, o que comeu mais até agora foi o Centro Ciência Viva.
10. **Professora:** Ok. Se calhar metes as letras em cima para saberes não?
11. **Filipa:** Planetário e Centro Ciência Viva [legenda as frações (figura 35)]. Agora vamos com o Centro Ciência Viva que foi o que comeu mais, com os oito oitavos.
12. **Professora:** Oito oitavos?
13. **Filipa:** Oito décimos.

(Transcrição EF1, p. 10)

O extrato 7 ilustra a explicação apresentada por Filipa para comparar frações com denominadores diferentes (§5, §7, §9). A intervenção da aluna correspondente ao §9 indica que a escolha do Centro Ciência Viva como “o que comeu mais até agora” se baseia na comparação dos numeradores de duas frações que têm o mesmo denominador, sendo maior a que tem maior numerador.

A figura 35, que corresponde à resolução da aluna durante a entrevista, ilustra como comparou as frações correspondentes à quantidade de baguete que coube aos alunos dos diferentes grupos.

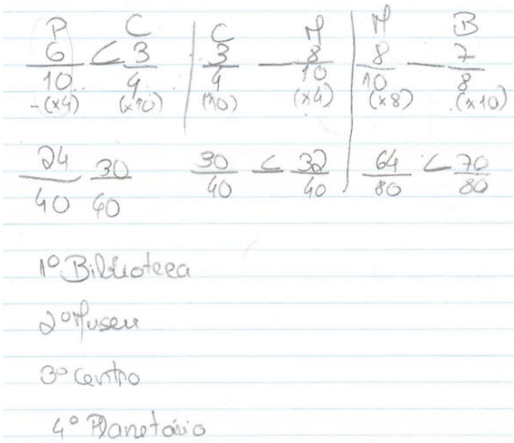


Figura 35 – Comparação de frações e justificação de que a distribuição de baguetes não foi justa

Observando a figura 35, constata-se que Filipa transformou cada par de frações a comparar em frações equivalentes com denominadores iguais. Assim, comparando os numeradores de cada fração, concluiu e justificou que a distribuição de baguetes não foi justa.

Recursos usados por Filipa

A análise da atividade matemática de Filipa associada à resolução do problema permite evidenciar que mobilizou recursos diversos que se podem estruturar em dois eixos: (i) conceitos e procedimentos matemáticos, (ii) recursos.

No que se refere ao primeiro eixo, destaco o conceito de fração, nomeadamente, a fração como relação parte-todo e a fração como quociente. A quantidade de baguete distribuída a cada aluno dos vários grupos da visita de estudo, representada sob a forma de fração, refere-se a uma relação entre a parte de um todo. Com efeito, o denominador das frações representa o número de vezes em que as baguetes foram divididas em partes iguais e o numerador representa o número de partes que coube a cada aluno. Por outro lado, quando Filipa refere, por exemplo, no extrato 5 (§5-§7), que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$ são equivalentes "porque as duas dão (…) o mesmo quociente" está subjacente o significado de fração como quociente, onde é calculado o quociente entre duas quantidades.

Um outro recurso usado pela aluna foi a noção de frações equivalentes. O facto de saber que duas frações são equivalentes, permitiu-lhe "juntar", relativamente aos vários grupos da visita de estudo, as frações correspondentes a cada uma das partes de baguetes que eram distribuídas aos alunos. Na figura 36, procuro ilustrar o modo como Filipa pensou a partir do que sabe sobre frações equivalentes.

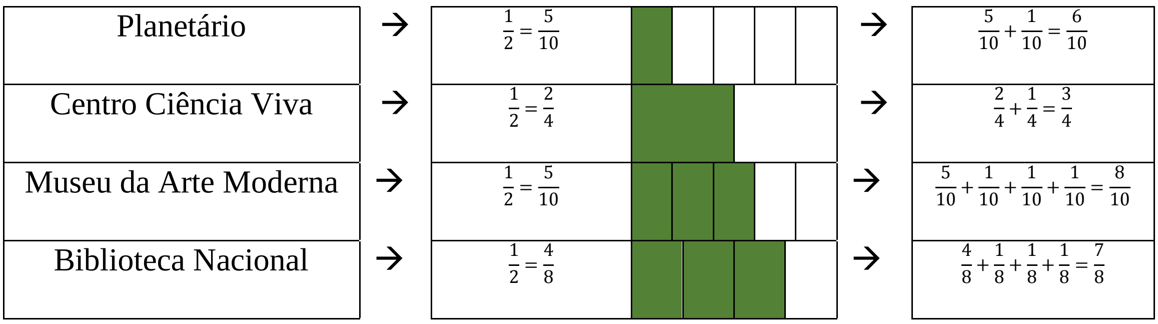


Figura 36 – Forma como a Filipa pensou a partir do que sabe sobre frações equivalentes

Mobilizou também conhecimentos que lhe permitiram comparar frações. No extrato 7 (§5), a aluna evidencia que, para comparar frações, precisa, em primeiro lugar, de encontrar frações equivalentes com os mesmos denominadores. Uma vez que não consegue transformar apenas uma das frações de modo a que fique com um denominador igual ao da outra, multiplica o denominador de uma fração pelo da outra e vice-versa.

Depois de encontradas duas frações com os mesmos denominadores, compara os numeradores e indica que a maior é a que tem um numerador maior (extrato 7, §9).

Outro recurso utilizado foi a divisão. O extrato 8 e a figura 37 evidenciam que a divisão foi utilizada enquanto operação e o algoritmo da divisão enquanto procedimento de cálculo.

Extrato 8

1. **Professora:** Qual é a outra forma de fazer?
   (…)
2. **Filipa:** Acho que fazíamos as baguetes a dividir pelo número de alunos: quatro a dividir por cinco [faz o algoritmo]. Era oito décimas.
3. **Professora:** Ok. Então também sabes que … isto aqui é o quê [apontando para o algoritmo]?
4. **Filipa:** Oito décimos.
5. **Professora:** E isto que fizeste?
6. **Filipa:** Isto é uma divisão.
7. **Professora:** É uma divisão.

(Transcrição EF1, p. 3)

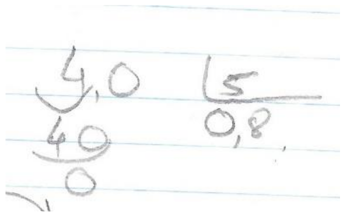


Figura 37 – Algoritmo para descobrir a quantidade de baguete que come cada aluno do grupo do Museu de Arte Moderna

Filipa utiliza, duas vezes, o algoritmo da divisão no âmbito de uma estratégia diferente da usada na aula. A figura 37 ilustra que divide o número de baguetes pelo número de alunos (§2) para descobrir a quantidade de baguete distribuída a cada aluno do grupo do Museu de Arte Moderna. Neste caso (figura 37), divide o número de baguetes pelo número de alunos para descobrir quanto comia cada aluno do grupo do Museu de Arte Moderna (§4).

Por duas vezes, a aluna refere relações entre as representações dos números sob a forma de fração e de percentagem (extrato 9).

Extrato 9

1. **Professora:** Então este bocadinho daqui é quanto [apontando para uma metade]?
2. **Filipa:** É um meio.
3. **Professora:** Ou?
4. **Filipa:** Ou metade. Pronto, 50%.

(Transcrição EF1, p. 3)

Quanto às representações utilizadas, quer na aula, quer durante a entrevista, é possível constatar que, tendo em conta a classificação de Brunner (mencionado por Boavida, Paiva, Cebola *et al.*, 2008), Filipa utilizou representações icónicas e simbólicas. Segundo a categorização de Preston e Garner (2003), a aluna utilizou representações pictóricas e numéricas.

Filipa utilizou maioritariamente representações icónicas ou pictóricas quando recorreu aos desenhos e esquemas (figuras 30, 32, 33 e 34) e utilizou representações simbólicas ou numéricas quando recorreu aos algoritmos mas também aos vários registos simbólicos que faz (figuras 34, 35 e 37, por exemplo).

Dificuldades de Filipa

Ao longo da entrevista, constatei que Filipa se confrontou com algumas dificuldades.

Uma delas está relacionada com a correção da linguagem, ou seja, com a forma como a aluna se expressa utilizando uma linguagem matemática pouco rigorosa. O episódio 10, que se refere ao Museu de Arte Moderna, ilustra essa dificuldade.

Extrato 10

1. **Filipa:** E como eles comiam cinco, cinco mais dois, mais um igual a oito. Então dá oito décimos porque cada baguete está dividida em dez.
2. **Professora:** Ok. E cinco, mais dois, mais um dá oito décimos ou dá oito?
3. **Filipa:** Dá oito [risca o denominador]. E para representar em fração é oito décimos [escreve a fração ao lado do oito].

(Transcrição EF1, p. 2)

No grupo do Museu de Arte Moderna, Filipa, disse que cada aluno comia $\frac{8}{10}$ porque comia 5+2+1 porções de baguete. Quando questionada sobre se 5+2+1 correspondia a 8 ou $\frac{8}{10}$, Filipa risca o denominador do seu resultado e fica hesitante (§3). Este extrato evidencia que Filipa pensa corretamente e a explicação que apresenta é inteligível. No entanto, esta explicação apresenta algumas lacunas ao nível do rigor matemático. Por exemplo, quando fala nas diversas porções de baguete, Filipa nunca considera o seu denominador (§1). Apenas quando a questionei sobre o resultado de 5+2+1, o que registou conforme ilustra a figura 38.

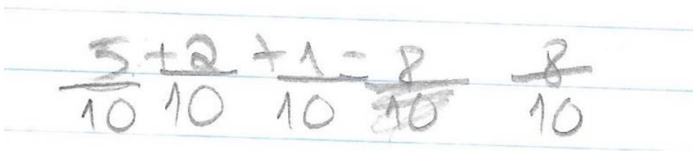
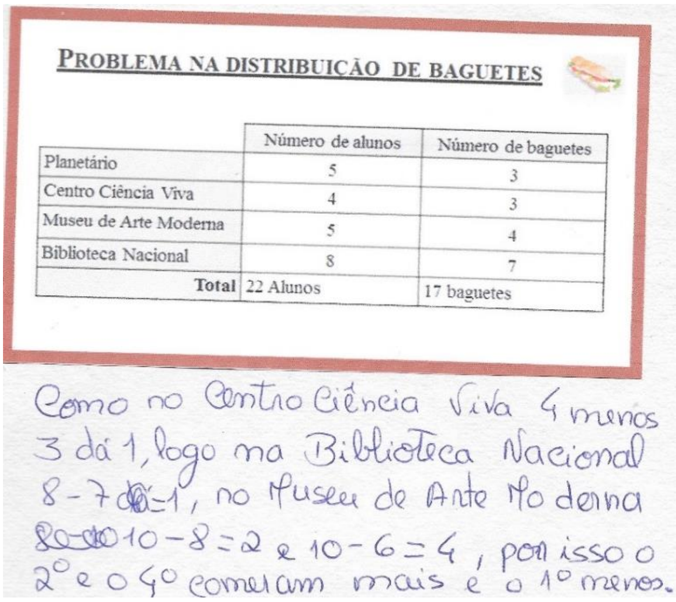


Figura 38 – Cálculo de Filipa para chegar ao resultado do grupo do Museu

A figura 38 mostra que, posteriormente, Filipa identificou que, para que a expressão estivesse correta, era necessário explicitar os denominadores de cada uma das frações.

Filipa revelou também dificuldades na comparação de frações. Com efeito, o seu grupo começou por utilizar uma estratégia subtrativa, calculando a diferença entre o número de alunos e o número de baguetes e entre os denominadores e os numeradores de cada fração (figura 39).


PROBLEMA NA DISTRIBUIÇÃO DE BAGUETES

	Número de alunos	Número de baguetes
Planetário	5	3
Centro Ciência Viva	4	3
Museu de Arte Moderna	5	4
Biblioteca Nacional	8	7
Total	22 Alunos	17 baguetes

Como no Centro Ciência Viva 4 menos 3 dá 1, logo na Biblioteca Nacional 8 - 7 dá=1, no Museu de Arte Moderna 10 - 8 = 2 e 10 - 6 = 4, por isso o 2º e o 4º comeram mais e o 1º menos.

Figura 39 – Resposta do grupo de Filipa sobre a distribuição de baguetes

Através da análise da figura 39, não é claro o significado das diferenças 10-8 e 10-6. O mesmo acontece com a análise do extrato 11.

Extrato 11

1. **Professora:** (…) Então tu escreveste assim, tu e o teu grupo: como no centro Ciência Viva 4 menos 3 dá 1, logo na Biblioteca Nacional 8 menos 7 dá 1, no Museu da Arte Moderna 5 menos 4 …
2. **Filipa:** 10 menos 8.
3. **Professora:** Aah, 10 menos 8 dá 2 e 10 menos 6 dá 4. Por isso, o segundo e o quarto comem mais e o primeiro menos. Não percebi. Preciso que me expliques como é que pensaste isto.
4. **Filipa:** Se fizéssemos 10 menos 6 dava 4 [faz a diferença entre o denominador e o numerador], então este tinha 4.

Depois, isto é no planetário… Depois, no museu, se fizéssemos 10 menos 8 ia-nos dar 2. Depois, no Centro Ciência Viva fizemos 4 menos 3 e deu 1 e depois fizemos 8 … 8 menos 7 que nos deu 1.

5. **Professora:** Sim … ok. E isso serve para quê? Explica-me lá.
6. **Filipa:** Mas depois chegámos à conclusão que não era assim porque devíamos ver qual é a diferença maior e acho que é este [aponta para o planetário] porque é o que está mais diferença. Chegámos à conclusão que 5 menos 3 dá 2 … dá 2. E este, 5 menos 4 dá 1 e este aqui, 4 menos 3, dá 1. Na biblioteca, 8 menos 7 dá 1 [calcula a diferença entre o número de baguetes e o número de alunos].
7. **Professora:** Então quem é que come mais?
8. **Filipa:** É o planetário.
9. **Professora:** Porquê?
10. **Filipa:** Porque a diferença deles é maior.

(Transcrição EF1, p. 9)

Filipa e os colegas consideraram, erradamente, que o grupo que obtivesse menor diferença seria o que comia menos (§1-§4) e que o grupo que comia mais era o que obteria maior diferença (§7-§10).

Uma vez que o raciocínio dos alunos, recorrendo à estratégia subtrativa era inadequado, tentei, na entrevista, que a aluna seguisse outro caminho. Através de algumas questões a aluna consegue chegar à noção de *comparação de frações* (extrato 12).

Extrato 12

1. **Professora:** (…) Quando estamos a ver quem é que come mais ou menos estamos a fazer o quê?
2. **Filipa:** A comparar.
3. **Professora:** A comparar. Então tu estás-me a dizer que para ver quem é que come mais, quando estou a comparar frações, subtraio ao denominador, o numerador. Faço o denominador menos o numerador e comparo frações.
4. **Filipa:** Nãaaao …
5. **Professora:** Então já não estou a perceber.
6. **Filipa:** Por exemplo, temos seis décimos e três quartos [escreve as frações lado a lado]. Tínhamos que pôr este com o denominador deste.

(Transcrição EF1, p. 10)

O extrato 12 mostra que, depois de Filipa chegar ao termo *comparar* (§2), soube imediatamente o que teria de fazer. A resposta da aluna, no §4, evidencia que a aluna tem a certeza de que a estratégia que utilizaram na aula não é a estratégia correta para comparar as frações. Isto porque a entrevista sobre esta tarefa se realizou posteriormente à discussão da tarefa em aula e, portanto, a comparação de frações havia sido discutida pelos vários alunos. Assim sendo, é de salientar, a diferença entre aquilo que foi feito pelo grupo na sala de aula (antes da discussão da tarefa), recorrendo a estratégias subtrativas, e aquilo que foi feito na entrevista (depois da discussão da tarefa), recorrendo ao que sabia sobre a comparação de frações com o mesmo denominador.

Em suma, Filipa evidenciou atividades do raciocínio matemático ao *explicar* e *justificar* as opções do grupo na realização da tarefa. A aluna mostrou, também, conseguir *generalizar*, ainda que implicitamente, em duas ocasiões distintas. Para a realização desta tarefa, Filipa mobilizou conteúdos matemáticos, essencialmente, associados aos números representados sob a forma de fração. As representações utilizadas foram as representações icónicas ou pictóricas e as representações simbólicas ou numéricas. Durante a entrevista, Filipa revelou algumas dificuldades associadas à utilização de linguagem matemática rigorosa e também à comparação de frações.

4.1.2. Tarefa *Terrenos nas Aldeias*[13]

Com esta tarefa, constituída por duas partes, pretendia que os alunos identificassem as frações correspondentes a diversas quantidades de terreno e, no final, que escrevessem um algoritmo para adicionar e subtrair números racionais não negativos representados sob a forma de fração (anexo 4). A sua exploração ocupou cerca de 3 aulas.

Raciocínios de Filipa

Em primeiro lugar, no início da entrevista, apresentei a Filipa o enunciado da tarefa bem como o cartaz que havia sido produzido pelo seu grupo durante a exploração da mesma na sala de aula. Posteriormente, pedi à aluna que falasse sobre a tarefa e sobre a resolução do seu grupo.

Filipa começou por explicar como o seu grupo tinha pensado para chegar às frações do terreno de cada família. A figura 40 ilustra o esquema das aldeias apresentado no enunciado da tarefa, seguindo-se o extrato 1 que explica, nas palavras de Filipa, a forma como o seu grupo pensou.

[13] Tarefa apresentada no capítulo anterior, na secção *Intervenção Pedagógica*.

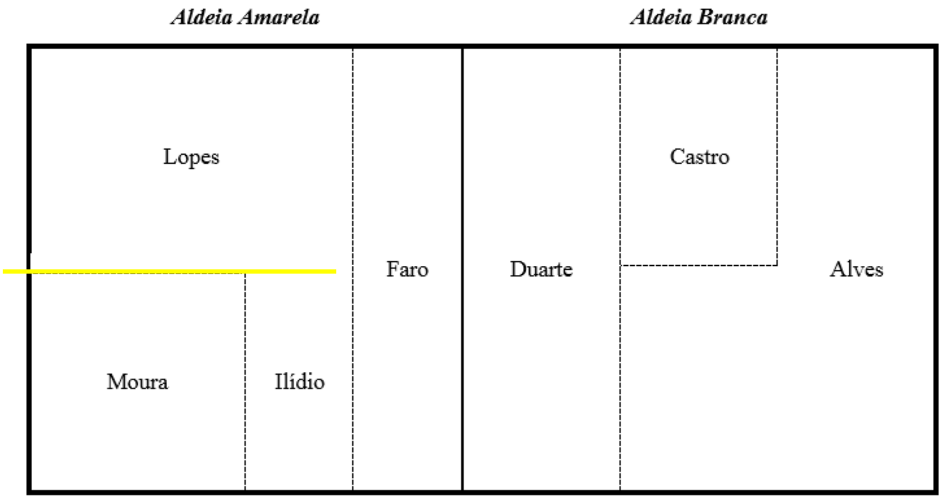


Figura 40 - Representação das aldeias apresentada no enunciado da tarefa

Extrato 1

1. **Professora:** (…) E como é que vocês, a minha pergunta é: através destes desenhos que vocês têm aqui, como é que vocês chegaram à fração de cada terreno? Explica lá vá …
2. **Filipa:** Porque nós usámos o Faro e esta linha [linha assinalada a amarelo na figura 40] em que fomos dividir e dividimos em oito (…) Dividimos em oito. E depois vimos que a família Lopes tinha três oitavos.
3. **Professora:** E dividiram em oito porquê? Explica lá.
4. **Filipa:** Porque do Faro, nós eramos para dividir o Faro mas depois dividimos assim [em oitavos]. Se não dividíamos em quatro, ia dar dois…
5. **Professora:** Então e se vocês dividissem com o Faro como é que era? Divide lá.
6. **Filipa:** [divide o terreno de acordo com o terreno da família Faro].
7. **Professora:** Pronto. E depois porque é que dividiam assim ao meio?
8. **Filipa:** Porque aqui é metade e depois não dá.
9. **Professora:** E porque é que te dava jeito dividir assim?
10. **Filipa:** Porque isto só ocupa metade de um quarto.
11. **Professora:** Isto …
12. **Filipa:** Isto só ocupa metade de um quarto.

(Transcrição EF2, p. 1-2)

A aluna começa por explicar como dividiram a aldeia amarela (§2). Filipa explica que, inicialmente, utilizaram como unidade de medida a área do terreno da família Faro (um quarto). Contudo, explica que essa divisão não era permitia descobrir a fração do terreno mais pequeno (o da família Ilídio) e que, por essa razão, dividiram a aldeia em oitavos (§4). O extrato 2 evidencia, nas palavras de Filipa, porque dividiram a aldeia em oito partes.

Extrato 2

1. **Professora:** Oito. Então dividiram, acabaram por dividir em …?
2. **Filipa:** Oito. Oitavos.
3. **Professora:** Oitavos. E depois como é que chegaram aqui às frações? Foi por contagem ou foi …
4. **Filipa:** Foi por contagem. Contámos que dois oitavos era do Faro.
5. **Professora:** Sim.
6. **Filipa:** E depois o Ilídio era um e o do Moura era outro.
7. **Professora:** Do Moura era doi … [corrige-se] era um?
8. **Filipa:** Do Moura era dois e do Ilídio era um. E depois juntámos …

(Transcrição EF2, p. 2)

Analisando o extrato 2, constata-se que, depois de dividir a aldeia em oitavos, descobriram as frações que representavam a quantidade de cada terreno da aldeia, através de um processo de contagem (§4-§8). No entanto, o grupo de Filipa não usou qualquer tipo de cálculos nesta fase e, por essa razão, decidiu colocar, junto de cada resultado uma representação que mostrava como tinham lá chegado (figura 41).

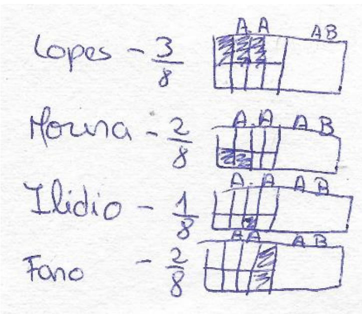


Figura 41 – Resultados e respetivos desenhos explicativos (Aldeia Amarela)

A figura 41 ilustra a Aldeia Amarela (AA) dividida em oito partes e a Aldeia Branca (AB) ainda por dividir. Analisando, por exemplo, o caso da família Lopes, constata-se que, após dividir a Aldeia Amarela em oitavos, o grupo assinalou, pintando, a área do seu terreno, verificando que correspondia aos $\frac{3}{8}$ já identificados.

Posteriormente, Filipa explica que, para dividir a Aldeia Branca, o grupo pensou de forma semelhante (extrato 3).

Extrato 3

1. **Professora:** (…) E aqui na Aldeia Branca?
2. **Filipa:** Usámos o do Castro.
3. **Professora:** Porquê?
4. **Filipa:** Porque o Castro tinha um sexto. E depois se dividíssemos assim [em três partes], já não ia dar. Porque depois tínhamos estes. Estes aqui que não ocupavam um terço [família Castro e família Alves].

5. **Professora:** Então deixa-me ver se eu percebi: Tu disseste que podiam ter dividido como a família Duarte. Certo?
6. **Filipa:** Sim.
7. **Professora:** Dividiam em quê?
8. **Filipa:** Em terços.
9. **Professora:** Em terços. Mas não dava porque a família Castro não ocupava um terço.
10. **Filipa:** Sim.
11. **Professora:** Ocupa quanto a família Castro?
12. **Filipa:** Um sexto.
13. **Professora:** E se não pensarmos em fração, se pensar… tu disseste "A família Castro não ocupa um terço". Ocupa quanto? Se não pensarmos logo no total.
14. **Filipa:** Metade do do Duarte.

(Transcrição EF2, p. 3)

Analisando o extrato 3, constata-se que Filipa justifica porque é que abandonaram a hipótese de usar o terreno da família Duarte como unidade de medida para descobrir as frações de terreno correspondentes às várias famílias (§4, §9). Por essa razão, dividiram a aldeia utilizando, como unidade de medida, o terreno mais pequeno (família Castro), ou seja, um sexto (§2-§4). Além disso, refere que o terreno da família Castro ocupa um sexto (§12) e que é "metade do do Duarte" (§14) o que pode indiciar que consegue relacionar os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$. No entanto, como procurarei fundamentar na secção *Dificuldades de Filipa*, estabelecer relações numéricas entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$ não foi simples.

Como o extrato 4 ilustra, Filipa começa por referir, implicitamente, que o segmento de reta horizontal que representa um dos limites do terreno da família Castro está "no meio" do segmento de reta vertical correspondente ao da família Duarte (§2).

Extrato 4

1. **Professora:** Metade do Duarte. Como é que podíamos saber quanto é que era? Como é que podíamos saber quanto é que era metade do Duarte? Como é que fazemos?
2. **Filipa:** Porque está aqui no meio.
3. **Professora:** E como é que fazíamos para descobrir? Imagina que eu não sabia que isto era um sexto? Como é que eu fazia?
4. **Filipa:** O Duarte é o dobro do Castro.
5. **Professora:** E como é que eu podia provar isso?
6. **Filipa:** Dividindo assim ao meio.
7. **Professora:** Mas imagina, aí no desenho imagina que isto era um bocadinho mais pequenino? Já não dava bem. Porque o desenho não foi feito com medidas [referindo-me ao desenho da Filipa e respetivas divisões], este aqui.

Certo? Como é que eu podia … vocês usaram isto [referindo-me ao material manipulável disponibilizado aos alunos], tens aqui também se ajudar. (…)

8. **Filipa:** Sim.
9. **Professora:** Pronto. Mas como é que eu provava que a Castro era metade da família Duarte?
10. **Filipa:** [Constrói a Aldeia com o material manipulável] Então é assim a Aldeia Branca.
11. **Professora:** E agora, como é que eu provo?
12. **Filipa:** Porque aqui está o Alves que tinha esta parte que é igual à do Duarte e tinha mais um bocadinho. E esse bocadinho mais o do Castro, dava este [família Duarte].

(Transcrição EF2, p. 3-4)

Analisando o extrato, é possível constatar que a aluna explica que, dividindo o terreno da família Duarte ao meio (§6), obtinha partes iguais ao terreno da família Castro. Por isso, o terreno da família Castro era metade do terreno da família Duarte e este era o dobro do terreno da família Castro (§4). Perante a insistência em que justificasse que o terreno da família Castro era metade do de Duarte, recorre ao material manipulável disponibilizado e estabelece uma comparação entre os terrenos das famílias Alves, Duarte e Castro (§12).

Na figura 42 procuro ilustrar o modo como Filipa pensou para provar que o terrenho da família Castro é metade do terreno da família Duarte.

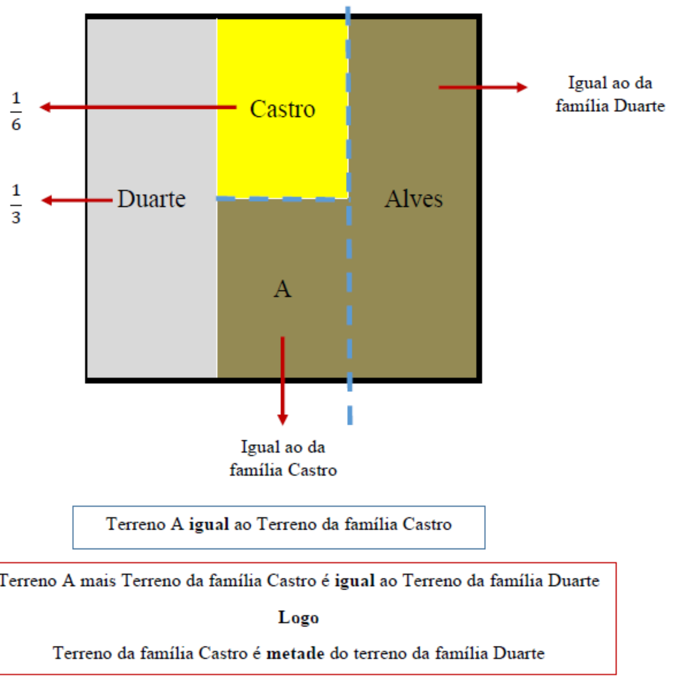


Figura 42 – Representação do raciocínio de Filipa para relacionar as frações dos terrenos das famílias Castro e Duarte

Procurei que a aluna se distanciasse da figura incluída no enunciado da tarefa e começasse a pensar em termos de relações numéricas de modo a provar que o terreno da família Castro era metade do terreno da família Duarte. O extrato 5 e a figura 43 mostram que o conseguiu embora tenha sido necessário algum apoio da minha parte.

Extrato 5

1. **Filipa:** O Castro tem metade do Duarte.
(…)
2. **Professora:** Como é que eu sei que um terço é metade de um sexto?
3. **Filipa:** Porque seis… três mais três dá seis.
4. **Professora:** (…) Então tu dizes que um terço é metade de um sexto porque três é metade de seis, certo?
5. **Filipa:** Sim.
(…)
6. **Filipa:** Já aqui está.
7. **Professora:** E então?
8. **Filipa:** Que o Duarte tem o dobro de … do Castro.
9. **Professora:** Então não estou a perceber. Mas tu aqui fizeste o quê?
10. **Filipa:** Aaah [hesita] … a metade.
11. **Professora:** A metade…
12. **Filipa:** do do Duarte.
13. **Professora:** do Duarte. Prova que o Castro tem metade do Duarte. Mas estás a dizer que o Duarte tem o dobro do Castro… Como é que sabemos isto através daqui [do cálculo $\frac{1}{3} \div 2$, indicado por Filipa]?
14. **Filipa:** Porque se o Castro tem metade do Duarte, o Duarte tem o dobro do Castro. (…) Porque o dobro é o contrário de metade.

(Transcrição EF2, p. 5-8)

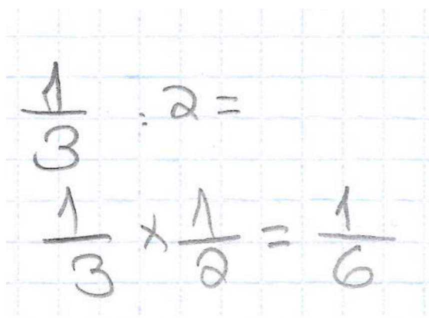


Figura 43 – Registo feito por Filipa para justificar que a família Castro tem metade do terreno da família Duarte

Analisando o extrato 5, constata-se que Filipa justifica que o terreno da família Castro é metade do da família Duarte porque três é metade de seis (§3-§5). Na justificação que apresenta, a aluna parece estabelecer uma analogia com o que acontece com os números inteiros, ou seja, se 3+3=6 então 3 é metade de 6 (§3). Posteriormente, Filipa justifica, com recurso à divisão (figura 43) que o terreno da família Castro é metade do terreno da família Duarte. Contudo, volta a dizer que a família Duarte tem o dobro do terreno da família Castro (§8), justificando com recurso ao que sabe sobre a relação dobro/metade (§14).

O extrato 6 e a figura 44 revelam o modo de pensar de Filipa e seu grupo relativamente à segunda questão da primeira parte da tarefa.

Extrato 6

1. **Filipa:** Mas depois chegámos à conclusão que o Moura ficou com zero e o Lopes ficou com cinco oitavos. O Ilídio manteve, tinha um oitavo. O Faro também manteve…
   (…)
2. **Filipa:** Sim. Dois oitavos. O Duarte ficou com metade. Ele tinha dois sextos, ficou com um sexto.
3. **Professora:** E como é que eu sei que um sexto é metade de dois sextos?
4. **Filipa:** Porque a metade de dois é um.
5. **Professora:** Sim …
6. **Filipa:** E o Castro tinha um sexto, ficou com dois sextos. Porque comprou metade ao Duarte. E o Alves ficou com a mesma quantidade de terra.
7. **Professora:** Ficou com a mesma quantidade de terra… Porque o Castro é que comprou ao Duarte?
8. **Filipa:** Sim.

(Transcrição EF2, p. 15)

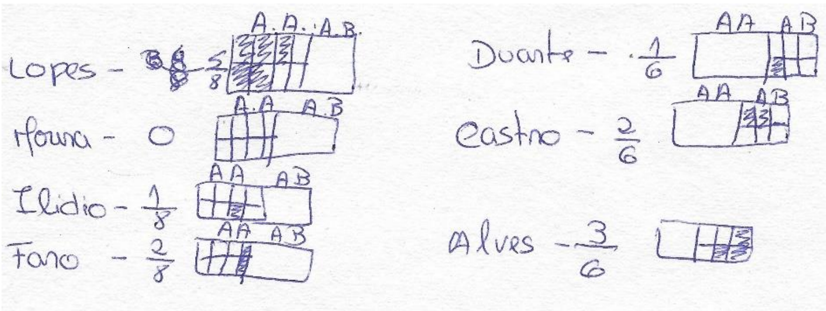
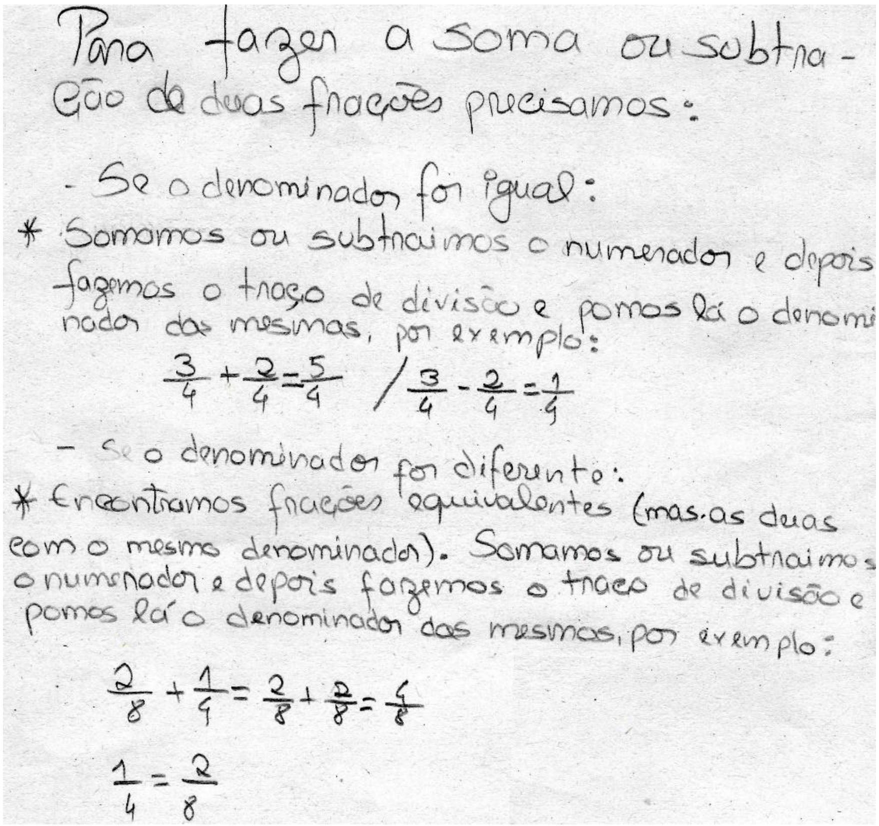


Figura 44 – Fração de terreno de cada família após compra e venda de terrenos

Apesar de conseguir explicar as frações obtidas (§1-§8), Filipa não utilizou qualquer cálculo. Na figura 44 é possível observar que o grupo dividiu a Aldeia Amarela (AA) em oitavos e a Aldeia Branca (AB) em sextos, pintando os novos terrenos de cada família. Em relação à compra da família Castro (que comprou metade do terreno à família Duarte), explica que essa família comprou $\frac{1}{6}$ do terreno da família Castro, que corresponde a metade de $\frac{2}{6}$ (§2-§6).

Na segunda parte da tarefa, era pretendido que os alunos descobrissem algoritmos que permitissem adicionar ou subtrair frações. O grupo de Filipa conjeturou o algoritmo registado na figura 45.


Para fazer a soma ou subtração de duas frações precisamos:

- Se o denominador for igual:

* Somamos ou subtraimos o numerador e depois fazemos o traço de divisão e pomos lá o denominador das mesmas, por exemplo:

$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$ / $\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

- Se o denominador for diferente:

* Encontramos frações equivalentes (mas as duas com o mesmo denominador). Somamos ou subtraimos o numerador e depois fazemos o traço de divisão e pomos lá o denominador das mesmas, por exemplo:

$\frac{2}{8}+\frac{1}{4}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{4}{8}$

$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$

Figura 45 – Extrato do cartaz elaborado pelo grupo de Filipa – algoritmo para adicionar e subtrair frações

Para analisar se Filipa compreendia a conjetura formulada, pedi-lhe que calculasse $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$. O extrato 7 e a figura 46 mostram como pensou:

Extrato 7

1. **Professora:** Então se (…) eu tiver um meio mais dois sextos. Agora vamos tentar aplicar o teu algoritmo. Tenta lá aplicar. Diz assim … O que é que temos de fazer primeiro?
2. **Filipa:** Primeiro temos que achar frações equivalentes.
3. **Professora:** “Encontramos frações equivalentes mas as duas com o mesmo denominador”. Como é que fazemos isso?
4. **Filipa:** Como o dois está na tabuada… o seis está na tabuada do dois temos que multiplicar por três porque é o mínimo múltiplo comum …
5. **Professora:** Sim…
6. **Filipa:** E dá três sextos, mais dois sextos. E somamos os numeradores, que dá 5, e mantemos o denominador. [figura 46]

(Transcrição EF2, p. 18)

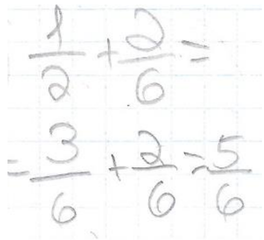


Figura 46 – Registos feitos por Filipa para adicionar 1/2 e 2/6

Filipa explica com clareza todos os passos efetuados (§2-§6) e, simultaneamente, regista-os simbolicamente com correção (figura 46). Nas frações que lhe pedi para adicionar, um dos denominadores (6) era múltiplo do outro (2), pelo que a aluna recorre às tabuadas (§4). No entanto, se não for este o caso, também mostra saber como proceder para encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador: "arranjo maneira de terem denominadores iguais. Se não arranjar maneira, faço o numerador e o denominador desta vezes este [denominador da outra fração] e este numerador e este denominador vezes este [denominador da outra fração]" (Transcrição EF2, p. 26).

Recursos usados por Filipa

Para a resolução desta tarefa, Filipa mobiliza conhecimentos matemáticos, relacionados com os números racionais trabalhados nas aulas e outros conhecimentos matemáticos que já possuía.

O extrato 8 ilustra que Filipa utiliza aquilo que já sabe sobre a relação dobro/ metade para justificar que se a família Castro tem metade do terreno da família Duarte, então a família Duarte tem o dobro do terreno da família Castro (§2-§6).

Extrato 8

1. **Professora:** Então posso dizer que se eu tenho sempre o dobro de alguma coisa de alguém, faz de conta, esse alguém tem sempre metade. É sempre assim? Dobro, metade, dobro, metade.
2. **Filipa:** Sim, porque o dobro é o inverso da metade.
3. **Professora:** Está bem.
4. **Filipa:** Porque o dobro é vezes dois e a metade é a dividir por dois.
5. **Professora:** Ok. Então, vamos só voltar aqui [$\frac{1}{3} \div 2$]. Então dividir por dois é o contrário de multiplicar por dois?
6. **Filipa:** O resultado de dividir por dois, neste caso dá $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{6}$ vezes dois vai dar $\frac{1}{3}$.

(Transcrição EF2, p. 8)

Filipa mobiliza, também, o que aprendeu nas aulas, sobre a comparação de frações com o mesmo numerador. Por exemplo, explica porque é que $\frac{1}{12}$ é maior do que $\frac{1}{16}$ (extrato 9).

Extrato 9

1. **Professora:** Qual é que é o maior? O $\frac{1}{12}$ ou o $\frac{1}{16}$?
2. **Filipa:** Um doze avos.
3. **Professora:** Porquê?
4. **Filipa:** Porque quanto mais pequeno o denominador, maior é a quantidade.

(Transcrição EF2, p. 14)

A propósito das frações equivalentes, Filipa mobiliza conhecimentos relativos ao algoritmo da divisão e utiliza-o para justificar que as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ representam o mesmo quociente (figura 47).

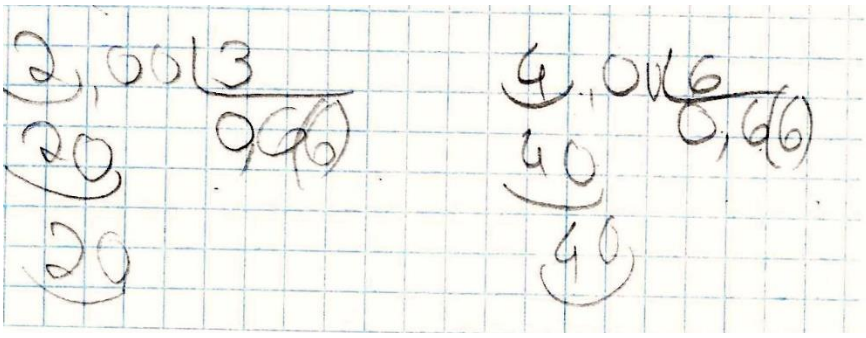


Figura 47 – Algoritmo da divisão para justificar que as frações 2/3 e 4/6 são equivalentes

Filipa mobiliza também os seus conhecimentos relativamente às operações envolvendo números representados sob a forma de fração, como se pode observar nas figuras 43 e 46.

Em relação às representações utilizadas, Filipa e o seu grupo optaram por utilizar, representações icónicas, segundo a categorização de Brunner, ou representações pictóricas, segundo a categorização de Preston e Garner (figuras 41 e 44).

Na entrevista, Filipa utiliza, sobretudo representações simbólicas, no sentido de Brunner, ou numéricas, no sentido de Preston e Garner, ao utilizar cálculos que justificam os resultados obtidos. Recorre a representações icónicas ou pictóricas apenas para explicar por que razão, para adicionar ou subtrair frações, as frações têm que ter o mesmo denominador (figura 48).

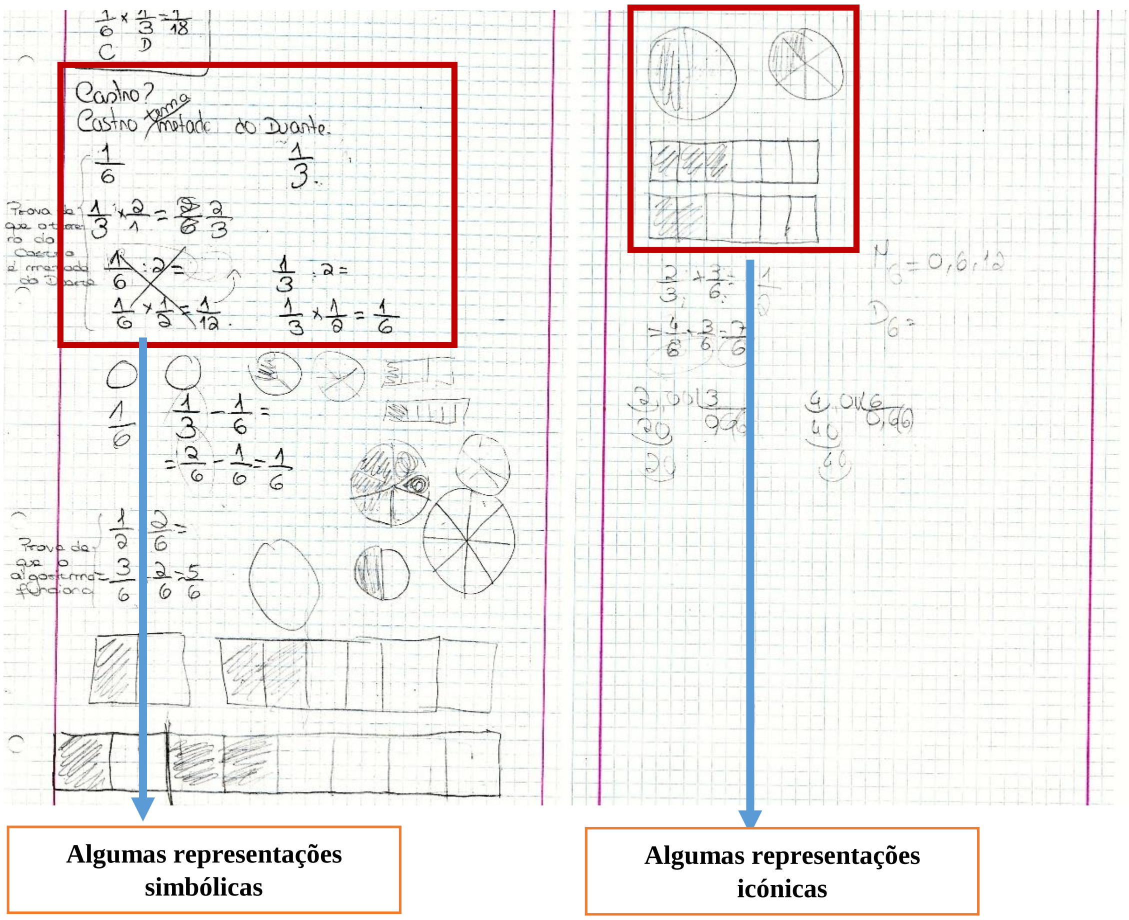


Figura 48 – Resolução de Filipa na entrevista

Para além destas representações, tanto na aula, como na entrevista, a aluna recorre ao material manipulável distribuído para facilitar a resolução da tarefa (figura 49). Os registos que constam no material foram feitos pelo grupo a propósito da questão que envolvia a compra e venda de terrenos. Assim, Filipa utilizou também representações ativas, no sentido de Brunner.

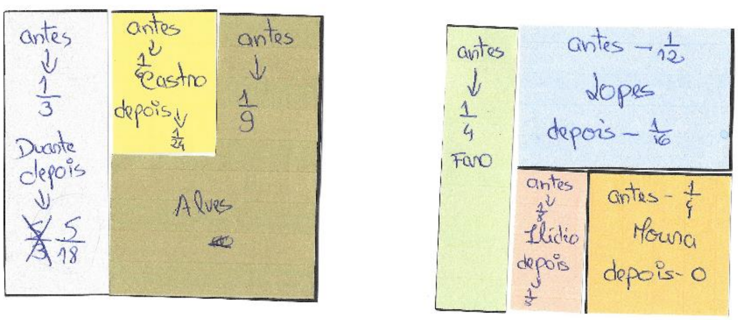


Figura 49 – Material manipulável utilizado pelo grupo de Filipa

Independentemente dos valores que o grupo de Filipa registou no material manipulável (figura 49), este revelou-se útil para que os alunos percebessem em quantas partes teriam que dividir cada aldeia. Como foi referido na subsecção anterior, permitiu-lhes que, utilizando como unidade de medida os terrenos mais pequenos de cada aldeia, identificassem as frações correspondentes a cada família.

Dificuldades de Filipa

A primeira dificuldade de Filipa surge quando tenta explicar porque é que a família Castro tem metade do terreno da família Duarte (extrato 10).

Extrato 10

1. **Filipa:** Metade do Duarte.
2. **Professora:** E então?
3. **Filipa:** Este [fração $\frac{1}{6}$ correspondente à família Castro] vezes este [fração $\frac{1}{3}$ correspondente à família Duarte]?!
4. **Professora:** Ah … Este [família Castro] vezes este [família Duarte]?! Metade … Como é que eu faço?
5. **Filipa:** Metade deste. É um sexto vezes um terço.
6. **Professora:** Vezes um terço? Então escreve lá vá.
7. **Filipa:** [escreve $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$]
8. **Professora:** Isto [apontando para o cálculo] corresponde a metade do do Duarte?
9. **Filipa:** Sim.
10. **Professora:** Então qual é a [fração] do do Duarte?
11. **Filipa:** Do Duarte é um terço.
12. **Professora:** Um terço. Então e este um sexto é o quê?
13. **Filipa:** É do Castro.
14. **Professora:** Então, mas nós dissemos que era metade do do Duarte. O do Castro era metade do do Duarte. Foi isso que tu disseste?
15. **Filipa:** [Acena que sim com a cabeça].
16. **Professora:** Então e isto aqui vai dar o quê afinal? [referindo-me a um dezoito avos]. Pensa lá.
17. **Filipa:** Isto era o que também poderia dar.

(Transcrição EF2, p.5)

A análise do extrato 10 revela que Filipa, não tendo a certeza do que podia fazer para justificar que o terreno da família Castro era metade do terreno da família Duarte, diz, em tom de pergunta que revela desconfiança, que deve multiplicar $\frac{1}{6}$ por $\frac{1}{3}$ (§3). Multiplica corretamente as frações (§7) mas, aparentemente, não atribui significado ao resultado obtido nem aos cálculos efetuados e, portanto, assume que $\frac{1}{18}$ era outra possibilidade de resultado (§17).

Numa segunda tentativa, a aluna tenta explicar que, se a família Castro tem metade do terreno da família Duarte, então esta terá o dobro do terreno da família Castro. No entanto, depara-se com novas dificuldades (extrato 11).

Extrato 11

1. **Filipa:** O Castro tem metade do Duarte (…) Se ele [Duarte] tem o dobro do Castro, três vezes dois dá 6. Põe-se um seis.
2. **Professora:** Então mas como é que se faz o dobro?
3. **Filipa:** Vezes dois.
4. **Professora:** Então faz lá vezes dois.
5. **Filipa:** [Faz $\frac{1}{3} \times \frac{2}{1}$ e diz que é igual a $\frac{2}{6}$] Dá dois sextos, o do Duarte tem dois sextos.
6. **Professora:** Isto [cálculo] dá dois sextos?!
7. **Filipa:** Não. Dá dois terços [corrige o cálculo].
8. **Professora:** Então o Duarte tem um terço ou dois terços, já não estou a perceber.
9. **Filipa:** Tem um terço.
10. **Professora:** Então e isto serviu para quê? Tu disseste que o Duarte tem o dobro do Castro. Então como é que eu descubro quanto é que tem o Duarte? Tenho que provar o quê? Para ser como tu disseste …
11. **Filipa:** Temos que provar que três é metade do seis.

(Transcrição EF2, p.6)

Neste extrato, Filipa identifica corretamente a relação dobro/metade que existe entre os dois terrenos (§1). Contudo, revela dificuldades em encontrar a expressão numérica correta que lhe permitisse justificar o que pretendia. A expressão numérica que escreve não está correta (§5) porque o que pretende justificar é que $\frac{1}{3}$ é o dobro de $\frac{1}{6}$. Filipa explica também que, para o justificar, tem que mostrar que 3 é metade de 6 (§11), o que está correto.

Posteriormente, já focada na noção de metade, Filipa volta a não ser capaz de indicar corretamente os cálculos a efetuar (extrato 12).

Extrato 12

1. **Professora:** Então como é que provo, ou uma coisa ou outra? Ou que o Castro é metade do Duarte ou que o Duarte é o dobro do Castro. Como é que eu provo isso?
2. **Filipa:** Então, é a dividir por dois.
3. **Professora:** Então faz lá.
4. **Filipa:** [escreve $\frac{1}{6} \div 2$]
5. **Professora:** Então mas isto é o quê [aponta para 1/6]?
6. **Filipa:** É o que o Castro tem.
7. **Professora:** Mas quem é que tem… O Castro tem metade de quem?
8. **Filipa:** Do Duarte.
9. **Professora:** Então e é assim? Não sei, estou a fazer uma pergunta. Vá, continua, continua.

(Transcrição EF2, p.7)

Desta vez, Filipa reconhece que, para provar que a fração correspondente ao terreno da família Castro é metade da fração que corresponde ao terreno da família Duarte, tem que dividir esta última por dois (§2). No entanto, engana-se e calcula metade da fração que corresponde ao terreno da família Castro (§4-§9). Com o apoio que fui dando através de questões que coloquei, Filipa chega à conclusão que para calcular metade de $\frac{1}{3}$, tem de utilizar a expressão $\frac{1}{3} \div 2$ (figura 43).

Uma outra dificuldade com que se confronta Filipa prende-se com a noção de algoritmo (extrato 13).

Extrato 13

1. **Professora:** Ah. Se isto pedia ali o algoritmo… Lembras-te do que eu expliquei que era um algoritmo?
2. **Filipa:** Sim.
3. **Professora:** Era o quê, já agora. Não me lembro.
4. **Filipa:** Era uma conta em pé.

(Transcrição EF2, p.16)

A análise do extrato 13 evidencia que, para Filipa, os algoritmos são apenas cálculos feitos de determinada maneira, a que chama de "conta em pé" (§4). Na sua perspetiva, o que o seu grupo escreveu no cartaz em relação à segunda parte da tarefa (figura 45), não é um algoritmo (extrato 14).

Extrato 14

1. **Professora:** Então e isto [regra que escreveram]?
2. **Filipa:** Isto … Isto não é! Isto é escrito.
3. **Professora:** Então e um algoritmo não pode ser escrito?
4. **Filipa:** Não.
5. **Professora:** O que tu sabes … Qual foi o exemplo que fizemos ali [na aula]? O algoritmo para fazer um bolo de chocolate, lembras-te?
6. **Filipa:** Sim.
7. **Professora:** Então o que era um algoritmo? Era um conjunto de quê?
8. **Filipa:** De frases.
9. **Professora:** De passos que todos seguem para obter uma determinada, um determinado resultado. Neste caso o nosso resultado era o bolo de chocolate, lembras-te disso? Então sendo assim, isto que está aqui faz parte ou não, do algoritmo?
10. **Filipa:** Faz.

(Transcrição EF2, p.17)

Para Filipa, tudo o que estivesse escrito, não era um algoritmo (§2, §4) porque não tinha "contas". No entanto, recordando-se do algoritmo apresentado na aula para fazer um bolo de chocolate (§5), parece ter aderido à ideia de que um algoritmo é um conjunto de passos que devem ser seguidos para chegar a um determinado resultado (§7-§10).

Concluindo, na exploração desta tarefa Filipa evidenciou atividades do raciocínio matemático como *explicar, justificar e conjeturar* mobilizando alguns dos conteúdos associados aos números representados sob a forma de fração e ainda algumas relações numéricas importantes como, por exemplo, a relação dobro/metade. As representações utilizadas na exploração da tarefa na aula foram, essencialmente, as representações icónicas ou pictóricas enquanto que, na entrevista, Filipa também utiliza as representações simbólicas ou numéricas. Filipa revelou algumas dificuldades em justificar a relação de dobro/metade existente entre determinados terrenos e ainda em relação à noção de algoritmo.

4.1.3. Tarefa *Fazendo bolos deliciosos*

Esta tarefa é constituída por uma tabela em que estão representados os vários ingredientes bem como as quantidades, representadas sob a forma de fração ou numeral misto, de cada um que são necessárias para fazer um bolo para quatro pessoas. Solicitava-se aos alunos que, mobilizando o seu conhecimento sobre operações com números representados sob a forma de fração, descobrissem as quantidades de ingredientes necessárias para fazer o bolo para duas, oito, seis, dez e dezasseis pessoas. Assim, a tarefa permite trabalhar várias operações que envolvem frações e possibilita aos alunos o uso de diferentes estratégias (anexo 6). Esta tarefa foi proposta pela primeira vez à aluna, no âmbito da terceira entrevista.

Raciocínios de Filipa

Filipa iniciou a resolução da tarefa após uma rápida leitura, identificando, de imediato, uma estratégia possível para calcular a quantidade de cada ingrediente se o bolo fosse para duas pessoas (extrato 1).

Extrato 1

1. **Filipa:** [lê a tarefa] Como o dois é metade do quatro, temos de fazer estas quantidades a dividir por dois.
(…)
2. **Professora:** Primeiro, tens que me explicar o que é isto [referindo-me aos valores que constam na tabela], porque eu não sei.

3. **Filipa:** É as medidas que temos que utilizar para fazer o bolo para quatro pessoas. E depois temos que dividir por dois porque o dois mais dois dá quatro. Então quatro é estas medidas a dividir por dois que vai dar as medidas de duas pessoas.
4. **Professora:** Então vá, regista lá e vai sempre dizendo como estás a pensar. Vamos ver se eu percebi: tu aqui disseste que vais ter que dividir por dois porque dois mais dois dá quatro.
5. **Filipa:** Sim.
6. **Professora:** E o que é que isso significa? Dois mais dois, dá quatro…
7. **Filipa:** Que dois é metade de quatro.

(Transcrição EF3, p. 1)

A análise do extrato permite evidenciar que Filipa explica que pode descobrir os ingredientes para fazer o bolo para duas pessoas calculando metade dos ingredientes necessários para o bolo para quatro pessoas (§1). Além disso, constata-se que compreende o enunciado da tarefa (§3) e que é capaz de justificar porque é que tem de dividir a quantidade dos ingredientes para quatro pessoas por dois (§4-§7).

Para calcular a quantidade de farinha necessária para fazer o bolo para duas pessoas, Filia refere: "Dividi por dois, os três quartos para saber quanto de farinha é que temos de usar" (Transcrição EF3, p. 1). Além disso, regista o procedimento de cálculo representado na figura 50.

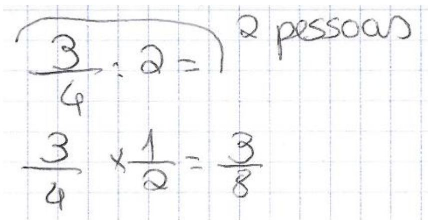


Figura 50 – Cálculo efetuado por Filipa para descobrir a quantidade de farinha necessária para duas pessoas

A propósito da quantidade de iogurte, Filipa explica como faz a divisão de números representados sob a forma de fração (extrato 2).

Extrato 2

1. **Professora:** (…) E porque é que quando tu divides por dois, multiplicas?
2. **Filipa:** Porque a regra diz que deixamos estar a primeira [fração], e depois passamos de dividir para vezes e fazemos o inverso do número.
3. **Professora:** E que número é este? Fazemos o inverso de que número?
4. **Filipa:** Do dois.
5. **Professora:** Aqui é o dois, mas podia ser outro qualquer. É o inverso do quê?

6. **Filipa:** Do segundo número.
7. **Professora:** E como é que se chama?
8. **Filipa:** É a segunda parcela.
9. **Professora:** E como é que se chama a segunda parcela?
10. **Filipa:** Dividendo.
11. **Professora:** Qual é o dividendo?
12. **Filipa:** É este [$\frac{4}{3}$]. É o divisor.

(Transcrição EF3, p. 3)

Filipa justifica, através das regras que aprendeu na aula, que utiliza a multiplicação porque, para dividir frações, é necessário multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor (§2). Contudo, não utiliza corretamente, e de imediato, os termos dividendo e divisor (§6, §8). Apenas o faz a partir das questões que coloquei (§9-§12).

O extrato 3 ilustra como Filipa pensou para determinar a quantidade de ingredientes necessários para fazer o bolo para oito pessoas.

Extrato 3

1. **Professora:** (…) E agora, já estás a pensar na próxima?
2. **Filipa:** Sim… Como quatro é metade do oito, temos que fazer estas frações [quantidade de ingredientes para quatro pessoas] vezes dois.
3. **Professora:** O quatro é metade do oito… E por isso vais fazer aquelas frações vezes dois?
4. **Filipa:** Sim.
5. **Professora:** Então mas se é metade, vais fazer vezes dois?
6. **Filipa:** Porque metade… se quisermos descobrir o dobro, que é o contrário da metade… se quisermos descobrir o dobro, temos de fazer vezes dois.
7. **Professora:** Ah, ok. Então o quatro é metade do oito. E vais multiplicar por dois porque…?
8. **Filipa:** Porque o quatro vezes dois dá oito. [Inicia a resolução] Aqui dá seis quartos [quantidade de farinha para oito pessoas].

(Transcrição EF3, p. 3)

A aluna explica a sua estratégia (§2) e justifica-a recorrendo àquilo que sabe sobre a relação dobro/metade. Como sabe que quatro é metade de oito (§2), Filipa explica que basta fazer o dobro das quantidades para quatro pessoas para obter as quantidades para oito pessoas (§6, §8). A figura 51 e o extrato 4, mostram como Filipa pensou para multiplicar frações e que estratégia utiliza quando um dos fatores é um número inteiro.

Extrato 4

1. **Professora:** Como é que se multiplica?
2. **Filipa:** Multiplicando numerador com numerador e denominador com denominador.

3. **Professora:** Mas tu aqui não multiplicaste nada… [referindo-me ao número inteiro 2]
4. **Filipa:** Porque é como se tivesse… [faz, a tracejado, o denominador 1 por baixo do 2]
5. **Professora:** Aaah, está bem. Já percebi.

(Transcrição EF3, p. 4)

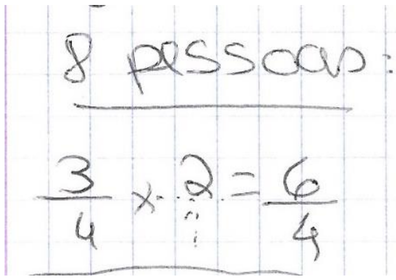


Figura 51 – Cálculo para descobrir a quantidade de farinha necessária para 8 pessoas

Para além da estratégia apresentada no extrato anterior e na figura 51, Filipa identifica outras formas para chegar à quantidade de ingredientes para oito pessoas. Por exemplo, adiciona duas vezes a quantidade necessária para quatro pessoas e justifica esta estratégia dizendo "porque vezes dois é o mesmo do que somar igual" (Transcrição EF3, 4). O extrato 5 ilustra outra estratégia.

Extrato 5

1. **Filipa:** Podíamos somar este [quantidade de ingredientes para duas pessoas].
2. **Professora:** Fazendo como?
3. **Filipa:** Três oitavos mais três oitavos, que ia dar seis oitavos. E depois três quartos mais seis oitavos.
4. **Professora:** Aaaah. Olha, não é mal pensado. Então mostra lá. Mostra lá como é que é.
   (…)
5. **Professora:** Então mas doze oitavos… e seis quartos. Aqui [no cálculo $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4}$] deu-te seis quartos e aqui [no cálculo $\frac{6}{8} + \frac{3}{4} = \frac{6}{8} + \frac{6}{8} = \frac{12}{8}$] deu-te doze oitavos.
6. **Filipa:** É o mesmo do que multiplicar por dois. Seis vezes dois dá doze e quatro vezes dois dá oito.
7. **Professora:** Então, mas como é que eu sei que isto [$\frac{6}{4}$] é igual a isto [$\frac{12}{8}$]?
8. **Filipa:** Porque são frações equivalentes.

(Transcrição EF3, p. 5)

A aluna explica que, para encontrar a quantidade de ingredientes necessária para oito pessoas, também pode adicionar duas vezes a quantidade para duas pessoas com a quantidade de ingredientes para quatro pessoas (§1-§4). Quando confrontada com resultados diferentes provenientes das duas estratégias (§5), Filipa explica que os resultados obtidos são frações equivalentes e justifica a afirmação com recurso a cálculos (figura 52). Esses cálculos correspondem a uma regra, aprendida na aula, que permite determinar frações equivalentes.

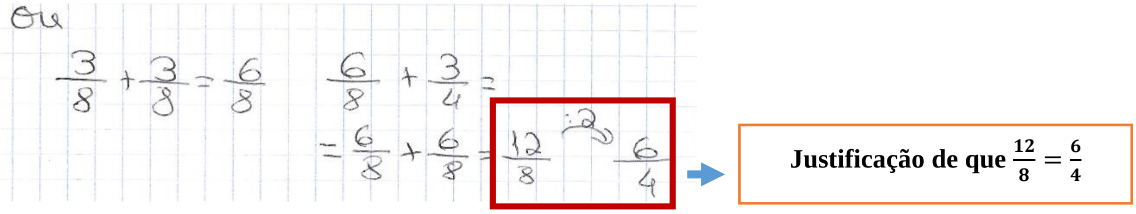


Figura 52 – Quantidade de farinha para oito pessoas e justificação de que 12/8=6/4

Passando para as quantidades de ingredientes necessárias para seis pessoas, a primeira estratégia usada por Filipa foi adicionar as quantidades de ingredientes para o bolo para quatro pessoas com as quantidades necessárias para o bolo para duas pessoas. O extrato 6 revela como adicionou as frações.

Extrato 6

1. **Professora:** Então o que é que estás a fazer? O que é que fizeste aqui [referindo-me ao cálculo da quantidade de farinha necessária]?
2. **Filipa:** Somei o de quatro pessoas e o de dois pessoas [regista $\frac{3}{4} + \frac{3}{8}$ e calcula].
3. **Professora:** Posso fazer uma pergunta? Como é que tu daqui [$\frac{3}{4} + \frac{3}{8}$] passaste para aqui [$\frac{6}{8} + \frac{3}{8}$]? Como é que pensaste?
4. **Filipa:** Porque três quartos é o mesmo que seis oitavos.
5. **Professora:** E como é que sabes isso? Não é preciso mostrares. Só quero que me expliques.
6. **Filipa:** Porque três vezes dois dá seis e quatro vezes dois dá oito.
7. **Professora:** Ok.
8. **Filipa:** E a regra diz que temos que ter denominadores iguais.

(Transcrição EF3, p. 6)

Depois de explicar a sua estratégia (§2), Filipa determina mentalmente uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ com denominador 8, justificando a forma como pensou (§4-§6) e por que razão o fez (§8).

Para saber as quantidades de ingredientes necessárias para dez pessoas, Filipa identifica três estratégias distintas: “fazendo os de oito pessoas mais o de duas pessoas. Ou os de seis pessoas mais os de quatro pessoas”, “podíamos fazer este, os de dois, vezes cinco” (Transcrição EF3, p. 8). O extrato 7 ilustra que, de entre estas estratégias, Filipa escolheu uma para calcular as quantidades de ingredientes para dez pessoas e porque o fez.

Extrato 7

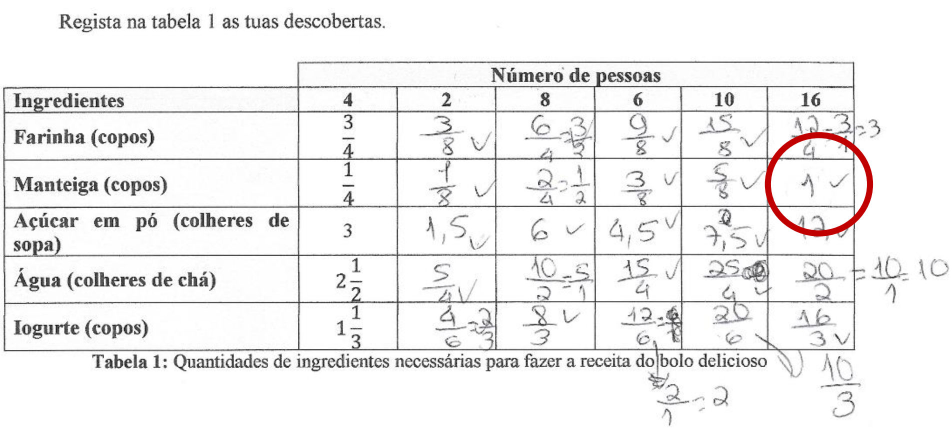
1. **Professora:** Qual foi a opção que tu escolheste?
2. **Filipa:** Eu escolhi dois vezes cinco.
3. **Professora:** Porquê? Porque é que escolheste o vezes cinco? Tu identificaste três formas de fazer certo? Que era os ingredientes para oito pessoas mais para duas pessoas ou para seis pessoas mais quatro pessoas. Foi isto?
4. **Filipa:** Sim. (…)
5. **Professora:** (…) Porque é que, dessas opções todas, escolheste fazer esta? Multiplicar por cinco, porquê?
6. **Filipa:** É mais fácil.
7. **Professora:** É mais fácil para ti? Porque é que é mais fácil, explica-me lá…
8. **Filipa:** Porque só temos de multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.
9. **Professora:** E se fosse com a adição, porque é que achas que seria mais difícil?
10. **Filipa:** Porque temos que achar denominadores iguais e depois é que podemos fazer.

(Transcrição EF3, p. 8)

Analisando o extrato, constata-se que Filipa calcula o quíntuplo das quantidades de ingredientes necessárias para o bolo para duas pessoas (§2) porque considera ser a mais fácil (§6) e justifica a sua escolha tendo em conta aquilo que sabe sobre a multiplicação e sobre a adição de frações (§7-§10).

Também no que diz respeito às quantidades de ingredientes para dezasseis pessoas, a aluna identifica diferentes formas de chegar aos resultados: “O oito vezes dois”, “O dez mais o seis”, “O dez mais o quatro mais o dois”, “O quatro vezes o dois mais o oito”, “(…) quatro vezes quatro” (Transcrição EF3, p. 9-10). Filipa optou por calcular o produto das quantidades necessárias para fazer um bolo para oito pessoas por dois, justificando como anteriormente (Extrato 7, §8).

Enquanto efetua os cálculos, Filipa apenas simplificou a fração $\frac{4}{4}$ por saber que correspondia à unidade (assinalada na figura 53 com um círculo vermelho). No final, após alguma dificuldade em chegar ao conceito de *fração irredutível* e à noção de *simplificar*, Filipa simplifica corretamente todas as frações quando é possível fazendo todo o processo mentalmente (figura 53). A aluna explica que as frações estão irredutíveis “porque não dá para dividir mais” (Transcrição EF3, p. 14).



Regista na tabela 1 as tuas descobertas.

Ingredientes	Número de pessoas 4	2	8	6	10	16
Farinha (copos)	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$ ✓	$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$ ✓	$\frac{15}{8}$ ✓	$\frac{12}{4} = 3$
Manteiga (copos)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$ ✓	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$ ✓	$\frac{5}{8}$ ✓	1 ✓
Açúcar em pó (colheres de sopa)	3	1,5 ✓	6 ✓	4,5 ✓	7,5 ✓	12
Água (colheres de chá)	$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$ ✓	$\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$	$\frac{15}{4}$ ✓	$\frac{25}{4}$ ✓	$\frac{20}{2} = \frac{10}{1} = 10$
Iogurte (copos)	$1\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$ ✓	$\frac{12}{6} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{20}{6}$ $\frac{10}{3}$	$\frac{16}{3}$ ✓

Tabela 1: Quantidades de ingredientes necessárias para fazer a receita do bolo delicioso

Figura 53 – Registos feitos por Filipa na tabela incluída no enunciado da tarefa

Recursos usados por Filipa

Para resolver esta tarefa, Filipa mobiliza vários conhecimentos matemáticos, nomeadamente associados às operações com frações e ainda algumas relações numéricas úteis quando, por exemplo, calcula mentalmente.

Em relação às relações entre os números, destaca-se a relação dobro/metade. Filipa refere, por exemplo: “dois é metade de quatro” (Transcrição EF3, p. 1), “porque metade… se quisermos descobrir o dobro, que é o contrário da metade… se quisermos descobrir o dobro, temos de fazer vezes dois” (*idem*, p. 3), “porque vezes dois é o mesmo do que somar igual” (*idem*, p. 4). No extrato 3, observa-se que o conhecimento de Filipa sobre a relação dobro/metade permitiu-lhe calcular a quantidade de ingredientes necessários para fazer o bolo para oito pessoas. Para isso, Filipa refere que basta calcular o dobro da quantidade de ingredientes necessários para o bolo para quatro pessoas (§2).

A aluna mobilizou também os seus conhecimentos relativamente aos numerais mistos. Neste caso, optou por transformá-los em fração para, posteriormente, efetuar os cálculos necessários (extrato 8).

Extrato 8

1. **Filipa:** Isto é um numeral misto.
2. **Professora:** E agora explica-me lá como é que estás a pensar fazer?
3. **Filipa:** É dois vezes dois, quatro. Mais um, cinco. Cinco meios (…)
4. **Professora:** Então e agora como é que passaste daqui [$1\frac{1}{3}$] para aqui [$\frac{4}{3}$]?
5. **Filipa:** Porque um vezes três, dá três. Mais um, quatro.

(Transcrição EF3, p. 2)

A análise do extrato 8 evidencia que a aluna mobilizou uma regra, trabalhada na sala de aula, que possibilita transformar um numeral misto em fração (§3).

Filipa usou também os conhecimentos matemáticos de que dispunha sobre as operações com frações. Sobre a divisão de frações, Filipa explica que “a regra diz que deixamos estar a primeira [parcela] e depois passamos de dividir para vezes e fazemos o inverso do número [divisor]” (Transcrição EF3, p.3). Para adicionar frações, sabe que, quando necessário, tem de encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador porque “a regra diz que temos de ter denominadores iguais” (*idem*, p. 6). Já a propósito da multiplicação, explica que “só temos de multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador” (*idem*, p. 8) e, assim, torna-se mais “fácil” (termo utilizado por si) porque na adição “temos que achar denominadores iguais e depois é que podemos fazer” (*ibidem*). Quando recorre à adição de frações, Filipa usa também os seus conhecimentos relativos à noção de frações equivalentes (figura 52).

No que diz respeito às representações utilizadas por Filipa, usa privilegiadamente as representações simbólicas, segundo a categorização de Brunner, ou numéricas, de acordo com a classificação de Preston e Garner, nomeadamente para representar números sob a forma de fração e para efetuar os cálculos necessários (figura 54).

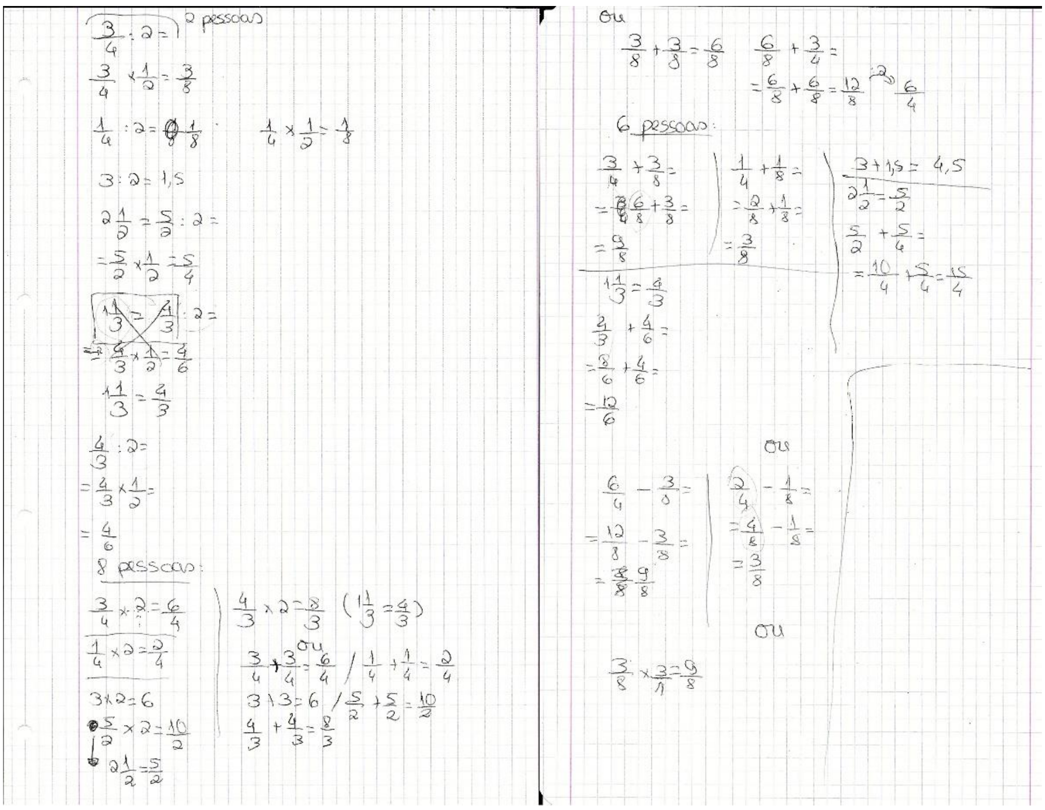


Figura 54 – Cálculos efetuados na resolução da tarefa (representações simbólicas)

Apesar do predomínio de representações simbólicas ou numéricas, Filipa recorreu, num caso, a representações icónicas, de acordo com Brunner, ou pictóricas, segundo a categorização de Preston e Garner (figura 55).

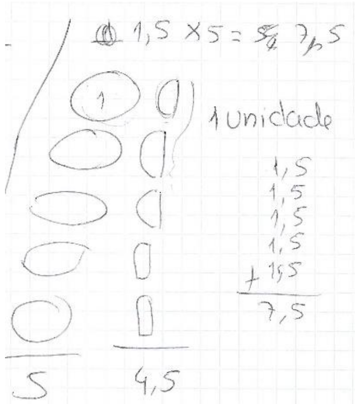


Figura 55 – Esquema utilizado por Filipa para calcular a quantidade de açúcar necessário para fazer o bolo para dez pessoas

Recorrer a este esquema mostrou, da parte da Filipa, alguma fragilidade no cálculo do produto de 1,5 por 5. Filipa repara que, utilizando os esquemas não consegue, inicialmente, obter uma resposta correta (extrato 9).

Extrato 9

1. **Professora:** Isso [esquema] serve para quê? Explica-me lá…
2. **Filipa:** É para saber quantos… [hesita] É esta conta.
3. **Professora:** (…) Mas explica-me lá como é que funciona este esquema.
4. **Filipa:** Isto [“círculo”] representa um. Mas como é mais uma metade, fiz a metade aqui [“semicírculo”]. E depois aqui tem cinco [“círculos”] e aqui tem quatro mais um bocadinho [“semicírculos”]. Quatro mais…
5. **Professora:** E depois juntaste o cinco com o quatro? Já não estou a perceber…
6. **Filipa:** Fazemos assim: um mais um, dois, três, quatro, cinco [conta as unidades, ou seja, os “círculos” inteiros]. Dá cinco. E depois, como duas metades representa um…
7. **Professora:** Ah, então escreve lá aqui que isto representa um. É isso?
8. **Filipa:** Sim.
9. **Professora:** Então tu fizeste cinco, depois…
10. **Filipa:** Mais um, seis. Mais outro sete, mais metade, sete e meio.
11. **Professora:** Ok. Está bem.

(Transcrição EF3, p. 8)

Apesar de, inicialmente, não ter conseguido, através da sua representação icónica ou pictórica, chegar à resposta correta (§4), Filipa consegue, depois, por contagem das unidades, obter 7,5 (§6, §10). A adição representada ao lado do esquema, surgiu como uma diferente estratégia para chegar ao resultado.

Dificuldades de Filipa

Nesta tarefa, Filipa não revelou muitas dificuldades. No entanto, destaco dois momentos em que a senti mais hesitante e com mais dúvidas relativamente ao que estava a fazer. O extrato 10 e a figura 56, ilustram um desses momentos.

Extrato 10

1. **Professora:** Então e agora como é que passaste daqui [$1\frac{1}{3}$] para aqui [$\frac{4}{3}$]?
2. **Filipa:** Porque um vezes três, dá três. Mais um, quatro.
3. **Professora:** Ok. Então tu agora estás a querer dizer que ter isto [$1\frac{1}{3}$] é a mesma coisa que ter isto a dividir por 2 [$\frac{4}{3} \div 2$]? [figura 56]
4. **Filipa:** Não. Isto [$1\frac{1}{3}$] é igual a isto [$\frac{4}{3}$]. [Faz um retângulo onde separa o numeral misto e a fração da divisão por dois – figura 56]
5. **Professora:** Ah! Então isto [a divisão por dois] pode estar aqui?
6. **Filipa:** Não. Tem que estar aqui [escreve :2 antes da expressão $\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}$].
7. **Professora:** Então e agora o que é que está a dividir por dois? Agora já não sei…
8. **Filipa:** [Põe uma cruz sobre a resolução do cálculo e volta a resolvê-lo novamente, com as devidas correções – figura 56].

(Transcrição EF3, p. 2)

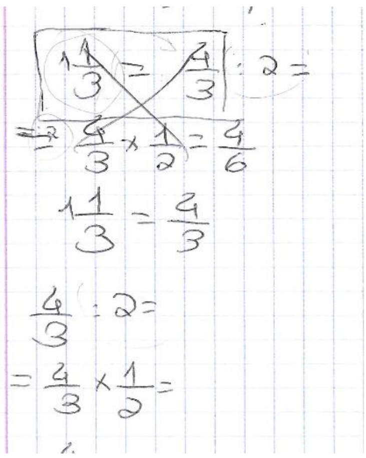


Figura 56 – Forma como Filipa representa metade do resultado obtido no numeral misto

A análise do extrato 10 e da figura 56 permite constatar que Filipa teve algumas dificuldades na escrita de uma expressão numérica que permitisse calcular metade da quantidade de iogurte necessária para o bolo para quatro pessoas, expressa num numeral misto. A aluna transforma corretamente o numeral misto numa fração fração (§1, §2). No entanto, quando pretende calcular metade do resultado obtido, não escreve corretamente a expressão (figura 56). Rapidamente, identifica o seu erro, corrigindo o que escreveu. É importante referir que, o facto de escrever $1\frac{1}{3} = \frac{3}{4} \div 2$ indica que Filipa interpreta a igualdade não como uma relação de equivalência mas como um operador unidirecional.

Outro dos momentos onde senti Filipa hesitante e com algumas dúvidas foi na simplificação de frações de modo a que ficassem irredutíveis. Aparentemente, a aluna não percebeu que eu pretendia que ela o fizesse, uma vez que também não era pedido no enunciado da tarefa (extrato 11).

Extrato 11

1. **Professora:** (…) Por exemplo, tu aqui fizeste, vou-te chamar aqui para um exemplo que tu fizeste, quatro sobre quatro dá um. Certo?
2. **Filipa:** Certo.
3. **Professora:** Então e agora, por exemplo, no doze sobre quatro, dá para fazer alguma coisa?
4. **Filipa:** Doze a dividir por quatro, dá três.
5. **Professora:** Ah, então estamos a fazer o quê?
6. **Filipa:** Frações equivalentes.
   (…)
7. **Professora:** Então escolhe lá outra fração qualquer…
8. **Filipa:** Daqui?
9. **Professora:** Sim… Quando nós fazemos doze sobre quatro, estamos a fazer o quê?
10. **Filipa:** aaah… [hesita] a divisão.

(…)

11. **Professora:** E se eu quisesse dali, ir para ali? [fazer o processo inverso, passar de $\frac{6}{8}$ para $\frac{3}{4}$]
12. **Filipa:** Seis a dividir por dois dá três e oito a dividir por dois, dá quatro.
13. **Professora:** E isso é fazer o quê à fração?
14. **Filipa:** Dividir.
15. **Professora:** Ou seja?
16. **Filipa:** Dividir… pô-la… irredutível.
17. **Professora:** Ah, irredutível. Simpli…
18. **Filipa:** Simplificar.
19. **Professora:** Então nós devemos apresentar as nossas frações irredutíveis ou não?
20. **Filipa:** Sim… [hesita]

21. **Professora:** Sim ou não? Não estás convencida. Quero que me expliques se devemos ou não devemos.
22. **Filipa:** Devemos porque, numa expressão numérica, devemos sempre pôr as frações irredutíveis.

(Transcrição EF3, p. 11-12)

Analisando o extrato anterior, constata-se que, através da questão que coloquei, Filipa evoca o termo *irredutível* (§16). No entanto, foi com um apoio significativo da minha parte que a aluna referiu o termo *simplificar* (§17, §18). Posteriormente, embora não estivesse completamente convencida (§19-§22), a aluna simplifica as frações possíveis, mobilizando o que aprendeu nas aulas.

Em síntese, na exploração da tarefa Filipa evidenciou atividades do raciocínio matemático como *explicar* e *justificar*. A aluna mobilizou o seu conhecimento matemático relativamente às operações com frações e algumas relações numéricas. As representações privilegiadas foram as representações simbólicas ou numéricas. Filipa revelou algumas dificuldades na escrita de determinadas expressões numéricas e também na simplificação de frações de modo a torná-las irredutíveis.

4.1.4. Tarefas *O aniversário da Ana* e *Daniel e o leite*

No âmbito da quarta entrevista, foram apresentadas duas tarefas intituladas por *O aniversário da Ana* e *Daniel e o leite* (anexo 7). A primeira tarefa era constituída por três questões e a segunda por duas questões. Qualquer uma das tarefas apelava à divisão de números racionais representados sob a forma de fração. As situações apresentadas envolvem o significado de divisão como medida.

Raciocínios de Filipa

Após a leitura da primeira questão da tarefa *O aniversário da Ana*, Filipa começa imediatamente por explicar como está a pensar fazer para a resolver (extrato 1).

Extrato 1

1. **Professora:** Então explica-me lá o que é que…
2. **Filipa:** Aaaah… eu estava a pensar fazer dois a dividir por um terço…
3. **Professora:** Primeiro, o que é que nos pedem?
4. **Filipa:** Perguntam quantos copos de um terço de litro pode-se encher com dois litros.
5. **Professora:** E estavas a pensar fazer como?
6. **Filipa:** Dois a dividir por um terço.
7. **Professora:** Porquê?

8. **Filipa:** [hesitação] Porque… se tivermos dois litros e quisermos distribuir por copos de um terço, vamos dividir.

(Transcrição EF4, p. 1-2)

Facilmente, Filipa explica, justificando, que vai dividir a quantidade de sumo disponível pela capacidade dos copos (§6-§8). A figura 57 mostra as diferentes estratégias usadas pela aluna para chegar ao resultado.

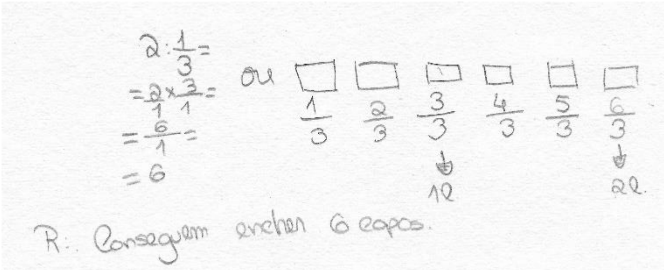


Figura 57 – Estratégias usadas por Filipa para descobrir quantos copos de um terço de litro enche com dois litros

Na figura 57 é possível ver o cálculo feito por Filipa, que justifica que, com dois litros, enche 6 copos de um terço de litro. Quando confrontada com a hipótese de existirem outras alternativas de chegar ao resultado (extrato 2), Filipa opta por utilizar o esquema que se vê na mesma figura.

Extrato 2

1. **Professora:** Havia alguma alternativa diferente para pensar?
2. **Filipa:** Por esquemas…
3. **Professora:** E como é que seria por esquemas?
4. **Filipa:** Fazíamos… um copo … Agora dava três terços e era uma unidade. Porque o sinal de fração simboliza a divisão e três a dividir por três dá um. Então… até aqui era um litro.
5. **Professora:** Ok. E quantos copos enchia?
6. **Filipa:** E depois íamos continuar… quatro terços dá um número decimal. Cinco terços, cinco a dividir por três também dá… E seis terços… seis a dividir por três dá dois.
7. **Professora:** Então estás a dizer…
8. **Filipa:** Então aqui [$\frac{3}{3}$] é um litro e aqui é 2 litros [$\frac{6}{3}$].

(Transcrição EF4, p. 2)

A análise do extrato 2 evidencia que Filipa opta por desenhar seis copos e registar, abaixo de cada um, as frações $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$ e assim sucessivamente. Aparentemente, quando escreve essas frações está a referir-se à quantidade de sumo que usou até aí e não à quantidade correspondente a cada copo (§4). Filipa explica que ao desenhar três copos, tem três terços de litro, logo um litro. Por isso, tem de desenhar 6 copos, que correspondem aos dois litros (§6, §8).

A figura 58 ilustra as estratégias utilizadas por Filipa para responder à segunda questão.

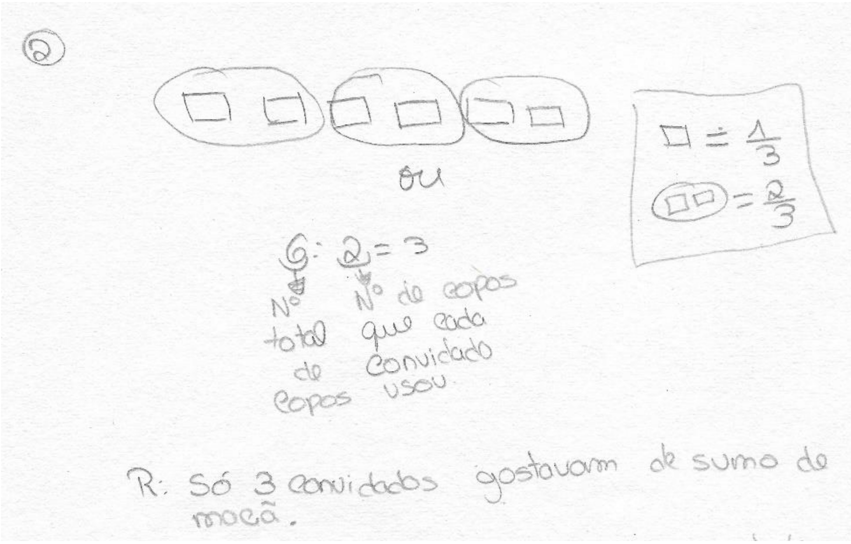


Figura 58 – Estratégias usadas por Filipa para descobrir quantos convidados gostavam de sumo de maçã

Filipa explica que pode fazer por esquemas: "fazemos os seis copos. Se tivermos dois copos de um terço, dá dois terços. Então, já teríamos o número de quanto bebeu cada convidado" (Transcrição EF4, p. 3). Posteriormente, agrupa os seis copos em pares e conclui que os seis copos de sumo de maçã dão para três convidados. Filipa explica, também, que, para chegar à resposta poderia fazer "seis a dividir por dois" (*ibidem*) e justifica "porque um terço mais um terço dá dois terços e então dois terços é dois copos de um terço. Então é seis, seis é o número de copos, e dois é o número de copos que cada um bebeu" (*ibidem*), evidenciando que divide o número de copos de sumo de maçã que havia pelos dois copos que cada amigo bebia.

O extrato 3 e a figura 59, mostram como Filipa pensou para responder à terceira questão.

Extrato 3

1. **Filipa:** Desenho a torta… (…) divido em cinco.
2. **Professora:** Em cinco porquê?
3. **Filipa:** Porque… [fica pensativa] aqui [no denominador da fração que cada um comeu] está o cinco. E o denominador indica o todo.
4. **Professora:** Ah. Então estás a dizer que vais dividir a torta em cinco porque o cinco é o denominador e identifica o todo?

5. **Filipa:** Não, identifica em que partes está dividido o todo. (…) E como nos pede, como nos pede três tortas, vou desenhar três tortas.
   (…)
6. **Professora:** Então isto aqui é o quê [referindo-me a um quinto que correspondia a uma parte da torta]?
7. **Filipa:** É um quinto.
   (…)
8. **Professora:** E tu juntaste dois porquê?
9. **Filipa:** Porque é dois quintos… assim forma dois quintos que é o que cada um comeu.
   (…)
10. **Professora:** E então, o que é que tens a dizer?
11. **Filipa:** Eu dividi as três tortas (…) as três tortas por convidados, para ver quanto é que dava. Depois somei isto tudo e deu sete convidados.

(Transcrição EF4, p.3-4)

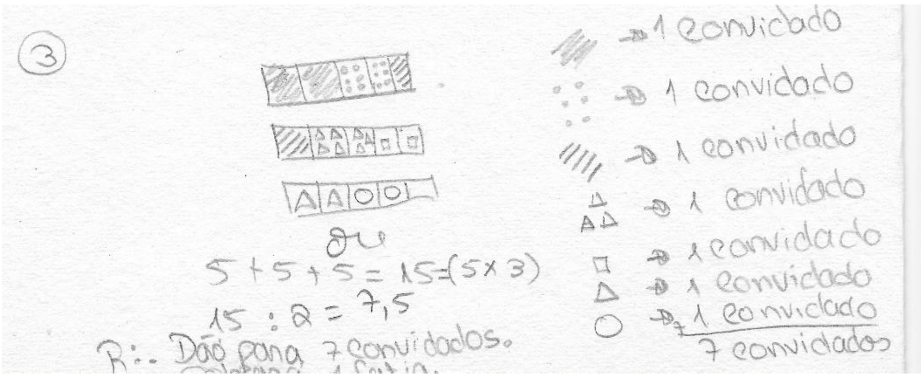


Figura 59 – Estratégias usadas por Filipa para descobrir para quantos convidados davam três tortas

Filipa explica, justificando, que divide cada torta em cinco partes porque tem em conta o denominador da fração que indica a quantidade que cada convidado come, $\frac{2}{5}$ (§3-§12). Apesar de não ser muito percetível na sua explicação, o que Filipa fez foi agrupar as fatias duas a duas (para obter os dois quintos) e, no final, somar os grupos de dois que obteve (§14).

O extrato 4 ilustra, nas palavras de Filipa, uma outra forma de pensar para descobrir para quantos convidados dariam as três tortas.

Extrato 4

1. **Filipa:** Podíamos fazer como uma [torta] é cinco, cinco vezes três dá quinze. Quinze a dividir por dois.
   (…)
2. **Filipa:** Agora é quinze a dividir por dois.
3. **Professora:** Porquê por dois?
4. **Filipa:** Porque cada convidado comia dois bocadinhos.
5. **Professora:** E este quinze é o quê?
   (…)

6. **Filipa:** É o número de partes em que estão divididas as três tortas.
7. **Professora:** Sim… Então é o número de partes. Então dividiste por dois porque…?!
8. **Filipa:** Porque cada convidado come dois bocadinhos. (…)
9. **Professora:** E agora?
10. **Filipa:** E como dá sete e meio, significa que são sete convidados e mais um bocadinho… são sete convidados que comem e sobra um bocadinho.
11. **Professora:** E quanto é que é esse bocadinho?
12. **Filipa:** É um quinto.

(Transcrição EF4, p. 5)

Neste extrato, a aluna explica o resultado obtido (§10). Além disso, justifica que dividiu 15, o número total de fatias de torta, por 2 porque cada convidado comia dois quintos, ou seja, duas fatias (§1-§7). Obtém como resultado 7,5 e explica que as três tortas dão para sete convidados mas sobra "um bocadinho", que corresponde a um quinto (§9-§12).

Quando confrontada com a primeira questão da tarefa *Daniel e o Leite*, Filipa começa por explicar como está a pensar resolvê-la (extrato 5 e figura 60).

Extrato 5

1. **Filipa:** E estou a pensar resolver em… primeiro resolver o número misto e depois fazer o número que der a dividir por um meio [figura 60].
2. **Professora:** Porquê?
3. **Filipa:** Porque se, imaginando que os dias são partes, íamos… são copos e cada copo equivalia a meio litro, íamos despejar… íamos dividir.
4. **Professora:** Ah, então tu estás a dizer que divides por um meio porque um meio, sabemos que é o que ele bebe em cada dia. E tu estás a pensar "faz de conta que cada dia é um copo onde nós vamos despejar o leite". Foi isso que eu percebi?
5. **Filipa:** Sim.

(Transcrição EF4, p. 6)

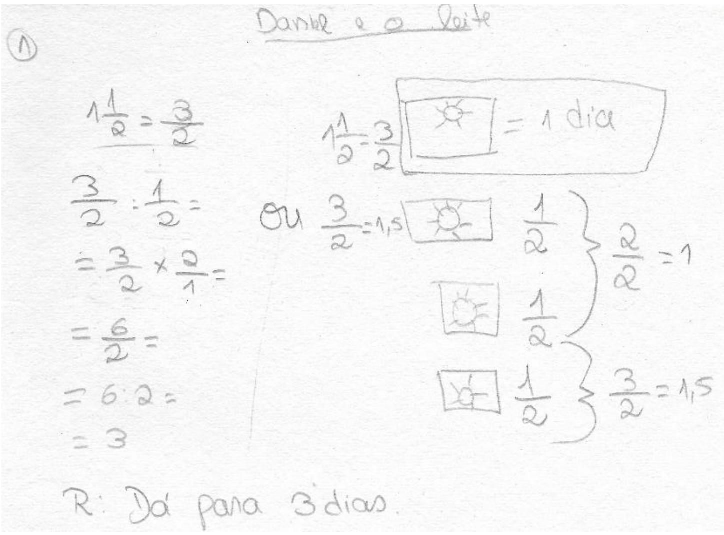


Figura 60 – Estratégias de Filipa para descobrir para quantos dias darão os 3/2 de litro

Analisando o extrato 5 e a figura 60, é possível constatar que, em primeiro lugar, Filipa transforma o numeral misto em fração e, depois, divide a fração obtida por um meio (§1). A aluna justifica esta abordagem estabelecendo uma analogia entre dias e copos onde vai "deitar" o leite que o Daniel consome por cada dia (§3-§5). O esquema representado na figura 60 é outra estratégia que identifica para chegar ao resultado e que evidencia que Filipa vai "distribuindo" $\frac{1}{2}$ de leite por cada dia até alcançar o leite comprado pelo Daniel.

O extrato 6 ilustra o discurso de Filipa após ter contactado com a segunda questão da tarefa *Daniel e o leite*.

Extrato 6

1. **Professora:** E agora, como é que estás a pensar fazer?
2. **Filipa:** Fazer o três meios a dividir por seis…
3. **Professora:** Por seis, porquê?
4. **Filipa:** Não. A dividir por um quinto…
5. **Professora:** Então já não estou a perceber. É a dividir por seis ou a dividir por um quinto?
6. **Filipa:** Por um quinto.
7. **Professora:** Porque?
8. **Filipa:** Porque se der seis, dá [para encher seis copos]. Se não der seis, não dá.
9. **Professora:** Aah.
10. **Filipa:** Mas também depois temos de ver se dá…
11. **Professora:** Ah… então vais dividir por copos de um quinto não é? Se der seis, é porque eu posso encher seis copos…
12. **Filipa:** Mas também se der … seis e meio, dá. Porque… Não, não dá.
13. **Professora:** Se der seis e meio não dá? Se der seis e meio não dá porquê? Explica lá…

14. **Filipa:** Porque para seis… seis para seis e meio dá 0,5. E 0,5 não é um quinto.

(Transcrição EF4, p. 8)

A aluna começa por explicar que pode dividir a quantidade de leite que tem por $\frac{1}{5}$ (§2-§6). No entanto, explica que o leite só dá para encher seis copos se obtiver como resultado seis (§8-§14).

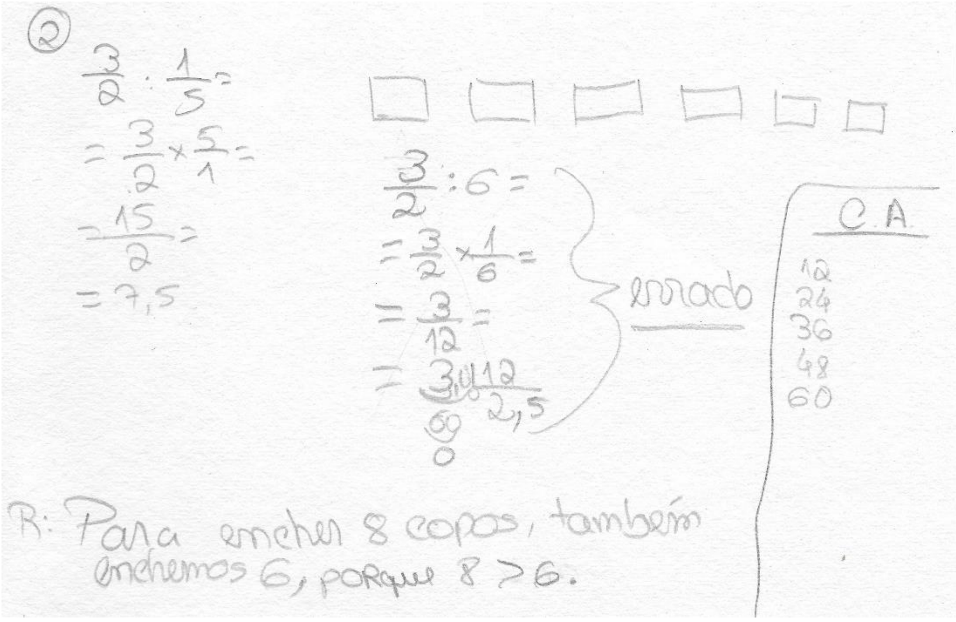


Figura 61 – Estratégias de Filipa para descobrir se o Daniel pode encher seis copos com 1/5 de litro de leite

A figura 61 ilustra as estratégias usadas por Filipa para responder à questão. Constata-se que, no cálculo que efetuou, Filipa obtém 7,5 mas considera que enche oito copos "porque enchiam sete e depois o oitavo deixava-se um bocadinho" (Transcrição EF4, p. 9). Uma vez que assumiu que, caso não obtivesse seis como resultado, o leite não enchia seis copos, responde que Daniel não pode encher seis copos, porque o leite que tem dá para encher 8.

O extrato 7 corresponde ao momento em que Filipa percebeu que poderia encher seis copos de um quinto de leite se dispusesse de um litro e meio de leite.

Extrato 7

1. **Professora:** (…) Então vá, o que é que já sabemos? Tu já mostraste…
2. **Filipa:** Que três meios a dividir por um quinto dá 7,5.
3. **Professora:** E o que é que isso significa, que tu também já disseste?
4. **Filipa:** Significa oito copos… que dá para encher oito copos.
5. **Professora:** Só que um tem menos, foi isso que tu disseste. Então dá para encher seis copos ou não?
6. **Filipa:** Não.

7. **Professora:** Porquê?
8. **Filipa:** Porque se não dá aqui [no resultado da divisão], não dá [para encher os seis copos].
9. **Professora:** Tinha que dar aqui seis é isso?
10. **Filipa:** Sim. Tinha que dar.
11. **Professora:** Para encher seis copos…
12. **Filipa:** Obrigatoriamente.
13. **Professora:** Obrigatoriamente tinha que dar seis. Então se eu tiver duas pastilhas, eu não tenho uma, tenho duas.
14. **Filipa:** Sim…
15. **Professora:** Não tenho lá uma também?
16. **Filipa:** Tem.
17. **Professora:** Então se eu quiser encher seis copos, se eu encho sete…
18. **Filipa:** Dá.
19. **Professora:** Não sei. É uma pergunta.
20. **Filipa:** Dá…
21. **Professora:** Porque é que dá? Há bocado não dava, agora dá.
22. **Filipa:** Dá porque se enchermos oito também… eu para ter dez anos, tenho que ter seis.
23. **Professora:** Ahh. E então, o que é que tens a dizer sobre isto agora?
24. **Filipa:** Para enchermos oito, temos que encher seis.

(Transcrição EF4, p. 10-11)

A análise do extrato permite evidenciar que, de início, Filipa acredita plenamente que não consegue encher seis copos, porque o resultado da divisão entre $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{5}$ é 7,5 (§1-§8). A partir do exemplo que apresentei (§13), Filipa percebe que uma vez que obteve um quociente maior que seis, consegue encher os seis copos e ainda sobrará leite (§13-§24).

Recursos usados por Filipa

Para resolver esta tarefa, Filipa mobiliza os conhecimentos matemáticos, essencialmente, sobre a divisão com números racionais representados sob a forma de fração. Sobre a divisão com frações, Filipa explica que "o dividendo fica igual, o sinal de divisão passa a multiplicação e faz-se o inverso do número… do divisor" (Transcrição EF4, p. 6).

Em relação às representações utilizadas, Filipa utilizou representações simbólicas e icónicas, segundo a categorização de Brunner, ou representações numéricas e pictóricas, seguindo a classificação apresentada por Preston e Garner. Em todas as questões, Filipa utilizou as duas formas de representação (figuras 57, 58, 59, 60 e 61). Contudo, não as utilizou em simultâneo mas sim, como uma outra estratégia para chegar ao mesmo resultado. Com efeito, a aluna utilizava primeiro um determinado tipo de representação e, apenas quando questionada sobre outras estratégias, apresentava outro tipo de representação.

Dificuldades de Filipa

As dificuldades reveladas por Filipa surgiram na última questão da tarefa *Daniel e o Leite*. Nessa questão, Filipa disse que, caso não obtivesse como resultado o número seis, o Daniel não poderia encher seis copos (ver extrato 7, §1-§12). Uma vez que não obteve o resultado pretendido, Filipa pensou que poderia utilizar outra estratégia. O extrato 8 mostra a alternativa de Filipa.

Extrato 8

1 Filipa: (…) Agora podemos fazer três meios a dividir por seis [começa logo a resolver e obtém a fração $\frac{3}{12}$].
2 Professora: E isso mostra o quê? (…) Porque tu aqui [$\frac{3}{2} \div 6$] dividiste o leite pelos copos. O que é que vai dar o resultado? Vai dar o número de copos?
4 Filipa: [fica pensativa]
5 Professora: Quando nós dividimos por seis copos, vai-nos dar o número de copos?
6 Filipa: Não.
7 Professora: Vai-nos dar o quê? Se eu estou a distribuir o leite por seis copos…
8 Filipa: A quantidade que cada copo leva.
9 Professora: E é isso que queremos saber?
10 Filipa: Não.
(Transcrição EF4, p. 9)

A segunda estratégia de Filipa consiste em dividir a quantidade de leite que o Daniel tinha, ou seja $\frac{3}{2}$, por seis, o número de copos que pretendia encher (§1). Quando questionada sobre o cálculo que efetuou ($\frac{3}{2} \div 6$), Filipa sabe que o quociente obtido representa a quantidade de leite que cada copo irá levar (§5-§8), o que não corresponde ao que pretende saber (§9-§10). Assim, reconhecendo que estava errada, Filipa volta à sua primeira opção continuando a afirmar que não dava para encher os seis copos. Apenas com a minha ajuda, e com recurso a um exemplo mais concreto (ver extrato 7, §13-§22), Filipa chegou à conclusão de que poderia encher os seis copos uma vez que “para enchermos oito, temos que encher seis” (Transcrição EF4, p. 11).

Para terminar, as atividades de raciocínio evidenciadas por Filipa na resolução das duas tarefas foram o *explicar* e *justificar*. Para isso, utilizou os seus conhecimentos matemáticos relacionados, essencialmente, sobre a divisão envolvendo números racionais representados sob a forma de fração. A aluna recorreu a representações icónicas ou pictóricas e a representações simbólicas ou numéricas. As dificuldades reveladas estão relacionadas com a interpretação do significado do resultado obtido na última questão da segunda tarefa.

4.2. Márcia

Márcia, aluna de nacionalidade portuguesa, tem onze anos e frequenta o 5.º ano de escolaridade pela primeira vez. É um pouco introvertida, mas participa nas aulas e é uma boa comunicadora. Revela uma participação muito organizada e é uma aluna ponderada que pensa sempre antes de falar e de participar. Na realização dos trabalhos de grupo ouve os seus colegas e ajuda-os sempre que necessário.

É uma ótima aluna e mantém um ótimo desempenho (nível 5) à maioria das disciplinas entre as quais está a Matemática.

4.2.1. Tarefa *Problema na distribuição de baguetes*

Raciocínios de Márcia

No início da entrevista, Márcia começa por explicar a estratégia que o seu grupo de trabalho utilizou para descobrir a quantidade de baguete que cada aluno do grupo do Planetário comeu (figura 62).

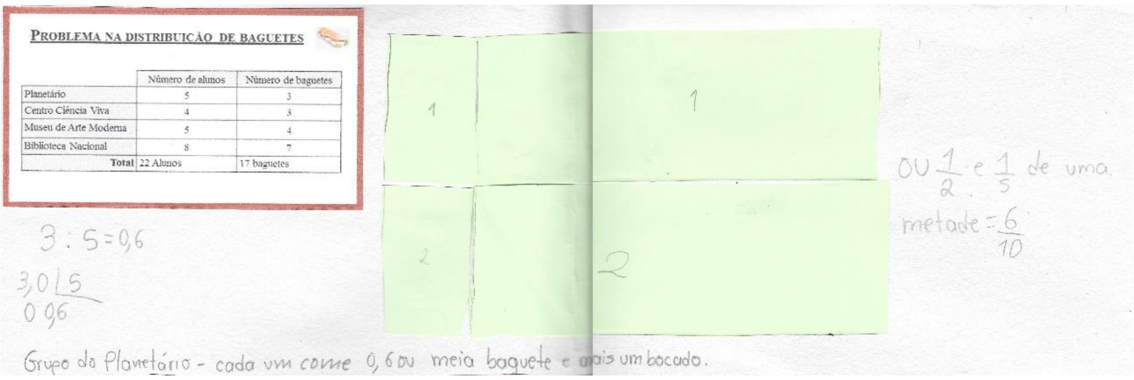


Figura 62 – Estratégias do grupo de Márcia para descobrir a quantidade de baguete para cada aluno do Planetário

A figura 62 evidencia que o grupo utilizou duas estratégias: o algoritmo da divisão e material manipulável que distribuí a todos os grupos de trabalho. Nas tiras verdes (material manipulável), os números 1 e 2 representam a quantidade de baguetes distribuída a dois alunos. O pedaço maior representa metade e o pedaço mais pequeno, um quinto de metade. O extrato 1, ilustra, nas palavras de Márcia, as duas estratégias que utilizaram.

Extrato 1

1. **Márcia:** Ah, havia os grupos que foram à visita e no planetário havia cinco alunos. Mas só eram três baguetes. Então eu fui dividir as três baguetes pelos cinco alunos, que não me deu um número inteiro, deu 0,6. E depois, para ser mais fácil, para se perceber

melhor, fomos… pegámos em três papéis, a fazer que eram baguetes, e fomos dividir. E cada… cada um comia um meio de uma baguete e depois ainda comia mais um quinto de uma metade de uma baguete. Ao todo, comiam seis décimos.

(Transcrição EM1, p. 1)

Analisando este extrato, é possível constatar que Márcia explica que optou por dividir as três baguetes pelos cinco alunos, obtendo o numeral decimal 0,6 (§1). Uma vez que esta foi a estratégia privilegiada para descobrir a quantidade de baguete para cada grupo, pode considerar-se que, implicitamente, os alunos efetuaram uma generalização. Isto porque, ao calcularem o quociente entre o número de baguetes e o número de alunos – recorrendo ao algoritmo da divisão – encontram um processo de determinar a quantidade de baguete que cada aluno come, independentemente do número de alunos e do número de baguetes existentes.

Na exploração da tarefa na aula, o grupo de Márcia não recorre ao material manipulável. Apenas o faz quando incentivados por mim.

O extrato 2 e a figura 63 mostram como o grupo de Márcia descobriu as quantidades de baguete que couberam aos alunos dos grupos do Centro Ciência Viva e do Museu de Arte Moderna.

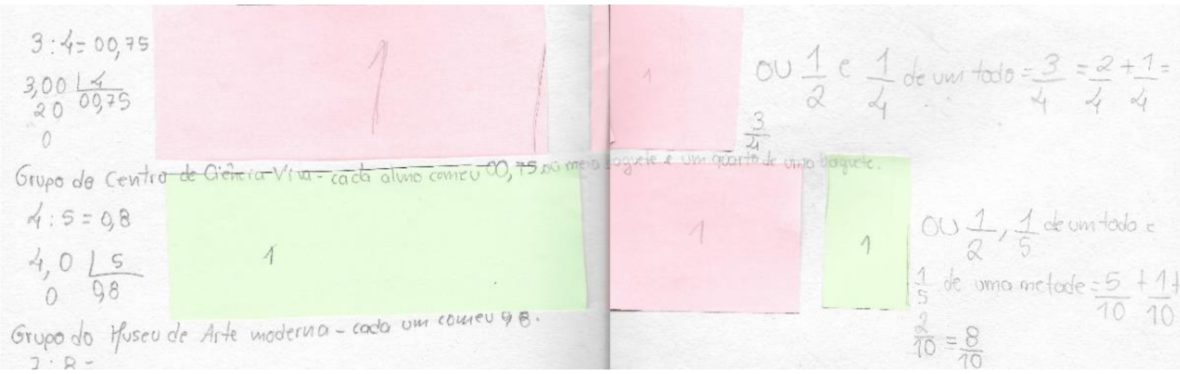


Figura 63 – Estratégias do grupo de Márcia para descobrir a quantidade de baguete para cada aluno do Centro Ciência Viva e do Museu da Arte Moderna

Extrato 2

1. **Márcia:** (…) Depois o grupo do Centro Ciência Viva tinha quatro alunos e tinha três baguetes. E nós fomos dividir as três baguetes pelos quatro alunos, o que nos deu 75 centésimas. E depois fomos dividir outra vez com as baguetes e cada um comia um meio e um quarto de uma baguete inteira, o que nos deu três quartos. Porque era um meio é igual a dois quartos e depois mais um quarto que era da outra baguete inteira que ainda sobrava. E depois, no grupo do Museu da Arte Moderna, havia cinco alunos e quatro baguetes. E nós fomos

dividir as quatro baguetes pelos cinco alunos, o que nos deu oito décimas. E depois fizemos aaahhh… quatro… dividimos as quatro baguetes e cada um comeu metade de uma baguete, um quinto de uma baguete inteira e um quinto de uma metade. Um meio era o mesmo que cinco décimas, um quinto era o mesmo que uma décima e (…) um quinto de uma metade era o mesmo que duas décimas, o que nos deu, ao todo, oito décimas.

(Transcrição EM1, p. 1)

A análise da figura 63 e do extrato 2 evidencia que Márcia torna o seu raciocínio inteligível, explicando, que, quando utilizou o material manipulável, dividiu as baguetes em metades, distribuindo metade a cada aluno e a baguete restante dividiu em quartos, distribuindo também pelos alunos do grupo do Centro Ciência Viva. Apesar de não obter pedaços com o mesmo denominador, sabe que cada aluno come três quartos de baguete "porque era um meio é igual a dois quartos e depois mais um quarto que era da outra baguete inteira que ainda sobrava" (Transcrição EM1, p. 1).

O mesmo acontece com o grupo do Museu da Arte Moderna, onde Márcia, recorrendo ao seu conhecimento sobre frações equivalentes, explica como, com os vários pedaços de papel, chegou ao resultado final.

Relativamente à resposta que escreveram para o grupo do Planetário (figura 62) – "cada um come 0,6 ou meia baguete e mais um bocado" – tentei perceber o que entendiam por "bocado" (extrato 3).

Extrato 3

1. **Professora:** Ok. Então, eu agora tenho uma dúvida. Vamos ver grupo a grupo o que é que tu escreveste. Tu no grupo do planetário escreveste assim: "cada um come 0,6 ou meia baguete e mais um bocado". E eu quero que tu me expliques isto, meia baguete e mais um bocado? (…) Quanto é que é este bocado? Eu não sei…
2. **Márcia:** Um bocado era… era um quinto de uma metade de uma baguete. Havia uma metade que sobrou e como eram cinco alunos, fomos dividir em cinco.
3. **Professora:** Então achas que consegues fazer aí para me explicar? (…)
   (…)
4. **Márcia:** Haviam as baguetes… [começa a desenhar] Ahhh… três baguetes [desenha três baguetes] e eram cinco alunos. Então, nós fomos tentando dividir e fomos dividir ao meio. E deu-nos assim [seis metades para cinco alunos]. E depois um aluno comia isto [uma metade que identifica com o número 1], outro comia isto, outro comia isto, outro isto e depois comiam os cinco [vai identificando cada metade com os números de 1 a

5]. Mas ainda faltava esta metade. E então, como eram cinco alunos, fomos dividir esta metade em cinco pedacinhos. E cada um comeu mais isto.
(…)

5. **Márcia:** (…) Um quinto de uma metade… se uma metade estava dividida em cinco, a baguete toda tinha de estar dividida em dez. Então um meio era o mesmo que cinco sobre dez [vai escrevendo na folha] e depois um… um quinto, era só uma parte de dez. E depois eu fiz as cinco décimas mais uma décima, que deu as seis décimas.

(Transcrição EM1, p. 2, 3)

Analisando este extrato, constata-se que a aluna explica como pensaram para chegar à conclusão que cada aluno comia "um meio e mais um bocado" o que correspondia, conforme referiu, a um meio mais um quinto de uma metade (§2). Para além disso, justifica que um quinto de metade corresponde a um décimo (§5). A figura 64 mostra a representação que fez, durante a entrevista, para ilustrar que um quinto de metade corresponde a um décimo.

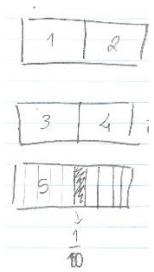


Figura 64 – Estratégia de Márcia para justificar que 1/5 de metade corresponde a 1/10

A figura 64 permite observar que, tal como explicou no §4, o grupo de Márcia começou por dividir as baguetes ao meio, atribuindo uma metade a cada aluno e dividindo a metade restante em cinco, um pedaço para cada aluno.

Em simultâneo à sua explicação, Márcia regista que $\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$. No entanto, o que pretende é registar o que havia explicado, ou seja, que $\frac{1}{5}$ de metade corresponde a $\frac{1}{10}$. Quando questionada, Márcia justifica, através de uma regra aprendida na aula (destacada com um círculo vermelho na figura 65), que $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ e fica com dúvidas sobre se um quinto de uma metade corresponderia, ou não, a uma décima.

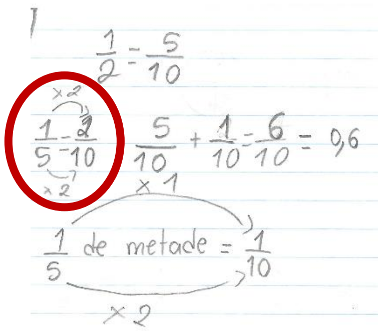


Figura 65 – Justificação de que 1/5 de metade corresponde a 1/10

Posteriormente, identifica corretamente que $\frac{1}{5}$ de metade corresponde a $\frac{1}{10}$, mas não associa esta relação à multiplicação ou à divisão de números racionais, o que não é de estranhar porque este conteúdo ainda não tinha sido trabalhado nas aulas no momento da entrevista. Depois, Márcia justifica que um quinto não representa a mesma quantidade que um quinto de metade porque um quinto "é de uma unidade toda e este é só de metade" (Transcrição EM1, p. 5).

A figura 66 representa os cálculos efetuados por Márcia para descobrir a quantidade de baguete que coube a cada aluno do grupo do Planetário.

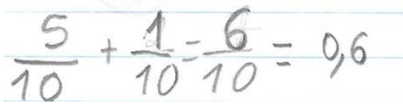


Figura 66 – Cálculo da quantidade de baguete que cada aluno do grupo do Planetário come

A figura 66 evidencia que a aluna calculou a quantidade de baguete utilizando as frações correspondentes a cada parte distribuída aos alunos. Márcia explicou que o resultado obtido correspondia ao quociente da divisão entre 3 e 5 "porque seis décimos, se formos transformar em número decimal, é 0,6" (*idem*, p. 6).

Para o Centro Ciência Viva, o grupo de Márcia respondeu que "cada aluno come 0,75 ou meia baguete e um quarto de uma baguete" o que corresponde a três quartos (figura 67).

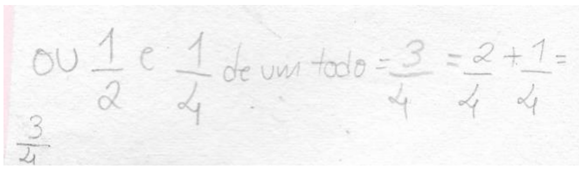


Figura 67 – Fração que representa a quantidade de baguete que cada aluno do grupo do Centro Ciência Viva come

A figura 67 mostra como os alunos chegaram à fração que representava a quantidade de baguete que coube a cada aluno do grupo do Centro Ciência Viva, relacionando a fração $\frac{1}{2}$ com a fração equivalente $\frac{2}{4}$ e a parte que descreve como "$\frac{1}{4}$ de um todo" à fração $\frac{1}{4}$. O mesmo é ilustrado no extrato 4.

Extrato 4

1. **Professora:** Pronto, ok. Então agora, sobre o grupo da Ciência Viva, tu escreveste "cada aluno come 0,75 ou meia baguete e um quarto de uma baguete". Como é que eu agora sei que um meio e um quarto de uma baguete são três quartos. Explica lá outra vez.
   (…)
2. **Márcia:** … um meio é igual a dois… é igual a dois vezes dois [numerador] e dois vezes… Ah! Um vezes dois [numerador] e dois vezes dois [denominador], que nos ia dar dois quartos [efetua os cálculos na folha à medida que vai explicando].
3. **Professora:** Então estas frações…
4. **Márcia:** São equivalentes. E depois os dois quartos mais um quarto de uma baguete, ia dar os três quartos [escreve o cálculo ao mesmo tempo que explica].

(Transcrição EM1, p. 6)

O extrato 4 evidencia que Márcia sabe que, para adicionar as frações, é necessário que ambas tenham o mesmo denominador. Com efeito, a aluna explica como procedeu para encontrar as frações equivalentes com o mesmo denominador (§2) e, em seguida, como adicionou as duas frações (§4) (figura 68).

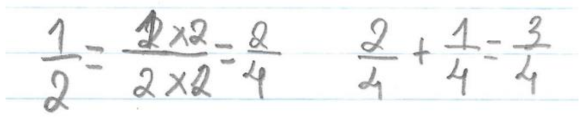


Figura 68 – Forma como Márcia explicou como obtiveram a fração 3/4

Relativamente ao Museu de Arte Moderna, o grupo de Márcia responde que "cada um comeu 0,8 ou um meio, um quinto de um todo e um quinto de uma metade" (Transcrição EM1, p. 6) registando a expressão numérica correspondente (figura 69).

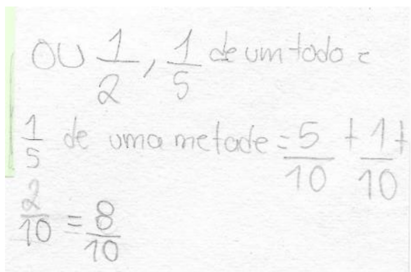


Figura 69 – Resposta de Márcia para o grupo do Museu de Arte Moderna

O extrato 5, evidencia a forma como o grupo de Márcia pensou para chegar às frações representadas na figura 69.

Extrato 5

1. **Professora:** Ok. Então agora este, que é mais complicado, o Museu de Arte Moderna, tu escreveste aqui "cada um comeu 0,8 ou um meio, um quinto de um todo e um quinto de uma metade" e depois passaste logo para cinco sobre dez, mais um sobre dez, mais dois sobre dez (…). Como é que tu pensaste?
2. **Márcia:** Porque, para ficarem todos com o mesmo denominador para eu poder somar eu pensei que um meio é igual a cinco décimas. Porque se eu fizesse dois vezes cinco [denominador] e um vezes cinco [numerador] ia-me dar as cinco décimas. E depois, para dar os outros dois também, fiz um quinto que era igual a… aqui é vezes dois e aqui é um vezes dois que me deu dois. E depois o outro quinto de uma metade… (...)É igual a um sobre dez.

(Transcrição EM1, p. 6, 7)

A análise deste extrato permite constatar que Márcia explica que, para adicionar frações, é necessário que todas tenham o mesmo denominador. Além disso, a aluna justifica como encontrou as frações equivalentes (§2).

Quando questionada sobre se *a distribuição de baguetes foi justa?*, Márcia revela saber que não o foi. A figura 70 ilustra a representação elaborada por Márcia, durante a entrevista, para justificar que a distribuição de baguetes não foi justa.

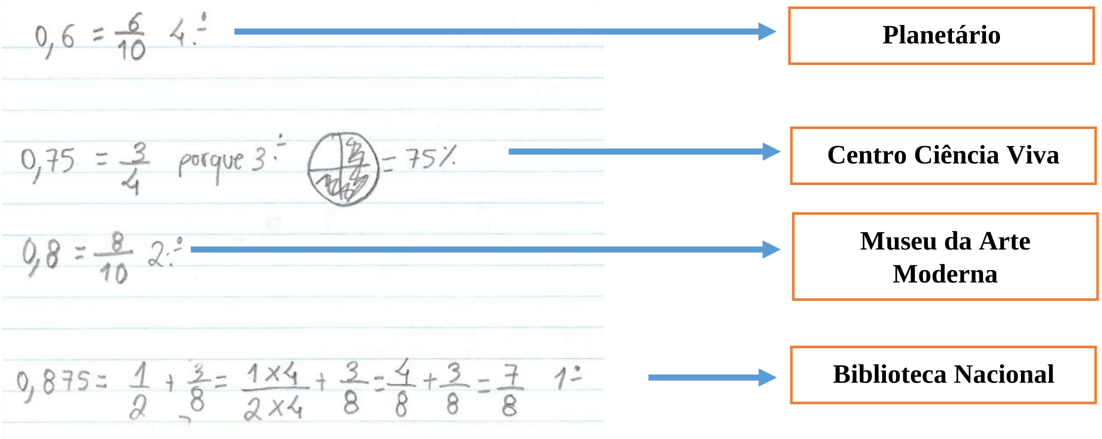


Figura 70 – Comparação da quantidade de baguete comida pelos alunos de cada grupo

A figura 70 e o extrato 6 permitem evidenciar que para Márcia, apesar de saber a fração correspondente a cada grupo da visita de estudo, a utilização do algoritmo da divisão e, consequentemente, dos números decimais, permite uma comparação mais imediata das quantidades de baguete que couberam a cada aluno dos diferentes grupos.

Extrato 6

1. **Professora:** (…) Então sendo assim qual foi o grupo que comeu mais? O que é que tens a dizer sobre isso? Achas que a distribuição foi justa, não foi justa…
2. **Márcia:** Acho que não foi justa.
3. **Professora:** Porquê?
4. **Márcia:** Porque acho que houve grupos que comeram mais do que outros.
5. **Professora:** Quais foram os grupos que comeram mais?
6. **Márcia:** Primeiro foi este, foi o da Biblioteca, depois foi o Museu da Arte Moderna, depois foi o da Ciência Viva e depois foi este, o do Planetário.
7. **Professora:** Ok. E como é que sabes? Como é que fazes essa comparação? Pelas frações ou pelos números decimais?
8. **Márcia:** Pelos números decimais.

(Transcrição EM1, p. 10, 11)

Analisando este extrato, constata-se que Márcia explica que a distribuição não foi justa (§2, §4), identificando, por ordem decrescente, os grupos que comeram mais (§6). Além disso, Márcia revela que efetuou a comparação utilizando os números decimais (§8).

Recursos usados por Márcia

A análise da atividade matemática de Márcia, associada à resolução do problema na aula e à exploração realizada na entrevista, evidencia que mobilizou recursos diversos que podem ser estruturados em dois eixos: (i) conceitos e procedimentos matemáticos, (ii) representações.

No que se refere ao primeiro eixo, destaco os conhecimentos associados às representações dos números racionais. É evidente que a aluna privilegia a utilização dos números decimais, o que acaba por lhe trazer várias vantagens na resolução da tarefa. No entanto, também consegue representar as quantidades de baguetes usando frações e resolver a tarefa utilizando esta representação, tal como é possível ver nas estratégias utilizadas (figura 62 e 63). Para além disso, Márcia evidencia conhecer as relações entre estas duas representações quando refere, por exemplo, que $\frac{6}{10} = 0{,}6$ (figura 66). O mesmo acontece no final da tarefa quando relaciona os números decimais, as frações e percentagens (figura 71).

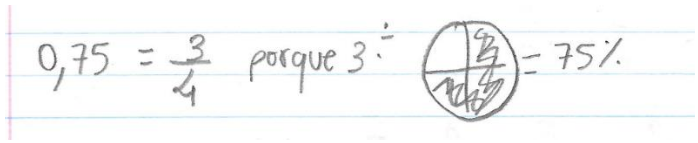


Figura 71 – Relação entre número decimal, fração e percentagem

Um outro recurso que mobiliza é o seu conhecimento relativamente à adição de frações. Por exemplo, no extrato 5 a aluna explica que para poder adicionar as frações, necessita que as frações tenham o mesmo denominador (§2). A propósito da adição de frações, revela, também, o seu conhecimento sobre frações equivalentes, como ilustra o extrato 4 (§2) e a figura 68.

Márcia revelou um grande à vontade, no trabalho com o algoritmo da divisão enquanto procedimento de cálculo, estratégia privilegiada na resolução da tarefa.

No que diz respeito às representações utilizadas, o grupo de Márcia utilizou representações simbólicas (usando a categorização de Brunner), ou representações numéricas, seguindo a caracterização de Preston e Garner. Além disso, os alunos recorreram também às representações ativas ao utilizarem material manipulável. Na entrevista, a aluna utiliza também representações icónicas ou pictóricas consoante se adote, respetivamente, a classificação de Brunner ou de Preston e Garner, ao recorrer a esquemas e desenhos para apoiar o seu raciocínio (por exemplo, figura 64, Grupo do Planetário).

Dificuldades de Márcia

Na exploração da tarefa na entrevista, Márcia revela dificuldade em justificar que um quinto de metade era igual a uma décima. Tal como referi na secção *Raciocínios de Márcia*, apesar de saber explicar como havia chegado à fração (extrato 3, §5), a aluna enganou-se por duas vezes na notação. Começa por escrever que $\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ querendo referir-se ao quinto de uma metade. Quando questionada por mim, percebeu que a representação estava errada porque, na realidade, $\frac{1}{5}$ corresponde a $\frac{2}{10}$ (figura 72).

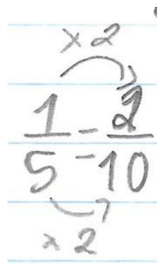


Figura 72 – Justificação de que 1/5=2/10

Depois de justificar, recorrendo a uma regra que aprendeu na aula, que a fração $\frac{1}{5}$ corresponde a $\frac{2}{10}$, reconhece que o quinto que pretendia representar, “era só de metade” (Transcrição EM1, p. 4). Para apoiar o seu raciocínio, Márcia opta por recorrer um esquema onde representa um quinto e um quinto de metade (figura 73).

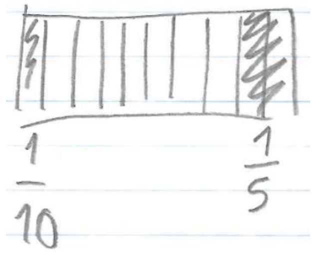


Figura 73 – Representação de um quinto e um quinto de metade (1/10)

A figura 73 evidencia que Márcia sabe que $\frac{1}{5}$ da baguete inteira corresponde, a dois décimos. Além disso, pinta um décimo que corresponde a um quinto de metade. Apesar disso, esta dificuldade volta a surgir posteriormente, a propósito do grupo do Museu de Arte Moderna. O extrato 7 ilustra o momento em que Márcia volta a escrever que um quinto corresponde a uma décima.

Extrato 7

1. **Márcia:** (…) E depois o outro quinto de uma metade… [escreveu $\frac{1}{5}$ =… querendo dizer $\frac{1}{5}$ de uma metade] (…) É igual a um sobre dez [escreve $\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$]
2. **Professora:** Mas porquê? Essa parte é que tu não me estás a convencer.
   (…)
3. **Márcia:** Porque a unidade estava dividida em dez. E depois, se é um quinto de uma metade, tinha que dividir ao meio e estavam lá cinco partes. É só um quinto de uma metade. Mas se fosse de uma baguete toda era um décimo.
4. **Professora:** Certo. Mas tu quando escreves que $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ e $\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$, este quinto que está aqui [na igualdade $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$] e este [da expressão $\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$], para mim, que estou a ver, são iguais. Como é que eu os posso distinguir? Porque isto [$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$] é verdade.
5. **Márcia:** Hum, hum.
6. **Professora:** Agora, se eu tiver isto assim [$\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$] é verdade? Já vimos que… lá em cima vimos o quê? Aqui [no grupo do Planetário]
7. **Márcia:** Que…
8. **Professora:** Que não é verdade.
9. **Márcia:** Não.

10. **Professora:** Então o que é que eu tenho que escrever aqui [para tornar verdade a expressão $\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$]?
11. **Márcia:** Que é um quinto de uma metade.

(Transcrição EM1, p. 6, 7)

Analisando o extrato 7, constato que Márcia refere, justificando, que $\frac{1}{5}$ de metade corresponde a $\frac{1}{10}$ (§1, §3). No entanto, não consegue traduzir corretamente em linguagem simbólica esta ideia (§1, §7 e §11).

Em suma, constata-se que Márcia evidenciou atividades do raciocínio matemático ao *explicar*, *justificar* as opções tomadas pelo grupo e ao *generalizar*, implicitamente, uma estratégia de resolução do problema. Para tal, mobilizou os seus conhecimentos matemáticos associados ao algoritmo da divisão, números decimais, adição de frações e frações equivalentes. Para apoiar o seu raciocínio a aluna e o seu grupo recorreram a representações simbólicas ou numéricas, icónicas ou pictóricas e também a representações ativas. Traduzir em linguagem simbólica a ideia de que um quinto de metade correspondia a uma décima revelou-se uma dificuldade para Márcia.

4.2.2. Tarefa *Terrenos nas Aldeias*

Raciocínios de Márcia

No início da entrevista, apresentei a Márcia o enunciado da tarefa e o respetivo cartaz elaborado pelo seu grupo durante a exploração feita na sala de aula. Depois, pedi-lhe que falasse sobre a resolução apresentada no cartaz.

Márcia começou por explicar como o grupo havia pensado para dividir as aldeias. A figura 74 e o extrato 1 ilustram a forma como Márcia e o grupo pensaram relativamente à Aldeia Amarela.

Figura 74 – Divisão da Aldeia Amarela

Extrato 1

1. **Márcia:** Queremos saber qual é a fração de terreno que tem cada família. E… isto é, nas duas aldeias. A aldeia amarela eu fui dividir a aldeia toda em quatro, com estas medidas da família Faro, e depois percebi que a família Faro tinha um quarto ou dois oitavos e a família Ilídio tinha um oitavo porque só tinha metade da família Faro. A família Lopes tinha três oitavos e a família Moura tinha dois oitavos ou um quarto. Porque se esta parte laranja [um oitavo] passasse para aqui [para cima do outro oitavo] ficava igual à família Faro.

(Transcrição EM2, p. 1)

Analisando a figura 74, constata-se que o grupo optou por colar o material manipulável na folha, reconstruindo a aldeia e, posteriormente, dividindo-a em quatro partes iguais. No extrato 1, a aluna explica que dividiu a aldeia em quartos, utilizando como unidade de medida o terreno da família Faro. Além disso, Márcia reconhece que poderia ter dividido a aldeia em quartos utilizando, também, o terreno da família Moura como unidade de medida. A aluna justifica que optaram por utilizar o terreno da família Faro "porque, logo à primeira vista, pareceu-me mais fácil" (Transcrição EM2, p. 2).

Contudo, uma vez que uma das famílias tinha um pedaço mais pequeno, o grupo decidiu posteriormente, dividir a aldeia em oitavos (extrato 2).

Extrato 2

1. **Professora:** Hum, hum… E depois dividiste em quartos, porque é que dividiste em oitavos a seguir? Explica-me lá.
2. **Márcia:** Porque pareceu-me que a família Ilídio tinha metade. Então dividi depois ao meio e a família Ilídio só tinha um oitavo. E depois a família Lopes também era mais fácil contar em oitavos, tinha três oitavos, e a família Moura tinha dois oitavos ou um quarto.
3. **Professora:** Exatamente. Então tu só dividiste em oitavos por causa da família Ilídio? Porque viste que a família Ilídio era metade da família Faro.
4. **Márcia:** Sim.
5. **Professora:** Então foste dividir tudo ao meio? (…) Para fazer o quê? Porque é que dividiste ao meio?
6. **Márcia:** Porque… aaah… a família Ilídio era metade. Então dividi isto tudo ao meio para ficar tudo com a mesma medida da família Ilídio.

(Transcrição EM2, p. 2)

O extrato 2 evidencia que Márcia justifica porque dividiram a aldeia em oitavos (§2). A aluna explica, também, que bastou dividir a aldeia ao meio ficando com partes do mesmo tamanho do terreno da família Ilídio, o terreno mais pequeno (§7) e que descobriram as frações de terreno de cada família contando os oitavos correspondentes (§2), resultados esses que registaram na resolução apresentada (figura 75).

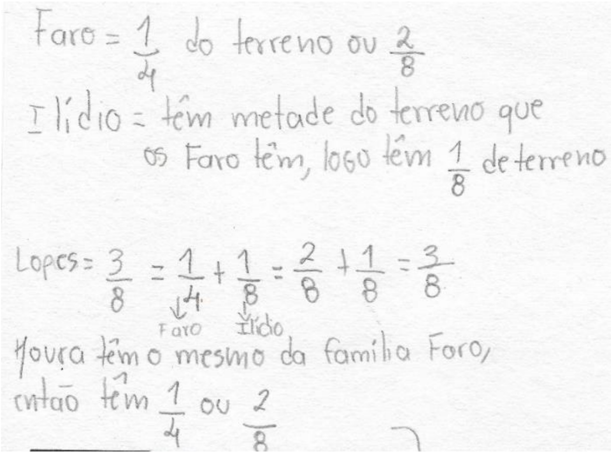


Figura 75 – Frações de terreno das famílias da Aldeia Amarela

A figura 75 revela que Márcia e o grupo não só escreveram o resultado proveniente da sua contagem, como também, representaram simbolicamente as expressões numéricas que lhes permitiram obter as frações de terreno das várias famílias.

O extrato 3 ilustra, nas palavras da aluna, como o grupo pensou para descobrir a quantidade de terreno da família Lopes.

Extrato 3

1. **Professora:** Então depois aqui tu escreveste que os Lopes têm três oitavos ou um quarto mais um oitavo. Como é que tu sabes que é um quarto mais um oitavo?
2. **Márcia:** Porque um quarto é o mesmo que dois oitavos se multiplicarmos por dois. Então é a mesma coisa que dois oitavos, mais um oitavo que vai dar os três oitavos.
3. **Professora:** Então se multiplicarmos um quarto por dois, dá dois oitavos.
4. **Márcia:** [acena que sim]
5. **Professora:** Então escreve lá o que tu disseste. Tu disseste "se multiplicar um quarto por dois dá dois oitavos". Mostra lá…
6. **Márcia:** [escreve e calcula $\frac{1\times2}{4\times2}=\frac{2}{8}$] Um vezes dois, dois. Quatro vezes dois, oito.
7. **Professora:** Ok. Então multiplicar um quarto por dois é fazer isto [que fez anteriormente]?
8. **Márcia:** É multiplicar o um por dois e o quatro por dois.
9. **Professora:** Ah… E isso é fazer… não é multiplicar um quarto por dois.
10. **Márcia:** Não.

(…)

11. **Professora:** Exatamente. Então mas, eu já percebi que tu sabes que um quarto são dois oitavos. Mas como é

que tu, olhando para ali, pensaste que ter três oitavos era a mesma coisa que ter um quarto e um oitavo? O que é que te levou a escrever aqui [na resolução] um quarto e um oitavo?

12. **Márcia:** Porque os Lopes, se fizéssemos assim por cima, ia ter o mesmo que a família Faro. E depois tinha mais um oitavo, que era o mesmo que a família Ilídio.

(Transcrição EM2, p. 2, 3)

A análise do extrato 3 evidencia que Márcia justifica a expressão numérica que utilizou para calcular a quantidade de terreno da família Lopes (§2). Para além disso, explica como chegou às frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ (§12). No entanto, embora pense corretamente (§6, §8), a aluna não utiliza, com rigor, a linguagem matemática quando refere que, se multiplicar $\frac{1}{4}$ por dois, obtém $\frac{2}{8}$ (§3).

Quando questionada sobre como é que pode justificar que a família Faro tem a mesma quantidade de terreno da família Moura, tendo em conta que os terrenos são diferentes, a aluna justifica que "os dois a mesma fração. Têm dois oitavos. (…) Porque imaginei esta parte do terreno da família Moura aqui no lugar desta da família Lopes. Ia ficar igual à da família Faro. Então se a família Faro tinha dois oitavos, esta também tinha dois oitavos." (Transcrição EM2, p. 3). A figura 76 ilustra o cálculo efetuado por Márcia para justificar a afirmação anterior.

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$$

Figura 76 – Justificação de que o terreno da família Moura é o dobro do terreno da família Ilídio, com recurso à adição

Ao ser questionada sobre o facto de referir que o terreno da família Moura é "duas vezes a família Ilídio" (Transcrição EM2, p. 3), a aluna recorre à adição (figura 76) porque sabe que "a família Ilídio tem um oitavo e a família Moura tem um oitavo mais um oitavo, que ia dar os dois oitavos" (Transcrição EM2, p. 4).

Na figura 77, Márcia justifica novamente que o terreno da família Moura é o dobro da família Castro, desta vez utilizando a multiplicação por dois.

$$\frac{1}{8}\times\frac{2}{1}=\frac{2}{8}$$

Figura 77 – Justificação de que o terreno da família Moura é o dobro do terreno da família Ilídio, com recurso à multiplicação

O extrato 4 e a figura 78 ilustram a forma como o grupo de Márcia pensou para dividir a Aldeia Branca.

Extrato 4

1. **Professora:** E aqui [aldeia branca] já não dividiram em oitavos. Porque é que fizeram assim? Dividiram em quê?
2. **Márcia:** Em sextos. Porque fomos a partir da família Castro. Fomos dividir tudo em sextos e depois a família Castro só tinha um sexto, a família Duarte tinha dois e a família Alves tinha três.
3. **Professora:** E porque é que dividiram em sextos? (…) (…)
4. **Márcia:** Porque (…) fizemos por tentativa. Dividir todos igual à família Castro e depois de dividirmos percebemos que dava para dividir em seis e ia dar certo.
5. **Professora:** E porque é que utilizaram a família Castro, por exemplo? Podiam ter utilizado a família Duarte.
6. **Márcia:** Porque… Porque nós primeiro dividimos na família Duarte. Mas depois fomos tentar dividir tudo ao meio.
7. **Professora:** Porquê?
8. **Márcia:** Porque a família Castro depois não ia chegar a ter um terço. Então dividimos ao meio. Ela ia ter um sexto, não ia ter um terço. Então para ser mais fácil, pensámos em dividir em sextos.
9. **Professora:** Hum, hum. Ok. Então, a família Castro em relação à família Duarte…
10. **Márcia:** É metade.

(Transcrição EM2, p. 4)

A análise do extrato 4 evidencia que Márcia explica que dividiram a aldeia em sextos, tendo como unidade de medida o terreno mais pequeno, ou seja, o terreno da família Castro (§2) revelando que esta não foi a primeira opção do grupo (§6-§8). Explica que, primeiro, dividiram a aldeia em terços. No entanto, à semelhança do que havia acontecido na Aldeia Amarela, um dos terrenos era mais pequeno. Por essa razão, optaram por utilizá-lo como unidade de medida na divisão da aldeia (§8).

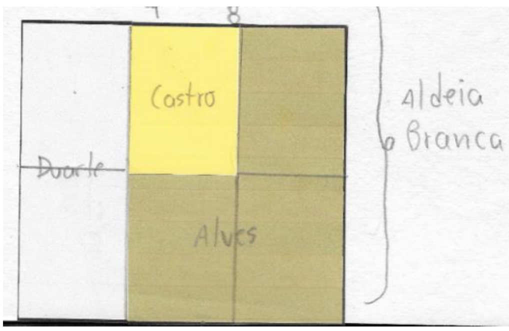


Figura 78 – Divisão da Aldeia Branca

Márcia reconhece, também, que o terreno da família Castro é metade do da família Duarte, justificando este facto com recurso ao material manipulável (extrato 5).

Extrato 5

1. **Professora:** Como é que podes provar isso? Como é que podes… É que aqui também disseste a mesma coisa: que a família Ilídio é metade da família Faro. E agora dizes que a família Castro é metade da família Duarte. Como é que podemos provar isso?
2. **Márcia:** Porque se houvesse dois da família Castro [dois pedacinhos de papel], se houvessem dois…
3. **Professora:** Eu tenho aqui… Toma, podes usar duas famílias Castro. [dando-lhe mais material manipulável que representa os terrenos]
4. **Márcia:** Se houvesse dois da família Castro e fizéssemos assim, ia dar o mesmo que a família Ilídio.
5. **Professora:** Que a família?
6. **Márcia:** Ah… Que a família Duarte.
7. **Professora:** Duarte. Então provas com… através de sobreposições. Foi isso que vocês fizeram naquele dia?
8. **Márcia:** Sim.

(Transcrição EM2, p. 5)

Em análise, os §2 e §4, evidenciam que Márcia explica como pensou para justificar, com recurso ao material manipulável, que o terreno da família Castro era metade do da família Duarte, afirmando que tinham feito sobreposições com os vários terrenos (§7, §8).

Quando questionada sobre outra estratégia para justificar a relação entre as quantidades de terreno destas duas famílias, Márcia explica que "a família Duarte tem um terço. E se formos encontrar uma fração equivalente com o denominador seis, ia dar dois sextos. E a família Castro só tem um sexto. E um sexto mais um sexto ia dar dois sextos" (Transcrição EM2, p. 5).

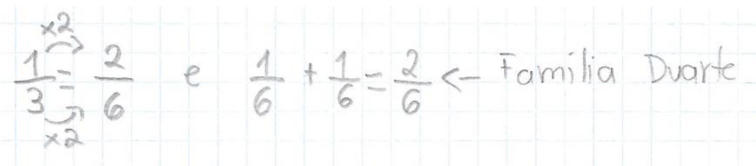


Figura 79 – Justificação de que o terreno da família Castro é metade do terreno da família Duarte

A figura 79 ilustra os passos seguidos por Márcia, e explicados anteriormente, para justificar que o terreno da família Castro é metade do terreno da família Duarte. A aluna explica que "um sexto, que é o terreno da família Castro, se juntarmos, se somarmos outra vez mais um sexto, vai dar o terreno da família Duarte. E isso prova que um sexto, que o terreno da família Castro, é metade" (Transcrição EM2, p. 6).

O extrato 6 e as figuras 80 e 81 ilustram duas estratégias utilizadas por Márcia para explicar que o terreno da família Castro corresponde a metade do terreno da família Duarte.

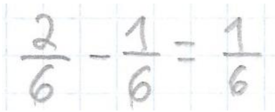


Figura 80 – Justificação, através da subtração, que a família Castro tem metade do terreno da família Duarte

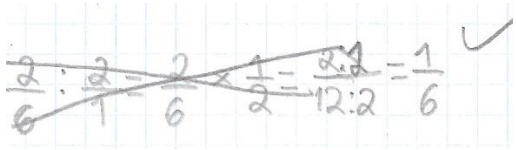


Figura 81 – Justificação, através da divisão, que a família Castro tem metade do terreno da família Duarte

Extrato 6

1. **Professora:** (…) Mas como é que tu me podias explicar para eu perceber porque é que um sexto mais um sexto que dá dois sextos, indica que um sexto é metade disto [$\frac{2}{6}$]? (…)
2. **Márcia:** [Escreve e resolve a expressão $\frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$]
3. **Professora:** E então?
4. **Márcia:** Porque ao terreno da família Duarte, se fossemos tirar o terreno da família Ilídio ia-nos dar o mesmo valor que a família Ilídio.
5. **Professora:** Ilídio não, Castro.
6. **Márcia:** Ahh... a família Castro.
7. **Professora:** Hum, está bem. Mesmo assim continuo a achar que havia outra maneira de me explicares isso.
8. **Márcia:** [escreve $\frac{2}{6} \div 2$]
9. **Professora:** E agora, o que é que estás a fazer?
10. **Márcia:** [Resolve corretamente a divisão mas obtém $\frac{2}{12}$] Não… [põe uma cruz sobre o que escreveu – figura 81]
11. **Professora:** Então, o que é que fizeste? Porque é que riscaste?

(…)

12. **Márcia:** Era os dois sextos…
13. **Professora:** Sim.
14. **Márcia:** Da família Duarte a dividir por dois.
15. **Professora:** E dava-te quanto?
16. **Márcia:** Dava dois doze avos.
17. **Professora:** E tinha que dar quanto?
18. **Márcia:** Tinha que dar um sexto.
19. **Professora:** Então e pensa lá em relação ao dois doze avos…
20. **Márcia:** [imediatamente vê que pode simplificar a fração $\frac{2}{12}$ e obter $\frac{1}{6}$]

21. **Professora:** Então está certo ou está errado?
22. **Márcia:** Está.
23. **Professora:** Então o que é que fizemos aqui, explica-me lá.
24. **Márcia:** Foi os dois sextos da família Duarte a dividir por dois e depois deu dois doze avos. Mas fui tornar numa fração irredutível e deu-me um sexto.

(Transcrição EM3, p. 6, 7)

Analisando o extrato 6, constato que Márcia explica como pensou para efetuar a subtração (figura 80) de forma a justificar que a quantidade de terreno da família Duarte é metade da do terreno da família Castro (§4). Além disso, reconhece também que o poderia fazer recorrendo à divisão por dois (§8, §14). No entanto, quando efetua o cálculo, obtém a fração $\frac{2}{12}$ e assume que está errado (§10-§18). Posteriormente, identifica que as frações $\frac{2}{12}$ e $\frac{1}{6}$ são equivalentes e conclui a sua justificação (§20-§24).

No decorrer da resolução da tarefa na sala de aula, Márcia referiu um detalhe importante: que o terreno da família Alves era metade da Aldeia Branca. Ao ser questionada sobre essa afirmação, justifica dizendo que "sim. Porque a família Duarte mais a família Castro vai dar o mesmo… tem a mesma forma que a família Alves. Têm a mesma… a mesma fração" (Transcrição EM2, p. 7). Isto porque, como explica de seguida, "a família Duarte tem dois sextos e a família Castro tem um sexto e a família Alves tem três sextos. E se fizermos um sexto mais dois sextos, vai-nos dar os três sextos" (*idem*, p. 8).

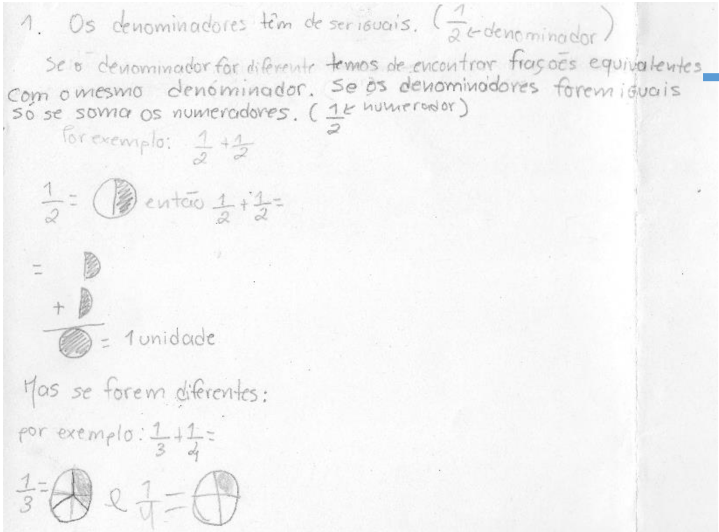
O extrato 7 ilustra, nas palavras de Márcia, o que o grupo pensou sobre o algoritmo que conjeturaram para adicionar e subtrair frações.

Extrato 7

1. **Professora:** Então o que é que estás a fazer? Mostra lá…
2. **Márcia:** Que se quisermos somar, por exemplo, um meio mais um quarto, tem os denominadores diferentes. Então vamos encontrar uma fração equivalente com denominador quatro. E fiz… aaahh… um vezes dois sobre dois vezes dois mais um quarto, que era a mesma coisa que os dois quartos mais um quarto. E agora que já têm denominadores iguais já podemos somar e deu os três quartos.
3. **Professora:** Pronto. Diz-me … isso é o que diz a regra, certo?
4. **Márcia:** [acena que sim]

(Transcrição EM2, p. 8)

A aluna explica que para adicionar frações é necessário que ambas tenham o mesmo denominador e que, caso contrário, é necessário encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador (§2). No cartaz apresentado pelo grupo (figura 82) é possível constatar que, para além de apresentarem um algoritmo, os alunos testaram-no recorrendo a exemplos, ou seja, tentaram justificar a sua validade.



"1. Os denominadores têm de ser iguais. Se o denominador for diferente temos de encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador. Se os denominadores forem iguais só se soma os numeradores"

Figura 82 – Algoritmo apresentado pelo grupo de Márcia para adicionar frações

Na entrevista, a aluna aplicou o algoritmo conjeturado pelo grupo com um outro caso, clarificando como este funcionava (figura 83).

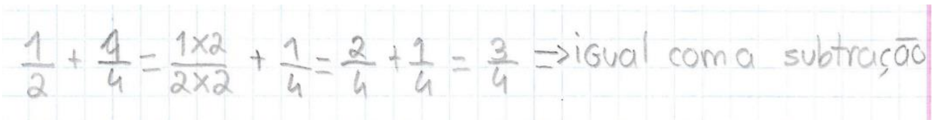


Figura 83 – Exemplo de como adicionar e subtrair frações

Observando a figura 83, contata-se que a aluna utilizou como exemplo uma adição de frações com denominadores diferentes, efetuando todos os passos necessários até obter a soma representada sob a forma de fração. No final, indicou que os procedimentos eram os mesmos para a subtração de frações.

Quando questionada sobre o facto da necessidade das frações terem denominadores iguais, Márcia tenta justificá-lo dizendo: "porque é para podermos somar. Porque depois, se somarmos ou subtrairmos duas frações com denominadores diferentes, não sabemos qual é o denominador que vai ficar" (Transcrição EM2, p. 8). Apesar de revelar alguma dificuldade em justificar a sua afirmação, Márcia refere, no final da entrevista, que as frações têm de ter o mesmo denominador para "ficar tudo dividido da mesma maneira e depois podermos somar ou subtrair" (*idem*, p. 9) e que "temos de encontrar denominadores iguais porque (…) para podermos somar ou subtrair (…) as unidades têm de estar divididas à mesma… em quantidades iguais" (*idem*, p. 10), o que exemplifica através de um esquema (figura 84) que representa a adição registada na figura 83.

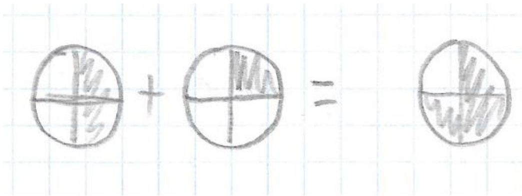


Figura 84 - Adição de frações com denominadores diferentes

A aluna representa ambas as frações usando dois círculos distintos e, em seguida, divide o círculo onde está representado a fração $\frac{1}{2}$ em quatro partes, para que fique com o mesmo número de partes do outro círculo. Posteriormente usa um novo círculo (o da direita) para representar a soma de $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$.

Recursos usados por Márcia

Para resolver esta tarefa, Márcia mobilizou vários conhecimentos matemáticos associados aos números racionais representados sob a forma de fração e, também, evidenciou mobilizar conhecimentos sobre relações numéricas importantes.

Utilizou os seus conhecimentos sobre a noção de dobro, quando justifica que o terreno da família Moura é o dobro do terreno da família Ilídio, recorrendo a estratégias distintas: com recurso à adição e à multiplicação (figuras 76 e 77). Recorre à adição (figura 76) porque sabe que, para calcular o dobro de uma quantidade, basta adicionar essa mesma quantidade duas vezes. No caso da multiplicação (figura 77), a aluna evidencia saber que para calcular o dobro de uma quantidade, basta multiplicá-la por dois.

O mesmo acontece quando tenta provar que a família Castro possui metade do terreno da família Duarte (figuras 79, 80 e 81). Em primeiro lugar, a aluna recorre à adição. Esta estratégia assenta no que sabe sobre a relação dobro/metade e mostra que, adicionando metade de uma quantidade com outra metade da mesma quantidade, obtém o dobro de uma metade (figura 79). No caso da subtração, estratégia utilizada em segundo lugar, a aluna sabe que, se a um valor subtrair a sua metade, obtém a outra metade (figura 80). Quando utiliza a divisão, Márcia sabe que, para calcular a metade de um valor, basta dividi-lo por dois (figura 81).

Relativamente à adição e subtração de frações, Márcia sabe que, para que possa efetuar qualquer uma destas duas operações, é necessário que as frações envolvidas tenham os mesmos denominadores, o que explicou no extrato 7, §2 e ilustrou nas figuras 82, 83 e 84.

No que diz respeito às representações utilizadas por Márcia e pelo seu grupo, é possível afirmar que estas consistiram em representações icónicas e simbólicas, segundo a designação de Bruner, ou pictóricas e numéricas, de acordo com a categorização de Preston e Garner. Além disso, Márcia e o grupo recorreram às representações ativas, quando utilizaram o material manipulável (figura 85).

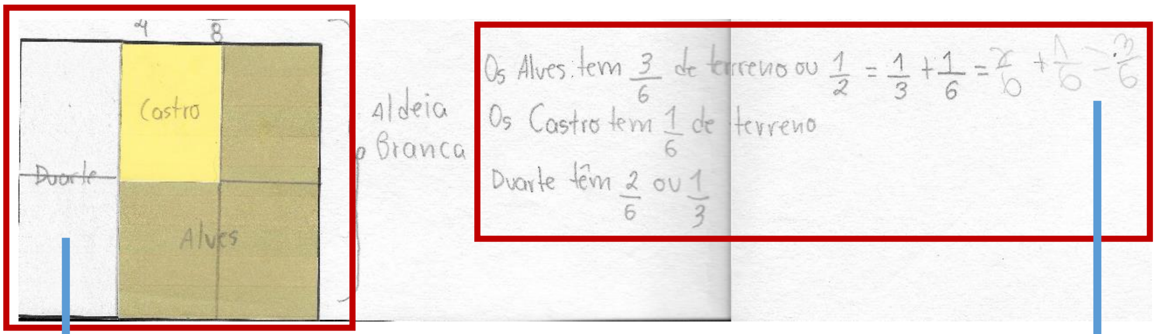


Figura 85 – Representações utilizados por Márcia e restante grupo

Na entrevista, Márcia também utiliza as três representações: ativas, simbólicas ou numéricas (figuras 79 e 80, por exemplo), icónicas ou pictóricas (figura 84, por exemplo).

Dificuldades de Márcia

Durante a entrevista, Márcia revela dificuldades quando tenta justificar porque é que, para adicionar ou subtrair frações, estas têm de ter denominadores iguais, revelando-se um pouco hesitante (extrato 8).

Extrato 8

1. **Professora:** Se nós pensarmos um bocadinho sobre a regra, para que é que serve encontrar uma fração equivalente com o mesmo denominador? Pensa lá um bocadinho. Achas que é só porque a regra diz?
2. **Márcia:** Não. Porque é para podermos somar. Porque depois, se somarmos ou subtrairmos duas frações com denominadores diferentes não sabemos qual é o denominador que vai ficar.
   (…)
3. **Márcia:** [desenha dois círculos, um divide em dois e pinta metade]
4. **Professora:** Então eu agora queria juntar isto mais [apontando para o círculo dividido em duas partes] mais isto [apontando para o círculo dividido em quatro partes] e segundo a regra eu sei que tenho de encontrar denominadores iguais. Mas porquê? O que é que significa ter denominadores iguais?

5. **Márcia:** A unidade está dividida toda no mesmo número… em porções iguais. (…) Para ficar tudo à mesma quanti… à mesma… ficar tudo dividido da mesma maneira e depois podermos somar ou subtrair. (…)
6. **Professora:** Então agora explica-me lá isso tudo. O que eu te expliquei, tens de me explicar tu.
7. **Márcia:** Temos de encontrar denominadores iguais porque não dá para… aaahhh… porque para podermos somar ou subtrair, a unidade… as unidades têm de estar divididas à mesma… em quantidades iguais, para depois podermos somar ou subtrair.

(Transcrição EM2, p. 9, 10)

Neste extrato, a aluna apresenta uma possível razão para os denominadores das frações serem iguais (§2). Contudo, quando questionada novamente, hesita e fica muito baralhada. Com recurso a esquemas (figura 84), Márcia acaba por conseguir ultrapassar essa dificuldade e justifica porque é que, para adicionar ou subtrair frações, é necessário que estas tenham denominadores iguais (§5-§7).

Em síntese, Márcia evidenciou atividades do raciocínio matemático como *explicar, justificar* e *conjeturar,* mobilizando os conteúdos associados aos números representados sob a forma de fração. A aluna recorreu a representações ativas, simbólicas/numéricas e icónicas/pictóricas, para apoiar os seus raciocínios.

Justificar porque é que, na adição ou subtração de frações, estas têm que apresentar o mesmo denominador, revelou-se uma dificuldade para Márcia.

4.2.3. Tarefa *Fazendo bolos deliciosos*

Raciocínios de Márcia

Márcia iniciou a resolução da tarefa começando por explicar o que era pedido no enunciado: "temos uma receita para fazer um bolo de iogurte para quatro pessoas e depois vamos ter de preencher na tabela as quantidades de cada ingrediente para fazer um bolo para duas, para oito, para seis, para dez e para dezasseis [pessoas]" (Transcrição EM3, p. 1).

Depois, transforma todas as frações em número decimal, mostrando o grande à vontade que sente com esta representação dos números racionais. Sobre o numeral misto, Márcia explica que "o número misto dois um meio, que fui transformar numa fração, deu-me cinco meios e depois cinco a dividir por dois é dois e meio" (*idem*, p. 2).

Após transformar todas as frações e numerais mistos em números decimais, avança para o cálculo dos ingredientes necessários para duas pessoas (extrato 1).

Extrato 1

1. **Márcia:** Agora vou fazer todos os resultados que eu obtive e vou dividir por dois. Porque a primeira… aquelas quantidades eram para quatro pessoas. Se for para duas pessoas, temos que usar metade.
2. **Professora:** Como é que sabes que é metade?
3. **Márcia:** Porque dois é metade de quatro.

(Transcrição EM3, p. 2)

O extrato 1 evidencia que Márcia opta por dividir a quantidade de ingredientes necessários para fazer um bolo para quatro pessoas por dois (§1) e justifica esta estratégia dizendo que "dois é metade de quatro" (§3). Para calcular todas as quantidades necessárias recorre ao algoritmo da divisão. No final dos cálculos, Márcia apresenta os resultados obtidos (extrato 2).

Extrato 2

1. **Márcia:** Então, para duas pessoas, iriam ser precisas 375 milésimas de farinha…
2. **Professora:** de quê?
3. **Márcia:** De copos.
4. **Professora:** De copos.
5. **Márcia:** De manteiga, 125 milésimas. De açúcar em pó 125 milésimas de colheres de sopa e de água 1,25 e de iogurte… de iogurte aproximadamente um copo.
6. **Professora:** Então, tenho uma dúvida: se eu estou a dizer que preciso de 0,375 copos de farinha, como é que eu fazia isto para um bolo? Repara, aqui as quantidades estão representadas em…?
7. **Márcia:** Em frações.
8. **Professora:** E tu decidiste trabalhar com número decimal. O que é que achas da tua decisão?
9. **Márcia:** Podia… podia passar estes números [resultado das divisões por 2] para fração.
10. **Professora:** Ou? Então se tu aqui já passaste a fração para decimal e agora queres passar o número decimal para fração? Qual era a outra alternativa? Qual era a outra alternativa aos números decimais?
11. **Márcia:** [fica pensativa]
12. **Professora:** Era trabalhar com o quê? Tu agora disseste assim "podia passar isto [n.º decimal] para fração", certo? O que é que a fração ajudava na receita?
13. **Professora:** (…) o que é que ajuda mais aqui? As frações ou os números decimais?

14. Márcia: As frações.

(Transcrição EM3, p. 3, 4)

O extrato 2 permite constatar que Márcia apresenta os resultados obtidos (§1-§5) mas, aparentemente e depois das minhas intervenções (§6, §8) parece perceber que estes resultados não seriam fáceis de usar, face ao contexto da situação, para medir as quantidades de ingredientes necessárias para fazer o bolo para duas pessoas. Assim, sugere passá-los para fração (§9), o que vem a fazer (figura 86).

Figura 86 – Fração que representa o número decimal 0,375

A figura 86 mostra que Márcia soube transformar o número decimal em fração. No entanto, acaba por chegar à conclusão que será mais fácil "pensar com estas frações [da tabela]" (Transcrição EM3, p. 5). Depois disso, identifica, de imediato, que tem de dividir as frações por dois e efetua todos os cálculos corretamente. Contudo, e uma vez que tinha calculado os resultados usando números decimais, Márcia opta por representar, também sob a forma de número decimal, a fração obtida (figura 87) "para verificar, (…) se me dava o mesmo número decimal que me deu na primeira conta que eu fiz e deu" (Transcrição EM3, p. 5).

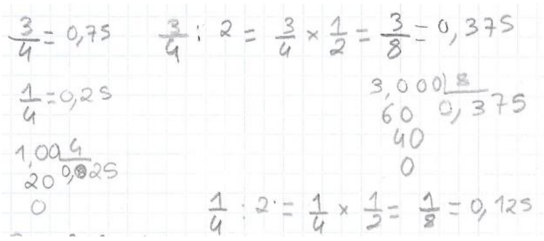


Figura 87 – Cálculo da quantidade de farinha e manteiga necessárias para duas pessoas e respetivas provas

Relativamente ao significado do resultado obtido para a quantidade de farinha, Márcia explicou que "significa que íamos ter um copo dividido em oito partes iguais e só usávamos três" (Transcrição EM3, p. 6).

O extrato 3 ilustra as estratégias que a aluna identifica para calcular a quantidade de ingredientes necessários para fazer um bolo para oito pessoas.

Extrato 3

1. **Professora:** Ok. Então agora vamos pensar aqui nas quantidades para oito pessoas.
2. **Márcia:** Tínhamos de fazer estas quantidades vezes dois.
3. **Professora:** Quais?
4. **Márcia:** As primeiras, para quatro pessoas, vezes dois. Porque oito é o dobro de quatro.

5. **Professora:** E havia outra possibilidade de fazer?
6. **Márcia:** Estes [ingredientes para duas pessoas] vezes quatro.
7. **Professora:** Porque?
8. **Márcia:** Porque a receita para dois… se juntarmos outra vez ia dar quatro pessoas. E depois se juntarmos mais uma vez ia dar para seis. Se juntarmos mais uma vez ia dar para oito.
9. **Professora:** É a mesma coisa que fazer vezes quatro, é isso?
10. **Márcia:** Hum, hum.
11. **Professora:** E mais? Havia mais alguma opção?
12. **Márcia:** [analisa a tabela] Acho que não.

(Transcrição EM3, p. 7)

O extrato 3 evidencia que Márcia explica que, para as quantidades de ingredientes necessárias para oito pessoas, poderia calcular o dobro da quantidade de ingredientes para quatro pessoas (§4) ou o quádruplo dos ingredientes para duas pessoas (§6) justificando as duas estratégias (respetivamente nos §4 e §8). A aluna opta por utilizar a primeira estratégia, calculando corretamente todas as quantidades de ingredientes necessárias (figura 88).

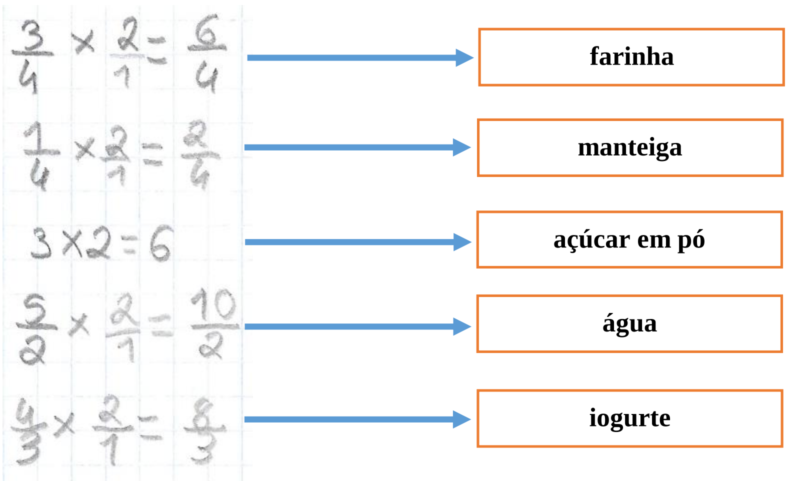


Figura 88 – Quantidades de ingredientes necessárias para oito pessoas

O extrato 4 permite observar as estratégias que Márcia diz poder utilizar para descobrir a quantidade de ingredientes para seis pessoas.

Extrato 4

1. **Professora:** Esse não dá. Ok. Então vamos pensar na próxima. Como é que podemos fazer agora para encontrar os ingredientes para seis pessoas?
2. **Márcia:** Podemos fazer… três vezes estes, a quantidade para duas pessoas.
3. **Professora:** Só há essa opção? Ou havia mais alguma forma de fazer?

4. **Márcia:** Acho que também podíamos somar as quantidades para quatro pessoas e as quantidades para duas pessoas.
5. **Professora:** Ok. Então vá, vamos a isso. Podes usar as costas da folha. Qual é a opção que vais usar então?
6. **Márcia:** Vou fazer as quantidades para duas pessoas vezes três.
7. **Professora:** Porquê?
   (…)
8. **Márcia:** Porque acho que é mais rápido. Porque se fizéssemos as do quatro mais as do dois íamos ter que estar a encontrar frações equivalentes.

(Transcrição EM3, p. 8)

Apesar de identificar duas estratégias distintas (§2-§4), Márcia justifica porque escolhe utilizar a estratégia que envolve a multiplicação (§8).

Para as quantidades de ingredientes necessárias para 10 pessoas, identifica que pode adicionar as quantidades para fazer o bolo para seis pessoas com as quantidades para o fazer para quatro pessoas ou adicionar as quantidades relativas a oito pessoas com as quantidades para duas pessoas. Uma vez que ambas as estratégias consistem na adição de frações, Márcia seleciona a primeira opção e efetuou os cálculos sem qualquer dificuldade. A figura 89 mostra como procedeu.

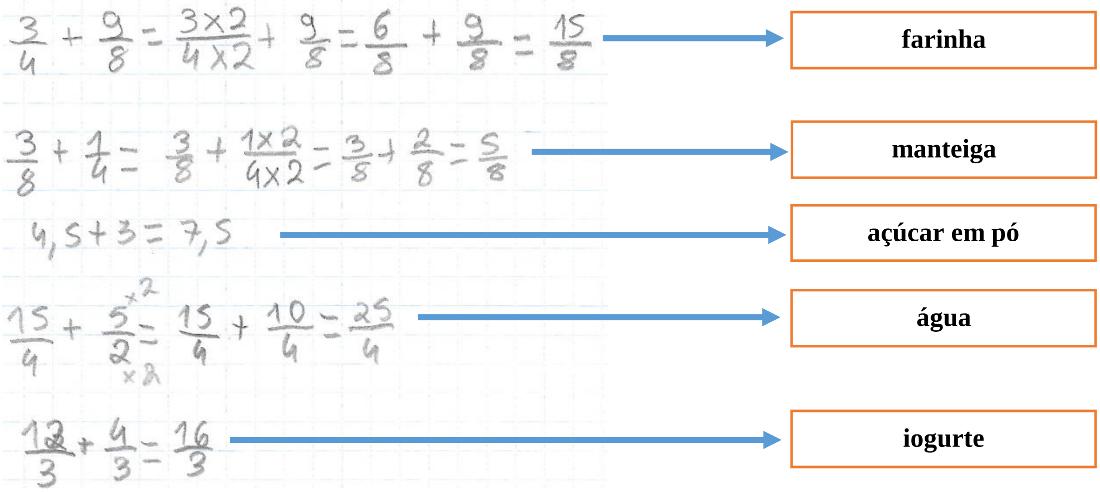


Figura 89 – Quantidades necessárias para fazer o bolo para 10 pessoas

Analisando a figura 89, constata-se que Márcia calculou corretamente as quantidades de ingredientes necessárias para fazer um bolo para 10 pessoas, efetuando todos os passos essenciais para adicionar números representados sob a forma de fração (com denominador igual ou diferente).

Relativamente às quantidades de ingredientes para dezasseis pessoas, Márcia também identifica várias estratégias distintas (extrato 5).

Extrato 5

1. **Professora:** E agora, já pensaste na próxima?
2. **Márcia:** Sim. Era o resultado da receita para oito pessoas vezes dois.
3. **Professora:** E havia mais opções?
4. **Márcia:** Ou a receita do… para quatro pessoas vezes quatro e a receita para duas pessoas vezes oito.
5. **Professora:** E não havia mais nenhuma opção?
6. **Márcia:** Também podíamos fazer a receita para dez pessoas mais a receita para seis pessoas.
7. **Professora:** Ok. E sendo assim qual é que vais escolher, dessas todas que disseste?
8. **Márcia:** A do oito vezes dois.

(Transcrição EM3, p. 9 e 10)

A análise do extrato 5 evidencia que Márcia identifica quatro estratégias diferentes (§2-§6). Opta por utilizar a multiplicação de 8 por 2 (§8) por considerar ser o processo mais simples e mais rápido, uma vez que não envolve a necessidade de encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador, como havia referido no extrato 4.

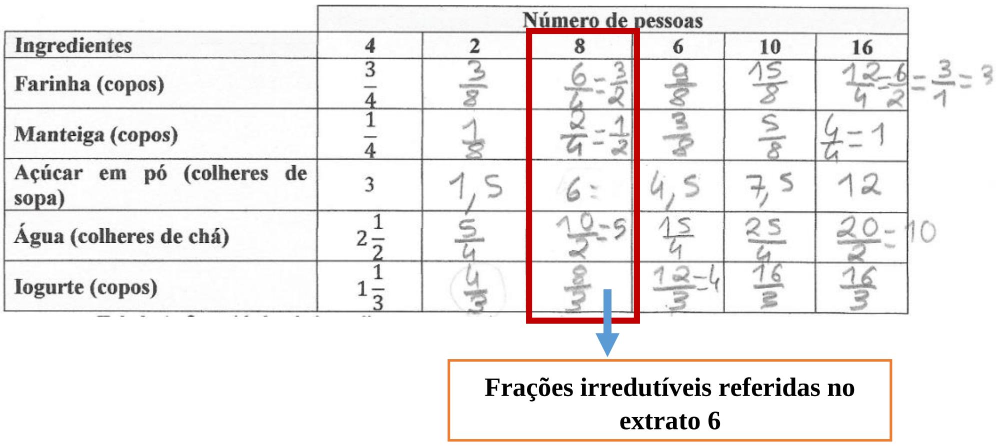
Em relação à forma como apresenta os seus resultados, Márcia identifica facilmente que podia "torná-las [frações] irredutíveis" (Transcrição EM3, p. 8), fazendo todo esse processo mentalmente e registando na tabela os resultados (extrato 6 e figura 90).

Extrato 6

1. **Márcia:** Podíamos… torná-las irredutíveis.
2. **Professora:** E como é que faríamos isso?
3. **Márcia:** Estas davam para dividir por dois. Mas depois oito terços não dava.
   (…)
4. **Professora:** Podemos dividir este [6]?
5. **Márcia:** Não é uma fração.
6. **Professora:** Isto é a mesma coisa que ter o quê?
7. **Márcia:** Seis sobre um.
8. **Professora:** Seis sobre um. Seis sobre um. Podemos tornar irredutível, seis sobre um?
9. **Márcia:** Não [continua a tornar as frações irredutíveis pensando baixinho]. Depois vai dar cinco, depois este não dá.

(Transcrição EM3, p. 8)

Analisando o extrato 6, constata-se que Márcia explica que, para transformar as frações $\frac{6}{4}$ e $\frac{2}{4}$ em frações irredutíveis poderia dividir os numeradores e denominadores dessas frações por dois (§3). Quanto ao número inteiro 6, reconhece que não é possível torná-lo irredutível (§4-§8). No §9, explica que a fração $\frac{10}{2}$ é igual a cinco (figura 90).



Ingredientes	Número de pessoas					
	4	2	8	6	10	16
Farinha (copos)	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{12}{4}=\frac{6}{2}=\frac{3}{1}=3$
Manteiga (copos)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{4}=1$
Açúcar em pó (colheres de sopa)	3	1,5	6	4,5	7,5	12
Água (colheres de chá)	$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{2}=5$	$\frac{15}{4}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{20}{2}=10$
Iogurte (copos)	$1\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{3}=4$	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$

Figura 90 – Quantidades de ingredientes necessárias para fazer um bolo

Na figura 90, é possível ver todas as frações que Márcia tornou irredutíveis. Como já foi referido, a aluna efetuou esse processo mentalmente, em todas as frações onde verificou ser possível.

É importante referir também que, apesar de efetuar todos os procedimentos de cálculo corretamente, a aluna enganou-se aquando o registo da quantidade de iogurte necessária para fazer um bolo para duas pessoas ($\frac{4}{6}$). Esse erro levou a que as quantidades de iogurte necessárias para seis e para dez pessoas estivessem, também, incorretas. Isto porque, mesmo efetuando todos os procedimentos de cálculo corretamente, a aluna utilizou no seu cálculo a quantidade incorreta ($\frac{4}{3}$) de iogurte para duas pessoas (ver figura 88 e 89, iogurte).

Recursos usados por Márcia

Para a resolução desta tarefa, Márcia mobiliza vários conhecimentos matemáticos, nomeadamente o algoritmo da divisão, a representação dos números racionais sob a forma de números decimais, frações e numeral misto, operações com frações, frações irredutíveis e ainda algumas relações numéricas, úteis quando, por exemplo, identifica as estratégias que pode utilizar para descobrir as quantidades de ingredientes necessários para um determinado número de pessoas.

Em relação às relações entre os números veja-se, por exemplo, a forma como Márcia pensou para determinar as quantidades de ingredientes necessárias para duas e oito pessoas, o que se verificou para os restantes casos. Para calcular as quantidades para duas pessoas, sabe que tem de calcular metade dos ingredientes para quatro pessoas porque, como refere, “dois é metade de quatro” (Transcrição EM3, p. 2). O mesmo acontece para as quantidades necessárias para oito pessoas, quando Márcia identifica as possíveis estratégias (extrato 3). Sabe que pode calcular o dobro das quantidades para quatro pessoas, porque oito é o dobro de quatro (§4) e, pela mesma razão, devido à propriedade comutativa da multiplicação, calcular o quádruplo dos ingredientes para duas pessoas (§8), embora o explique com recurso à adição de quatro parcelas de quantidades de ingredientes para duas pessoas, como mostra a expressão $2 \times 4 = 2 + 2 + 2 + 2$.

Tal como já referi, a aluna mobiliza também o seu conhecimento matemático sobre o algoritmo da divisão e sobre os números decimais, revelando também uma grande facilidade em trabalhar com esta operação quando estão envolvidos números decimais. Como se pode observar no extrato 7, Márcia decidiu utilizar os números decimais porque, para si, é "mais fácil" (§4).

Extrato 7

1. **Professora:** Então o que é que estás a fazer, explica-me lá?
2. **Márcia:** A passar tudo para número decimal.
3. **Professora:** E porquê? Porque é que decidiste assim?
4. **Márcia:** Porque acho que depois vai ser mais fácil.

(Transcrição EM3, p. 1)

Sobre os numerais mistos, Márcia mobiliza o que aprendeu nas aulas transformando-os, corretamente, em frações (figura 91).

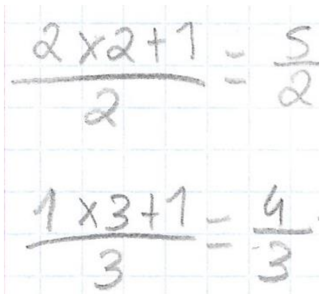


Figura 91 – Representação dos numerais mistos em frações

Sobre as operações com frações, muitos dos conhecimentos mobilizados pela aluna foram já descritos em *Raciocínios de Márcia*. Ao longo da resolução da tarefa, utiliza a adição, a multiplicação e a divisão de frações sem quaisquer dificuldades e efetua os cálculos corretamente, mobilizando o que foi trabalhado nas aulas em relação a todas estas operações (figuras 87, 88 e 89).

Márcia recorreu, também, aos seus conhecimentos sobre frações irredutíveis. No extrato 6 reconhece que deve apresentar os resultados sob a forma de fração irredutível (§1) e fá-lo efetuando cálculos mentalmente, evidenciado que conhece os procedimentos necessários.

No que diz respeito às representações utilizadas, estas foram, na sua totalidade, representações simbólicas, segundo a designação de Bruner, ou numéricas, de acordo com a categorização apresentada por Preston e Garner (figura 92). Aparentemente, Márcia não sentiu necessidade de utilizar outro tipo de representação para apoiar os seus raciocínios.

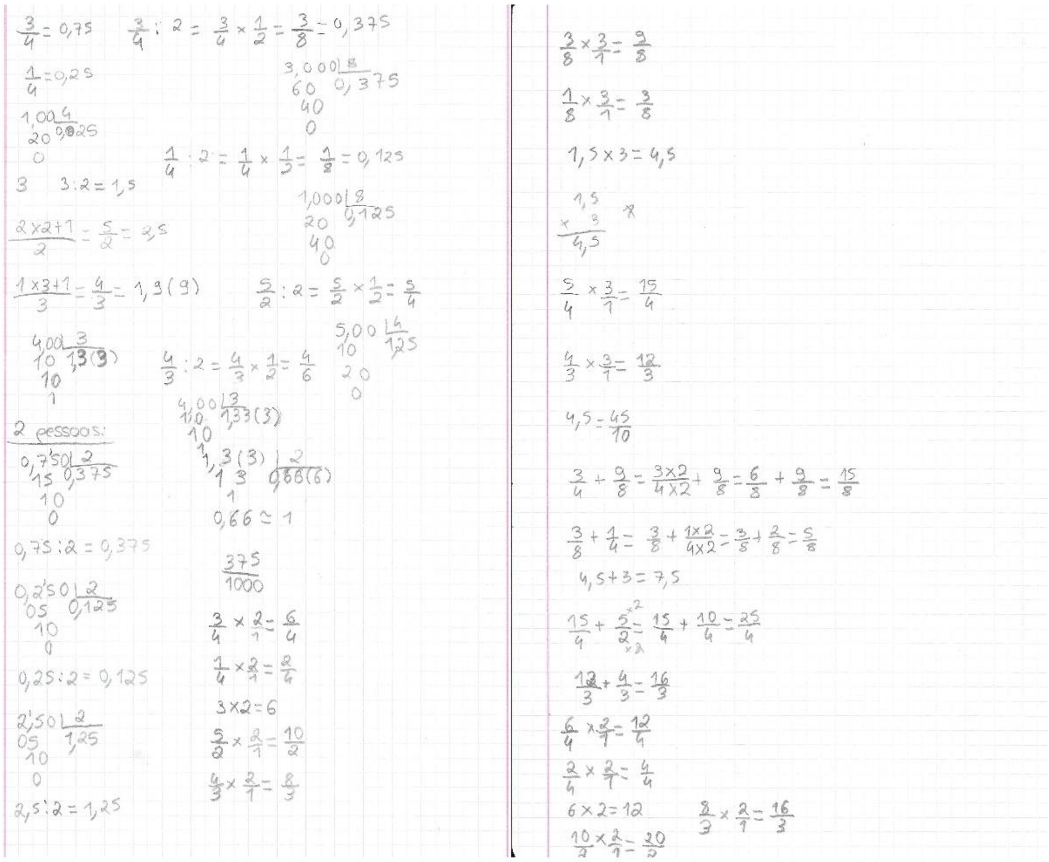


Figura 92 – Resolução da tarefa "Fazendo bolos deliciosos"

Dificuldades de Márcia

O facto de Márcia privilegiar o trabalho com os números decimais fez surgir algumas dificuldades. Com efeito, depois de calcular as quantidades de ingredientes necessárias para fazer um bolo para duas pessoas, a aluna percebe que esta representação não seria a melhor opção nesta tarefa (extrato 2).

Analisando o extrato 2, constata-se que, quando questionada sobre como poderia medir 0,375 copos de farinha (§6) Márcia reconhece que, talvez, a melhor opção fosse trabalhar com frações. Contudo, sugere passar os resultados obtidos em números decimais para frações (§4), o que se revela infrutífero (figura 86). A aluna acaba por reconhecer que a melhor alternativa é “pensar com estas frações [da tabela]” (Transcrição EM3, p. 5), acabando por ultrapassar esta dificuldade.

Outra das dificuldades de Márcia diz respeito à interpretação dos resultados obtidos, ou seja, das frações correspondentes às quantidades de ingredientes obtidas (extrato 8).

Extrato 8

1. **Professora:** E utilizar cinco quartos de colheres de chá significa o quê?
2. **Márcia:** Significa que íamos ter… aah… quatro colheres… que íamos pôr quatro colheres…
3. **Professora:** Sim ou não? Estou a ver-te na dúvida… Vamos pensar no que disseste na farinha.
4. **Márcia:** Que era um copo dividido em oito e só usávamos três.
5. **Professora:** Então e nas colheres?
6. **Márcia:** Que era uma colher dividida em quatro e punha cinco?! [duvida]
7. **Professora:** Pois. Como é que eu tenho uma colher dividida em quatro partes e punha cinco? Significa o quê?
8. **Márcia:** Era… uma colher dividida em quatro e enchíamos toda. E depois essa colher outra vez e só enchíamos um.

(Transcrição EM3, p. 6)

A análise do extrato permite evidenciar que Márcia revelou algumas dificuldades na interpretação da fração $\frac{5}{4}$, que representa a quantidade de colheres de chá de água necessárias para fazer um bolo para duas pessoas (§2). Contudo, e fazendo analogia com o que referiu no caso da quantidade de farinha necessária (§4), acaba por referir, hesitante, que correspondia a uma colher dividida em quatro partes e utilizavam-se cinco partes (§6). Apenas depois (§8), Márcia conclui que seria utilizada uma colher de chá cheia (dividida em quatro) mais uma parte.

Concluindo, na exploração da tarefa Márcia evidenciou atividades do raciocínio matemático como *explicar* e *justificar*. A aluna mobilizou o seu conhecimento matemático relativamente aos números representados sob a forma de fração e operações com frações, mas também, sobre o algoritmo da divisão e números decimais. Para além disso, Márcia utilizou os seus conhecimentos matemáticos sobre algumas relações numéricas que lhe permitiram selecionar diferentes estratégias de resolução. As representações privilegiadas foram as representações simbólicas ou numéricas. Márcia revelou algumas dificuldades relativamente à utilização dos números racionais na resolução da tarefa e, ainda, na interpretação de alguns resultados obtidos face ao contexto da tarefa.

4.2.4. Tarefas *O aniversário da Ana* e *Daniel e o Leite*

Raciocínios de Márcia

Após a leitura da primeira questão da tarefa *O aniversário da Ana,* Márcia, começa por explicar como está a pensar fazer para a resolver (extrato 1).

Extrato 1

1. **Professora:** Então, explica-me lá, na primeira parte da tarefa o que é que é para fazer? O que é que tu percebeste?
2. **Márcia:** Que na festa de aniversário da Ana havia dois litros de sumo de maçã. E querem saber quantos copos de um terço de litro é que … é que podemos encher com o sumo.
3. **Professora:** Ok. Então e agora como é que vais fazer?
4. **Márcia:** Vou fazer dois a dividir por um terço.
5. **Professora:** Porque…?
6. **Márcia:** Porque são os dois litros de sumo a dividir por copos. E cada copo só vai levar um terço.
   (…)
7. **Professora:** E agora o que é que fizeste, explica-me lá.
8. **Márcia:** Fiz o dois a dividir por um terço que é igual a dois sobre um vezes três sobre um, que é igual a seis sobre um que é a mesma coisa que seis.

(Transcrição EM4, p. 1, 2)

O extrato 1 evidencia que Márcia explica que vai ter que dividir o sumo pelos copos (§4) dizendo que, por isso, tem que dividir a quantidade de sumo que tem pela quantidade que leva cada copo (§6). Além disso, Márcia explica como efetuou o cálculo (§8 e figura 93).

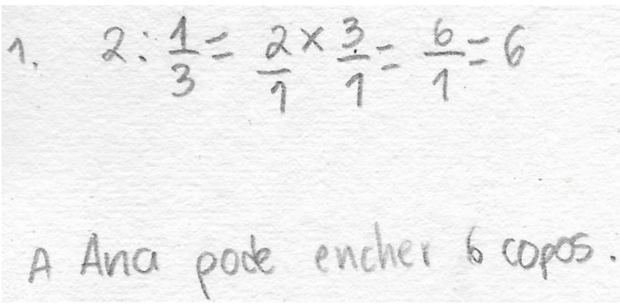


Figura 93 – Resolução da primeira questão da tarefa "O aniversário da Ana"

A figura 93 mostra que Márcia efetuou corretamente os cálculos, recorrendo ao que aprendeu sobre a divisão envolvendo números racionais sob a forma de fração, e concluiu, corretamente, que a quantidade de leite disponível (dois litros) enche seis copos de um terço de litro.

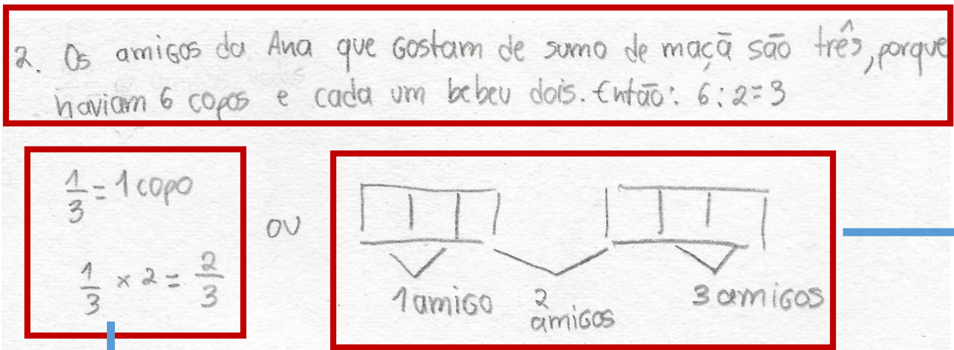
Uma vez que não identifica mais estratégias para resolver esta questão, avança para a segunda questão explicando que "os dois terços era o que cada um bebeu" (Transcrição EM4, p. 2). O extrato 2 mostra como Márcia pensou sobre esta questão.

Extrato 2

1. **Márcia:** Se cada copo tem um terço e cada um bebeu dois terços, é porque beberam dois copos.
2. **Professora:** Então assim quantos amigos beberam sumo de maçã?
3. **Márcia:** Aaahh… acho que são três.
4. **Professora:** Porque…?
5. **Márcia:** Porque…
6. **Professora:** Achas ou tens a certeza?
7. **Márcia:** Porque, se cada amigo bebeu dois copos, dois terços são dois copos e como eram seis copos ao todo, se cada amigo bebeu dois eram três amigos. Porque seis a dividir por dois dá três.
   (…)
8. **Professora:** Então mostra-me lá como é que eu sei que dois terços são dois copos.
9. **Márcia:** Porque um terço é um copo. E se fizermos um terço vezes dois, vai dar dois terços, que era dois copos [resolve simultaneamente na folha].

(Transcrição EM4, p. 3)

O extrato 2 permite constatar que Márcia chega à resposta mentalmente (§1-§3), associando os dados obtidos na questão anterior (seis copos) à quantidade de copos que cada um bebe (§7). A figura 94 mostra a resposta dada por Márcia e as estratégias que utilizou para mostrar que dois terços correspondem a dois copos de sumo – cada um com a capacidade de um terço – bem como as justificações que apresenta para fundamentar quantos amigos gostam de sumo de maçã.



Primeira estratégia

Segunda estratégia

Figura 94 – Resolução da segunda questão da tarefa "O aniversário da Ana"

Justificação de que $\frac{2}{3}$ correspondem a dois copos de sumo

O extrato 3 ilustra como Márcia pensou relativamente à segunda estratégia (figura 94).

Extrato 3

1. **Professora:** Ok. Sim… Havia outra alternativa de fazer ou pensas que não? O que é que achas?
2. **Márcia:** [volta a ler a questão tentando encontrar outra forma de resolver] Acho que havia outra maneira mas…
3. **Professora:** Como? Pensa lá.
4. **Márcia:** Fazíamos assim, retângulos, que eram os dois litros.
5. **Professora:** Sim…
6. **Márcia:** E depois como cada copo era um terço, dividíamos cada retângulo em três [vai fazendo e explicando ao mesmo tempo]. E depois…
7. **Professora:** Em três porquê?
8. **Márcia:** Porque os copos estão divididos em terços. Depois cada amigo bebeu dois copos. Já tinha uma amigo, depois dois amigos e aqui três amigos [liga os terços dois a dois e escreve o número de amigos].

(Transcrição EM4, p. 3, 4)

A aluna explica que poderia utilizar desenhos, neste caso, retângulos, que representavam os dois litros (§4) divididos em três partes (§6), de forma a representar os copos. Depois, o que fez foi agrupar as divisões dos retângulos duas a duas, simbolizando os copos que cada amigo bebeu, obtendo o mesmo resultado, ou seja, três amigos (figura 94).

Relativamente à terceira questão, Márcia acaba por revelar algumas dificuldades para encontrar uma estratégia que lhe permita chegar a uma resposta. Ultrapassadas essas dificuldades, opta por utilizar um esquema. Começa, inicialmente, por utilizar um modelo circular mas, quando a questiono se haveria outra forma mais fácil de fazer "sem ser com o círculo", percebe que é difícil dividi-lo em cinco partes iguais (extrato 4).

Extrato 4

1. **Márcia:** Isto era uma torta [faz um círculo]. Tem de estar dividida em quintos.
2. **Professora:** É um bocado difícil. Vais dividir esse círculo em cinco bocadinhos iguais?
3. **Márcia:** Sim.
4. **Professora:** Há alguma maneira mais fácil de fazer sem ser com o círculo?
5. **Márcia:** Se calhar retângulos era mais fácil de dividir.
6. **Professora:** Não sei. Tu é que sabes.
7. **Márcia:** [apaga o círculo e decide usar um retângulo que divide em cinco] E queriam saber, se cada convidado comer dois quintos, quantos convidados comem… darão para três tortas [desenha mais dois retângulos divididos em cinco partes iguais. Depois pinta cada dois quintos

de forma diferente e associa cada dois quintos a um convidado]. Então cada convidado come dois. Isto é um convidado, mais isto dois, mais isto aqui é três, depois aqui é quatro, cinco, seis, sete…

8. **Professora:** E então? Explica lá como é que fizeste.
9. **Márcia:** Desenhei três tortas e cada torta dividi em cinco, porque cada convidado ia comer dois quintos. E depois, aaah…
10. **Professora:** Mas como é que sabemos que temos que dividir em cinco? É essa a minha dúvida.
11. **Márcia:** Porque as tortas estão divididas em quintos.

(Transcrição EM4, p. 4)

Depois de dividir os retângulos em cinco partes iguais, a aluna explica, à medida que vai desenhando, como está a pensar (§7). A figura 95 mostra o esquema feito por Márcia.

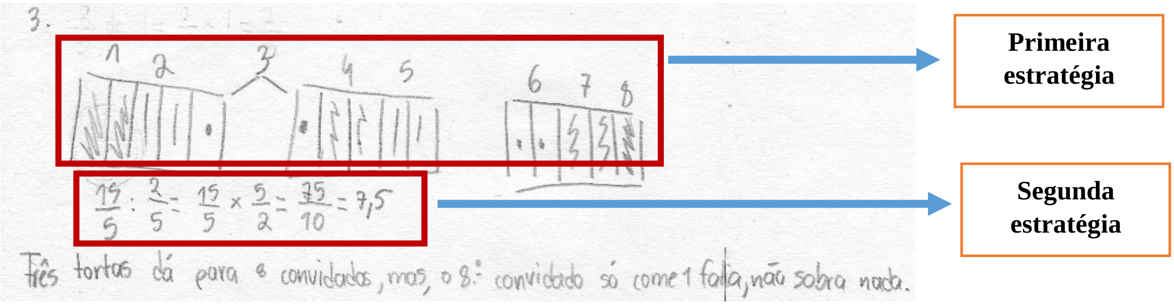


Figura 95 – Resolução da terceira questão da tarefa "O aniversário da Ana"

Tal como Márcia explicou (§7), dividiu cada torta em cinco partes, o que justifica no §11. Depois, agrupou-as duas a duas, pois cada convidado comia $\frac{2}{5}$. No final, Márcia concluiu que as três tortas dão para oito convidados mas um dos convidados apenas come uma fatia, como escreveu na sua resposta. A figura 95 mostra também uma segunda estratégia que Márcia identificou para chegar à resposta. O extrato 5, revela como Márcia pensou.

Extrato 5

1. **Professora:** E havia outra maneira diferente de fazer? Tu optaste por fazer assim com o modelo das barras… será que podias ter feito de outra forma, ou não?
2. **Márcia:** [sussurra] Por contas…
3. **Professora:** Diz, o que é que disseste?
4. **Márcia:** Estava a pensar se podia fazer por contas.
5. **Professora:** Por contas… por cálculos.
   (…)
6. **Márcia:** Acho que podia fazer… cada torta é cinco quintos. Então três eram quinze quintos. Depois… a dividir … por… dois quintos. [vai escrevendo em simultâneo]
7. **Professora:** Porquê a dividir por dois quintos?

8. **Márcia:** Porque cada convidado ia comer dois quintos. Eu dividi em grupos de dois quintos.
(…)
9. **Professora:** E agora? O que é que podemos tirar daí desse cálculo? Podemos fazer mais alguma coisa?
10. **Márcia:** Isto [$\frac{75}{10}$] é igual a sete e meio.
11. **Professora:** Então o que é que representa isso?
12. **Márcia:** Que sete convidados comem duas e depois um convidado só vai comer metade, só come uma.
13. **Professora:** E como é que sabes que é metade?
14. **Márcia:** Porque… é… sete meios é sete mais 0,5 e 0,5 é metade.

(Transcrição EM4, p. 5, 6)

Márcia explica que pode chegar à resposta através de cálculos pois sabe que, no total, tem quinze fatias de torta (§4-§6). Se as dividir por 2 porque cada amigo come $\frac{2}{5}$ sabe para quantos convidados darão as quinze fatias (§8). No final, obtém como resultado o número 7,5 e reconhece que dá para sete convidados comerem duas fatias e um convidado comer uma fatia (§12) justificando-se no §14. A propósito das possíveis respostas, Márcia reconhece que "se calhar são sete convidados e sobra uma fatia" (Transcrição EM4, p. 6) mas que também é possível serem os oito convidados e um dos convidados comer apenas uma fatia. No entanto, não é correto, no contexto da questão colocada, considerar duas respostas possíveis. Isto porque, uma vez que cada convidado come $\frac{2}{5}$ de uma torta, as três tortas só dão para sete pessoas.

A propósito da tarefa *Daniel e o leite*, Márcia começa por transformar o numeral misto dado numa fração para saber a quantidade de leite comprada pelo Daniel e, posteriormente, pensar numa estratégia de resolução (extrato 6).

Extrato 6

1. **Márcia:** O Daniel comprou um, um meio de litro de leite [$1\frac{1}{2}$] e eu fui ver quanto é que era. E um um meio é igual a três meios.
(…)
2. **Márcia:** E depois, ele, se beber um meio de litro de leite por dia, queremos saber para quantos dias dá o leite que ele comprou.
3. **Professora:** E então, como é que podes fazer isso?
4. **Márcia:** Vou fazer os três meios a dividir por um meio de litro, para ver quantos dias.
5. **Professora:** E porque é que divides por um meio de litro?
6. **Márcia:** Porque ele em cada dia só bebe um meio.

(Transcrição EM4, p. 6, 7)

Depois de transformar o numeral misto em fração (§1), Márcia explica que vai dividir a quantidade de leite que o Daniel tem pela quantidade de leite que bebe por dia (§4-§6). A figura 96 ilustra os procedimentos de cálculo usados por Márcia.

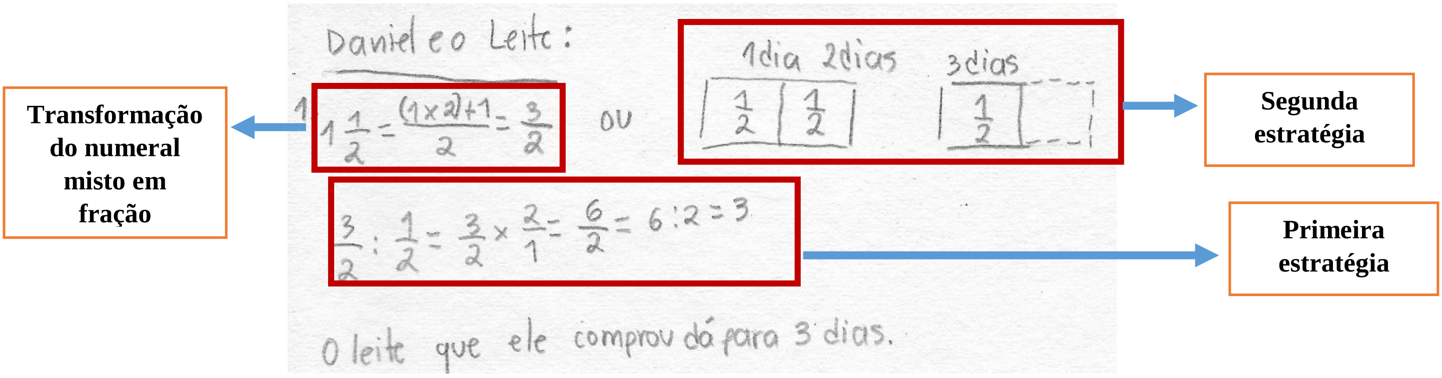


Figura 96 – Resolução da primeira questão da tarefa "Daniel e o leite"

Para além de ilustrar a primeira estratégia da aluna, a figura 96 mostra, também, uma segunda estratégia em que a aluna recorre a um esquema para chegar à solução. No extrato 7, Márcia explica como pensou a propósito do seu esquema.

Extrato 7

1. **Professora:** Como é que estás a pensar agora? Como é que podias fazer?
2. **Márcia:** Estou a pensar por esquemas…
3. **Professora:** Hum, hum…
   (…)
4. **Professora:** Então este bocadinho, isto aqui, representa o quê?
5. **Márcia:** É o litro que ele comprou. E este aqui é meio litro.
   (…)
6. **Márcia:** E depois… Ele aqui… isto é um meio [em cada uma das partes do retângulo escreve $\frac{1}{2}$]. Aqui é um dia [no primeiro $\frac{1}{2}$], aqui são dois dias e aqui três dias.

(Transcrição EM4, p. 7)

Márcia explica que o retângulo maior é o litro comprado pelo Daniel e o retângulo mais pequeno corresponde a meio litro (§4). Depois, basta-lhe distribuir cada meio litro por um dia para chegar à resposta correta (§6).

Recursos usados por Márcia

Para a resolução da tarefa, Márcia mobiliza os seus conhecimentos matemáticos, a propósito, fundamentalmente, da divisão de números racionais representados sob a forma de fração.

A propósito da divisão envolvendo frações, Márcia explica que utiliza a multiplicação "porque quando estamos a fazer a divisão com frações o sinal de dividir passa a vezes e fazemos o inverso do divisor" (Transcrição EM4, p. 2). Uma vez que um dos procedimentos que permite obter os resultados de divisões que envolvem números representados sob a forma de fração é multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor, Márcia revela mobilizar os seus conhecimentos, a propósito da multiplicação de frações, efetuando todos os cálculos corretamente, como é possível observar, por exemplo, na figura 96.

Outro recurso utilizado por Márcia foi o seu conhecimento relativo à transformação de numerais mistos em frações, efetuando todos os passos necessários para obter uma fração a partir de um numeral misto, como mostra a figura 96.

Em relação às representações utilizadas, Márcia optou, maioritariamente, por representações simbólicas, na terminologia de Bruner, ou numéricas, segundo Preston e Garner. No entanto, também utiliza representações icónicas (Bruner) ou pictóricas, (Preston e Garner). As representações não surgiram em simultâneo, mas sim como estratégias alternativas. Por exemplo, na segunda questão da tarefa *O aniversário da Ana*, Márcia utilizou, em primeiro lugar, uma representação simbólica/numérica (primeira estratégia) e, posteriormente, uma representação icónica/ pictórica (segunda estratégia), como identificado na figura 94.

Dificuldades de Márcia

A primeira dificuldade surgiu na segunda questão da tarefa *O aniversário da Ana*, que perguntava quantos eram os amigos da Ana que só gostavam de sumo de maçã. Para chegar à resposta correta (figura 94). A aluna começa por escrever que $\frac{3}{3}$ correspondia aos amigos da Ana (extrato 9).

Extrato 9

1. **Márcia:** Porque… era… porque três terços representa uma unidade.
2. **Professora:** E como é que sabemos que três terços são os amigos todos? Porque é que não são quatro quartos, cinco quintos… Estás a perceber a minha dúvida?
3. **Márcia:** Hum, hum. [apaga o que escreveu]
4. **Professora:** Pensa lá em voz alta, se conseguires.
5. **Márcia:** Os três terços era… dois terços era o que cada um bebeu.
   (…)

6. **Professora:** Dois terços é a quantidade que cada um bebeu, certo? O que é que podes dizer sobre isso?
7. **Márcia:** [fica novamente pensativa]
8. **Professora:** Vamos pensar nas perguntas, que estão relacionadas umas com as outras, certo? (…) Então, já disseste que dois terços corresponde ao que cada amigo bebeu.
9. **Márcia:** Hum, hum.
10. **Professora:** O que é que podes acrescentar mais sobre isso?
11. **Márcia:** Se cada copo tem um terço e cada um bebeu dois terços, é porque beberam dois copos.

(Transcrição EM4, p. 2, 3)

O extrato 9 permite constatar que Márcia explica por que razão pensou que os três terços corresponderiam à totalidade dos amigos da Ana (§1). Quando questionada, a aluna percebe que não está a seguir o melhor caminho. Assim que compreende que a questão está relacionada com a questão anterior e com os respetivos resultados (§8-§11), conclui que basta dividir os seis copos de sumo pelos dois copos que cada amigo vai beber (§11), como foi ilustrado na figura 94.

Márcia revelou, também, algumas dificuldades na terceira questão da mesma tarefa. O extrato 10 mostra como pensou inicialmente para chegar a uma resposta.

Extrato 10

1. **Márcia:** Dois quintos de um é a mesma coisa que dois quintos vezes um.
2. **Professora:** Dá a mesma coisa que dois quintos.
3. **Márcia:** [acena que sim]
4. **Professora:** Então isto serviu para quê? Porque é que começaste a fazer assim?
5. **Márcia:** Hum…
6. **Professora:** Alguma razão para teres escrito dois quintos de um?
7. **Márcia:** Porque era dois quintos de uma torta.

(Transcrição EM4, p. 4)

Neste extrato, Márcia explica que pensou calcular quanto seria dois quintos de uma torta, revelando que conhece a relação entre a palavra *de* e a multiplicação (§7). Contudo, os valores selecionados não eram os adequados e a aluna não chegou à resposta correta. Depois disso, Márcia, começando por um esquema simples, conseguiu apresentar duas estratégias distintas que lhe permitiram resolver a tarefa (figura 95).

Uma outra dificuldade revelada por Márcia, diz respeito à segunda questão da tarefa *Daniel e o Leite* onde se pretendia que averiguasse se, com $\frac{3}{2}$ de litros de leite, era possível encher seis copos de $\frac{1}{5}$ litro de leite. Inicialmente, começa por explicar que pode fazer “os três meios [de litro] a dividir por seis [copos]” (Transcrição EM4, p. 7). Após o cálculo, Márcia responde que o Daniel “(…) não pode encher seis copos com um quinto de litro, mas sim com um quarto” (Transcrição EM4, p. 7) (figura 97).

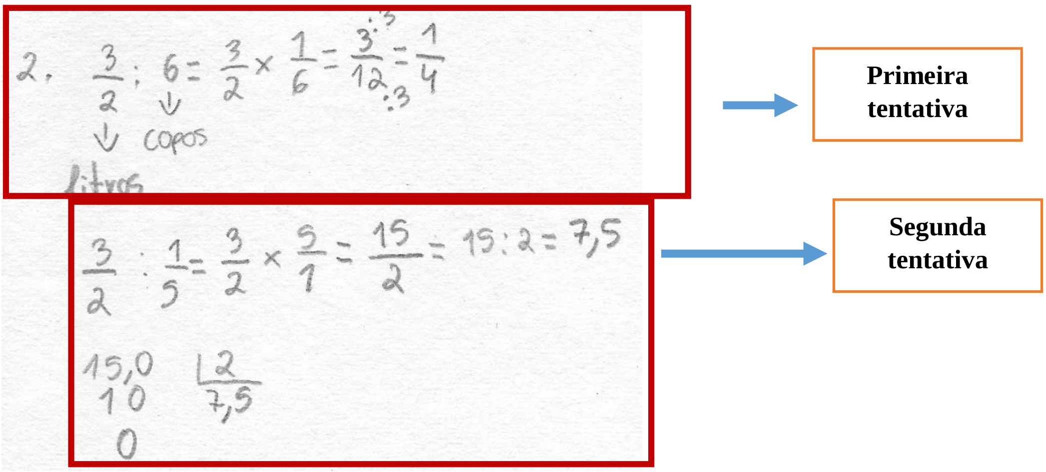


Figura 97 – Resolução da segunda questão da tarefa "Daniel e o leite"

Com alguma orientação da minha parte, Márcia conclui, hesitante, que pode fazer “os três meios… a dividir por um quinto” (*idem*, p. 9) e que o resultado obtido iria corresponder ao número de copos de um quinto de litro que se podia encher com um litro e meio de leite. O extrato 8 mostra a resposta de Márcia, perante o resultado obtido.

Extrato 8

1. **Márcia:** Os três meios… [hesita] a dividir por um quinto [sussurra].
   (…)
2. **Márcia:** Hum… É igual a sete e meio.
3. **Professora:** E isso significa o quê?
4. **Márcia:** Que não dava porque tinham de ser só seis copos.
5. **Professora:** Mas dá para encher ou não dá?
6. **Márcia:** Dá para encher os seis copos.
7. **Professora:** Certo?
8. **Márcia:** Mas depois ainda sobra leite.
9. **Professora:** Não faz mal, ou faz?
10. **Márcia:** Não. [escreve a resposta].

(Transcrição EM4, p. 9)

Analisando o extrato 8, constata-se que Márcia explica que obteve como resultado 7,5 copos mas que o Daniel não consegue encher seis copos porque tinham de ser só seis (§2-§4). Contudo, não interpreta corretamente a resposta obtida através dos cálculos face ao contexto ao contexto da tarefa (§4). Ao ser questionada, percebe que o Daniel pode encher os seis copos de um quinto de litro de leite, independentemente de sobrar leite ou não (§5-§10).

Em suma, as atividades de raciocínio evidenciadas por Márcia na resolução das duas tarefas foram o *explicar* e *justificar*. Para isso, utilizou os seus conhecimentos matemáticos relacionados, essencialmente, com a divisão envolvendo números racionais representados sob a forma de fração. A aluna recorreu a representações icónicas/ pictóricas e a representações simbólicas/numéricas. As dificuldades experienciadas por Márcia prenderam-se, sobretudo, com a seleção de estratégias adequadas à resolução das questões e também com a utilização de expressões numéricas adequadas, face ao que era pedido em algumas questões. Além disso, os resultados dos cálculos que efetuou aparentam dar diretamente as respostas aos problemas, o que faz com que Márcia nem sempre interprete estes resultados face ao contexto da tarefa.

Capítulo V – Conclusão

No presente capítulo apresento uma síntese do estudo e as suas principais conclusões, terminando com uma reflexão sobre o seu desenvolvimento.

5.1. Síntese do estudo

O presente trabalho tem por objetivo analisar e compreender o raciocínio matemático de alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de problemas envolvendo números racionais não negativos. Pretende-se, particularmente, caracterizar o seu raciocínio, identificar os recursos que mobilizam (conhecimentos e representações) para o desenvolver e explicitar e compreender as dificuldades experienciadas na resolução das tarefas propostas.

Em termos metodológicos, a investigação desenvolvida enquadra-se numa abordagem qualitativa e no paradigma interpretativo. Trata-se de uma investigação sobre a prática no âmbito da qual concebi e concretizei uma intervenção pedagógica e realizei dois estudos de caso focados na atividade matemática de duas alunas: Filipa e Márcia. Esta intervenção decorreu de 23 de fevereiro a 10 de abril de 2015 e, ao longo deste período, propus à turma de 5.º ano a que pertenciam estas alunas diversas tarefas que, na terminologia de Ponte (2005), podem considerar-se de desafio elevado.

Os dados empíricos foram obtidos através da observação participante, recolha documental e entrevistas clínicas realizadas às alunas caso. Estes dados foram objeto de uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas definidas tendo por referência o objetivo e questões do estudo e os dados recolhidos.

5.2. Conclusões do estudo

Em seguida, apresento as principais conclusões da investigação desenvolvida organizadas em torno de três eixos inter-relacionados: i) raciocínios de Filipa e de Márcia; ii) recursos utilizados pelas alunas; iii) dificuldades com que se confrontaram na realização das tarefas propostas.

5.2.1. Raciocínios matemáticos das alunas

Esta subsecção incide na caracterização dos raciocínios matemáticos de Filipa e de Márcia. Para o efeito, considerei, tal como referi no capítulo Introdução, que o raciocínio matemático constitui a atividade intelectual que o aluno desenvolve quando procura atribuir sentido a uma situação apresentada numa determinada tarefa, relacionando as ideias matemáticas relevantes para obter uma resposta que "consegue explicar e/ou justificar de forma coerente por meios próprios" (Canavarro & Pinto, 2012, p. 52). Considerei também, que as alunas raciocinaram matematicamente quando se envolveram em atividades de *conjeturar*, *generalizar*, *investigar porquê, justificar*, *refutar, explicar, argumentar* e *provar*.

Ambas as alunas evidenciaram conseguir tornar o seu raciocínio inteligível para os outros, ou seja, *explicar* como pensaram para resolver tanto as tarefas propostas na sala de aula e revisitadas nas entrevistas clínicas, como nas que apenas lhes foram propostas no âmbito da terceira e quarta entrevistas.

A atividade de explicar foi frequente e surgiu, inicialmente, a meu pedido. Posteriormente, começaram a aparecer de forma mais espontânea. Ambas as alunas revelaram, na maioria das vezes, uma grande facilidade em explicar o seu raciocínio ou o do seu grupo (nas tarefas revisitadas).

Na tarefa intitulada *Problema na distribuição de baguetes,* Filipa começa por explicar, a meu pedido, como o seu grupo distribuiu as baguetes pelos alunos de cada grupo da visita de estudo. A propósito do grupo do Planetário, explica, por exemplo, que dividiram "as baguetes ao meio e deu uma metade para cada um e sobrou outra metade que dividimos em cinco porque eram cinco alunos". Na tarefa *Fazendo bolos deliciosos*, Filipa, logo após ter lido o enunciado, explica, espontaneamente que poderia descobrir a quantidade de ingredientes necessários para fazer um bolo para duas pessoas calculando metade da quantidade dos necessários para o bolo de quatro pessoas.

Também Márcia, em todas as tarefas analisadas, explica os seus raciocínios. Por exemplo, na tarefa *Terrenos nas aldeias*, a aluna torna inteligível que o seu grupo dividiu a Aldeia Branca "em sextos e depois a família Castro só tinha um sexto, a família Duarte tinha dois e a família Alves tinha três". Na tarefa *O aniversário da Ana* a aluna explica, com facilidade, como pensou para descobrir quantos copos de um terço de litro enchia com dois litros de sumo de maçã: "fiz o dois a dividir por um terço que é igual a dois sobre um vezes três sobre um, que é igual a seis sobre um que é a mesma coisa que seis".

Ao explicarem o seu raciocínio, tornando-o inteligível para outros, as alunas tornaram claro ideias e aspetos do seu pensamento matemático, o que vai ao encontro do referido por Yackel (2001).

Outra atividade característica do raciocínio matemático é o *justificar*. Ambas as alunas conseguiram justificar as opções tomadas durante a resolução das tarefas propostas. Essas justificações eram, na sua maioria, justificações válidas no sentido em que tinham como base "conceitos ou propriedades compreendidos anteriormente ou por utilizarem argumentos válidos para a situação em questão" (Mata-Pereira & Ponte, 2012, p. 107).

Exemplo de uma justificação baseada em argumentos matematicamente válidos é a que Filipa, a propósito da tarefa *Problemas na distribuição de baguetes*, utiliza para fundamentar como pensou para descobrir as frações equivalentes: "como este [referindo-se a metade de uma baguete] equivale a cinco, este [referindo-se a outra metade da mesma baguete] também equivale. Então, cada metade equivale a cinco, logo é dez". Filipa, justifica que metade de uma baguete corresponde a cinco décimos porque a outra metade também estava dividida em cinco partes e, portanto, a baguete estaria dividida em dez partes iguais. Assim, concluiu que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$ são equivalentes. A mesma aluna, baseia-se novamente em argumentos matematicamente válidos quando refere que, a propósito da tarefa *Fazendo bolos deliciosos*, para calcular o dobro de uma determinada quantidade, pode adicioná-la duas vezes pois "vezes dois é o mesmo do que somar igual".

Márcia, em diversas ocasiões, apresenta justificações matematicamente válidas tendo em conta a situação em jogo. Por exemplo, quando resolve a tarefa *Fazendo bolos deliciosos*, refere que para calcular os ingredientes necessários para oito pessoas poderia fazer o dobro dos ingredientes para quatro pessoas "porque oito é o dobro de quatro".

Se se tiver por referência o que Sowder e Harel (1998) referem a propósito dos esquemas de prova dos alunos e sua categorização, algumas das justificações apresentadas pelas alunas podem considerar-se esquemas de prova baseados externamente. Por exemplo, na tarefa *Problema na distribuição de baguetes*, Filipa, a propósito da comparação de frações, recorreu a um esquema de prova autoritário pois baseou a sua justificação naquilo que ensinei para comparar frações com denominadores diferentes: "Então, como a professora ensinou, vezes 4 [referindo-se ao denominador de $\frac{6}{10}$] e vezes 10 [referindo-se ao denominador de $\frac{3}{4}$]. Porque o 4 não há na tabuada do 10 nem o 10 há na tabuada do 4". Márcia, na tarefa *Terrenos nas aldeias,* para justificar que a área de terreno da família Moura era o dobro da área de terreno da família Ilídio, recorre a um esquema de prova simbólico, uma vez que utiliza apenas símbolos matemáticos para apresentar a sua justificação.

Nas justificações que apresentam, as alunas recorrem também a esquemas de prova empíricos. Ambas apoiam, por diversas vezes, o seu raciocínio em desenhos e, portanto, evidenciam recorrer a esquemas de prova empíricos perceptuais. Além disso, também recorrem a esquemas de prova empíricos baseados em exemplos. Por exemplo, Márcia, a propósito da tarefa *Terrenos nas aldeias*, para justificar que o terreno da família Castro é metade do da família Duarte, recorre ao material manipulável que disponibilizei "cobrindo" a área dos terrenos com pedaços de papel, o que evidencia o recurso a um argumento empírico. Nesta mesma tarefa, recorre a exemplos e esquemas para fundamentar que o algoritmo que conjeturaram para adicionar e subtrair números representados sob a forma de fração era válido.

Neste sentido, destacam-se as justificações de ambas as alunas baseadas, por exemplo, em argumentos matematicamente válidos e em conhecimentos anteriores como as relações entre os números ou as operações com frações.

Embora surgissem com menos frequência do que as atividades referidas anteriormente, as alunas evidenciaram também conseguir *conjeturar* e *generalizar*. A formulação de conjeturas surgiu, por exemplo, na tarefa *Terrenos nas aldeias*, com ambas as alunas, aquando da identificação de um algoritmo para a adição e subtração de frações. Surgiu, também, quando após a análise de vários exemplos, Filipa conjeturou uma regra que permite multiplicar números representados por frações, referindo que podiam multiplicar os numeradores pelos numeradores e os denominadores pelos denominadores.

A generalização surge, por exemplo, quando, a propósito da tarefa *Problema na distribuição de baguetes*, Márcia opta, como forma de descobrir a quantidade de baguete que coube a cada aluno dos vários grupos da visita de estudo, por dividir o número de baguetes pelo número de alunos. Esse procedimento era passível de se utilizar para qualquer caso, independentemente do número de alunos ou do número de baguetes considerado. Neste sentido, esta generalização, focada num aspeto particular do problema, tem por base um raciocínio indutivo, uma vez que parte, como referido, do particular para o geral, ou seja, para os restantes casos (Pimentel & Vale, 2012). Também Filipa apresenta um esboço de uma generalização quando evidenciou saber que duas frações são equivalentes quando o quociente entre o numerador é o mesmo número.

Em suma, ao longo da resolução dos problemas propostos, foram vários os momentos em que as alunas evidenciaram atividades associadas ao raciocínio matemático. Como referi, as atividades mais frequentes foram a explicação e a justificação, tendo a formulação de conjeturas e a generalização surgido com menos frequência. Talvez este facto esteja relacionado com o tipo de tarefas propostas que, nalguns casos, não apelava à necessidade de generalizar e conjeturar. Apesar disso, considero que houve condições para que os alunos raciocinassem matematicamente uma vez que, como refere Boavida (2008), "em salas de aula em que é valorizado o raciocínio, a explicação, a justificação e a argumentação são aspectos-chave da actividade dos alunos" (p. 1).

5.2.2. Recursos utilizados pelas alunas

Os recursos utilizados pelas alunas podem ser estruturados em dois eixos: (i) conceitos e procedimentos matemáticos, (ii) representações do conhecimento matemático.

Nas várias tarefas propostas, as frações assumiram diferentes significados, particularmente: (i) relação parte-todo; (ii) quociente entre dois números inteiros; (iii) medida (Monteiro & Pinto, 2007). No *Problema na distribuição de baguetes*, Filipa evidencia a utilização das frações como uma relação parte-todo, por exemplo, quando refere que representam a quantidade de baguete distribuída a cada aluno dos vários grupos da visita de estudo. Por outro lado, a utilização da fração como quociente é evidenciada pela aluna, na mesma tarefa, quando, por exemplo, indica que duas frações são equivalentes quando o resultado da divisão do numerador pelo denominador é o mesmo. O significado de fração como medida foi evidenciado quando, por exemplo, Márcia, na tarefa *Terrenos nas Aldeias*, para dividir as aldeias, utilizou como unidade de medida os terrenos mais pequenos de cada aldeia, tentando perceber quantas vezes cabiam na respetiva aldeia.

Destaco também o conhecimento relativo às operações com frações que, além de permitir resolver algumas etapas das tarefas, possibilitou a seleção de diferentes estratégias de resolução. Por exemplo, na tarefa *Fazendo bolos deliciosos*, Filipa, para descobrir as quantidades de ingredientes necessárias para fazer um bolo para dez pessoas, identifica estratégias que envolvem a adição e a multiplicação de frações. O seu conhecimento sobre ambas as operações faz com que selecione a estratégia que envolve multiplicar frações porque "é mais fácil" uma vez que nessa operação "só temos de multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador" enquanto, na adição de frações "temos que achar denominadores iguais e depois é que podemos fazer". Este resultado vai na linha do que referem Quaresma e Ponte (2013): "que os alunos usam mais a representação em fracção na resolução de problemas envolvendo a multiplicação, possivelmente porque a regra para multiplicar fracções é muito mais fácil do que a regra para adicionar fracções, especialmente no caso de fracções com denominadores diferentes" (p. 294).

Relativamente à comparação de frações, as alunas optam por utilizar estratégias distintas. Filipa compara as frações usando o processo aprendido na aula: por exemplo, na tarefa *Problemas na distribuição de baguetes*, transforma as frações a comparar em frações com denominadores iguais para, posteriormente, comparar os seus numeradores. Na mesma tarefa, Márcia utiliza números decimais para comparar as quantidades de baguete que coube a cada aluno dos diferentes grupos da visita de estudo.

Outro conhecimento que se revelou importante para a resolução das tarefas diz respeito a relações numéricas, nomeadamente, a relação dobro/metade, uma útil ferramenta que possibilitou às alunas identificar e selecionar estratégias, avançando na resolução das tarefas. Na tarefa *Terrenos nas aldeias*, Filipa sabe que, para justificar que o terreno da família Castro tem metade da área do terreno da família Duarte, pode calcular o dobro do terreno da família Castro "porque se o Castro tem metade do Duarte, o Duarte tem o dobro do Castro. (…) Porque o dobro é o contrário de metade". Márcia, na tarefa *Fazendo bolos deliciosos*, identifica, como estratégia para descobrir a quantidade de ingredientes necessários para dezasseis pessoas, que pode calcular o dobro das quantidades de ingredientes para oito pessoas.

Outro recurso também mobilizado pelas alunas diz respeito às várias representações dos números racionais, onde estas revelaram alguma flexibilidade que lhes permitiu utilizar "múltiplas estratégias e revelar predisposição para utilizar uma ou outra representação e/ou método em função da situação com que se deparam[ram]" (Ventura & Oliveira, 2014, p. 86). Por exemplo, na tarefa *Problema na distribuição de baguetes*, Filipa mostra saber que $\frac{1}{2}$ corresponde a "metade. Pronto, 50%". Também Márcia, na mesma tarefa, apresenta, para o grupo do Centro Ciência Viva, uma relação entre o número decimal 0,75 (obtido quando calculou o quociente entre o número de baguetes e o número de alunos desse grupo), a fração $\frac{3}{4}$ que representava a quantidade de baguete que coube a cada aluno (obtida quando utilizou o material manipulável) e a percentagem 75% (que obteve apoiando-se num esquema circular que dividiu em quatro partes, pintando três).

O facto de revelar agilidade com as várias representações destes números permitiu, por exemplo, a Márcia, selecionar qual a representação a usar, por exemplo, na tarefa *Fazendo bolos deliciosos*, quando optou por utilizar os números decimais concluindo, *a posteriori*, que as frações eram a representação que melhor se adequava àquele contexto. As representações de números racionais mais utilizadas pelas alunas são os números decimais e as frações. Em particular, Filipa privilegia as representações dos números racionais sob a forma de frações enquanto Márcia revela uma predileção especial pelos números decimais.

Sobre as representações é possível concluir que a utilização de representações diversificadas foi uma constante. As alunas revelaram alguma flexibilidade no uso de várias representações dos números racionais, que lher permitiu selecionar a melhor representação de acordo com o contexto das tarefas propostas.

Apesar das representações surgirem de forma natural, como também mostrou Coelho (2010) num estudo que realizou, algumas surgiram como alternativa às já utilizadas. Por exemplo, nas tarefas *O aniversário da Ana* e *Daniel e o leite* a utilização de diferentes representações como alternativa à primeira estratégia de resolução apresentada é bastante visível. Márcia, por exemplo, na tarefa *O aniversário da Ana*, utilizou, como primeira estratégia para responder à terceira questão, uma representação icónica, particularmente, um diagrama (Canavarro & Pinto, 2012) e, como uma outra forma de descobrir a resposta à questão, uma representação simbólica, na terminologia de Bruner. Na mesma tarefa, Filipa, para descobrir quantos copos de um terço de litro enche com dois litros de sumo optou por, em primeiro lugar, recorrer a uma representação simbólica e, posteriormente, a uma representação icónica, utilizando também um esquema, de acordo com a designação atribuída a esta noção por Canavarro e Pinto (2012).

Quer nas tarefas exploradas na aula e revisitadas nas entrevistas, quer nas tarefas propostas apenas no âmbito das entrevistas, ambas as alunas usaram, espontaneamente, representações icónicas e simbólicas, recorrendo a representações ativas apenas quando distribuí material manipulável. Por exemplo, na tarefa *Problemas na distribuição de baguetes* é visível que Filipa e o grupo, aquando a sua exploração na aula, recorrem sobretudo às representações icónicas, nomeadamente, aos desenhos (Canavarro & Pinto,

2012) e, na sua revisitação durante a entrevista, a aluna utiliza também representações simbólicas, por exemplo, quando compara as frações. Na tarefa *Daniel e o leite*, Márcia recorre a representações icónicas, particularmente, esquemas e simbólicas e, como referi, não utiliza representações ativas porque não foi distribuido qualquer material manipulável.

A utilização de representações constituiu um apoio fundamental ao raciocínio matemático das alunas e a interligação de várias representações – como aconteceu por exemplo, com Márcia, na tarefa *Problema na distribuição de baguetes*, e com Filipa, por exemplo, nas tarefas *O aniversário da Ana* e *Daniel e o leite* – ajudou as alunas “a retratar, esclarecer ou aprofundar uma ideia matemática, realçando as suas características essenciais” (NCTM, 2007, p. 240).

Em suma, os conhecimentos matemáticos mobilizados pelas alunas constituíram importantes recursos para a resolução das tarefas, possibilitando a seleção de estratégias que, em algumas ocasiões, acabaram por se revelar infrutíferas mas que, no final, permitiram chegar ao resultado pretendido. Também as representações que utilizaram constituíram importantes ferramentas de apoio ao seu raciocínio, possibilitando e facilitando a interpretação, a comunicação e a discussão de ideias matemáticas, tal como salienta Tripathi (2008).

5.2.3. Dificuldades experienciadas

Da análise das tarefas exploradas nas entrevistas, é possível concluir que as alunas revelaram algumas dificuldades em explicar e justificar algumas das suas afirmações. Por exemplo, na tarefa *Terrenos nas aldeias*, Filipa reconhece corretamente que a área do terreno da família Castro é metade da área do terreno da família Duarte. No entanto, baralha-se e apresenta dificuldades em apresentar uma justificação que o comprove.

Também Márcia, na tarefa *Problema na distribuição de baguetes*, apresentou dificuldades em justificar como sabia que $\frac{1}{5}$ de uma metade correspondia a $\frac{1}{10}$, evidenciando, como referem Lannin, Ellis e Elliot (2011), que convencer os outros sobre o porquê de uma afirmação ser verdadeira é uma atividade por vezes mais complexa do que se pensa.

No entanto, quando ultrapassam as suas dificuldades, mostram conseguir justificar apoiando-se “em conhecimento anterior de procedimentos, propriedades e conceitos matemáticos” (Henriques, 2012, p. 159). Por exemplo, Filipa, depois de ultrapassada a dificuldade referida anteriormente, recorrendo a um esquema de prova simbólico, justifica, através de cálculos, que a área do terreno da família Castro é metade da área do terreno da família Duarte, calculando metade de $\frac{1}{3}$, fração que representava o terreno da família Duarte.

Uma outra dificuldade que surgiu foi ao nível da escolha das representações dos números racionais não negativos. Por exemplo, Márcia, na tarefa *Fazendo bolos deliciosos*, opta por utilizar os números decimais. No entanto, após verificar que essa estratégia dificultava a resolução da tarefa, decide utilizar os números representados sob a forma de fração.

Além disso, as alunas revelaram também dificuldades, ainda que pontuais, em interpretar o significado dos resultados obtidos face ao contexto da tarefa proposta. Por exemplo, na tarefa *Daniel e o leite*, ambas as alunas referiram que Daniel não conseguia encher seis copos de $\frac{1}{5}$ de litro de leite porque obtiveram como resultado o número 7,5 e não o número 6. Assim, as duas alunas encararam o resultado obtido como a única resposta àquela questão.

Ainda no que diz respeito às dificuldades observadas, Filipa, a propósito da comparação de frações na tarefa *Problemas na distribuição de baguetes*, optou por utilizar uma estratégia de "pensamento diferencial" (Ponte & Quaresma, 2011, p. 59), calculando as diferenças entre os numeradores e os denominadores das frações que representavam a quantidade de baguete que coube a cada aluno dos diferentes grupos, assumindo que, por exemplo, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$ eram equivalentes porque a diferença entre 4 e 3 era igual à diferença entre 8 e 7, o que indicava que, nestes dois grupos, os alunos comeram a mesma quantidade de baguete. Como referem Ponte e Quaresma (2011), "esta é uma forma de pensar característica dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorrectos" (p. 59), como aconteceu no caso de Filipa.

É de salientar que, possivelmente, muitas das dificuldades das alunas ao nível da explicitação do seu raciocínio resulta do facto de este tipo de tarefas, cuja exploração exige a participação mais ativa dos alunos e a assunção de um outro papel, ser uma prática pouco frequente nas aulas, como também revelou Sezões (2014) no seu estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático na Educação pré-escolar e no 1.º ciclo do Ensino Básico.

5.3. Considerações finais

A realização deste estudo constituiu uma grande fonte de aprendizagem, possibilitando-me não só compreender o que exige a realização de uma investigação deste tipo, mas também aprofundar os meus conhecimentos sobre o raciocínio matemático e sobre o seu desenvolvimento. Para além disso, contribuiu para que, num futuro, como professora de Matemática mas, acima de tudo, como professora, esteja mais consciente do tipo de tarefas que proponho aos meus alunos e da forma como devo gerir e dinamizar a sua exploração nas aulas, tentando incutir nos alunos um espírito de partilha e de reflexão e discussão das ideias partilhadas.

Foi difícil gerir o papel de professora/investigadora tendo em conta os constrangimentos com que me deparei: para além de ter que planificar as aulas semanal e diariamente e de identificar tarefas que me permitissem recolher dados para o meu estudo, tinha a preocupação de ter que trabalhar exatamente os mesmos conteúdos que estavam a ser lecionados em todas as turmas do 5º. ano de escolaridade da escola, devido ao projeto Turma X. Devido a este projeto, a seleção de tarefas revelou-se um processo complexo e acabou por ficar um pouco limitada. Além disso, foi complicado escolher tarefas que favorecessem o aparecimento de conjeturas e generalizações a propósito do conteúdo que estava a ser lecionado aquando da intervenção pedagógica.

A realização das entrevistas clínicas constituiu também um grande desafio. Saber que questões colocar sem orientar demasiado as alunas revelou-se bastante difícil. Ao analisar as suas transcrições senti, por vezes, que poderia ter explorado melhor determinados aspetos da tarefa ou poderia ter colocado questões que direcionassem menos as alunas.

O estudo que realizei mostra que potenciar o desenvolvimento do raciocínio matemático na sala de aula é possível desde que o professor proporcione aos alunos oportunidade para tal. No entanto, não é algo que se consiga num curto espaço de tempo.

Para terminar, faço um balanço positivo da investigação que realizei que, para além de me permitir evoluir a nível pessoal, fez-me refletir sobre muitos aspetos importantes a nível profissional. Uma recomentação que deixo para futuras investigações a propósito do raciocínio matemático dos alunos é que, independentemente das tarefas propostas, lhes possibilitem tempo para não só explorarem e resolverem determinado tipo de tarefas matemáticas, como também amadurecerem as suas ideias e compreenderem os conceitos e conhecimentos matemáticos envolvidos, bem como as relações que existem entre eles. Ensinar Matemática “à pressa” não é, para mim, propício a um ensino de Matemática com compreensão.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Isolina, O. (1999). *A matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação - Um guia prático e crítico.* Porto: ASA Editores.

Agrupamento de Escolas J. S.. (2013). *Projeto Educativo 2013/2017*. XXX: Agrupamento de Escolas J. S..

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Lisboa: Universidade Aberta.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? *Cadernos de Formação de Professores, 1*, 21-30.

Balacheff, N. (1 de Março de 2013). *Quelques éléments de vocabulaire, à propos de preuve et de démonstration*. Obtido em Novembro de 2015, de Où il est question de didactique et de technologies: http://nicolas-balacheff.blogspot.pt/2013/03/quelques-elements-du-vocabulaire-propos.html

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Bell, J. (2010). *Como realizar um projecto de investigação.* Lisboa: Gradiva Publicações.

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática, 63*,11-15.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* (Tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Boavida, A. M. (2015). Pensando sobre a Matemática para perspetivar o seu ensino. *Educação Matemática, 132,* 1.

Boavida, A. M., Gomes, A., & Machado, S. (Novembro/Dezembro de 2002). Argumentação na aula de matemática: Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa. *Educação e Matemática, 70,* 18-26.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico.* Lisboa: Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Cabrita, I., & Fonseca, L. (2012). Capacidades transversais em educação em matemática. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, & C. Nunes (Eds.), *Atas do*

XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 539-544). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante, XXI (2)*, 51-77.

Carmo, H., & Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Invetigação: Guia para Auto-aprendizagem.* Lisboa: Universidade Aberta.

Carvalho, R., & Ponte, J. P. (2014). O papel das tarefas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais. In J. P. Ponte (org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 31-54). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Coelho, V. (2010). *Comunicação matemática num contexto de resolução de problemas: uma experiência com alunos do 9.º ano* (Tese de mestrado, Universidade do Algarve). Faro: Universidade do Algarve.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática.* Coimbra: Edições Almedina, S.A.

Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 221-243.

Delgado, C. (2013). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número: Um estudo no 1.º Ciclo* (Tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Domingos, A., & Rodrigues, M. (2013). Raciocínio e Demonstração. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa, & R. A. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013 - Raciocínio Matemático* (pp. 381-385). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Duarte, J. (2008). Estudos de caso em educação. *Revista Lusófona de Educação*, 113-132.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at work - Constructing Fractions, Decimals and Percents*. Portsmouth: Heinemann.

Galen, F. v., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. v., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense Publishers.

Henriques, A. C. (2012). O raciocínio matemático na exploração de tarefas de investigação: Um estudo com alunos universitários. *Quadrante, XXI, (2)*, 139-161.

Hunting, R. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 145-165.

Lannin, J., Ellis, A., & Elliott, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten - Grade 8.* Pennsylvania: National Council of Teachers of Mathematics.

Martin, W. G., & Kasmer, L. (2009). Reasoning & sense making. *Teaching children mathematics, XVI, (15)*, 284-291.

Martins, I. M. (2010). *O raciocínio matemático em actividades de investigação numa turma do 5.º ano do ensino básico* (Tese de mestrado, Universidade do Algarve). Faro: Universidade do Algarve.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically.* Bristol: Addison-Wesley.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, XXI, (2)*, 81-109.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2013). Processos de raciocínio matemático em alunos do 9.º ano: generalização em números reais e inequações. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa, & R. A. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013 - Raciocínio Matemático* (pp. 235-295). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Acção.* Porto: Porto Editora.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

MEC. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER: revista de educação*, 49-65.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2009). *Números racionais não negativos - Tarefas para o 5.º ano.* Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante, XXI, (2)*, 111-137.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14 (1)*, 89-107.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido de número racional.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Monteiro, C., Pinto, H., & Ribeiro, S. (2014). *mp.5 - Matemática para pensar 5.º Ano*. Lisboa: Sebenta.

Mota, D. A. (2014). *Tarefas matemáticas para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos do ensino básico* (Tese de mestrado, Universidade de Aveiro). Aveiro: Universidade de Aveiro - Departamento de Educação.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM. (2009). *Focus in High School Mathematics - Reasoning and Proof.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveira, C., Magro, F., Fidalgo, F., & Louçano, P. (2013). *Pi (Volume 2) - Matemática 5º Ano*. Lisboa: ASA.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante, XXI, (2)*. 29-50.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* Lisboa: Universidade de Lisboa - Instituto de Educação.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA*, 153-180.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. Ponte (org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-30). Lisboa: Universidade de Lisboa - Instituto de Educação.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante, XX (1)*, 55-81.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Preston, R., & Garner, A. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics Teaching in the middle school, 9, (1)*, 38-43.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2013). Representações e raciocínio matemático nos números racionais. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa, & R. A. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013 - Raciocínio Matemática* (pp. 277-295). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación. *PNA, 4 (1)*, 1-14.

Russel, S. J. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In L. Stiff, & F. Curcio, *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 1-12). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Santos, L. (2013). O raciocínio matemático - Evocando Paulo Abrantes. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa, & R. A. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013 - Raciocínio Matemático* (pp. 15-30). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A avaliação e o raciocínio matemático. *Educação e Matemática, 100*, 51-60.

Sezões, V. (2014). *Prática de Ensino Supervisionada em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico: O desenvolvimento do raciocínio matemático* (Tese de mestrado, Universidade de Évora). Évora: Universidade de Évora - Departamento de pedagogia e educação.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91, (8)*, 670-674.

Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the middle school, 13, (8),* 438-445.

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de Investigação em Educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In P. Palhares (coord.), *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 7-43). Lisboa: LIDEL.

Velez, I., & Ponte, J. P. (2013). Promover o raciocínio dos alunos: planificar, conduzir e refletir sobre o trabalho na sala de aula. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa, & R. A. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013 - Raciocínio Matemático* (pp. 358-374). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Ventura, H., & Oliveira, H. (2014). Uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais através de tarefas que promovem o modelo da barra numérica. In J. Ponte (org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 83-112). Lisboa: Universidade de Lisboa - Instituto de Educação.

Walls, F. (2005). Challenging Task-driven Pedagogies of Mathematics. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche, *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 751-758). Melbourne: Merga.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Heuvel-Panhuizen, *Actas da 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-24). Utrecht: Utrecht University.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter, *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Anexos

Anexo 1

O problema na distribuição das baguetes[14]

No ano passado, eu e uma das minhas turmas decidimos fazer uma visita de estudo para recolher informações para um projeto que estávamos a desenvolver. Pedimos a colaboração de alguns pais que estavam disponíveis para nos acompanhar e, cada um dos grupos de trabalho, foi visitar um local diferente já que tinha um adulto perto.

Cinco alunos foram para o Planetário, quatro foram para o Centro de Ciência Viva, cinco foram para o Museu de Arte Moderna e, por último, oito foram para a Biblioteca Nacional. Ficou combinado que a funcionária do bar prepararia baguetes, daquelas muito grandes, para o lanche. O problema é que fez apenas dezassete baguetes e distribuiu-as do seguinte modo: deu três baguetes aos quatro alunos que foram para o Centro de Ciência Viva e quatro aos cinco que foram ao Museu de Arte Moderna; os oito que foram à Biblioteca ficaram com sete baguetes e as três restantes deu-as aos cinco alunos do Planetário.

Na aula seguinte, conversámos sobre como tinha corrido a visita de estudo. Alguns dos meus alunos queixaram-se de que a distribuição das baguetes não tinha sido justa, pois alguns tinham tido mais comida do que outros. O que pensam disto? Será que tinham razão?

14 Retirado de: Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at work - Constructing Fractions, Decimals and Percents.* Portsmouth: Heinemann.

Anexo 2

Investigando dízimas[15]

Uma fração unitária é aquela que tem numerador igual a 1.

Exemplo: $\frac{1}{2}$

Dada uma fração, se dividires o numerador pelo denominador obténs uma **dízima**.

1. Que tipo de dízimas são geradas pelas frações unitárias? Existe alguma relação entre o tipo de dízimas geradas e os denominadores das frações?
Investiga e formula hipóteses.

2. Investiga agora as frações não unitárias. Acontece o mesmo**?**

---

15 Adaptado de: Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2009). *Números racionais não negativos - Tarefas para o 5.º Ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Anexo 3

Comparando racionais

PARTE 1[16]

Tarefa 5 Comparando racionais

Qualquer número, inteiro ou não inteiro, que possa ser representado por uma fração diz-se um número racional.

a) Qual dos seguintes números racionais é o maior? Explica o teu raciocínio.

i. $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{4}$ **ii.** $\frac{7}{2}$ ou $\frac{5}{2}$ **iii.** $\frac{1}{4}$ ou 0,26 **iv.** 0,2547 ou 0,254 656 **v.** $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{3}$

b) Indica um número racional:

i. maior do que 0,27 e menor do que 0,271; **ii.** maior do que $\frac{13}{3}$ e menor do que $\frac{14}{3}$.

Para obter uma fração equivalente a uma fração dada, basta multiplicar ou dividir o numerador e o denominador dessa fração por um mesmo número, diferente de zero.

De seguida, apresentam-se dois conjuntos: um conjunto constituído apenas por frações equivalentes a $\frac{4}{3}$ e outro por frações equivalentes a $\frac{5}{4}$.

Frações equivalentes a $\frac{4}{3}$

$\frac{8}{6}$ $\frac{12}{9}$ $\frac{20}{15}$ $\frac{24}{18}$ $\frac{16}{12}$ $\frac{28}{21}$

Frações equivalentes a $\frac{5}{4}$

$\frac{10}{8}$ $\frac{15}{12}$ $\frac{25}{20}$ $\frac{30}{24}$ $\frac{20}{16}$

c) Relembrando que frações equivalentes representam o mesmo número, escolhe duas frações que facilitem a comparação entre $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{4}$ e indica qual dos símbolos <, > ou = completa corretamente a expressão $\frac{5}{4}$ ___ $\frac{4}{3}$. Explica o teu raciocínio.

d) Com base na resolução da alínea anterior, descreve uma regra que permita comparar dois números racionais representados por duas frações com denominadores diferentes.

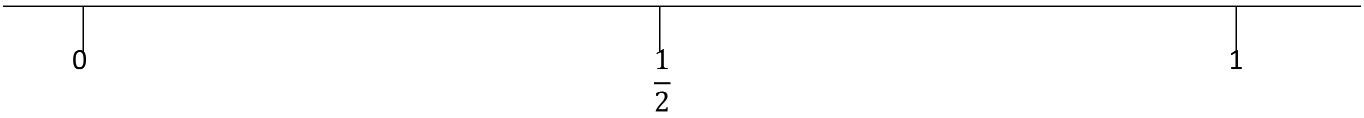
16 **Retirado de:** Oliveira, C., Magro, F., Fidalgo, F., & Louçano, P. (2013). *Pi (Volume 2) - Matemática 5º Ano*. Lisboa: ASA.

PARTE 2[17]

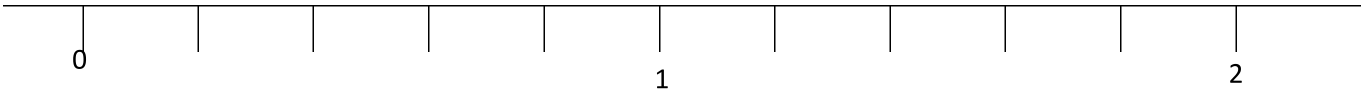
Uma reta pode ser utilizada para localizar números racionais. A essa reta costuma chamar-se reta numérica. Esta reta é muito útil na ordenação e comparação de números.

1. Localiza, na reta numérica, os pontos que correspondem aos seguintes números racionais:

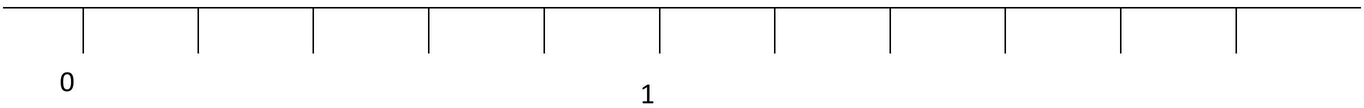
a) $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ 25% 50% 75% 100% 0,25 0,5 0,75



d) $\frac{6}{5}$ e $1\frac{1}{5}$



e) $\frac{1}{5}$ $1\frac{1}{5}$ 0,4 1,2 $\frac{9}{10}$ $\frac{15}{10}$ 2 $\frac{1}{2}$



---

17 Adaptado de: Oliveira, C., Magro, F., Fidalgo, F., & Louçano, P. (2013). *Pi (Volume 2) - Matemática 5º Ano.* Lisboa: ASA.

Anexo 4

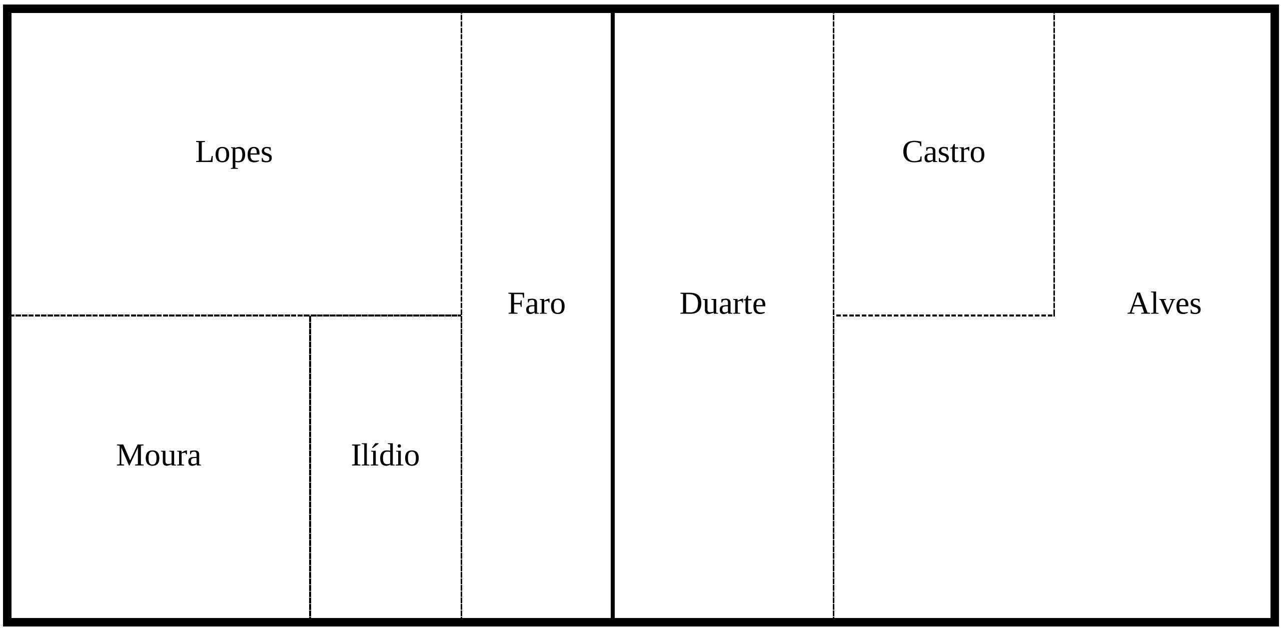
Terrenos nas Aldeias[18]

Parte 1: Aldeia Amarela e Aldeia Branca

Em duas aldeias vizinhas, algumas das famílias possuem terrenos de cultivo que estão distribuídos conforme mostra a figura seguinte.

1. Que fração dos terrenos de cultivo da respetiva aldeia possui cada um dos

Aldeia Amarela ***Aldeia Branca***



proprietários? Explica o teu raciocínio.

2. Algumas famílias venderam os seus terrenos a outros proprietários:

- A família Lopes comprou todo o terreno da família Moura.

- A família Duarte vendeu metade do seu terreno à família Castro.

a) Qual a fração dos terrenos que possui, agora, cada uma das famílias?

18 Adaptado de: Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2009). *Números racionais não negativos - Tarefas para o 5.º Ano.* Lisboa: Ministério da Educação.

Parte 2: Em busca do algoritmo

Quando precisamos adicionar ou subtrair é necessário dispor de um conjunto de procedimentos que conduzam rapidamente ao resultado pretendido. Esse conjunto de procedimentos chama-se algoritmo.

Um algoritmo só é útil se descrever claramente e de forma compreensível os passos a seguir e se conduzir sempre ao resultado correto.

1. A partir das questões anteriores (Parte 1), descreve um algoritmo para adicionar frações. Regista o algoritmo de forma clara, tal como se fosses enviá-lo a alguém com quem não tivesses oportunidade de conversar e que, por isso, lendo a tua mensagem deveria compreender perfeitamente as tuas instruções.

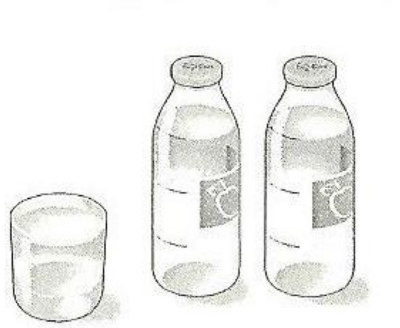
2. Cria agora um algoritmo para subtrair frações. Regista o algoritmo de forma clara, tal como se fosses enviá-lo a alguém com quem não tivesses oportunidade de conversar e que, por isso, lendo a tua mensagem deveria compreender perfeitamente as tuas instruções.

3. Experimenta os teus algoritmos e verifica se funcionam, ou não, nos casos que se seguem:

$\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{5}+\frac{5}{3}$

Anexo 5

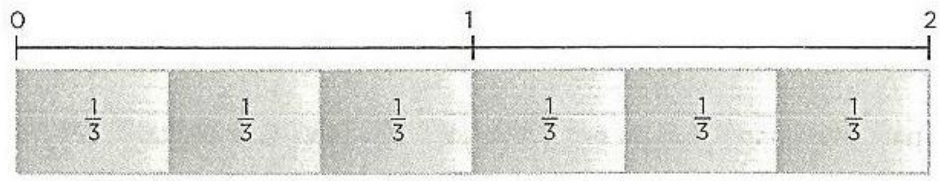
O piquenique[19]



A Marta e os primos fizeram um piquenique.

Levaram 2 litros de sumo de maçã. Quantos copos de $\frac{1}{3}$ litro foi possível encher com aquela quantidade de sumo?

Observa como a Marta pensou para responder à questão.

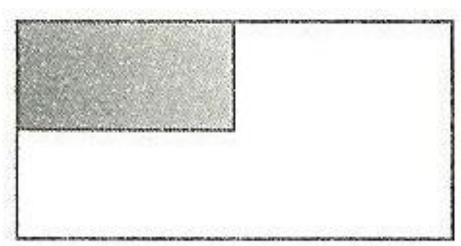


$$2 \div \frac{1}{3} = 6$$

1. Explica como é que, através da expressão $2 \div \frac{1}{3}$, a Marta poderá ter descoberto quantos copos poderia encher.

2. Se os copos levassem $\frac{1}{6}$ de litro, quantos copos a Marta enchia? Podes utilizar esquemas ou material manipulável.

3. Para o piquenique levaram ainda $\frac{1}{4}$ de tarte, que foi partilhado igualmente por dois dos primos da Marta. Que porção de tarte coube a cada um?



---

19 Adaptado de: Monteiro, C., Pinto, H., & Ribeiro, S. (2014). *mp.5 - Matemática para pensar 5.º Ano.* Lisboa: Sebenta.

Anexo 6

<u>Fazendo bolos deliciosos</u>[20]

Num livro de receitas para crianças, encontrei uma receita para fazer um bolo de iogurte que parece ser delicioso. Na tabela 1 podes observar os ingredientes necessários para fazer um bolo para 4 pessoas. Repara que para sabermos as quantidades de farinha, manteiga e iogurte que temos que utilizar, usa-se o copo de iogurte como unidade de medida. No caso do açúcar e da água usam-se colheres.

Quais as quantidades de ingredientes necessárias para fazer a receita do bolo para 2 pessoas? E de que quantidades de ingredientes precisamos, se quisermos fazer um bolo para 8 pessoas? E para 6 pessoas? E para 10 pessoas? E para 16 pessoas?

Regista na tabela 1 as tuas descobertas.

	Número de pessoas					
Ingredientes	**4**	**2**	**8**	**6**	**10**	**16**
Farinha (copos)	$\frac{3}{4}$					
Manteiga (copos)	$\frac{1}{4}$					
Açúcar em pó (colheres de sopa)	3					
Água (colheres de chá)	$2\frac{1}{2}$					
Iogurte (copos)	$1\frac{1}{3}$					

Tabela 1: Quantidades de ingredientes necessárias para fazer a receita do bolo delicioso

20 Adaptado de: Galen, F. v., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. v., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6.* Rotterdam: Sense Publishers.

Anexo 7

O aniversário da Ana[21]

1. Na festa de aniversário da Ana havia 2 litros de sumo de maçã. Quantos copos de $\frac{1}{3}$ de litro se poderão encher com o sumo de maçã?

2. Só alguns amigos da Ana gostavam de sumo de maçã. Destes, cada um bebeu $\frac{2}{3}$ de litro do sumo de maçã que havia. Quantos eram os amigos da Ana que só gostavam de sumo de maçã?

3. A mãe da Ana comprou algumas tortas para a festa. Se cada convidado comer $\frac{2}{5}$ de uma torta, para quantos convidados darão 3 tortas? Sobrará alguma coisa?

Daniel e o leite[21]

1. O Daniel comprou $1\frac{1}{2}$ de litros de leite. Se beber $\frac{1}{2}$ de litro de leite por dia, para quantos dias chega o leite que comprou?

2. Com a quantidade de leite que o Daniel comprou poderão encher-se 6 copos de $\frac{1}{5}$ de litro?

21 Adaptado de: Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* Lisboa: Universidade de Lisboa - Instituto de Educação. **(**http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4516)