EDUCAÇÃO

ESCOLA SUPERIOR
POLITÉCNICO SETÚBAL

CATARINA FILIPA
REIS MENINO

O RECURSO A MODELOS CIRCULARES E RETANGULARES PARA APRENDER FRAÇÕES: UM ESTUDO NO 6.º ANO

Relatório do Projeto de Investigação do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

ORIENTADOR

Professora Doutora Célia Maria Martins Vitorino Mestre

Dezembro de 2024

CATARINA FILIPA
REIS MENINO

O RECURSO A MODELOS CIRCULARES E RETANGULARES PARA APRENDER FRAÇÕES: UM ESTUDO NO 6.º ANO

JÚRI

Presidente: Professora Especialista Maria Teresa Elvas de Matos, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Orientador: Professora Doutora Célia Maria Martins Vitorino Mestre, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Arguente: Professora Doutora Joana Filipa Oliveira Cabral, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal

Dezembro, 2024

Agradecimentos

Chega ao fim mais uma etapa desafiadora da minha vida, na qual alcancei desafios e sonhos. Ao longo deste meu percurso várias pessoas me proporcionaram bons momentos e me acompanharam e que não posso deixar de agradecer.

Em primeiro lugar quero agradecer à minha família, à minha mãe e ao meu pai, que me proporcionaram a oportunidade de estudar fora da minha terra natal, à minha irmã pela paciência nos momentos de stress e ansiedade. Foi graças a vocês que consegui concluir este mestrado e este relatório.

À minha amiga e parceira de estágio, Maria, pela parceria ao longo destes dois anos desafiantes, pela paciência em todos os momentos importantes na faculdade, nos estágios e na vida pessoal, por me aconselhar e por estar sempre ali.

À minha orientadora, a Professora Célia Mestre, por toda a dedicação e paciência, pelo tempo que me despendeu para me ajudar.

Às minhas amigas da zumba, que sempre estiveram lá quando precisei de desabafar e libertar energia. Em especial à minha querida professora Elídia que sempre me fez acreditar no meu valor e nas minhas capacidades.

À minha professora cooperante, Elisabete, pela oportunidade de realizar o meu Projeto de Investigação na sua turma e por todo o apoio disponibilizado para organizar as tarefas realizadas.

Aos alunos da turma onde realizei o meu Projeto de Investigação, pela colaboração, empenho, dedicação, por me fazerem crescer a nível pessoal e profissional.

A todas as pessoas que passaram pela minha vida ao longo deste Mestrado e me aconselharam, ajudaram e pelos momentos partilhados ao longo das aulas, estágios e apresentações.

À minha amiga Nathaly, que conheci na minha Licenciatura na Universidade da Madeira e que se tornou um grande apoio a nível emocional, mas também a nível académico, pela partilha de experiências e materiais ao longo destes dois anos.

Às minhas amigas, Vânia e Catarina, que me aconselharam em todos os momentos em que precisei.

A todas as pessoas que acreditaram e acreditam no meu potencial como professora e me disseram “Tu consegues!”.

Obrigada!

Resumo

Este estudo centra-se no tópico das frações, nomeadamente, nas frações equivalentes, na adição de frações com o mesmo denominador e na multiplicação de frações. O principal objetivo do estudo é compreender se o uso dos modelos circulares e retangulares contribui para a aprendizagem das frações dos alunos de uma turma de 6.º ano de escolaridade.

A fundamentação teórica centra-se em quatro aspetos: conceito de fração, utilização de modelos circulares e retangulares físicos e digitais, aprendizagem de frações e o ensino exploratório, focando no papel do aluno e do professor.

A metodologia aplicada neste estudo é de natureza qualitativa, caracterizando-se por uma investigação sobre a prática. Na intervenção pedagógica foram propostas aos alunos três tarefas com recurso a modelos circulares e retangulares, físicos e digitais. Os dados foram recolhidos através das produções dos alunos e das discussões em grande e foram analisados através a análise de conteúdo.

Os resultados do estudo apontam para a importância dos modelos circulares e retangulares, evidenciando que estes possibilitaram aos alunos resolverem as tarefas utilizando estes materiais.

Ao longo das tarefas foi notório a importância dos modelos circulares e retangulares na resolução das mesmas. Foi possível verificar que o uso destes modelos apoiou a aprendizagem dos alunos, bem como as suas dificuldades, tornando-se um suporte à aprendizagem das frações.

Com estas tarefas compreendi que o uso de modelos circulares e retangulares apoiou os alunos nas tarefas realizadas, tendo sido uma mais-valia para as suas aprendizagens.

Palavras-chave: Frações, aprendizagem, modelos circulares, modelos retangulares; representações.

Abstract

This study focuses on the topic of fractions, namely, equivalent fractions, the addition of fractions with the same denominator and the multiplication of fractions. The main objective of the study is to understand how the use of circular and rectangular models contributes to the learning of fractions by students in a 6th year school class.

The theoretical foundation focuses on four aspects: concept of fraction, use of physical and digital circular and rectangular models, how to teach fractions and exploratory teaching, focusing on the role of the student and the teacher.

The methodology applied in this study is qualitative in nature, characterized by an investigation into practice. In the pedagogical intervention, students were proposed three tasks using circular and rectangular, physical and digital models. Data was collected through student productions and large discussions and was analyzed using content analysis.

The results of the study point to the importance of circular and rectangular models, showing that they enabled students to solve tasks using these materials.

Throughout the tasks, the importance of circular and rectangular models in solving them was clear. It was possible to verify that the use of these models supported the students' learning, as well as their difficulties, becoming a support for learning fractions.

With these tasks, I understood that the use of circular and rectangular models supported students in the tasks performed, having been an added value to their learning.

Keywords: Fractions, learning, circular models, rectangular models; representations.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

O presente Relatório de Projeto de Investigação tem como foco o contributo do uso de modelos circulares e de modelos retangulares na aprendizagem das frações de alunos do 2.º ciclo, nomeadamente do 6.º ano. O principal objetivo desta investigação é compreender se o uso dos modelos circulares e retangulares, físicos e digitais, contribui para a aprendizagem do tópico frações dos alunos de uma turma de 6.º ano de escolaridade. Este objetivo define-se nas questões de investigação seguintes:

Em que medida o uso de modelos circulares e retangulares na exploração:

i. apoia as aprendizagens dos alunos?;
ii. ajuda a ultrapassar as dificuldades dos alunos?

Neste sentido serão explorados os modelos circulares e retangulares, nos formatos físico e digital, em tarefas com frações com o objetivo de compreender se a sua utilização apoia os alunos na realização das tarefas, contribuindo para a sua aprendizagem e para ultrapassarem dificuldades.

A escolha deste tema para o meu projeto de investigação numa turma de 6.º ano deve-se ao facto da escolha dos recursos a utilizar em sala de aula ser algo que tem de ser bem pensado pelo professor de modo a proporcionar uma melhor aprendizagem aos alunos. Desta forma, permitiu-me refletir sobre quais os melhores recursos a adotar para promover aprendizagens e motivar os alunos a aprenderem matemática. O facto de escolher a área da matemática prende-se com o meu gosto pela disciplina, embora o meu percurso enquanto aluna tenha sido um pouco atribulado, não sentindo motivação para a disciplina e fazendo-me percecionar a matemática como "um bicho de sete cabeças". Neste sentido, é importante, do meu ponto de vista, motivar os meus futuros alunos para aprenderem matemática de forma dinâmica e ativa e tornar o processo de ensino-aprendizagem muito mais desafiador e significativo. A minha escolha relativamente ao contexto deve-se, principalmente, ao meu gosto pelo 2.º ciclo, visto que pretendo lecionar neste ciclo. O facto desta investigação ser realizada numa turma de 6.º ano assume-se ainda mais desafiador, pois os alunos já trazem consigo conhecimentos adquiridos no 1º Ciclo que é importante ter em consideração.

Tendo em conta esta minha perceção sobre a importância dos recursos que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem, comecei por considerar a escolha de um tópico que pudesse estar a ser explorado no momento do estágio curricular e, naturalmente, o tópico das frações assumiu particular relevância por ser um tópico que nem sempre é fácil para os alunos e no qual, muitas vezes, surgem dificuldades de aprendizagem. Perante a escolha do tópico que iria incidir o foco do meu trabalho de investigação, inventariei um conjunto de recursos que poderiam ser úteis. Desta forma, e de modo quase imediato, os modelos circulares e retangulares pareciam recursos incontornáveis na exploração do tópico das frações. Escolhidos esses recursos optei ainda por usá-los nos formatos físico e digital, considerando que ambos os formatos poderiam trazer contributos para a aprendizagem dos alunos.

Portanto, o tema desta investigação baseia-se no uso de modelos circulares e de modelos retangulares na aprendizagem das frações por alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico, mais especificamente do 6.º ano de escolaridade. Neste sentido, pretendo compreender se o uso destes modelos contribuiu para a aprendizagem dos alunos.

Segundo Moraes (1959) citado por Camacho (2012), "o homem primitivo deve ter usado os objectos que estavam a seu redor para registar informação e representar (sinalizar) os dados importantes. Seixos, varas, dedos das mãos e dos pés foram, provavelmente, os primeiros materiais manipuláveis utilizados"(p. 24). Desta forma, de acordo com Reys (1996) citado por Camacho (2012), os materiais manipuláveis são "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia" (pp. 24-25).

De uma forma geral, os modelos circulares e retangulares podem ser considerados como recursos que podem ser explorados em sala de aula com a finalidade de auxiliarem na compreensão dos conceitos, nomeadamente os envolvidos na construção do conceito de número racional na representação de fração, ao permitirem tornar mais concreto esses conceitos mais abstratos.

Na visão de Jardinetti (1997), o abstrato é visto como "algo difícil de ser assimilado na medida em que se traduz por um vínculo não imediato com a realidade." (p. 2). Já o concreto pode ter duas interpretações, podendo ser visto como algo em que são usados materiais concretos associados a atividade em que este material seja manipulado, ou ser associado ao quotidiano. (Jardinetti, 1997)

A exploração de modelos circulares e retangulares por parte do aluno pode promover "uma dimensão construtivista" (Botas, 2008, p. 12) ao permitir ao aluno a construção dos seus conhecimentos de forma ativa. Para além disso, o professor deve promover contextos de aprendizagem em que "os alunos interajam entre si, comunicando e partilhando ideias, de forma rica e diversificada, proporcionando experiências significativas na sala de aula." (Facchi, 2022, p. 23).

Como já referi, no meu estudo utilizei modelos circulares e modelos retangulares, em formato físico e digital, de modo a promover a aprendizagem dos alunos no tópico frações. De acordo com Lesh et al. (1987, citado por Ventura, 2013), os modelos

> podem emergir com maior facilidade se o conhecimento do aluno for organizado em torno de situações reais, baseadas no quotidiano, que serviram como contextos gerais para a interpretação e resolução de vários tipos de situações problemáticas, conduzindo-os ao processo da matematização. (p. 68)

Neste sentido, a utilização destes materiais pode ser uma mais-valia para os alunos, pois pode permitir-lhes explorar fisicamente e digitalmente o conteúdo a trabalhar, neste caso, as frações. Silva (2021) afirma que numa aula é necessário que o professor tenha presente a ideia de como irá implementar o seu plano de trabalho, "definindo criteriosamente as suas estratégias, recursos a serem utilizados, bem como as metodologias a serem implementadas, que permitam alcançar os objetivos de aprendizagem definidos" (p. 26). O mesmo autor acrescenta que

> Pensar em cada uma das aulas a implementar, e quais os recursos que podem ser utilizados, para uma maior implicação dos alunos nas atividades desenvolvidas, e que, estes, sejam geradores de um ambiente mais propício à aprendizagem, é realmente um grande desafio. (p. 27)

CAPÍTULO 1

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1. Conceito de fração

Lamon (2007), citado por Ventura (2013) invoca para a importância de que "“fração” e “número racional” não são sinónimos, e que se deve pensar nas frações como “uma representação possível dos números racionais” (p. 40). Behr et al. (1992, citado por Ventura, 2013) consideram que os números racionais são “elementos de um campo infinito de quocientes que consiste em classes de equivalência” e ainda que “os elementos dessas classes de equivalência são frações” (p. 40).

De acordo com Feteira (2012) o conceito de número racional pode ter vários significados, tais como os significados: parte-todo, quociente, razão e operador. No que concerne à relação parte-todo, há uma comparação entre a parte e o todo, que remete para a unidade. Neste sentido, Ventura (2013) considera que “a fração representa uma comparação entre o número de partes da unidade fragmentada que se toma (numerador) e entre o número total de partes em que a unidade foi dividida (denominador).” (p. 42) Relativamente ao significado de quociente, este surge em situações de partilha equitativa em que a fração representa o quociente entre dois números, isto é, “uma relação entre duas quantidades, o numerador indica o número de coisas a ser partilhado e o denominador o número de receptores dessa partilha”. (Feteira, 2012, p. 8). Já no que diz respeito ao significado de operador multiplicativo, a autora refere que “No caso de uma figura, a fração tem o efeito de redução ou de ampliação. Aqui o denominador indica uma divisão e o numerador uma multiplicação.” (Feteira, 2012, p. 8). Por último, o significado de razão “estabelece uma relação comparativa entre duas partes de um mesmo todo ou entre duas grandezas diferentes dando origem a outra grandeza.” (Feteira, 2012, p. 9).

Ainda que haja estes diferentes significados, e de acordo com Cardoso e Mamede (2015),

> Apesar da diversidade de classificações existente sobre as interpretações de frações, em todas se encontram os significados parte-todo, quociente e operador. Na interpretação parte-todo, o denominador designa o número de partes iguais em que o todo foi dividido e o denominador designa o número dessas partes consideradas. (p. 1)

Também Mestre e Gonçalves (2022) referem que “Uma fração representa a divisão de uma unidade em partes iguais” (p. 36). Ambos os autores referem que a fração representa uma parte de um todo, ou seja, uma parte de uma unidade.

Ainda no que concerne ao significado de fração, Merlini (2005), refere que “a fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, sendo essa abordagem a mais encontrada nos livros didáticos.” (p. 11) Ou seja, o numerador indica o número de partes que pretendemos e o denominador o número total de partes. Para além disso, Druck (2005) afirma que, “em linguagem corrente, a palavra “fração” significa “pedaço”, “porção” (de alguma coisa), o verbo “fracionar” refere-se a “partir”, “quebrar” ou “dividir” (algo).” (p. 1).

Os autores Pirie, Martin & Kieren (1994), citados por Ventura (2013), abordam um aspeto interessante que diz respeito às conceções dos alunos sobre o que é uma fração. Para estes autores,

> quando se pergunta aos alunos “O que é uma fração?”, as respostas são as mais variadas: “uma quantidade dividida por outra quantidade” (noção de divisão); “uma secção de uma coisa inteira” (noção de parte-todo); “um número que não foi escrito sob a forma de decimal” (noção de número) e “um número debaixo de outro número” (noção da forma de escrever). (p. 41)

É importante que os alunos compreendam que as partes divididas de um todo, devem ser exatamente iguais e que associem corretamente as relações parte-todo. Desta forma, devem reconhecer que:

> as partes, todas juntas, devem perfazer o todo, quanto mais o todo é dividido, mais pequenas as partes se tornam, e a relação entre as partes e o todo é conservada, independentemente do tamanho, da forma, do arranjo, ou da orientação das partes equivalentes. (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006, p. 296)

Por outro lado, Ventura (2013) refere que a noção de fração equivalente é importante para os alunos, pois é essencial que estes compreendam que, por exemplo, $\frac{3}{6}$

e $\frac{1}{2}$ representam a mesma quantidade.

1.2. Modelos circulares e retangulares físicos e digitais

Considerando os recursos dos modelos circulares e retangulares como manipuláveis, no sentido da exploração que os alunos fazem deles, é importante considerar a definição de materiais manipuláveis e, ao longo dos anos, este conceito de materiais manipuláveis tem sido abordado por diversos autores. De acordo com Rodrigues e Gazire (2012):

> Os materiais didáticos manipuláveis (MD) constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa. (p. 188)

Estes autores referem que os materiais manipuláveis podem ser muito importantes no processo de ensino-aprendizagem, pois tornam as aulas dinâmicas e permitem relacionar a teoria com a prática. Mais concretamente no que respeita aos modelos circulares e retangulares como recursos, podemos considerar, de acordo com o Abecedário da Educação (2019), que "os setores circulares podem facilitar a compreensão da representação de números escritos desta forma, nomeadamente na exploração do significado "parte de um todo" associado à noção de fração." A mesma fonte refere que este tipo de material é adequado para compreender o conceito de fração e de fração equivalente, assim como comparar frações.

A partir da utilização destes materiais a cultura de sala de aula também pode ser transformada pela positiva, pois "verifica-se uma maior partilha e a troca de ideias entre os alunos, contemplando-se um desenvolvimento crescente a nível da criatividade, da experimentação e da comunicação entre os mesmos." (Camacho, 2012, pp. 25-26).

Por outro lado, considerando que estes modelos são também formas de representação, de acordo com Flores (2002, citado por Ventura, 2013) devem ser explorados na sua diversidade:

> "Os diferentes modelos de representação são também importantes no

desenvolvimento do sentido da operação, mas para que os alunos os consigam compreender, têm de trabalhar com a sua diversidade – físicos, pictóricos, esquemáticos, verbais e simbólicos" (p. 19).

Considerando os modelos circulares na aprendizagem das frações, Soares e Silva (2018) referem que

> o uso dos Discos de Frações pode contribuir para a compreensão do conceito de fração associado à ideia de parte de um todo [...] dando sentido ao denominador para que os alunos entendam a sua função e possam até mesmo evitar representar as frações com os termos invertidos, realizando trocas entre o numerador com o denominador. (p. 9).

Ventura (2013) acrescenta ainda que "Um outro modelo bastante referido na literatura sobre os números racionais é o modelo de área retangular. Este parece ser um recurso com bastantes potencialidades para a multiplicação e divisão de números racionais" (p. 75).

Considera-se, então que as representações são fundamentais para a aprendizagem das frações, pois podem possibilitar aos alunos a visualização do conceito de fração, bem como a ligação com a respetiva representação. De um modo geral estas representações permitem que os alunos explorem o concreto e não apenas o abstrato.

Desta forma, tanto os modelos circulares, como os modelos retangulares, podem ser importantes para a compreensão das frações, nomeadamente, das frações equivalentes e das operações com frações.

1.3. Aprendizagem de frações

Considerando que a forma de ensinar as frações pode relacionar-se diretamente com as aprendizagens dos alunos, é importante o professor considerar as diversas estratégias de ensino e selecionar aquela ou aquelas que melhor respeitam os alunos a que se destinam.

De acordo com Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999) "A ampliação do conceito de número racional é um dos aspectos centrais do desenvolvimento da competência matemática dos alunos ao longo da educação básica." (p. 48). Já Alexandre (2022) refere que “é importante pensar em novas práticas e métodos que proporcionem ao aluno a compreensão deste conteúdo.” (p. 16).

Considerando os materiais manipuláveis, Facchi (2022) considera que “são inseridos nas aulas com a finalidade de que o aluno possa formar e apropriar-se de conceitos e, para isso é necessário que se apresente metodologias diversificadas que motive os educandos a participarem ativamente do processo educacional” (p. 21).

Para Santos (2014), citado por Camargo, Mota, Sakuno & Silva (s.d.), quando os professores “persistem em uma metodologia mais antiga onde só se aplica atividades no quadro”, a aprendizagem dos alunos é dificultada e as aulas são maçadoras tanto para o aluno como para o professor, sendo “indispensável que o professor repense sua metodologia de ensino. (p. 593)

Deste ponto de vista ressalto a importância de modificar os materiais utilizados em sala de aula para abordar um conteúdo, dinamizando as aulas, promovendo aos alunos uma aprendizagem mais exploratória. Para Silva e Perovano (2012),

> O ensino do conceito de frações e o desenvolvimento da conservação de quantidades, bem como a habilidade em resolver problemas que envolvam os números racionais em geral, são muito importantes, e exigem do professor habilidades para facilitar a aprendizagem do aluno. No entanto, em sala de aula, cabe ao professor evitar o ensino desse conceito de forma mecânica, em que se busca apenas a memorização de regras e aplicação direta de técnicas. (p. 2)

Deste modo, quando estamos a trabalhar um conteúdo temos de ter em conta as dificuldades dos alunos, bem como os objetivos que se pretendem atingir, utilizando estratégias diversificadas.

No que diz respeito às operações com números racionais, Graça, Ponte & Guerreiro (2022) referem a importância das tarefas contextualizadas.

> A abordagem às operações com números racionais deve permitir o envolvimento dos alunos em tarefas contextualizadas, que os conduzam à construção e compreensão dos algoritmos, e não apenas à assimilação de regras operatórias, e que contribuam para o desenvolvimento do seu sentido de número racional e sentido de operação, dois importantes objetivos de aprendizagem. (p. 2).

Também Pereira e Zuniga (2014), citado por Miranda, Rocha & Pereira (2021), destacam que para que os alunos possam aprender operações com frações num "sentido mais amplo de significados, representações e aplicações", o professor deve "planejar sequências de atividades de forma sistêmica viabilizando práticas didáticas motivadoras que aproximem os estudantes e mobilizem os conhecimentos matemáticos" (p. 3).
Bertoni (2004) corrobora a dificuldade associada ao tópico das frações, referindo que "O tema frações tem sido apontado pelos professores como um dos mais problemáticos na aprendizagem da matemática das séries iniciais." (p. 1). De facto, os alunos podem apresentar dificuldades nas operações envolvendo números racionais em forma de fração, embora na adição e subtração de frações com denominadores iguais, raramente apresentem dificuldades, quando os denominadores são diferentes, essas dificuldades já podem ser notórias. Como corrobora Druck (2005), "A questão é um pouco mais difícil quando aos denominadores são diferentes, ou seja, os pedaços que as frações representam não são de mesma medida." (p. 8). No que respeita às operações de multiplicação e divisão com frações, podem denotar-se "dificuldades conceituais importantes (...) pois os significados que os alunos já trazem, associados a tais operações, não mais fazem sentido no contexto das frações." (Druck, 2005, p. 9). Muitas vezes, os alunos aplicam regras que não compreendem e, tal como refere Druck (2005) "Atribuir significado à regra usual do "multiplica em cima e em baixo" me parece possível, porém mais difícil. (p. 13).

1.4. O ensino exploratório - o papel do professor e do aluno

Uma aula de carater exploratório é dividida em três ou quatro fases, o lançamento da tarefa, a exploração da tarefa pelos alunos e a fase de discussão. (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2008). Na primeira etapa há a apresentação da tarefa, na qual, o professor apresenta uma questão que deve ser interpretado e investigado pelos alunos. De seguida, na segunda etapa, o professor procura apoiar os trabalhos que estão a ser desenvolvidos, garantindo que todos os alunos estão a participar na tarefa. Neste momento, o professor deve ir dando feedback aos grupos de forma que estes compreendam as estratégias que estão a utilizar para resolver a questão em que estão a trabalhar. O professor deve também incentivar a discussão de ideias entre os alunos, de forma que os mesmos compreendam diversas estratégias para desenvolver uma tarefa, sendo esta fase designada de discussão. Ao longo deste apoio por parte do professor, este avalia os trabalhos dos alunos e deve planear de que forma serão realizadas as exposições dos trabalhos. Posto isto, deve ocorrer, então, a discussão coletiva do que foi realizado em cada grupo de trabalho. (Stein et al, 2008).

Para além destes aspetos, a natureza interativa do ensino exploratório, que envolve o professor e os alunos “é uma marca distintiva do ensino exploratório.” (Oliveira, Menezes & Canavarro,2013, p. 31). Neste sentido, Tapparello e Richit (2024) consideram a importância da “discussão de estratégias de resolução e representações, bem como a sua adequação em diferentes situações”, referindo que isso possibilita “a ampliação do conhecimento das várias formas de resolver os problemas." (p. 19).

Segundo Oliveira, Menezes & Canavarro (2013), o ensino exploratório distingue-se do ensino mais tradicional “pelos papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos, pelas tarefas que são propostas e a forma como são geridas, e pela comunicação que é originada na aula”. (p. 31). Assim, e ao contrário do ensino tradicional, no ensino exploratório, “a ênfase desloca-se da atividade ‘ensino’ para a atividade mais complexa ‘ensino-aprendizagem’” (Ponte, 2005, p. 13).

CAPÍTULO 2

2. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

No decorrer deste capítulo serão apresentados: o objetivo do estudo e as questões de investigação; o tipo de metodologia utilizada, no caso do meu projeto, a investigação qualitativa e investigação sobre a prática; as técnicas de recolha de dados, nomeadamente a recolha documental e a observação; e por fim as técnicas de recolha de dados, a análise documental.

2.1. Questão de Investigação e objetivos

O principal objetivo deste projeto é compreender se o uso dos modelos circulares e retangulares contribui para a aprendizagem dos alunos de uma turma de 6.º ano de escolaridade, nomeadamente no conteúdo das frações.

A partir deste objetivo geral pretende-se compreender se, nas tarefas propostas, os modelos circulares e retangulares: i) são facilitadores das aprendizagens; e ii) ajudam a resolver dificuldades de aprendizagem.

As questões de investigação do projeto são as seguintes:

Em que medida o uso de modelos circulares e retangulares na exploração:

i. apoia as aprendizagens dos alunos?;
ii. ajuda a ultrapassar as dificuldades dos alunos?

2.2. Metodologia de Investigação

A metodologia do meu projeto de investigação é de natureza qualitativa e assume-se como uma investigação sobre a prática.

2.2.1. Investigação qualitativa

De acordo com os meus objetivos e com as questões de investigação, este estudo enquadra-se num estudo de natureza qualitativa.

Segundo Vilela (2009), "os estudos qualitativos consideram que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito, que não pode ser traduzido em números.” (p. 105). Ao longo do meu estudo pretendo compreender como a utilização de modelos circulares e retangulares na resolução de tarefas matemáticas, no âmbito do tópico frações, contribui para as aprendizagens, ajuda a resolver dificuldades e promove a motivação dos alunos, ou seja, não pretendo avaliar de forma quantitativa as aprendizagens dos alunos, mas sim compreender se estes materiais auxiliam nas mesmas. Desta forma, pretendo que os alunos tenham contacto com o concreto para a resolução das tarefas.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa apresenta cinco características:

> 1. A fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
>
> 2. A investigação qualitativa é descritiva;
>
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
>
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
>
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (pp. 47-50)

Ao longo do meu estudo são visíveis estas cinco características, uma vez que o investigador é o instrumento principal, ou seja, as tarefas desenvolvidas deram “asas” ao estudo, a investigação é descritiva, pois a partir das tarefas realizadas, descrevi os pensamentos e raciocínios dos alunos, o foco do estudo é o processo e não apenas os resultados, uma vez que, ao longo das tarefas pretendia compreender o raciocínio dos alunos, bem como a utilização dos modelos circulares e retangulares para a realização das tarefas, a análise dos dados é indutiva, uma vez que depende dos dados que os alunos apresentaram e o significado do processo é importante, pois foi preciso compreender as estratégias e o raciocínio dos alunos durante a resolução das tarefas.

O termo investigação qualitativa, de acordo com Vilela (2009), refere-se “a uma multiplicidade de métodos e desenhos de investigação” (p. 106), sendo possível a existências de elementos que sejam comuns em diferentes abordagens. O mesmo autor refere que “Os desenhos dos estudos qualitativos são flexíveis e respeitantes ao objeto do estudo.” (p. 107), pois esses desenhos podem evoluir ao longo do processo de investigação permitindo um aprofundamento dos dados que estão a ser recolhidos.

Ao longo de algumas das tarefas é dada a abertura para que os alunos expliquem os seus raciocínios de diversas formas, apesar de ter sido utilizado um material manipulável, os alunos podem optar ou não por utilizar esse material para explicar o seu raciocínio. O meu estudo segue uma abordagem qualitativa, uma vez que, durante o processo de estudo, os alunos realizaram tarefas, com o uso de modelos circulares e retangulares, de modo a compreender se os mesmos auxiliam na compreensão dos conteúdos que estão a ser abordados. Deste modo, não há uma avaliação quantitativa, uma vez que, o que é relevante neste estudo é o processo de aprendizagem.

De acordo com Martins (2006) "O investigador é o principal meio de recolha e análise dos dados, implicando ser um elemento fulcral no desenlace do estudo." (p. 74)

Para o mesmo autor,

> O investigador deve estar envolvido na actividade como um insider e ser capaz de reflectir sobre ela como um outsider. Conduzir a investigação é um acto de interpretação em dois níveis: as experiências dos participantes devem ser explicadas e interpretadas em termos das regras da sua cultura e relações sociais e as experiências do investigador devem ser explicadas e interpretadas em termos do mesmo tipo de regras da comunidade intelectual em que ele ou ela trabalha. (p. 74)

No meu estudo, o meu papel é recolher os dados para confrontá-los com os meus objetivos e questões de investigação. Neste caso, o meu papel foi compreender se os materiais que estavam a ser utilizados ajudavam ou não no processo de ensino-aprendizagem, neste caso, das frações.

2.2.2. Investigação sobre a prática

No decorrer do meu estudo pretendo investigar sobre a minha própria prática, para compreender se o material manipulável disponibilizado para as tarefas realizadas apoia as aprendizagens e/ou dificuldades dos alunos.

Para Ponte (2008), investigar "é uma actividade do dia a dia, cada vez mais necessária em muitas esferas da actividade social, e que deve estar presente na vida das escolas, na formação dos alunos e nas práticas profissionais dos professores." (pp. 155).

O facto da escola e da professora da turma, onde realizei o meu estudo, ter possibilitado a minha intervenção, foi tanto importante para mim, enquanto investigadora, como para os alunos, que estavam a ter contacto com algo diferente no seu dia-a-dia. O contacto com diferentes materiais permitiu-me explorar estratégias para abordar conteúdos, bem como, permitir aos alunos, melhorar as suas dificuldades.

Para Ponte (2002),

> o professor, na sua missão, atua em diversos níveis: conduzindo o processo de ensino-aprendizagem, avaliando os alunos, contribuindo para a construção do projecto educativo da escola e para o desenvolvimento da relação da escola com a comunidade. Em todos estes níveis, o professor defronta-se constantemente com situações problemáticas. Os problemas que surgem são, de um modo geral, enfrentados com boa vontade e bom senso, tendo por base a sua experiência profissional, mas, frequentemente, isso não conduz a soluções satisfatórias. Daí, a necessidade do professor se envolver em investigação que o ajude a lidar com os problemas da sua prática. (p. 2)

Muitas vezes, os alunos apresentam algumas dificuldades em compreender algo que está abstrato, e, no caso do meu estudo, o mesmo permite "abrir novas portas", utilizando materiais para passar do abstrato para o concreto, o que por vezes pode ajudar nas aprendizagens ou nas dificuldades dos alunos num determinado conteúdo.

2.3. Técnicas de recolha de dados

Os dados que recolhi podem dividir-se em dois grupos, os dados primários e os dados secundários.

De acordo com Vilela (2009), "Os dados primários são aqueles que o investigador obtém diretamente da realidade, recolhendo-os com os seus próprios instrumentos." (p. 266). Para o mesmo autor, os dados secundários são "os registos escritos provenientes também de um contacto com a prática, mas que já foram recolhidos e muitas vezes processados por outros investigadores." (p. 266).

No caso do meu estudo, dei uso aos dados primários, pois fui observando os comportamentos e estratégias dos alunos ao longo da realização das tarefas.

De acordo com Marconi e Lakatos (2003) "Técnica é um conjunto de preceitos ou processos de que se serve uma ciência ou arte; é a habilidade para usar esses preceitos ou nonnas, a parte prática. Toda ciência utiliza inúmeras técnicas na obtenção de seus propósitos." (p. 174). Por outro lado, "o método é o conjunto das atividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança e economia, permite alcançar o objetivo - conhecimentos válidos e verdadeiros -, traçando o caminho a ser seguido, detectando erros e auxiliando as decisões do cientista." (Marconi & Lakatos, 2003, p. 83)

De forma a escolher os métodos/técnicas de recolha de dados o investigador deve conhecer os/as diferentes métodos/técnicas de forma rigorosa. Tal como afirma Fornari (2021),

> o investigador precisa conhecer e dominar os diferentes métodos de recolha, tratamento e análise dos dados, a fim de que possa escolher aquele que melhor responda ao seu problema de investigação. O conhecimento sobre cada método influencia no rigor com que é conduzida a investigação e é consolidado no decorrer do processo formativo do investigador. (p. 9)

A tabela 1 apresenta os métodos utilizados no meu estudo, nomeadamente a observação, na qual tive como registos, os registos áudio e as notas de campo; e a recolha documental, na qual utilizei como documentos as produções dos alunos.

Tabela 1

Métodos de recolha de dados

Métodos	Documentos	Registos
Observação	Não se aplica	Registos áudio Notas de campo
Recolha documental	Produções dos alunos	Não se aplica

2.3.1. Observação participante

Para recolher os dados recorri à observação, neste caso, à observação participante. De forma a auxiliar a observação retirei notas de campo e fiz gravações de áudios das discussões dos grupos de trabalho, bem como das discussões coletivas da turma. Para além disso fui observando como é que os alunos manipulavam os recursos que tinham disponíveis e se, por vezes, já não precisavam de recorrer aos mesmos.

A observação participante consiste na participação do investigador com os grupos que estão a trabalhar, ou seja, o investigador infiltra-se no grupo e estuda juntamente com eles as atividades que estão a ser realizadas. Tal como referem Marconi e Lakatos (2003), "Em geral, são apontadas duas formas de observação participante: a) Natural. O observador pertence à mesma comunidade ou grupo que investiga. b) Artificial. O observador integra-se ao grupo com a finalidade de obter informações.” (p. 194)

A observação participante diz-se natural quando o observador pertence ao grupo que está a investigar. Por outro lado, diz-se artificial quando o observador se integra no grupo com um objetivo definido para ser desenvolvida uma investigação. (Vilela, 2009)

No caso do meu estudo a observação participante foi natural e artificial, uma vez que me envolvi com os alunos para compreender as suas estratégias com o uso dos materiais disponíveis, mas também pretendia compreender se esses materiais auxiliavam ou não no processo de ensino- aprendizagem.

2.3.2. Recolha documental

Para recolher alguns dados para o meu estudo, recorri à recolha documental das resoluções dos alunos. Ao longo da investigação propus tarefas com a exploração de modelos circulares e retangulares. Todas as tarefas se enquadram no tópico Frações, tendo cada uma delas abordado um conteúdo diferente.

A primeira foi sobre o conteúdo das frações equivalentes. A segunda tarefa incidiu sobre a adição de frações com os mesmos denominadores. A última tarefa diz respeito à multiplicação de frações. Nas três tarefas foram utilizados diferentes modelos circulares e retangulares, sendo que na primeira e na segunda tarefa foi utilizado material manipulável físico e na segunda e na terceira tarefa foi utilizado material manipulável digital.

Para além disso recorri ao Projeto de turma, para compreender se havia alunos com medidas universais ou seletivas.

CAPÍTULO 3

3. INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA E ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

3.1. Contexto e Participantes

3.1.1. Caraterização da Instituição

O Projeto de Investigação é desenvolvido num Agrupamento de Escolas situado no concelho de Setúbal, mais precisamente, na freguesia de Azeitão. O Agrupamento onde tivemos o privilégio de estagiar foi fundado a 27 de agosto de 2003 e incorpora sete estabelecimentos. Este tem como ambição ser uma escola de referência, uma vez que, integra diversas práticas, tendo como principal objetivo investir na formação dos alunos, promovendo experiências inclusivas com o intuito de melhorar os resultados e o desenvolvimento de valores e atitudes, nomeadamente a participação ativa enquanto cidadãos, o respeito pela diferença, a autonomia, a responsabilidade, a solidariedade e a construção do conhecimento (Projeto Educativo do Agrupamento 2022-2025).

A instituição é uma escola pública e tem como níveis de ensino o 2.º e 3.º ciclo do Ensino Básico. Estruturalmente, é constituída por cinco blocos: um bloco reservado à disciplina de Educação Física; dois blocos com salas de aula equipadas; um bloco reservado para o bar, a reprografia e a papelaria, e por fim, um último bloco destinado à sala dos professores, à sala dos diretores de turma, à secretaria e à biblioteca. A escola também dispõe de um espaço exterior com grandes dimensões para os alunos usufruírem, estando disponíveis espaços verdes, amplos e campos de futebol, basquetebol e voleibol.

A escola atualmente é composta por trinta e cinco turmas, oitocentos e sessenta e cinco alunos e sessenta e cinco profissionais, neste caso, professores e funcionários que apoiam o funcionamento da escola principalmente nos blocos, na biblioteca, no bar, na papelaria, na reprografia e na secretária. A escola também disponibiliza diversas equipas multidisciplinares que são dirigidas por um conjunto de colaboradores que desenvolvem estratégias para garantir e assegurar as oportunidades a todos os alunos.

A turma, na qual tive o privilégio de realizar o Projeto de Investigação, é do sexto ano de escolaridade. É constituída por 28 alunos, sendo a faixa etária compreendida entre os 11 e 13 anos de idade. Dos 28 alunos, 14 alunos são do sexo feminino e 14 alunos são do sexo masculino. No grupo apenas existem duas nacionalidades: portuguesa (27 alunos) e brasileira (1 aluno). [1]

3.1.2. Caracterização do grupo e da sala

A turma participante no estudo tem a disciplina de Matemática no horário em todos os dias da semana, à exceção da terça-feira. Às sextas-feiras, a turma está dividida em turnos da seguinte forma: metade da turma tem aula nos primeiros 50 minutos e a outra metade nos 50 minutos seguintes.

Nas aulas de Matemática, a sala é sempre a mesma e é constituída por 8 grupos de mesas com 2, 3 ou 4 alunos. Para a implementação do meu Projeto de Investigação, os alunos foram organizados em 7 grupos de 4 alunos. Esta organização da sala pretendia permitir uma dinâmica de trabalho em grupo e isso foi essencial para o meu estudo, uma vez que, todas as tarefas foram realizadas em grupos e pares. A sala de aula dispõe de um projetor e um quadro.

Na presente escola são utilizados os manuais digitais no 6.º ano de escolaridade, desta forma, os alunos da turma têm acesso a este material, podendo utilizar os materiais interativos dos mesmos. Contudo, a utilização dos mesmos é dificultada devido ao facto de nem todos os alunos possuírem computador ou telemóvel para poderem usufruir destes materiais.

Foi possível observar, na primeira semana de estágio, que a dinâmica das aulas da turma segue um ritual distribuído por quatro fases: a escrita do sumário, a abordagem ao manual, a visualização de vídeos e a realização de exercícios para consolidar os conteúdos abordados. Na disciplina de Matemática a avaliação das aprendizagens dos alunos é realizada através de questões aula, normalmente realizadas no fim de cada capítulo do manual escolar. Apesar do meu estudo não incluir as questões aulas realizadas, as tarefas permitiram compreender os conhecimentos dos alunos sobre cada temática, já que, ao fim de cada tarefa, era realizada uma autoavaliação das dificuldades.

Como nesta disciplina alguns alunos apresentam algumas dificuldades, a professora recorre a alguns métodos de apoio à aprendizagem, como o uso de calculadora, a leitura de enunciados, a aplicação de questões aula adaptadas e o questionar, em muitos momentos da aula, se os alunos têm dúvidas. Os alunos apresentam também dificuldades ao nível do português, nomeadamente na escrita, na leitura e na interpretação. Contudo,

---

1 A caracterização da escola e da turma foi realizada em par de estágio no âmbito da unidade curricular: Investigação à Prática Pedagógica.

a nenhum aluno são aplicadas medidas seletivas ou adicionais na aprendizagem, de acordo com o Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. O acesso a estes dados permitiu compreender como poderia criar as tarefas, adaptando alguma, caso fosse necessário. Neste caso, a estratégia mais utilizada com os alunos que apresentavam algumas dificuldades, foi juntá-los com colegas que os pudessem ajudar.

3.2. Apresentação da intervenção pedagógica e análise dos dados

Ao iniciar o estágio na instituição, procedi, durante uma semana, à observação da dinâmica da turma. Posteriormente passei à minha intervenção, que decorreu de 29 de abril a 22 de maio, com a exploração de três tarefas com recurso a modelos circulares e retangulares, físicos ou digitais. Todas as tarefas foram realizadas em grupos de quatro elementos. No fim de cada tarefa foi apresentada uma tabela de autoavaliação e de avaliação da tarefa de modo a compreender as dificuldades dos alunos e compreender se as atividades iam ao encontro dos seus interesses e gostos.

A tabela 2 apresenta os objetivos de cada uma das tarefas, bem como os materiais utilizados nas mesmas.

Tabela 2

Síntese das tarefas realizadas

	Tarefa 1- Frações equivalentes	**Tarefa 2- Adição de frações com o mesmo denominador**	**Tarefa 3- Multiplicação de frações**
Objetivos	• Reconhecer e determinar frações equivalentes através de uma relação multiplicativa ○ Recordar a noção de número racional em	• Adicionar frações, recorrendo ao uso das propriedades da adição de forma a agilizar o cálculo, apresentando e explicando raciocínios e representações. ○ Adicionar números	• Multiplicar frações e representar geometricamente o resultado em situações simples; ○ Multiplicar números racionais em forma de fração.

	forma de fração; ○ Recordar o conceito de frações equivalentes.	racionais em forma de fração.	• Multiplicar frações, tirando partido das propriedades da multiplicação de forma a agilizar o cálculo, apresentando e explicando raciocínios e representações.
Materiais	Caderno Material riscador Borracha Caneta Canetas coloridas Círculos Folhas Folhas brancas Transferidor Bostik	Material riscador Borracha Caneta Canetas coloridas Bostik Computador Projetor Cartões com frações Aplicação com modelos circulares e retangulares[2]	Material riscador Borracha Computador/ telemóvel Projetor Recurso do Geogebra[3]

3.2.1. Tarefa 1- frações equivalentes

A primeira tarefa teve como objetivo compreender os conhecimentos dos alunos acerca das frações, mais precisamente das frações equivalentes. Dado ter sido uma turma de 6.º ano, este tema era de revisão.

Os enunciados da tarefa eram diferentes em cada grupo, de forma que os alunos observassem as diferentes formas de dividir uma unidade, sendo que cada elemento do grupo dividiu os círculos/retângulos em partes diferentes. Primeiramente os alunos tinham de dividir o círculo ou a folha retangular em partes iguais, consoante a tarefa que

---

[2] https://apps.mathlearningcenter.org/fractions/
[3] https://www.geogebra.org/m/GYxDkXrY

tinham, e de seguida pintar as partes indicadas.

Em cada grupo, cada aluno tinha uma folha retangular ou um círculo e cada elemento do grupo dividia o modelo que tinha em diferentes partes iguais, de acordo com cada um dos enunciados que eram distribuídos aos grupos e que são apresentados na Figura 1. De seguida cada elemento pintou as partes indicadas.

Figura 1

Questões 2 e 3

2. Cada elemento do grupo dobra a folha em partes iguais:
   a) O elemento 1 divide a folha em 4 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide a folha em 8 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide a folha em 16 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide a folha em 32 partes iguais.

2. Cada elemento do grupo dobra a folha em partes iguais:
   a) O elemento 1 divide a folha em 4 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide a folha em 8 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide a folha em 16 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide a folha em 32 partes iguais.

3. Cada elemento pinta partes do chocolate:
   a) O elemento 1 pinta 3 partes do chocolate;
   b) O elemento 2 pinta 6 partes do chocolate;
   c) O elemento 3 pinta 12 partes do chocolate;
   d) O elemento 4 pinta 24 partes do chocolate.

3. Cada elemento pinta partes do chocolate (a azul):
   a) O elemento 1 pinta 1 partes do chocolate;
   b) O elemento 2 pinta 2 partes do chocolate;
   c) O elemento 3 pinta 4 partes do chocolate;
   d) O elemento 4 pinta 8 partes do chocolate.

2. Cada elemento do grupo dobra a folha em partes iguais:
   a) O elemento 1 divide a folha em 2 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide a folha em 4 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide a folha em 8 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide a folha em 16 partes iguais;

2. Cada elemento do grupo dobra a folha em partes iguais:
   a. O elemento 1 divide a folha em 2 partes iguais;
   b. O elemento 2 divide a folha em 4 partes iguais;
   c. O elemento 3 divide a folha em 8 partes iguais;
   d. O elemento 4 divide a folha em 16 partes iguais.

3. Cada elemento pinta partes do chocolate (a azul):
   a) O elemento 1 pinta 1 partes do chocolate;
   b) O elemento 2 pinta 2 partes do chocolate;
   c) O elemento 3 pinta 4 partes do chocolate;
   d) O elemento 4 pinta 8 partes do chocolate;

3. Cada elemento pinta partes do chocolate (a verde):
   a. O elemento 1 pinta 2 parte do chocolate;
   b. O elemento 2 pinta 4 partes do chocolate;
   c. O elemento 3 pinta 8 partes do chocolate;
   d. O elemento 4 pinta 16 partes do chocolate.

2. Cada elemento do grupo dobra o círculo em partes iguais:
   a) O elemento 1 divide o círculo em 3 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide o círculo em 6 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide o círculo em 12 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide o círculo em 24 partes iguais.

2. Cada elemento do grupo dobra o círculo em partes iguais:
   a) O elemento 1 divide o círculo em 3 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide o círculo em 6 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide o círculo em 12 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide o círculo em 24 partes iguais.

3. Cada elemento pinta partes da pizza:
   a) O elemento 1 pinta 3 partes da pizza;
   b) O elemento 2 pinta 6 partes da pizza;
   c) O elemento 3 pinta 12 partes da pizza;
   d) O elemento 4 pinta 24 partes da pizza.

3. Cada elemento pinta partes da pizza:
   a) O elemento 1 pinta 2 partes da pizza;
   b) O elemento 2 pinta 4 partes da pizza;
   c) O elemento 3 pinta 8 partes da pizza;
   d) O elemento 4 pinta 16 partes da pizza.

Nestes enunciados, alguns grupos ficaram responsáveis por círculos e outros por retângulos. Os grupos que ficaram com os círculos tiveram de os dividir em 3, 6, 12, 24 partes. Os grupos responsáveis pelos retângulos tiveram de os dividir em 2, 4, 8, 16 e 32 partes.

Depois da representação de cada fração nos modelos circulares e retangulares, cada grupo comparou a parte que cada elemento pintou, referindo quantas partes, qual a fração que representava e se todos os elementos tinham pintado o mesmo, tal como descrito na figura 2.

Figura 2

Questão 4

4. Comparem a parte que cada elemento pintou no seu círculo:

   - Quantas partes cada elemento pintou?

     Elemento 1-

     Elemento 2-

     Elemento 3-

     Elemento 4 -

   - Qual é a fração correspondente à parte pintada por cada elemento?

     Elemento 1-

     Elemento 2-

     Elemento 3-

     Elemento 4 –

   - Todos os elementos pintaram o mesmo? Justifica a tua resposta.

Ao longo da realização da tarefa, fui circulando pelos grupos para compreender como realizaram a tarefa. À medida que ia passando nos grupos, fui questionando como pensaram para dividir os círculos e as folhas retangulares em partes iguais:

Professora- Como pensaram para dividir os círculos?

Aluno A- Podemos usar uma régua.

Aluno B- Mas com a régua não conseguimos perceber se estão exatamente iguais.

Aluno A- E se dobrarmos a meio e depois dobrarmos mais uma vez, para ter três partes iguais?

Aluno C- E se usarmos o transferidor?

Professora- Mas como podemos usar o transferidor?

Aluno C- Podemos medir os ângulos, metade do círculo são 180º, então um círculo inteiro são 360º

Aluno A- Então se queremos 3 partes iguais, dividimos 360º por 3 que dá 120º

Aluno B- Então cada parte tem 120º.

Este grupo começou por sugerir o recurso à régua para dividir os círculos em partes iguais. Um dos alunos sugeriu a dobragem e outro a utilização do transferidor. Neste último caso, os alunos conseguem dividir a amplitude dos ângulos, partindo do ângulo giro e dividindo-o em 3 partes iguais, obtendo ângulos de 120º. Neste caso o grupo optou por utilizar o transferidor para dividir os círculos em partes iguais.

Professora- E este grupo como pensou para dividir as folhas retangulares?

Aluno D- Para ter duas partes iguais, basta dobrar a folha uma vez.

Aluno E- Então para ter quatro partes iguais dobramos duas vezes a folha

Aluno D- Então é o dobro. O número de partes que dividimos a folha é o dobro das vezes que dobramos a folha.

Neste grupo, para dividir as folhas retangulares, os alunos sugeriram apenas as dobragens. Formulam uma conjetura relacionando o número de dobragens com o número de partes iguais obtidas, referindo que é uma relação de dobro. Este grupo chegou à conclusão de que ao dobrarem uma vez a folha, obtinham duas partes iguais, ao dobrarem duas vezes, obtinham quatro partes iguais.

Após o momento de trabalho autónomo dos grupos procedeu-se à discussão em grande grupo, na qual, cada grupo foi apresentar as suas ideias, como dividiram os círculos e como responderam à última questão: "Todos os elementos pintaram o mesmo?".

De um modo geral, relativamente às folhas retangulares, os alunos referiram:

Aluno D- Dobrei uma vez ao meio e fiquei com 2 partes iguais.

Aluno F- Dobrei ao meio duas vezes e fiquei com quatro partes.

Aluno H- Dobrei ao meio três vezes e fiquei oito partes iguais.

Aluno F- Foi sempre o dobro.

Relativamente aos círculos, os alunos foram referindo:

Aluno L- Fizemos 360º a dividir pelo número de partes que queríamos.

Aluno M- Fiz 360º a dividir por 3.

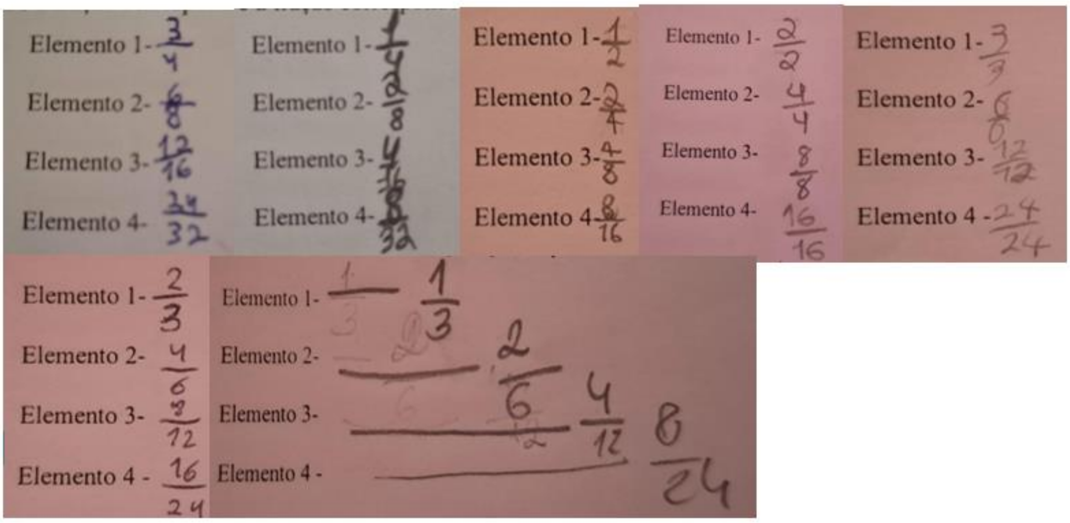
Aluno P- Primeiro pensei em fazer um risco para dividir em partes iguais. Depois percebi que tinha de usar o transferidor.

Salienta-se, assim, que as folhas retangulares mobilizaram mais o trabalho de dobragem e os círculos impeliram os alunos a usar o transferidor para obter divisões das amplitudes dos ângulos.

Ainda no decorrer desta discussão cada grupo representou as suas frações, como se mostra na Figura 3.

Figura 3

Representação das frações de cada grupo



Nestas resoluções, os alunos representaram as frações de acordo com o que realizaram nas questões anteriores, sendo que o numerador representa as partes que cada elemento pintou e o denominador representa o número de partes que cada elemento dividiu o círculo/retângulo.

A aluna I referiu "São frações equivalentes porque o chocolate é do mesmo tamanho só se dividiu em partes diferentes."

O aluno B referiu que "São frações equivalentes, ou seja, todos representam o mesmo."

O aluno G disse que "Todas as frações são equivalente a $\frac{1}{2}$."

A aluna C disse que "Todas as frações são iguais a uma unidade e representam o mesmo valor, sendo frações equivalentes.

A aluna A referiu que "Todos pintámos o mesmo, pois toda a pizza está pintada, ou seja, a unidade toda está pintada."

O aluno J referiu "Todos pintaram o mesmo pois as frações são equivalentes."

A aluna A referiu que "Todos pintámos o mesmo porque se juntarmos as partes pintadas vai dar a mesma quantidade."

No decorrer desta discussão é possível compreender que os alunos chegaram ao conceito de fração equivalente, relacionando que o número de partes pintadas é diferente, mas ao estarem divididos em partes diferentes, a quantidade pintada foi a mesma.

Nesta tarefa, o uso dos modelos circulares/retangulares em papel ajudou os alunos a compreenderem que se todos os elementos pintaram o mesmo, apesar das frações serem distintas, representavam a mesma quantidade, compreendendo que se tratava de frações equivalentes.

De acordo com Tapparello e Richit (2014) este tipo de tarefa possibilita aos alunos "relembrarem e aprofundarem a relação parte-todo, visto que identificaram a quantidade que representava o todo, coloriram as partes consideradas [...] e, ao final, escreveram as frações que representavam as partes pintadas, que eram frações parte-todo." (p. 11)

3.2.2. Tarefa 2 - Adição de frações com o mesmo denominador

A segunda tarefa explorou a adição de frações com o mesmo denominador, de modo a compreender se os alunos se recordavam deste conteúdo e se, ao utilizarem os recursos disponíveis, conseguiam resolver as operações. Esta tarefa foi realizada a pares.

Primeiramente foram distribuídos os enunciados das tarefas e os cartões com as frações, uma para cada aluno, sendo que cada par tinha uma fração com o mesmo denominador (Figuras 4 e 5).

Figura 4

Enunciado da tarefa 1

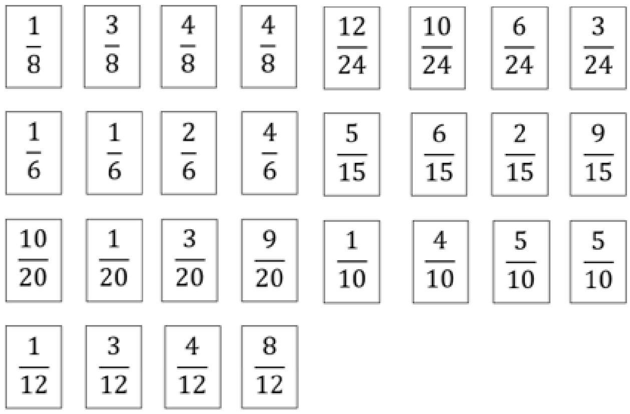
Tarefa 1- Guião "Vamos adicionar frações"

Nota: Este é um exemplo, pois para cada par vai o círculo dividido em partes distintas.

1. Junta-te com o teu colega do lado.
2. Retira uma fração do saco.
3. Representa as frações usando os círculos dados pela professora.
4. No terceiro círculo pinta a azul a parte que representa a tua fração e a vermelho a parte que representa a fração do teu par.
   - 4.1. Indica uma fração que represente toda a parte pintada do círculo.
   - 4.2. Representa numericamente a operação que traduz o que fizeste anteriormente.

Figura 5

Cartões com frações

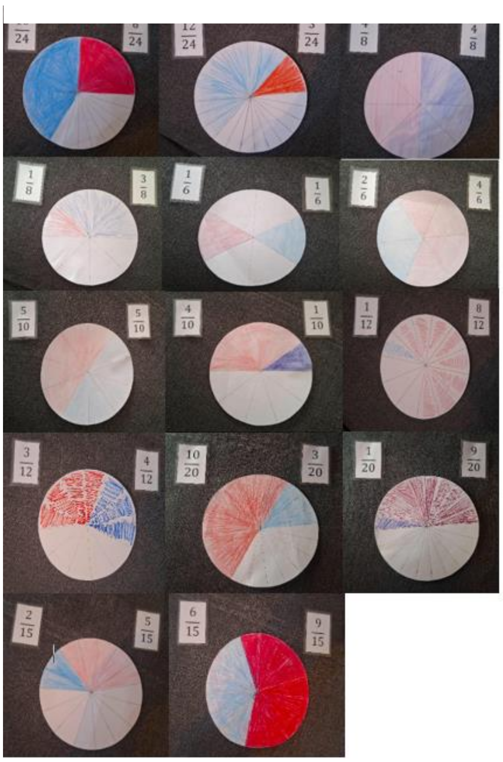


Cada aluno do par retirou uma fração, cujos denominadores eram os mesmos. Cada aluno representou a sua fração no círculo dado, representando com uma cor a sua fração e com outra cor a do colega. De seguida era questionado qual a fração correspondente à parte pintada do círculo, representado na figura 6.

Nesta tarefa, cada aluno pintou de uma cor a sua fração e de outra cor a fração do colega.

Figura 6

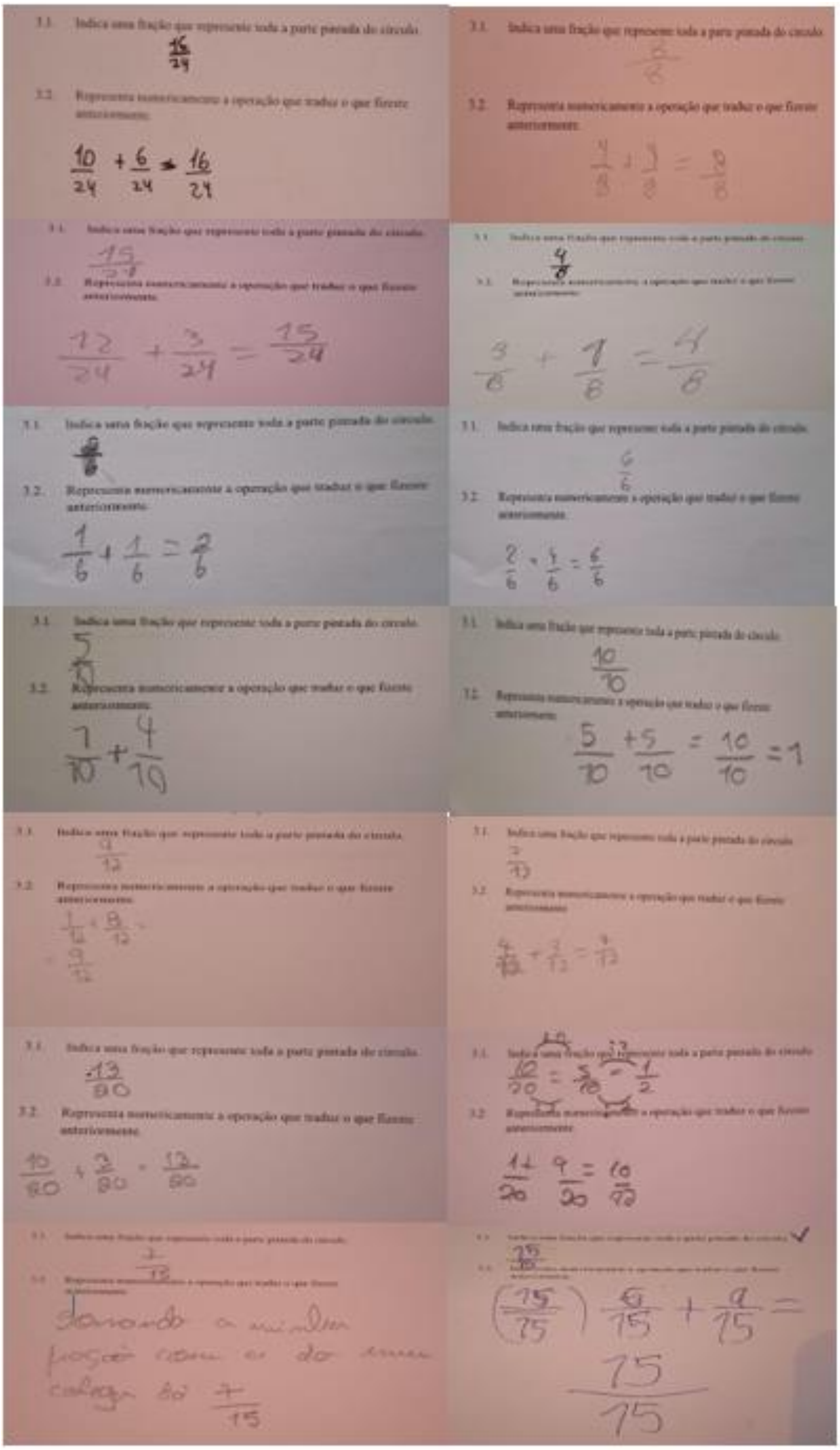
Representação das frações de cada par



Por fim era pedido que representassem numericamente uma operação que traduzisse a fração que representava toda a parte pintada do círculo, tal como está representado na figura 7.

Figura 7

Representação numérica da adição de frações



Na primeira questão os alunos colocaram a fração correspondente a todas as partes pintadas do círculo. Ao longo da segunda questão podemos verificar que os alunos fizeram uma operação de adição, adicionando a sua fração com a do colega.

Houve uma aluna que não compreendeu a questão e em vez de representar numericamente, descreveu por palavras, representado na figura acima, mais precisamente a última imagem da primeira coluna.

Para complementar e compreender as aprendizagens dos alunos, realizaram uma tarefa de adição de frações, com auxílio à aplicação [4]tal como mostra a figura 8.

Figura 8

Tarefa 2- Vamos adicionar frações

Tarefa 2- Vamos adicionar frações

1. Com a ajuda da aplicação https://apps.mathlearningcenter.org/fractions/ resolve as seguintes operações. Na última alínea inventa uma operação numérica e resolve.

   a. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$

   b. $\frac{1}{19} + \frac{5}{19} =$

   c. $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$

   d. $\frac{12}{24} + \frac{12}{24} =$

   e. $\frac{1}{15} + \frac{9}{15} =$

   f.

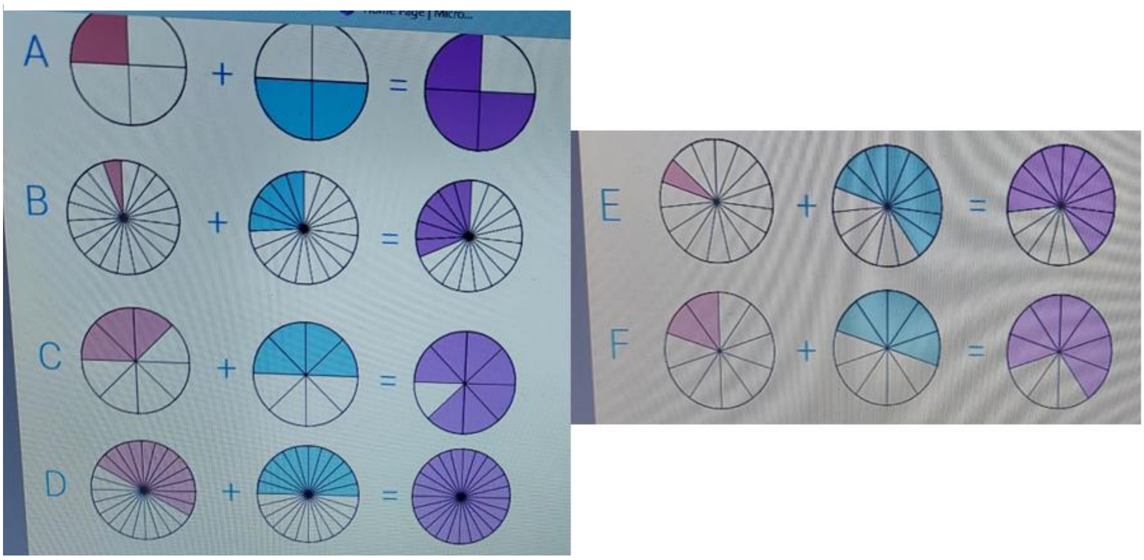
Ao longo das tarefas foi possível verificar que o uso dos recursos, tanto nos modelos circulares físicos como digitais, auxiliou os alunos na compreensão da adição de frações.

Os alunos utilizaram esta aplicação para representar as frações, bem como as adições, tal como está representado na figura 9.

[4] https://apps.mathlearningcenter.org/fractions/

Figura 9

Utilização da aplicação para realizar as operações



A utilização desta aplicação permitiu que os alunos compreendessem que juntando as duas frações se obtém uma terceira fração. Um aluno referiu "Na adição somamos os numeradores e somamos os denominadores", pelo que questionei qual era a regra que tinham aprendido no ano anterior, e o aluno respondeu "Ah, só somamos os de cima, os numeradores". Após esta resposta consegui compreender que alguns alunos apresentavam dúvidas nesta operação. Deste modo, a utilização da aplicação permitiu que os alunos observassem que ao juntarem as duas frações com a mesma unidade, o resultado é a soma dos numeradores das frações.

3.2.3. Tarefa 3- multiplicação de frações

A terceira e última tarefa destinou-se à multiplicação de números racionais em forma de fração, e recorreu a uma aplicação[5] com o objetivo de auxiliar os alunos na compreensão da multiplicação de frações.

Para iniciar a tarefa, propus um problema para rever a multiplicação de um número natural por uma fração, demonstrado na figura 10.

[5] https://www.geogebra.org/m/GYxDkXrY

Figura 10

Problema introdutório

Problema 1

Quatro quintos dos trinta alunos da turma T almoçam diariamente na cantina da escola.

Quantos alunos almoçam por dia nesta cantina?

As estratégias usadas pelos alunos foram discutidas em grande grupo:

Professora: Que dados já sabemos?

Aluno H e J: Quatro quintos dos alunos da turma almoçam na cantina.

Professora - E quantos alunos tem a turma?

Aluno A: 30.

Aluno F: Quatro quintos desses 30 alunos almoçam na cantina. Temos de fazer multiplicação, porque quatro quintos de 30 fazemos quatro quintos “vezes” 30.

Aluno M: Porque não é uma adição?

Professora: Quem consegue esclarecer?

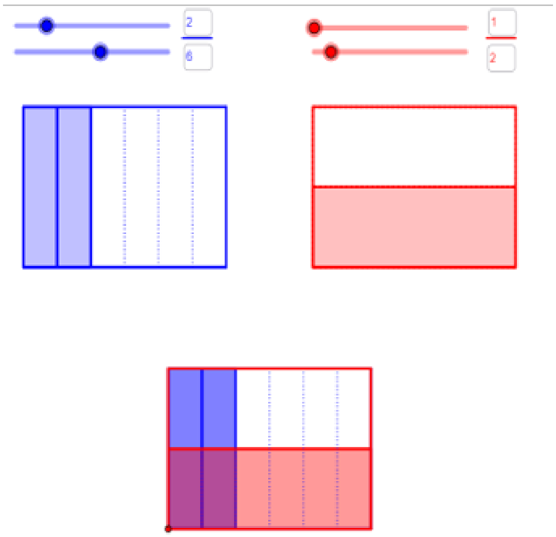
Aluno B- Se fosse adição teria de ser para juntar várias coisas, aqui diz que desses 30 alunos da turma apenas quatro quintos almoçam na cantina.

Dado esta discussão os alunos realizaram a operação $\frac{4}{5}$ x 30, que teve como resultado $\frac{120}{5}$. A aluna R referiu “Temos de colocar a fração irredutível para sabermos o número de alunos, porque 120: 5 é 24 e 5:5 é 1, então fica 24 sobre 1, ou seja, 24 alunos”.

De seguida, foi feita uma exploração em conjunto para os alunos compreenderem como funcionava o recurso. Nesse momento era pretendido que os alunos compreendessem que a parte que ficava com uma cor diferente correspondia ao produto das frações, questionando: “O que acontece ao retângulo quando fazemos o produto?”, como o exemplo da figura 11.

Figura 11

Exemplo da utilização da aplicação



$$\frac{2}{6} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{2}{12}$$

Professora: "O que acontece ao retângulo quando fazemos o produto?",

Aluno H: "Ficou com 3 cores diferentes."

Aluna J: disse "A cor nova é o resultado da conta".

Aluno G: referiu "Como o resultado é $\frac{2}{12}$, multiplicamos os numeradores e depois os denominadores."

Num segundo momento, os alunos exploraram o recurso a pares, realizando a tarefa, apresentada na figura 12, na qual foram apresentadas diversas operações para realizarem, utilizando a aplicação acima referida.

Figura 12

Tarefa "Vamos multiplicar frações"

1. Resolve as seguintes operações, utilizando o recurso disponibilizado. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

a) $\frac{6}{8} \times \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{10} \times \frac{2}{4}$

c) $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}$

d) $\frac{4}{5} \times \frac{1}{6}$

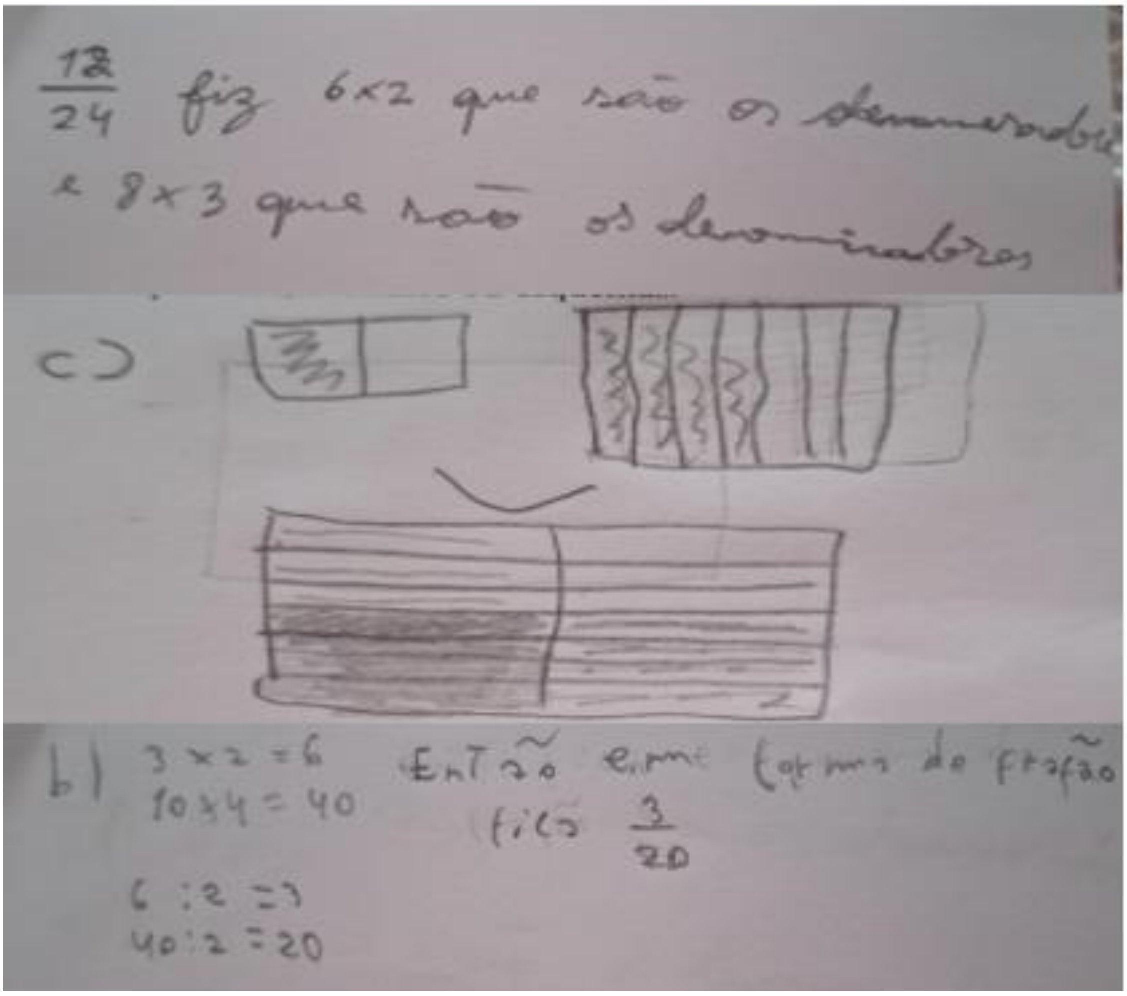
2. Escolhe uma das multiplicações anteriores e explica a figura que é obtida. Podes usar palavras, desenhos ou esquemas.

Ao longo desta exploração alguns alunos foram fazendo observações, tais como: "São os números de cima a multiplicar e depois os números de baixo também a multiplicar".

A última questão da tarefa acima apresentada pretendia que os alunos justificassem, através de palavras, desenhos ou esquemas para apresentar o seu raciocínio, tal como os exemplos da figura 13.

Figura 13

Estratégias de três alunos



Em dois dos exemplos os alunos utilizaram a multiplicação dos numeradores e dos denominadores para chegar à resposta, sendo que o terceiro aluno representou a operação inversa da multiplicação, a divisão. Já o segundo aluno apresentou o seu raciocínio através de desenhos, tal como se utilizou na aplicação utilizada anteriormente.

Para terminar a tarefa foi apresentado um problema (Figura 14). Neste problema era pretendido que os alunos o resolvessem, com base no que tinham compreendido da utilização da aplicação e discutissem as estratégias utilizadas.

Figura 14

Problema final

Problema 2

A Maria quer plantar rosas em $\frac{2}{3}$ do seu jardim e quer que $\frac{4}{5}$ sejam vermelhas.

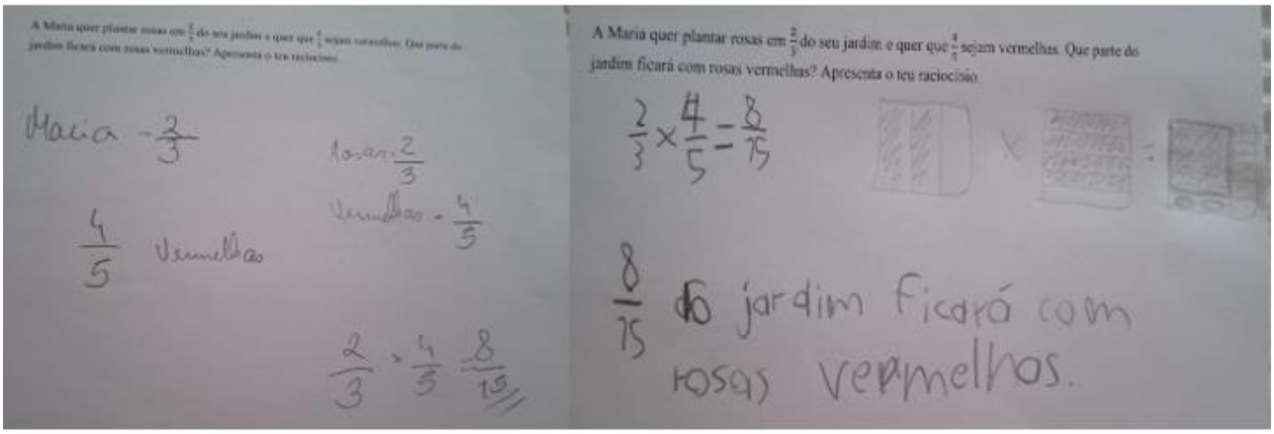
Que parte do jardim ficará com rosas vermelhas? Apresenta o teu raciocínio.

Durante a discussão, a aluna Cláudia referiu "Dos dois terços das rosas, quatro quintos são vermelhas, ou seja, quatro quintos é parte dos dois terços".

Alguns alunos expuseram o seu raciocínio no quadro, tal como os exemplos da figura 15.

Figura 15

Raciocínio de dois alunos



No primeiro exemplo o aluno apresentou os dados que já tinha e aplicou a regra da multiplicação de frações. O segundo aluno optou por representar os dois terços de rosas do jardim e representar os quatro quintos de rosas vermelhas, juntando posteriormente as duas figuras, pois nesses dois terços onde havia rosas, quatro quintos eram rosas vermelhas, utilizando a estratégia da aplicação.

No fim de cada uma das tarefas os alunos pintaram as figuras de acordo com as dificuldades sentidas ao longo das tarefas (Figura 16).

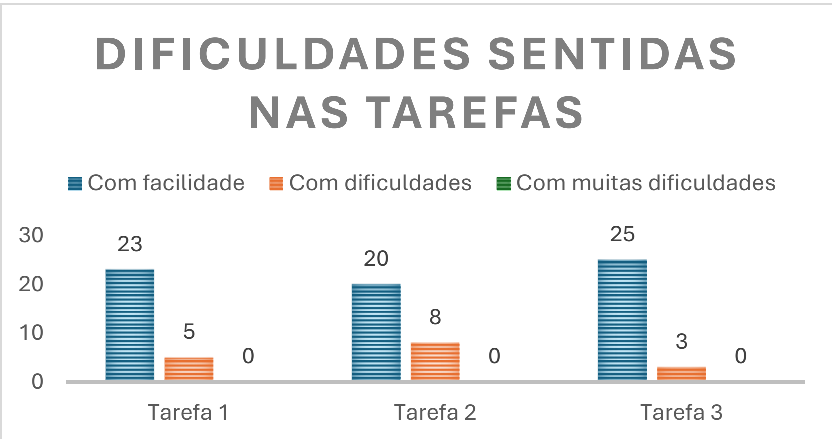
Figura 16

Autoavaliação de cada tarefa

Na tarefa 1, 23 alunos assinalaram que resolveram a tarefa com facilidade, enquanto 5 alunos assinalaram resolveram com dificuldades. Na tarefa 2, 20 alunos referiram que não apresentaram dificuldades na realização da mesma, e 8 alunos referiram que tiveram algumas dificuldades. Por fim, na tarefa 3, 25 alunos realizaram a tarefa com facilidade e apenas 3 alunos apresentaram algumas dificuldades. Nenhum aluno apresentou referiu que apresentou muitas dificuldades nas três tarefas apresentadas. A figura 17 apresenta os resultados.

Figura 17

Gráfico referente às dificuldades sentidas pelos alunos nas tarefas realizadas



Pela análise do gráfico podemos perceber que a grande maioria dos alunos não sentiu dificuldades na resolução das três tarefas, sendo esse número maior na primeira e na terceira tarefa. De facto, na segunda tarefa mais de $\frac{1}{4}$ da turma referiu sentir algumas dificuldades. Estas dificuldades apresentadas poderão ter surgido devido ao facto destes alunos apresentarem alguma dificuldade na adição de frações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo principal compreender se o uso dos modelos circulares e retangulares, físicos e digitais, contribuiu para a aprendizagem do conteúdo das frações dos alunos de uma turma de 6.º ano de escolaridade.

Perante este objetivo, formulei duas questões de investigação:

Em que medida o uso de modelos circulares e retangulares na exploração:

i. apoia as aprendizagens dos alunos?;
ii. ajuda a ultrapassar as dificuldades dos alunos?

Acordo com Oliveira e Borralho (2014) "Diferentes tipos de tarefas matemáticas podem contribuir para o desenvolvimento de capacidades fundamentais nos alunos, tais como o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação matemática". (p. 149). Desta forma, a preparação das aulas foi um desafio, enquanto futura docente, uma vez que pretendia que os alunos compreendessem de forma mais clara e dinâmica o conteúdo que estava a ser abordado.

A escolha das tarefas surgiu de acordo com conversas que tive com a minha orientadora e, posteriormente, adaptadas de acordo com o feedback da professora cooperante.

A primeira tarefa tinha como principal objetivo que os alunos compreendessem o conceito de frações equivalentes, bem como o conceito de "unidade". Desta forma, utilizei, como recurso manipulável círculos e retângulos para os alunos explorarem a tarefa, de forma a compreenderem que a unidade é a mesma, mas os círculos/retângulos podem estar divididos em partes diferentes, e também que ao pintarem partes diferentes dos círculos/retângulos, no final a quantidade será a mesma.

Na segunda tarefa o principal objetivo era recordar a adição de frações, na qual pretendi que os alunos utilizassem, novamente, os círculos e inseri um recurso manipulável digital, denominado de "Fractions By The Math Learning", de modo que os alunos utilizassem essa aplicação para conferir as respostas dadas na tarefa. Desta forma, os alunos compreenderam que para adicionar duas frações com o mesmo denominador, dado que a unidade é a mesma, ou seja, o denominador, basta apenas adicionar os numeradores. Se voltasse a realizar a tarefa, iria utilizar outra aplicação, que permitisse representar as frações no mesmo círculo, mas com cores distintas, para que a perceção desta operação ficasse imediatamente clara.

A terceira e última tarefa tinha como objetivo a compreensão do processo de multiplicação de frações e dividiu-se em três partes. Primeiramente os alunos exploraram um problema que envolveu a multiplicação de uma fração com um número natural, no qual foram discutidos os raciocínios dos alunos. De seguida os alunos exploraram, juntamente comigo, a aplicação "Frações - Multiplicação de frações" do Geogebra, na qual pretendia que os alunos compreendessem o que acontecia quando se juntou a representação 1 com a representação 2, dando origem ao retângulo final, que continha três cores, a cor da representação 1 (1.ª fração), a cor da representação 2 (2.ª fração) e a terceira cor formada, que representava o produto das duas frações. Dado isto, os alunos realizaram uma tarefa, na qual tinha diversas operações de multiplicação para realizar, sendo que tinham de justificar como chegaram ao resultado, através de palavras, esquemas ou desenhos. Por último, os alunos exploraram outro problema, mas desta vez já envolvia a multiplicação de duas frações, sendo que também foram discutidas as estratégias dos alunos.

No decorrer destas tarefas, utilizei uma metodologia qualitativa, na qual pretendi compreender o processo dos alunos em cada tarefa, avaliar qualitativamente os seus conhecimentos, tando ênfase ao processo e aos resultados e não apenas aos resultados.

Este estudo contribui para o meu futuro como docente, uma vez que me permitiu criar e explorar modelos circulares e retangulares, realizar tarefas que serão úteis para o meu futuro enquanto docente do 2.º Ciclo. Para além disso, o contacto direto com alunos do 6.º ano permitiu-me criar ligações e avaliar comportamentos que poderão a vir ser destacados em futuros alunos meus. O facto de ter estudado um determinado conteúdo permitiu alargar o meu conhecimento acerca das frações, bem como diferentes estratégias para abordar este tema.

Dando resposta às questões de investigação posso referir que este estudo permitiu-me concluir que o uso de modelos circulares e retangulares apoia os alunos no processo de ensino-aprendizagem, bem como que o uso de modelos circulares e retangulares orienta os alunos que apresentam mais dificuldades e influencia o desempenho dos alunos nas atividades propostas. Tal como refere Ventura (2013), "Um ensino que preconize uma abordagem dos conceitos matemáticos por meio de modelos contribui para uma maior compreensão dos alunos." (p. 85).

Isto foi notório, uma vez que, alunos que apresentavam dificuldades, descritas pela docente da turma, ao utilizar estes modelos circulares e retangulares conseguiam resolver as tarefas com poucas dificuldades. Os alunos que não apresentavam muitas dificuldades na aprendizagem também fizeram um bom uso destes materiais utilizados na realização das tarefas. Um fator de sucesso no uso de modelos concretos no ensino das frações

> é o longo período de tempo que os alunos passam com modelos concretos de frações, pois acredita-se que os alunos precisam de muitas oportunidades para explorarem frações [...] usando múltiplos modos de representação e de relações entre as diferentes representações. (Feteira, 2012, p. 15)

De um modo geral, considero que as tarefas correram bem, considerando que os recursos utilizados foram uma mais valia para a resolução das tarefas. Contudo, se voltasse a realizar a tarefa da adição de frações, iria utilizar outra aplicação, que permitisse representar as frações no mesmo círculo, mas com cores distintas, para que a perceção desta operação ficasse imediatamente clara.

REFERÊNCIAS

Abecedário da Educação. (2019, fevereiro 7). *Setores circulares para a compreensão de frações.* https://www.abecedariodaeducacao.pt/2019/02/07/setores-circulares-para-compreensao-de-fracoes/

Abrantes, P., Serrazina, L.,Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Ministério da Educação

Bertoni, N.E. (2004). Um novo paradigma no ensino aprendizagem das frações. *VII Encontro Nacional de Educação Matemática*. pp 11-15

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto Editora.

Botas, D. O. S. (2008). *A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática- Um estudo no 1º ciclo*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Aberta]. Repositório Aberto da Universidade Aberta. http://hdl.handle.net/10400.2/1235

Camacho, M. S. F. P. (2012). *Modelos circulares e retangulares no processo ensino/aprendizagem da matemática: aprender explorando e construindo*. [Relatório de Estágio de Mestrado, Universidade da Madeira]. Repositório da Universidade da Madeira. https://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/373/1/MestradoMarianaCamacho.pdf.

Camargo, J. D., Mota, V.C.,Sakuno, I.Y.T.,Silva, R.J.S. (s.d.). Gamificação na Educação matemática: uma aplicação com o ensino de frações. *Conjeturas*, 22 (11), pp 592-609.

Cardoso, P., Mamede, E. (2015). O conceito de fração - o conhecimento de professores do 1.º ciclo. *Revista de Estudios e Investigación en PsicologíaY Educación*, (6), pp 1-5

Charalambous C. Y.,Pitta-Pantazi D. (2006). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 64 (3), pp 293- 316.

Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. Diário da República n.º 129/2018. I série de 2018-

07-06. https://diariodarepublica.pt/dr/detalhe/decreto-lei/54-2018-115652961

Druck, I., F. (2005). *Frações: Uma análise de dificuldades conceituais.* Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Facchi, M., G. (2022). *A Importância do Uso de Materiais Manipuláveis no Ensino da Matemática.* [Trabalho de Conclusão de Mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Panamá]. Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29222

Feteira, S., S. (2012). *Os números racionais na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade.* [Relatório de Mestrado, Instituto Politécnico de Leiria]. Repositório do Instituto Politécnico de Leiria. http://hdl.handle.net/10400.8/729

Fornari, L. F. (2021). Introdução. Em Traqueia, A., Euzébio, D., Soares, D., Pacheco, E., Taveira, E., Bernardo, I., Rios, J., Sousa, L., Lopes, M. B., Soares,T., *Reflexões em torno de Metodologias de Investigação: métodos (Vol. 1)*, pp 9-11.UA Editora.

Graça, S. I., Ponte, J.P.,Guerreiro, A. (2022). Operações com números racionais: Que (in)compreensões revelam os alunos?. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Vol. 17, pp 1-22. Operações com números racionais: Que (in)compreensões revelam os alunos? (researchgate.net)

Jardinetti, J., R., B. (1997). Abstrato e o Concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões. *Bolema*, Vol. 11, (número 12).

Marconi, M. d., & Lakatos, E. M. (2003). *Fundamentos da Metodologia Científica - 5ª edição.* Editora Atlas.

Martins, V. N. P. (2006). *Avaliação do valor educativo de um software de elaboração de partituras: um estudo de caso com o programa Finale no 1.º ciclo*. [Tese de Mestrado, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. https://hdl.handle.net/1822/6326

Merlini, V. L. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental*. [Dissertação de

Mestrado em Educação Matemática, Universidade Católica de São Paulo]. Repositório PUCSP. https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11111.

Mestre, C., & Gonçalves, H. (2022). *Plim! 3.º ano- Matemática*. Texto Editores.

Miranda, R. R., Rocha, S.S., Pereira, A. C. C. (2021). Projeto "Só o básico": Ensinando operações básicas com frações em tempos de pandemia. *Pesquisa, Sociedade e Desenvolvimento,* Vol 10 (1) https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/11792 .

Oliveira, H., Menezes, L.,Canavarro, A.P. (2008). Práticas de Ensino Exploratório da Matemática: O Caso de Célia. *Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, pp 255-266.

Oliveira, H., Menezes, L.,Canavarro, A.P. (2008). Recursos Didáticos numa aula de Ensino Exploratório: da Prática à Representação de uma Prática. *Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, pp 557-570.

Oliveira, H., Menezes, L., Canavarro, A.P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, Vol 22 (2), pp 30-53.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 1-24).

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34).

Ponte, J. P. (1 de junho de 2008). *Investigar a nossa própria prática: Uma streratégia de formação e de construção do conhecimento profissional.* Obtido de PNA: https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/4372/DaPonte2008Investigar.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA*, Vol 2 (número 4), pp 153-180.

Silva, C. V., Perovano,A. P. (2012). Obstáculos na compreensão de frações por alunos da Educação Básica. *V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação*

Matemática.

Silva, S. G. (2021). *Recursos didáticos na Aula de Matemática- Contributos para o processo de ensino e aprendizagem*. [Relatório de Estágio de Mestrado, Universidade da Madeira]. Repositório da Universidade da Madeira. https://digituma.uma.pt/handle/10400.13/4019?locale=en

Soares, J. P. V.,Silva, P., V. (2018). Discos de frações: Um Material Manipulativo para o Ensino de Frações na Educação Básica. *VII Encontro Nacional das Licenciaturas*. pp 1- 15

Tapparello, D., Richit, A. (2024). Abordagem Exploratória de Frações em um Estudo de Aula. *Zetetiké*, 3, pp 1-26.

Ventura, H., M., G., L. (2013). *A Aprendizagem dos Números Racionais Através Das Conexões Entre As Suas Representações: Uma Experiência De Ensino No 2.º Ciclo Do Ensino Básico*. [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/10661

Vilela, J. (2009). *Investigação- O Processo de Construção do Conhecimento*. Edições Sílabo.

ANEXOS

ANEXO A

Tarefa 1

Tarefa “Vamos dividir pizzas?”

1. Organizem-se num grupo de 4 elementos.

2. Cada elemento do grupo dobra o círculo em partes iguais:
    a) O elemento 1 divide o círculo em 3 partes iguais;
    b) O elemento 2 divide o círculo em 6 partes iguais;
    c) O elemento 3 divide o círculo em 12 partes iguais;
    d) O elemento 4 divide o círculo em 24 partes iguais.

3. Cada elemento pinta partes da pizza:
    a) O elemento 1 pinta 2 partes da pizza;
    b) O elemento 2 pinta 4 partes da pizza;
    c) O elemento 3 pinta 8 partes da pizza;
    d) O elemento 4 pinta 16 partes da pizza.

4. Comparem a parte que cada elemento pintou no seu círculo:

    - Quantas partes cada elemento pintou?

        Elemento 1-

        Elemento 2-

        Elemento 3-

        Elemento 4 -

    - Qual é a fração correspondente à parte pintada por cada elemento?

        Elemento 1-

        Elemento 2-

        Elemento 3-

        Elemento 4 –

    - Todos os elementos pintaram o mesmo? Justifica a tua resposta.

Tarefa “Vamos dividir pizzas?”

1. Organizem-se num grupo de 4 elementos.

2. Cada elemento do grupo dobra o círculo em partes iguais:
   a) O elemento 1 divide o círculo em 3 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide o círculo em 6 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide o círculo em 12 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide o círculo em 24 partes iguais.

3. Cada elemento pinta partes da pizza:
   a) O elemento 1 pinta 3 partes da pizza;
   b) O elemento 2 pinta 6 partes da pizza;
   c) O elemento 3 pinta 12 partes da pizza;
   d) O elemento 4 pinta 24 partes da pizza.

4. Comparem a parte que cada elemento pintou no seu círculo:

   o Quantas partes cada elemento pintou?

      Elemento 1-

      Elemento 2-

      Elemento 3-

      Elemento 4 -

   o Qual é a fração correspondente à parte pintada por cada elemento?

      Elemento 1-

      Elemento 2-

      Elemento 3-

      Elemento 4 -

   o Todos os elementos pintaram o mesmo? Justifica a tua resposta.

Tarefa “Vamos dividir pizzas?”

1. Organizem-se num grupo de 4 elementos.

2. Cada elemento do grupo dobra o círculo em partes iguais:
   a) O elemento 1 divide o círculo em 3 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide o círculo em 6 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide o círculo em 12 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide o círculo em 24 partes iguais.

3. Cada elemento pinta partes da pizza:
   a) O elemento 1 pinta 1 partes da pizza;
   b) O elemento 2 pinta 2 partes da pizza;
   c) O elemento 3 pinta 4 partes da pizza;
   d) O elemento 4 pinta 8 partes da pizza.

4. Comparem a parte que cada elemento pintou no seu círculo:

   - Quantas partes cada elemento pintou?

     Elemento 1-

     Elemento 2-

     Elemento 3-

     Elemento 4 -

   - Qual é a fração correspondente à parte pintada por cada elemento?

     Elemento 1-

     Elemento 2-

     Elemento 3-

     Elemento 4 -

   - Todos os elementos pintaram o mesmo? Justifica a tua resposta.

Tarefa “Vamos dividir um chocolate?”

1. Organizem-se num grupo de 4 elementos.

2. Cada elemento do grupo dobra a folha em partes iguais:

   a) O elemento 1 divide a folha em 2 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide a folha em 4 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide a folha em 8 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide a folha em 16 partes iguais;

3. Cada elemento pinta partes do chocolate (a azul):

   a) O elemento 1 pinta 1 partes do chocolate;
   b) O elemento 2 pinta 2 partes do chocolate;
   c) O elemento 3 pinta 4 partes do chocolate;
   d) O elemento 4 pinta 8 partes do chocolate;

4.Comparem a parte que cada elemento pintou no seu círculo:

- Quantas partes cada elemento pintou?

  Elemento 1-

  Elemento 2-

  Elemento 3-

  Elemento 4-

- Qual é a fração correspondente à parte pintada por cada elemento?

  Elemento 1-

  Elemento 2-

  Elemento 3-

  Elemento 4-

- Todos os elementos pintaram o mesmo? Justifica a tua resposta.

Tarefa “Vamos dividir um chocolate?”

1. Organizem-se num grupo de 4 elementos.

2. Cada elemento do grupo dobra a folha em partes iguais:

   a. O elemento 1 divide a folha em 2 partes iguais;
   b. O elemento 2 divide a folha em 4 partes iguais;
   c. O elemento 3 divide a folha em 8 partes iguais;
   d. O elemento 4 divide a folha em 16 partes iguais.

3. Cada elemento pinta partes do chocolate (a verde):

   a. O elemento 1 pinta 2 parte do chocolate;
   b. O elemento 2 pinta 4 partes do chocolate;
   c. O elemento 3 pinta 6 partes do chocolate;
   d. O elemento 4 pinta 16 partes do chocolate.

4. Comparem a parte que cada elemento pintou no seu círculo:

- Quantas partes cada elemento pintou?

  Elemento 1-

  Elemento 2-

  Elemento 3-

  Elemento 4-

- Qual é a fração correspondente à parte pintada por cada elemento?

  Elemento 1-

  Elemento 2-

  Elemento 3-

  Elemento 4-

- Todos os elementos pintaram o mesmo? Justifica a tua resposta.

Tarefa “Vamos dividir um chocolate?”

1. Organizem-se num grupo de 4 elementos.

2. Cada elemento do grupo dobra a folha em partes iguais:

   a) O elemento 1 divide a folha em 4 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide a folha em 8 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide a folha em 16 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide a folha em 32 partes iguais.

3. Cada elemento pinta partes do chocolate (a azul):

   a) O elemento 1 pinta 1 partes do chocolate;
   b) O elemento 2 pinta 2 partes do chocolate;
   c) O elemento 3 pinta 4 partes do chocolate;
   d) O elemento 4 pinta 8 partes do chocolate.

4.Comparem a parte que cada elemento pintou no seu círculo:

- Quantas partes cada elemento pintou?

  Elemento 1-

  Elemento 2-

  Elemento 3-

  Elemento 4-

- Qual é a fração correspondente à parte pintada por cada elemento?

  Elemento 1-

  Elemento 2-

  Elemento 3-

  Elemento 4-

- Todos os elementos pintaram o mesmo? Justifica a tua resposta.

Tarefa “Vamos dividir um chocolate?”

1. Organizem-se num grupo de 4 elementos.

2. Cada elemento do grupo dobra a folha em partes iguais:

   a) O elemento 1 divide a folha em 4 partes iguais;
   b) O elemento 2 divide a folha em 8 partes iguais;
   c) O elemento 3 divide a folha em 16 partes iguais;
   d) O elemento 4 divide a folha em 32 partes iguais.

1. Cada elemento pinta partes do chocolate:

   a) O elemento 1 pinta 3 partes do chocolate;
   b) O elemento 2 pinta 6 partes do chocolate;
   c) O elemento 3 pinta 12 partes do chocolate;
   d) O elemento 4 pinta 24 partes do chocolate.

4.Comparem a parte que cada elemento pintou no seu círculo:

- Quantas partes cada elemento pintou?

  Elemento 1-

  Elemento 2-

  Elemento 3-

  Elemento 4-

- Qual é a fração correspondente à parte pintada por cada elemento?

  Elemento 1-

  Elemento 2-

  Elemento 3-

  Elemento 4-

- Todos os elementos pintaram o mesmo? Justifica a tua resposta.

ANEXO B

Tarefa 2- Parte 1

Tarefa - Guião “Vamos adicionar frações”

1. Junta-te com o teu colega do lado.

2. Retira uma fração.

3. Representa a azul a parte que representa a tua fração e a vermelho a parte que representa a fração do teu par, no círculo dado pela professora.

   3.1. Indica uma fração que represente toda a parte pintada do círculo.

   3.2. Representa numericamente a operação que traduz o que fizeste anteriormente.

ANEXO C

Tarefa 2- Parte 2

1. Com a ajuda da aplicação https://apps.mathlearningcenter.org/fractions/ resolve as seguintes operações:

   a. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$

   b. $\frac{1}{19} + \frac{5}{19} =$

   c. $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$

   d. $\frac{12}{24} + \frac{12}{24} =$

   e. $\frac{1}{15} + \frac{9}{15} =$

   f.

ANEXO D

Cartões com frações da tarefa 2

$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{10}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{8}{12}$

$\frac{12}{24}$	$\frac{10}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{3}{24}$
$\frac{5}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{9}{15}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$

ANEXO E

Problema introdutório da tarefa 3

Problema

Quatro quintos dos trinta alunos da turma T almoçam diariamente na cantina da escola.
Quantos alunos almoçam por dia nesta cantina?

ANEXO F

Tarefa 3- Multiplicação de frações

1. Resolve as seguintes operações, utilizando o recurso disponibilizado. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

a) $\frac{6}{8}$ x $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{10}$ x $\frac{2}{4}$

c) $\frac{1}{2}$ x $\frac{4}{7}$

d) $\frac{4}{5}$ x $\frac{1}{6}$

2. Escolhe uma das multiplicações anteriores e explica a figura que é obtida. Podes usar palavras, desenhos ou esquemas.

ANEXO G

Problema final da tarefa 3

Problema

A Maria quer plantar rosas em $\frac{2}{3}$ do seu jardim e quer que $\frac{4}{5}$ sejam vermelhas. Que parte do jardim ficará com rosas vermelhas? Apresenta o teu raciocínio.

ANEXO H

Avaliação da tarefa e autoavaliação

<table>
<tr><th colspan="2">O que achaste da atividade?</th></tr>
<tr><td>
Gostei</td><td>
Não gostei</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Resolvi a tarefa</th></tr>
<tr><td>
Com facilidade</td><td>
Com dificuldade</td><td>
Com muitas dificuldades</td></tr>
</table>