



ESCOLA NAVAL



ta sainte & bi-faire

Silvio D'Oliveira Sousa Barreto

Tábuas para o Cálculo da Hora a Bordo de Lopes Banhos

*Sua Utilização na Navegação e Comparação com Tabelas
Contemporâneas*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha



Escola Naval, 18 de setembro de 2025



ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



Silvio D'Oliveira Sousa Barreto

*Tábuas para o Cálculo da Hora a Bordo de Lopes Banhos
Sua Utilização na Navegação e Comparação com Tabelas
Contemporâneas*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha

Orientação de: CMG RES António Costa Canas

Coorientação de: Professora Teresa Maria Sousa

O Aluno Mestrando,

Silvio Barreto

Sousa Barreto

O Orientador,

António José Duarte Costa Canas

António Canas

Escola Naval, 18 de setembro de 2025

“The wise traveler does not ask where the wind blows but learns to adjust his
sails.”

– African proverb

Dedico à todos aqueles que contribuíram para a minha formação acadêmica, militar e pessoal, e em especial à minha mãe, Leonilda, ao meu pai, Emidio, ao meu avô, Imidio, à minha irmã, Letícia, e ao meu irmão, Emerson.

Agradecimentos

Após a realização da presente dissertação, é com profundo reconhecimento que expresso a minha gratidão a todos aqueles que, de forma significativa, contribuíram para o meu percurso até aqui. Em primeiro lugar, um sincero e sentido agradecimento ao meu orientador, Capitão de Mar-e-Guerra António Costa Canas, pela dedicação incansável, pela constante disponibilidade, paciência e rigor científico com que acompanhou este trabalho. A sua orientação foi essencial em todas as etapas deste percurso. Estendo igualmente o meu agradecimento à minha coorientadora, Professora Teresa Maria Sousa, pelos valiosos contributos técnicos, pela colaboração atenta e pela permanente disponibilidade demonstrada ao longo da realização desta dissertação. A ambos agradeço o empenho, o apoio e a generosidade de manterem sempre as portas abertas para me receber e orientar.

Agradeço ao curso Chefe de Divisão da Armada António Lopes da Costa e Almeida, em especial às camaratas 113 e 107, pela amizade e apoio na Escola Naval. Reconheço igualmente os camaradas PALOP de todas as academias pelo contributo no meu crescimento pessoal e profissional. Expresso ainda o meu agradecimento à equipa de Basquetebol da Escola Naval pelos momentos de partilha e espírito de equipa.

Um agradecimento profundo e eterno aos meus pais e irmãos, verdadeiros pilares da minha vida. Pelo amor incondicional, pela educação, pela confiança, carinho e valores que me transmitiram, moldando a pessoa que sou hoje. Serão sempre o meu porto seguro. À Yauri Neto, o meu braço direito, agradeço do fundo do coração por todo o apoio incondicional, por nunca deixar de acreditar em mim, por estar presente em todos os momentos — bons e difíceis — e por trazer serenidade após cada tempestade. Por fim, mas com igual importância, agradeço à minha tia Luiza Diogo e às minhas primas Diana Moreira, Marinela Moreira, Maísa Correia, Cátia Correia e Denike Moreira, pela presença constante e pelo carinho.

Resumo

Nos séculos anteriores ao advento da navegação moderna, o posicionamento de uma embarcação em alto-mar dependia exclusivamente da observação dos astros. A evolução da navegação astronómica esteve, desde cedo, associada ao aperfeiçoamento dos métodos de cálculo da latitude e, sobretudo, da longitude, cujo tratamento matemático mais complexo levou ao surgimento de diversas tábuas destinadas a facilitar os cálculos a bordo.

Esta dissertação centra-se no estudo e análise das *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*, publicadas por J. E. Lopes Banhos em 1897. O trabalho é conduzido com o propósito de compreender a estrutura e a utilidade prática desta tábua, bem como a sua aplicação no cálculo da hora e da posição de um navio em alto-mar.

O estudo inclui a contextualização histórica da navegação astronómica e uma explicação matemática das fórmulas utilizadas nas tábuas de Lopes Banhos. Com o objetivo de avaliar a eficácia e a clareza destas tábuas, procedeu-se a uma comparação com as tábuas de John William Norie. Para tal, resolveram-se casos práticos utilizando tanto o método do ângulo horário como o método de Marcq Saint-Hilaire, aplicando-se as duas tábuas. Recorreu-se ainda a um ficheiro Excel para sistematizar os dados e avaliar a precisão dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Ângulo Horário, Longitude, Lopes Banhos, Marcq Saint-Hilaire, Norie

Abstract

In the centuries before the advent of modern navigation, the positioning of a vessel on the high seas depended exclusively on the observation of the stars. The evolution of astronomical navigation was, from early on, associated with the improvement of methods for calculating latitude and, above all, longitude, whose more complex mathematical treatment led to the emergence of various tables designed to facilitate calculations on board.

This dissertation focuses on the study and analysis of the *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*, published by J. E. Lopes Banhos in 1897. The work is conducted with the aim of understanding the structure and practical usefulness of this table, as well as its application in calculating the time and position of a ship at sea.

The study includes a historical contextualisation of astronomical navigation and a mathematical explanation of the formulas used in Lopes Banhos' tables. In order to assess the effectiveness and clarity of these tables, a comparison is made with the tables of John William Norie. To this end, practical cases were solved using both the hour angle method and Marcq Saint-Hilaire's method, applying both boards. An Excel file was also used to systematise the data and assess the accuracy of the results obtained.

Keywords: Hour Angle, Longitude, Lopes Banhos, Marcq Saint-Hilaire, Norie

Índice

Introdução	1
1 Evolução da Navegação Astronómica até ao Século XIX	5
1.1 Rumo e Estima	5
1.2 Latitude	8
1.3 Longitude	11
1.3.1 Propostas para resolver a questão da Longitude	15
1.3.1.1 Abordagem Astronómica	15
1.3.1.2 Método das distâncias lunares	16
1.3.1.3 Abordagem Mecânica	17
1.3.1.4 Pelo Cronómetro	17
1.4 Longitude pelo ângulo horário com aplicação do cronómetro	20
1.4.1 Exemplo prático do método	22
1.4.1.1 Cálculo da hora média em Greenwich e distância zenital	23
1.4.1.2 Cálculo da distância polar	24
1.4.1.3 Cálculo da colatitude	24
1.4.1.4 Cálculo da longitude	24
1.5 Método de Marcq Saint-Hilaire	25
2 Tabelas e Instrumentos Auxiliares de Cálculo do Ponto Astronómico	29
2.1 Tabelas	29
2.1.1 Tábuas de John William Norie	31
2.1.2 Martelli– <i>Método das Longitudes</i>	31
2.1.3 <i>Tábua politélica</i> de Nunes da Mata	32
2.1.4 Evolução das Tábuas	33
2.2 Instrumentos	34
2.2.1 Quadrante	34
2.2.2 Astrolábio	35

2.2.3	Balestilha	36
2.2.4	Quadrante de Davis	37
2.2.5	Octante e Sextante	38
3	As tábuas de Lopes Banhos	41
3.1	<i>Taboas Náuticas</i> de J. E. Lopes Banhos	41
3.1.1	Preliminares - Taboas para o cálculo da hora a bordo	42
3.1.1.1	Cálculo da hora	44
3.1.1.2	Cálculo da Altura (Recíproco da Hora)	46
3.1.1.3	Cálculo do azimute	50
3.1.2	Taboas para o cálculo da hora	52
3.1.2.1	Explicação das tábuas de Lopes Banhos	53
3.1.3	Taboas auxiliares	56
3.1.4	Apêndice	56
4	Comparação das tábuas de Lopes Banhos com as de Norie	59
4.1	Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana	59
4.1.1	Pelo ângulo horário	63
4.1.1.1	Cálculo pelas tábuas de Norie	63
4.1.1.2	Cálculo pelas tábuas de Lopes Banhos	68
4.1.2	Pelo método de Marcq Saint-Hilaire	71
4.1.2.1	Cálculo pelas tábuas de Norie	71
4.1.2.2	Cálculo pelas tábuas de Lopes Banhos	76
4.2	Comparação das Tábuas	80
4.2.1	Comparação pelo método do ângulo horário	80
4.2.2	Comparação pelo método de Marcq Saint-Hilaire	81
4.2.3	Comparação	82
4.3	Comparação da Precisão	84
4.3.1	Tratamento de Dados	86
	Conclusão	87
	Bibliografia	91

Lista de Figuras

1.1	O Mediterrâneo Oriental. Fonte: <i>Naufrágios e Longitude</i> , p.15. . . .	6
1.2	Os Nomes dos Ventos do Mediterrâneo. Fonte: <i>Naufrágios e Longitude</i> , p.16.	7
1.3	Carta-Portulano. Fonte: almamater.uc.pt/item/65702	8
1.4	H1. Fonte: rmg.co.uk	18
1.5	H3. Fonte: rmg.co.uk	19
1.6	H4. Fonte: rmg.co.uk	19
1.7	Triângulo de Posição na Esfera Celeste. Fonte: Queirós, p.7.	21
1.8	Cálculo da hora média em Greenwich e distância zenital. Fonte: <i>Guia Náutica</i> , p.118.	23
1.9	Cálculo da distância polar. Fonte: Adaptado do livro de <i>Guia Náutica</i> , p.119.	24
1.10	Cálculo da colatitude. Fonte: <i>Guia Náutica</i> , p.119.	24
1.11	Cálculo da longitude. Fonte: <i>Guia Náutica</i> , p.119.	25
1.12	Triângulo de posição. Fonte: <i>Manual de Navegação</i> , p.99.	26
1.13	Traçado de uma reta de altura. Fonte: <i>Manual de Navegação</i> , p.101.	28
2.1	Diagrama de resumo dos diferentes métodos astronómicos. Fonte: Zaikin, p.53.	30
2.2	Diagrama das Tábuas da Época. Fonte: Zaikin, p.54.	34
2.3	Quadrante. Fonte: Trigo, p.5.	35
2.4	Astolábio Náutico. Fonte: cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e7.html	36
2.5	Balestilha. Fonte: lojadomuseudemarinha.pt/pt/balestilha.html	37
2.6	Quadrante de Davis. Fonte: mat.uc.pt/helios/Mestre/Novemb00/H61iflan.htm	37
2.7	Octante. Fonte: lojadomuseudemarinha.pt/pt/octante.html	38
2.8	Sextante. Fonte: cultura.marinha.pt/museumarinha/sextante.aspx	39
2.9	Máquina de Dividir. Fonte: cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e20.html	40
3.1	Cálculo da hora. Fonte: J. E. Lopes Banhos, <i>Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo</i> (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), 228 p. VII	46

3.2	Cálculo do ângulo horário. Fonte: J. E. Lopes Banhos, <i>Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo</i> (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), 228 p. IX	48
3.3	Cálculo da altura. Fonte: J. E. Lopes Banhos, <i>Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo</i> (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), 228 p. IX	50
3.4	Cálculo do azimute. Fonte: J. E. Lopes Banhos, <i>Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo</i> (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), 228 p. x	53
4.1	Cálculo da Hv G aparente do dia 12. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.238.	61
4.2	Cálculo da Hv G. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.238.	63
4.3	Variação da posição do navio.	65
4.4	Cálculo da longitude pela Tábuas de Norie. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.238.	66
4.5	Cálculo da latitude pela Tábuas de Norie. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.238.	67
4.6	Cálculo da longitude pela Tábuas de Lopes Banhos. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.239.	70
4.7	Utilização das Tábuas de Norie. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.253.	73
4.8	Transporte da reta de altura. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.253.	75
4.9	Utilização das Tábuas de Lopes Banhos. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.255.	78
4.10	Transporte da reta de altura. Fonte: <i>Guia de Navegação</i> , p.255.	79

Lista de Tabelas

4.1	Avaliação do método do ângulo horário	83
4.2	Avaliação do método de Marcq Saint-Hilaire	83
4.3	Resumos dos resultados para a fórmula de Norie.	86
4.4	Resumos dos resultados para a fórmula de Lopes Banhos.	87

Introdução

A navegação astronómica foi marcada por uma evolução contínua desde o início do século XV até ao final do século XVIII. Inicialmente sustentada por métodos empíricos como o rumo e estima — que permitiam determinar a posição de uma embarcação a partir de um ponto conhecido, com base na direção e distância percorridas — esta prática mostrava-se limitada, sobretudo em viagens oceânicas prolongadas.

Desde os primórdios da navegação marítima, o ser humano procurou formas de se orientar em alto-mar. À medida que as viagens se tornaram mais longas e complexas, surgiu a necessidade de uma navegação mais rigorosa e fiável, o que impulsionou a evolução da navegação astronómica. Esta ciência, que assenta na observação de corpos celestes e na aplicação de cálculos matemáticos, tornou-se essencial no período em que os navegadores europeus, em particular os portugueses, se aventuraram por mares desconhecidos e estabeleceram rotas marítimas globais.

A navegação astronómica representa não apenas uma conquista técnica, mas também um testemunho da estreita relação entre a ciência e a prática marítima. Os navegadores passaram a depender do Sol, da Lua, dos planetas e, sobretudo, das estrelas para determinar a sua posição, recorrendo a instrumentos como o astrolábio, o quadrante e o sextante. Esta prática exigia um conhecimento profundo da astronomia e da trigonometria esférica, bem como o domínio das tábuas náuticas, que foram sendo progressivamente aperfeiçoadas.

Com o tempo, a navegação astronómica evoluiu de um conjunto de práticas empíricas para uma metodologia científica consolidada. Foram introduzidas inovações significativas, como a medição do tempo com maior precisão — graças ao desenvolvimento dos cronómetros marítimos — e a publicação de efemérides e almanaques náuticos, que permitiam prever com exatidão as posições dos astros.

No final do século XIX, surgiram diversos esforços para simplificar os cálculos da navegação astronómica e torná-los mais acessíveis à prática a bordo. Em 1897, o oficial da Marinha Portuguesa J. E. Lopes Banhos publicou a sua obra *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*, na qual propõe um conjunto de tábuas destinadas

a facilitar o cálculo da hora a partir da observação de um astro. Como o próprio autor esclarece, estas tábuas não introduzem qualquer inovação científica, sendo antes uma adaptação eficiente das fórmulas tradicionais do cálculo do ângulo horário, reorganizadas de forma a reduzir o número de operações necessárias a bordo e a simplificar o processo de cálculo da hora e da posição do navio.

O principal objetivo desta dissertação de mestrado é estudar as *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* de J. E. Lopes Banhos, destacando as suas particularidades estruturais, a lógica de organização dos dados e a sua utilidade prática no contexto da navegação astronómica.

Estas tábuas, concebidas para simplificar os cálculos associados à determinação da hora a partir da observação de astros, oferecem soluções não só para o cálculo do ângulo horário, mas também para diversos problemas derivados do triângulo de posição, envolvendo três lados e um ângulo. A sua apresentação clara, a precisão numérica com quatro casas decimais e a abrangência de declinações superiores a 70° , representam uma importante vantagem na observação de estrelas com declinação elevada e em situações práticas onde a soma da altura com a latitude ou a declinação ultrapassa os 90° .

Para além de compreender o funcionamento das tábuas de Lopes Banhos e os fundamentos matemáticos subjacentes, esta dissertação propõe-se também compará-las com outras tábuas da época, em particular com a obra de John William Norie, *Nautical Tables*. Esta comparação permitirá avaliar a originalidade da abordagem de Lopes Banhos, bem como a sua eficácia relativa, contribuindo para um melhor enquadramento do seu contributo no panorama da navegação astronómica no final do século XIX.

Face aos objetivos propostos, esta dissertação foi estruturada em dois eixos principais:

1. Numa primeira fase, procura-se compreender a evolução da navegação astronómica no que respeita ao cálculo da latitude e da longitude, bem como a evolução dos instrumentos e das tábuas astronómicas utilizadas ao longo dos séculos;
2. Seguidamente, analisar detalhadamente a estrutura e as fórmulas presentes nas tábuas de Lopes Banhos, através da realização de cálculos práticos que visam facilitar a sua compreensão. Por fim, procede-se ao cálculo da posição utilizando o método do ângulo horário e o método de Marcq Saint-Hilaire,

recorrendo às tábuas de Norie e de Lopes Banhos, com o objetivo de realizar uma comparação entre ambas as tábuas.

Esta abordagem permitirá não só compreender o funcionamento das tábuas de Lopes Banhos, como também aferir a sua eficácia e precisão através de comparações sistemáticas. Para tal, também será utilizado um ficheiro Excel com várias alturas observadas para uma sistematização dos cálculos, permitindo uma análise comparativa da precisão das tábuas.

Capítulo 1

Evolução da Navegação Astronómica até ao Século XIX

A evolução da arte de navegar pelos astros até ao século XIX foi marcada por uma crescente evolução desde o início do século XV até ao final do século XVIII. No início, os povos do Mediterrâneo dominavam as técnicas¹ mais avançadas da navegação e cartografia, método rumo e estima. Durante a Primeira Dinastia, reinado de D. Dinis, o Almirante genovês Manuel Pessanha foi contratado com a incumbência de reformar a Marinha e defender a costa portuguesa dos ataques de pirataria muçulmana. O mesmo foi acompanhado por mais 20 homens que conheciam as mais evoluídas técnicas de navegação, com o objetivo de passar conhecimento aos Portugueses.

1.1 Rumo e Estima

O método de rumo e estima baseava-se na determinação da posição de uma embarcação a partir de um ponto previamente conhecido, traçando-se novos pontos com base no rumo e na distância estimada percorrida. Era considerado, na altura, um dos processos mais simples² para estimar a posição do navio, sobretudo quando não era possível ver terra. Apesar disso, apresentava limitações significativas, pois impedia exploração marítima (viagens longas), sendo obrigados a navegar sempre juntos a costa sujeito a vários perigos, tais como correntes fortes, rebentação das ondas ou baixios. A cada posição marcada, reiniciava-se o processo, acumulando-se progressivamente erros devido à imprecisão na avaliação da direção e da distância navegada.

1. António Costa Canas, *Naufrações e Longitude* (Lisboa: Comissão Cultural da Marinha, 2003), pp. 13–14.

2. Canas, p. 14.

Durante os primeiros dias de navegação sem referências exteriores, os erros podiam ser toleráveis, ainda que consideráveis. Contudo, quando as embarcações navegavam durante semanas ou meses sem avistar terra como acontecia em muitas viagens oceânicas, a incerteza sobre a posição tornava-se demasiado elevada. Nestas situações, era necessário recorrer a outros métodos de orientação de forma a corrigir a estima e garantir a segurança da navegação.

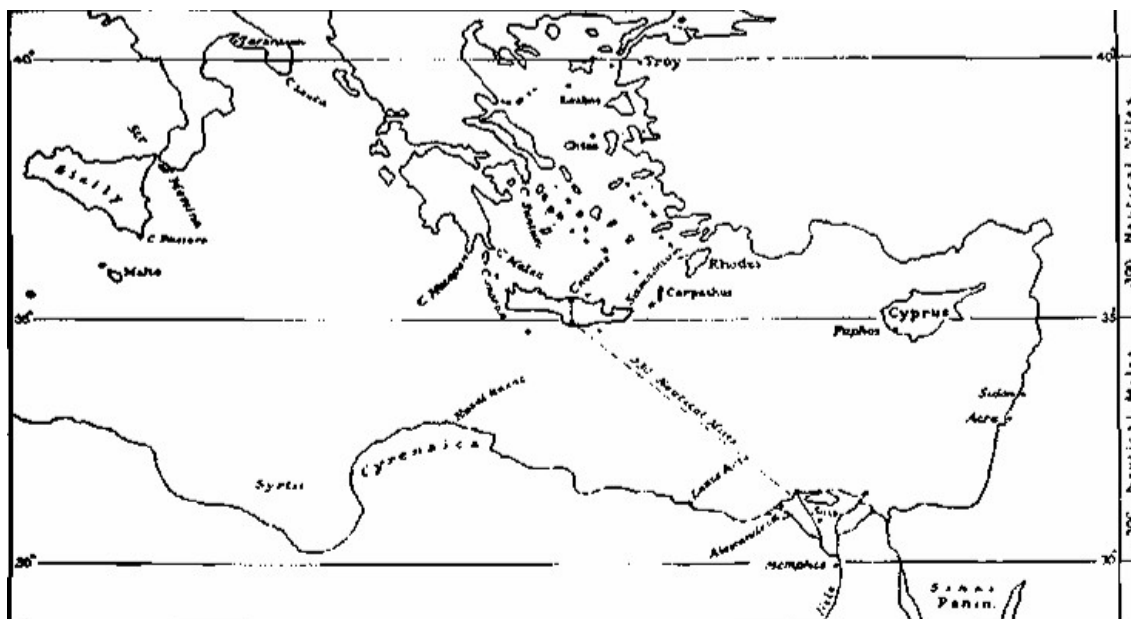


FIGURA 1.1: O Mediterrâneo Oriental. Fonte: *Naufregios e Longitude*, p.15.

A navegação sem terra à vista, não se limitava apenas a períodos curtos durante a manobra para evitar perigo. Podemos ver que desde a antiguidade já se navegava longe da costa, por períodos mais ou menos longos. Como por exemplo: durante a época Minóica (séc. XX e XV a.C), os habitantes de Creta³ navegavam pelo menos dois dias sem avistar terra. Na época, existia apenas dois processos para obter a direção no mar sem avistar terra: usando astros como ponto de referência, ou conhecendo a direção do vento.

No Mediterrâneo, esse saber náutico era transmitido de uma geração para outra geração de marinheiros. Ainda na Antiguidade Clássica, estes conhecimentos passaram a forma escrita através dos *Periplus*, posteriormente continuados pelos chamados *Portulanos*, produzido pelos marinheiros das cidades italianas (Génova e Veneza).

3. Canas, *Naufregios e Longitude*, pp. 15–21.

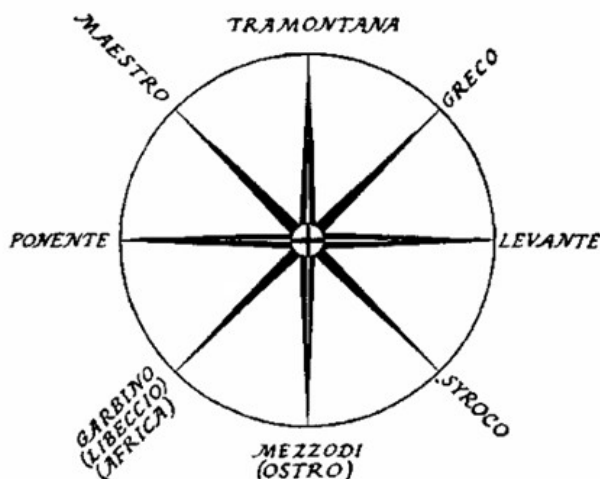


FIGURA 1.2: Os Nomes dos Ventos do Mediterrâneo. Fonte: *Naufrágios e Longitude*, p.16.

No século XIII, com a representação gráfica dos chamados Portulanos nasce a Carta-Portulano⁴. Nela traçava-se uma rede de direcções a partir de um ou mais pontos, representando-se de seguida o contorno das costas, bem como toda a informação de interesse náutico. Desta forma, ficavam indicadas a direcção e a distância estimada entre os diversos locais frequentados pelos marinheiros daquele mar.

O aparecimento desta carta permite-nos perceber como evoluiu a arte de navegar durante a Idade Média. Posto isso, apareceu um instrumento que passou a ser indispensável para os navegadores, a agulha magnética, que indicava a direcção a ser seguida pelos marinheiros. Embora inicialmente rudimentar, a agulha magnética veio revolucionar a náutica. A sua introdução permitiu um maior rigor na determinação da direcção.

Esta prática conhecida como cabotagem, consistia em guiar as embarcações pelos astros, pelo voo das aves, ou pela direcção do vento e das ondas. Entre 1400 e 1550, os avanços nas técnicas náuticas impulsionaram a relevância marítima de Portugal. A introdução e aprimoramento da agulha magnética permitiram maior precisão na navegação, possibilitando viagens mais seguras e eficientes, afastando-se da costa. A evolução das cartas náuticas trouxe maior rigor na definição de rumos. No século XVI, a suspensão Cardan melhorou a estabilidade da agulha magnética a bordo, aumentando a precisão da leitura dos rumos.

4. Canas, p. 17.



FIGURA 1.3: Carta-Portulano. Fonte: almamater.uc.pt/item/65702

Com as longas viagens atlânticas sem avistar terra, a navegação por rumo e estima mostrou-se imprecisa. No tempo do Infante D. Henrique, surgiu a náutica astronómica portuguesa, baseada na medição da altura da estrela Polar com o quadrante, permitindo estimar a latitude. Posteriormente, a técnica evoluiu com o uso da estrela Polar e correções registadas no hemisfério Norte, resultando nas rodas Polar, facilitando a navegação com maior precisão.

1.2 Latitude

A determinação da latitude pelos astros começou no século XV⁵, por forma a reduzir os erros acumulados na navegação estimada no hemisfério Norte. No entanto, ao explorar o hemisfério Sul, a estrela Polar não era visível. Os navegadores enfrentaram dificuldades para determinar a latitude. Isso levou à adoção do astrolábio para medir a altura meridiana. Esta técnica foi aprimorada por Abraão Zacuto e José Vizinho⁶, cujos cálculos foram fundamentais para o levantamento cartográfico da costa africana. Com a implementação dessas técnicas, a navegação portuguesa tornou-se mais precisa, viabilizando as grandes viagens oceânicas.

5. João Tomás Ramalho Pires Trigo, «Cálculo da Posição pelo Método de Sumner» (Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2024), p. 3.

6. Luís de Albuquerque, «Determinação de Latitude pela Estrela Polar», em *Estudos de História Volume III* (Universidade de Coimbra, 1975), 60-204.

A necessidade de determinar a latitude impulsionou mudanças na cartografia, como a inclusão de escalas de latitude nas cartas náuticas e o levantamento costeiro baseado em observações astronômicas. A base para a medição das latitudes é o Equador, uma linha fundamental e claramente definida sobre a superfície terrestre, perpendicular ao eixo de rotação do planeta. Essa característica conferiu à latitude um status de coordenada absoluta e de fácil determinação, tornando-se uma ferramenta essencial para a navegação marítima desde as primeiras expedições oceânicas.

No século XVI, foram introduzidas melhorias na navegação, como o utilização do Cruzeiro do Sul para navegação no hemisfério Sul e a balestilha, um novo instrumento de medição. Vários historiadores⁷ defendem que no século XIV já era praticada a navegação astronômica no Mediterrâneo com métodos sem precisão e sem evidência matemática (cálculos expeditos) conforme já foi referido. Podemos encontrar um exemplo desta teoria no trecho dos *Mirabilia Descripta* de Jourdain de Séverac, onde se encontra uma referência com a data de 1330 como cálculo da altura da estrela Polar com os dedos.

O cálculo da latitude envolvia operações simples de soma e subtração. As cartas utilizadas na altura eram conhecidas como “cartas planas quadradas”. O matemático e cosmógrafo português, Pedro Nunes, foi uma figura central nesse processo, ao estudar o problema das cartas planas quadradas e propor soluções teóricas para a melhoria da cartografia e navegação. Embora a sua obra tenha sido em grande parte teórica e escrita em latim, Pedro Nunes contribuiu significativamente para o desenvolvimento da utilização da projeção de Mercator. Esta carta foi criada pelo cosmógrafo flamengo, Gerardus Mercator, em 1569, que permitiu uma representação mais precisa da superfície curva da terra em mapas.

O primeiro método utilizado para calcular a latitude baseava-se na observação da altura da Estrela polar, visível apenas no hemisfério Norte. Como a Estrela Polar está próxima do Polo Norte Celeste, a sua altura quase correspondia à latitude do observador, com a necessidade de pequenas correções. Durante os descobrimentos (século XV-XVI), o único método conhecido para calcular a latitude no hemisfério Sul, era pela passagem meridiana do Sol, ou seja, quando o Sol atingia a sua altura máxima no céu. Esse método apresentava uma limitação significativa. Era necessário realizar a observação no meio-dia solar, o que tornava o processo inviável em dias nublados. Em 1537, Pedro Nunes propôs alternativas baseadas em medições feitas fora da passagem meridiana, buscando maior flexibilidade na obtenção da latitude,

7. Trigo, «Cálculo da Posição pelo Método de Sumner», p. 3.

propondo o cálculo da latitude por alturas extrameridianas do Sol. O objetivo era superar as limitações impostas por condições meteorológicas, como céu nublado, que impediam a visualização do Sol no momento da passagem meridiana.

Padre Valentim Estancel, desenvolveu um novo método no século XVII, tentando simplificar os cálculos matemáticos para as alturas extrameridianas, que eram complexos e demorados. Em 1740 Cornelis Douwes, neerlandês, revolucionou o cálculo da latitude por extrameridianas ao utilizar funções logarítmicas. Este cálculo foi posteriormente aperfeiçoado por James Ivory e Edward Riddle na década de 1820. Esse método facilitou os cálculos de trigonometria esférica, aumentando a eficácia e simplicidade na resolução do triângulo de posição. Esses avanços foram incorporados em manuais de navegação, incluindo os portugueses, como os de Costa e Almeida, e de Peregrino Leitão, reforçando a relevância desses métodos no ensino da navegação astronómica.

Com base nestes métodos, vários matemáticos continuaram a aprimorar os cálculos de latitude, contribuindo para a evolução da navegação astronómica. No entanto, estes métodos tiveram pouca aplicação prática, pois a maioria dos pilotos se satisfazia com a latitude obtida pela passagem meridiana, cujos cálculos eram muito mais simples. O desenvolvimento do método de Sumner, em 1837, e a consolidação do método de Marcq Saint-Hilaire, também resultaram desta aprimoração.

Esses avanços permitiram que os portugueses navegassem com maior segurança e precisão, possibilitando a expansão ultramarina, a chegada à Índia, o descobrimento do Brasil e a exploração do Extremo Oriente. Os portugueses, pioneiros na expansão marítima, desenvolveram a navegação astronómica, que permitia determinar a latitude com relativa precisão a partir da observação de astros como o Sol e a Estrela Polar. A evolução da cartografia náutica, impulsionada pela náutica astronómica, abriu caminho para a cartografia matemática e consolidou o domínio português nos oceanos no início da Era dos Descobrimentos. Com isso, podemos dizer que a forma de calcular a latitude mudou ao longo do tempo, mas o princípio básico sempre foi o mesmo⁸: medir a altura do astro em relação ao horizonte e efetuar operações simples de soma e subtração.

8. Como afirma Queirós na sua Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha. Ana Filipa Teorgas Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marcq Saint-Hilaire: Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário» (Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2022).

1.3 Longitude

A determinação da longitude foi um dos maiores desafios da navegação astronômica até o final do século XVIII⁹. Vários textos abordaram a urgência de encontrar um método para conhecer as coordenadas no mar. O erro na determinação da posição Leste-Oeste resultava em desvios consideráveis, tornando as viagens mais longas; como exemplo, podemos ver vários casos de desastres causados pela falta de conhecimento da longitude, que ocorreram durante as viagens nos oceanos Atlântico, Índico e Pacífico.

É pertinente analisar com alguma atenção alguns desses episódios (desastres). Serão apresentados dois exemplos, ambos referentes a navios britânicos, com o intuito de demonstrar que a História Trágico-Marítima¹⁰ não foi exclusiva dos Portugueses e, ao mesmo tempo, reforçar o papel central que a Grã-Bretanha viria a desempenhar na procura de uma solução para o problema da longitude, como veremos mais à frente.

O primeiro caso a ser abordado aconteceu em 1591, com George Raymond, um marinheiro experiente inglês, que já havia combatido contra a Invencível Armada Espanhola. O navio partiu de Plymouth com destino à Índia, levando mais três navios como escolta. Como não conhecia as correntes do Golfo da Guiné, atrasou-se e demorou vários meses a chegar à região do Cabo. De seguida, mandou um dos navios regressar a Inglaterra. Continuando a sua viagem ao largo das correntes do Cabo, o navio chefe foi destruído por uma tempestade. James Lancaster assumiu o comando da viagem, largando de Zanzibar em direção a Índia. Devido a ventos e correntes desfavoráveis, foram parar a Sumatra. Atacaram navios portugueses antes de retornar a Inglaterra. No Atlântico, abateram para Oeste, e foram parar às Antilhas, onde o navio desapareceu com seis tripulantes. Lancaster e os poucos sobreviventes foram resgatados por um navio francês e levados de volta à Inglaterra.

Já o segundo caso aconteceu em 1707, talvez o mais importante na história da longitude. Uma esquadra britânica afundou junto às Ilhas Scilly, próximo da Grã-Bretanha, resultando na morte do Almirante Sir Cloudesley Shovell. A imprensa abordou o caso com bastante insistência e, em 1713, dois matemáticos afirmaram que o desastre aconteceu por desconhecimento da longitude e que poderia ser evitado. Como consequência, o Parlamento Britânico lançou um desafio, com direito

9. Canas, *Naufrações e Longitude*, pp. 59–87.

10. Canas, p. 59.

a prémio, a quem encontrasse um processo que conseguisse resolver o problema da longitude.

Mesmo após a criação do prémio para incentivar a solução do problema da determinação da longitude, desastres continuaram a acontecer. Como exemplo, podemos ver que durante a expedição do Comodoro George Anson em 1739, ao tentar localizar o Arquipélago de Juan Fernández sem saber a sua posição exata, perdeu dois terços da sua tripulação devido à fome e à escassez. Esses incidentes ilustram como, mesmo após os grandes descobrimentos, a navegação ainda enfrentava desafios significativos; especialmente na determinação da longitude, questão que só foi resolvida após muitos anos de estudo e inovação.

Embora a latitude pudesse ser calculada com relativa precisão, a longitude permaneceu um problema por vários séculos. A longitude de um local é a diferença de longitude entre esse local e um outro situado num meridiano de referência. A grande diferença entre a latitude e longitude está no facto da latitude poder ser medida em termos absolutos, enquanto a longitude apenas pode ser medida em termos relativos. Como vimos, a latitude corresponde à altura do polo acima do horizonte, sendo coordenada fixa para qualquer local na superfície terrestre. A base para medição da latitude é a linha do Equador, uma linha fundamental claramente definida sobre a superfície terrestre.

Com a longitude a situação é diferente. A terra roda no sentido anti-horário de Oeste para Leste, com uma velocidade constante. Os astros nascem nos setores de Leste e sobem até atingirem a sua altura máxima, e posteriormente, descem até desaparecer nos setores de Oeste. Não havia uma linha que pudesse ser utilizada como base para medição da longitude, tal como o Equador¹¹ para latitude. Essa limitação fez com que, durante vários séculos, marinheiros fossem obrigados a estimar a posição Leste-Oeste, com base na navegação estimada, um método impreciso e suscetível a erros cumulativos.

Essa relatividade da determinação da longitude, evidencia um dos principais desafios enfrentados ao longo da história da navegação e cartografia, por uma referência de medição para longitude. A questão da determinação do meridiano de referência, reflete a evolução dos conceitos cartográficos e astronómicos, bem como os desafios políticos e científicos envolvidos na padronização das coordenadas geográficas. Diferentes civilizações adotaram distintos pontos de origem para medir a longitude. Sendo a escolha frequentemente influenciada por fatores práticos, científicos e até mesmo políticos.

11. Canas, *Naufrações e Longitude*, p. 61.

Os geógrafos gregos da antiguidade, ao desenvolverem seus primeiros mapas baseados em redes de paralelos e meridianos, adotaram diferentes pontos de origem para a contagem das longitudes. Eratóstenes, utilizou Rodas (Grécia) como meridiano central, enquanto Ptolomeu, inicialmente escolheu Alexandria (Egito) antes de adotar como referência as Ilhas Afortunadas (Canárias), que representavam em seu entendimento, o extremo ocidental do mundo conhecido. A sua obra teve uma grande influência sobre os geógrafos, levando à adoção das Ilhas Afortunadas¹² por vários países europeus como ponto de origem da longitude nos mapas produzidos a partir do século XV. Mais tarde, já no século XVI, quando se começaram a determinar longitudes de forma mais sistemática, as contas eram frequentemente feitas em relação à cidade para a qual as tábuas utilizadas tinham sido calculadas, convertendo-se depois, quando necessário, para o meridiano ou porto de partida. Ou seja, não havia, na época, um único meridiano de referência. Cristóvão Bruno reforça a ideia que:

Ainda que do Oriente para Ocidente não haja no céu coisa alguma fixa onde possamos começar a medida pelo comprimento, como a temos de norte a sul para a largura, contudo os cosmógrafos antigos determinaram na terra um termo fixo para que fosse princípio das medidas das terras; este tomaram nas Ilhas Canárias aonde constituíram o primeiro meridiano, do qual se tomam os graus e léguas que cada terra está afastada dele pelo comprimento de leste a oeste, a que chamam comprimento absoluto para a distinção de outro qualquer comprimento, que está entre uma terra e outra também de leste para oeste¹³.

Com o avançar dos estudos astronômicos, foram apresentadas diversas propostas para localização do meridiano de referência, conforme as necessidades dos utilizadores. Podemos ver que com a descoberta de uma linha de declinação magnética nula no meio do Atlântico, levou a tentativa de estabelecer o meridiano no Arquipélago dos Açores, chamado na altura de “meridiano vero” (meridiano verdadeiro), posteriormente abandonada.

A proliferação de observatórios astronômicos nos séculos XVII e XVIII resultou em uma multiplicidade de meridianos de referência. Cada um centrado no local onde os cálculos astronômicos fossem realizados, o que originou uma grande complexidade nas relações internacionais. Pois, exigia constantes conversões para que mapas e tabelas de navegação elaboradas em diferentes países pudessem ser

12. Canas, p. 62.

13. Canas, p.62.

comparadas. Como resposta a esse problema, surgiram propostas de meridianos “neutros”, como aquele que passava pela Grande Pirâmide de Gizé ou pelo Estreito de Bering, com o intuito de evitar favoritismo nacional.

A resolução definitiva do meridiano surgiu no final do século XIX, com a realização da Conferência de Washington em 1884. Esta conferência estabeleceu o meridiano de Greenwich como o meridiano principal para a medição das longitudes. Essa decisão marcou um momento crucial na padronização da cartografia mundial, garantindo um referencial único para a navegação, a astronomia e a geografia. Assim, a determinação da longitude, que durante séculos foi um desafio técnico e político, encontrou na padronização do meridiano um avanço essencial para o desenvolvimento da ciência e da navegação global.

The difficulties related to the profusion of prime–meridians—difficulties thought by many to be insurmountable—were not brought to an end until the closing decades of the 19th century, when it was decided by international agreement to adopt the meridian through Greenwich as the prime meridian from which longitudes should be measured¹⁴.

Com o crescimento das viagens marítimas entre as potências europeias, a necessidade de um método preciso para calcular a posição de um navio ficou mais evidente. A dificuldade de medir a longitude não apenas prolongava as viagens, mas também era responsável por naufrágios e grandes perdas económicas e humanas. No século XVII, vários países ofereceram prémios a quem desenvolvesse um método eficaz para determinação da longitude. Filipe II, Rei de Espanha, foi um dos primeiros em 1567, seguido por Filipe III em 1597¹⁵. Entre os candidatos estava Galileu, que propôs um método baseado na observação dos satélites de Júpiter. Outros países, como os Países Baixos, França e Itália, também incentivaram pesquisas nesta área.

A solução para o problema da longitude apareceu com cronómetro de John Harrison. Em 1714, o Parlamento Britânico, como já referido inicialmente, ofereceu vários prémios, que variavam de 10.000 libras a 20.000 libras, dependendo do grau de precisão alcançado. Harrison desenvolveu uma série de cronómetros, sendo o seu modelo nº 4, concluído em 1759. A solução encontrada, baseada em cronómetros precisos, não apenas revolucionou a cartografia e a astronomia náutica, mas também consolidou a importância da precisão científica na exploração marítima. Embora tenha recebido a maior recompensa, ao longo do processo foram concedidas quantias menores a outros pesquisadores que contribuíram com avanços significativos na área.

14. Canas, *Naufrágios e Longitude*, p.64.

15. Canas, p. 66.

Para solucionar o problema da longitude, desenvolveram duas abordagens. A primeira abordagem baseava-se em soluções mecânicas, com o uso de um relógio preciso, que permitisse conservar a hora do meridiano de referência, comparar com a hora local. A segunda abordagem baseava-se em soluções astronómicas, na observação de eventos que ocorressem simultaneamente em diferentes locais. Se a hora desse fenómeno fosse conhecido no meridiano de referência, bastava determinar a respetiva hora local para conhecer a longitude.

Só no século XVIII, com o desenvolvimento do método das distâncias lunares¹⁶ e o cronómetro, quase em simultâneo, foi possível resolver o problema da longitude. O uso do cronómetro revelou-se mais prático. A sua utilização mantém-se até os dias de hoje. O grande problema associado aos cronómetros era a sua comercialização, pois eram demasiado caros e demoraram décadas a se tornarem acessíveis. Essa situação levou à utilização do método das distâncias lunares durante muito tempo. Este método apresentava desafios devido à sua complexidade de cálculos que exigia um grande conhecimento em matemática. O problema foi resolvido com a publicação do *Almanaque Náutico*, o que permitiu a simplificação do processo.

1.3.1 Propostas para resolver a questão da Longitude

Como vimos anteriormente, foram criadas duas abordagens para resolver o problema da longitude. A primeira baseava-se em processos astronómicos e a segunda em processos mecânicos.

1.3.1.1 Abordagem Astronómica

Já foi mencionado que, desde o século XV, os marinheiros começaram a utilizar os astros por forma a reduzir os erros acumulados da navegação. Estes apresentavam uma vantagem de poderem ser observados no alto-mar, e muitos deles apresentavam um movimento bastante regular, com uma periodicidade diária. Foram apresentadas várias sugestões baseadas na observação dos astros para resolver o problema da longitude. No entanto, muitas delas não tiveram aplicação prática devido à dificuldade de efetuar as medições e complexidade de cálculos. Entre os métodos propostos, destacou-se o método das distâncias lunares, eclipses lunares e o método dos satélites de Júpiter.

16. António Costa Canas, «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal | Contributo de Monteiro da Rocha», em *Arte de Navegar / Nautical Science 1400–1800* (Coimbra: Sítio do Livro, Lda, 2014), p. 33–34.

1.3.1.2 Método das distâncias lunares

O método das distâncias lunares¹⁷ foi apresentado por Johann Werner, de Nuremberga (Alemanha), em 1514. Existem algumas referências de que Cristóvão Colombo e Amerigo Vespucci já teriam utilizado este método para determinar a longitude no século XV, mas há pouca informação sobre os cálculos, e os resultados foram imprecisos. Este método baseia-se na variação da posição da Lua em relação a outros astros¹⁸.

A Lua pode ser comparada como uma espécie de relógio¹⁹ celeste, por causa da diferença de velocidade entre a Lua e os restantes astros. Este facto pode ser interpretado de várias formas para conhecer a longitude de um local. Se tivermos uma tabela que relacione as horas com as distâncias angulares entre a Lua e os restantes astros, podemos determinar a hora correspondente a uma observação feita a bordo de um navio. O movimento relativo Lua-Sol funciona como um ponteiro de relógio mecânico, permitindo calcular a longitude ao compará-lo com a hora local obtida pelo Sol ou por um relógio ajustado recentemente.

No entanto, este método apresentava várias dificuldades como, determinar com precisão rigorosa²⁰ o movimento da Lua, a posição das estrelas e a falta de instrumentos²¹ com precisão adequada. O principal problema na sua utilização deste método reside no facto de a Lua se deslocar cerca de 13 graus por dia em relação aos outros astros, ou seja, aproximadamente um grau a cada duas horas. Isso significa que um erro de apenas um minuto na medição da distância lunar se traduz num erro de dois minutos no tempo, o que, na prática, é bastante significativo.

Para resolver essas dificuldades, foram criados vários observatórios astronómicos, destacando-se o de Paris em 1667 e o de Greenwich em 1675. O trabalho realizado por esses dois observatórios, permitiu a elaboração de tabelas rigorosas com posição dos astros utilizados para determinar a longitude. O astrónomo Nevil Maskelyne testou este método na mesma altura em que foi lançado o cronómetro nº4 de Harrison. Maskelyne percebeu que a maior dificuldade deste método estava

17. Canas, «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal | Contributo de Monteiro da Rocha», pp. 33–37.

18. Como o ângulo entre a Lua e os restantes astros muda com uma certa velocidade, é possível, ao observar esse ângulo num local específico, e saber em que instante ele ocorre noutra local, determinar a diferença de horas entre os dois locais e, assim, calcular a longitude.

19. António Rosa Pires, «A Navegação em Portugal em meados do século XIX» (Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2021), p. 17.

20. O que implicava observações durante longos períodos.

21. Este problema, foi resolvido com o aparecimento do octante e do sextante.

no tempo de cálculo, demorando quatro horas para calcular a longitude. Para evitar este problema, começou a ser publicado, a partir de 1767, o *Nautical Almanac* em conjunto com as *Tables Requisite*, com valores tabulados em função do dia, que simplificava e reduzia o tempo de cálculo.

1.3.1.3 Abordagem Mecânica

1.3.1.4 Pelo Cronómetro

Durante muito tempo, vários elementos da comunidade científica como, Halley, Newton e mais tarde Nevil Maskelyne, defendiam que, a única forma possível para determinar a longitude no mar era através da astronomia. Em particular, Newton defendia que um cronómetro rigoroso apenas ajudaria a manter a longitude e não conseguia descobri-la²². Gemma Frisius²³, é geralmente considerado, por grande parte dos historiadores de ciência, como o primeiro a sugerir, em 1530, a ideia de usar um relógio que conservasse a hora do meridiano. No entanto, Fernando Colombo, em 1524, apresentou a mesma ideia na Junta de Badajoz–Elvas, para discutir se as Molucas se encontrava no hemisfério português ou espanhol, definidos pelo Tratado de Tordesilhas.

O neerlandês Christiaan Huygens foi o primeiro grande cientista a dedicar grande parte da sua vida a este método. Em 1656, inventou um relógio de pêndulo, mas os resultados não foram satisfatórios para resolver o problema. Mesmo não tendo conseguido criar o relógio ideal, Huygens fez duas contribuições importantes: descobriu a equação do tempo relacionada com o período de oscilação de um pêndulo e propôs o método das alturas iguais para determinar a hora local. No início do século XVIII, houve vários avanços na construção de um relógio ideal, mas nenhum desses relógios era capaz de cumprir os critérios exigidos pelo Board of Longitude. Estes critérios incluíam, as variações de temperatura e pressão atmosférica, balanço do navio e atmosfera agressiva²⁴.

Parecia impossível construir um relógio mecânico que cumprisse com esses critérios. John Harrison, relojoeiro inglês, que havia construído vários relógios com precisão em terra com atrasos inferiores a um segundo por mês, tomou conhecimento em 1726, do prémio oferecido pela Board of Longitude. Cerca de dez anos depois,

22. Segundo Newton, se o cronómetro parasse durante a viagem, não seria possível determinar a longitude com precisão.

23. Canas, «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal | Contributo de Monteiro da Rocha», p. 32.

24. Estes fatores afetavam a marcha de qualquer relógio e impediam a conservação da hora de referência dentro dos limites impostos

testa o seu primeiro cronómetro marítimo, H1, numa viagem a Lisboa. No regresso, Harrison usou o seu cronómetro para corrigir a posição que o piloto acreditava baseando na sua estima, estar junto a Start Point. Enquanto pelo cronómetro, Harrison afirmava estar 1,5° de diferença, junto a Lizard Point. A sua posição estava correta, validando a precisão do seu cronómetro e reforçando a importância do seu trabalho.

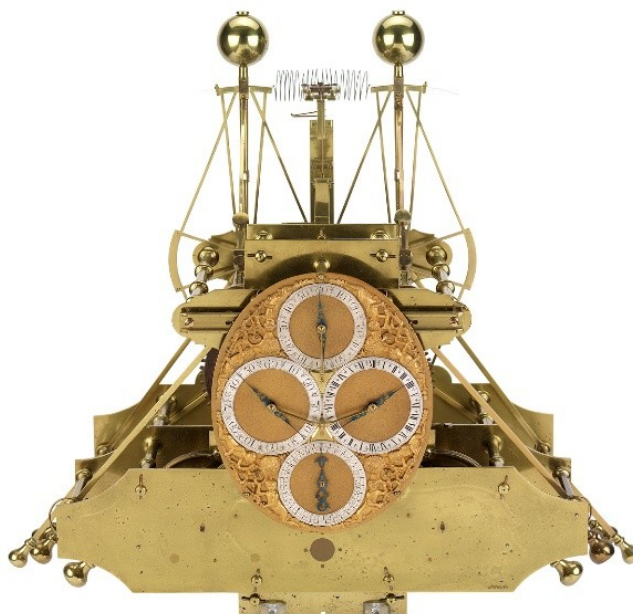


FIGURA 1.4: H1. Fonte: rmg.co.uk

Percebendo algumas limitações no seu primeiro cronómetro marítimo, em 1739 cria a segunda versão, o H2. Limitou-se a testá-lo em terra, com medo de ser capturado²⁵ pelos espanhóis. Em 1757, criou o seu terceiro cronómetro, o H3. Nessa mesma altura, lançou o cronómetro que resolveu a questão do cálculo da longitude, o H4. Completamente diferente dos anteriores, que eram de dimensões razoáveis, o H4 cabia num bolso²⁶.

25. Na altura Inglaterra e Espanha estavam em guerra.

26. Foi inspirado num relógio de bolso construído por um empregado de Harrison, John Jefferys, em 1753

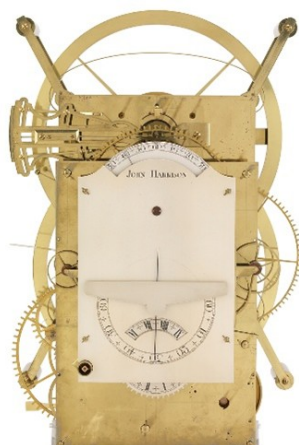


FIGURA 1.5: H3. Fonte: rmg.co.uk

O H4 foi testado numa viagem de ida e volta à Jamaica entre 1761–1762. Este acumulou um erro de 1 minuto e 54,5 segundos²⁷ em 147 dias de viagem. Numa segunda viagem a Barbados em 1764, acumulou um erro de 54 segundos, em 156 dias de viagens que poderiam ser corrigidos para 15 segundos. Essa correção era possível porque Harrison conhecia os efeitos da temperatura e da humidade sobre o movimento do relógio e preparou tabelas específicas de correção, em função dessas variáveis. Posto isso, finalmente passou a ser possível determinar, a bordo de um navio, a hora do meridiano de Greenwich com precisão necessária e, a partir dela, calcular a hora local e, conseqüentemente, a longitude.



FIGURA 1.6: H4. Fonte: rmg.co.uk

27. Este valor estava dentro dos limites impostos pelo Acto do Parlamento de 1714.

1.4 Longitude pelo ângulo horário com aplicação do cronómetro

Para determinar a longitude utilizando um cronómetro, ou qualquer outro método, é necessário conhecer as horas de bordo e as horas do meridiano de referência. A diferença entre essas duas horas representa o intervalo entre os dois meridianos. Convertendo essa diferença em graus e considerando que a Terra gira 15° por hora²⁸, obtém-se a longitude.

Numa fase inicial, mede-se a altura do Sol ou de outros astros, registando simultaneamente a hora indicada pelo cronómetro. A altura observada deve ser corrigida para a altura verdadeira. A partir da altura verdadeira determina-se o tempo verdadeiro no meridiano do observador — isto é, a hora local. A hora do meridiano de referência (normalmente Greenwich) obtém-se directamente do cronómetro e é essa hora que se usa para consultar no Almanaque Náutico a declinação do Sol no instante requerido. Na ausência de cronómetro, calcula-se a hora do meridiano de referência a partir da longitude estimada; essa aproximação costuma ser suficiente para retirar do Almanaque a declinação necessária para os cálculos.

Este cálculo pode ser realizado antes ou depois da passagem meridiana. No entanto, para maior precisão, a observação do astro deve ocorrer quando este estiver mais próximo dos pontos leste ou oeste. Recomenda-se que a observação seja feita pelo menos uma hora e meia antes ou depois do meio-dia solar, idealmente dentro de um intervalo entre uma hora e meia e três horas de distância do meio-dia solar.

Para compreender este cálculo, analisaremos o triângulo esférico para definição de alguns parâmetros a considerar²⁹. Para mais informação acerca do triângulo esférico, deve-se consultar a Dissertação de Mestrado de Ana Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marcq Saint-Hilaire», apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha.

- O ponto Z representa o zénite;
- O ponto M representa o astro;
- O ponto P corresponde ao polo celeste.

28. João Peregrino Leitão, *Guia Náutica* (Lisboa: Da Sociedade Typographica Franco Portuguesa, 1865), p. 116.

29. Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marcq Saint-Hilaire», p. 53.

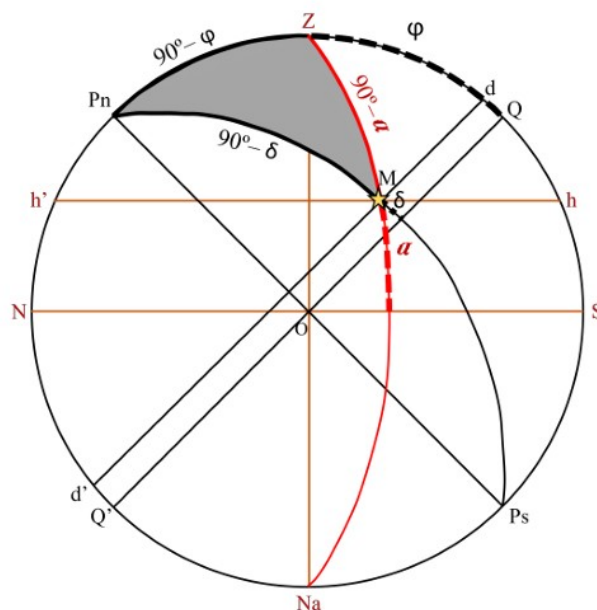


FIGURA 1.7: Triângulo de Posição na Esfera Celeste. Fonte: Queirós, p.7.

A longitude é calculada com base no ângulo horário, representado pelo ângulo $ZPnM$ no triângulo de posição. No triângulo de posição, a altura do astro (MA) e a sua declinação (MS) são conhecidas.

O ângulo horário ($ZPnM$) corresponde ao arco QM no equador. Para o determinar, utilizam-se os três lados do triângulo esférico: a distância zenital (ZM) que é obtida pelo complemento da altura observada do astro, a distância polar (PnM) que é obtida pelo complemento da declinação retirada das tabelas³⁰ astronómicas e a colatitude (ZPn) obtida pelo complemento da latitude estimada.

A latitude³¹ a utilizar nos cálculos será a latitude estimada, obtida a partir de uma latitude conhecida, ajustada em função do rumo e da distância percorrida.

Para o cálculo da longitude pelo ângulo horário, recorreremos à fórmula fundamental da trigonometria esférica³². Nesta equação, existem três lados (a, b, c) e um ângulos (A) que relacionam as posições do zénite, do polo e do astro observado. A aplicação desta equação permite resolver o triângulo de posição e determinar a longitude:

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \text{sen}(b) \text{sen}(c) \cos(A) \quad (1.1)$$

30. A declinação do astro é determinada para a hora específica utilizando a tabela do almanaque náutico.

31. Leitão, *Guia Náutica*, p. 117.

32. Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marcq Saint-Hilaire», p. 54.

Conhecendo três dos seis elementos que compõem um triângulo esférico, é possível calcular os restantes. No caso do triângulo de posição, já se conhecem os valores dos três lados: a distância zenital (ZM), a distância polar (PnM) e a colatitude (ZPn). O objetivo é determinar o ângulo no polo (Pn), correspondente ao ângulo horário. Para isso, aplica-se a fórmula fundamental da trigonometria esférica e obtém-se que:

$$\cos P_n = \frac{\text{sen } a - \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta}{\cos a \cos \varphi} \quad (1.2)$$

Inicialmente, a presença de uma subtração no numerador dificultava a aplicação de logaritmos na resolução da fórmula. A solução encontrada foi reescrever a expressão de modo a eliminar essa subtração, permitindo assim o uso de logaritmos. Para contornar essa limitação, Peregrino Leitão³³ apresentou uma nova fórmula que simplificou o cálculo. A introdução dos logaritmos na equação da trigonometria esférica, tornando o método mais rápido e eficiente, facilitando a sua aceitação tanto pela comunidade científica como pelos navegadores.

$$\text{sen}^2 \left(\frac{1}{2}P \right) = \frac{\text{sen} \left(\frac{1}{2}(ZS + PS + ZP) - ZP \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{2}(ZS + PS + ZP) - SP \right)}{\text{sen}(ZP) \cdot \text{sen}(SP)} \quad (1.3)$$

1.4.1 Exemplo prático do método

Como forma de mostrar a aplicação prática do cálculo da longitude pelo ângulo horário explicado por Peregrino Leitão, retirou-se o exemplo que o mesmo utiliza para complementar a explicação deste método:

“A 19 de maio de 1861 depois do meio-dia em que tínhamos achado a latitude pela altura meridiana do sol, 42° 31' N, observamos as alturas em seguida notadas bem como as horas que lhe corresponderam no chronometro, que no dia 17 de março ao meio-dia, estava adiantado do tempo médio de Greenwich 1' 18”, tendo por marcha diaria +7”,8; sendo a altura do olho do observador 26 pés. Pedese a longitude exacta do navio”³⁵.

33. Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marcq Saint-Hilaire», p. 54.

34. A notação desta fórmula não corresponde exatamente à do triângulo esférico explicado anteriormente. Por exemplo, na explicação anterior o astro estava representado pela letra M , enquanto aqui surge indicado por S .

35. Leitão, *Guia Náutica*, p. 118.

1.4. Longitude pelo ângulo horário com aplicação do cronómetro

Para explicar o processo de calculo realizado por Peregrino Leitão, vou dividir em quatro partes:

1. Cálculo da hora média em Greenwich e distância zenital (SZ , ζ);
2. Cálculo da distância polar (SP);
3. Cálculo da colatitude (ZP);
4. Cálculo da longitude.

1.4.1.1 Cálculo da hora média em Greenwich e distância zenital

Para o cálculo da hora média em Greenwich, foi considerado o erro do cronómetro, levando em conta o erro conhecido a 17 de março e o erro acumulado devido à sua marcha diária até ao dia da observação. Como a distância zenital corresponde ao complemento da altura verdadeira, é necessário aplicar todas as correções adequadas à altura média observada. Após essas correções, subtrai-se o resultado por 90° , obtendo-se assim a distância zenital ($SZ=ZS=46^\circ 4'56''$).

Horas do chronometro	Alt. obs. do limbo inf. do sol
6h.58'40"	44° 7'00"
6 59 36	43 57 00
7 00 51	43 44 00
7 2 12	43 33 00
7 3 21	43 24 00
<u>35 4 40</u>	<u>218 45 00</u>
Media 7 00 56	Alt. media 43 45 00
Estado do chr. em _____	(tab. V) depr. do hor. — 4 52
17 março — 1 18	43 40 8
6 59 38 (tab. XVIII) refr.— paral. — 53	
Erro acumulado de _____	43 39 15
17 março a 19 de _____	(Alman.) sem. diam do sol + 45 49
maio — 8 14	Alt. verd. do centro do sol 43 55 4
H. med. em Gr. 6 51 24	90
	SZ 46 4 56

FIGURA 1.8: Cálculo da hora média em Greenwich e distância zenital. Fonte: *Guia Náutica*, p.118.

1.4.1.2 Cálculo da distância polar

Como a distância polar é o complemento da declinação, e a declinação é um valor tabelado, basta calcular o seu valor para a hora média em Greenwich, e subtrair o resultado por 90° para obter a distância polar ($SP=PS=70^\circ 8' 33''$), seguindo o mesmo princípio aplicado ao cálculo da distância zenital.

Decl. do sol a 19	Eq. do tem.
maio = $19^\circ 47' 43'' N$	em 19 de m.
Correc. para 6 h.	ao $\frac{1}{2}$ dia . . $3' 49'', 5$ ad. ao t. m.
$51'$ (tab. XXI) . + $3\ 44$	Correc. para
Decl. á h. em Gr. $19\ 51\ 27\ N$	6 h. $51'$. . $0, 9$ (tab. LI)
90	Eq. do temp.
Dist. polar SP . . $70\ 8\ 33$	ad. ao t. m.
	á hora . . . $3\ 48, 6$

FIGURA 1.9: Cálculo da distância polar. Fonte: Adaptado do livro de *Guia Náutica*, p.119.

1.4.1.3 Cálculo da colatitude

A latitude (φ) foi calculada com base na carteação e estima para 21 milhas náuticas. Seguindo o mesmo raciocínio, subtrai-se o resultado da latitude estimada por 90° , obtendo-se assim o seu complemento, a colatitude ($ZP=47^\circ 44'$).

402. Supponhamos que tínhamos navegado 21 milhas ao rumo verdadeiro de $43^\circ SO$, e então acharíamos para diferença de latitude $15'$ para o sul, que subtraído de $42^\circ 31' N$, nos daria para latitude á hora da observação. . . $42^\circ 16' N$

	90
Compl. da latitude ZP . . .	$47\ 44$

FIGURA 1.10: Cálculo da colatitude. Fonte: *Guia Náutica*, p.119.

1.4.1.4 Cálculo da longitude

A longitude foi determinada com base na trigonometria esférica, com recurso ao uso dos logaritmos para simplificar as operações. Primeiramente, determina-se a “semisoma” dos três arcos envolvidos na posição do astro. Em seguida, substitui-se estes valores na fórmula para calcular o ângulo horário (P). Após obter P em graus, este é convertido para tempo verdadeiro. Com a equação de tempo, calcula-se o tempo médio a bordo. A diferença entre o tempo médio a bordo e o tempo

médio em Greenwich corresponde à longitude em tempo, que é convertido em graus (55°45'W).

Procurando a semisomma dos tres arcos teremos:

$$\frac{1}{2} (ZP + SZ + SP) = \frac{1}{2} (47^{\circ}44'46'' + 46^{\circ}4'56'' + 70^{\circ}8'33'') = 81^{\circ}58'44'',$$

e substituindo estes valores na formula do sen.² $\frac{1}{2} P$, acharemos:

$$\text{Sen.}^2 \frac{1}{2} P = \frac{\text{Sen. } (81^{\circ}58'44'' - 47^{\circ}44') \times \text{sen. } (81^{\circ}58'44'' - 70^{\circ}8'33'')}{\text{Sen. } 47^{\circ}44' \times \text{sen. } 70^{\circ}8'33''}$$

O que feito por logarithimos, será:

Log. do sen. 34°14'44". . .	9.750308
» » sen. 11 50 11 . . .	9.311893
» ar. sen. 47 44 00 . . .	0.130753
» ar. sen. 70 8 33 . . .	0.026623
	2)19.219579 = 2 sen. $\frac{1}{2} P$
24° 1'41". . .	9.609789 = sen. $\frac{1}{2} P$
48 3 22	= P em graus
3h.12'13".	= P em temp. verd.
Equ. do tempo. — 3 49	
3 8 24	tempo médio a bordo á hora da obs.
6 51 24	tempo médio em Gr. á hora da obs.
Long. em tempo 3 43 00	= 55°45' OG.

FIGURA 1.11: Cálculo da longitude. Fonte: *Guia Náutica*, p.119.

1.5 Método de Marcq Saint-Hilaire

O método da altura³⁶ ou método Marcq Saint-Hilaire baseia-se na determinação da reta de altura (ponto de tangência) a partir da interceção da curva de altura com o vertical do astro no ponto estimado³⁷.

A determinação de uma reta de altura inicia-se com a observação da altura de um astro (S) e a identificação de um ponto estimado (Ze). Com base na hora média de Greenwich no momento da observação, obtém-se o ângulo horário do astro em Greenwich. Ao aplicar a longitude estimada, calcula-se o ângulo horário local, que é então convertido em ângulo no polo (P).

36. Gonçalo Miguel Rebelo Horta, «Ponto Astronómico pelo Método Marcq Saint-Hilaire: Desenvolvimento de uma Ferramenta de Cálculo do Ponto» (Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2020), p. 11–12.

37. Azevedo e Gameiro, *Manual de Navegação* (Edição dos Autores, 1959), p. 98.

A resolução do triângulo de posição em função do ângulo no polo (P), da latitude estimada (φ_e), e da declinação do astro (δ), permite calcular o azimute (Z) e a altura estimada (a_e). Esta altura estimada equivale à distância zenital $\zeta_e = 90^\circ - a_e$ que o observador teria se estivesse no ponto Z_e .

Já a altura observada (a_v) corresponde à distância zenital $\zeta_v = 90^\circ - a_v$. A diferença entre essas duas alturas, $\Delta a = \Delta \zeta = a_v - a_e$ (diferença de alturas), indica a distância entre o ponto estimado e o ponto determinante da reta de altura. Dessa forma, a reta de altura fica completamente definida, pois possui um ponto determinante e uma direção fixa, que é perpendicular à direção do azimute do astro.

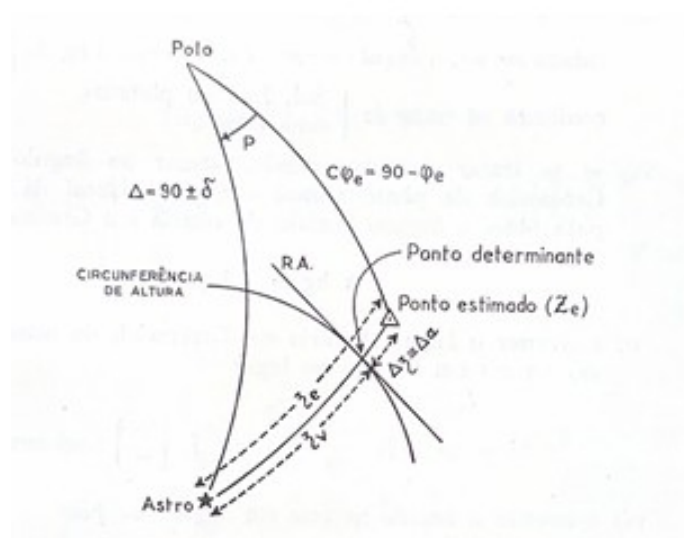


FIGURA 1.12: Triângulo de posição. Fonte: *Manual de Navegação*, p.99.

Com base na obra de Gameiro, *Manual de Navegação*, a determinação de uma reta de altura envolve cinco operações³⁸:

1. Observar a altura do astro e registrar a hora do cronómetro;
2. Calcular o ponto estimado no momento da observação;
3. Determinar o azimute e a diferença de alturas:
 - (a) Converter a altura observada em altura verdadeira;
 - (b) Calcular o ângulo no polo:
 - i. Calcular a hora média de Greenwich aproximada em função da hora legal e do fuso;

38. Gameiro, *Manual de Navegação*, p. 99–101.

- ii. Retirar do Almanaque Náutico o ângulo horário em Greenwich (hg) do astro e do ponto vernal (Υ), em função da hora média de Greenwich;
- iii. Se for uma estrela, somar ao ângulo horário em Greenwich do ponto vernal o ângulo sideral da estrela (AS), para obter o ângulo horário da estrela em Greenwich:

$$\star hg = \Upsilon hg + \star AS$$

- iv. Converter o ângulo horário em Greenwich do astro em horário no lugar:

$$hl = hg + L \quad \text{com } L = \begin{cases} + & \text{se longitude Leste} \\ - & \text{se longitude Oeste} \end{cases}$$

- v. Converter o ângulo horário em ângulo no polo:

$$hl < 180^\circ \Rightarrow PW = hl$$

$$hl > 180^\circ \Rightarrow PE = 360^\circ - hl$$

- (c) Resolver o triângulo de posição:

- Em função do ângulo no polo (P), latitude estimada (φ_e) e declinação (δ), calcular a altura estimada (a_e) e o azimute do astro (Z).

- (d) Comparar as alturas determinadas para obter a diferença de alturas:

$$\Delta a = a_v - a_e \quad \begin{cases} + & \text{se } a_v > a_e \\ - & \text{se } a_v < a_e \end{cases}$$

4. Com o ponto estimado, marcar a direção azimutal do astro (Z) com a distância em milhas igual ao valor da Δa no sentido igual ou contrário à Z , conforme Δa positivo ou negativo. Posto isso, obtém-se o ponto determinante. As coordenadas podem ser obtidas graficamente ou carteadas a partir do ponto estimado.

Se $\Delta a > 30'$, repetir o processo considerando o ponto determinante como novo ponto estimado.

Capítulo 2

Tabelas e Instrumentos Auxiliares de Cálculo do Ponto Astronómico

2.1 Tabelas

A navegação astronómica depende de duas ciências, a astronomia e a matemática. Interligando essas duas ciências³⁹, permite-nos determinar a posição do navio, e deslocar do ponto A para o B em segurança. Era comum utilizar as tabelas auxiliares de cálculos desde a época dos Descobrimento, para determinação da latitude. Só a partir do século XVII, com a introdução de processos de cálculo bastantes complexos e com fórmulas trigonométricas para determinar a longitude, o seu uso tornou-se indispensável. Isto deveu-se ao facto de que passou a ser possível simplificar alguns dos processos do cálculo da longitude com recursos a logaritmos.

Antes de abordar as tábuas existentes na época e as suas diferenças, é fundamental compreender que existiram duas fases distintas na navegação astronómica: uma antiga e outra moderna. Esta nova era da navegação iniciou-se com o desenvolvimento do cronómetro marítimo, em 1763, marco decisivo que, a par da invenção do método de Saint-Hilaire, revolucionou a prática da navegação astronómica. Com o aperfeiçoamento do cronómetro marítimo, que aumentou significativamente a precisão das medições, tornou-se possível determinar a latitude e a longitude de forma separada. Posteriormente, o método das alturas (Saint-Hilaire), permitiu obter simultaneamente ambas as coordenadas, substituindo em grande parte os processos tradicionais.

39. Jorge Oliveira de Jesus Pires, «Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol: Evolução Histórica do Processo» (Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2021), pp. 22 – 23.

Existem três métodos principais⁴⁰ de navegação astronómica: Latitude, Longitude e Alturas. Este último destacou-se graças à contribuição de Saint-Hilaire. Nos séculos XVII e XVIII, com a crescente necessidade de aumentar a precisão na navegação, levou ao desenvolvimento de tábuas astronómicas para correção dos astros e de tábuas matemáticas com logaritmos de números e funções trigonométricas. Com o passar dos anos foram surgindo diversas tábuas elaboradas por diferentes autores, com o objetivo de aperfeiçoar os métodos de navegação e aumentar a precisão na determinação da posição.

Estes autores mantiveram os princípios na construção das tabelas, diferenciando-se apenas na forma de resolução do problema e nas tábuas utilizadas. Assim, embora o método das alturas possa ser aplicado de várias formas, as diferenças entre os autores residem sobretudo nas tábuas e nas deduções matemáticas utilizadas para chegar ao resultado.

O objetivo desta dissertação de mestrado é estudar as tábuas de Lopes Banhos. Como uma pequena introdução às tabelas que existiam ao longo dos anos para o cálculo da longitude, abordaremos algumas das tábuas tidas como referência na época.

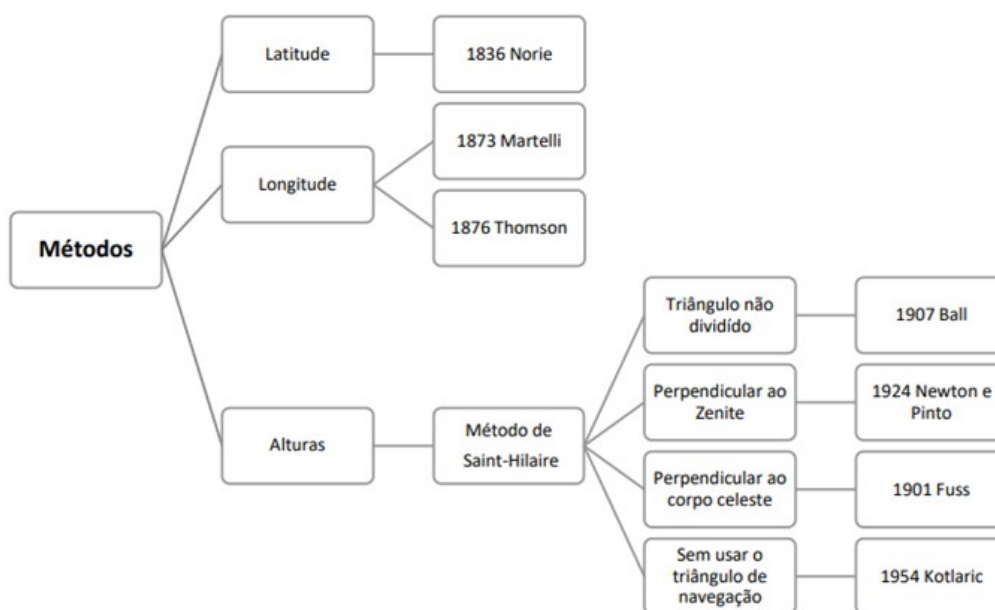


FIGURA 2.1: Diagrama de resumo dos diferentes métodos astronómicos. Fonte: Zaikin, p.53.

40. Oleksandr Zaikin, «Biografia de José Nunes da Matta» (Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2019), p. 52.

2.1.1 Tábuas de John William Norie

Em 1805⁴¹, Norie publicou em Londres uma obra com tábuas náuticas destinadas a resolver os principais problemas da navegação, incluindo a determinação das diferenças de latitude e longitude. A obra reunia 57 tábuas distintas, cada uma com um propósito específico.

Em Portugal, esta obra foi traduzida para português em 1841, reconhecendo-se a sua relevância para a navegação. Segundo o Capitão-tenente João Henriques de Carvalho e Mello⁴², dada a ampla utilização das Tábuas de Norie pelos navegadores, justificava-se plenamente a tradução da sua explicação, por considerar que seria útil.

Além desta, foram ainda traduzidas outras duas obras de Norie: “A Explicação do Almanaque Náutico”, e mais tarde, com o apoio dos Aspirantes da Escola Naval, “Os Problemas Náutico-Astronómicos”. Todas estas traduções visaram facilitar a compreensão e aplicação das tábuas náuticas de Norie.

Em Portugal, essas tabelas eram bastante populares, sendo mencionadas em várias obras portuguesas, como as de Costa e Almeida e Peregrino Leitão. Esta referência prolongou-se até o século XX. Junto com outras tabelas portuguesas e estrangeiras, que começaram a ser utilizadas, buscando um equilíbrio entre facilidade de cálculo e precisão, nomeadamente as de Fontoura e Coutinho. Com isso, as tabelas de John William Norie, começaram a perder popularidade em Portugal, dando lugar a “*Tábuas para o Cálculo da Hora a Bordo*, de Lopes Banhos, e a *Tábua Politélica*, de Nunes da Mata.

2.1.2 Martelli–Método das Longitudes

Em 1873, Martelli publicou em Nova Orleães um pequeno volume de 49 páginas intitulado *Tables of Logarithms*, que apresentava uma solução simples e rápida para o cálculo do ângulo meridiano, utilizando poucas fórmulas e apenas uma interpolação. Martelli utilizou a seguinte fórmula para o cálculo das suas tábuas:

$$1,3344 - \log \left(2 \cdot \sin \left(\frac{2}{2} \cdot p \right) \right) = (0,5 - \log \sec 1) + (0,5 - \log \sec \delta) + 0,3344 \\ - \frac{\log [\cos((1 - \delta) + o_2)]''}{1000} + \frac{1000 \cdot (1 - \sin a)'' - 1200}{1000}$$

41. J. O. d. J. Pires, «Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol», p. 24.

42. Zaikin, «Biografia de José Nunes da Matta», p. 54.

A Taboa I dá $(0,5 - \log \sec)$. A Taboa II dá $1000 \cdot (\cos \text{ nat.} + o_2)''$. A Taboa III dá $1000 \cdot (1 - \sin \text{ nat.})$. A Taboa IV dá $\frac{\text{argumento em}'' - 1200''}{1000}$. A Taboa V dá $1,3344 - \log \left(2 \cdot \sin \left(\frac{2}{2} \cdot p \right) \right)$.

$$\text{hav } t = \frac{\cos(L \sim d) - \cos z}{2 \cos L \cos d}$$

Para se obter o resultado com este método, é necessário consultar o livro seis vezes⁴³ e realizar quatro operações matemáticas, sendo que o ângulo horário está limitado a oito horas e não inclui o cálculo do azimute. Ainda assim, o método tornou-se bastante popular e continua a ser utilizado por navegadores de diversos países. O livro teve várias edições, incluindo uma em 1932 publicada em Glasgow com explicações em francês, italiano, holandês, espanhol e inglês. Em 1944, foi lançada uma nova edição que introduziu o cálculo do azimute e a resolução pelo método das alturas.

2.1.3 *Tábua politélica de Nunes da Mata*

Segundo Nunes da Mata, a resolução de grande parte dos problemas da astronomia náutica requer quatro tabelas presentes em quase todas as coleções das tabuas náuticas publicadas. Como exemplo, *Norie's Nautical Tables* de John William Norie, em que as mesmas ocupavam 146 páginas. É de observar que, se os valores fossem mais desenvolvidos, ocupariam mais espaço. A *Tábua Politélica* surgiu da necessidade de resolver esta questão, que não foi resolvido nas tabelas mais recentes de Martelli e de Lopes Banhos, e colocar esses dados numa única tabela.

Esperou-se durante muitos anos que alguém detalhasse a tábua de senos e cossenos naturais, e publicasse uma tábua de logaritmos de senos versos. Posto isso, Nunes da Mata assumiu a responsabilidade de publicar uma tábua em que desenvolvesse mais os valores. Inicialmente iria publicar as tabelas separadamente, no entanto, percebeu que os logaritmos dos senos e cossenos podiam ser obtidos, de forma simples, a partir dos respetivos valores naturais, o que permitia simplificar os cálculos. Para facilitar o trabalho de quem utiliza essas tabuas, optou-se por unir todas em uma única tábua. Isto permitiu que o mesmo logaritmo fosse usado para determinar o arco, o seno e cosseno natural, o número e o ângulo do seno verso.

A publicação está estruturada em duas partes e mais 27 tabelas. A primeira parte, inclui: explicação prévia, disposição e uso das tabelas, um conjunto de fórmulas, regras e exemplos, que permitem compreender os processos para resolução dos

43. Zaikin, «Biografia de José Nunes da Matta», p. 54.

problemas. Estes problemas são os mesmos abordados pelas tabelas de Lopes Banhos, abrangendo a navegação astronómica e as derrotas ortodrómicas. A segunda parte, contém tabelas que Nunes da Mata, dividiu em politélica, complementar e auxiliar. A Tábua politélica permite determinar o seno e o cosseno de um ângulo, os logaritmos dessas funções trigonométricas, os logaritmos de números e o logaritmo do seno verso de ângulos em tempo até seis horas, bem como operações inversas. A Tábua complementar apresenta os valores dos logaritmos dos senos versos para ângulos em tempos superiores a seis horas. Por fim, a Tábua auxiliar que é utilizada em alguns processos de cálculo que envolvem diferenças de arcos, senos ou cossenos. As restantes 27 tabelas sevem para aplicar correções às alturas observadas, converter arcos em tempo e determinar o azimute de um astro no nascimento ou ocaso.

Lopes Banhos reduziu sempre que possível o número de passos de cálculo, enquanto Nunes da Mata desenvolveu os cálculos, com o objetivo de simplificar o trabalho dos navegadores. Este omitiu diversas tabelas que aparecem noutras publicações, argumentando que, se fosse necessário a Tábua politélica e a Tábua auxiliar poderiam ser usadas.

2.1.4 Evolução das Tábuas

Nos séculos XIX e XX, a navegação astronómica registou um grande avanço, o que levou ao surgimento de várias tábuas náuticas elaboradas por autores de diferentes nacionalidades. Estas tábuas foram organizadas por categorias distintas e encontram-se referenciadas na bibliografia da obra “Tábuas Náuticas” de Fontoura da Costa e Azevedo Coutinho.

Entre as tábuas numéricas de coleção geral, destacam-se autores de várias nacionalidades: Norie (Inglaterra), Martelli (Itália), Callet (França), Rheticus (Inglaterra), Fuss (Império Russo) e, de Portugal, Fontoura da Costa, Lopes Banhos e Nunes da Mata.

Segundo Lopes Banhos⁴⁴, as suas tabelas não representavam necessariamente uma inovação científica, mas sim uma forma de otimizar os cálculos complexos para determinar a hora de bordo. O principal objetivo era reduzir o número de operações, e tornar os cálculos mais rápidos e eficientes. Este foi o motivo pelo qual foram aparecendo diversas tabelas, sendo algumas mais extensas e detalhadas, eliminando a necessidade de interpolação. Vários autores comparavam as suas tabelas com as existentes, buscando vantagens e eficiências.

44. J. E. Lopes Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), p.v.

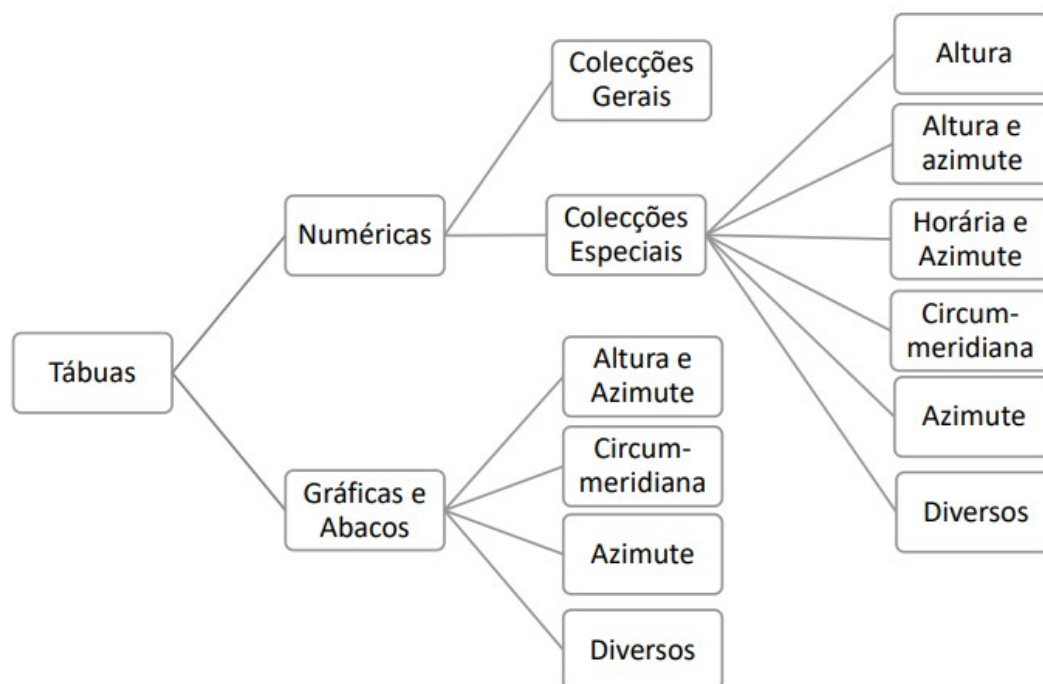


FIGURA 2.2: Diagrama das Tábuas da Época. Fonte: Zaikin, p.54.

2.2 Instrumentos

A falta de precisão dos instrumentos usados na medição de alturas e ângulos, foi um dos principais problemas do cálculo da posição astronómica. Durante a época do Descobrimentos, até ao século XVII os marinheiros portugueses, utilizaram instrumentos como, quadrante, astrolábio e balestilha. Esses instrumentos não tinham muito rigor na medição. Só no século XVIII, com o surgimento do octante e sextante, passou a ser possível efetuar medições com precisão.

2.2.1 Quadrante

Embora exista testemunho, da utilização do quadrante⁴⁵ em 1200, a sua popularidade na navegação começou em 1450. Segundo Millás Vallicrosa⁴⁶, o quadrante tornou-se conhecido na Europa a partir do século XVII. Foi um instrumento amplamente utilizado pelos portugueses, para medir a altura de um astro sobre o horizonte, auxiliando a determinação da latitude⁴⁷.

O quadrante é constituído por um quarto de um círculo que dispõe numa das

45. O primeiro instrumento de observação na náutica portuguesa e Europeia

46. Albuquerque, «Determinação de Latitude pela Estrela Polar», p. 115.

47. Trigo, «Cálculo da Posição pelo Método de Sumner».

suas arestas de duas pínulas⁴⁸, um fio-de-prumo na vertical e uma escala graduada de 0 a 90°. O processo de observação do astro era bastante simples, bastava alinhar o astro com as pínulas e fixar o dedo na posição de paragem do fio-de-prumo.



FIGURA 2.3: Quadrante. Fonte: Trigo, p.5.

2.2.2 Astrolábio

O astrolábio foi inspirado no astrolábio planisférico⁴⁹ utilizado pelos cosmógrafos, que também servia para outras finalidades. Os portugueses adaptaram-no para navegação, dando forma, peso e robustez⁵⁰ para que a sua estabilidade mantivesse durante as observações, mesmo com o balanço do navio.

O instrumento era composto por um corpo circular, uma argola articulada para suspensão, duas pínulas e uma escala graduada com distâncias zenitais de 0 a 90°. A leitura baseava-se na obtenção da distância zenital para facilitar o cálculo da latitude, utilizando a altura meridiana do Sol. Uma de suas principais vantagens era a independência do horizonte, permitindo medições tanto de dia quanto de noite.

A latitude de um local era determinada pela fórmula $\varphi = (90 - a) + \delta$, onde a representa a altura e δ a declinação do Sol. O astrolábio náutico foi amplamente utilizado na navegação entre o final do século XV e meados do século XVIII, desempenhando um papel essencial na exploração marítima por cerca de 200 anos.

48. Duas aberturas perfuradas em uma das arestas do instrumento, onde se alinha o astro para medir a sua altura

49. Fernando Gomes Pedrosa, «A Arte de Navegar», em *Navios, Marinheiros e Arte de Navegar 1139-1499* (Lisboa: Academia de Marinha, 1997), pp. 273 – 274.

50. Com cerca de 20 cm de diâmetro e 2kg.



FIGURA 2.4: Astolábio Náutico. Fonte: cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e7.html

2.2.3 Balestilha

A balestilha é um instrumento náutico composto por uma vara graduada, virote, ao longo do qual desliza uma régua perpendicular, soalha. Para medir a altura de um astro, era necessário posicionar o extremo do virote junto ao olho e deslizar a soalha até alinhar a sua parte inferior com o horizonte e a parte superior com o astro. As primeiras referências escritas sobre a balestilha aparecem no *Livro de Marinharia* de João de Lisboa e no manuscrito de Paris de André Pires, conforme apontado por Fontoura da Costa⁵¹ e Luciano Pereira da Silva.

Este instrumento apresentava uma grande limitação na observação do Sol por causa da incidência da luz. O que destacou problemas como encadeamento das imagens dos astros e do horizonte, dificuldade em ler a graduação do virote, dificuldade em alinhar o astro e o horizonte e as limitações de visibilidade do horizonte e das estrelas durante a noite.

51. Francisco Contente Domingues, «A Arte de Navegar», em *História da Marinha–Navios, Marinheiros e Arte de Navegar 1500–1668* (Lisboa: Academia de Marinha, 2012), pp. 318 – 335.



FIGURA 2.5: Balestilha. Fonte: lojadomuseudemarinha.pt/pt/balestilha.html

2.2.4 Quadrante de Davis

O Quadrante de Davis surgiu como uma solução para as limitações da balestilha, que inicialmente era usada de frente para o astro, dificultando a observação. A descoberta de que medir a altura do Sol através de sua sombra tornou o instrumento mais eficiente, e esse método já era comum na náutica portuguesa em 1623⁵². No final do século XVI, com o crescente interesse inglês na navegação, John Davis desenvolveu o *back-staff*, inspirado na balestilha usada de costas para o Sol. O instrumento, amplamente adotado na Europa, possuía dois arcos graduados que permitiam medições precisas, embora em Portugal a balestilha continuasse a ser preferida por sua confiabilidade.



FIGURA 2.6: Quadrante de Davis. Fonte: mat.uc.pt/~helios/Mestre/Novemb00/H61iflan.htm

52. Domingues, p. 332.

2.2.5 Octante e Sextante

Embora no final do século XVII Isaac Newton e Robert Hooke, já tivessem apresentado esquemas para utilização de instrumentos de reflexão, o primeiro passo para resolver o problema dos instrumentos aconteceu em 1731. Neste ano, John Hadley, em Inglaterra, e Thomas Godfrey, em Filadélfia–EUA, apresentaram quase em simultâneo, um instrumento diferente dos que já foram construídos. O octante⁵³, um instrumento baseado em um princípio de dupla reflexão, que por meio de um sistema de dois espelhos, permitia alinhar a imagem refletida de um astro com a imagem real de outro ou com o horizonte⁵⁴, possibilitando mais precisão nas medições.



FIGURA 2.7: Octante. Fonte: lojadamuseudemarinha.pt/pt/octante.html

A intenção inicial seria utilizar o octante para medir distâncias lunares, mas o mesmo apresentava grande limitação. Este media apenas ângulos inferiores a noventa graus⁵⁵. Muitas vezes era insuficiente para observação de ângulos, entre a Lua e outros astros. Porém, em 1758, o inglês John Bird, apresentou um instrumento

53. O nome advém do facto de abranger um arco correspondente a um oitavo do círculo.

54. Canas, «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal | Contributo de Monteiro da Rocha», p. 34.

55. Nos instrumentos de dupla reflexão, os ângulos medidos correspondem ao dobro do sector abrangido, devido às leis da óptica. Assim, um octante, correspondente a $360^\circ : 8 = 45^\circ$, mede ângulos até 90° .

semelhante, com um setor maior e capaz de medir ângulos até aos cento e vinte graus, com rigor de um minuto, o sextante.



FIGURA 2.8: Sextante. Fonte: cultura.marinha.pt/museumarinha/sextante.aspx

Apesar dos avanços nos instrumentos de medição dos astros, a divisão precisa da escala continuava a ser um desafio para os fabricantes, exigindo elevada habilidade e precisão na sua execução. Uma medição incorreta dos valores na escala tornava o instrumento inútil. A solução para este problema apareceu em 1774, novamente em Inglaterra, com Jesse Ramsden, que desenvolveu uma “máquina de dividir” capaz de gravar escalas com alta precisão de forma automática. Por essa inovação recebeu um prémio de 650 libras, pago pelo Board of Longitudes.



FIGURA 2.9: Máquina de Dividir. Fonte: cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e20.html

Capítulo 3

As tábuas de Lopes Banhos

3.1 *Taboas Náuticas* de J. E. Lopes Banhos

A obra *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* publicada em 1897 por J. E. Lopes Banhos, Capitão-de-fragata da Marinha Portuguesa, foi um dos mais relevantes manuais de navegação astronómica no final do século XIX. Lopes Banhos, começa por esclarecer que estas tábuas não introduzem qualquer inovação científica, sendo antes uma adaptação eficiente das fórmulas tradicionais do cálculo do ângulo horário, reorganizadas de forma a reduzir o número de operações necessárias a bordo e simplificar o processo de cálculo da hora e da posição do navio⁵⁶.

As “Taboas Náuticas” de Lopes Banhos, embora semelhantes às tábuas de Martelli ou Johnson, distinguem-se por diferenças estruturais relevantes. Possuem maior precisão, com quatro casas decimais, e incluem declinações superiores a 70° , o que representa uma importante vantagem na observação de estrelas com declinação elevada e em situações práticas onde a soma da altura e da latitude ou declinação ultrapassa os 90° . Para além do cálculo da hora a bordo, estas tábuas resolvem também problemas derivados do triângulo de posição, abrangendo relações entre três lados e um ângulo. Estas tábuas foram apresentadas ao Conselho do Almirantado em 1896, sendo objeto de análise por uma comissão que destacou a sua utilidade prática, recomendando a publicação da obra com base na clareza, simplicidade e facilidade de consulta que oferece aos navegantes.

Estas tábuas, à semelhança de outras do mesmo género, foram deduzidas a partir da conhecida fórmula do ângulo horário. Embora concebidas originalmente para o cálculo da hora a bordo, oferecem solução para todos os problemas derivados do triângulo de posição, nas suas diversas combinações entre quatro elementos, sendo três lados e um ângulo.

56. Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*, p. VI.

A obra divide-se em 4 partes:

1. **Preliminares** – Taboas para o cálculo da hora a bordo (p. I a XLIII),
2. **Taboas para o cálculo da Hora** (p. 1 a 56),
3. **Taboas auxiliares** (p. 58 a 206),
4. **Apêndice** (p. 207 a 228).

3.1.1 Preliminares - Taboas para o cálculo da hora a bordo

Na primeira secção o autor expõe os fundamentos do seu método, explicando detalhadamente o uso das tabelas e as regras de cálculo que lhes estão associadas. Lopes Banhos começa por abordar o problema da determinação da hora (parte essencial do seu trabalho), e estende a aplicação das suas tábuas a diversos problemas de trigonometria esférica, com destaque para a navegação astronómica e à derrota ortodrómica – ambos baseados na resolução de triângulos esféricos.

As presentes Taboas resolvem não só o problema da hora, para o qual foram expressamente construídas, mas também dão solução aos problemas que derivam do triângulo de posição nas suas relações entre quatro elementos (três lados e um ângulo). Assim, determinam elas também a altura de um astro (recíproco do da hora), azimuth e declinação (recíproco), latitude por uma altura circummeridiana, e resolvem os problemas de navegação orthodrómica, distâncias lunares, variação do ângulo no Polo por efeito do erro de um minuto na latitude, determinação de circunstâncias favoráveis de observação (ângulo horário e altura), cálculo do coeficiente das circummeridianas, etc⁵⁷.

São ainda contemplados problemas complexos como a determinação das coordenadas de pontos intermédios de um arco de círculo máximo, e o cálculo das distâncias lunares, que permite a obtenção da hora média de Greenwich⁵⁸.

O autor constrói um sistema com base em três tábuas principais, X, Y e Z, sendo que a hora verdadeira obtém-se pela soma de três logaritmos fornecidos pelas Tábuas X e Y, e a esta soma corresponde na Tábua Z o ângulo no polo em arco, tempo ou grau⁵⁹. Suprimiu tanto quanto possível as características das tábuas. Na Tábua X, coluna $\left\{ \frac{Lt}{Dc} \right\}$ só aparecem logaritmos a partir dos 60° em diante.

57. Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*, p.v.

58. Banhos, p. XXI-XXIII.

59. Banhos, p. v.

Na Tábua Y, as características são utilizadas apenas nos logaritmos de números com menos de quatro algarismos significativos. Já a Tábua Z, as características estão indicadas no topo e a meio das colunas à esquerda dos logaritmos. Quando o arco a utilizar na Tábua X, coluna D, excede os 90°, deve empregar-se o seu suplemento para 180°. Quando os valores procurados não se encontram exatamente nas colunas das tábuas, faz-se uma interpolação simples, especialmente na tábua Z, obtendo-se assim a aproximação desejada. Os cálculos preparatórios são igualmente simplificados: utilizam-se menos algarismos, elimina-se a conversão da altura no seu complemento, reduzindo assim uma operação e diminui-se a necessidade de consultar múltiplas tábuas.

Lopes Banhos deduz da fórmula fundamental da trigonometria esférica as seguintes fórmulas (o seu desenvolvimento será explicado mais a frente no próximo subcapítulo “Taboas para o calculo da hora” 3.1.2):

$$0,602060 - \log \left(2 \cdot \operatorname{sen}^2 \left(\frac{1}{2} P \right) \right) = (0,301030 - \log \sec 1) + (0,301030 - \log \sec \delta) \\ + c \cdot \log \{ [\cos(1 - \delta) - 0,5] + [0,5 - \operatorname{sen} a] \}$$

A Tábua X dá $(0,301030 - \log \sec 1)$, $(0,301030 - \log \sec \delta)$, $[\cos \text{ nat. } (1 - \delta) - 0,5]$ $[0,5 - \operatorname{sen} \text{ nat. } a]$.

A Tábua Y dá $\operatorname{comp} \cdot \log \{ [\cos \text{ nat. } (1 - \delta) - 0,5] + [0,5 - \operatorname{sen} a] \}$.

A Tábua Z dá

$$0,602060 - 2 \cdot \log \sin^2 \left(\frac{1}{2} \cdot P \right)$$

A exposição dos métodos de cálculo é complementada com exemplos práticos, muitos dos quais comparados com obra de Norie, referência clássica da navegação britânica. Lopes Banhos destaca que, através do seu sistema, é possível obter os mesmos resultados usando menos algarismos significativos, o que torna o processo mais rápido e eficiente⁶⁰.

60. Banhos, p. VII-X.

3.1.1.1 Cálculo da hora

Para o cálculo da hora a bordo, o autor considera quatro elementos principais: a data, a altura verdadeira do astro, a latitude estimada (φe) do navio no momento da observação e a declinação (δ) correta do astro – obtida das efemérides para a hora do primeiro meridiano (Greenwich).

Com base nesses dados, o autor estabelece um conjunto de regras⁶¹ práticas que visam facilitar a compreensão do cálculo:

1. A primeira regra determina que, se a latitude (φ) e a declinação (δ) forem do mesmo nome (ambas norte, ou ambas sul), deve-se calcular a diferença entre elas; se forem de nomes contrários, faz-se a soma.
2. Na segunda regra, com base no valor da altura, determina-se o logaritmo consultando a coluna A da Tábua X, e, da mesma tábua, a coluna D fornece o número correspondente à diferença ou soma entre latitude (φ) e declinação (δ). Os dois números obtidos são somados e o resultado é chamado s .
3. A terceira regra diz respeito aos logaritmos: obtêm-se os logaritmos da latitude (φ) e da declinação (δ) através da Tábua X, coluna $\left\{ \frac{Lt}{Dc} \right\}$, e o logaritmo de s é tirado da Tábua Y. Esses três logaritmos são então somados. O resultado da soma dos logaritmos é usado como entrada na Tábua Z, que fornece a hora ou o arco correspondente ao logaritmo entrado.

Nota: Se a observação for feita a oeste do meridiano, o ângulo horário é igual ao ângulo no polo (P). Se for a leste, o ângulo horário (AH) é o complemento do ângulo no polo para 24 horas (ou 360°). Se s ultrapassar 10000, considera-se apenas a parte excedente, ignorando o primeiro algarismo à esquerda, que será sempre 1.

Esse processo fornece, de maneira rápida e suficientemente precisa, a hora a bordo com base numa observação astronômica, sendo essencialmente útil para calcular a longitude.

61. Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*, p. VI.

Exemplo prático:

No exemplo apresentado por Lopes Banhos, referente à data de 8 de outubro de 1890⁶², pretende-se calcular a hora a bordo com base na observação de um astro. Os dados fornecidos são os seguintes: a altura verdadeira observada $17^{\circ} 56' 41''$ W, latitude estimada $40^{\circ} 08' 00''$ S, e a declinação do astro $3^{\circ} 55' 57''$ S.

Aplicando a primeira regra, e sendo a latitude (φ) e a declinação (δ) do mesmo nome (ambas no hemisfério Sul), calcula-se a diferença entre os dois valores D :

$$\begin{array}{r} 40^{\circ} 08' 00'' \\ - 3^{\circ} 55' 57'' \\ \hline 36^{\circ} 12' 03'' \end{array}$$

De acordo com a segunda regra, recorre-se à Tábua X para obter os valores correspondentes:

- Para a altura verdadeira de $17^{\circ}56'41''$, consulta-se a coluna A, da qual se obtém o número 1919;
- Para a diferença $D = 36^{\circ}12'03''$, consulta-se a coluna D, e obtém-se o número 3069.

Estes dois valores são então somados e designados por s :

$$s = 1919 + 3069 = 4988$$

Posto isto, pela terceira regra, calcula-se os logaritmos da latitude (φ) e da declinação (δ) utilizando a Tábua X, e logaritmo de s utilizando à Tábua Y:

- Para a latitude (φ) de $40^{\circ}08'00''$, consulta-se a coluna $\left\{ \frac{Lt}{Dc} \right\}$, da Tábua X, obtendo o número 1844;
- Para a declinação (δ) de $03^{\circ}55'57''$, na mesma coluna da Tábua X, obtém-se o número 3000;
- Pela Tábua Y, o logaritmo de $s = 4998$ corresponde ao valor 3021.

62. Banhos, p. VI.

Com isso, soma-se então os três logaritmos:

$$\log(\varphi) + \log(\delta) + \log(s) = 1844 + 3000 + 3021 = 7865$$

Com o valor obtido na soma dos logaritmos, consulta-se a Tábua Z e retira-se a hora correspondente ao ângulo horário: $AH = 4\text{h } 39\text{m } 02\text{s}$.

1.º			
3 de outubro de 1890			
Lat. estimada	40° 08' 00" S.		
Alt.ª verdadeira ☉.....	17 56 41 (W. do Merid.º)		
Decl. correcta	3 55 57 S.		
A.....	17° 56' 41"	1919	
Lt.....	40 08 00 S.		1844
Dc.....	3 55 57 S.		3000
	36° 12' 03"	3069	
	log. aux. de ...	4988	3021
			7865
	AH = 4^h 39^m 02^s		

FIGURA 3.1: Cálculo da hora. Fonte: J. E. Lopes Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), 228 p. VII

No final do exemplo apresentado, o autor compara o resultado do cálculo do ângulo horário com o resultado obtido por Norie na sua obra de 1894, página 360, e verificou que existe uma grande semelhança entre ambos. Destaca ainda que, para alcançar o mesmo resultado, utilizou apenas 55 algarismos, enquanto Norie recorreu a 69; evidenciando assim a eficiência e simplicidade do método proposto nas suas tábuas.

3.1.1.2 Cálculo da Altura (Recíproco da Hora)

Este processo permite determinar a altura de um astro a partir de elementos conhecidos, sendo essencialmente recíproco do cálculo da hora. Os elementos necessários são: a data, a latitude estimada (φe), o ângulo horário (AH) deduzido a partir da longitude, e a declinação (δ) corrigida para a hora do primeiro meridiano.

Com base nesses dados, o autor estabelece um conjunto de regras⁶³ práticas que visam facilitar a compreensão do cálculo:

1. Somar os logaritmos da latitude(φ) e da declinação (δ), extraídos da Tábua X.

63. Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*, p. VIII.

2. Subtrair essa soma ao logaritmo da hora, obtido na Tábua Z. O resultado será um logaritmo auxiliar.
3. Determinar o número correspondente a esse logaritmo auxiliar, utilizando a Tábua Y.
4. Subtrair desse número o valor de D (soma ou diferença entre latitude e declinação), previamente calculado na Tábua X, coluna D.
5. Com o resultado da subtração, entrar na Tábua X, coluna A, e obtém-se a altura desejada em graus, minutos, etc.

Exemplo prático:

Para o cálculo da altura de um astro, com base em dados aplicáveis a uma situação prática de navegação, o autor recorre aos seguintes dados:

- Dia 8 de Outubro de 1890 (P.M.);
- Latitude estimada: $40^{\circ}08'00''$ S;
- Declinação corrigida do astro: $3^{\circ}55'57''$ S;
- Longitude estimada: $175^{\circ}02'45''$ E;
- Hora do cronómetro (hora média de Greenwich): 16h 48m 00s;
- Equação do tempo: +10m55s .

O autor divide o cálculo em duas fases:

1. Cálculo do ângulo horário (AH);
2. Cálculo da altura.

Cálculo do ângulo horário (AH)

O primeiro passo consiste em converter a longitude em tempo utilizando a regra de três simples, sabendo que:

$$360^{\circ} \longrightarrow 24 \text{ h} \quad \Rightarrow \quad 15^{\circ} \longrightarrow 1 \text{ h}$$

Deste modo, a longitude de $175^{\circ} 02' 45''$ E é convertida da seguinte forma:

$$\frac{175^{\circ}02'45''}{15^{\circ}} = 11 \text{ h } 40 \text{ m } 11 \text{ s}$$

Como a longitude é E, soma-se este valor à hora média de Greenwich (fornecida pelo cronómetro) e obtém-se a hora a bordo:

$$\begin{array}{r} 16 \text{ h } 48 \text{ m } 00 \text{ s} \\ +11 \text{ h } 40 \text{ m } 11 \text{ s} \\ \hline 04 \text{ h } 28 \text{ m } 11 \text{ s} \end{array}$$

Posto isto, adiciona-se a equação do tempo à hora a bordo e obtém-se o ângulo horário (AH).

$$\begin{array}{r} 04 \text{ h } 28 \text{ m } 11 \text{ s} \\ +00 \text{ h } 10 \text{ m } 55 \text{ s} \\ \hline 04 \text{ h } 39 \text{ m } 06 \text{ s} \end{array}$$

Por fim, recorre-se à Tábua Z para calcular o logaritmo correspondente ao ângulo horário:

$$\log(AH) = 7864$$

Cálculo do Ângulo horário

H. m. Gr. em 2.....	16 ^b 48 ^m 00 ^s
Long. (tempo)	11 40 11
H. m. b. em 3.....	4 ^b 28 ^m 11 ^s
Eq.t.....	- 10 55
AH	4 ^b 39 ^m 06 ^s
log. AH	7864

FIGURA 3.2: Cálculo do ângulo horário. Fonte: J. E. Lopes Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), 228 p. IX

Cálculo da altura:

Com os dados previamente tratados, procede-se agora ao cálculo da altura do astro, utilizando as Tábuas X, Y e Z conforme o método descrito por Lopes Banhos.

Da Tábua X retira-se os logaritmos:

- Para a latitude $40^{\circ}08'00''$, na coluna $\left\{\frac{Lt}{Dc}\right\}$ da Tábua X, obtém-se o número 1844;
- Para a declinação $03^{\circ}55'57''$, também na coluna $\left\{\frac{Lt}{Dc}\right\}$, obtém-se o número 3000;
- A diferença entre a latitude e a declinação, designada por D , é:

$$D = \begin{array}{r} 40^{\circ} 08' 00'' \\ - 3^{\circ} 55' 57'' \\ \hline 36^{\circ} 12' 03'' \end{array}$$

Para este valor, recorre-se à coluna D da Tábua X, onde se obtém 3070.

Posto isso, calcula-se o logaritmo auxiliar:

- Primeiramente, somam-se os logaritmos da latitude e da declinação:

$$1844 + 3000 = 4844$$

- Em seguida, subtrai-se esta soma ao valor do logaritmo do ângulo horário:

$$7864 - 4844 = 3020$$

- Com este valor, consulta-se a Tábua Y, obtendo-se o número 4989;
- Ao valor obtido na Tábua Y, subtrai-se o logaritmo correspondente à diferença entre a latitude e a declinação (D):

$$4989 - 3070 = 1919$$

- Com o resultado 1919, entra-se na Tábua Z, onde se encontra a altura verdadeira do astro:

$$Altura = 17^{\circ}56'40''$$

Cálculo da Altura

Lt.	40° 08' 00"	S.		1844
Dc.....	3 55 57	S.		3000
				4844
			log. \mathcal{H} .	7864
			log. aux.	3020 4989
D... ..	36° 12' 03"			3070
				1919
	A = 17° 56' 40"			

FIGURA 3.3: Cálculo da altura. Fonte: J. E. Lopes Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), 228 p. IX

3.1.1.3 Cálculo do azimute

O cálculo do azimute assenta nos mesmos princípios aplicados no cálculo da hora, com a particularidade de que, neste caso, se procede à substituição dos elementos: altura, declinação e ângulo horário por declinação, altura e azimute. Para dar início ao processo, é necessário dispor da data da observação, da latitude estimada, da altura verdadeira do astro e da declinação correspondente ao momento da observação.

Regras para o cálculo do azimute:

1. Ao contrário do que ocorre no cálculo da hora e da altura, no cálculo do azimute⁶⁴ a diferença D é calculada entre a latitude e a altura verdadeira do astro, seguindo o mesmo princípio de soma ou subtração. Esse princípio baseia-se na relação entre os nomes da latitude e da declinação:
 - Se forem do mesmo nome (ambas a Norte ou ambas a Sul), subtrai-se a altura à latitude;
 - Se forem de nomes contrários (uma a Norte e a outra a Sul), soma-se a altura à latitude.
2. De seguida, com os dados recolhidos, consulta-se a Tábua X para obter os logaritmos correspondentes à declinação e à diferença entre latitude e altura (D). Com esses valores calcula-se uma nova soma, da qual se extrai o logaritmo

64. Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*, p. IX.

auxiliar na Tábua Y. A soma final dos logaritmos obtidos é então usada como entrada na Tábua Z, onde se determina o azimute verdadeiro.

3. O nome do azimute será o mesmo da declinação do astro observado. A direção (Este ou Oeste) depende da variação da altura:

- Se a altura estiver a aumentar, o azimute conta-se para Este (E);
- Se estiver a diminuir, conta-se para Oeste (W).

O resultado final será, assim, apresentado sob a forma de um azimute verdadeiro, com indicação do hemisfério e da direção.

Exemplo prático:

No exemplo apresentado por Lopes Banhos, referente à data de 20 de janeiro de 1890 (a. m.), pretende-se calcular o azimute verdadeiro de um astro com base na observação da sua altura. Os dados fornecidos são os seguintes: latitude estimada: $50^{\circ} 42' S$, altura verdadeira observada do Sol: $17^{\circ} 16'$, declinação correta do astro: $20^{\circ} 06' S$.

De acordo com a primeira regra apresentada para o cálculo do azimute, como a latitude e a declinação são do mesmo nome (ambas situadas no hemisfério Sul), calcula-se a diferença entre a latitude e a altura do astro:

$$D = \frac{50^{\circ} 42' - 17^{\circ} 16'}{33^{\circ} 26'}$$

Posto isso, consulta-se a Tábua X para obter os logaritmos correspondentes:

- Para a declinação de $20^{\circ}06'$, na coluna $\left\{ \frac{Lt}{Dc} \right\}$, obtém-se o número 1563;
- Para a latitude de $50^{\circ}42'$, na mesma coluna, obtém-se o número 1027;
- Para a altura de $17^{\circ}16'$, na coluna A, obtém-se o número 2810;
- Para a diferença entre latitude e altura (D) $33^{\circ}26'$, na coluna D, obtém-se o número 3345.

Calcula-se então a soma entre os logaritmos da declinação e da diferença entre a latitude e a altura:

$$1563 + 3345 = 4908$$

Com base na soma obtida anteriormente, determina-se o logaritmo auxiliar consultando a Tábua Y:

$$\text{log. aux. de } 4908 = 3091$$

Este logaritmo auxiliar é então somado aos logaritmos anteriores:

$$2810 + 1027 + 3091 = 6928$$

Com o total de 6928, entra-se na Tábua Z, da qual se obtém o azimute verdadeiro:

$$z = \text{S. } 79^{\circ}08' \text{ E.}$$

Isto significa que, no momento da observação, o astro — neste caso, o Sol — encontrava-se numa direção que formava um ângulo de $79^{\circ}08'$ para Este, contado a partir do Sul, uma vez que o nome da declinação é Sul.

Lopes Banhos destaca a eficiência do seu método, que permite resolver o problema com um número bastante reduzido de algarismos e consultas, quando comparado com métodos mais tradicionais, como os apresentados na obra *Navegação de Norie*. A simplicidade do processo, assente na estrutura clara das Tábuas X, Y e Z, demonstra a sua grande aplicabilidade prática para uso diário a bordo, sem comprometer a precisão exigida na navegação astronómica.

3.1.2 Taboas para o cálculo da hora

Esta secção apresenta as tábuas destinadas ao cálculo da hora astronómica a partir da observação da altura de um astro. As tabelas permitem resolver com facilidade o triângulo de posição, com base na altura observada, latitude estimada e declinação do astro. É nesta secção que estão dispostas as Tábuas X, Y e Z.

A metodologia proposta por Lopes Banhos, como já referido anteriormente, assenta na resolução do triângulo de posição, utilizando fórmulas logarítmicas na equação da trigonometria esférica. Embora não introduza fórmulas novas, a originalidade do autor reside na forma como simplifica os cálculos, reduzindo o número de operações necessárias e eliminando a dependência de instrumentos complexos. A estrutura das tábuas visa facilitar o seu uso na navegação, tornando possível a

1.º

20 de janeiro de 1890 (A. M.)

Lat. estimada.....	50º 42' S.	
Alt.ª verdadeira ☉.....	17 16	
Decl. correcta	20 06 S.	
Dc.....	20º 06' S.	1563
Lt.....	50 42 S.	1027
A.....	17 16	2810
	33º 26'	3345
	log. aux. de...	4908 3091
		6928

z = S. 79º 08' E.

FIGURA 3.4: Cálculo do azimute. Fonte: J. E. Lopes Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* (Lisboa: Imprensa Nacional, 1897), 228 p. x

resolução dos problemas com apenas três ou quatro⁶⁵ entradas em tabelas e simples somas e subtrações.

- A Tábua X fornece os valores logarítmicos correspondentes à altura observada do astro e à diferença (ou soma) entre a latitude estimada e a declinação, consoante ambas sejam do mesmo nome (N/S) ou de nomes contrários. A partir destes valores, calcula-se a quantidade auxiliar designada por *s*.
- A Tábua Y fornece o logaritmo de *s*, que será somado aos logaritmos da latitude e da declinação. O total desta soma constitui o argumento de entrada para a Tábua Z.
- A Tábua Z converte o logaritmo obtido na Tábua Y em tempo, fornecendo diretamente o ângulo horário isto é, a diferença entre a hora local e a hora do meridiano de referência. Este valor permite ao navegador determinar a hora verdadeira local com base na altura do astro observada.

3.1.2.1 Explicação das tábuas de Lopes Banhos

Pela fórmula fundamental⁶⁶ da trigonometria esférica, temos:

65. Banhos, *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*.

66. Antonio de Macedo Ramalho Ortigão, *Guia de Navegação* (Lisboa: Imprensa Nacional, 1905), p. 347.

$$\sin A = \sin l \cdot \sin d + \cos l \cdot \cos d \cdot \cos P$$

Onde:

- A é a altura verdadeira do astro;
- l é a latitude do observador;
- d é a declinação do astro;
- P é o ângulo horário.

Esta fórmula expressa a relação entre os lados e os ângulos do triângulo de posição. Contudo, isolar directamente o P a partir desta expressão torna-se difícil, sobretudo para cálculo manual por causa da subtração no numerador. Por essa razão, Lopes Banhos adopta uma transformação baseada no conceito de semiverso, que permite reformular a equação de modo mais conveniente para aplicação com tábuas logarítmicas.

$$\cos P = \frac{\sin A - \sin l \cdot \sin d}{\cos l \cdot \cos d}$$

Uso do Semiverso:

O semiverso (do latim *semiversus*) representa o quadrado do seno da metade de um ângulo:

$$\text{semiverso}(x) = \text{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right)$$

Portanto $2 \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{2}P \right)$ é uma forma de representar o duplo do semiverso de P .

Assim, substitui-se o cosseno por uma expressão equivalente que utiliza o seno do semiarco:

$$2 \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{2}P \right) = 1 - \cos P$$

Recorrendo a esta identidade trigonométrica, a equação transforma-se em:

$$2 \cdot \sin^2 \left(\frac{P}{2} \right) = \sec l \cdot \sec d \cdot [\cos(l - d) - \sin A]$$

Esta forma permite calcular P sem recorrer a funções inversas como o arccos, o que facilita o uso de logaritmos e a interpolação com tábuas.

Adaptação Logarítmica:

Para adaptar a fórmula ao cálculo com logaritmos decimais, divide-se ambos os membros por 4 e introduz-se a subtração e adição de 0,5, de modo a facilitar a interpolação nas tábuas:

$$\frac{4}{2 \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{2} P \right)} = \frac{4}{\sec l \cdot \sec d \cdot \{ \cos(l - d) - 0,5 + [0,5 - \sin A] \}}$$

Aplicando logaritmos decimais à equação:

$$0,602060 - \log \left(2 \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{2} \cdot P \right) \right) = (0,301030 - \log \sec l) + (0,301030 - \log \sec d) + \\ + \text{complemento do log. } \{ \cos(l - d) - 0,5 + [0,5 - \sin A] \}$$

As constantes 0,301030 e 0,602060 correspondem aos logaritmos decimais de 2 e 4, respectivamente. O uso do complemento do logaritmo justifica-se por se tratarem de diferenças inferiores à unidade, o que as torna adequadas para leitura directa nas tábuas de logaritmos.

Aplicabilidade das Tábuas:

- A Tábua X fornece os logaritmos básicos:
 - 0,301030 – log sec l ;
 - 0,301030 – log sec d ;
 - $\cos(l - d) - 0,5$;
 - $0,5 - \sin \text{ nat. } A$.
- A Tábua Y fornece os logaritmos auxiliares, incluindo complementos e interpolação da expressão:

$$\text{complemento do logaritmo: } [\cos \text{ nat. } (l - d) - 0,5] + [0,5 - \sin \text{ nat. } A]$$

- A Tábua Z permite converter o logaritmo final no valor do ângulo horário P (ou hora, azimute, etc.), a partir da expressão:

$$0,602060 - 2 \cdot \log \sin^2 \left(\frac{1}{2} \cdot P \right)$$

As transformações propostas por Lopes Banhos convertem um modelo trigonométrico complexo numa forma acessível a qualquer navegador. Recorrendo apenas a somas e subtrações de logaritmos, obtidos directamente de tábuas, é possível calcular com precisão a altura, o azimute ou a hora, de forma rápida e fiável; mesmo nas condições exigentes da navegação em alto mar. Esta abordagem representa um equilíbrio notável entre o rigor matemático e a aplicabilidade prática.

3.1.3 Taboas auxiliares

Esta parte é composta por 28 tábuas auxiliares que abrangem os mais variados assuntos associados à navegação astronómica. Entre as aplicações principais destacam-se:

- Cálculo do ponto estimado;
- Correção das alturas observadas (incluindo refração, paralaxe, depressão do horizonte);
- Determinação de circunstâncias favoráveis à observação;
- Nascer e pôr verdadeiro dos astros, amplitudes, e culminações;
- Latitude por alturas circummeridianas;
- Variação do ângulo no Polo para o erro de um minuto na latitude;
- Conversões métricas e náuticas, incluindo a transformação entre unidades inglesas e métricas;
- Logaritmos dos números, funções trigonométricas e senos naturais.

Algumas das tabelas aqui incluídas como “auxiliares”, são consideradas como principais em outras obras, como é o caso das tábuas utilizadas para a estima (Taboas 1 e 2).

3.1.4 Apêndice

No Apêndice, Lopes Banhos apresenta exemplos completos de cálculo astronómico, incluindo a correção das alturas observadas, o traçado gráfico das retas

de altura e a determinação de pontos astronómicos. Esta secção funciona como um manual de aplicação prática dos métodos desenvolvidos nas secções anteriores.

Para além dos exemplos, o Apêndice encerra com notas explicativas sobre o processo de cálculo, correções a erros tipográficos detetados na impressão da obra, e observações sobre situações particulares em que os métodos devem ser ajustados.

Capítulo 4

Comparação das tábuas de Lopes Banhos com as de Norie

O objetivo deste capítulo é comparar as tábuas de Lopes Banhos com as de John William Norie⁶⁷, no contexto da determinação da posição pelos métodos do ângulo horário e de Marcq Saint-Hilaire. Numa primeira fase, serão efetuados cálculos de longitude com base em exemplos práticos apresentados na obra de Ortigão, *Guia de Navegação*, aplicando-se cada um dos conjuntos de tábuas. Posteriormente, será realizada uma análise comparativa dos resultados, destacando eventuais diferenças na precisão, estrutura e facilidade de utilização de cada conjunto.

Esta comparação reveste-se de particular importância, uma vez que diferentes autores abordaram os mesmos temas com metodologias ligeiramente distintas, adaptadas às necessidades e aos conhecimentos da sua época. Ao estudar estas variações, pretende-se não apenas avaliar a exatidão dos resultados obtidos, mas também compreender as opções de cada autor na organização dos dados, nos formatos de apresentação e nas estratégias de cálculo. Esta análise permitirá compreender melhor a evolução da prática da navegação astronómica e os critérios que influenciavam a escolha de um determinado conjunto de tábuas por parte dos navegadores.

4.1 Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

Retirou-se do livro de Ortigão, pp. 237–243 Capítulo XXVI, o exemplo em que o autor calcula a posição do navio utilizando as tábuas de Lopes Banhos e Norie:

67. J. W. Norie, *A Complete Epitome of Practical Navigation* (London: Published by William Heather, Navigation Warehouse, 1835).

No dia 13 de junho de 1899, pelas 8^h03^m (a. m.), na $le = 50^\circ56'42''$ N e $Le = 17^\circ53'44''$ W, tomou-se $Ao\odot = 37^\circ34'31''$ em 24 pés de elevação, marcando o cronometro $8^h27^m20,5^s$. Desde a observação até ao meio dia o navio andou $11',5$ a $82^\circ SE$ verdadeiro, observando-se nesse momento $Am\odot = 61^\circ51'30''$ para o S. Elevação na segunda observação 22 pés; estado do cronometro $+50^m32^s,7$. Pede-se o ponto ao meio dia⁶⁸.

Dados do problema:

- Data: 13 de junho de 1899, pelas 8^h03^m (a. m.);
- Hora do cronómetro: $8^h27^m20,5^s$;
- Altura extrameridiana: $A_o\odot = 37^\circ 34' 31''$;
- Elevação na 1.^a observação: 24 pés;
- Latitude estimada (le): $50^\circ 56' 42''$ N;
- Longitude estimada (Le): $17^\circ 53' 44''$ W;
- Desde a observação até ao meio-dia: o navio andou 11,5 milhas para $82^\circ SE$;
- Altura meridiana: $A_m\odot = 61^\circ 51' 30''$;
- Elevação na 2.^a observação: 22 pés;
- Estado do cronómetro (E): $+50^m32,7^s$.

A parte inicial da resolução do problema não exige um aprofundamento sobre a forma específica como cada um desses autores aborda o cálculo, uma vez que não existem diferenças significativas entre os métodos adotados. Ramalho Ortigão, ao resolver esta etapa inicial, recorreu ao Almanaque Náutico ou Tábuas destes mesmos autores que equivalem o mesmo. Esta fase inicial consiste em determinar o horário em Greenwich, a declinação e o respetivo complemento.

Inicialmente, calcula-se o horário em Greenwich (HG), tomando como referência a hora de início da observação: 08^h03^m do dia 13. Contudo, uma vez que as tábuas astronómicas começam a contar a partir do meio-dia, a hora é convertida para o dia anterior, resultando em 20^h03^m do dia 12. Este procedimento permite verificar se o horário registado pelo cronómetro necessita de ser aumentado ou diminuído, garantindo assim a precisão do tempo utilizado no cálculo da posição.

68. Ortigão, *Guia de Navegação*, p.237.

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

$$\begin{array}{r}
 \text{Hora verdadeira (Hv) do lugar aparente do dia 12} \quad 20^{\text{h}}03^{\text{m}}00^{\text{s}} \\
 \text{Do AN retira-se a longitude em tempo da } L_e \quad + 1^{\text{h}}11^{\text{m}}35^{\text{s}} \\
 \hline
 \text{Hv em Greenwich aparente do dia 12} \quad 21^{\text{h}}14^{\text{m}}35^{\text{s}}
 \end{array}$$

The image shows a handwritten calculation on aged paper. It consists of three lines of text with mathematical symbols and numbers. The first line is 'Hv Log. app dia 12 = 20^h 03^m 00^s'. The second line is '(A No.):..... Le em t = + 1 11 35 W.'. The third line is 'Hv G app dia 12 = 21 14 35 1'. A horizontal line is drawn under the second line, and the result of the addition is shown in the third line.

FIGURA 4.1: Cálculo da Hv G aparente do dia 12. Fonte: *Guia de Navegação*, p.238.

Após calcular o Hv G aparente do dia 12, determina-se o valor de HG da hora do cronómetro e a variação:

$$\begin{array}{r}
 H_c \quad 8^{\text{h}}27^{\text{m}}20,5^{\text{s}} \\
 E+ \quad \quad 50^{\text{m}}32,7^{\text{s}} \\
 \hline
 HG = \quad 09^{\text{h}}17^{\text{m}}53,2^{\text{s}} \\
 \\
 HG_{(\text{dia } 12)} \quad 21^{\text{h}}17^{\text{m}}53,2^{\text{s}} \\
 \quad \quad \quad - \quad 24^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}} \\
 \hline
 \text{Variação } (V) = \quad \quad \quad 2,7^{\text{h}}
 \end{array}$$

Do AN retira-se a equação do tempo para 0^{h} em G do dia 13 = $0^{\text{m}}13,30^{\text{s}}$

Posto isto, faz-se uma regra de três simples para determinar a variação da equação do tempo durante o intervalo de $2,7^{\text{h}}$, com base nos valores retirados do Almanaque Náutico.

$$\begin{array}{r}
 24^{\text{h}} \quad \longrightarrow \quad 12,41^{\text{s}} \\
 2,7^{\text{h}} \quad \longrightarrow \quad x = 1,40^{\text{s}}
 \end{array}$$

Após calcular a variação (V) da equação do tempo em $2,7^{\text{h}}$, soma-se esse valor à equação do tempo tabulada para as 0^{h} de Greenwich do dia 13. O objetivo é obter a equação do tempo corrigida aplicável ao instante da observação no dia 12. Este valor será posteriormente somado ao $HG_{\text{dia } 12}$ para obter a hora verdadeira de Greenwich.

$$\begin{array}{r}
 \text{Equação do tempo às } 0^{\text{h}} \text{ do dia 13} \quad = 0^{\text{m}}13,30^{\text{s}} \\
 \quad \quad \quad \text{Variação em } 2,7^{\text{h}} \quad \quad \quad = + 1,40^{\text{s}} \\
 \hline
 \text{Equação corrigida para o dia 12} \quad \quad \quad = 0^{\text{m}}14,70^{\text{s}} \\
 \\
 HG_{\text{dia } 12} \quad \quad \quad = 21^{\text{h}}17^{\text{m}}53,2^{\text{s}} \\
 + \text{ Eq. do tempo corrigida} \quad \quad \quad = 0^{\text{m}}14,70^{\text{s}} \\
 \hline
 Hv G \text{ da observação} \quad \quad \quad = 21^{\text{h}}18^{\text{m}}07,9^{\text{s}}
 \end{array}$$

Retira-se do Almanaque Náutico (AN) a declinação para o dia 13 de junho às 0^{h} . Calcula-se a V em $2,7^{\text{h}}$ seguindo o mesmo princípio utilizado anteriormente.

$$\begin{array}{r}
 \text{Declinação às } 0^{\text{h}} \text{ G do dia 13} \quad = 23^{\circ} 13' 23,50'' \text{ N} \\
 \quad \quad \quad \text{Variação em } 2,7^{\text{h}} \quad \quad \quad \quad \quad -22,68'' \\
 \hline
 \text{Declinação corrigida para o dia 12} \quad = 23^{\circ} 13' 00,82'' \text{ N}
 \end{array}$$

A distância polar (Δ) é então obtida subtraindo 90° – a declinação, isto é:

$$\Delta = 90^{\circ} - \delta = 90^{\circ} - 23^{\circ} 13' 00,82'' = 66^{\circ} 46' 59''$$

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

He = 8 ^h 27 ^m 20 ^s ,5	(A. N.).....	Eq ás 0 ^h tm G dia 13 = 0 ^m 13 ^s ,30	Vh = - 0 ^s ,20
E = + 50 32,7		V em 2 ^h ,7 = + 1,40	
H G = 9 17 53,2		Eq corr. dia 12 = 0 14,70	
HG dia 12 = 21 17 53,2			
Eq corr. = + 14,7	(A. N.).....	d ás 0 ^h tm G dia 13 = 23° 13' 23'',50 N.	Vh = + 8'',40
Hv G = 21 18 07,9		V em 2 ^h ,7 = - 22,68	
		d corr. dia 12 = 23 13 00,82 N.	
		Δ = 66 46 59	

FIGURA 4.2: Cálculo da Hv G. Fonte: *Guia de Navegação*, p.238.

4.1.1 Pelo ângulo horário

4.1.1.1 Cálculo pelas tábuas de Norie

Para resolver o triângulo de posição, Norie utiliza a seguinte fórmula:

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}P\right) = \cos S \cdot \sin(S - A) \cdot \sec l \cdot \operatorname{cosec} \Delta$$

Em que:

- P – o ângulo horário;
- S – a semissoma;
- A – a altura da extrameridiana;
- Δ – a distância polar;
- l – a latitude estimada.

Para compreender melhor os processos de cálculo utilizando as Tábuas de Norie, dividirei em duas partes:

1. Cálculo da longitude
2. Cálculo da latitude

Cálculo da longitude

Numa primeira fase, procede-se ao cálculo da correção da altura extrameridiana (A_o), utilizando a Tábua IX de Norie, para 24 pés:

$$\begin{aligned} \text{Ao } \odot &= 37^\circ 34' 31'' \\ \text{C (IX)} &= + 09' 45'' \\ \hline \text{Av } \odot &= 37^\circ 44' 16'' \end{aligned}$$

Posto isto, calcula-se a semissoma (S):

$$S = \frac{\text{Av } \odot + l + \Delta}{2} = \frac{37^\circ 44' 16'' + 50^\circ 56' 42'' + 66^\circ 46' 59''}{2} = 77^\circ 43' 58,5''$$

Da Tábua XXV de Norie tiram-se os seguintes valores dos logaritmos:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{cosec} \Delta &= 10,036676 \\ \log \sec l &= 10,200614 \\ \log \cos S &= 9,327295 \\ \log \operatorname{sen}(S - A) &= 9,808024 \end{aligned}$$

Após obter estes valores, procede-se à soma para calcular o ângulo horário:

$$\log \sin^2 \left(\frac{1}{2} P \right) = 3)9,372609$$

Com o valor do ângulo horário calculado, utiliza-se a Tábua XXXI de Norie para convertê-lo em tempo:

$$P = 3 \text{ h } 52 \text{ m } 25,71 \text{ s}$$

Após calcular o ângulo horário, determina-se a hora verdadeira (Hv) do lugar subtraindo o ângulo horário a 24 horas:

$$\begin{aligned} &24 \text{ h } 00 \text{ m } 00,00 \text{ s} \\ &- 3 \text{ h } 52 \text{ m } 25,71 \text{ s} \\ \hline \text{Hv do lugar} &= 20 \text{ h } 07 \text{ m } 34,29 \text{ s} \end{aligned}$$

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

Após concluir todos os processos de cálculo, é necessário comparar a hora verdadeira (Hv) do lugar com a hora verdadeira de Greenwich (Hv G) para determinar a longitude:

$$\begin{array}{rcl} \text{Hv do lugar} & 20 \text{ h } 07 \text{ m } 34,3 \text{ s} & \\ \text{Hv G} & 21 \text{ h } 18 \text{ m } 07,9 \text{ s} & \\ \hline L_c = & 01 \text{ h } 10 \text{ m } 33,6 \text{ W} & \\ L = & 17^\circ 38' 24'' \text{ W} & \end{array}$$

Como o navio andou 11,5 milhas na direção de 82° SE , é necessário calcular o ΔL :

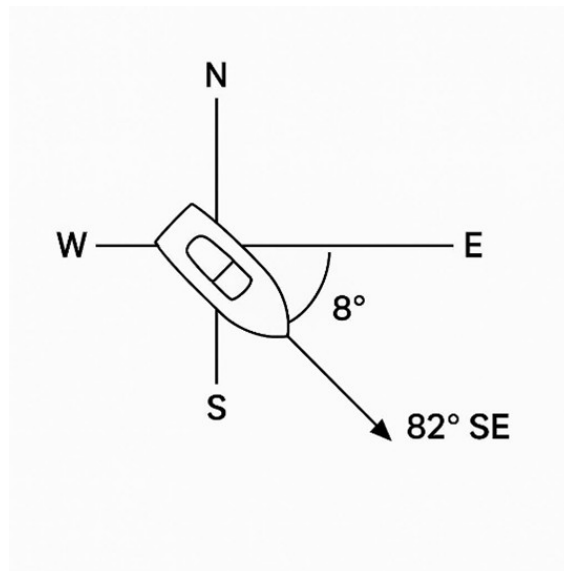


FIGURA 4.3: Variação da posição do navio.

$$ap = 11,5 \cdot \cos(8^\circ) = 11,38$$

Sabendo que:

$$ap = \Delta L \cdot \cos \varphi$$

Resolve-se para ΔL :

$$\Delta L = \frac{ap}{\cos \varphi} = 18' 06'' \text{ E}$$

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

Deste modo, calcula-se a distância zenital (Dz), que corresponde ao complemento da altura:

$$\begin{array}{r} \text{Amv } \odot \quad 62^{\circ} 02' 12'' \\ \quad \quad \quad - 90^{\circ} 00' 00'' \\ \hline \text{Dz} = \quad 27^{\circ} 57' 48'' \text{ N} \end{array}$$

Após calcular a Dz e a declinação, determina-se a latitude somando ambos os valores:

$$\begin{array}{r} \text{Dz} \quad 27^{\circ} 57' 48'' \text{ N} \\ (\delta) \quad + 23^{\circ} 13' 33'' \text{ N} \\ \hline (\varphi) \quad 51^{\circ} 11' 21'' \text{ N} \end{array}$$

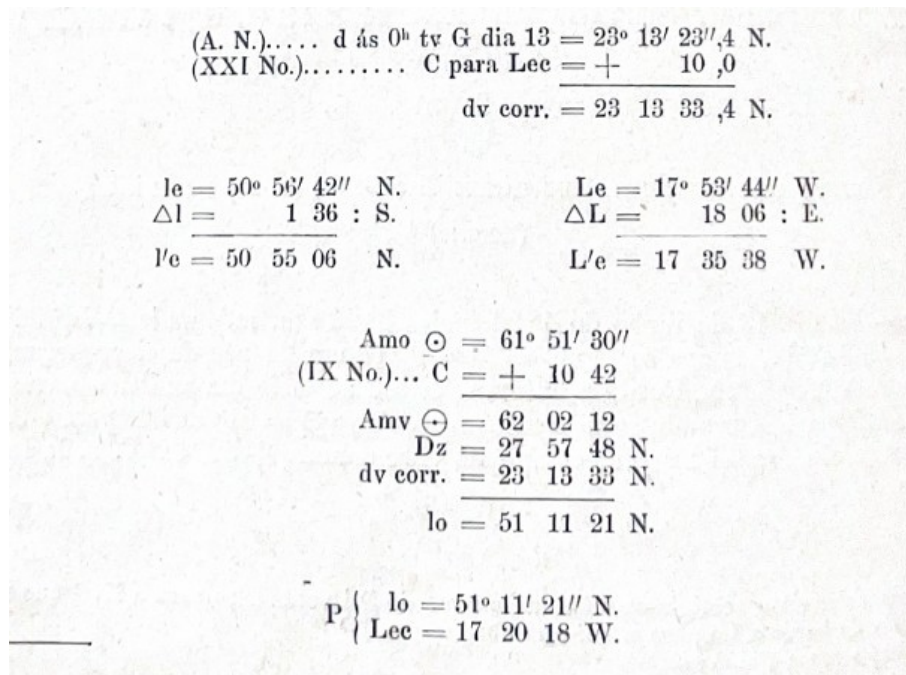


FIGURA 4.5: Cálculo da latitude pela Tábuas de Norie. Fonte: *Guia de Navegação*, p.238.

4.1.1.2 Cálculo pelas tábuas de Lopes Banhos

Para explicar melhor os processos do cálculo envolvendo as Tábuas de Lopes Banhos pelo método do ângulo horário, dividirei a explicação em duas partes:

1. Cálculo da longitude
2. Cálculo da latitude

Cálculo da longitude

A fórmula utilizada por Lopes Banhos encontra-se explicada no capítulo anterior. Para calcular a longitude através do ângulo horário utilizando as tábuas de Banhos, Ramalho Ortigão inicia o processo corrigindo a altura extrameridiana, recorrendo à Tábua 10. A partir desta, obtém uma correção de 9,45 para uma elevação de 24 pés:

$$\begin{array}{r} \text{Ao } \odot \quad 37^{\circ} 34' 31'' \\ \text{C} \quad \quad \quad + 09' 45'' \\ \hline \text{Av } \odot = \quad 37^{\circ} 44' 16'' \end{array}$$

Após corrigir a altura, procede-se ao cálculo da diferença (D) entre a latitude e a declinação. Para obter este valor, subtrai-se quando ambos têm o mesmo nome e soma-se quando têm nomes contrários:

$$\begin{array}{r} \varphi \quad \quad 50^{\circ} 56' 42'' \text{ N} \\ \delta \quad \quad - 23^{\circ} 13' 01'' \text{ N} \\ \hline D = \quad \quad 27^{\circ} 43' 41'' \end{array}$$

Posto isto, recorre-se à Tábua X para obter os logaritmos correspondentes:

- Para Av \odot de $37^{\circ} 44' 16''$, consulta-se a coluna A, da qual se obtém o número 8880;
- Para a diferença D de $27^{\circ} 43' 41''$, consulta-se a coluna D, e obtém-se o número 3851;
- Para a latitude de $50^{\circ} 56' 42'' \text{ N}$, na coluna $\left\{ \frac{Lt}{Dc} \right\}$, obtém-se o número 1004;
- Para a declinação de $23^{\circ} 13' 00,82'' \text{ N}$, na mesma coluna, obtém-se o número 2644.

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

De seguida, somam-se os logaritmos da altura verdadeira e da diferença ($Av \odot + D$). Esta soma é designada por s :

$$s = 8880 + 3851 = 1)2731^{69}$$

Com o valor de s obtido, consulta-se a Tábua Y, da qual se extrai o valor 5636.

O resultado obtido na Tábua Y é então somado ao logaritmo da latitude e da declinação:

$$5636 + 1004 + 2644 = 9284$$

Com o valor obtido da soma anterior, consulta-se a Tábua Z para extrair o ângulo horário:

$$P = 3^h 52^m 26^s$$

Posto isto, calcula-se a hora verdadeira (Hv) do lugar:

$$\begin{array}{r} P \\ \text{Hv do lugar} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24^h 00^m 00^s \\ - 3^h 52^m 26^s \\ \hline 20^h 07^m 34^s \end{array}$$

Para calcular a longitude⁷⁰, é necessário comparar a Hv do lugar com a Hv G:

$$\begin{array}{r} \text{Hv do lugar} \\ \text{Hv G} \\ \text{Lc} \\ \text{Lc} = \end{array} \quad \begin{array}{r} 20^h 07^m 34^s \\ - 21^h 18^m 07,9^s \\ \hline 01^h 10^m 33,9^s \text{ W} \\ 17^\circ 38' 28'' \text{ W} \end{array}$$

Como o navio percorreu 11,5 milhas na direção de 82° SE (Figura 4.3), temos que $\Delta L = 18' 06'' \text{ E}$ ⁷¹.

69. Como s ultrapassou 10000, considera-se apenas a parte excedente, ignorando o primeiro algarismo.

70. Gameiro, *Manual de Navegação*, p. 239.

71. Calculado na resolução anterior utilizando as tábuas de Norie.

Após obter ΔL , procede-se à correção da longitude:

$$\begin{array}{r} L_c \quad 17^\circ 38' 28'' \text{ W} \\ \Delta L \quad - 18' 06'' \text{ E} \\ \hline L \quad 17^\circ 20' 22'' \text{ W} \end{array}$$

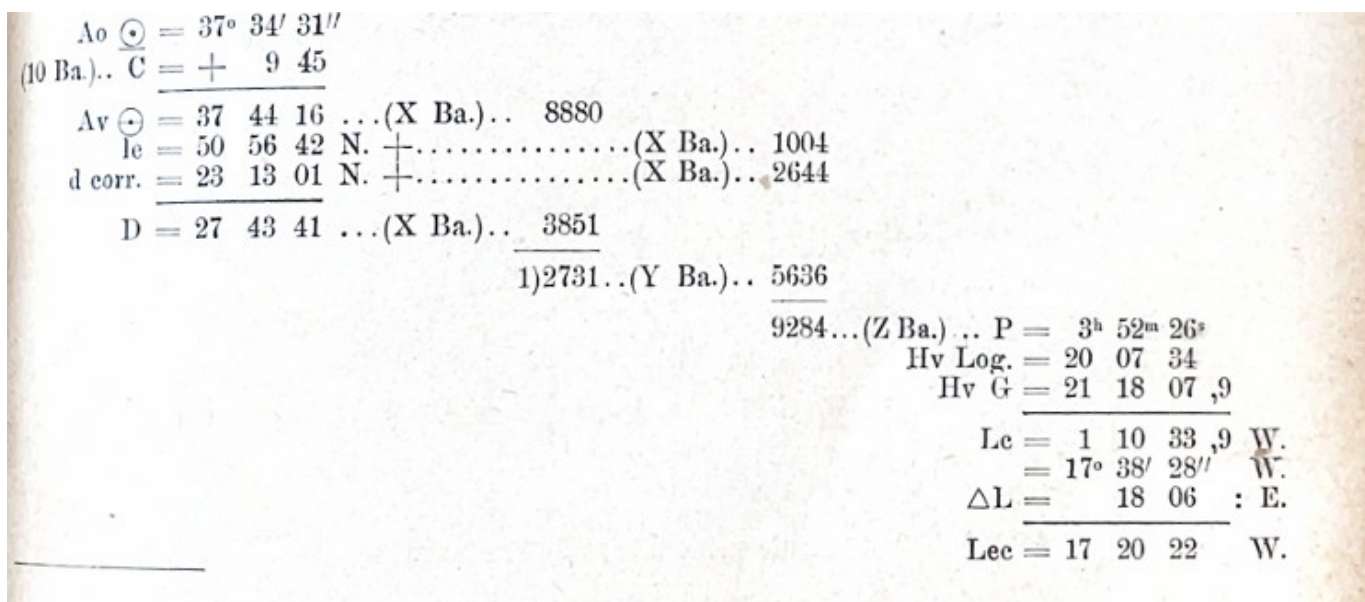


FIGURA 4.6: Cálculo da longitude pela Tábuas de Lopes Banhos.
 Fonte: *Guia de Navegação*, p.239.

Cálculo da latitude

Para o cálculo da latitude, é necessário consultar AN e retirar a declinação correspondente ao dia 13, às 00h de Greenwich, e corrigi-la de acordo com a longitude:

$$\begin{array}{r} \delta \quad 23^\circ 13' 23,4'' \text{ N} \\ C \text{ (Tábua 18) para } L \quad + 10'' \\ \hline \text{Declinação corrigida } \delta = 23^\circ 13' 33,4'' \text{ N} \end{array}$$

Após efetuar a correção da declinação, procede-se ao cálculo da correção da altura meridiana do Sol ($Am \odot$) para uma elevação de 22 pés, recorrendo à Tábua 10:

$$\begin{array}{r}
 \text{Amo } \odot \quad 61^{\circ} 51' 30'' \\
 \text{C (Tábua 10)} \quad + 10' 42'' \\
 \hline
 \text{Amv } \odot = \quad 62^{\circ} 02' 12''
 \end{array}$$

Para calcular a latitude, também é necessário determinar a distância zenital (Dz):

$$\begin{array}{r}
 \text{Amv } \odot \quad 90^{\circ} 00' 00'' \\
 \quad \quad \quad - 62^{\circ} 02' 12'' \\
 \hline
 \text{Dz} = \quad 27^{\circ} 57' 48'' \text{ N}
 \end{array}$$

Após ter calculado a Dz e a δ , calcula-se a latitude:

$$\begin{array}{r}
 \text{Dz} \quad 27^{\circ} 57' 48'' \text{ N} \\
 \delta \quad + 23^{\circ} 13' 33'' \text{ N} \\
 \hline
 \varphi = \quad 51^{\circ} 11' 21'' \text{ N}
 \end{array}$$

4.1.2 Pelo método de Marcq Saint-Hilaire

A parte inicial da resolução deste problema encontra-se explicada no início deste capítulo⁷². Dessa parte inicial, obtêm-se Hv G = 21^h 18^m 07,9^s e $\delta = 23^{\circ} 13,00' 82 \text{ N}$. Estes resultados serão utilizados para calcular a posição do navio pelo método da altura. Antes disso, é necessário determinar o valor de P:

$$\begin{array}{r}
 \text{Hv G} \quad 21^{\text{h}} 18^{\text{m}} 07,9^{\text{s}} \\
 \text{L em t} \quad - 01^{\text{h}} 11^{\text{m}} 35,0^{\text{s}} \\
 \hline
 \text{Hv do lugar} \quad 20^{\text{h}} 06^{\text{m}} 32,9^{\text{s}} \\
 \quad \quad \quad - 24^{\text{h}} 00^{\text{m}} 00,0^{\text{s}} \\
 \hline
 \text{P} \quad 03^{\text{h}} 53^{\text{m}} 27,1^{\text{s}}
 \end{array}$$

4.1.2.1 Cálculo pelas tábuas de Norie

Para o cálculo do ponto astronómico pelo método de Marcq Saint-Hilaire, Norie utiliza a seguinte fórmula:

$$\sin A = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos P \quad (4.1)$$

⁷². Para ambos os métodos e para ambas as tábuas, esta parte inicial consiste em corrigir Hc para obter Hv G e determinar a declinação.

Quando a φ e a δ são do mesmo nome, $\text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \delta$ é positivo e negativo quando forem de nomes contrários. Se P for menor que 6^{h} , então $\text{cos } \varphi \cdot \text{cos } \delta \cdot \text{cos } P$ é positivo; caso contrário, é negativo. Pelas Tábuas 25, 26 e 27 de Lopes Banhos, também é possível resolver este método utilizando esta fórmula.

Para compreender melhor os processos de cálculo utilizando as Tábuas de Norie pelo método de Marcq Saint-Hilaire, dividirei em duas partes:

1. Cálculo da longitude
2. Cálculo da latitude

Cálculo da longitude

Numa fase inicial calcula-se a correção da Ao \odot para uma elevação de 24 pés, recorrendo à Tábua IX de Norie:

$$\begin{array}{r} \text{Ao } \odot \qquad \qquad 37^{\circ} \ 34' \ 31'' \\ \text{C (Tábua IX)} \quad + \quad 09' \ 45'' \\ \hline \text{Av } \odot = \qquad \qquad 37^{\circ} \ 44' \ 16'' \end{array}$$

De seguida, calcula-se o azimute (Z):

- A partir da Tábua XXVII-A, retira-se a correção da variação do ângulo no polo correspondente a um minuto de alteração em latitude, entrando com a latitude (φ) e o ângulo horário (P):

$$p' = +0,77$$

- Com a Tábua XXVII-B, retira-se a correção da variação do ângulo no polo para um minuto de alteração em latitude, entrando com a declinação (δ) e o ângulo horário (P):

$$p'' = -50$$

- Após retirar estes valores, calcula-se a variação total (p):

$$p = p' + p'' = +27$$

- Para o cálculo do Z , entra-se na Tábua XXVII-C com os valores de p e da φ , obtendo-se um $Z = 80,4^{\circ}$ SE.

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

(A. N.)... d ás 0 ^h tm G dia 13 = 23° 13' 23",50 N. Vh = + 8",40	
V em 2 ^h ,7 = - 22",68	
d corr. dia 12 = 23 13 00,82	
Ao ☉ = 37° 34' 31"	(XXVII-A No.)... p' = + 0',77
(IX No.)... C = + 9 45	(XXVII-B No.)... p'' = - 0',50
Av ☉ = 37 44 16	p = + 0',27
	(XXVIII-C No.)... Z = 80°,4 SE.
(XXV No.)... log. sen le	= 9,890165
(XXV No.)... log. sen d	= 9,595732
	1)9,485897
(XXIV No.)... n.º correspondente	= 0,306124 +
(XXV No.)... log. cos le	= 9,799386
(XXV No.)... log. cos d	= 9,963324
(XXV No.)... log. cos P	= 9,719777
	= 2)9,482487
(XXIV No.)... n.º correspondente	= 0,303729 +
	0,306124 +
	sen nat. Ae = 0,609853
(XXVI No.)..... Ae = 37° 34' 44"	
	Av = 37 44 16
	Av - Ae = + 9 32 : SE. ¹

FIGURA 4.7: Utilização das Tábuas de Norie. Fonte: *Guia de Navegação*, p.253.

Para calcular a altura estimada, é necessário aplicar a fórmula utilizada por Norie, apresentada no início deste cálculo. Para tal, recorre-se às Tábuas XXV e XXIV, das quais se obtêm os seguintes logaritmos:

- Da Tábua XXV retira-se o log. sen $\varphi = 9,890165$
- Da Tábua XXV retira-se o log. sen $\delta = 9,595732$

$$\begin{array}{r}
 \text{soma:} \\
 9,890165 \\
 + 9,595732 \\
 \hline
 1) 9,485897
 \end{array}$$

- Com o valor da soma anterior, entra-se na Tábua XXIV e retira-se o número correspondente (c'): 0,306124
- Da Tábua XXV retira-se o log. cos $\varphi = 9,799386$
- Da Tábua XXV retira-se o log. cos $\delta = 9,963324$
- Da Tábua XXV retira-se o log. cos $P = 9,719777$

$$\begin{array}{r}
 \text{soma:} \\
 9,799386 \\
 + 9,963324 \\
 + 9,719777 \\
 \hline
 2) 9,482487
 \end{array}$$

- Da Tábua XXIV retira-se o número correspondente ao valor da soma anterior (c''): 0,303729
- Após efetuar estes cálculos, soma-se o $c' + c''$ para obter $\text{sen } A$:

$$\text{sen } A = 0,303729 + 0,306124 = 0,609853$$

- Posto isto, entra-se na Tábua XXVI com o valor anterior e obtém-se uma $A_e = 37^\circ 34' 44''$.

Após ter sido obtida a A_e , calcula-se a variação da altura⁷³:

$$\begin{array}{r}
 A_e \quad 37^\circ \quad 34' \quad 44'' \\
 A_v \quad 37^\circ \quad 44' \quad 16'' \\
 \hline
 A_v - A_e \quad + \quad 09' \quad 32'' \quad \text{SE}
 \end{array}$$

Com a variação da altura calculada, marca-se o ponto estimado e a reta de altura, procedendo-se de seguida ao respetivo transporte da reta para determinar a variação da longitude e da latitude⁷⁴, e assim calcular a longitude:

$$\begin{array}{r}
 \varphi_e \quad 50^\circ \quad 56'42'' \quad \text{N} \quad L_e \quad 17^\circ \quad 53'44'' \quad \text{W} \\
 1.^a \text{ C} \quad \underline{\quad 1 \quad 41 \quad \text{S}} \quad 1.^a \text{ C} \quad \underline{\quad 15 \quad 12 \quad \text{E}} \\
 \varphi_{e_1} \quad 50^\circ \quad 55'01'' \quad \text{N} \quad L_{e_1} \quad 17^\circ \quad 38'32'' \quad \text{W} \\
 \Delta\varphi \quad \underline{\quad 1 \quad 36 \quad \text{S}} \quad \Delta L \quad \underline{\quad 18 \quad 06 \quad \text{E}} \\
 \varphi_{e_2} \quad 50^\circ \quad 53'25'' \quad \text{N} \quad L \quad 17^\circ \quad 20'26'' \quad \text{W}
 \end{array}$$

73. Marca-se a diferença de altura na direção do azimute a partir do ponto estimado — para o lado do Sol se o valor for positivo (+), ou no sentido oposto se for negativo (-). Considerando o azimute como rumo, e estimando estes elementos, os resultados aplicam-se ao ponto estimado.

74. A variação da latitude é obtida pela seguinte fórmula: $\Delta\varphi = \sqrt{D^2 - ap^2}$

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

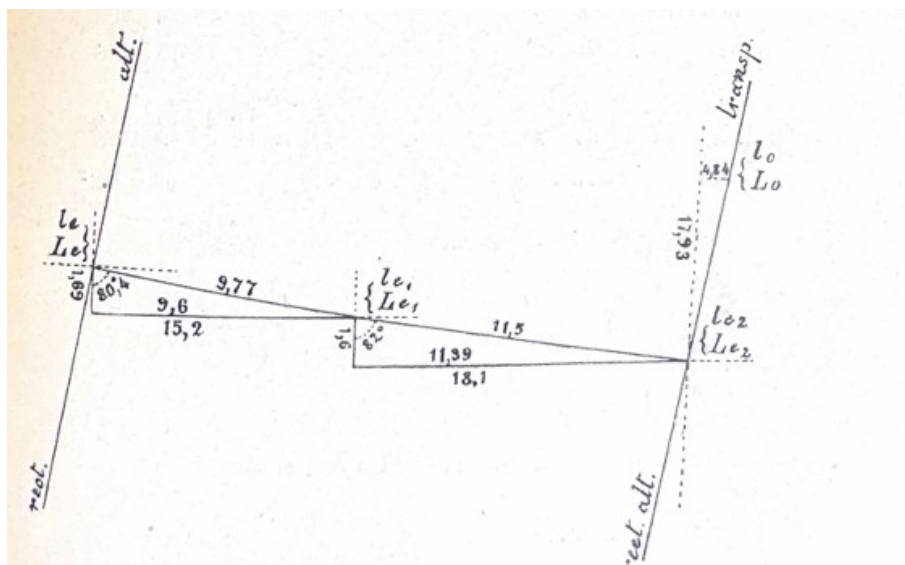


FIGURA 4.8: Transporte da reta de altura. Fonte: *Guia de Navegação*, p.253.

Cálculo da latitude

À semelhança do que foi feito no cálculo do ângulo horário, para determinar a latitude é necessário consultar o AN e retirar a declinação correspondente ao dia 13, às 00h de Greenwich, corrigindo-a de acordo com a longitude, e posteriormente efetuar a correção da $Am \odot$ para uma elevação de 22 pés:

δ	23°	13'	23,4" N
C (Tábua XXI)	+		10"
δ corrigida	23°	13'	33,4" N

$Am_o \odot$	61°	51'	30"
C (Tábua IX)	+	10'	42"
$Am_v \odot$	62°	02'	12"

Posto isto, calcula-se a distância Zenital (Dz), que é o complemento da altura:

$Am_v \odot$	62°	02'	12"
	-	90°	00' 00"
Dz	27°	57'	48" N

Após calcular a Dz e a declinação, determina-se a latitude somando ambos os valores:

$$\begin{array}{r}
 \text{Dz} \quad 27^\circ \quad 57' \quad 48'' \text{ N} \\
 \delta \quad + 23^\circ \quad 13' \quad 33'' \text{ N} \\
 \hline
 \varphi \quad 51^\circ \quad 11' \quad 21'' \text{ N}
 \end{array}$$

4.1.2.2 Cálculo pelas tábuas de Lopes Banhos

Para explicar melhor os processos do cálculo envolvendo as Tábuas de Lopes Banhos pelo método de Marcq Saint-Hilaire, dividirei a explicação em duas partes:

1. Cálculo da longitude
2. Cálculo da latitude

Cálculo da longitude

Após ter calculado o P no início da resolução deste método, procede-se a correção da Ao \odot para uma elevação de 24 pés utilizando a Tábua 10 de Lopes Banhos:

$$\begin{array}{r}
 \text{Ao } \odot \quad \quad \quad 37^\circ \quad 34' \quad 31'' \\
 \text{C (Tábua 10)} \quad + \quad \quad 09' \quad 45'' \\
 \hline
 \text{Av } \odot = \quad \quad \quad 37^\circ \quad 44' \quad 16''
 \end{array}$$

Posto isto, calcula-se o azimute (Z):

- A partir da Tábua 13, retira-se a correção da variação do ângulo no polo correspondente a um minuto de alteração em latitude, entrando com os valores de φ e P :

$$p' = +0,77$$

- Da Tábua 13-a, retira-se a correção correspondente à variação do ângulo no polo para um minuto de alteração em declinação, entrando com os valores de δ e P :

$$p'' = -50$$

- Calcula-se a correção total p :

$$p = p' + p'' = +27$$

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

- Para o cálculo do azimute Z , entra-se na Tábua 14 com os valores de p e da latitude, obtém-se:

$$Z = 80,4^\circ \text{ SE}$$

De seguida, calcula-se a diferença⁷⁵ (D) entre a latitude e a declinação:

$$\begin{array}{r} 50^\circ 56' 42'' \\ -23^\circ 13' 00,82'' \\ \hline 27^\circ 43' 41'' \\ D = 27^\circ 43' 41'' \end{array}$$

Da Tábua X retiram-se os logaritmos:

- Para a latitude de $50^\circ 56' 42''$ N, na coluna $\left\{ \frac{Lt}{Dc} \right\}$, obtém-se o número: 1004;
- Para a declinação de $23^\circ 13' 00,82''$ N, na mesma coluna, obtém-se o número: 2644;
- Para a diferença $D = 27^\circ 43' 41''$, consulta-se a coluna D , e obtém-se o número: 3851.

Da Tábua Z retira-se o logaritmo do $P = 0,9249$.

Posto isto, calcula-se o logaritmo auxiliar, somando os logaritmos da φ e da δ , e subtraindo o resultado ao logaritmo do P :

$$\begin{array}{r} \log \varphi \quad \quad 0,1004 \\ \log \delta \quad \quad + 0,2644 \\ \hline \text{soma} \quad \quad 0,3648 \\ \log P \quad \quad - 0,9249 \\ \hline \log \text{ auxiliar} = \quad 0,5601 \end{array}$$

Com o valor do logaritmo auxiliar, consulta-se a Tábua Y, da qual se extrai o valor correspondente: 12753.

75. Subtrai-se quando ambos têm o mesmo nome e soma-se quando têm nomes contrários.

4.1. Ponto ao meio-dia por uma altura extrameridiana do Sol (a. m.) e a meridiana

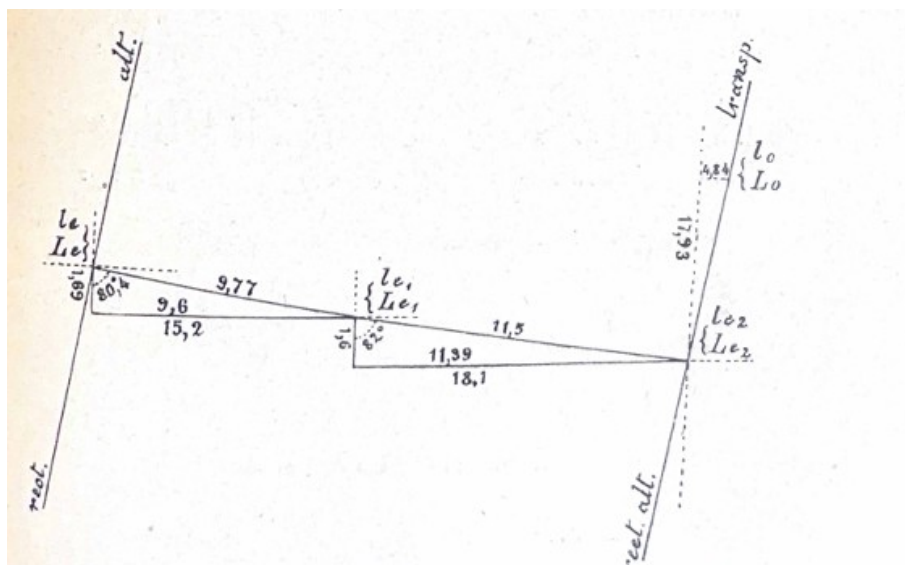


FIGURA 4.10: Transporte da reta de altura. Fonte: *Guia de Navegação*, p.255.

φ_e	$50^\circ 56'42''$	N	L_e	$17^\circ 53'44''$	W
1. ^a C	1 41	S	1. ^a C	15 12	E
φ_{e_1}	$50^\circ 55'01''$	N	L_{e_1}	$17^\circ 38'32''$	W
$\Delta\varphi$	1 36	S	ΔL	18 06	E
φ_{e_2}	$50^\circ 53'25''$	N	L	$17^\circ 20'26''$	W

Cálculo da latitude

Para o cálculo da latitude, à semelhança do que é feito no ângulo horário, é necessário consultar o AN e retirar a δ correspondente ao dia 13, às 00h de Greenwich, corrigindo-a de acordo com a longitude, e posteriormente efetuar a correção da Am ☉:

$$\begin{array}{r}
 \delta \qquad \qquad \qquad 23^\circ \ 13' \ 23,4'' \ \text{N} \\
 \text{C (Tábua 18)} \quad + \qquad \qquad \qquad 10'' \\
 \hline
 \delta \text{ corrigida} = \quad 23^\circ \ 13' \ 33,4'' \ \text{N}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Am}_o \odot \quad 61^\circ \quad 51' \quad 30'' \\
 \text{C (Tábua 10)} \quad + \quad 10' \quad 42'' \\
 \hline
 \text{Am}_v \odot = \quad 62^\circ \quad 02' \quad 12''
 \end{array}$$

Posto isto, é necessário determinar a distância zenital (Dz):

$$\begin{array}{r}
 \text{Am}_v \odot \quad 62^\circ \quad 02' \quad 12'' \\
 \quad \quad \quad - \quad 90^\circ \quad 00' \quad 00'' \\
 \hline
 \text{Dz} = \quad 27^\circ \quad 57' \quad 48'' \text{ N}
 \end{array}$$

Após calcular a Dz e a δ , calcula-se a φ somando ambos os elementos:

$$\begin{array}{r}
 \text{Dz} \quad 27^\circ \quad 57' \quad 48'' \text{ N} \\
 \delta \quad + \quad 23^\circ \quad 13' \quad 33'' \text{ N} \\
 \hline
 \varphi \quad 51^\circ \quad 11' \quad 21'' \text{ N}
 \end{array}$$

4.2 Comparação das Tábuas

Este subcapítulo apresenta uma comparação sistemática das tábuas de John William Norie e de Lopes Banhos pelos métodos do ângulo horário e de Marcq Saint-Hilaire. A análise incide sobre os seguintes critérios: número de operações, fórmulas envolvidas, número de consultas às tábuas, complexidade algorítmica, simplicidade e clareza dos procedimentos, número de algarismos manipulados, eficiência prática e risco de erro humano.

4.2.1 Comparação pelo método do ângulo horário

Número de operações e fórmulas:

- Norie: Exige o cálculo da semissoma e a aplicação da fórmula:

$$\sin^2 \left(\frac{1}{2}P \right) = \cos S \cdot \sin(S - A) \cdot \sec \varphi \cdot \text{cosec } \Delta$$

com recurso a logaritmos de quatro funções trigonométricas. O processo total envolve mais de 16 operações principais.

- Lopes Banhos: Substitui os logaritmos por números tabulados. A fórmula está implícita nas Tábuas X, Y e Z, permitindo resolver o problema com somas e subtrações simples. São necessárias entre 10 a 11 operações diretas.

Consultas às tábuas:

- Norie: Exige pelo menos 5 tábuas distintas e aproximadamente 10 consultas ao longo do processo.
- Lopes Banhos: Utiliza também 5 tábuas, sendo as principais as Tábuas X, Y e Z, todas organizadas sequencialmente e 10 consultas às tábuas.

Complexidade e clareza do algoritmo:

- Norie: O processo é matematicamente mais rigoroso, mas apresenta maior dispersão e depende fortemente da correta leitura e interpretação de logaritmos. Maior propensão a erros por interpolação.
- Lopes Banhos: O algoritmo é mais compacto e direto, adequado a navegadores com menos experiência. Evita interpolação, apresentando um encadeamento lógico e eficiente.

Número de algarismos e manipulação numérica:

- Norie: Trabalha com logaritmos de 6 casas decimais, aumentando o risco de erro e exigindo maior atenção.
- Lopes Banhos: Utiliza números com 4 dígitos simples (ex.: 8880), tornando o processo mais acessível e menos propenso a erros de transcrição.

Eficiência e aplicabilidade prática:

- Norie: Mais adequado a contextos acadêmicos e a utilizadores mais experientes.
- Lopes Banhos: Mais eficiente em navegação prática, rapidez e menor carga cognitiva.

4.2.2 Comparação pelo método de Marcq Saint-Hilaire

Número de operações e fórmulas:

- Norie: Exige a aplicação explícita da fórmula

$$\sin A = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos P$$

e consultas a várias tábuas para obter Ae. Mais de 12 passos são necessários, incluindo o cálculo do azimute com três tábuas auxiliares (XXVII-A, B, C).

- Lopes Banhos: Pode resolver este método utilizando a mesma fórmula de Norie pelas Tábuas 25, 26 e 27. Utilizando as Tábuas principais (X,Y,Z) o número de operações reduz-se significativamente e as etapas estão bem organizadas.

Consultas às tábuas:

- Norie: Utiliza 10 tábuas e exige 16 consultas às tábuas.
- Lopes Banhos: Apenas 8 tábuas utilizadas e exige 13 consultas às tábuas.

Complexidade e clareza do algoritmo:

- Norie: Algoritmo mais complexo e exigente em termos de interpolação e rigor matemático.
- Lopes Banhos: Apresenta um algoritmo sequencial de fácil execução. A redução da interpolação e a disposição tabular dos dados promovem clareza e rapidez.

Número de algarismos e manipulação numérica:

- Norie: Logaritmos e valores interpolados com várias casas decimais. Exige atenção e precisão na transcrição.
- Lopes Banhos: Números de 4 dígitos fáceis de ler, somar e consultar, reduzindo a margem de erro.

Eficiência e aplicabilidade prática:

- Norie: Relevante para contextos de precisão extrema ou acadêmica. Menos eficiente para uso diário a bordo.
- Lopes Banhos: Método mais direto, com orientação prática.

4.2.3 Comparação

Para quantificar de forma mais objetiva estas diferenças, foi adotado um sistema de avaliação baseado na atribuição de pesos às diversas componentes envolvidas nos cálculos. Esta ponderação foi feita numa escala de 0 a 5, ajustando gradualmente o nível de exigência de acordo com a complexidade de cada operação.

4.2. Comparação das Tábuas

Foram consideradas variáveis como o número de tábuas utilizadas, a quantidade de consultas com e sem interpolação, o número de operações aritméticas (somas ou subtrações) e o número de algarismos envolvidos em cada etapa do processo.

Método do ângulo horário	Peso	Norie	Banhos
Número de tábuas	2	5	5
Consultas a tábuas com interpolação	5	4	0
Consultas a tábuas sem interpolação	3	6	10
Número de operações	4	16	14
Número de algarismos	4	314	277
Total		1358	1194

TABELA 4.1: Avaliação do método do ângulo horário

Método de Marcq Saint-Hilaire	Peso	Norie	Banhos
Número de tábuas	2	10	8
Consultas a tábuas com interpolação	5	5	0
Consultas a tábuas sem interpolação	3	11	13
Número de operações	4	22	20
Número de algarismos	4	362	317
Total		1594	1387

TABELA 4.2: Avaliação do método de Marcq Saint-Hilaire

Com base nos dados apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2, é possível concluir que as tábuas de Lopes Banhos se destacam pela sua estrutura mais prática e acessível, quando comparadas com as tábuas de Norie. Em ambos os contextos analisados, as tábuas de Lopes Banhos apresentaram valores totais mais baixos, refletindo menor número de operações e uma manipulação mais simples dos dados numéricos.

Apesar de ambas recorrerem a um número semelhante de tábuas, a organização sequencial e funcional das Tábuas de Lopes Banhos, com valores tabulados de forma direta e reduzida necessidade de interpolação, facilita a sua utilização prática. A utilização de números mais simples, normalmente de quatro dígitos, reduz também o risco de erro e contribui para uma maior eficiência na execução dos cálculos.

Esta comparação evidencia que as Tábuas de Norie oferecem uma abordagem matemática mais rigorosa e detalhada, mas exigem mais operações, mais

consultas a diferentes tábuas, e maior familiaridade com logaritmos e interpolação. Já as Tábuas de Lopes Banhos foram concebidas para reduzir o número de operações, sendo mais acessíveis, rápidas e eficientes, com estrutura algorítmica simplificada e foco na aplicabilidade prática.

Em síntese, a análise permite afirmar que, do ponto de vista prático e funcional, as Tábuas de Lopes Banhos constituem uma ferramenta mais eficiente e adequada à navegação astronómica quotidiana, proporcionando resultados fiáveis com menor esforço técnico e maior rapidez de execução.

4.3 Comparação da Precisão

Com o intuito de avaliar e comparar a precisão das tábuas de J. E. Lopes Banhos e de John William Norie, recorreu-se à criação de um ficheiro Excel. Neste ficheiro, foram implementadas as fórmulas para o cálculo da longitude pelo método do ângulo horário de ambos os autores, com base na metodologia descrita na obra de Ortigão, *Guia de Navegação*.

Convém salientar que esta análise foi motivada pela diferença no número de casas decimais utilizadas nos logaritmos: as tábuas de Norie recorrem a mais algarismos do que as de Lopes Banhos. Essa discrepância pode influenciar a precisão dos resultados. Por essa razão, na elaboração do ficheiro Excel, os logaritmos foram arredondados ao número de algarismos adoptado por cada autor, de forma a assegurar a comparabilidade entre os cálculos.

O ficheiro foi desenvolvido com base nos passos apresentados no Capítulo 4.1.1. Os cálculos seguiram as etapas descritas até à obtenção do ângulo horário. Posto isto, calculou-se a equação do tempo para obter a longitude.

Para Norie, utilizou-se a seguinte fórmula:

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}P\right) = \sec l \cdot \cos S \cdot \sin(S - A) \cdot \operatorname{cosec} \Delta$$

Devido à limitação do Excel em calcular a função $\operatorname{cosec} \Delta$, substituiu-se $\operatorname{cosec} \Delta$ por $\frac{1}{\sin \Delta}$. Assim, a fórmula torna-se:

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}P\right) = \frac{\sec l \cdot \cos S \cdot \sin(S - A)}{\sin \Delta}$$

Aplicando os logaritmos à fórmula, temos:

$$\log \left(\sin^2 \left(\frac{1}{2}P \right) \right) = \log \sec l + \log \cos S + \log \sin(S - A) - \log \sin \Delta$$

Como $\sin^2 \left(\frac{1}{2}P \right) = \frac{1 - \cos P}{2}$, a fórmula para calcular o ângulo horário será:

$$P = \arccos \left(1 - 2 \cdot 10^{\log \sec l + \log \cos S + \log \sin(S - A) - \log \sin \Delta} \right)$$

Após ter sido desenvolvida a fórmula e calculada a soma dos logaritmos, definiu-se quatro equações para determinar a longitude:

1. Equação 1 – Cálculo do ângulo horário:

$$P = \arccos \left(1 - 2 \cdot 10^{\text{soma dos logaritmos}} \right)$$

2. Equação 2 – Conversão do ângulo horário em tempo:

$$\text{Tempo em horas} = \frac{P}{15}$$

3. Equação 3 – Cálculo da longitude:

Se $T < 13$ h, então:

$$\text{Longitude (h)} = T - (12 - P + \text{equação do tempo})$$

4. Equação 4 – Conversão da longitude para graus:

$$\text{Longitude (graus)} = \text{Longitude (h)} \times 15$$

Para Lopes Banhos utilizou-se a seguinte fórmula:

$$2 \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{2}P \right) = \sec l \cdot \sec d \cdot [\cos(l \pm d) - \sin A]$$

Aplicando os logaritmos, temos que:

$$2 \cdot \log \sin^2 \left(\frac{1}{2}P \right) = \log \sec l + \log \sec d + \log (\cos(l \pm d) - \sin A)$$

E a fórmula resolvida para P :

$$P = \arccos \left(1 - 10^{(\log \sec l + \log \sec d + \log(\cos(l \pm d) - \sin A))} \right)$$

As equações utilizadas foram as mesmas que Norie, diferenciando apenas na primeira equação:

$$P = \arccos \left(1 - 10^{\text{soma dos logaritmos}} \right)$$

4.3.1 Tratamento de Dados

Para esta análise comparativa, foram consideradas 27 observações realizadas em 2021 e 28 em 2022, totalizando 55 observações. Todos os dados foram tratados e organizados nas folhas de cálculo, o que permitiu uma avaliação rigorosa dos erros resultantes da aplicação de cada uma das fórmulas.

Em termos de cálculo, para o caso das fórmulas de Norie, recorreu-se ao uso de logaritmos com seis casas decimais, permitindo uma maior resolução numérica. Já para as fórmulas de Lopes Banhos, os cálculos foram realizados com apenas quatro casas decimais, o que, embora indique uma menor precisão teórica, reflete a preocupação do autor com a aplicabilidade prática e a simplicidade dos cálculos.

Posto isto, foi feita uma análise dos erros resultantes da aplicação das fórmulas de ambos os autores, tendo como referência os valores reais conhecidos. O principal intuito desta comparação foi, portanto, identificar quais dos métodos apresentava menor margem de erro e, conseqüentemente, maior fiabilidade em contexto de navegação prática.

Aplicação as fórmulas de Norie		
Intervalo de erro	#	%
$0 < \text{erro} < 5$	43	78
$5 \leq \text{erro} < 10$	10	18
$10 \leq \text{erro} < 15$	2	4
$15 \leq \text{erro} < 22$	0	0
Total	55	100

TABELA 4.3: Resumos dos resultados para a fórmula de Norie.

Como se pode observar nas Tabelas 4.3 e 4.4, os erros obtidos são idênticos. Os resultados demonstram que, embora Norie utilize valores mais extensos e, teoricamente, mais rigorosos, Lopes Banhos apresenta um desempenho notavelmente satisfatório. Com apenas quatro casas decimais, os erros foram reduzidos e

Aplicação das fórmulas de Lopes Banhos		
Intervalo de erro	#	%
$0 < \text{erro} < 5$	43	78
$5 \leq \text{erro} < 10$	10	18
$10 \leq \text{erro} < 15$	2	4
$15 \leq \text{erro} < 22$	0	0
Total	55	100

TABELA 4.4: Resumos dos resultados para a fórmula de Lopes Banhos.

consistentes ao longo das observações, revelando uma maior clareza estrutural nos seus cálculos. Em diversos casos, os resultados de Lopes Banhos revelaram-se mais próximos do valor real do que os de Norie, o que reforça a eficácia prática das suas fórmulas.

Desta forma, a presente comparação não só permitiu validar a utilidade das tábuas de Lopes Banhos como também demonstrar que, apesar de uma menor sofisticação matemática, a sua abordagem é suficientemente rigorosa para aplicações reais e representa uma solução eficaz e confiável para o cálculo do ponto astronómico.

Conclusão

A presente dissertação teve como principal objetivo o estudo das *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* de J. E. Lopes Banhos, procurando compreender o contexto histórico e técnico da obra, a sua estrutura interna, os fundamentos matemáticos subjacentes e, sobretudo, a sua utilidade prática na navegação astronómica no final do século XIX. Neste sentido, foram exploradas as origens e a evolução dos métodos de navegação astronómica, com especial atenção à determinação da latitude e da longitude, bem como à utilização de instrumentos e tábuas que permitiram uma navegação cada vez mais precisa e rigorosa.

Numa primeira fase, abordou-se a evolução da navegação astronómica desde os seus primórdios até à sua consolidação como ciência. Exploraram-se os métodos empíricos utilizados na Antiguidade e na Idade Média, como o rumo e estima, passando pela introdução da agulha magnética, das cartas-portulano e, mais tarde, dos instrumentos de medição como o astrolábio, o quadrante e o sextante. A introdução do cálculo da latitude pela altura meridiana, bem como das observações extrameridianas, permitiu alcançar maior precisão. Estas inovações revelaram-se essenciais no contexto das grandes navegações e estabeleceram as bases para o desenvolvimento posterior da navegação astronómica.

Neste cenário de desenvolvimento técnico e científico, as tábuas náuticas assumiram um papel determinante. A navegação astronómica exigia cálculos complexos de trigonometria esférica que, em ambiente marítimo, se tornavam difíceis de executar com rigor. Assim, a compilação de tábuas com valores previamente calculados tornou-se uma ferramenta indispensável para o cálculo da longitude.

As *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo* distinguem-se por uma organização metódica, pela clareza da apresentação e pela abrangência dos dados. Embora não introduzam qualquer inovação científica de base, estas tábuas representam uma racionalização eficiente de fórmulas conhecidas, reorganizadas para minimizar o número de operações a bordo e tornar o cálculo mais acessível aos navegantes. A sua conceção reflete um conhecimento profundo das necessidades operacionais da navegação e uma atenção minuciosa à aplicabilidade prática.

Numa segunda fase, as tábuas foram aplicadas a casos práticos, que sistematizou os cálculos e permitiu uma análise comparativa de precisão. A primeira comparação, incidiu sobre a resolução de problemas pelo método do ângulo horário e pelo método de Marcq Saint-Hilaire, aplicando ambas as tábuas. Esta análise demonstrou a adequação das tábuas de Lopes Banhos à resolução de problemas complexos no triângulo de posição e à determinação rigorosa da posição. A segunda comparação teve por base a precisão numérica, avaliando o impacto do número de casas decimais utilizadas em cada conjunto de tábuas, com recurso a um ficheiro Excel. Esta abordagem evidenciou diferenças significativas entre os métodos, permitindo aferir a exatidão dos resultados produzidos.

A comparação revelou que, embora ambas as tábuas assentem em fundamentos semelhantes, as tábuas de Lopes Banhos apresentam certas vantagens estruturais, como maior clareza e aplicabilidade prática, que facilitam o uso e ampliam o seu alcance prático.

Face aos objetivos propostos, considera-se que esta dissertação cumpriu integralmente os objetivos definidos. Foi possível compreender a evolução da navegação astronómica, reconhecer o papel das tábuas náuticas na simplificação dos cálculos a bordo e, em particular, destacar o valor das tábuas de Lopes Banhos para a navegação astronómica. A comparação com outra tábua do período permitiu enquadrar historicamente a sua produção e avaliar criticamente as suas qualidades e limitações.

Como proposta de desenvolvimento futuro, sugere-se a extensão da análise a um conjunto mais alargado de tábuas, como as de Nunes da Mata, Martelli ou Bowditch, com vista a aprofundar o estudo comparativo e a caracterização das diferentes abordagens para resolver o triângulo de Posição. Seria igualmente pertinente aplicar as tábuas de Lopes Banhos em simulações com observações reais recolhidas em diferentes latitudes e épocas do ano, por forma a testar o seu desempenho em outros contextos.

Conclui-se assim, que as tábuas de Lopes Banhos, apesar de não introduzirem inovação científica propriamente dita, representam um importante marco na prática da navegação astronómica, destacando-se pela sua utilidade operacional e clareza metodológica. O presente estudo contribuiu, deste modo, para o reconhecimento do valor histórico e técnico desta obra, e abre caminhos para investigações futuras, nomeadamente a análise de outras tábuas e a extensão da aplicação a diferentes latitudes e condições de navegação.

Bibliografia

- Albuquerque, Luís de. «Determinação de Latitude pela Estrela Polar». Em *Estudos de História Volume III*, 60–204. Universidade de Coimbra, 1975.
- Banhos, J. E. Lopes. *Taboas para o Cálculo da Hora a Bordo*. 228. Lisboa: Imprensa Nacional, 1897.
- Canas, António Costa. «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal | Contributo de Monteiro da Rocha». Em *Arte de Navegar / Nautical Science 1400–1800*, 273–274. Coimbra: Sítio do Livro, Lda, 2014.
- . *Naufrágios e Longitude*. 13–87. Lisboa: Comissão Cultural da Marinha, 2003.
- Domingues, Francisco Contente. «A Arte de Navegar». Em *História da Marinha—Navios, Marinheiros e Arte de Navegar 1500–1668*, 318–335. Lisboa: Academia de Marinha, 2012.
- Gameiro, Azevedo e. *Manual de Navegação*. Edição dos Autores, 1959.
- Horta, Gonçalo Miguel Rebelo. «Ponto Astronómico pelo Método Marcq Saint-Hilaire: Desenvolvimento de uma Ferramenta de Cálculo do Ponto». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2020.
- Leitão, João Peregrino. *Guia Náutica*. Lisboa: Da Sociedade Typographica Franco Portuguesa, 1865.
- Norie, J. W. *A Complete Epitome of Practical Navigation*. London: Published by William Heather, Navigation Warehouse, 1835.
- Ortigão, Antonio de Macedo Ramalho. *Guia de Navegação*. Lisboa: Imprensa Nacional, 1905.
- Pedrosa, Fernando Gomes. «A Arte de Navegar». Em *Navios, Marinheiros e Arte de Navegar 1139–1499*, 273–274. Lisboa: Academia de Marinha, 1997.

- Pires, António Rosa. «A Navegação em Portugal em meados do século XIX». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2021.
- Pires, Jorge Oliveira de Jesus. «Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol: Evolução Histórica do Processo». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2021.
- Queirós, Ana Filipa Teorgas. «A Navegação Astronómica antes do Método Marcq Saint-Hilaire: Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2022.
- Trigo, João Tomás Ramalho Pires. «Cálculo da Posição pelo Método de Sumner». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2024.
- Zaikin, Oleksandr. «Biografia de José Nunes da Matta». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, 2019.