

O Ensaio de 1939 de António Monteiro, o seu contexto e a sua importância

José Francisco Rodrigues (Ciências/ULisboa)

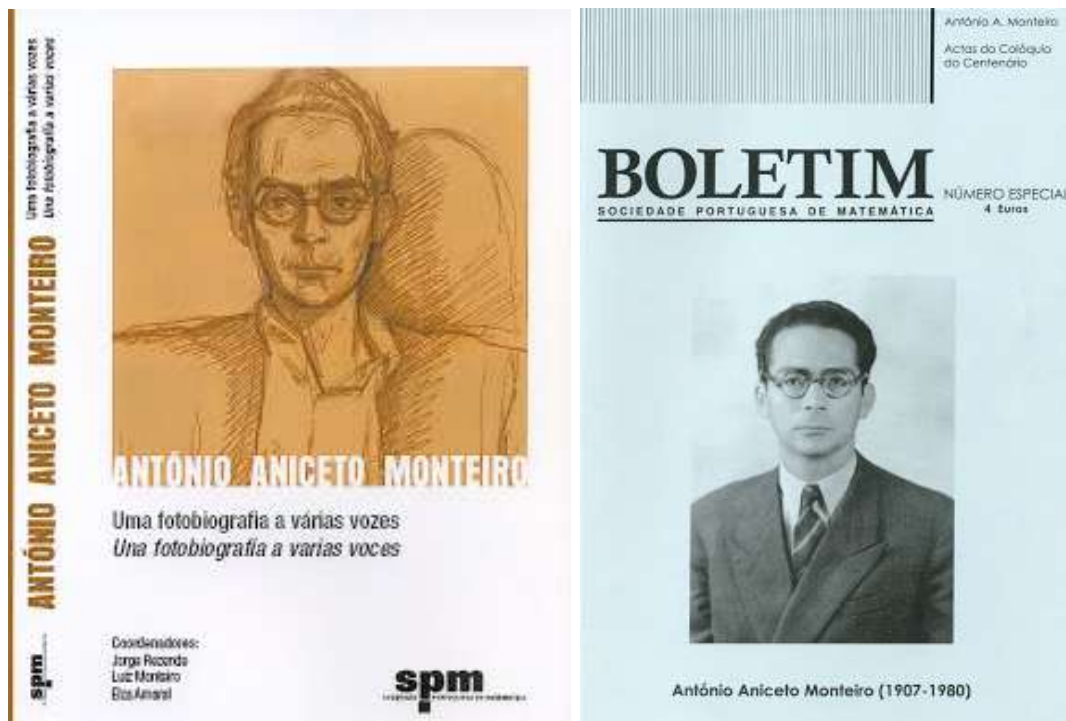
Academia de Ciências de Lisboa — Sessão da Classe de Ciências de 15 fevereiro de 2018

O inédito e ignorado "*Ensaio sobre os FUNDAMENTOS da ANÁLISE GERAL*" de 1939, prémio Artur Malheiros de 1938 atribuído pela Academia de Ciências de Lisboa a António Aniceto Ribeiro Monteiro, é uma monografia que introduz o modernismo matemático e prepara uma viragem na investigação matemática em Portugal, antecedendo a criação do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, em 1940, apoiado pelo Instituto para a Alta Cultura.

Regressado de Paris, onde se doutorara em 1936 com Maurice Fréchet (1878-1973), Monteiro faz uma extraordinária e original síntese, em quatro capítulos abstratos, que vai da *Teoria dos Conjuntos* à *Análise Geral*, passando pela *Álgebra Moderna* e pela *Topologia Geral*, e estabelece, em bases firmes, a via da investigação do movimento matemático português no início da década de quarenta do século XX. Nesta comunicação, motivada pela reorganização dos arquivos da Academia em fins de 2015, apresentamos uma introdução e uma análise preliminar deste importante *Ensaio*, agora publicado em *fac-símile*, das suas fontes e da sua influência que se pode identificar nos posteriores trabalhos de Monteiro e dos seus discípulos.

António Aniceto Monteiro (1907-1980) — matemático modernista, fundador e professor

Em 2007, no centenário de António Monteiro, a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) prestou-lhe uma justíssima homenagem, publicando uma notável fotobiografia [AAM_Fb2007] e organizando um Colóquio Internacional na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), do qual resultou um número especial do seu Boletim [AAM_Bc2007].



No ano seguinte, foi publicada uma extensa compilação das suas *Obras*, em oito volumes com cerca de 2800 páginas, onde não foi possível incluir o seu *Ensaio* de 1939, pois na altura não era conhecida nenhuma cópia. Na apresentação das *Obras* [AAM_O2008], Jean-Pierre Kahane, da

Academia das Ciências de Paris, iniciou o seu significativo elogio escrevendo: "*The works of António A. Monteiro belong to the world history of mathematics. They cover a large variety of topics from classical analysis to topology and from advanced algebra to logic in its more modern chapters. Some of them come from courses and synthetic presentations, but the majority of them are research papers. They are presented in different styles, occasionally handwritten, and also in different languages. Despite their intrinsic value, these works are a testimony of an age and of an exceptional life. They were written, in four different countries: France, Portugal, Brazil and Argentina. Monteiro was the founder of mathematical journals and various mathematical institutions, first in Portugal, then in Latin America. He had to emigrate from Portugal because of Salazar's regime and was also affected by the military dictatorship in Argentina. His life testifies the link between the struggle for science and the struggle for freedom.*"

Nascido em Moçâmedes (Angola) a 31 de maio de 1907, filho de um oficial do exército colonial português, de quem fica orfão em 1915, vem para Lisboa frequentar o Colégio Militar entre 1917 e 1925, ano em que se inscreve na Faculdade de Ciências de Lisboa nos cursos preparatórios para uma carreira militar. Aluno de Pedro José da Cunha (1867-1945) a *Cálculo Diferencial, Integral e das Variações*, ainda antes da sua licenciatura em 1930 na Universidade de Lisboa, já em Ciências Matemáticas, revelou as suas tendências e aptidões para a investigação, tendo obtido no ano seguinte uma bolsa da Junta de Educação Nacional (JEN) para estudar em Paris onde apresentou a sua tese de doutoramento em junho de 1936, sob a orientação de Maurice Fréchet (1878-1973).

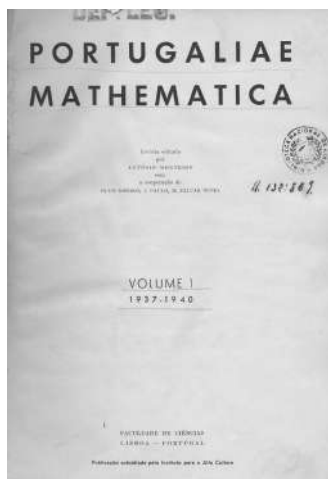
Nos primeiros quatro anos da sua estada de cinco anos letivos em Paris (1931-36), Monteiro, ultrapassou as deficiências da sua preparação em Portugal, frequentando vários cursos das "*principais teorias da especialidade que modernamente se têm criado e desenvolvido*", de G. Julia, A. Denjoy, E. Goursat, P. Montel e M. Fréchet, mas só em 1934 e em 1935, já sob a orientação deste último professor, é que publica os seus primeiros resultados de investigação em duas notas nos *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, os quais irão determinar a sua tese de 1936 "*Sur l'additivité des noyaux de Fredholm*", na Universidade de Paris. Conforme revela a sua correspondência e os seus relatórios de bolseiro da JEN em Paris, naturalmente influenciado pelo seminário de J. Hadamard no *Collège de France* e pela frequência dos cursos e da biblioteca no *Institut Henri Poincaré*, Monteiro assume a sua missão de "*também estudar em Paris a organização dum Centro de Estudos Matemáticos que teria, entre outros, o objectivo de realizar o ressurgimento completo das tradições matemáticas portuguesas*", chegando mesmo a referir a aquisição de livros para o "*Instituto de Matemática*", revelando a sua preocupação e empenho nessa missão [AF, p.109].

O seu regresso a Portugal é marcado pelo início da guerra civil em Espanha e pela publicação, a 14 de setembro de 1936, do Decreto-lei nº27003, que obrigava os funcionários públicos e, por extensão os bolseiros do Instituto para a Alta Cultura (IAC), que havia substituído a JEN no novo Ministério da Educação Nacional, a assinar a declaração salazarista de compromisso político: "*Declaro, por minha honra que estou integrado na ordem social estabelecida pela Constituição política de 1933, com activo repúdio do comunismo e de todas as idéas subversivas*". Com a sua corajosa e honrosa recusa em assinar essa declaração, decorrente da sua rigorosa coerência intelectual que, durante toda a sua vida e apesar de não se lhe serem conhecidas filiações partidárias, o faria afirmar-se como anti-fascista convicto [JR2], Monteiro, teria dito: "*não aceito limitações à minha inteligência*". Fica assim impossibilitado de prosseguir em Portugal a carreira universitária que irá desenvolver no seu exílio, em 1945 no Brasil, e na Argentina, de dezembro de 1949 até à sua jubilação e afastamento, também por razões políticas, da Universidad Nacional del Sur a 31 de março de 1975, onde era *Profesor Emérito* desde 1972 [AAM_Fb2007].

Apesar das dificuldades económicas de ter de viver de explicações em Lisboa, com o espírito de missão e com a capacidade de iniciativa que lhe eram patentes, a fortíssima influência e a determinante atividade de Monteiro ficaram indeléveis na breve década do *Movimento Matemático Português* (1936-46), iniciada com as atividades do *Núcleo de Matemática, Física e Química*, em finais de 1936, com na fundação da revista científica *Portugaliae Mathematica* em 1937, com o início do *Seminário de Análise Geral* em 1939, a criação em 1940 do *Centro de Estudos de Matemática de Lisboa*, pelo IAC e anexo à FCUL sob a presidência de Pedro José da Cunha e sob a direção científica de Monteiro, e também com a fundação da *Gazeta de Matemática* e da SPM, a 12 de dezembro de 1940.

Entre junho de 1937 e dezembro de 1942, a atividade científica e académica de Monteiro em Lisboa é efetuada na qualidade de tarefeiro do IAC como inventariador de bibliotecas científicas em Portugal, sendo autor de um trabalho pioneiro cujo relatório foi publicado em 1939 pelo IAC [IP], na altura presidido por A. Celestino da Costa [AAM_O2008]. A notável atividade científica e de

orientação de jovens matemáticos nos três anos iniciais da atividade do *Centro de Estudos de Matemática de Lisboa*, foi marcada pela influência das ideias modernistas do *Ensaio* de um tarefeiro/inventariador do IAC, culminando com a visita de Maurice Fréchet, no início de 1942, e com a sucessiva partida dos jovens bolsheiros para o estrangeiro, incluindo os dois primeiros discípulos portugueses de Monteiro, Hugo Ribeiro para a ETH de Zurique e de José Sebastião e Silva para a Universidade de Roma.



M. Fréchet, P. J. da Cunha e A. Monteiro na Faculdade de Ciências de Lisboa no início de 1942.

Iniciou, ainda em 1941, a sua colaboração com a Faculdade de Ciências do Porto com uma conferência de "*Introdução à Topologia Geral*", seguido de um curso no outono do ano seguinte sobre "*Introdução à Noção de Função Contínua*", já no âmbito do *Centro de Estudos de Matemática do Porto*, criado em 1942. Para aí transferiu-se em finais de 1943 e iniciou Alfredo Pereira Gomes, o seu terceiro discípulo em Portugal, na Análise Geral, tendo dirigido o *Seminário de Topologia Geral* durante o ano seguinte até à sua partida com a família para o Rio de Janeiro, em fevereiro de 1945. A sua estada no Porto foi subsidiada pela *Junta de Investigação Matemática* (JIM), criada em 4 de outubro de 1943, conjuntamente com Ruy Luis Gomes e Aureliano Mira Fernandes, uma notável associação patrocinada por fundos privados, que, reunindo a quase totalidade dos (poucos) investigadores portugueses no país, tinha como objetivo primeiro "*promover o desenvolvimento da investigação matemática*" e teve um papel muito importante no financiamento das publicações científicas, em particular à *Portugaliae Mathematica* depois do IAC deixar de lhe dar o apoio inicial que se limitou aos três primeiros volumes [RLG].

Entre 1945 e 1948, Monteiro foi professor de Análise Superior na Universidade do Brasil, hoje Universidade Federal do Rio de Janeiro, onde lecionou Topologia Geral, Análise Funcional e Conjuntos Ordenados, Reticulados e Álgebras de Boole. Aí teve forte influência em jovens como Maurício Peixoto, que foi seu co-autor, Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, cuja tese de 1949 resolveu uma questão colocada pelo mestre, e ainda em Leopoldo Nachbin [LN], a quem emprestou os dois primeiros volumes de *Topologie Générale* de Bourbaki [BII-III] e que lhe sucedeu na direção da série brasileira de monografias *Notas de Matemática*. Esta notável série, que Monteiro havia fundado em 1948 e que se publicou no Rio de Janeiro até 1972, foi prosseguida, a partir do volume 48, pela *North-Holland Publishing Company* e atingiu em 2008, já na *Elsevier*, o número 208 da coleção. Ainda no Rio de Janeiro, foi membro fundador do *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas* em 1949, tendo partido no fim desse ano para a Argentina, por a Embaixada de Portugal no Rio de Janeiro ter convencido o Reitor da Universidade do Brasil a não lhe renovar o contrato devido às suas intervenções cívicas contra o regime português.

Nomeado Professor da Universidad Nacional de Cuyo, San Juan, Argentina, em 1950, Monteiro funda aí a *Revista Matemática Cuyana*, com M. Cotlar e E. Zarantonello em 1955. É daí que envia o interessante artigo *Problemas da cultura matemática portuguesa* [AAM_O2008], publicado em 1954 na revista *Ciência*, da Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa, onde conclui "*que o problema principal do momento consiste na criação de um INSTITUTO PORTUGUÊS DE MATEMÁTICA que se dedique fundamentalmente à realização de trabalhos de investigação matemática e ao ensino da investigação matemática*". Apesar de ter sido convidado para a Universidade de Buenos Aires, Monteiro, com alguns dos seus novos discípulos argentinos, muda-se em 1957 para a recém criada Universidad Nacional del Sur, em

Bahía Blanca, onde funda o Instituto e a Biblioteca de Matemática, prosseguindo a sua investigação que, entretanto, se tinha centrado na Lógica Algébrica e em Estruturas Algébricas Ordenadas (Reticulados). Aí inicia uma profunda renovação da licenciatura em matemática com impacto em toda a Argentina [EO], cria uma nova série de *Monografias de Matemática* e funda as *Notas de Lógica Matemática*, em 1964, e as *Notas de Álgebra e Análisis* (1966). Em 1974 é nomeado membro honorário da *Unión Matemática Argentina*.

Apesar de ter passado um ano sabático, entre setembro de 1969 e agosto de 1970, na Europa, visitando colegas em várias universidades em França, Roménia, Bélgica, Itália e Inglaterra, só regressa a Lisboa em março de 1977, como Bolseiro do Instituto Nacional de Investigação Científica, onde retoma a sua investigação no Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais (C.M.A.F.) durante cerca de dois anos. Aí orienta o doutoramento de M. Isabel Loureiro, o seu quarto discípulo português, e elabora o extenso trabalho *Sur les Algèbres de Heyting Symétriques*, que em 1979 obtém o Prémio Gulbenkian de Ciência e Tecnologia, referido a 1978. Esta memória foi publicada no volume 39 de *Portugaliae Mathematica* [AAM_PM1980], o qual lhe foi dedicado postumamente. Numa carta de 5 de junho de 1978 enviada a Alfredo Pereira Gomes, o seu antigo discípulo do Porto, então professor da FCUL e diretor da *Portugaliae Mathematica*, na altura em recuperação pela SPM com o apoio do C.M.A.F., apesar do seu estado de saúde, Monteiro escreveu "*Estou realmente satisfeito com os resultados da minha actividade científica em Portugal. Isto deve-se sobretudo ao Centro de Matemática (C.M.A.F.), que me proporcionou o tempo livre para estudar.*" [APG].

De regresso a Bahía Blanca, Monteiro faleceu em 29 de outubro de 1980, no país do seu segundo exílio onde se radicara com a família e onde deixou uma influência intelectual marcante. Nas palavras do matemático argentino Eduardo Ortiz, Monteiro pertence "*to an old tradition of Argentinian progressive and independent thought to which the country owes some of its most valuable achievements*". Numa das últimas cartas, escreveu-lhe: "*asi es la vida caro Ortiz. Uno se usa y se gasta en tareas que no pueden terminarse: y a pesar de eso se inician con entusiasmo y dedicación, porque las esperanzas y certezas nunca se pierden. Tristezas de Bahia Blanca! nas margenes del Napostá; entre vientos y tormentas en que la tierra nos ahoga, veo Lisboa distante — recuerdos de mi infancia!*" [EO].

O Prémio Artur Malheiros de 1938

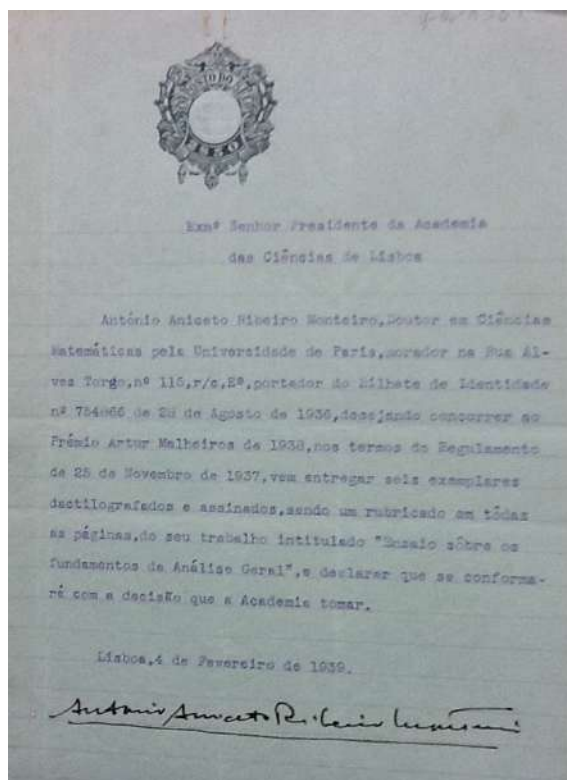
Em 1937 foi instituído na Academia de Ciências de Lisboa, um prémio científico anual no valor de 5000\$, destinado a estimular o progresso das ciências em Portugal e atribuível, por concurso, "*a autor português de obra original e inédita sobre o ramo de conhecimentos científicos*" que fosse indicado no edital de abertura. As áreas do conhecimento eram sete e abrangiam, em regra pela ordem seguinte, as ciências matemáticas, as ciências físicas e químicas, as ciências naturais, as ciências médicas, as ciências aplicadas, as ciências jurídicas, políticas e sociais e, concluindo, as ciências económicas e financeiras.

A abertura da primeira edição do "*Prémio Artur Malheiros de 1938*" é anunciada oficialmente a 5 de fevereiro de 1938 no Diário do Governo, "*pelo prazo de trezentos e sessenta e cinco dias*", solicitando que os candidatos entregassem "*até às dezasseis horas do dia em que terminar o prazo do concurso, seis exemplares dactilografados do seu trabalho, assinados e um deles rubricados em tôdas as folhas, acompanhados de requerimento de admissão, dirigido ao presidente da Academia*".

O *Ensaio*, dedicado à memória de seu pai, é submetido por António Monteiro no último dia do prazo, a 4 de fevereiro de 1939, na sequência da sua participação no *Núcleo de Matemática, Física e Química de Lisboa* havia mais de dois anos. Um mês depois, o Secretário Geral da Academia comunica-o aos quatro membros da Secção de Matemática, juntamente com um outro trabalho a concurso, da autoria de Jayme Araújo, sobre "*Algumas Modalidades teórico-práticas na Resolução e discussão do problema de Pothenot*", uma questão clássica de topografia plana, também conhecido como problema de Snellius-Pothenot, cuja primeira solução data do século XVII e consiste em determinar a posição de um ponto acessível desconhecido a partir de medições angulares a três outros pontos conhecidos.

Em cerca três meses, o júri examinou os trabalhos e deliberou o vencedor do prémio e, posteriormente, na sessão da Classe de Ciências de 6 de julho de 1939, foi aprovado, por unanimidade, o parecer e a atribuição do primeiro *Prémio Artur Malheiros - 1938* ao *Ensaio* de António Monteiro. O prémio só lhe foi entregue na Sessão da Classe de Ciências a 16 de novembro de 1939, após lhe ter sido comunicado oficialmente por carta de 4 de novembro pela Secretaria da Academia. Entretanto, é de registar a publicação a 1 de julho de 1939, no jornal *O Diabo* [AAM_O2008], de um desenho de

Monteiro por Manuel Mendes, artista plástico, escritor e resistente anti-fascista, ligado ao grupo da Seara Nova, com uma nota de M. Zaluar Nunes celebrando o prémio da Academia de Ciências.



Requerimento assinado por A. Monteiro em papel selado



Os dois principais contributos originais de Monteiro, referidos no Prefácio e enunciados no capítulo 4 do seu *Ensaio*, foram reconhecidos pelo parecer de 14 de junho de 1939, redigido por Aureliano Mira Fernandes. O relatório é também assinado pelos três outros matemáticos da Secção de Matemática da Academia, sendo a primeira assinatura de Pedro José da Cunha, enquanto presidente da Secção, e as outras de Santos Lucas e Manuel Peres.

O relatório/parecer é uma carta dirigida ao Presidente da Classe de Ciências da Academia que resumidamente expõe o que de essencial Mira Fernandes encontrara no *Ensaio*, por um lado, reconhecendo o seu valor e a sua atualidade e, por outro, revela que o relator estava muito razoavelmente a par dos progressos recentes da matemática, apesar da pobreza das bibliotecas científicas em Portugal na época. No entanto, elabora numa pequena confusão histórica quando refere no início do relatório que "*O nome de Análise Geral foi criado pelo professor Fréchet*", apesar de Monteiro ter escrito, logo na primeira linha do Prefácio do *Ensaio* e com mais rigor, que a *Análise Geral* fora fundada no princípio do século XX por Maurice Fréchet. De facto, Fréchet adotou mas não criou a expressão, hoje em caída em desuso, de *Análise Geral*, pois ela aparece, pela primeira vez, nas lições do matemático norte-americano E. H. Moore sobre "*Introduction to a form of General Analysis*", efetuadas na Universidade de Yale em setembro de 1906, as quais são citadas no livro de Fréchet de 1928 [MF]. Contudo, Mira Fernandes reconhece que a *Análise Geral* "*é uma ciência de criação recente cujos progressos podem justificar amanhã uma acertada mudança de nome*", algo que efetivamente veio a acontecer.

Efetivamente, Maurice Fréchet foi pioneiro ao propor, na sua tese de 1906 sob orientação de Jacques Hadamard (1865-1963), uma abordagem abstrata da *Análise Matemática* baseada em estruturas gerais: *classe* (L), espaços com convergência; *classe* (E), espaços com *écart*, i.e. com distância, renomeados espaços métricos por F. Hausdorff, em 1914, como uma subclasse de espaços topológicos, e *classe* (V), uma generalização dos espaços (E) munidos de vizinhanças (*voisinages*). Estas noções foram evoluindo e Fréchet expôs os seus resultados no influente livro *Les Espaces Abstraits* [MF], o qual marcou fortemente a atividade matemática inicial de Monteiro e, em particular, o seu *Ensaio*.

O testemunho auto-biográfico do matemático norte-americano Norbert Wiener (1894-1964), que interagiu diretamente com Fréchet na sua segunda viagem à Europa, por ocasião do Congresso

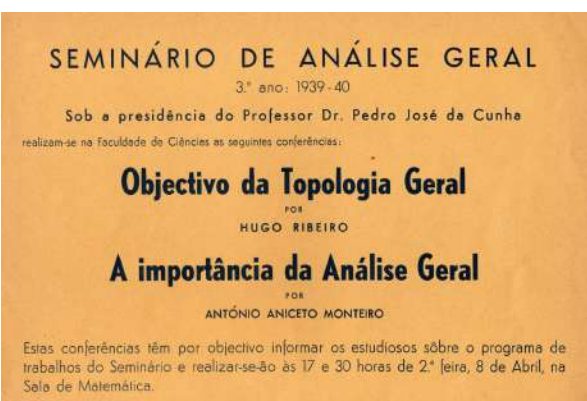
Internacional de Matemáticos realizado em Estrasburgo em 1920, é eloquente: "*The scholar I chose was Maurice Fréchet. It was Fréchet more than anyone else who had seen what was implied in the new mathematics of curves rather than points (...) One of the specific things which attracted me in Fréchet was that the spirit of his work [spirit of abstract formalism] was very closely akin to the work I had tried to do at Colombia on topology (...) My training with Russell and my later contact with the work of Whitehead had sensitized me to the use of formal logic tools in mathematics, and there was much in Fréchet's work which was suited from the very beginning to be embodied in the peculiar and highly original mathematical-logical language which Whitehead and Russell had devised for the Principia Mathematica.*" [NW].

O *Ensaio* de 1939 reflete claramente o "espírito de formalismo abstrato", que Monteiro absorveu de Fréchet e aí antecipou a Bourbaki, tendo ficado inédito e perdido no arquivo da Academia das Ciências de Lisboa. Por isso, não foi possível integrá-lo na publicação da sua obra (quase) completa em 2008 [AAM2008] e apenas, na sequência duma organização daquele arquivo se encontrou, em finais de 2015, o seu processo e quatro dos seis exemplares do *Ensaio*.

O "*Ensaio sobre os FUNDAMENTOS da ANÁLISE GERAL*" de 1939

Na frase inicial do Prefácio, Monteiro não podia ser mais claro: "*A Análise Geral foi fundada no princípio deste século por Maurice Fréchet, com o objectivo de generalizar o cálculo diferencial e integral para as funções em que a variável independente — e eventualmente a própria função — são elementos de natureza qualquer*"; a qual, citando uma frase de 1933 numa *Notice sur les travaux scientifiques* do seu professor, visa "o estudo das correspondências entre variáveis de natureza qualquer" (sublinhado no original).

Monteiro descreve de seguida o conteúdo do seu *Ensaio* que, com cerca de 130 páginas datilografadas, consiste em quatro capítulos: *A Teoria dos Conjuntos Abstractos* (13 p.); *Álgebra Abstracta* (52 p.); *Topologia Abstracta* (26 p.) e *Análise Abstracta ou Análise Geral* (38 p.). Completa o relativamente longo Prefácio, de nove páginas, com um parágrafo programático, que vai pôr em prática de imediato, com o *Curso de Introdução à Análise Geral*, do segundo semestre do ano académico de 1938-39, ainda no âmbito do Núcleo de Matemática, Física e Química de Lisboa, e no terceiro ano do Seminário de Análise Geral, em abril de 1940, já no âmbito do recém criado Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, a funcionar na Faculdade de Ciências sob a presidência de Pedro José da Cunha. Nesse parágrafo final escreve: "*Se com a realização deste trabalho conseguirmos chamar à atenção dos jovens estudiosos do nosso país para a importância sempre crescente da Análise Geral, fundada por M. Fréchet, cujos métodos tendem a dominar a estruturação da matemática moderna, podemos considerar o nosso objectivo atingido porque pensamos que nestas condições servimos a ciência de uma maneira geral e os estudiosos portugueses em particular. Por essa razão apresentamos este trabalho à Academia das Ciências de Lisboa para o concurso ao Prémio Científico Artur Malheiros de 1938.*"



Anúncios do curso de 1939 e do seminário de 1940, já no âmbito do Centro de Estudos de Matemática, de A. Monteiro na Faculdade de Ciências de Lisboa.

Considerando, como Fréchet, a Teoria dos Conjuntos Abstratos como um capítulo da Análise Geral, Monteiro caracteriza-a como sendo a teoria que "*se ocupa das propriedades dos conjuntos de pontos que se mantêm invariantes em relação ao grupo das transformações biunívocas*", tal como a Álgebra Abstrata, "*um dos capítulos mais recentes da matemática moderna*" trata das propriedades "*que se mantêm invariantes em relação ao grupo dos isomorfismos (correspondências biunívocas que respeitam a operação considerada)*" e a Topologia, também ela um capítulo da Análise Geral, é a teoria "*que estuda as propriedades dos conjuntos de pontos que se mantêm invariantes em relação ao grupo das transformações bicontínuas ou homeomorfias.*"

Finalmente no quarto e principal capítulo, Monteiro introduz "a noção de espaço algébrico-topológico — que podemos definir como um espaço onde existe simultaneamente uma álgebra e uma topologia", com o objetivo de tratar do "estudo das propriedades invariantes para um topo-isomorfismo, isto é, por uma correspondência biunívoca que é simultaneamente uma homomorfia e um isomorfismo", em especial no que designa por espaços analíticos, ou seja aqueles para os quais a operação algébrica seja contínua. Entre estes, introduz os grupos abelianos topológicos perfeitamente decomponíveis, para os quais demonstra "um teorema de estrutura", que sendo "análogo aos teoremas de Banach e de Cantor-Bernstein" (sobre a equivalência de dois conjuntos com a mesma potência), estabelece, em particular, que se dois daqueles grupos "têm a mesma dimensão algébrica eles são topo-isomorfos".

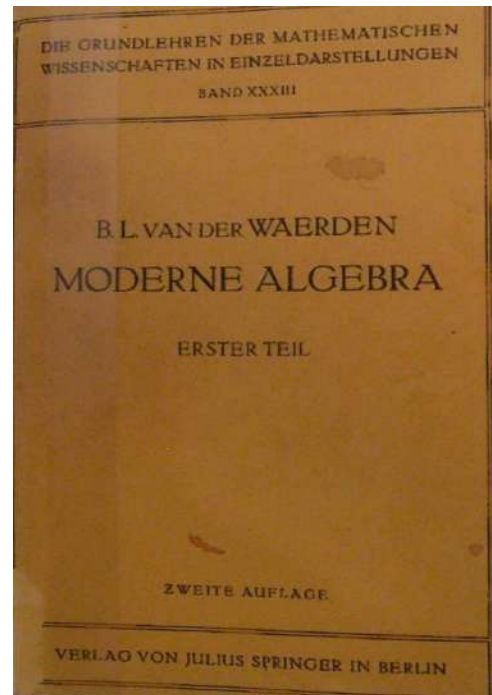
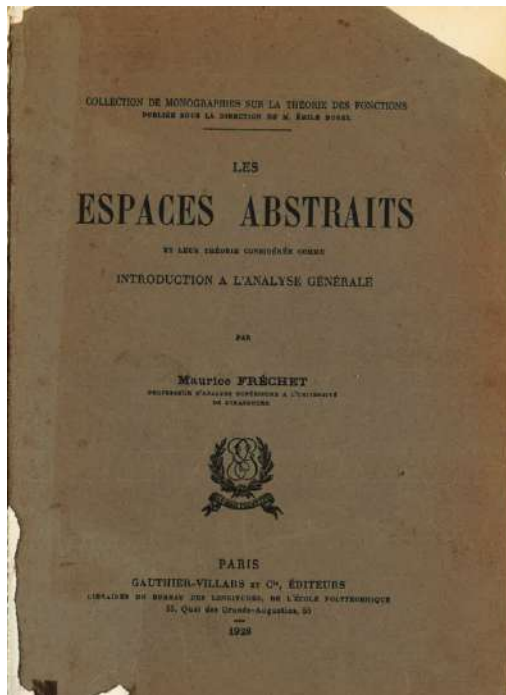
A nova noção de dimensão algébrica é uma generalização da "dimensão linear de um espaço (vetorial) de tipo (F) introduzida recentemente por Banach" no seu livro clássico de 1932, sobre *Théorie des opérations linéaires*. Culminando uma moderna síntese de algumas estruturas algébrico-topológicas, incluindo grupos topológicos e espaços (B) de Banach, é levado a definir anéis vetoriais normados, noção também considerada em 1936 pelo matemático japonês M. Nagumo, com o objetivo de generalizar os resultados da sua tese sobre a aditividade dos núcleos de Fredholm, obtendo condições necessárias e suficientes para a aditividade das resolventes no âmbito dos anéis de operadores lineares em espaços de Banach.

A clareza com que as novas ideias abstratas são descritas e concretizadas por Monteiro no seu *Ensaio* são notáveis e representam um progresso significativo, certamente, independente e desconhecido do coletivo dos matemáticos que, sob o nome de N. Bourbaki, estavam a criar os *Éléments de Mathématique* que só se começariam a publicar um ano mais tarde em Paris. Na sua autobiografia, André Weyl (1906-1998), um dos fundadores e mais influentes matemáticos desse coletivo, regista o espírito da época ao escrever [AW2, p.114]: "*In establishing the tasks to be undertaken by Bourbaki, significant progress was made with the adoption of the notion of structure, and of the related notion of isomorphism. Retrospectively these two concepts seem ordinary and rather short on mathematical content, unless the notions of morphism and category are added. At the time of our early work these notions cast new light upon subjects which were still shrouded in confusion: even the meaning of the term "isomorphism" varied from one theory to another. That there were simple structures of group, of topological space, etc., and then also more complex structures, from rings to fields, had not to my knowledge been said by anyone before Bourbaki, and it was something that needed to be said.*" Que era relevante dizê-lo, Monteiro também o sabia e descreveu-o claramente não só no Prefácio do seu *Ensaio* como também ao longo dos seus quatro capítulos.

No primeiro capítulo, sobre *A TEORIA DOS CONJUNTOS ABSTRACTOS*, Monteiro começa por introduzir a relação dos "elementos abstractos ou indefinidos" pertencerem ou não ao conjunto, usando a notação de Peano, hoje banal, e com a noção de igualdade, com a possibilidade de num mesmo conjunto poderem existir várias relações de igualdade, caso em que uma delas, a fundamental em relação às outras, é a "identidade e a outra ou as outras têm o nome de equivalências", caracterizadas pelas propriedades de reflexividade, de simetria e de transitividade. Após descrever a inclusão de conjuntos, a noção de função, de homomorfismo em relação à identidade e de transformações biunívocas, conclui que "as propriedades de que se ocupa a teoria dos conjuntos abstractos, isto é aquelas que se mantêm invariantes para uma equivalência, são aquelas que se podem enunciar recorrendo apenas às noções primitivas da teoria dos conjuntos $x = y$ e $x \in A$ e às funções proposicionais da Lógica formal." O capítulo prossegue com uma descrição da potência de um conjunto infinito ou número cardinal enunciando o Teorema de Cantor-Berstein sobre dois conjuntos serem equivalentes se e só se têm a mesma potência, deixando a demonstração para o segundo capítulo, para onde também remete o estudo da álgebra dos subconjuntos de um dado conjunto. Termina com algumas propriedades sobre os números cardinais, referindo a equivalência entre a o problema da tricotomia ($<$, $>$, $=$) e do axioma de Zermelo que enuncia da seguinte forma: "Se os elementos de um conjunto A são conjuntos E , não vazios e sem elementos comuns dois a dois, então existe pelo menos um conjunto A' que contém um elemento e um só de cada conjunto E ."

O segundo capítulo, o mais longo do *Ensaio*, é a primeira exposição moderna em português sobre *ÁLGEBRA ABSTRACTA*, "um dos capítulos mais recentes da Matemática Moderna, visto que o início do seu desenvolvimento se pode localizar por volta de 1920" (p.14). Depois de introduzir uma operação algébrica num conjunto abstrato e a noção de espaço algébrico, define homomorfismo entre dois espaços algébricos, que é isomorfismo se for biunívoca, quando essa correspondência respeita as respetivas operações, e estabelece o objectivo da álgebra abstracta como aquela "que estuda as propriedades dos espaços algébricos que se mantêm invariantes quando se passa de um espaço algébrico para outro que lhe seja isomorfo" e que se ocupa das propriedades "que se podem enumerar recorrendo apenas às noções primitivas da Álgebra". Depois de introduzir os axiomas da adição e da multiplicação, trata da álgebra dos conjuntos abstractos, onde à adição corresponde a união de conjuntos e à multiplicação a intersecção, e demonstra um teorema de Banach

de 1924 sobre a possibilidade da decomposição de dois conjuntos em duas partes disjuntas que são respetivamente equivalentes, ou isomorfas. Deste conclui o teorema de Schröder-Cantor-Berstein: "se o conjunto A é equivalente a um sub-conjunto de B e se B é equivalente a um sub-conjunto de A , os conjuntos A e B são equivalentes". Em seguida define as noções de Grupo, de Grupo Abelian, de "*Espaço Vectorial Abstracto*", de Anel, onde estuda transformações e as suas propriedades, e de "*Anel Vectorial*", tendo em vista o anel dos operadores lineares definidos num espaço vetorial, terminando o capítulo com o "*Tipo algébrico de um espaço*" a noção "*que desempenha em Álgebra Abstracta o mesmo papel que a noção de potência de um conjunto desempenha na teoria dos conjuntos abstractos*".



No Capítulo III, dedicado à "*TOPOLOGIA ABSTRACTA*", Monteiro coloca-se na perspetiva de [MF] utilizando como noção primitiva a noção de vizinhança que lhe "*parece a mais intuitiva muito embora existam noções da topologia que não se sabem ainda exprimir por intermédio da noção de vizinhança*", centrando esse capítulo na estrutura de *Espaço* (V) de Fréchet. Apesar de iniciar o capítulo com uma breve referência aos espaços topológicos baseados na operação de derivação de conjuntos, i.e. a passagem ao conjunto de pontos limites ou de acumulação de um dado conjunto, Monteiro distancia-se do seu mentor em Lisboa [PJC] e demarca-se de alguma terminologia de [AMF], dois dos primeiros introdutores em Portugal destas noções que não faziam ainda parte dos cursos da época. É interessante ler na página 67, como Monteiro refere que "*a topologia pode ser baseada sobre outras noções primitivas, por exemplo: vizinhança, conjunto fechado, conjunto aberto, "fermeture" (ou conjunto de inclusão, na terminologia do Prof. Mira Fernandes) ponto interior, etc.*", sem contudo citar o artigo de divulgação [AMF], resultado de uma conferência realizada por aquele professor do I.S.T. no dia 26 de novembro de 1934 na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e que certamente conhecia, apesar de não ter assistido à conferência por se encontrar em Paris. Na exposição das 26 páginas do capítulo III da sua monografia, Monteiro faz um interessante resumo e uma original síntese da *Topologia Abstracta*, onde, sendo patente a influência estruturalista na Matemática absorvida na sua estada em Paris e daquele ensaio, não deixa de seguir a terminologia e a abordagem de Fréchet (*Espaços* (V) e (L), funções contínuas, espaços distanciados), apesar de procurar integrar alguns dos desenvolvimentos da década posterior ao livro [MF].

Finalmente, no quarto capítulo, Monteiro apresenta a *ANÁLISE ABSTRACTA*, designação por si proposta, ou *ANÁLISE GERAL*, como uma síntese das "*mais recentes da matemática moderna, visto que ela se pode considerar ainda em plena formação*", apresentando-se "*como logicamente subordinada à Álgebra Abstracta e à Topologia Abstracta e portanto à teoria dos Conjuntos Abstractos*". Assim, entre os espaços algébrico-topológicos, i.e. aqueles que forem simultaneamente dotados de uma "*álgebra*" (uma ou mais operações algébricas) e de uma topologia que estejam relacionadas entre si, ou seja, onde as operações algébricas forem

contínuas, chama "*espaços analíticos*". Nestes podem ser definidas propriedades importantes, como, por exemplo, limites de somas ou de produtos de sucessões num grupo topológico, ou de séries absolutamente convergentes e de derivadas em grupos abelianos normados e completos. Introduzindo os espaços de Banach [B], Monteiro apresenta o teorema deste matemático polaco sobre os operadores lineares serem contínuos se e só se forem limitados. Mas o culminar deste capítulo está na generalização a anéis vetoriais abstratos, normados e com unidade, onde é possível estabelecer uma teoria abstrata da resolvente e onde estabelece condições necessárias e suficientes sobre a aditividade das resolventes de operadores lineares, que havia obtido no verão de 1936 e que generalizam resultados da sua tese sobre a aditividade das resolventes de dois núcleos de Fredholm [AAM]. Este resultado novo é reconhecido por Mira Fernandes no seu relatório à Academia, que contudo dá mais relevo à observação de Monteiro na última página do *Ensaio* sobre a equivalência de dois conjuntos arbitrários implicar a equivalência dos conjuntos de todos os seus subconjuntos, determinando então a existência de um top-isomorfismo entre estes, pois isso "*inculca, sobretudo, a função primacial da Análise Abstracta dentro da Análise Geral de Fréchet*".

De facto, Monteiro deu mais importância àquela generalização do último capítulo do *Ensaio*, que publicou posteriormente em 1940 numa pequena nota de quatro páginas sobre *Sur l'additivité dans un anneau*, nas páginas 289-292 do volume 1 da *Portugaliae Mathematica* [AAM_O2008]. Numa nota da página 291 deste artigo, Monteiro refere o seu *Ensaio* e regista a sua intenção de o publicar naquela revista. Nesse artigo não apresenta demonstrações, tal como não o fizera no *Ensaio*, pois refere que são análogas às da sua tese de 1936 [AAM]. É interessante observar que a sua tese foi composta na Imprensa Portuguesa do Porto, tendo sido também publicada nos Anais da Faculdade de Ciências do Porto no volume desse ano, cuja *Introduction* termina na página 8 com o agradecimento "*Nous remercions également la Junta de Educação Nacional et le peuple de notre pays, à qui nous devons d'avoir pu entreprendre et terminer ce travail sans préoccupations matérielles, pendant notre long séjour à Paris*", cuja expressão sublinhada por nós é omitida na edição de [AAM] publicada em 1937 na *Portugaliae Mathematica* e reproduzida nas suas *Obras* [AAM_O2008].

As fontes, a época e Bourbaki 1935-1942

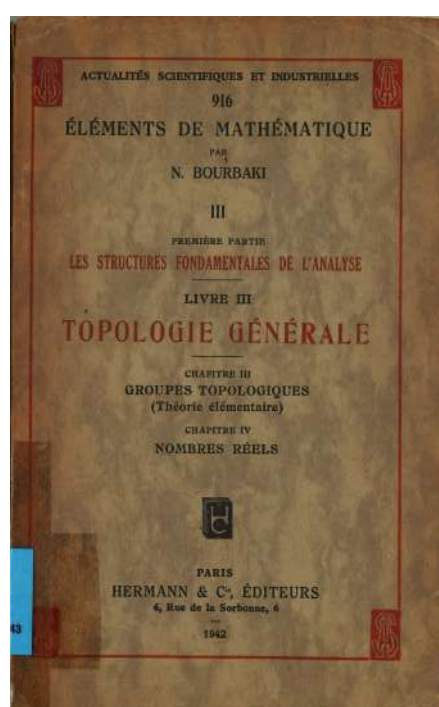
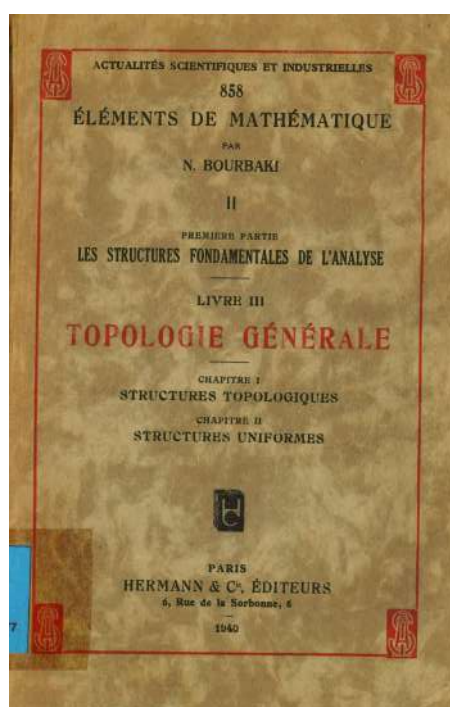
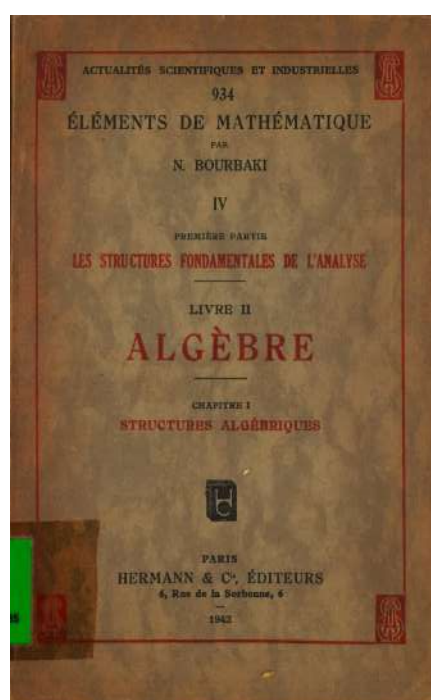
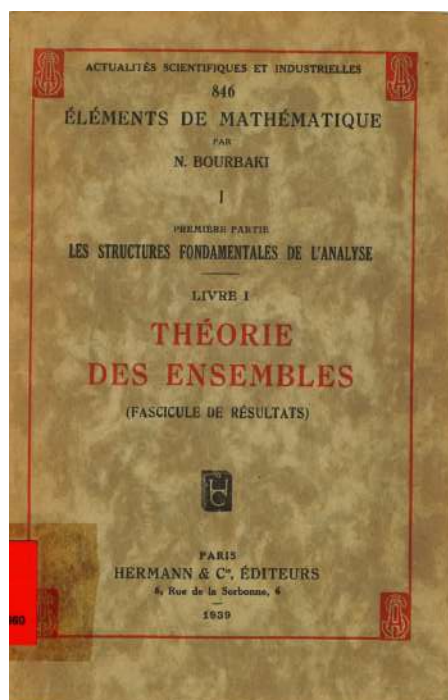
Se a influência de Fréchet, em particular do livro [MF] referido na Bibliografia do *Ensaio* é indelével, na teoria de conjuntos Monteiro sofre a influência da escola polaca, citando o livro de Sierpinski, também publicado em Paris em 1928 e na álgebra da escola alemã, através da primeira edição do influente livro de van der Waerden [wW], desenvolvido a partir das lições de Emil Artin e de Emmy Noether numa linguagem precisa e moderna, cuja segunda edição iria ser traduzida em português na década seguinte por Hugo Ribeiro e publicada pela Sociedade Portuguesa de Matemática.

O livro de Sierpinski, apesar do título se referir aos números transfinitos e constituir uma introdução muito clara à teoria de Cantor e dos seus seguidores, contendo resultados recentes, é sobretudo inovador por se basear no método axiomático, que Monteiro segue no seu *Ensaio*.

Contudo na topologia geral, onde as influências polaca e russa também se fazem sentir, Monteiro procura manter-se fiel à terminologia de Fréchet não indo além dos espaços (V), que lhe bastam, apesar de adoptar uma exposição mais abstrata e algo inovadora. No entanto, Monteiro refere as dificuldades do conceito de vizinhança, citando em particular, o curto ensaio de 1938, com apenas 39 páginas, de André Weil [AW1], onde este, para além de estabelecer as propriedades básicas dos espaços uniformes, uma classe de espaços topológicos adaptada aos conceitos de convergência e continuidade uniformes, suscita um conjunto de observações sobre os axiomas da topologia geral onde procura estabelecer uma distinção entre aqueles com mero interesse histórico dos verdadeiramente importantes que irão fixar a exposição moderna do primeiro livro de N. Bourbaki *Topologie Générale*, publicado em Paris em 1940.

Mas é sobretudo no último capítulo sobre análise abstrata que a exposição de Monteiro é original, pois não só efetua uma breve e clara síntese entre a álgebra moderna e a topologia geral, pois, sem esquecer os espaços de Banach [B], desenvolve a teoria dos grupos topológicos e sobretudo introduz, de forma independente do matemático japonês M. Nagumo, os anéis vetoriais topológicos. É importante referir que, já na segunda metade do século XIX, Sophus Lie havia lançado as bases dos grupos de Lie, que são uma classe particular de "grupos contínuos", mas a teoria geral dos grupos topológicos foi iniciada apenas em 1926, por O. Schreier, e que o primeiro livro, da autoria de Lev Pontryagin, sendo de 1938 só iria ser publicado em inglês em 1939 e não era conhecido por Monteiro.

Desde a sua chegada a Paris em 1931, António Monteiro trabalhou na biblioteca do *Institut Henri Poincaré*, recém criado em 1928, tendo assistido regularmente aos seminários que aí se realizavam. Em particular, o seminário de Gaston Julia, que na década de trinta era frequentado pelos jovens que iriam fundar o grupo Bourbaki, nos três últimos anos académicos da estada de Monteiro em Paris tratou dos seguintes temas: Grupos e Álgebras, em 1933/34; Espaços de Hilbert, em 1934/35; e Topologia em 1935/36. Nos seus relatórios, Monteiro, refere explicitamente as conferências de Claude Chevalley, André Weil, Jean Delsarte e Jean Leray, que no ano académico de 1934/35 também se reuniam periodicamente em Paris no café *Capoulade* em discussões matemáticas. Estas reuniões, que incluíam ainda Jean Dieudonné, Henri Cartan, René de Poussel e Szolem Mandelbrojt, que substituiu Leray, iriam dar lugar à reunião fundadora do pseudónimo coletivo Nicolas Bourbaki, realizada numa aldeia de Auvergne, no centro da França, em julho 1935.



Se o objetivo inicial do grupo daqueles jovens professores saídos da *École Normale Supérieure* de Paris era escrever um novo curso de Cálculo Diferencial e Integral, sob a forma de um moderno tratado de Análise Matemática que substituísse os clássicos *Cours d'analyse* da escola francesa, ao longo das várias reuniões e discussões coletivas, o grupo Bourbaki evoluiu para uma apresentação axiomática e abstrata de algumas noções gerais e essenciais, "*les structures fondamentales de l'analyse*", cujos quatro primeiros livros que constituem os *ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE* são [BI,II,III,IV]:

Livre I — *THÉORIE DES ENSEMBLES* (Fascicule de résultats) Paris, 1939 (1-2-1940)

Livre II — *ALGÈBRE* (Structures algébriques) Paris, 1942

Livre III — *TOPOLOGIE GÉNÉRALE* (Chapitres I et II) Paris, 1940

Livre III — *TOPOLOGIE GÉNÉRALE* (Chapitres III et IV) Paris, 1942.

O fascículo sobre a Teoria dos Conjuntos, apesar de datado de 1939, tem a data de impressão de 1 de fevereiro de 1940, e começa por explicar o "*mode d'emploi de ce traité*", que "*toma as matemáticas do seu início, dá demonstrações completas e, em princípio, não supõe nenhum conhecimento matemático particular, mas apenas um certo hábito de raciocínio matemático e um certo poder de abstração*". Contém apenas cerca de 45 páginas de definições e resultados sobre elementos e partes de um conjunto, funções, produtos de vários conjuntos, reunião, intersecção e produto de uma família de conjuntos, relações de equivalência, conjunto quociente, conjuntos ordenados, potências, conjuntos numeráveis e termina com escalas de conjuntos e estruturas, tendo adotado uma notação e uma terminologia consistentes e duráveis.

O segundo livro, sobre Álgebra, é o quarto volume e só é publicado em 1942 na Paris ocupada. Compreende o primeiro capítulo das estruturas algébricas, tratando das leis de composição internas, associatividade, comutatividade, elemento neutro, elementos regulares, elementos simétricos, leis de composição externas, estruturas algébricas, relações entre leis de composição, grupos e grupos de operadores, grupos de transformação, anéis e anéis de operadores, terminando com corpos. A sua introdução abre com a descrição sobre "*fazer álgebra, é essencialmente calcular, isto é, efetuar, sobre os elementos de um conjunto, 'operações algébricas', cujo exemplo mais conhecido é dado pelas 'quatro regras' da aritmética elementar*", e a sua nota histórica, depois de identificar três correntes — a teoria das substituições na resolução das equações algébricas, o cálculo vetorial e matricial e a teoria dos números algébricos — termina na síntese da álgebra moderna como resultado "*sobretudo da obra da escola alemã moderna: começada por Dedekind e Hilbert nos últimos anos do século XIX, o trabalho da axiomatização da Álgebra foi vigorosamente prosseguido por E. Steinitz, e depois, a partir de 1920, sob o impulso de E. Artin, E. Noether e dos algebristas da sua escolas (Hasse, Krull, O. Schreier, van der Waerden)*", e reconhece o livro [wW] como fonte de inspiração.

O terceiro livro de Bourbaki, dedicado à Topologia Geral, é, de facto, o segundo a ser publicado em 1940 e compõe-se de dois capítulos que tratam das estruturas de outro tipo que "*dão um sentido matemático às noções intuitivas de limite, de continuidade e de vizinhança*". O primeiro, sobre estruturas topológicas, inicia-se com conjuntos abertos, que determinam a definição de espaço topológico, prosseguindo com vizinhanças e outras noções, como homomorfismos e a continuidade das transformações, produtos, compacidade e espaços conexos, e baseia a noção de convergência no conceito de filtro, uma generalização das sucessões introduzida por H. Cartan em 1937, obtendo a completa equivalência entre vizinhança, conjunto aberto e a topologia da convergência. O segundo capítulo trata das estruturas uniformes, um conceito introduzido por A. Weil em [AW1], que permite estender a estrutura dos espaços métricos introduzidos por Fréchet em 1906, e generalizar para os espaços uniformes importantes resultados, em particular de compacidade e de completação.

Os capítulos III e IV da Topologia Geral, que também se publicou em 1942, tratam da teoria elementar dos grupos topológicos e dos números reais, respetivamente. O capítulo III, começa pela definição de grupo topológico, enquanto conjunto munido de uma topologia compatível com os axiomas algébricos de grupo, desenvolve a teoria baseada nos filtros e nas suas convergências e nas propriedades das estruturas uniformes, e conclui com alguns tópicos sobre anéis e corpos topológicos. O capítulo IV introduz o grupo $\mathbf{R}$ os números reais como o completado do grupo ordenado $\mathbf{Q}$, dos números racionais munido da topologia dos intervalos abertos, demonstra as propriedades topológicas usuais de $\mathbf{R}$ e das respetivas séries e funções numéricas, e termina com uma extensa e bastante completa nota histórica com doze páginas.

Comparando a estrutura dos quatro capítulos e das respetivas secções do *Ensaio* de António Monteiro, entregue a 4 de fevereiro de 1939 na Academia de Ciências de Lisboa, com os conteúdos destes quatro primeiros livros de Bourbaki, que são uma obra de outra dimensão e com outra ambição, ficamos surpreendidos pela coincidência do seu encadeamento e mesmo pela sobreposição de muitos

dos seus conteúdos. Naturalmente que Monteiro absorveu em Paris, durante a sua estada entre 1931 e 1936, as novas ideias e os resultados mais recentes das matemáticas modernas e que os seus objetivos tinham, numa escala e num contexto completamente diferentes, algum paralelismo com o ambicioso programa do coletivo Bourbaki, mas não podia conhecer nem os planos nem os conteúdos dos *Éléments de Mathématiques*. No entanto, apesar de Monteiro nunca ter sido "bourbakista" nem ter revelado simpatias pelos trabalhos dos discípulos de Bourbaki, ousamos considerar que o seu *Ensaio* é, de facto, uma obra precursora do grande projeto daquele autor coletivo, que também é caracterizada por um modernismo e um estruturalismo notáveis.

A influência do "Ensaio" no CEML e na JIM, entre 1939-1944, e no Brasil em 1945-48

A elaboração do *Ensaio* aparece na sequência dos cursos que Monteiro professou no âmbito do *Núcleo de Física, Matemática e Química* em Lisboa, nomeadamente no iniciado a 2 de março de 1937 no Instituto Superior Técnico sobre *Teoria das Matrizes*, já na perspectiva da Álgebra Moderna, nas duas conferências sobre *Os Fundamentos da Análise Moderna*, realizadas a 20 e 21 de dezembro de 1938, e no *Curso de Introdução à Análise Geral*, iniciado a 27 de fevereiro de 1939 com um programa que cobre exatamente os quatro capítulos do *Ensaio*, estes dois últimos lecionados na Faculdade de Ciências de Lisboa [AAM_Fb2007].

A 17 de março de 1939, a convite do "Grupo de Estudos dos alunos da Faculdade de Ciências de Coimbra", Monteiro inaugurou as atividades efémeras e sem consequências desse grupo com uma conferência sobre *O objectivo da Análise Moderna*, a qual foi relatada em notícia do *Diário de Coimbra* de 19 de março desse ano da seguinte forma [MCA]: "Toma, então, a palavra o Dr. Monteiro, que revelando uma cultura matemática invulgar e com raro poder sugestivo e clareza cristalina (...) fala sobre o objectivo da teoria dos conjuntos, da álgebra abstracta, etc., prendendo sempre o numeroso auditório, em que se viam muitos estudantes e professores, que tributaram ao conferente uma calorosa salva de palmas ao terminar a sua brilhantíssima exposição, que durou cerca de hora e meia."

O *Seminário de Análise Geral* foi englobado no *Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa* (CEML), que foi criado em 1940 pelo Instituto para a Alta Cultura (IAC), anexo à Faculdade de Ciências de Lisboa, sob a presidência de Pedro José da Cunha, e funcionou durante um período inicial de três anos, sob a direção científica de António Monteiro, tendo trazido a Portugal M. Fréchet que a 17 de janeiro de 1942 foi recebido como primeiro sócio honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática pelo seu primeiros presidente e secretário-geral, conforme fotografia anexa [AAM_Fb2007]. Contribuiu de modo significativo para o arranque da revista e da biblioteca da *Portugaliae Mathematica* e desenvolveu uma atividade pioneira de investigação, com alguns jovens bolseiros, entre os quais Hugo Ribeiro e José Sebastião e Silva, os principais discípulos de António Monteiro do seu período em Lisboa, criando um movimento intermitente, sem precedentes, de modernização da Matemática em Portugal. Assim, por exemplo, aquele seminário funcionou em abril de 1940 com uma conferência de Hugo Ribeiro sobre *Objectivo da Topologia Geral* e outra sobre *A importância da Análise Geral* por António Monteiro.

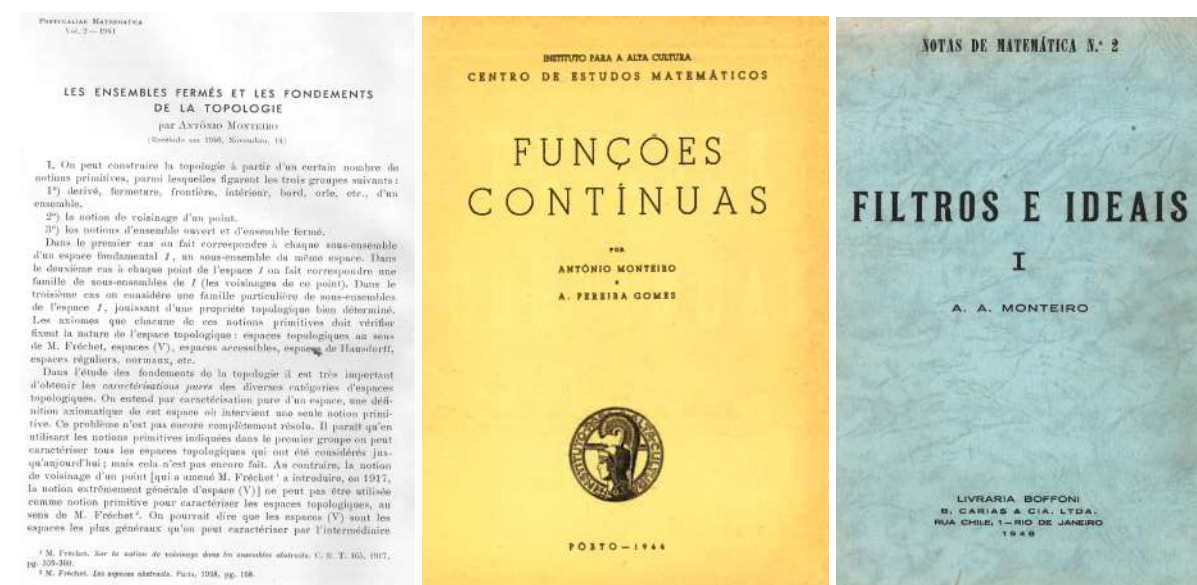
A atividade do *Seminário de Análise Geral* foi descrita por Monteiro no seu relatório de fevereiro de 1940: *O Seminário tem por objetivo fundamental a realização de trabalhos de investigação e para esse efeito existe um plano de estudos. O objetivo fundamental é estudar os Espaços Analíticos isto é aqueles em que existe simultaneamente uma Álgebra e uma Topologia. Trata-se de um ramo pouco estudado da Análise Geral. Para esse efeito impõe-se estudar os fundamentos da Álgebra Abstracta e da Topologia e os Espaços Analíticos particulares que têm sido estudados até hoje. Este ano será consagrado fundamentalmente à Topologia, muito embora se realizem outros assuntos ao mesmo tempo. O estudo dos fundamentos da Topologia foi empreendido no princípio deste ano por A. Monteiro e H. Ribeiro, posteriormente ingressaram neste grupo Sebastião e Silva e José Paulo. Os resultados já obtidos excederam toda a expectativa. Há neste momento dois trabalhos publicados na Portugaliae Mathematica: H. Ribeiro "Sur l'Axiomatique des Espaces Topologiques de M. Fréchet" e A. Monteiro e H. Ribeiro "Sur l'axiomatique des Espaces (V)". Além deste há outros trabalhos realizados este ano no Seminário. Sebastião Silva, que começou a trabalhar há muito pouco tempo, descobriu um princípio de dualidade nas noções da Topologia, destinado a desempenhar, na minha opinião, um grande papel simplificador no estudo da Topologia e a esclarecer as suas noções fundamentais. O mesmo estudioso conseguiu obter já alguns resultados no estudo do problema de Wiener (Topologia).*

Com a partida dos jovens bolseiros para o estrangeiro e com as dificuldades criadas em Lisboa nos finais de 1942 com o fim da sua bolsa de arquivista do IAC, Monteiro, que ainda em 1941 e 1942 havia começado a colaboração com a Faculdade de Ciências do Porto, desloca a sua atividade para essa

cidade em 1943, com o apoio da Junta de Investigação Matemática (JIM), começando uma colaboração com Alfredo Pereira Gomes que se torna co-autor duma monografia, com cerca de 150 páginas, sobre *Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua*, publicado em 1944 onde as noções de Topologia e de Análise Geral são desenvolvidas com clareza e profundidade.

A partir de 1945 Monteiro ensina em cursos e seminários tópicos modernos de Análise Superior no Rio de Janeiro, começa a interessar-se e a publicar em estruturas ordenadas e teoria de reticulados e exerce uma influência nos seus novos discípulos brasileiros, entre os quais se destaca Leopoldo Nachbin que publica duas das cinco primeiras *Notas de Matemática*, a coleção fundada em 1948 pelo matemático português no Brasil, nomeadamente o fascículo nº1, sobre *Combinação de Topologias* e o nº 4 sobre *Espaços Vetoriais Topológicos*. O nº2 dessa coleção, sobre *Filtros e Ideais*, é do próprio Monteiro e o nº 5, sobre *Aneis de funções contínuas*, de Marshal H. Stone, sendo todos os cinco sobre temas de *Análise Geral*, na terminologia do *Ensaio* que começava então a cair em desuso.

É notória a influência do conteúdo do *Ensaio* e do seu autor que, com as atividades intensas de investigação matemática de apenas três anos do CEML, em Lisboa, e de cerca de um ano no CEMP, no Porto, juntamente com os seus colaboradores vão constituir um esboço de uma Escola Portuguesa de Topologia Geral, influência essa que se estende ao Rio de Janeiro por cerca de quatro anos. No clássico livro de Topologia Geral de 1955 [K], o matemático norte-americano John L. Kelley, no seu Prefácio, não só faz um agradecimento a Hugo Ribeiro, como cita na Bibliografia três artigos deste e dois de Monteiro, todos publicados na *Portugaliae Mathematica* entre 1940 e 1945, uma nota aos *C.R. Acad. Sc. Paris* de 1948 de A. Pereira Gomes e a monografia nº4 das *Notas de Matemática* de L. Nachbin sobre *Espaços Vetoriais Topológicos*, ambos publicados em 1948.



Agradecimentos

Agradeço ao Professor Miguel Telles Antunes o ter proporcionado a redescoberta do *Ensaio* perdido nos arquivos da Academia, aos colegas Jorge Rezende e Luis Saraiva pelas sugestões e comentários, à Cristina Bernardino e à Anabela Teixeira por me ajudarem a obter referências bibliográficas e ao Professor João Paulo Carvalho Dias por me ter proporcionado em 1978 um encontro único com o Professor António Monteiro na Biblioteca Geral da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Referências

- [AAM_PM1980] *Portugaliae Mathematica*, vol. 39 (1980), Edição da Soc. Port. Mat. dedicada a A.A.Monteiro (jan 1985), sob a direção de Alfredo Pereira Gomes.
- [AAM_Bc2007] *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, N.º Especial*, com as Atas do Colóquio de Centenário na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa de junho de 2007, editadas por Luís Saraiva.

- [AAM_Fb2007] *António Aniceto Monteiro, uma fotobiografia a várias vozes*, Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa 2007, *Coordenadores*: Jorge Rezende, Luiz Monteiro e Elza Amaral.
- [AAM_O2008] *The Works of António A. Monteiro, Vol.s I-VIII*, Edited by Eduardo L. Ortiz and Alfredo Pereira Gomes, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisbon and The Humboldt Press, London 2008.
- [AAM] António Monteiro, *Sur l'additivité des noyaux de Fredholm*, Thèse Univ. Paris, Junho 1936. (Portugaliae Math. 1 (1937), 1-172, in [AAM_O2008]).
- [AF] Augusto Fitas, *As relações entre António Ribeiro Monteiro e a Junta de Educação Nacional ou um bolseiro português na cidade de Paris (do Outono de 1931 à Primavera de 1936)*, in [AAM_Bc2007], 89-127.
- [AMF] Aureliano de Mira Fernandes *Distância e Vizinhaça*, Técnica, Revista de Engenharia, nº62 (1934), 511-515, nº63 (1935), 1-5.
- [APG] Alfredo Pereira Gomes, *O regresso de António Monteiro a Portugal de 1977 a 1979*, Portugaliae Math. 29 (1980), XXXIII-XLI.
- [AW1] André Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Hermann, Paris 1938.
- [AW2] André Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, Springer, Basel, 1992.
- [B] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1932.
- [BI,II,III,IV] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques — Les Structures Fondamentales de l'Analyse*, Hermann, Paris: I - *THÉORIE DES ENSEMBLES (Fascicule de résultats)*, 1939; II - *TOPOLOGIE GÉNÉRALE (Chapitres I et II)*, 1940; III - *TOPOLOGIE GÉNÉRALE (Chapitres III et IV)*, 1942; IV - *ALGÈBRE*, 1942.
- Fréchet *Les Espaces Abstraits, et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale*
- [EO] Eduardo Ortiz, *Professor António Monteiro and Contemporary Mathematics in Argentina*, Portugaliae Math. 29 (1980), XIX-XXXII.
- [IP] Ilda Perez, *António Monteiro e um relatório de 1939 para o Instituto para a Alta Cultura*, Boletim da Soc.Port.Mat. 68, Maio 2013, pp. 137-150
- [JR1] Jorge Rezende, *Blogue <António Aniceto Monteiro>* <http://antonioanicetomonteiro.blogspot.com/>
- [JR2] Jorge Rezende, *António Aniceto Monteiro — lutas, perseguições e exílios*, Bol.Soc.Port.Mat. 74 (nov.2016), 135-172.
- [K] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.
- [LN] Leopoldo Nachbin, *The influence of António A. Ribeiro Monteiro in the development of Mathematics in Brazil*, Portugaliae Math. 29 (1980), XV-XVII.
- [MCA] M. C. Almeida, *Centro de Estudos Matemáticos de Coimbra, 1938: um projecto*, Suplemento do Boletim da SPM 65, Outubro 2011, pp. 49-51.
- [MF] Maurice Fréchet, *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [NW] N.Wiener, *I am a Mathematician*, The M.I.T. Press, 1956.
- [PJC] Pedro José da Cunha, *Relexões sobre a teoria dos conjuntos*, Extracto do Jornal Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais, 3ª série, nº10 (1922), 62 pp.
- [RLG] Ruy Luis Gomes, *Tentativas feitas nos anos 40 para criar no Porto uma Escola de Matemática*, Boletim SPM, 6 (out/1983), 29-48.
- [S] W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [vW] B.L. van der Waarden, *Modern Algebra*, Vol. 1, Springer, Berlin, 1930.

ANEXO

ÍNDICE do "*Ensaio sobre os FUNDAMENTOS da ANÁLISE GERAL*"

Autógrafo	I
Prefácio (9 p.)	III
Bibliografia (2 p.)	XII
Capítulo I — A Teoria dos Conjuntos Abstractos (13 p.)	1
1- Conjuntos abstractos; 2- Noção de Igualdade; 3- Sub-conjuntos;	
4- Igualdade de conjuntos; 5- Observação; (6)- Determinação de um conjunto;	
7- Noção de função; 8- Homomorfismo em relação à igualdade;	
9- Transformações biunívocas; 10- Objectivo da teoria;	
11- Potência de um conjunto infinito ou número cardinal;	
12- O problema da tricotomia e o axioma de Zermelo.	

- §1** - *Operações algébricas* — 1- Definições; 2- Sub-espaço algébrico
3- Homomorfismos; 4- Isomorfismos e Automorfismos;
5- Objectivo da Álgebra Abstracta; 6- Espaço algébrico universal;
7- Axiomas fundamentais; 8- Axiomas da Adição;
9- Axiomas da multiplicação;
10- Axiomas que relacionam a multiplicação com a adição.
- §2** - *Álgebra dos Conjuntos Abstractos* — 11- algebrização de E ;
12- Adição de Conjuntos; 13- Intersecção de conjuntos;
14- Teorema fundamental sobre a álgebra dos conjuntos abstractos;
15- Subtracção de conjuntos; 16- Teorema de Banach;
17- Definições e Teorema de Schröder-Cantor-Berstein.
- §3** - *Sistemas com multiplicação* — 17- Definição; 18- Inversos à direita e à esquerda; 19- Sub-espaço algébrico; 20- Potências; 21- Exemplos.
- §4** - *A Noção de Grupo* — 22- Definição; 23- Sub-grupos;
24- Exemplo de grupos.
- §5** - *Algebrização do espaço dos sub-grupos de um grupo dado* —
25- Multiplicação de sub-grupos; 26- Intersecção de sub-grupos;
27- Produtos Directos; 28- Propriedades do produto directo;
29- Grupos decomponíveis; 30- Automorfismos interiores.
- §6** - *Grupos Abelianos* — 31- Definição; 32- Álgebra dos sub-grupos de G ;
33- Soma directa de sub-grupos de G ; 34- Álgebra das transformações definidas em G ; (35)- Resultado de Mazur e Ulam; 36- Transformações aditivas.
- §7** - *Espaços Vectoriais Abstractos* — 37- Definição; 38- Algebrização do conjunto das variedades lineares de E ; 39-Transformações aditivas e homogéneas
- §8** - *Aneis* — 40- Definição; Sub-anel; 41- Anel das transformações aditivas de um grupo abeliano; 42- Nota; 43- Teorema de Hellinger-Toeplitz;
44- Noção de aditividade.
- §9** - *Aneis Vectoriais* — 45- Definição; 46- Sub-anel vectorial;
47- Anel dos operadores lineares definidos num espaço vectorial.
- §10** - *Tipo algébrico de um espaço* — 48- Definição.

- §1** - *Espaços (V)* — 1- Espaços topológicos; 2- Espaços (V); 3- Funções contínuas;
4- Homeomorfias; 5- Objectivo da Topologia.
- §2** - *Tipo de dimensão de um espaço topológico* — 6- Definição.
- §3** - *Espaços (V) particulares* — 7- Espaço acessível; espaço de Hausdorff.; 8- Espaços L .
- §4** - *Topologia dos conjuntos abstractos* — 9- Limite de uma sucessão de conjuntos; 10- Equivalência e homeomorfia.
- §5** - *Espaços distanciados* — 11- Noção de distância; 12- Axiomática de Lindenbaum; 13- Espaços não distanciados.

- §1** - *Espaços algébrico-topológicos* — 1- Definição; 2- Topo-isomorfismo;
3- Objectivo da Análise Geral; 4- Dimensão algébrica de um espaço.
- §2** - *Espaços Analíticos* — 5- Definição; 6- Propriedades dos espaços analíticos;
7- Algebrização das variedades fechadas.
- §3** - *Grupos topológicos* — 8- Definição; 9- Grupos abelianos topológicos;
9'- Variedades fechadas; 10- Grupos abelianos perfeitamente decomponíveis.
- §4** - *Dimensão algébrica dos grupos abelianos perfeitamente decomponíveis* — 12- Teorema.
- §5** - *Grupos abelianos* — 13- Definição; 14- Noção de série; 15- Espaço G^2_∞ ;
16- Grupos normados perfeitamente decomponíveis; 17- Noção de derivada.
- §6** - *Espaços de Banach* — 18- Definição; 19- Funções analíticas;
20- Operadores lineares; 21- Variedades fechadas.
- §7** - *Aneis vectoriais normados* — 22- Definição; 23- Resolvente;
24- Espaços de Banach com operadores.
- §8** - *Análise dos conjuntos abstractos* — 25- Sucessões de conjuntos e limites;
26- Equivalência e topo-isomorfismo.