IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Anabela Pacheco Vieira Canelas

Resolução de problemas com números racionais

Um estudo com alunos do 5.º ano de escolaridade

Relatório da componente de investigação do relatório de estágio

Mestrado em Ensino do 1º e do 2º Ciclo do Ensino Básico

Setúbal, dezembro de 2016

Versão Definitiva

Instituto Politécnico de Setúbal

Escola Superior de Educação

Anabela Pacheco Vieira Canelas

Resolução de problemas com números racionais

Um estudo com alunos do 5.º ano de escolaridade

Orientadora:

Professora Doutora Joana Maria Leitão Brocardo

Relatório da componente de investigação do relatório de estágio

Mestrado em Ensino do 1º e do 2º Ciclo do Ensino Básico

Setúbal, dezembro de 2016

Versão Definitiva

Resumo

Este estudo tem como objetivo identificar as representações utilizadas pelos alunos, as dificuldades sentidas e o conhecimento que têm sobre os números racionais.

A revisão de literatura centra-se em quatro vertentes: evolução histórica dos números, conjunto dos números racionais, significados das frações e aprendizagem dos números racionais.

O estudo segue uma abordagem de investigação qualitativa. Os dados foram recolhidos durante o estágio, através das produções escritas que consistem na resposta de 3 problemas propostos aos alunos e de entrevistas feitas aos mesmos. Este estudo foi desenvolvido numa turma do 5.º ano de escolaridade com 22 alunos. Destes foram selecionados 6 alunos, de três níveis de desempenho diferentes.

Deste estudo é possível identificar que a representação mais utilizada na resolução de problemas foi a representação simbólica. Contudo, as representações pictórica e concreta também foram utilizadas sobretudo pelos alunos com nível de desempenho mais baixo, servindo de apoio aos alunos para perceber as situações propostas. Identificaram-se dificuldades tanto ao nível das várias representações do número racional como, da sua comparação e ordenação. Nalguns casos os alunos têm igualmente dificuldade em operar com números racionais. No entanto, sobretudo os alunos com nível de desempenho médio e alto, revelam ter conhecimentos matemáticos que lhe permitem lidar com os números racionais na resolução de problemas.

Palavras- chave: Números racionais; Representações; Resolução de problemas.

Abstract

This study aims to identify the representations used by students, the difficulties experienced and the knowledge they have about rational numbers.

The literature review focuses on four strands: historical evolution of numbers, set of rational numbers, meanings of fractions and learning of rational numbers.

The study follows a qualitative research approach. The data were collected during the internship, through the written productions that consist of the answer of 3 problems proposed to the students and of interviews made to them. This study was developed in a class of the 5th year of schooling with 22 students. Six students were selected from three different levels of performance.

From this study it is possible to identify that the representation most used in problem solving was the symbolic representation. However, the pictorial and concrete representations were also used mainly by the students with lower performance level, serving as support to the students to understand the proposed situations. Difficulties have been identified both in terms of the various representations of the rational number and in their comparison and ordering. In some cases students also have difficulty operating with rational numbers. However, above all, students with medium and high performance levels have mathematical knowledges that allow them to deal with rational numbers in solving problems.

Keywords: Rational numbers; Representations; Problem solving.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Joana Brocardo, pela orientação deste estudo, por toda a dedicação, paciência e apoio que me prestou ao longo destes anos e, principalmente, neste último mês.

À professora Neusa Branco, por ter sido sempre minha amiga e por ter despertado em mim, o gosto pela Matemática.

À professora Paula Fonseca e aos alunos do meu estudo por terem contribuído para esta investigação.

À minha colega Andreia Pereira que sempre me acompanhou durante a prática pedagógica e durante todo este processo de elaboração da tese.

Ao meu colega Alfredo Silva por ser um grande amigo e se mostrar sempre disponível para ajudar.

A todos os amigos que me incentivaram a não desistir.

Às minhas irmãs e sobrinhos que sempre me apoiaram.

Aos meus pais que estiveram sempre a meu lado e que tornaram este percurso possível. Sem a ajuda deles, eu não estaria a escrever estas palavras.

Ao meu marido por todas as palavras de apoio e de incentivo para não desistir e dar continuidade ao meu sonho.

Por fim, ao meu filho Enzo por todos os sorrisos que funcionaram, para mim, como palavras de força.

Índice Geral

Índice de Anexos

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresento as motivações que me conduziram à presente investigação, bem como, o problema e as questões da mesma.

1.2 Motivação do estudo

Serrazina (1996) refere que quando o ensino formal não se adequa ao pensamento das crianças, este parecer-lhes-á estranho e difícil, impedindo a sua assimilação e compreensão. Isto deve-se à complexidade que o tema dos números racionais apresenta.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) sugere situações onde se incluam elementos do quotidiano dos alunos e as que surgem no próprio campo da matemática (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007). Este programa introduziu duas alterações significativas, em relação ao estudo dos números racionais. Uma, a nível mais pontual, que introduz as várias representações dos números racionais, desde o 1.º ciclo; e, a outra, a um nível de fundo, em que identifica a ideia de subordinar o trabalho em torno dos números racionais a uma perspetiva de desenvolvimento de sentido de número (Brocardo, 2010).

Deste modo, o PMEB indica que os números racionais devem "ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fração nos casos mais simples" (Ponte et al., 2007, p. 15). Nos dois anos seguintes, este estudo será aprofundado, "quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados na forma decimal (usualmente designados por números decimais) a partir de situações de partilha equitativa ou de medida, refinando a unidade de medida" (Ponte et al., 2007, p. 15). Mais tarde, no 2.º ciclo, esta representação em forma de fração, “é agora usada nos seus múltiplos significados: quociente entre dois números inteiros, relação parte-todo, razão, medida e operador. É a altura de introduzir a representação na forma de numeral misto, embora sem a usar em situações de cálculo” (Ponte et al., 2007, p. 33). O PMEB salienta, ainda, a importância de se trabalhar as representações decimais e fracionárias, em paralelismo, destacando as vantagens e desvantagens de cada uma delas em situações concretas.

Brocardo (2010) considera essencial que se proponham situações associadas aos vários sentidos e significados das frações e das operações, de acordo com uma evolução adequada. Face a esta proposta, pretende-se “que os alunos adquiram um conhecimento aprofundado e completo dos números e operações aritméticas” (p. 20).

Segundo Delgado, “a representação dos números em fração permite aos alunos darem significado a algumas situações em que a representação decimal não se mostra tão adequada” (Delgado, 2009, p. 20). Deste modo, a antecipação da representação fracionária acompanhando a representação decimal, proposta pelo PMEB, assume ao longo dos três ciclos de aprendizagem, graus de desenvolvimento do sentido do número, que incluem, entre outros aspetos, a compreensão de múltiplas representações dos números, de regularidades dos números, do efeito das operações, das suas propriedades e das relações entre elas, e a capacidade para relacionar o contexto e os cálculos. (Mcintosh, Reys & Reys, 1992)

O sentido do número não se aprende em determinada fase do percurso escolar dos alunos. É “uma competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino obrigatório e não obrigatório e mesmo ao longo de toda a vida” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 46).

O sentido do número está profundamente ancorado na resolução de problemas, que é uma das três componentes consideradas por Mcintosh et al. (1992). De facto, para estes autores, para ter sentido de número, importa saber aplicar o conhecimento e destreza com números, o conhecimento e destreza com operações e aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo (Mcintosh, Reys & Reys, 1992, p. 7). Vieira (2010) refere que a resolução de problemas deve ser desenvolvida de forma sistemática e continuada, promovendo assim, o desenvolvimento de processos cognitivos, a construção e mobilização de conhecimentos matemáticos em consonância com o raciocínio e a comunicação (p. 15).

A minha motivação, relativamente a este estudo, prende-se com o facto de ter contactado com uma aluna do 8.º ano e aperceber-me de que a mesma tinha imensas dificuldades em interpretar enunciados de diversos problemas. Considerei que este deveria ser um tema pertinente e que merecia ser alvo de um estudo mais aprofundado. Como o tempo de estágio era escasso, o estudo sofreu várias alterações. Uma vez que estagiava com uma turma de 5.º ano e, pelo facto de naquele período ter de abordar os números racionais, acabei por optar investigar as representações usadas por alunos do 5.º ano durante a resolução de problemas com números racionais e analisar as dificuldades que manifestaram ter.

1.2. Problema e questões do estudo

Neste estudo, pretendo identificar as representações que os alunos usam na resolução de problemas de números racionais, as suas dificuldades e o conhecimento que têm sobre os números. Assim, procuro responder às seguintes questões:

- Quais as representações usadas, na resolução de problemas que envolvem números racionais, pelos alunos do 5.º ano de escolaridade?
- Quais as dificuldades sentidas na resolução dos mesmos?
- Que conhecimentos têm os alunos sobre os números racionais?

Capítulo 2

Números Racionais

Neste capítulo começo por analisar a evolução histórica do número, pois considero importante que se perceba a necessidade da utilização dos números na antiguidade, e como é que esta utilização dos números evoluíu de acordo com as diferentes necessidades dos povos. De seguida, foco-me no tema principal deste estudo, os números racionais, referindo o conceito do mesmo e tudo o que este tema engloba. Posteriormente, saliento a importância desta aprendizagem, de que forma os alunos lidam com o tema e discuto o entendimento dado por vários autores a sentido do número racional.

2.1. Evolução histórica dos números

Número é um conceito abstrato representado por um numeral (símbolo ou conjunto de símbolos que representa o número). O número é usado para descrever uma quantidade, uma medida ou uma ordem. “Quando um número representa uma quantidade, estamos a pensar no aspeto cardinal do número. (...) Quando um número indica uma determinada ordem estamos a pensar no aspeto ordinal do número: primeiro, segundo, terceiro, etc., ...” (p. 5). Estes dois aspetos do número estão patentes nos primeiros anos de aprendizagem das crianças, em torno dos números (Boavida, Delgado, Mendes, Brocardo & Duarte, 2016).

A necessidade de contar e de associar uma expressão escrita a essa contagem remonta para o período paleolítico. Segundo Sequeira, Freitas e Nápoles (2009) a descoberta de um pequeno osso efetuada em meados do séc. XX, em Ishango (Congo), parece provar que as populações locais já efetuavam somas e multiplicações rudimentares. No entanto, segundo Reis e

Fonseca (2000), é no período do mesolítico, que surge a necessidade de representar quantidades, quando o homem tentava representar o poder maior do sol e da lua, através de riscos, pontos e pequenos círculos em pedras e pinturas rupestres.

Mais tarde, com a atividade comercial entre os povos da Antiguidade, a noção de número é desenvolvida através de registos que tentam representar as transações comerciais através de riscos em entalhes num pau ou marcas de argila. Cada risco representa uma unidade e, de forma a ler mais rapidamente uma série de riscos, estas eram separados de cinco a cinco. Este terá sido o primeiro esboço de escrita matemática, em que os números estão associados à realização de contagens. A designação de "natural" traduz a ideia de que são os números que surgem naturalmente nas ações de contagem (Sequeira, Freitas & Nápoles, 2009).

Progressivamente é usual a repartição de terrenos e de alimentos, daí surgirem de forma espontânea as razões de números naturais, ou seja, as frações (Sequeira, et al. 2009). Estes novos números e, por terem sido criados pela razão do Homem, designam-se por números racionais.

Nos números naturais é possível realizar todas as adições e multiplicações. No entanto há várias subtrações e divisões que não são possíveis com números naturais, como por exemplo:

$$5-7 \text{ ou } 5\div 2$$

Para executarem os cálculos, os egípcios, na antiguidade, revelavam apenas, a necessidade de usufruir dos números naturais, das frações unitárias $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}...\right)$ e de algumas frações $\left(\frac{4}{2};\frac{9}{3};\frac{8}{2}...\right)$ (Sequeira, et al. 2009).

Foram os gregos que conferiram maior importância aos números racionais, não pelo facto de os estudarem, mas sim, pela necessidade que tinham em utilizá-los, uma vez que estes eram geómetras e estabeleciam várias relações de grandeza (Sequeira, et al. 2009).

Os pitagóricos julgaram que tudo no Universo se relacionava com os números naturais ou razões dos mesmos. Mais tarde, esta crença foi abalada, quando se depararam com a necessidade de utilizar a raiz quadrada de dois. Estes utilizavam pequenos segmentos de reta e frações do mesmo segmento para medir diagonais e, quando se depararam com um quadrado de lado 1 viram que a diagonal não era possível de ser medida com os tais segmentos e sim, que seria necessário o uso da raíz quadrada. Tal facto foi ocultado pelos mesmos, no entanto, esta descoberta fez com que surgissem os números irracionais. Ao conjunto dos números racionais em reunião com os números irracionais surgem os números reais (Sequeira, et al. 2009).

Posteriormente ao aparecimento dos números irracionais houve a necessidade de acrescentar o número zero e os números negativos aos números naturais, compondo assim, o conjunto dos números inteiros. Estes avanços na Matemática foram acompanhados de grandes dificuldades (Sequeira, et al. 2009).

O zero surge pela necessidade de representar grandezas nulas e, os números negativos, para representar as grandezas negativas, como por exemplo, a ausência de lucro, a perda do mesmo e as temperaturas das regiões, abaixo da temperatura do congelamento da água (Sequeira, et al. 2009).

Para a representação do zero, inicialmente, utilizou-se o símbolo o (letra inicial da palavra grega *ouden*), que significava vazio e, finalmente, utilizou-se o símbolo 0, que acompanhava as dimensões dos restantes algarismos. Ao longo dos anos, para se representar o zero no número 3105 utilizou-se os seguintes símbolos:

31 5;   31Ƴ5;   31.5;   31o5;   3105

A escolha dos símbolos, desenhos ou figuras para representar algarismos variou de local para local, apresentando factos de grande interesse, nomeadamente, a numeração romana cujos “símbolos numéricos” aproximam-se dos riscos rudimentares utilizados antigamente. Na numeração romana não existe a representação do zero, pois a passagem das unidades para as dezenas, das dezenas para as centenas e, assim sucessivamente, eram representados por símbolos diferentes (Fonseca & Reis, 2000).

2.2. O Conjunto dos números racionais

O conjunto dos números racionais compreende o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números fracionários (Caraça, 1989). Este conjunto representa-se por Q e é um sub-conjunto dos números reais (R), tal como, o conjunto dos números inteiros (Z) é um sub-conjunto dos números racionais (Q) (Boavida, et al., 2016).

O número racional é todo o número que pode ser representado por uma razão, na forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Esta divisão de dois números inteiros poderá não ser exata (Fonseca & Reis, 2000).

Monteiro e Pinto (2007) consideram o conjunto de números racionais "... um conjunto denso porque entre dois quaisquer números é sempre possível encontrar uma infinidade de outros racionais" (p. 17).

O conjunto dos números inteiros é constituído pelos números inteiros positivos e negativos e pelo zero (Boavida, et al., 2016).

O conjunto dos "números fracionários são números não inteiros que correspondem a partes de uma ou mais unidades que foram divididas em partes iguais" (p. 9). Podem, ser representados por uma fração em que o numerador e o denominador são números inteiros e que o denominador é diferente de zero. Nem todos os números escritos sob a forma de fração são considerados números fracionários, pois $\frac{4}{2}$ representa o número 2, que é um número inteiro e, $\frac{\sqrt{3}}{5}$ não tem um número inteiro no numerador (Boavida, et al., 2016).

Boavida et al. (2016) referem que nem todas as frações são consideradas números racionais, como por exemplo, $\frac{\sqrt{2}}{4}$ é uma fração, no entanto, não pertence ao conjunto dos números racionais.

Podemos considerar como números fracionários, os seguintes exemplos:

“ $-\frac{7}{10}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{6}{1000}$; $\frac{350}{99}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{9}{4}$; $2\frac{3}{4}\left(=\frac{11}{4}\right)$ ” (p. 9).

E “são exemplos de números racionais os seguintes números:

- 3; $-\frac{7}{10}$; $-\frac{2}{3}$; 0; $\frac{6}{1000}$; $\frac{350}{99}$; $\frac{3}{4}$; 2; $\frac{9}{4}$; $2\frac{3}{4}$; $\frac{4}{2}$ ” (p. 10).

Nos exemplos em cima, o número $2\frac{3}{4}$ está representado na forma de um numeral misto (Boavida, et al., 2016).

Os numerais mistos são representações dos números maiores que a unidade (Monteiro, Pinto & Ribeiro, 2010). Estes representam a soma da parte inteira com a parte fracionária. Numa determinada fração imprópria (numerador maior que o denominador) importa localizar a parte inteira e depois adicionar a parte fracionária. Ex. uma garrafa de água com capacidade para 1,5L enchem 6 copos de $\frac{1}{4}L$, ou seja $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, em que $\frac{4}{4}=1$ e $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, logo $1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$. Isto corresponde a 1 + $\frac{2}{4}=\frac{4}{4}+\frac{2}{4}$ (Boavida, et al., 2016).

Boavida et al. (2016) descrevem uma fração como sendo “uma notação usada em Matemática para representar o resultado da divisão exacta entre duas quantidades”, p. 63. A notação é composta pelo traço de fração (horizontal ou oblíquo) que simboliza a divisão, pelo numerador (número escrito acima desse traço) e pelo denominador da fração (número escrito abaixo desse traço). O denominador designa o número de partes iguais em que uma quantidade é dividida e o numerador menciona o número de partes a considerar. Ambos são considerados termos da fração.

Uma fração $\frac{a}{b}$, em que $b \neq 0$, representa a unidade quando a = b. Esta fração é menor que a unidade quando o numerador (a) é menor que o denominador (b) e, maior que a unidade quando o numerador (a) é maior que o denominador (b). Quando existem duas frações cujo denominador é o mesmo, comparam-se os seus numeradores, sendo a fração menor a que apresentar o numerador menor. Quando existem duas frações cujo numerador é o mesmo, comparam-se os seus denominadores, sendo a fração menor a que apresentar o denominador maior (Boavida, et al., 2016).

As frações que têm o numerador igual a 1 são designadas por frações unitárias, as restantes são consideradas frações comuns. Em todas estas frações, quando o numerador é inferior ao denominador designam-se por frações próprias. São frações impróprias, quando se verifica o contrário, em que o numerador é superior ao denominador. As fracções irredutíveis são as frações em que o numerador e o denominador não têm divisores em comum, diferentes de 1. As frações equivalentes são as frações que representam o mesmo número racional e podem ser obtidas, multiplicando ou dividindo, ambos os termos pelo mesmo número racional diferente de zero (Boavida, et al., 2016).

Segundo Sequeira et al. (2009) cada número racional pode ser expresso por uma infinidade de frações equivalentes.

Os números decimais são os números que, se podem representar por uma fração da forma $\frac{a}{10^n}$ (fração decimal) em que a é um número inteiro e n, um número natural. A representação de um número decimal inclui ou pode incluir, uma vírgula. A vírgula separa a parte inteira da parte fracionária. Assim sendo, todos os números que se apresentam à direita da vírgula representam a parte fracionária, assim como, todos os que se apresentam à esquerda da vírgula representam a parte inteira. Tanto a parte inteira como a parte fracionária podem ser constituídos por um número indeterminado de algarismos que representam diferentes valores de posição. No nosso sistema de numeração (sistema de numeração de posição de base 10) a posição que o algarismo ocupa no número relaciona-se com o expoente da potência de base

10 que lhe está associado. O algarismo das unidades corresponde ao expoente 0, o algarismo das dezenas ao expoente 1, o algarismo das décimas ao expoente – 1 e, assim sucessivamente. Por exemplo, no número 123,45:

O número 1 representa 1 x 10^2 – algarismo das centenas,

O 2 representa 1 x 10^1 – algarismo das dezenas,

O 3 representa 1 x 10^0 – algarismo das unidades,

O 4 representa 1 x 10^{-1} – algarismo das décimas

O 5 representa 1 x 10^{-2} – algarismo das centésimas.

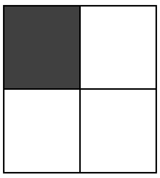
Do ponto de vista matemático, este tipo de representação deve designar-se por representação do número sob a forma de numeral decimal. Tanto os números decimais, como as frações, podem representar o mesmo número, embora usando representações diferentes. Por exemplo, $\frac{1}{4}$ e 0,25 representam o mesmo número. Podemos dizer, que "todos os números inteiros, positivos ou negativos, são números decimais" e que "nem todos os números racionais são números decimais." Por exemplo, o 2 e o -11(um número inteiro positivo e outro número inteiro negativo) são números decimais porque se podem representar por uma fração decimal, $\frac{20}{10^1}$ e $\frac{-100}{10}$, respectivamente. Já o número racional $\frac{1}{3}$ não é possível representar por uma fração decimal, no entanto, $\frac{1}{2}$ pode ser representado por $\frac{5}{10}$ (Boavida & Marques, 2010, p. 29).

Ciscar e Garcia (1999) referem que as frações e os números decimais são uma extensão natural dos números naturais e que a uniformização da relação parte todo, juntamente com as caraterísticas do nosso sistema de numeração decimal dão origem à introdução das frações decimais. Por exemplo, se considerarmos um retângulo a unidade e o dividirmos em dez partes iguais, cada uma das partes corresponde a $\frac{1}{10}$ (uma décima). Se voltarmos a dividir a décima parte em dez partes iguais, obtemos $\frac{1}{100}$(uma centésima).

2.3. Significados das frações

Segundo Godino, Cid e Batanero (2004), os números racionais são o primeiro conjunto de experiências numéricas que os alunos aprendem que não estão associados aos processos de contagem. Deste modo é relevante aprofundar o seu estudo e distinguir o significado das frações.

Brocardo (2010) considera que as frações podem assumir diferentes significados. Um primeiro significado diz respeito à relação parte-todo. Esta relação representa a relação entre a parte de um todo, em que o denominador exibe o número de vezes que a unidade é dividida, em partes iguais, e o numerador o número de partes escolhidas. O todo pode ser contínuo ou discreto. No todo contínuo, temos uma unidade dividida em partes iguais, como por exemplo, "$\frac{1}{4}$ representa a parte sombreada de um chocolate que foi dividido em 4 partes iguais" (p. 1).



No todo discreto temos um conjunto de objetos, que é repartido em partes iguais, como por exemplo, "$\frac{1}{4}$ representa a parte de bolas pretas do conjunto de todas as bolas" (p. 1).

Outro dos significados mencionados pela autora é o de medida. Esta serve para comparar uma grandeza com outra, que seja considerada, a unidade de medida. (ex. $\frac{5}{2}$ é o número de vezes que utilizo um copo, com capacidade de $\frac{1}{4}$ l, para encher um jarro com $\frac{5}{8}$ l, ou seja, $\frac{1}{4}$ l cabe $2\frac{1}{2}$ = $\frac{5}{2}$ de vezes num jarro de $\frac{5}{8}$ l, é importante que se saiba que $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{8}$ e que para medir $\frac{5}{8}$ obtenho duas unidades inteiras de $\frac{2}{8}$ e mais metade, ou seja $\frac{1}{8}$ $\left(\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}\right)$).

Em relação ao significado de quociente, este refere-se a situações em que a fração representa uma relação entre duas quantidades. Por exemplo, $\frac{3}{4}$ é o resultado da divisão de 3 chocolates por 4 crianças, ou seja, é a quantidade de chocolate que cada criança comerá.

O operador é outro dos significados mencionados pela autora. Este, faz com que a fração transforme o cardinal de um conjunto discreto ou contínuo. Como exemplo, temos que no conjunto discreto, $\frac{3}{4}$ representa os 9 chocolates de 12 chocolates e, em relação ao contínuo, os $\frac{3}{4}$ representam a escala usada para reduzir uma dada figura).

Em relação ao último significado, temos a razão que se refere à relação entre duas quantidades. Neste caso, Brocardo (2010) realça dois aspetos distintos, a razão como parte-parte, que é a relação entre duas partes do mesmo todo e, a razão entre valores de duas grandezas diferentes. No primeiro aspeto, temos como exemplo $\frac{3}{4}$ que é a "razão entre o número de rapazes e o número de raparigas numa turma e lê-se "3 para 4""(p. 2). No segundo aspeto $\frac{3}{4}$ refere-se à "razão entre a distância de 3 metros e o tempo de 4 segundos que se levou a percorrê-la, dando origem a uma nova grandeza, a velocidade" (p. 2).

Segundo Oliveira (1994), o significado a parte-todo do número racional é interpretada pela capacidade de dividir uma quantidade contínua ou discreta em sub-partes ou conjuntos de igual tamanho, ou seja, o símbolo $\frac{a}{b}$ representa uma parte de uma quantidade inteira, de uma unidade. A dobragem de folhas de papel, o retângulo, o círculo, o conjunto de objetos discretos e a reta numérica são os modelos mais usados para representar frações, sendo que as três primeiras envolvem a compreensão da noção de área.

A autora refere o número racional como ratio, traduzindo-o numa relação que se refere à noção de uma grandeza relativa. Quando duas razões são idênticas diz-se que estão na proporção[1] de uma para outra. O símbolo $\frac{a}{b}$ representa a relação entre duas quantidades, mas também pode ser usado, para representar uma divisão (quociente) que corresponde a outra interpretação dos números racionais (Oliveira, 1994).

Em relação à interpretação como operador, a autora refere que este é particularmente utilizado no estudo da equivalência de frações e na operação multiplicação, o que implica atribuir à fração $\frac{p}{q}$, uma interpretação algébrica[2].

[1] Proporção – igualdade entre duas razões.

[2] Interpretação algébrica é referida pela autora como "ver $\frac{p}{q}$ como uma função que transforma figuras geométricas em figuras geométricas semelhantes mas que são $\frac{p}{q}$ vezes maior ou ainda um conjunto com n elementos num outro com np elementos e depois reduzi-lo a $\frac{np}{q}$."

2.4. Aprendizagem dos números racionais

Os alunos no 1.º ciclo desenvolvem a compreensão das operações elementares e a destreza de cálculo com números naturais e racionais não negativos na representação decimal. No 2.º ciclo, esta compreensão e destreza é aprofundada, acrescentando a aprendizagem aos números inteiros e racionais não negativos na sua forma de fração, nos seus variados significados, tendo sempre em conta o desenvolvimento do sentido de número (Ponte et al., 2007).

É importante que os alunos percebam que os números têm diversas representações, para que possam resolver uma série de problemas com que são confrontados. Conceitos como fração, razão, decimal e percentagem devem ser trabalhados pelos alunos, em situações significativas, de modo a, tornar possível a passagem de umas representações para outras, das concretas para as figurativas e destas para as simbólicas. Os alunos devem compreender e utilizar estas representações e perceber quais as vantagens que oferecem em situações concretas (Abrantes et al. 1999).

É também neste ciclo que se aprofunda o estudo das operações com números racionais, relacionando a adição e a subtração e, a multiplicação e a divisão. Os subtópicos a desenvolver neste ciclo é a noção e representação de número racional, a comparação e ordenação, as operações, os valores aproximados e as percentagens (Ponte et al., 2007).

Nos programas anteriores a 2007 era dado um grande destaque ao cálculo algorítmico, pelo que em termos didáticos, ao introduzirmos os números naturais facilmente se introduziam os números decimais, uma vez que o tipo de representação facilitava o ensino para a parte fracionária e que as regras de cálculo são as mesmas. Também ao generalizarmos a estrutura decimal do sistema de numeração e ao introduzirmos o valor de posição faz com que o caminho que nos leva à aprendizagem dos números naturais seja semelhante à dos números decimais, uma vez que é mais fácil passar das “unidades”, “dezenas” e “centenas” para as “décimas”, “centésimas” e “milésimas” (Brocardo, 2010). Segundo Monteiro e Pinto (2007) esta conversão dos números inteiros para os números decimais seguindo a lógica de divisão das classes e ordens, do ponto de vista do ensino dos números baseado na estrutura decimal faz sentido, “mas se entendermos o sentido do número de um modo holístico e relacional, esta representação pode ser considerada mais abstrata e demasiado apoiada nos símbolos, levando ao estabelecimento de regras, como a conhecida e muito praticada “vírgula debaixo de vírgula”” (p. 16).

No programa de 2007, o cálculo algorítmico deixa de ser o foco do trabalho em torno dos Números e Operações, podendo iniciar a representação fracionária antes da representação decimal. Brocardo (2010) considera que se deve trabalhar os números racionais, na sua representação fracionária, atribuindo-lhes sentido a partir de contextos significativos. O PMEB salienta “a importância de usar diferentes contextos que permitam aprofundar a compreensão dos números racionais e as destrezas de cálculo” (Brocardo, 2010, p. 17). Monteiro e Pinto (2007) consideram que o estudo das frações deve ser apoiado nas diferentes representações e que deve ser estabelecido a ligação com os modos de representação informais dos alunos enquanto resolvem problemas.

Também Godino, Cid e Batanero (2004) refere que o conceito de fração começa a ser entendido pelos alunos quando lhes proporcionamos várias situações, dos diferentes significados, que não são todos, igualmente, fáceis de entender.

Uma das causas apontadas para os maus resultados dos alunos na compreensão dos racionais tem origem nos significados das frações (parte, todo, medida, razão, quociente e operador) e na diversidade de unidades. O facto de alguns alunos não entenderem o estudo dos números racionais é uma das causas, que os leva a não gostarem da disciplina de matemática (Monteiro & Pinto, 2007).

Post et al (2007) refere a falta de noção que os alunos têm sobre a compreensão das várias formas de representar os números racionais (numerais decimais, razões, divisões, pontos de uma reta numérica, medidas e partes de um todo), enquanto Monteiro e Pinto (2007) referem apenas duas dessas representações (fração e numeral decimal) considerando que estes têm aspetos particulares que dificultam a sua compreensão (Post et al, citado por Quaresma, 2010).

No entanto, as autoras afirmam que os números fracionários são considerados importantes no desenvolvimento de estruturas mentais necessárias ao crescimento inteletual dos alunos, devido à riqueza de relações que estes números implicam. Uma fração permite expressar diferentes relações, pelo que esta multiplicidade de significados pode ser ambígua e que os professores devem estar atentos às dificuldades que podem, surgir (Monteiro &Pinto, 2007).

A prática e o discurso que se utilizam no estudo dos números racionais representam um avanço significativo no caminho para pensar e usar os números, que tantas dificuldades provocam nos alunos (Godino, Cid & Batanero, 2004).

Monteiro e Pinto (2007) consideram que, o tempo dedicado a resolver cálculos rotineiros com frações e decimais é maior do que o dedicado à resolução de problemas.

Pelo que o PMEB privilegia a resolução de problemas neste ciclo de ensino para que possibilite ao aluno alargar o seu conhecimento sobre os números, de conceber e usar estratégias, discutir a sua adequação às situações e formular conjeturas e testá-las (Ponte et al., 2007).

O PMEB também valoriza o desenvolvimento do sentido de número (Ponte et al., 2007).

O desenvolvimento do sentido de número está interligado à escolha de contextos significativos da compreensão numérica e do trabalho que é dado ao cálculo mental. Também está associado à capacidade que os alunos têm de relacionar a compreensão global dos números e operações com os juízos matemáticos e as estratégias utilizadas pelos mesmos, de forma flexível (Gonçalves, 2011).

Brocardo (2010) salienta três aspetos que este programa tem em conta, no que diz respeito ao desenvolvimento do número nos racionais:

1) Valorização do cálculo – trabalhar o sentido do número envolve ser exigente e saber escolher o tipo de cálculo que melhor se adequa ao cálculo a efetuar;

2) Valorização da construção do sentido de número – rotular os números, para que mais tarde, com muita experiência, se possa retirar o rótulo, de modo a que a criança compreenda que o rótulo não é importante para o sentido que dá às frações e aos cálculos associados (ex. $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$, esta expressão talvez não faça sentido para a criança, mas se dermos o exemplo da pizza dividida em quatro, já começa a fazer sentido para a criança)

3) Construção de relações numéricas – ser capaz de efetuar um cálculo sem recorrer à calculadora, de forma flexível e produtiva (ex. relacionar o cálculo às propriedades).

Para que este desenvolvimento do sentido de número se concretize cabe ao professor refletir sobre a sua prática e os modos como as deve concretizar. Sugere-se também a aplicação de tarefas de natureza exploratória, que se adequem a contextos significativos dos alunos e que sejam, cuidadosamente, planeadas e pensadas, pois é essencial que estes modelos façam sentido aos alunos. É também importante, que se dê a oportunidade dos alunos explorarem as várias situações de modo a que, estes possam descobri-las por si mesmo (Brocardo, 2010).

Os professores devem também promover a discussão e a justificação de diversas soluções por parte dos alunos, dar enfase à análise de erros e perceber o que impede os alunos de progredirem na aprendizagem, bem como, deixá-los explicar as suas dúvidas (Gonçalves, 2011).

“A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida (…) pelo professor” (Ponte et al.(2007), citado por Gonçalves, 2011).

Capítulo 3

Metodologia de Investigação

Este estudo tem como objetivo analisar o modo como os alunos resolvem problemas de matemática. Mais concretamente, tem o objetivo de identificar as representações que os alunos usam na resolução de tarefas de números racionais, as suas dificuldades e o conhecimento que têm sobre os números. Pretende, assim, dar resposta às seguintes questões:

- Quais as representações usadas, na resolução de problemas que envolvem números racionais, pelos alunos do 5.º ano de escolaridade?
- Quais as dificuldades sentidas na resolução dos mesmos?
- Que conhecimentos têm os alunos sobre os números racionais?

Neste capítulo, descrevo e justifico as opções metodológicas do estudo, no que respeita, nomeadamente, ao contexto e à escolha dos participantes, os métodos e o processo de recolha de dados e as opções tomadas na sua análise.

3.1. Opções metodológicas gerais

O principal interesse da investigadora consiste em compreender os conhecimentos que os alunos têm dos números racionais, que representações usam e quais as dificuldades sentidas na resolução de problemas associadas aos números racionais.

As opções metodológicas deste estudo enquadram-se nas caraterísticas da investigação qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma das caraterísticas da investigação qualitativa é o facto de o investigador se interessar mais por compreender os procedimentos utilizados pelos alunos do que pelos resultados. Esta caraterística está patente no meu estudo, uma vez que me interessa mais perceber como é que os alunos pensam sobre um certo processo, que os leva a uma determinada conclusão, do que propriamente o resultado. Outras duas caraterísticas defendidas por estes dois autores resultam de os dados recolhidos se apresentarem como de carater descritivo e a sua análise ser feita de forma indutiva. Este estudo visa a recolha de dados de natureza descritiva, pois analisa as produções escritas dos alunos relativamente às tarefas propostas, bem como o modo como os alunos pensam para as resolver. É um estudo de caráter indutivo, não visa a generalização. Incide em casos particulares e, não se desenvolve a partir da formulação de hipóteses. Relativamente à outra caraterística da investigação qualitativa, defendida por Bogdan e Biklen, a fonte direta dos dados são os alunos, sendo estes recolhidos num ambiente natural – a escola – pelo investigador.

3.2. Contexto e participantes

Neste estudo, trabalhei com os alunos do 5.º ano da escola E.B. 2/3 Pinhal de Frades, da sede do agrupamento, Escola Básica Carlos Ribeiro. Esta turma é constituída por vinte e dois alunos. No entanto, o meu estudo apenas irá incidir sobre seis dos alunos da turma.

Pedi à professora cooperante que selecionasse dois alunos que considerasse terem um desempenho fraco[3] na disciplina de Matemática, dois alunos com um nível de desempenho que considerasse médio e outros dois, cujo desempenho considerasse alto. Assim sendo, a professora cooperante apontou-me alguns nomes de alunos que poderiam ser o meu conjunto. Como neste estudo não é relevante o género dos alunos, optei por escolher pares que pertencessem a cada uma das três categorias (nível baixo, nível médio e

[3] Por simplificação são designados por alunos com desempenho fraco. O mesmo para o desempenho médio e alto.

nível alto), mas que fossem desinibidos, para que eu pudesse perceber a explicação dos seus pensamentos.

Número de alunos selecionados

Ano / Nível	5.º ano
Baixo (B)	2
Médio (M)	2
Alto (A)	2

Quadro 1 – Distribuição dos alunos por nível de desempenho

3.3. Projeto de intervenção

O meu projeto de intervenção incide na área da Matemática, no tema “Números Racionais”, onde apresentei três tarefas aos alunos. O meu público alvo são 6 alunos, de uma turma do 5.º ano, onde realizei o meu estágio de intervenção. Como já referi anteriormente, foram escolhidos três pares, que compunham os três níveis de desempenho que eu pretendia para este estudo.

O tema que eu escolhi trabalhar neste projeto, iria ser iniciado nas minhas 3 semanas de intervenção, o que dificultou este estudo. Eram as 3 últimas semanas de estágio, os alunos ainda não estavam familiarizados com o tema, daí ter optado iniciar o tema com a turma e só depois apresentar as tarefas do meu estudo aos 6 alunos.

As tarefas foram exploradas consoante a disponibilidade dos alunos, nomeadamente, à hora de almoço ou nos intervalos. Acabei mesmo por pedir à diretora de turma que dispensasse os alunos, que não tinham a mesma disponibilidade, das aulas de Formação Cívica e Estudo Acompanhado, para que pudesse terminar o meu estudo. Enquanto os alunos realizavam as tarefas, eu estava por perto, e para que o raciocínio não fosse interrompido, pelo toque de entrada, eu realizava logo a entrevista. Apercebi-me que os intervalos não eram suficientemente grandes para que os alunos realizassem as tarefas e que eu pudesse entrevistá-los. Abandonei a ideia de lhes propor as mesmas, durante o intervalo, porque havia alunos para os quais o tempo de intervalo não era suficiente para responder às perguntas.

Deste modo, numa tentativa de gerir melhor o tempo que tinha para a realização das entrevista, comecei a juntar 2 ou 3 alunos numa sala, durante as respetivas horas de almoço. Distribuía os alunos pela sala, entregava-lhes a tarefa e quando algum aluno terminava, sentava-me ao pé dele e fazia-lhe a entrevista. Com os alunos que demoravam mais tempo, e uma vez que iriam ter aulas a seguir, dividi as entrevistas por várias horas (de almoço do aluno).

A duração das entrevistas variou de aluno para aluno e de tarefa para tarefa. Os alunos com alto nível de desempenho realizavam as tarefas, em 15/20 minutos. Os alunos com mais dificuldades demoravam 60 minutos a realizar a tarefa e, às vezes não era suficiente voltando a apresentar a mesma tarefa, noutra sessão de 60 minutos.

Como já referi anteriormente, o tema “Números Racionais” foi introduzido por mim, durante as minhas 3 semanas de intervenção. Iniciei a primeira aula no dia 7 de maio de 2012 e terminei a 25 de Maio de 2012. Os alunos tinham Matemática 3 vezes por semana, com duração de 90 minutos cada aula.

Na primeira aula, apresentei tarefas para que os alunos, identificassem partes da unidade e que as apresentassem na forma de fração. Que comparassem e ordenassem os números racionais representados em diferentes formas e que identificassem frações equivalentes. As tarefas propostas foram as “dobras e mais dobras”, as “ilustrações” e os “queijinhos”. A primeira consistia em dobrar 3 tiras, a primeira tira, dobrada ao meio, a segunda tira dobrada em 4 partes iguais e a terceira tira em oito partes iguais.

Todas as tiras tinham as mesmas dimensões e aqui, tinham que registar todas as equivalências e conclusões que encontravam. Na segunda tarefa eram-lhes entregue 3 folhas A5 e os alunos tinham que as dobrar em 4 partes iguais, mas as 3 folhas tinham que ser dobradas de formas diferentes. Pretendia-se que os alunos se apercebessem que cada quarto de cada folha, apesar de apresentar formas diferentes representavam a mesma quantidade. Na tarefa dos queijinhos foi-lhes entregue vários queijinhos em papel, todos com o mesmo tamanho, mas divididos em partes diferentes e o objetivo era que os alunos explorassem e anotassem as equivalências encontradas.

Expliquei mais detalhadamente, a primeira aula, porque nas aulas seguintes, os alunos iriam recorrer aos materiais que disponibilizei nesta aula, nomeadamente, os queijinhos e as tiras.

Comecei as aulas sem dar a conhecer aos alunos o conceito de numerador e denominador. Somente mais tarde é que estes conceitos vieram ao de cima. Sem que eles conhecessem as regras para adicionar frações com diferentes denominadores, levei-os a pensar como poderiam adicionar essas mesmas frações. Com o auxílio dos “queijinhos”[4], os alunos começaram a perceber que um quarto era a metade de um meio, que um oitavo era a metade de um quarto e, assim, sucessivamente. Logo, quando havia uma adição de frações cujos denominadores eram diferentes, os alunos iam ver quantos queijinhos cabiam na adição pretendida. Por exemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$$
$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

Desta forma, os alunos começaram a perceber que havia frações equivalentes[5]. Mais tarde, foram procurar a família das frações, ou seja, frações equivalentes. Nesta tarefa, os alunos, para além de procurarem as frações equivalentes, também tinham de encontrar regularidades entre elas.

[4]“queijinhos” – vários círculos em papel, divididos em diferentes partes, geometricamente iguais.

[5] Frações equivalentes – frações que representam a mesma parte do todo.

Organizei a turma em grupos e entreguei-lhes uma folha de cartolina com uma fração. Todos os grupos conseguiram achar as várias frações equivalentes e diferentes regularidades. Houve grupos que começaram a pensar na adição. Por exemplo, a fração de um terço: “adiciono um em cima, adiciono três em baixo e, obtenho dois sextos e assim, sucessivamente”. Propus-lhes que pensassem noutra regularidade, mas que, desta vez, não poderiam utilizar a adição. Às tantas, já todos os grupos chegavam à regularidade que eu pretendia (multiplicar o numerador e o denominador da fração inicial pelo mesmo número). Não consegui presenciar a apresentação destas regularidades, pois surgiu um imprevisto. Para a minha tese iria propor a alguns alunos um problema, onde a fração funcionaria como um operador aplicado a um conjunto contínuo. Para isso, comecei a explicar as frações utilizando o operador aplicado a um conjunto discreto. Iniciei a aula falando em quantidades discretas e perguntando aos alunos que fração correspondia a determinada quantidade discreta. Mais tarde, propus uma tarefa – tarefa dos percursos[6] – em que os alunos teriam de utilizar o operador aplicado a um conjunto contínuo. Quando abordei as quantidades discretas, os alunos não revelaram dificuldades, mas, quando iniciei a tarefa dos percursos, tiveram imensas dificuldades. Sugeri-lhes que vissem as “tiras de papel” que utilizamos na primeira aula, destas três semanas, de modo a facilitar o raciocínio. Houve alunos que, com a ajuda das tiras, começaram a resolver. Entretanto, aos restantes, tive de dar pistas para que chegassem ao resultado. A utilização das tiras foi um auxílio para que vissem como deveriam dividir a reta numérica, uma vez que os percursos feitos pelos alunos estavam representados por frações com diferentes denominadores. Outra das pistas que dei, principalmente para os alunos com mais dificuldades, foi no sentido de utilizarem os “queijinhos” para encontrar frações equivalentes e depois comparar com as frações, utilizando o mesmo denominador. Na segunda pergunta, nenhum aluno utilizou o operador. Os que chegaram à resposta, dividiram a reta em oitavos e verificaram que cada oitavo correspondia a um quilómetro e, como o Luís tinha percorrido cinco oitavos, significava que tinha percorrido cinco quilómetros.

[6] Tarefa dos percursos – Monteiro, Cecília; Pinto, Hélia; “Desenvolvendo o sentido do número racional”, Associação de Professores de Matemática, 2007, pp.73 – tarefa 23.

Como a aula já estava a chegar ao fim, acabei por lhes explicar que poderiam multiplicar os cinco oitavos pelos oito quilómetros e o resultado corresponderia aos quilómetros percorridos pelo Luís. Tive de lhes explicar que apenas o numerador multiplica pelo oito e que o denominador é multiplicado por um, uma vez que o oito é o mesmo que ter oito sobre um e as multiplicações são feitas em paralelo. Se tivesse tido mais tempo, talvez lhes propusesse que procurassem outra estratégia ou, então, sugeria outra tarefa onde a fração não correspondesse a um número exato. Nas quantidades discretas, os alunos conseguiram perceber a utilização do operador; quando lhes perguntei, por exemplo:

"Temos 12 laranjas, quantas correspondem a um terço?"

Os alunos foram pela representação icónica, mas, depois, quando lhes pedi que representassem em linguagem matemática um terço de 12 laranjas, consegui obter respostas como:

"um terço vezes 12, ou seja, 12 a dividir por três, que dá 4."

Ter tido mais tempo teria sido importante para explorar com eles este conteúdo. Até porque, se, em tarefas mais simples, os alunos apresentaram dúvidas, era certo que as dificuldades aqui fossem maiores.

3.4. Organização da recolha de dados

Como a minha recolha de dados incidia apenas nalguns alunos da turma, e como não pretendia que nenhum aluno faltasse às aulas, optei por recolher estes dados, consoante a disponibilidade dos alunos. Desta forma, consegui que os alunos reunissem comigo, após a hora de almoço. Mesmo assim, dois dos alunos, como iam almoçar a casa, não me disponibilizaram esse tempo. Com esses alunos, tive de recolher os dados durante os intervalos das aulas, e pedir à diretora de turma que me disponibilizasse a hora de formação cívica e estudo acompanhado, para conseguir concluir a recolha dos dados. Comecei por trabalhar com os alunos individualmente, mas, para uma melhor gestão do tempo, terminei a trabalhar com os alunos a pares.

Nesta investigação, a recolha de dados incidiu nas três tarefas que propus aos alunos e nas entrevistas realizadas. No quadro 2 sintetizo os métodos, as fontes dos dados, as formas de registo e os documentos resultantes desta recolha.

Métodos de recolha	**Fontes de dados**	**Formas de registo**	**Documentos**
– Recolha documental	– Alunos selecionados		– Registos produzidos pelos alunos
– Entrevistas	– Alunos selecionados	– Gravação áudio	– Transcrição

Quadro 2 – Síntese da recolha de dados

3.4.1. Recolha documental

Os registos produzidos pelos alunos provêm das três tarefas que lhes propus. Estas tarefas foram realizadas durante o tempo disponível dos alunos e eram realizadas em folhas de trabalho individual.

A primeira tarefa, a tarefa 1 - "Partilhando pizas" é retirada de (Monteiro & Pinto, 2007, p. 35). Esta tarefa tem como objetivos:

- Resolver problemas de partilha equitativa através de estratégias pessoais;
- Explorar a linguagem das frações;

- Representar os números fracionários na forma de fração e numeral decimal;
- Comparar frações com a unidade;

A tarefa 2 - “As maçãs” é retirada de (Monteiro & Pinto, 2007, p. 61). Esta tarefa tem como objetivos:

- Reconhecer frações que representam números maiores do que a unidade;
- Escrever frações impróprias na forma de numeral misto;
- Comparar números racionais.

A tarefa 3 - “Percursos” é retirada de (Monteiro & Pinto, 2007, p. 71). Esta tarefa tem como objetivos:

- Compreender e usar a fração como operador;
- Representar frações na linha numérica;
- Comparar números representados por frações com numeradores e denominadores diferentes;
- Identificar frações equivalentes;
- Comparar e ordenar números racionais.

3.4.2. Entrevistas

A entrevista clínica no domínio da aprendizagem fornece elementos complementares para a avaliação e desenvolve o conhecimento fundamental sobre as aprendizagens e conceções dos alunos. Estes fatores contribuem para entender e melhorar o processo ensino/aprendizagem, bem como, fornecer conhecimento acerca das estratégias dos alunos na resolução de problemas, conceitos e conceções erróneas (Long & Bem-Hur, citado por

Gonçalves, 2011). Nesta perspetiva, a entrevista clínica é a que melhor se adequa aos propósitos deste estudo.

Durante as entrevistas, procurei que os alunos estivessem à vontade para falar das suas estratégias de resolução, o que vai ao encontro do que Bogdan e Biklen (1994) consideram ser boas entrevistas.

Com as entrevistas pretendi recolher dados descritivos, na linguagem dos alunos, de modo a permitir à investigadora desenvolver intuitivamente a ideia sobre a maneira como os alunos interpretam determinados aspetos (Bogdan & Biklen, 1994).

As entrevistas foram feitas em simultâneo com a execução das tarefas. Ao terminarem uma tarefa, pedia-lhes que explicassem o seu raciocínio. E, sempre que os alunos "bloqueavam", perguntava-lhes quais as dúvidas que tinham.

No decorrer da realização das entrevistas procurei colocar questões como: "Explicas-me o que fizeste?", " Como pensaste?", "Porquê?", "Estás com dúvidas?".

As entrevistas eram realizadas nas salas de aula disponíveis naquelas horas. Utilizei dois gravadores de pequenas dimensões, no sentido de evitar qualquer incidente imprevisto.

Os alunos mostraram-se entusiasmados por serem entrevistados; inclusive, um deles chegou a perguntar-me se já era famoso na minha escola.

3.5. Análise de dados

"A análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205).

Para realizar a análise, tive que transcrever as entrevistas, ler as mesmas e verificar as produções escritas dos alunos. Depois foquei a minha análise nas respostas às questões do estudo.

Capítulo 4

Análise de Dados

Neste capítulo descrevo o processo de resolução dos problemas que foram propostos aos alunos, salientando as representações que usam, as dificuldades dos alunos e as minhas intervenções. Deste modo, o presente capítulo é composto pelos problemas e respetivas entrevistas feitas aos alunos.

4.1. Problema “Partilhando pizas”

4.1.1. Entrevista do Daniel

Inicialmente, quando começa a ler o problema, e sem escrever nada no papel diz “cada amigo comeu três.” Procurando saber o que ele estaria a querer dizer perguntei “comeu três quê?” e ele respondeu “três pizas”. Procurei que fosse mais específico e o aluno diz “3 partes”.

A seguir peço que registe no papel, o seu raciocínio e o aluno faz o seguinte esquema:

Daniel: Cada um comia isto – apontando para o papel.
Investigadora: Cada um comia isso? E isso é o quê?
Daniel: Três, três partes.

O aluno estava a confundir o número de pizas com o número de amigos. Por isso indiquei que se tratava de 4 amigos:

Daniel: Então … um comia, cada um comia duas partes, da piza e a outra parte, … ahh, uma parte,… não estou a perceber.

Notava-se algum nervosismo, por parte do aluno, por temer dar a resposta errada. A seguir, para que ele percebesse o que era pedido e, uma vez que este tema ainda tinha sido abordado poucas vezes na aula, tentei operacionalizar a divisão por 4, dando um exemplo de 4 amigos que tinham 3 pizas e, perguntando quanto comeria cada um deles, com o intuito que ele representasse essa situação no papel. Depois de alguma confusão, o aluno acaba por dividir cada piza em 4 e diz:

> **Daniel:** Em quatro, assim…uma pessoa comia esta, outra comia esta, outra comia esta e outra comia esta.
> **Investigadora:** Então e isso dá quanto a cada pessoa?
> **Daniel:** Dá … cada um comia três, três partes.
> **(...)**
> **Investigadora:** Como é que se chama esta parte?
> **Daniel:** Hum… hum…hum…um quarto.
> **Investigadora:** Um quarto. Mais esta parte, é o quê?
> **Daniel:** Hum, um quarto também.
> **Investigadora:** E mais esta?
> **Daniel:** Um quarto.
> **Investigadora:** Então uma pessoa come estas três fatias, não é?
> **Daniel:** É.
> **Investigadora:** E estas três fatias correspondem a quantos quartos?
> **Daniel:** Três.
> **Investigadora:** Três quartos?
> **Daniel:** Sim.

O aluno consegue identificar cada fatia como sendo um quarto da piza, e com a minha ajuda, acaba por adicionar as três partes que cada amigo comeu acabando por identificar os três quartos (figura 1).

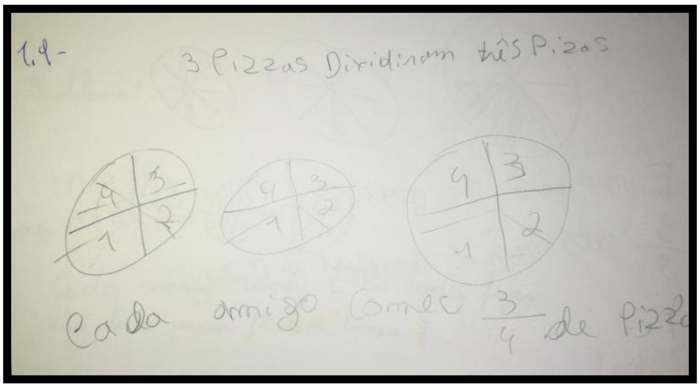


Figura 1 - Resposta escrita do Daniel (1.1)

Na pergunta seguinte (1.2), o aluno teria que concluir se cada amigo comeu mais ou menos do que uma piza. Daniel confunde o que é pedido com a comparação do que cada amigo come. Por isso indica: “Ahh, cada amigo comeu o mesmo”. Procuro que ele perceba a questão colocada mas não consigo focar a sua atenção no significado das suas respostas:

Investigadora: Cada amigo comeu o mesmo… e foi quanto, esse mesmo?
Daniel: Três quartos.
Investigadora: E três quartos é menos ou mais que uma piza?
Daniel: É… é igual.
Investigadora: É igual à piza?
Daniel: Não, é menos – (e fica a olhar para mim).

Peço que leia novamente a pergunta e o aluno diz:

Daniel: Ah, … comeu… comeu igual. Porque cada um comeu três partes…aqui, de uma piza.
Investigadora: Sim. Cada amigo comeu três quartos, não é? Então tu dizes que todos comeram igual, mas isso era para a pergunta 1.1, saber quanto é que cada um comeu. Comeram todos o mesmo. Agora na 1.2 está a perguntar, cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza? Tu comes três fatias da piza, estás a comer mais que uma piza ou menos que uma piza?
Daniel: Tou a comer menos.
Investigadora: Menos que uma piza? Porquê?
Daniel: Porque só comi, só comi três.
Investigadora: Três fatias? Quanto é que tinhas que comer para comer uma piza inteira?
Daniel: Quatro.

Embora respondendo corretamente, pareceu-me que Daniel ainda não estava completamente seguro da sua resposta. Por isso, recorro aos queijinhos para ilustrar a situação.

O aluno durante a resolução deste problema compara a quantidade que cada um come, identificando que os 4 amigos comeram o mesmo. Depois, através da representação icônica e do material manipulável que eu uso, identifica essa quantidade como sendo menor que a unidade e que são necessárias quatro fatias para completar uma piza (figura 2).

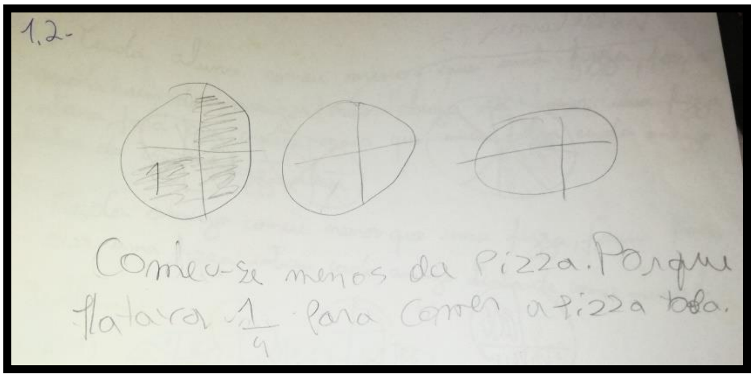


Figura 2 – Resposta escrita do Daniel (1.2)

Na questão 2.1 as 3 pizas são divididas por 8 amigos. O Daniel começa a resolver o problema sozinho e diz:

Daniel: Aqui está a pedir… que…são oito amigos e pediram três pizas, … ah, e dividiram em igual. E eu fiz um oitavo, oito oitavos e cada um comeu duas pizas da… da da piza.
Investigadora: Duas pizas? Isto dá duas pizas?
Daniel: Duas partes.
Investigadora: Duas fatias da piza?
Daniel: Dois oitavos.
Investigadora: Então cada um comeu dois oitavos da piza?
Daniel: Sim.

Nesta altura não está claro se ele indica que são $\frac{2}{8}$ de cada piza ou se são $\frac{2}{8}$ no total. Não distingo estas duas possibilidades e encaminho o Daniel para que a sua resposta corresponda ao que cada amigo comia de cada piza:

Investigadora: Então o amigo 1 comeu isto, mais isto, mais isto?
Daniel: Sim.
Investigadora: Então ao todo é quanto?
Daniel: Três, oito…ai não … - conta baixinho – seis oitavos.
Investigadora: Então e o amigo 2 comeu quantos?
Daniel: Dois, ai não, também comeu…a igual…a seis oitavos.
Investigadora: E o amigo 3 comeu?
Daniel: Seis oitavos.
Investigadora: E o amigo 4 comeu?
Daniel: Seis oitavos.
Investigadora: O amigo 5?
Daniel: Hum, não há.
Investigadora: Ai não há…são só quatro amigos?

Daniel: Sim.
Investigadora: É o que pede ..., são quatro amigos agora?
Daniel: Não. Pede oito.

Passado algum tempo, sem se perceber o que fez com que percebesse a pergunta, responde:

Daniel: Cada amigo comeu … três oitavos.
Investigadora: Três oitavos de piza?
Daniel: Sim.

O Daniel começa por dividir as pizas em oito e diz que cada amigo comeu dois oitavos da piza. Sabe que tem de dividir o todo por oito, mas confunde o número de amigos deste probema com o número de amigos do problema anterior e reparte as pizas, apenas por 4 amigos. Ao identificar que cada amigo comeu $\frac{2}{8}$ de uma piza, o Daniel chega à conclusão que ao todo cada amigo come $\frac{6}{8}$ de piza. Mas, com a minha ajuda, percebe que as 3 pizas não chegariam para todos.

Finalmente, o aluno dividiu as 3 pizas pelos 8 amigos e assim chegou ao resultado $\frac{3}{8}$ (figura 3).

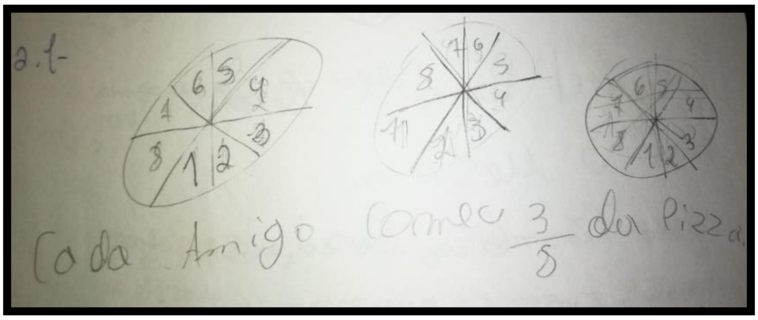


Figura 3 – Resposta escrita do Daniel (2.1)

Na pergunta seguinte, quando tem que comparar a porção que cada amigo come com a unidade diz:

Daniel: Eu não estou a perceber.

Optei por o ajudar, com os queijinhos para que percebesse o que era pedido. Verifiquei que tem a noção de que $\frac{3}{8}$ é inferior a 1, mas que só parece perceber isto, com o auxílio do material manipulável, neste caso, os queijinhos (figura 4).

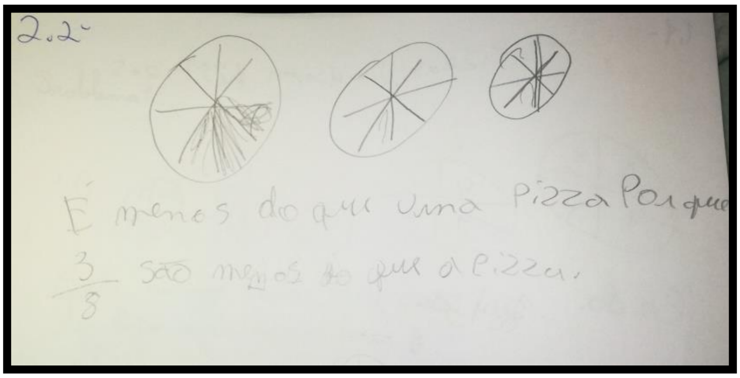


Figura 4 - Resposta escrita do Daniel (2.2)

Houve uma interrupção na resolução da tarefa. Quando Daniel voltou a pegar neste problema, tentou resolver a última alínea e escreveu “É igual porque cada amigo come o mesmo.” O aluno continua a confundir o que cada amigo come, com o que é pedido. Daniel sugere uma relação de frações equivalentes, indicando que $\frac{2}{8}$ é igual a $\frac{1}{4}$ e que para chegar a $\frac{3}{4}$ precisa de $\frac{6}{8}$ de piza. Optei por usar os queijinhos indicando as fatias que cada amigo comeu nas diferentes alíneas. Depois, perguntei se $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{3}{8}$. Daniel responde:

Daniel: … Não. É …, este é mais…. É mais uma fa…mais uma… uma fatia.
Investigadora: Mais uma fatia?
Daniel: Não, mais…, mais…duas fatias daqui.
Investigadora: Mais duas fatias? Então há bocado estavas a dizer que duas fatias destas eram iguais a uma fatia desta.
Daniel: Para ser igual tinha que ser esta, esta e mais esta. – demonstrando com os queijinhos.
Investigadora: Ah, para ser igual a esta? Ou seja, quantos oitavos é que faltavam para ser igual a esta?
Daniel: Ah…três … três oitavos.

Investigadora: Faltavam três oitavos para este comer o mesmo que este?
Daniel: Sim.
Investigadora: Mas este só comeu três oitavos…só comeu esta parte e este comeu isto tudo, comeu mais três oitavos que este, não foi? Então quem é que comeu mais? É o que pergunta.
Daniel: Comeu…comeu este, o do…
Investigadora: O do problema?
Daniel: Um.

Em suma, Daniel, provavelmente influenciado por estar numa situação de entrevista, não toma a iniciativa de desenhar representações das pizas antes de começar a responder às perguntas. No entanto, quando eu lhe peço explicitamente para o fazer, desenha sem hesitar um círculo que divide em 3 partes iguais. O mesmo acontece em outras situações, ao longo da entrevista, em que regista por escrito as respostas que dá.

Daniel, parece ter uma noção da relação parte todo, mas tem dificuldades em a operacionalizar quando o todo é constituído por 3 pizas que têm de ser repartidas por 4 pessoas e depois por 8 pessoas.

Embora com alguma insegurança inicial, compara corretamente $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$ com a unidade mas não estabelece uma relação de dobro/metade entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$. Adiciona frações com o mesmo denominador e indica que $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$ são frações equivalentes.

O material manipulável usado (queijinhos) parece ter sido importante para o aluno perceber as questões. No entanto, como optei por ser eu a mostrar como ele podia ser usado, o aluno não teve oportunidade de representar as situações indicadas na tarefa por meio deste material.

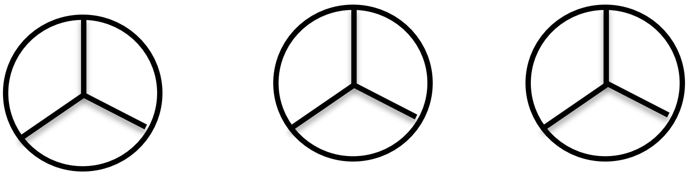
A análise das transcrições das entrevistas permite-me perceber que eu conduzo demais o aluno não lhe dando, por exemplo, espaço para usar o material. Também, não consigo focar a atenção do aluno no significado dos números que indica, centrando toda a sua atenção nos números.

4.1.2. Entrevista da Marta

A aluna lê o enunciado e com a ajuda dos queijinhos começa a resolver.

Inicialmente, a aluna divide as 3 pizas por 3 amigos. Depois identifica os 4 amigos, mas associa os 4 amigos a 4 pizas. Sugiro que volte a ler o enunciado.

Quando volto a perguntar o que fez, a aluna diz que são 4 amigos para 3 pizas, mas insiste em dividir as pizas em 3, desenhando no papel, o seguinte esquema:



Utilizo os queijinhos para demonstrar à aluna que,com esta divisão, um dos amigos vai ficar sem piza. Deste modo, Marta percebe a pergunta que resolve, indicando que cada amigo comia $\frac{3}{4}$ de piza (figura 5).

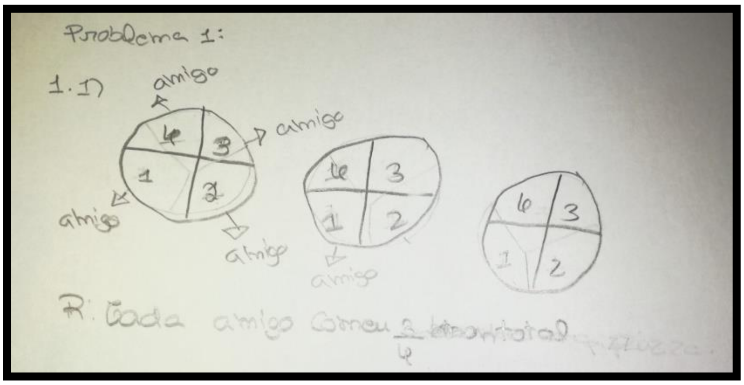


Figura 5 – Resposta escrita da Marta (1.1)

A aluna identifica a resposta após eu ter mostrado que um dos amigos iria ficar sem piza, se a divisão fosse como a aluna sugeria.

A Marta já tinha respondido por escrito à alínea 1.2 quando nos debruçámos sobre a mesma. Perguntei o que tinha feito, ao que me responde:

Marta: Eu desenhei três pizas e os amigos comeram todos três quartos de todas as pizas…

A aluna considerou que o facto de todos os amigos terem comido uma fatia de cada piza fez com que todos comessem mais do que uma piza. Quando a questiono, indica que todos comeram o mesmo, em cada piza. Como, não estava a conseguir ajudar a aluna a compreender o que era pedido, pedi que reunisse os queijinhos e que juntasse as fatias que cada amigo tinha comido. Depois perguntei se as 3 fatias juntas, perfaziam uma unidade.

Só quando utilizou o material manipulável, é que a aluna verificou que $\frac{3}{4}$ era menor que a unidade e que faltava $\frac{1}{4}$ para completar a mesma (figura 6).

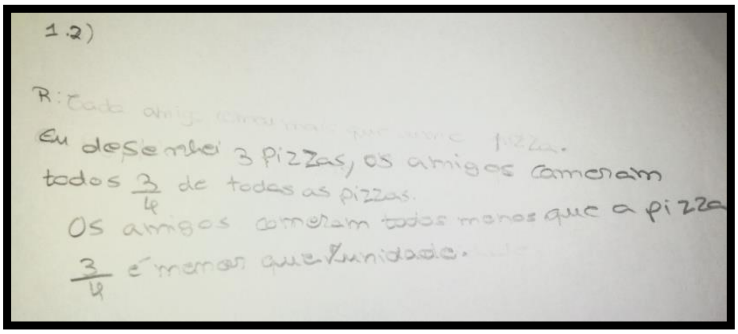


Figura 6 – Resposta escrita da Marta (1.2)

A aluna resolveu sozinha a pergunta 2.1 e, quando terminou, deu a seguinte resposta:

Marta: Dividi, ah, desenhei três pizas e depois dividi em oitavos e depois deu-me três oitavos, na 2.1.
Investigadora: Ou seja, estás a querer dizer que cada amigo come três oitavos?
Marta: Sim. Três oitavos no total.

A Marta teve facilidade em resolver o problema, pois soube relacionar a parte com o todo, ou seja, neste caso, dividiu o total de pizas pelos 8 amigos e soube identificar a fração que cada amigo iria comer. No entanto, como eu me precipitei e dei o significado ao número que indicava não é possível perceber se Marta, de facto, entendia o que representava cada número no contexto explorado.

Na questão 2.2, a aluna precipita-se e, diz de imediato:

Marta: Acho que cada amigo comeu mais, … mais que uma piza.

Quando pergunto como chegou a essa conclusão, a aluna diz “Ai, já percebi, já percebi” e depois diz “Eu acho que é menos ...”, mas atrapalha-se na justificação e diz:

Marta: Eu acho que era cinco oitavos e, afinal eram três oitavos.
Investigadora: Então e se tivéssemos… o que tu estavas a dizer era cinco oitavos? Cinco oitavos é maior que uma unidade?
Marta: Ah não, à mesma não era.
Investigadora: Quantos oitavos é que tu precisas de ter para ter uma unidade?

A aluna recorre novamente aos queijinhos e diz:

Marta: Tenho que ter oito oitavos.
Investigadora: Para teres uma?
Marta: Unidade.
Investigadora: Então, mas eles só comeram quantos?
Marta: Três oitavos.
Investigadora: Então quantos oitavos … é que estão aí a mais?
Marta: Cinco.
Investigadora: Então tira os cinco. E então é maior ou menor que a piza?
Marta: É menor.

A resposta da aluna na folha de resolução foi:

“Eu desenhei 3 pizzas, os amigos comeram todos $\frac{3}{8}$ de todas as pizzas.

Os amigos comeram todos menos que a pizza, $\frac{3}{8}$ é menor que a unidade. ”

A aluna com a ajuda dos queijinhos conseguiu chegar à resposta pretendida e conseguiu ver quanto faltava para chegar à unidade.

Já na última questão, a aluna consegue identificar qual das frações é maior, recorrendo ao material manipulável. Pergunto à aluna:

Investigadora: Quantos quartos é que foram comidos pelos amigos do problema 1?

Marta: Três quartos.
Investigadora: Então quem é que comeu mais piza?
Marta: O dos três quartos.

Verifiquei que, a trabalhar com os queijinhos, a aluna chegou mais facilmente à resposta (figura 7).

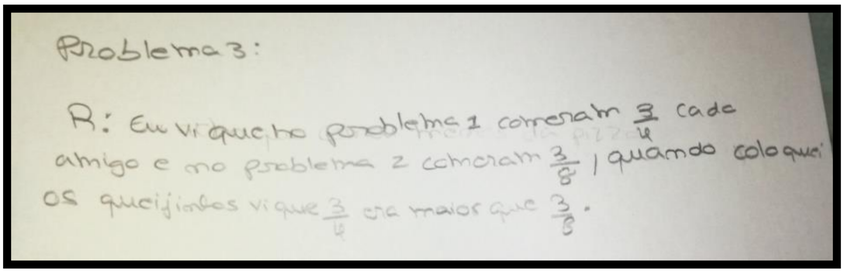


Figura 7 – Resposta escrita da Marta (3)

Em suma, Marta evidencia ter noção da relação parte-todo, mas revela dificuldades em operacionalizar quando o todo é constituído por 3 pizas que tem de ser dividido pelas 4 pessoas. O mesmo já não sucede quando a divisão é feita pelos 8 amigos, pois tinha entretanto percebido a divisão de 3 pizas por 4.

A aluna, com o apoio do material manipulável, compara corretamente $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$ com a unidade. Também identificou a fração $\frac{3}{4}$ como sendo maior que a fração $\frac{3}{8}$. O material manipulável foi fundamental para a resolução da aluna.

Prevalece a minha tendência em guiar demasiado os alunos e em os centrar na procura da resposta.

A Marta e o Daniel são os dois alunos que a professora indicou como tendo um nível de desempenho baixo e, em certos momentos da entrevista, verifiquei insegurança e hesitação em darem as respostas. Justificação para tal, pode ser o facto de revelarem dificuldades, aliado ao facto de estarem fora da sua zona de conforto (entrevista). Concluí, *à posteriori,* que ao tentar ajudá-los foquei-me em demasia em querer obter (por parte do aluno) a resposta e não tanto em criar relações e significados que ajudasse no raciocínio dos alunos.

O uso do material manipulável foi um apoio indispensável para estes alunos. Com o Daniel, fui eu que demonstrei ao aluno (em várias ocasiões) os benefícios de usar ao queijinhos para estruturar um pensamento. Com a Marta, foi a própria que tomou a iniciativa de usar os queijinhos.

Relativamente à resolução dos problemas, ambos fizeram confusão entre os dados e o que é pedido (1.1), dividindo as pizas por 3. Quanto à adição de frações com o mesmo denominador, a Marta foi mais eficiente que o Daniel, no entanto, o Daniel foi o único a mencionar frações equivalentes.

Ambos, quando têm de comparar a fração com a unidade, confundem o facto de todos os amigos comerem o mesmo com o que realmente é pedido. Só quando são utilizados os queijinhos é que verificam que as frações (da alínea 1.1 e da alínea 2.1) são menores que a unidade. O mesmo acontece, quando têm que verificar qual é a fração maior, só a conseguem identificar, quando verificam as duas frações nos queijinhos.

4.1.3. Entrevista da Susana

A aluna começa a resolver a tarefa e pergunta se pode utilizar os queijinhos, material que estavam a utilizar na aula e que os auxiliava na exploração das frações. Respondo que sim e, quando pergunto o que fez, ela diz:

> **Susana:** Ah, o meu raciocínio foi…dividir…colocar as três pizas, dividi-las em partes e distribui-las pelos quatro alun…,amigos e, conclui que cada aluno come um quarto da piza.

A aluna começou a raciocinar bem, mas conclui com base em apenas uma piza.

> **Investigadora:** Então, dividiste a piza em quatro fatias, e porquê em quatro e não mais?
> **Susana:** Porque, os amigos são quatro.

> **Investigadora:** Ah, porque são quatro amigos, certo? Então e cada um…tens aqui uma piza, duas, três, certo? Porquê que desenhaste três pizas?
> **Susana:** Porque eles pediram três.

Faço uma leitura daquilo que a aluna esboçou (figura 8) com o objetivo de a tentar "encaminhar" para uma correta conclusão.

> **Investigadora:** E dividiste depois cada piza em quatro? Ou seja, o primeiro amigo comeu um (quarto) aqui, outro (quarto) aqui e outro (quarto) aqui?
> **Susana:** Sim.
> **Investigadora:** O segundo amigo comeu um (quarto) aqui, um (quarto) aqui, outro (quarto) aqui, o terceiro aqui, aqui e aqui e o quarto aqui, aqui e aqui, certo?
> **Susana:** Sim.
> **(...)**
> **Investigadora:** E no total quantos (quartos) são?
> **Susana:** Ah…Como assim? Não percebi.
> **Investigadora:** Se ele come um quarto aqui, um quarto aqui e um quarto aqui, certo?
> **Susana:** Cada aluno come três quartos.

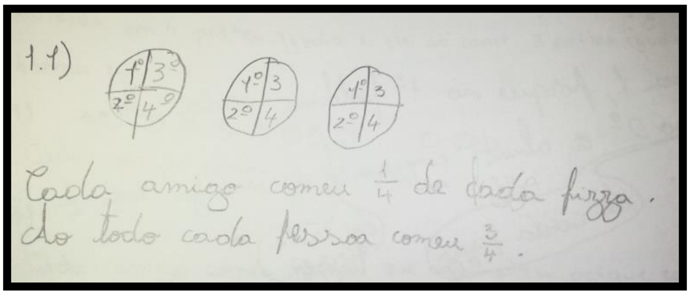


Figura 8 – Resposta escrita da Susana (1.1)

A aluna tem noção da relação parte-todo, interpreta bem o problema, identifica a fração que representa 1 parte em 3. Susana adiciona frações com o mesmo denominador quando a encaminho para adicionar cada quarto de piza.

Na pergunta 1.2, a aluna parece não interpretar bem o problema. Começa por dizer:

> **Susana:** Ah…cada aluno comeu mais que uma fatia…porque cada aluno…cada aluno comeu mais que uma fatia…porque…
> **Investigadora:** Mais que uma fatia? A pergunta é se comeu mais que uma piza ou não? Achas que comeu mais que uma piza?

Susana: Sim…
Investigadora: Então se juntares os três quartos aqui nos queijinhos completas a unidade?
Susana: Hum…

O raciocínio da aluna é interrompido pelo toque de entrada. Quando retoma o problema, a aluna apaga o que tinha escrito anteriormente e volta a escrever, depois eu pergunto:

Investigadora: Susana porque apagaste a resposta à pergunta 1.2?
Susana: Porque…eu vi que as coisas estavam confusas e…melhorei a resposta.
Investigadora: Melhoraste? Então o que escreveste agora?
Susana: Cada aluno comeu mais que uma piza, porque as pizas são três e têm que ser divididas igualmente pelos 3 ami…, pelos 4 a…, pelos 4 alunos…Por isso, cada um deles comeu uma fatia de cada piza, por isso s…, pra mim são mais que uma piza.

Neste momento, percebo que a aluna não entendeu concretamente o que é pretendido, confundindo o que é pedido com o facto de todos os alunos terem comido de todas as pizas, o que não é propriamente mandatório. Não compara os $\frac{3}{4}$ com a unidade.

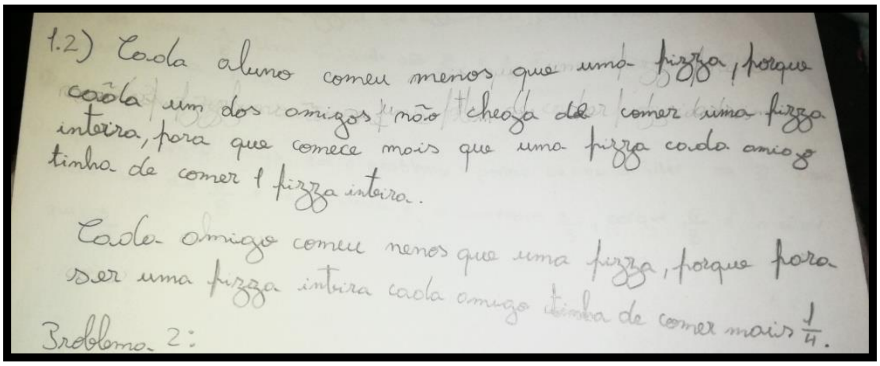
Investigadora: Ai…espera, cada um deles comeu o quê?
Susana: Cada um deles comeu, mais que uma piza, comeu uma fatia de cada piza.
Investigadora: Uma fatia de cada piza e, isso dá mais que uma piza?
Susana: Ah, não, eu agora é que percebi. Porque para ser mais que uma piza, para que cada aluno tivesse que comer mais de uma piza, ahh… tinha que comer a piza inteira. Ahhh, por isso é que agora eu percebi que cada aluno não comeu uma piza inteira.
Investigadora: Então? Comeu mais ou menos?
Susana: Menos.

A aluna começa a escrever e não é explícita, pois diz que os amigos comeram menos que uma piza, porque para comer mais que uma piza, cada amigo tinha que comer uma piza inteira.

A seguir, peço à aluna que utilize os queijinhos, que junte os quartos e que veja quantos quartos faltavam para que cada amigo comesse uma piza inteira. A aluna diz:

Susana: Falta mais … um quarto.

A aluna escreve a resposta (figura 9) e volta a ser interrompida pelo toque de entrada para a aula. Este problema foi feito durante dois intervalos. A aluna precisou da ajuda dos queijinhos para comparar os $\frac{3}{4}$ com a unidade.


1.2) Cada aluno comeu menos que uma pizza, porque cada um dos amigos não chega de comer uma pizza inteira, para que comece mais que uma pizza cada amigo tinha de comer 1 pizza inteira.

Cada amigo comeu menos que uma pizza, porque para ser uma pizza inteira cada amigo tinha de comer mais $\frac{1}{4}$.

Problema 2:

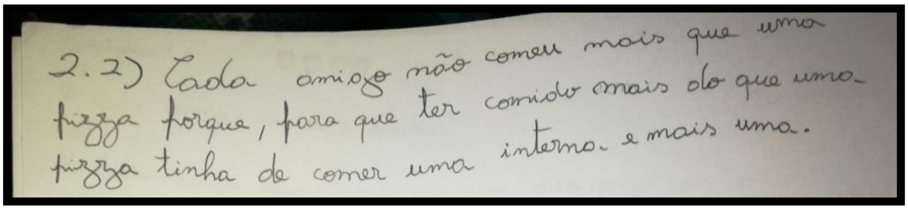
Figura 9 – Resposta escrita da Susana (1.2)

Na alínea 2.1 e 2.2, a aluna conseguiu resolver e explicar corretamente o problema, recorrendo ao material manipulável. A aluna diz:

Susana: Na 2.1 já havia…continuava com três pizas, mas eram oito amigos, por isso eu fiz a mesma coisa que fiz no problema 1.1 e conclui que o resultado era que cada amigo comia um oitavo e ao todo comia três oitavos de cada piza.
Investigadora: Três oitavos de cada piza ou de piza?
Susana: De piza. Na 2.2 também usei a mesma técnica que no 1.2 e conclui que cada amigo não comeu mais que uma piza, porque para ter comido mais do que uma piza tinha que comer uma inteira e mais uma metade ou a fatia.
Investigadora: Mais uma metade ou mais uma fatia. E ele comeu quanto?
Susana: Ao todo comeram três oitavos.

Na pergunta 2.1, a aluna percebeu rapidamente que, como eram oito amigos, tinha que dividir cada piza em 8 fatias e usou os 'queijinhos dos oitavos'. Depois identificou a fração correspondente a cada fatia, $\frac{1}{8}$, e adicionou as 3 fatias que cada amigo comeu obtendo $\frac{3}{8}$.

Na pergunta 2.2 a aluna verifica que $\frac{3}{8}$ é menor que uma piza inteira, ao utilizar o mesmo raciocínio que na 1.2, mas sente dificuldade de expressão, tanto a nível verbal como na resposta escrita (figura 10).

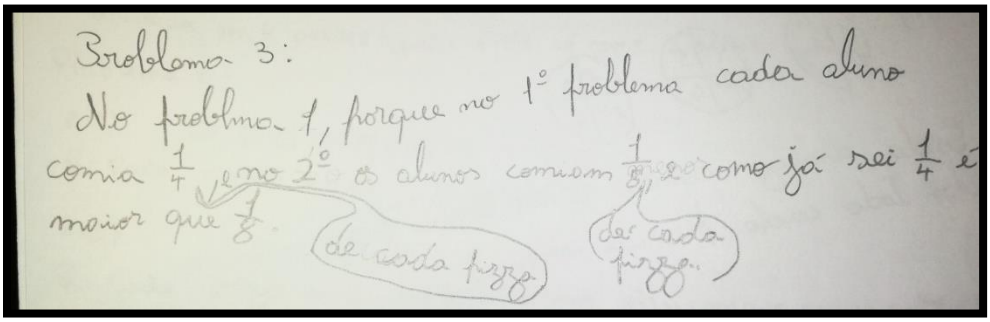


2.2) Cada amigo não comeu mais que uma pizza porque, para que ter comido mais do que uma pizza tinha de comer uma inteira. e mais uma.

Figura 10 – Resposta escrita da Susana (2.2)

Na última questão do problema, a aluna diz:

Susana: No problema três…ahh, era… dos dois grupos eu tinha que ver desses dois, cada amigo é que comeu mais piza e tive dificuldades por isso não sei se está bem e escrevi de resposta (figura 11) “no problema 1 porque no primeiro problema cada aluno comia um quarto e no segundo os alunos comiam um oitavo, e como já sei, um quarto é maior que um oitavo.”
(...)
Investigadora: Então…tu estás a dizer que cada aluno comeu um quarto e no segundo os alunos comeram um oitavo.
Susana: Sim, de cada piza.



Problema 3:
No problema 1, porque no 1º problema cada aluno comia $\frac{1}{4}$ e no 2º os alunos comiam $\frac{1}{8}$ e como já sei $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{8}$.
de cada pizza
de cada pizza

Figura 11 – Resposta escrita da Susana (3)

A aluna disse ter dificuldades, mas deu a resposta certa ao indicar que os amigos do problema 1 comeram mais que os amigos do problema 2. A aluna compara as fatias de cada piza, nos diferentes grupos, ao invés de comparar as frações que representavam a quantidade que cada amigo comeu.

A aluna sabe que existem 3 pizas e que em cada piza, cada amigo comeu uma fatia, no grupo 1 dividida em 4 e no grupo 2 dividida em 8.

Em suma, esta aluna não revelou dificuldades em operacionalizar a divisão por 4 e por 8, representando essas situações no papel. Tem noção da relação parte-todo, e toma a iniciativa de usar o material manipulável.

No entanto, a aluna teve dificuldade em comparar a fração $\frac{3}{4}$ com a unidade, talvez por estar a fazer uma interpretação incorreta do que era pedido. Na pergunta 2.2, quando teve que comparar a fração $\frac{3}{8}$ com a unidade, já não teve problemas em dizer que a fração era menor que a unidade.

Quando tem que comparar as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$, a aluna usa as frações unitárias e identifica a fração $\frac{1}{4}$ como sendo maior que a fração $\frac{1}{8}$.

4.1.4. Entrevista do Rafael

O aluno começa a resolver o problema com a ajuda dos queijinhos:

Rafael: Ah, cada um come, um quinto, um quarto.
Investigadora: Um quarto?

O aluno olha para mim e diz:

Rafael: Ah não, não. Não dá. Come dois quintos.

Percebendo que o aluno não está seguro da resposta, foco a sua atenção no processo que usou:

Investigadora: Primeiro pegaste nos quartos…
Rafael: Sim.
Investigadora: Porquê?
Rafael: Ahh, era para ver se dava … para distribuir pelos quatro meninos.

Investigadora: E depois viste que não dava?
Rafael: Sim.
Investigadora: Porquê que não dava?
Rafael: Porque … eram 3 pizas e assim cada um…espere stora, acho que está errado…deixe-me experimentar fazer outra vez.

Passado pouco tempo Rafael indica "Ahhhhhh, cada amigo comeu três quartos".

Embora o aluno responda corretamente neste momento (figura 12), decido questioná-lo novamente para perceber como o aluno chegou à resposta e se já está seguro da mesma.

Investigadora: Porquê três quartos agora?
Rafael: Porque … se nós formos a meter…, com os quartos, ver como é que faz uma unidade, temos que usar quatro quartos e são três pizas é um quarto para cada um, em cada piza.
Investigadora: Dividiste cada piza em quantos?
Rafael: Quatro quartos.
Investigadora: E cada menino come?
Rafael: Três quartos.

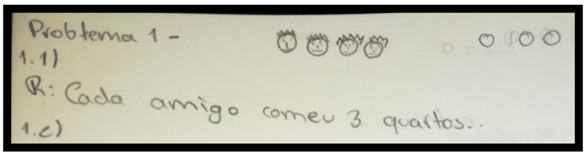


Figura 12 – Resposta escrita do Rafael (1.1)

O aluno relacionou a parte com o todo e identificou a fração que cada amigo comia.

Na questão 1.2 identificou a parte que cada amigo comeu e comparou com a unidade, identificando a parte que faltava para completar a unidade.

O aluno interpretou a pergunta sem dificuldade e respondeu corretamente sem hesitar (figura 13).

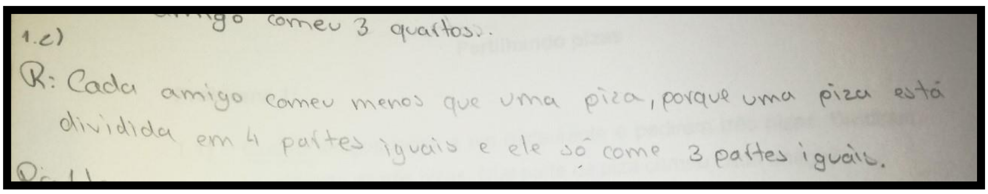


Figura 13 – Resposta escrita do Rafael (1.2)

Na segunda pergunta, o aluno deu respondeu: “Cada um, em cada piza comia um oitavo. Ao todo comiam três oitavos. Porque, eu fui mon…ver se… os oitavos dava para formar… para formar uma unidade e eu juntei os oito oitavos porque no problema 1 eram quatro amigos e eu fui buscar os quartos e eu aqui como eram oito amigos fui buscar os oitavos e cada amigo comeu três oitavos porque eram três pizas”.

Com a ajuda do material manipulável o aluno estabelece uma relação com a pergunta anterior e, sem demonstrar dificuldade conclui corretamente que cada amigo comeu três oitavos.

Rafael: Na 2.2. cada amigo comeu menos que uma piza porque para fazermos a unidade com oitavos temos ter oito oitavos e eles só comem três oitavos e três oitavos não dá para fazer uma piza,…uma unidade.
Investigadora: Então três oitavos é maior ou menor que a unidade?
Rafael: É menor.

Na pergunta 3, o aluno comparou os quartos com os oitavos e diz:

Rafael: Eu peguei num quarto e dividi-o ao meio, que era para ver, se a forma ficava igual à do oitavo e ficou.
Investigadora: Ou seja, podes dizer que um quarto é igual a quê?
Rafael: Um quarto é igual a um oitavo. Não, é dois oitavos.

Quando pergunto quem comeu mais, se os amigos da primeira ou os da segunda questão, o aluno compara as frações e diz “Três quartos é igual a seis oitavos e eu só tenho três oitavos, por isso quem comeu mais foi os do problema 1”.

Em suma, o aluno mostrou ter noção da relação parte-todo, não revelando dificuldades em operacionalizar a divisão por 4 e por 8. Resolveu o problema mencionando a metade de $\frac{1}{4}$ como sendo $\frac{1}{8}$, e identificando uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ ($\frac{6}{8}$). Depois compara $\frac{6}{8}$ com $\frac{3}{8}$ e identifica a fração maior.

Compara sem hesitação $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$ com a unidade, indicando que ambas são menores que a unidade.

Rafael usa o material manipulável para resolver todas as questões.

4.1.5. Entrevista do Bruno

Bruno resolveu o problema através da representação pictórica (figura 14), ou seja, desenhou as três pizas e dividiu-as em quatro. Demonstrou facilidade na compreensão, indicou as frações pretendidas, comparou as diferentes frações e mostrou ter a noção da relação parte todo. O aluno quando terminou, disse:

> **Bruno:** No 1.1 eu dividi as pizas por quatro, porque como são quatro amigos e dá para dividir a piza por quatro, ahh… cada um no final come três…
> **Investigadora:** Três quê?
> **Bruno:** Três fatias…e aqui na 1.2 cada amigo comeu menos que uma piza, porque se a piza é dividida por quatro e cada um come três bocados, não consegue comer mais do que a unidade, que é a piza.
> **Investigadora:** Então isto está representado em quê?
> **Bruno:** Quartos.
> **Investigadora:** Então e comeu três quê?
> **Bruno:** Quartos

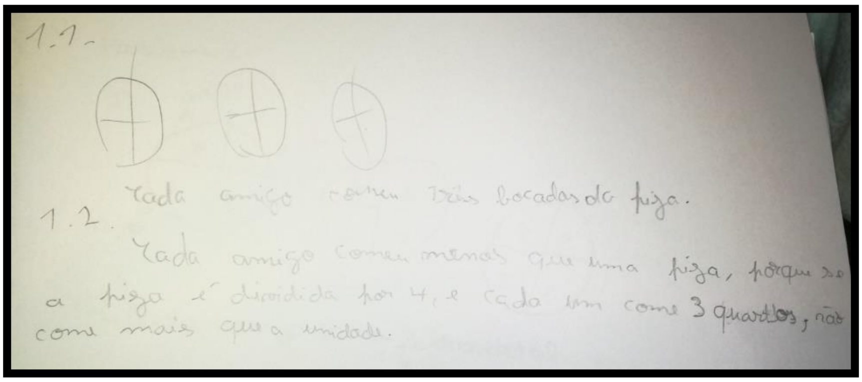


Figura 14 – Resposta escrita do Bruno (1.1)

Inicialmente, não indicou a fração, falou apenas em bocados de piza, mas tinha a noção que cada amigo comia $\frac{3}{4}$ de piza, tal como se vê, na resposta que dá, na questão 2.1:

Bruno: Na 2.1, eu dividi as pizas, agora em oito partes. Fiz como no 1.1 só que como aqui já são oito amigos, aaa, dividi-as em oito e cada um, como na 1.1, come três…ah bocados, oitavos.
Investigadora: Então os bocados da 2.1 são iguais às da 1.1?
Bruno: Ah…ah…iguais não, só que … são três oitavos, em vez de serem três quartos são três oitavos.

Explica a sua resolução da questão 2.2 da seguinte forma: ”fiz a resposta parecida com a 1.2. Cada amigo comeu menos que uma piza porque se a piza está dividida em oito, aaaa e cada um come três, não consegue comer mais que a unidade, que é a piza”.

Na questão 3 responde ao que é pretendido e indica frações equivalentes:

Bruno: Era para dizer qual dos dois problemas anteriores, qual foi o grupo que comeu mais… Eu acho que é o do problema 1 porque um quarto é maior do que um oitavo…não escrevi mais nada (disse sussurrando).
Investigadora: Não escreveste mais nada?
Bruno: Não. [com um riso envergonhado]
Investigadora: Disseste que um quarto é maior que um oitavo?
Bruno: Sim.
Investigadora: Mas cada amigo não comeu um quarto, nem um oitavo, pois não?
Bruno: Três.
Investigadora: Comeram três quartos e três oitavos, certo? Então três quartos é maior que três oitavos?
Bruno: Sim, porque três quartos seria uma metade e um quarto e, três oitavos já seria … ahh, três oitavos.
Investigadora: Seria o quê?
Bruno: Então, seria um quarto e um oitavo (que é metade de um quarto), por isso não seria maior que uma metade e um quarto.

Em suma, o aluno representa no papel as pizas e divide-as de acordo com o indicado em cada questão e não usa o material manipulável. Quando coloco questões, Bruno explica corretamente o que fez.

Bruno tem noção da relação parte todo, pois divide as pizas pelo número de amigos e indica a parte que cada amigo comeu. Inicialmente, refere-se a 3 bocados, mas quando pergunto a que correspondem esses bocados, o aluno responde sem hesitar que se trata da fração $\frac{3}{4}$.

Compara as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$ com a unidade, indicando que ambas são menores e indica qual das duas frações é a maior, revelando a decomposição das frações.

Mais uma vez se identifica a minha tendência para pedir respostas, não incentivando o aluno a explicar e a relacionar o que vai descobrindo.

4.1.6. Entrevista do Guilherme

O Guilherme utiliza a representação pictórica e simbólica para representar a sua resolução. Durante a entrevista, o aluno foi explícito e identificou as frações:

Guilherme: Eu meti as três pizas em círculos e os quatro meninos que eram bolinhas. E cada menino era, o menino 1, o menino 2, o menino 3 e o menino 4.
Investigadora: Representaste cada menino como sendo um número?
Guilherme: Sim. E…dividi a piza em quartos, cada piza, por isso o menino 1 comeu um quarto, o menino 2, outro quarto, o menino 3, outro quarto e o menino 4, outro quarto. Assim, suce…asse…aaa…suce…
Investigadora: Sucessivamente…
Guilherme: Sucessivamente, aaaa, às outras pizas, o menino 1 a um quarto, o menino 2, o menino 3 e o menino 4…e cada menino come um quarto.
Investigadora: Isso é no total. Cada menino come um quarto?
Guilherme: Não, a parte da piza que eles comem é um quarto.
Investigadora: Então, mas é um quarto de cada piza ou do total?
Guilherme: Não…de cada piza.
Investigadora: Ahh, um quarto de cada piza. Então e no total, quanto é que é?
Guilherme: É três quartos.

O aluno mostra segurança e confiança na sua explicação. Expressa o seu raciocínio de forma clara. Relaciona a parte com o todo e identifica as frações.

Na questão 1.2 lê o que escreveu no papel (figura 15).

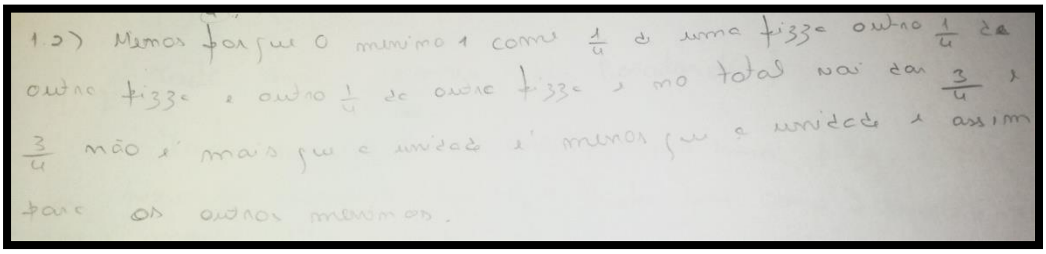

1.2) Menos porque o menino 1 come $\frac{1}{4}$ de uma pizza outro $\frac{1}{4}$ da outra pizza e outro $\frac{1}{4}$ da outra pizza e no total vai dar $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}$ não é mais que a unidade é menos que a unidade e assim para os outros meninos.

Figura 15 – Resposta escrita do Guilherme (1.2)

Embora o aluno tenha respondido corretamente, questiono o aluno para garantir que está seguro da sua resposta.

Investigadora: Estás a dizer que três quartos é mais pequeno que a unidade, certo?
Guilherme: Sim, e a unidade é quatro quartos.
Investigadora: Então quanto faltava para a unidade?
Guilherme: Um quarto.

O aluno compara os $\frac{3}{4}$ com a unidade e identifica a fração correspondente à unidade referindo a fração que sobra da unidade.

Na pergunta 2.1, o aluno utiliza o mesmo processo e diz "O menino 1, o menino 2, o menino 3, o menino 4, o menino 5, o menino 6, o menino 7, o menino 8 e dividi as três pizas em oitavos porque eram oito meninos. E, cada menino tinha um oitavo, o menino 1 comia um oitavo, o 2 um oitavo, o 3, o 4, o 5, o 6, o 7 e o 8, em cada piza. E, no total, cada menino come três oitavos".

Guilherme tem clara noção da relação parte-todo,operacionalizando-a na divisão por oito e pensando num todo constituído pelas três pizas.

Na questão 2.2, o aluno diz que só tem de copiar a resposta da alínea 1.2, e escreve: "Menos porque o menino 1 come $\frac{1}{8}$ de uma piza, outro $\frac{1}{8}$ de outra piza e outro $\frac{1}{8}$ da outra piza e no total vai dar $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{8}$ não é mais que a unidade é menos que a unidade e assim para os outros meninos".

Na questão 3, o aluno compara $\frac{1}{8}$ com $\frac{1}{4}$ e responde:

Guilherme: Comeu mais no problema 1 porque … aaa o oitavo é , não o quarto é a metade…, não, o oitavo é a metade do quarto. E, como é a metade do quarto, o quarto tem que ser maior do que o oitavo… e, é por isso que três quartos é maior que três oitavos. Que a unidade é o quarto que é maior…aaaa… e o oitavo é mais pequeno porque é a metade do quarto.
Investigadora: O que é a unidade é o quarto? Eu não percebi essa parte.
Guilherme: Nós estamos a falar em quartos e a unidade é o quarto.
Investigadora: A unidade é o quarto? Ou estás a querer dizer que a unidade está dividida em quartos?
Guilherme: Sim, é a unidade que está dividida em quartos.
Investigadora: E quanto é que é uma unidade?
Guilherme: Uma unidade são quatro quartos.
Investigadora: Ahhh.
Guilherme: E cada menino, no total, come três quartos e no problema 2, três oitavos, que comem no total, cada menino…aaaa e como o oitavo é metade que o quarto, o quarto tem que ser maior que o oitavo. E, por isso é que no problema 1 é que come mais do que no problema 2 (figura 16).

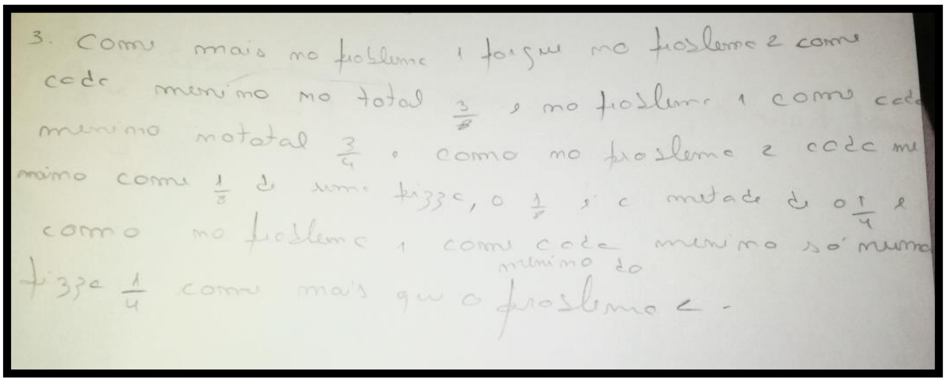


Figura 16 – Resposta escrita do Guilherme (3)

O aluno identifica a metade de $\frac{1}{4}$ e compara as frações, indicando que $\frac{1}{8}$ é a metade de $\frac{1}{4}$, logo é menor.

Em suma, o Guilherme resolve os problemas através da representação simbólica e pictórica, não recorrendo ao uso de material manipulável.

Tem noção da relação parte-todo, e compara as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$ com a unidade, indicando que ambas são menores que a unidade.

Estabelece uma relação entre as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, indicando que uma é metade da outra e, identifica qual o grupo de amigos que comeu mais.

Os dois alunos de nível alto não mostraram dificuldade em resolver este problema e utilizaram uma estratégia de resolução semelhante em todas as questões, à excepção da última questão, em que o Bruno decompõe as frações e o Guilherme identifica que uma fração é metade de outra.

Quanto às representações usadas na resolução dos problemas, apenas os dois alunos com alto nível de desempenho é que resolveram através da representação pictórica e simbólica, sem usar o material manipulável. Todos os outros necessitaram do apoio deste material para resolver e só traduzem o que fazem por escrito, usando representações pictóricas.

Nos problemas 1.1 e 2.1 todos usaram a estratégia de dividir as pizas pelo número de amigos para chegarem à resposta. Os dois alunos de baixo nível de desempenho foram os que revelaram mais dificuldades para explicar os seus raciocínios. Também confundiram dados do problema com o que era pedido.

Nos problemas 1.2 e 2.2, na comparação da fração com a unidade, os dois alunos com alto nível de desempenho não tiveram dificuldades em identificar que a fração era menor que a unidade. Rafael também não teve esse problema, no entanto precisou do material para chegar a essa conclusão. Todos os outros, fizeram confusão e precisaram do meu apoio. Quando pedi, ou eu mesma demonstrei, que juntassem os queijinhos, já conseguiram dar a resposta certa.

No problema 3, todos à exepção dos alunos com alto nível de desempenho, necessitaram do material manipulável para comparar as duas frações.

4.2. Problema “As maçãs”

4.2.1. Entrevista do Daniel

Após ter lido o enunciado, Daniel usou ‘os quintos’ do material manipulável, para representar as 5 maçãs e mais uma metade de outra. Passado algum tempo, verifiquei que o aluno esboçou com o material os $\frac{5}{5}$ representando assim, a unidade.

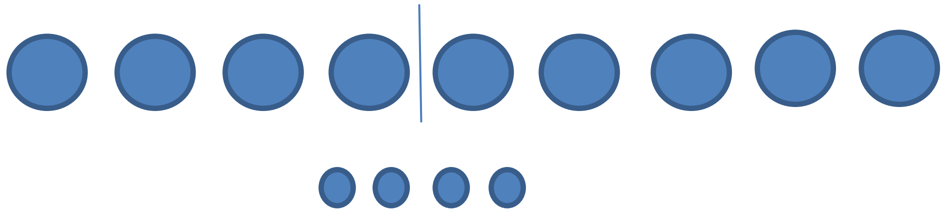
Deixei o aluno seguir o seu raciocínio e, quando perguntei qual era a fração o aluno disse:

> **Daniel:** Ah, … é igual a … trinta.
> **Investigadora:** Trinta, onde é que… como assim trinta? Trinta quê?
> **Daniel:** Trinta… cinco, dez, quinze, vinte, vinte e cinco.
> **Investigadora:** Vinte e cinco quê?
> **Daniel:** Vinte e cinco décimos. Não. Vinte e cinco … ahhh, quintos.
> **Investigadora:** Então põe aí, vinte e cinco quintos. Quintos! Mais o quê? Ainda não terminaste.
> **Daniel:** Mais, … um meio.
> **Investigadora:** E agora? Eu só quero uma fracção, tens aqui duas. Só quero uma.
> **Daniel:** Meto esta,…

O aluno contou a metade da maçã, como sendo a unidade, daí os 30 quintos. A seguir já identifica a metade da maçã como sendo um meio e tem $\frac{25}{5}+\frac{1}{2}$, representados na mesa, com o material manipulável. Quando lhe digo que só quero uma fração e que ele escreveu duas, estava a tentar que o aluno arranjasse outra solução. No entanto, Daniel escolhe ‘aleatóriamente’ uma fração como solução, mostrando insegurança na sua decisão. Como este tema estava a ser iniciado em sala de aula, os alunos ainda não sabiam adicionar frações com denominadores diferentes, logo o Daniel não sabia converter as duas frações ao mesmo denominador. Assim, usando o material manipulável, tentei ajudar o aluno e ‘encaminhá-lo’ para a resposta.

Daniel, através do material manipulável, conseguiu identificar a unidade como sendo $\frac{5}{5}$ e a metade da unidade como $\frac{1}{2}$. Quando tem de representar as 5 unidades e meia demonstra dificuldades em identificar uma única fração, pelo facto de estar a trabalhar com frações com denominadores diferentes. No entanto, com a minha ajuda, acaba por dividir as unidades em metades e a identificar $\frac{11}{2}$.

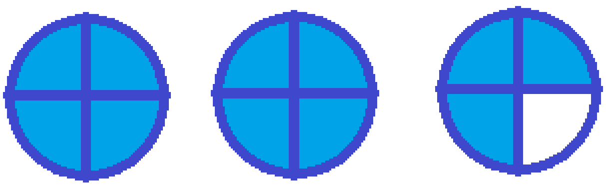
Na alínea seguinte, o aluno representa $\frac{9}{4}$ da seguinte maneira:



Daniel representa 9 maçãs e necessita da minha ajuda para perceber o erro que cometeu. Em seguida pedi ao aluno que representasse $\frac{9}{4}$ utilizando o material manipulável:

Investigadora: Já estão aí nove quartos?
Daniel: Já.
Investigadora: Então e nove quartos, quantas maçãs inteiras são?
Daniel: Duas.

O aluno escreve a resposta e representa os $\frac{9}{4}$ da seguinte maneira:



Pensando que esta representação já se referia à questão seguinte, dialoguei com Daniel para distinguir os quartos de maçã que ficaram na fruteira do número de maçãs inteiras:

Investigadora: Eu, supostamente, tenho que perceber se o que está pintado é o que sobrou ou se o que não está pintado é o que sobrou.

Daniel: O que está pintado é o que não sobrou.
Investigadora: É o que não sobrou?
Daniel: Sim.
Investigadora: Então só sobrou isto? Então e isto? Aqui diz que depois de lancharem ficaram na fruteira nove quartos, não foi só um quarto que ficou. … … … Pinta lá aí o que sobrou. O que temos aqui? – apontando para os queijinhos.
Daniel: Isto tudo.
Investigadora: Então pinta só o que temos aí.
Daniel: Então, pinto tudo.
Investigadora: Pintas tudo, como quem diz… aqui só vais pintar um, não vais pintar tudo.

O aluno, com a minha ajuda, acabou por dar esta representação (figura17), indicando também a resposta da questão 1.2:

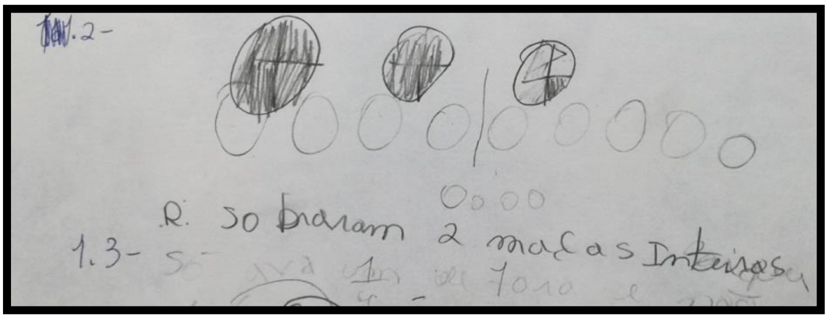


Figura 17 – Resposta escrita do Daniel (1.2)

Mais tarde, já durante as transcrições, reparei que o aluno respondeu à questão 1.3 indicando a seguinte representação (figura 18):

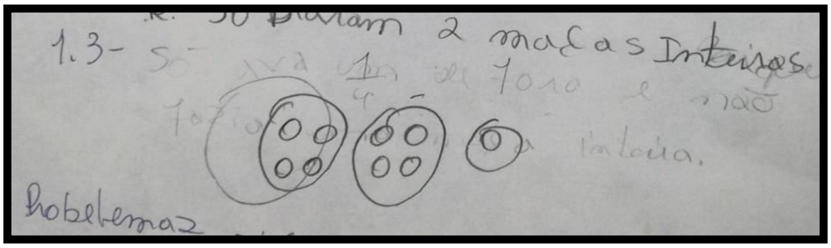


Figura 18 – Resposta escrita do Daniel (1.3)

O Daniel, ao responder à questão 1.2 sentiu a necessidade de representar no papel os $\frac{9}{4}$ para identificar as duas unidades. No entanto, revelou dificuldades nessa representação e só conseguiu identificar as duas unidades quando utilizou o material. Esta representação fez com que eu pensasse que estava a responder à questão 1.3, logo não fiz nenhuma pergunta sobre a figura 18. Analisando agora a resposta do aluno, verifico que utilizou uma representação sem a minha influência e, que poderá representar a fração pretendida. A única questão que poderá ficar em aberto é o porquê da última circunferência ser mais pequena que as outras duas.

Na pergunta seguinte, o aluno tinha que identificar quantas maçãs inteiras estavam no alguidar, quando estas tinham sido cortadas em oitavos e representar a fração $\frac{75}{8}$ na forma de numeral misto.

O Daniel não conseguiu resolver esta questão. Optei por explicar ao aluno uma das possíveis resoluções, indicando-lhe a solução, na esperança de o ajudar para que conseguisse evoluir para a questão seguinte.

Na questão seguinte havia 3 alguidares e cada um deles tinha um numeral misto, que representava a quantidade de maçãs. O aluno tinha que identificar qual dos alguidares tinha mais maçãs.

O Daniel inicialmente identificou o alguidar A, como sendo o alguidar que tinha mais maçãs, porque olhou para a parte fracionária e o numerador era o 3. Antes do aluno resolver, mostrei qual era a parte inteira e a parte fracionária, embora me tenha parecido que o aluno não percebeu. Respondeu, apenas quando salientei qual era a parte inteira:

> **Investigadora:** Agora temos 3 numerais mistos. Isto é o quê? Esta parte representa o quê?
> **Daniel:** Oito, 3 quartos.
> **Investigadora:** O que é este 8? Representa o quê?
> **Daniel:** Que…
> **Investigadora:** A parte inteira, não é? E os 3 quartos representam o quê? … A parte fraccionária, o que temos a mais. O que diz para fazer? Lê lá a pergunta.
> **Daniel:** Dos 3 alguidares, qual deles é que tem mais maçãs. Justifica a tua resposta.
> **Investigadora:** Qual é que achas que é? A, B ou C?
> **Daniel:** O A.
> **Investigadora:** O A? Porquê? Quantas maçãs inteiras, tem o alguidar A?
> **Daniel:** 3.
> **Investigadora:** Não, esta é a parte inteira.

Daniel: Ah, o C.
Investigadora: Porquê?
Daniel: Porque 9 é mais do que 8 e estes dois são 8 e nove é maior.

Em suma, o aluno continua a necessitar da ajuda do material manipulável para resolver as questões. Consegue identificar 2 frações para representar as 5 maçãs e meia mas, como a adição de frações com denominadores diferentes é um tema que ainda não tinha sido dado em aula, o aluno não consegue adicionar as frações e indicar o resultado. Em seguida, com a minha ajuda, Daniel repara que pode dividir as 5 maçãs ao meio e acaba por adicionar as frações com denominadores iguais. Quando tem de identificar o número de maçãs inteiras formado pelos $\frac{9}{4}$ que sobraram na fruteira, o aluno tenta representar $\frac{9}{4}$ no papel e faz uma representação incorreta. A seguir, com o material manipulável e a minha ajuda, consegue identificar as duas unidades. Posteriormente, representa 3 maçãs divididas em 4 e pinta 11 partes, indicando que sobrava a parte não pintada. Penso que o aluno deve ter confundido os dados, indicando apenas que tinha sobrado $\frac{1}{4}$ dos $\frac{9}{4}$ depois de ter identificado as duas unidades. Mas como era pedido que representasse os $\frac{9}{4}$ que sobraram da fruteira e, como a minha tendência continua a ser obter o resultado, indiquei que apenas podia pintar uma parte da última maçã e as outras oito partes das outras maçãs.

Na representação em numeral misto, o aluno não soube representar, pois não tinha assimilado a matéria, que ainda estava a ser explorada em aula. Acabei por explicar ao aluno como resolveria essa questão.

Na última questão, o aluno teria que identificar o alguidar com mais maçãs e, demonstrou que ainda não tinha compreendido a representação do numeral misto, quando refere um dos numeradores, da parte fracionária, como sendo a parte inteira.

4.2.2. Entrevista da Marta

A Marta, inicialmente, registou no papel $\frac{5}{2}$, parecendo querer representar as cinco maçãs no numerador e metade da maçã no denominador.

Coloquei à disposição da aluna o material manipulável com o objetivo de perceber se assim conseguiria resolver o problema, mas a aluna continuou a evidenciar dificuldades na resolução.

Quando peço à Marta que conte as metades que representou com os queijinhos, a aluna diz:

Marta: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.
Investigadora: E esta, não conta?
Marta: E uma meia, dez e uma meia.
Investigadora: Quantas metades tens?
Marta: Dez e meia.
Uma, duas,3,4,5,6,7,8,9,10 …
E uma e meia.
Investigadora: 11, esta também é uma metade. Não tens aqui duas metades e com esta não dá três metades? – apontando para os queijinhos – então aqui tens dez metades, com mais esta ficas com 11 metades.
Marta: Sim.
Investigadora: 11 metades correspondem ao quê? Qual é a fracção que vais representar aqui, em vez de cinco meios.
Marta: 11…
Investigadora: 11?
Marta: 11 por um.
Investigadora: 11 a dividir por dois, 11 meios.

A aluna não conseguiu identificar a fração porque não associou a metade da maçã isolada ($\frac{1}{2}$) às 2 metades que formavam as unidades $\frac{10}{2}$. De realçar que, percebendo as dificuldades, acabei por não dar o tempo necessário, que não era muito, para que a aluna reflectisse sobre o problema.

Na alínea 1.2, a Marta indica imediatamente a resposta correta. O facto de estar a utilizar os queijinhos parece ser determinante para resolver esta questão:

Investigadora: Aqui na 1.2, o que disseste?
Marta: Que sobraram 4 meios.
Investigadora: 4 meios são o quê?
(...)
Investigadora: Então vá, sobraram 4 meios que é o mesmo que ter… duas…?
Marta: Maçãs.

Como a resposta estava certa, e por perceber que ela tinha recorrido aos queijinhos, acabei por não lhe perguntar o porquê da aluna ter pegado nos meios, ao invés dos quartos, uma vez que no enunciado dizia que tinham sobrado $\frac{9}{4}$.

Na alínea 1.3, que pedia para desenhar $\frac{9}{4}$, a aluna demonstrou dificuldades. Representou metades, acabando por desenhar 2 maçãs e meia, quando só tinha que representar as duas maçãs e um quarto da outra maçã.

Quando perguntei à Marta se o que ela tinha registado no papel eram $\frac{9}{4}$, a aluna disse que não. Assim, sugeri que usasse novamente os queijinhos, que juntasse os $\frac{9}{4}$ e que só depois desenhasse o que via, no papel (figura 19).

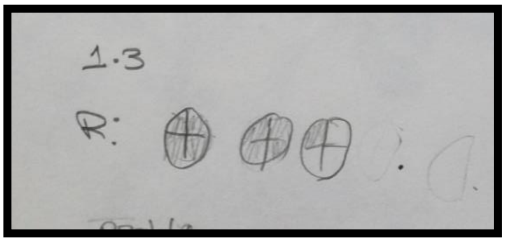


Figura 19 – Resposta escrita da Marta (1.3)

Na pergunta 2 a aluna começou a registar os números de 1 até 75, e depois disse que ía começar a contar para trás. Interrompi o raciocínio, mesmo sabendo que era um possível ‘caminho’ a explorar para a obtenção de um resultado, ensinando uma forma mais ‘simples’ de resolver o problema. Embora não tenha procedido da forma mais correta, havia a questão tempo para gerir e, fi-lo com o objetivo de que a aluna na pergunta seguinte conseguisse desenvolver e explicar mais fluidamente o seu pensamento.

Na questão 3, a Marta começou por comparar a parte fracionária dos 3 alguidares, ignorando a parte inteira. Baseou a sua resposta no alguidar correspondente à fração maior, em que havia 8 maçãs inteiras, embora existisse um alguidar (C) com 9 maçãs inteiras:

Investigadora: Marta, já fizeste?
Marta: Sim, eu pus o alguidar B que tem mais maçãs.
Investigadora: O alguidar B, porquê?
Marta: Porque eu pus ah…pus na… pus 3…3…3
Investigadora: 3 oitavos e 3 quartos, foi isso?
Marta: E 1 oitavo.
Investigadora: Um oitavo e viste que o maior é?
Marta: O alguidar B.
Investigadora: Que tem 3 quartos. A fracção é maior e, na parte inteira quantas maçãs tem?
Marta: Oito.
Investigadora: E no alguidar C?
Marta: 9
Investigadora: Então e qual é que é maior? 8 ou 9?
Marta 9
Investigadora: Então está certo?
Marta: Não, eu estava a pensar aqui…
Investigadora: Só estavas a pensar na fracção, é isso?
Marta: Sim.

Em suma, Marta revelou muitas dificuldades na resolução deste problema. Como o tempo era escasso, mais uma vez, tive a tendência de pressionar a aluna em direção à resposta. Ainda assim, como não obtive o que pretendia, acabei por lhe indicar diversas vezes a resposta.

A aluna não conseguiu identificar a fração correspondente às 5 maçãs e meia, no entanto e sem perceber como, a aluna identificou as duas unidades da fração $\frac{9}{4}$. Quanto à representação pictórica desta fração, a aluna só conseguiu desenhar no papel, quando pedi que reunisse os $\frac{9}{4}$ com o material manipulável e depois que representasse o que via.

Relativamente às duas últimas questões, a aluna mostrou não saber representar uma fração superior a 1, em numeral misto. Na segunda questão ainda pensei, que se tivesse disponibilizado mais tempo à aluna, talvez ela tivesse conseguido chegar a uma conclusão, mas quando chegou à última questão percebi que a Marta não tinha compreendido a representação do numeral misto e que dificilmente teria chegado à resposta.

A Marta e o Daniel tiveram alguns raciocínios semelhantes durante a resolução do problema, embora a Marta tenha demonstrado maior facilidade em resolver certas questões. Ambos necessitaram de recorrer ao material manipulável para compreenderem o que eu ía explicando. Também, nenhum dos dois alunos sabia representar o numeral misto.

4.2.3. Entrevista da Susana

A aluna começou a resolver o problema sozinha, e inicialmente, dá uma resposta errada. Depois, quando digo para verificar o resultado , utilizando os queijinhos, corrige a sua resposta.

Perante uma dúvida, a Susana diz:

> **Susana:** Ahhh, a minha dúvida é, ali estão representadas cinco maçãs inteiras e depois há metade e eu quero saber se aquela metade tivesse inteira eram seis maçãs e o que está representado ali é metade de seis.

Ao esclarecer a dúvida da Susana, induzi-a em erro ao dizer “Sim, é metade da sexta maçã, certo?”. A aluna só assimilou o “Sim” e isso, percebe-se pela resposta dada. Inicialmente, disse o sim por ter interpretado que a aluna se referia à sexta maçã, mas rapidamente me apercebi que a aluna estava a dizer, “metade de seis” e então, completei a minha resposta mencionando que era a metade da sexta maçã.

Por esta razão, a aluna indica $\frac{6}{2}$ como resposta. Quando peço à aluna que represente os $\frac{6}{2}$ nos queijinhos, a aluna indica que $\frac{6}{2}$ correspondem a 3 unidades e quando a confronto com o facto de não ser isso que é pedido, a aluna percebe o que está mal e dá a resposta correta:

> **Susana:** Já está.
> **Investigadora:** Então e qual é a fracção que utilizaste?
> **Susana:** Aqui tinha que utilizar… … cinco… … onze meios.
> **Investigadora:** Onze meios, que corresponde a quê?
> **Susana:** Seis maçãs e uma metade.
> **Investigadora:** Cinco maçãs e uma metade.
> **Susana:** Ahhh, sim, é isso.

A aluna identifica a fração pretendida depois de confrontada com o seu erro.

Na alínea 1.2, em que tinha que dizer quantas maçãs inteiras sobraram, Susana não manifestou dúvidas.

> **Susana:** Na segunda era pedido que, era… a pergunta era, quantas maçãs inteiras so… sobraram? E quando as meninas iam… acabavam de lanchar sobravam sempre nove quar… nove quartos e eu pens… a minha resposta foi sobraram duas maçãs e uma fatia, porque quando peguei nos nove quartos e … os montei, vi que ficavam duas unidades inteiras, duas maçãs e um quarto.

Através dos queijinhos, a aluna conseguiu pegar nos $\frac{9}{4}$ e formar duas unidades.

A seguir era pedido que desenhasse uma figura que representasse o que sobrou das maçãs e a aluna conseguiu representar os $\frac{9}{4}$ no papel. Inicialmente, a Susana desenha duas maçãs e meia. Quando pergunto o que sobrou, a aluna diz que sobraram duas maçãs e uma fatia. A seguir pergunto a que quantidade corresponde essa fatia e a aluna refere que se trata de uma metade. Peço que leia novamente o enunciado da alínea anterior e a aluna refere que são duas maçãs e $\frac{1}{4}$. Depois pergunto como é que ela iria desenhar e a aluna diz:

> **Susana:** Ah… Fazia uma bola, dividia em quatro partes e pintava uma das … quatro…das…
> **Investigadora:** Uma das partes?
> **Susana:** Das partes.

A aluna pinta uma das partes, dessa dita bola, deixando as outras duas maçãs por pintar. Depois pergunto se só sobrou $\frac{1}{4}$ e a aluna diz que não, sem hesitar. Peço à aluna que pinte tudo o que sobrou e a aluna pinta as outras duas bolas. A aluna atrapalhou-se por causa da fatia que mencionou ser a metade, mas não teve qualquer dificuldade em representar $\frac{1}{4}$.

Na questão 2, em que tinha de escrever $\frac{75}{8}$ na forma de numeral misto e identificar quantas maçãs inteiras haviam no alguidar, a Susana revelou dificuldades. O seu raciocínio estava correto, mas incompleto. A aluna sabia que o numeral misto era representado por uma parte inteira e por uma parte fracionária, mas não se lembrou de tudo o que tinha sido dado na aula, nesse mesmo dia. Então identificou uma unidade nos $\frac{75}{8}$ representando essa parte inteira e toda a outra parte fracionária, ou seja, queria representar $1\frac{67}{8}$, mas representou essa unidade através da fração $\frac{8}{8}$. Quando lhe pedi que explicasse o que tinha feito, a aluna disse:

> **Susana:** Ah … Peguei…fiz…como naquela ficha que a stora deu (ficha da aula) fui ver no setenta e cinco qual é que era a unidade… e a unidade era oito oitavos, na…
> **Investigadora:** (...) É no setenta e cinco?
> **Susana:** Oitavos.
> **Investigadora:** Ah, a unidade é oito oitavos, sim.
> **Susana:** Quanto é que faltava para a unidade e não faltava nada e quanto é que passava… conclui que passava sessenta e sete oitavos.

Investigadora: Então o quê que fizeste para concluir os sessenta e sete?
Susana: Fiz umas contas.
Investigadora: Que contas foram?
Susana: Ah… Pensei num número sessenta e sete…não, não foi assim. Peguei no setenta e cinco e fui contando oito para trás e cheguei ao sessenta e sete.
Investigadora: Então fizeste uma subtracção?
Susana: Sim.

A aluna estava a pensar corretamente, mas ficou pelos $\frac{67}{8}$ e deveria ter continuado a subtrair unidades. Também identificou, no papel, a unidade como sendo $\frac{8}{8}$, mas depois na resposta indica $8\frac{67}{8}$. Quando pergunto o porquê do 8 na parte inteira do numeral misto, a aluna assume que se baralhou por causa do número 75 ser 'grande'. Como já estava quase a dar o toque de entrada para a próxima aula, apenas pedi que dissesse o que fez na alínea seguinte. Nesta alínea, a aluna tinha que identificar qual dos 3 alguidares tinha mais maçãs e a Susana soube dizer qual era o alguidar que tinha mais maçãs e o porquê de ter escolhido esse alguidar.

Susana: No problema 3, vimos… era pedido que… ah, dos três alguidares A, B e C, qual deles é que tem mais maçãs? E,… a minha resposta foi… o alguidar que tem mais maçãs é o C porque tem nove unidades inteiras e mais oito oitavos…
Investigadora: Oito? Ou um?
Susana: …um oitavo, enquanto as outras têm menos uma unidade inteira.

Em suma, Susana através do material manipulável conseguiu identificar a fração $\frac{11}{2}$, identificar as 2 unidades da fração $\frac{9}{4}$ e, fazer a representação pictórica desta última fração. Durante a entrevista, a aluna atrapalhou-se algumas vezes, dando alguns erros mas com a minha ajuda, a aluna corrigia imediatamente o erro.

Em relação ao numeral misto, a aluna mostrou ter compreendido o numeral misto, apesar de ainda nem sempre saber usar corretamente esta representação. Susana sabe que o numeral misto é composto por uma parte inteira e por uma parte fracionária, no entanto, nem sempre teve em conta que a parte fracionária do numeral misto tinha que ser uma fração própria (numerador menor que o denominador). Sabe como subtrair uma unidade da fração imprópria, mas não continua quando ainda tem a possibilidade de subtrair mais unidades.

Na última questão identificou com facilidade a parte inteira do numeral misto, indicando o alguidar que continha mais maçãs.

4.2.4. Entrevista do Rafael

O aluno tenta responder à pergunta sem ajuda e depois, de uma primeira tentativa sem exito, recorre ao material manipulável para garantir uma resposta correta.

O Rafael dá como resposta "cinco meios" e explica que associou a parte inteira ao numerador e como sabe que os meios se representam pelo número 2, colocou este número no denominador.

Quando peço ao aluno que represente os $\frac{5}{2}$ utilizando os queijinhos, o aluno diz corretamente que $\frac{5}{2}$ são dois queijinhos e uma metade. Mas depois quando pergunto se isso corresponde ao que está na figura, o aluno diz, "então são $\frac{2}{5}$". O aluno parece resolver esta questão como se tratasse de uma relação parte-todo. E que se o todo não é 2, então é 5 e identifica a parte como sendo o 2. Parece ainda estar centrado na resolução do problema das pizas.

Depois peço ao aluno que experimente representar o que está a dizer, nos queijinhos e, o aluno percebe que $\frac{2}{5}$ também não representam as cinco maçãs e meia. Após pensar, durante 2 minutos, o aluno chega à resposta.

> **Investigadora:** Ah, então agora explica. Porquê que puseste onze meios?
> **Rafael:** Porque eu fui desenhar na folha e depois experimentei dividir em quartos.

Investigadora: Sim, experimentaste dividir em quartos.
Rafael: Em quartos…depois eu vi que estava…uma maçã que estava dividida ao meio e eu depois voltei atrás e pensei em dividir tudo ao meio e deu-me onze meios.

Rafael acaba por chegar à resposta através da utilização do material manipulável, mas tive que ser eu a promover a utilização dos 'queijinhos'.

Na alínea 1.2, o aluno tinha que dizer quantas maçãs inteiras sobraram e através do material manipulável obteve a resposta dizendo:

Rafael: Sobraram duas maçãs e um quarto. So-bra-ram duas maçãs e um quarto, porque eu fui buscar os queijinhos que representam os quartos e tirei nove e depois fui montar e deu duas maçãs e um quarto.
Investigadora: Então e o que (...) perguntam?
Rafael: Perguntam o que sobrou?
Investigadora: Não, não, não…não perguntam isso.
Rafael: Ah, aaa…quantas maçãs inteiras sobraram?
Investigadora: E então, quantas foram?
Rafael: Sobraram duas maçãs inteiras.

Na pergunta seguinte era pedido que representasse, no papel, o que tinha sobrado de maçãs. O aluno requeriu a ajuda dos queijinhos e, não manifestou dificuldades em desenhar os $\frac{9}{4}$ (figura 20).

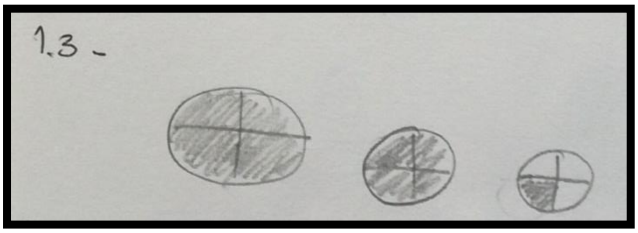


Figura 20 – Resposta escrita do Rafael (1.3)

Na pergunta 2 o aluno enganou-se num cálculo, o que fez com que desse a resposta errada, mas quando viu que tinha cometido um erro, rapidamente corrigiu e deu a resposta certa. O aluno soube representar corretamente o numeral misto, mostrando o que aprendeu nesse mesmo dia:

Rafael: A minha resposta é "que estavam no alguidar dez unidades e três oitavos, porque eu fui contar na minha cabeça oito mais oito, por aí

fora, até chegar aos 75, mas depois deu-me 72 e foram…10 unidades e três oitavos".
Investigadora: Então 10 vezes 8 são 72, é isso?
Rafael: Sim. Porque…
Investigadora: 10 x 8 são 72?!
Rafael: Ahhh… 10 x 8 são 72??? 10 x 8 é oitenta.
Investigadora: Pois, então porque estás a dizer que são 72?
Rafael: Ah, não. Porque eu…
Investigadora: Contaste um a mais.
Rafael: Contei um a mais…são 9 unidades e três oitavos.
Investigadora: Vá, então continua.
Rafael: E deu-me 72… e pois, deram-me 9 unidades e três oitavos porque 72 + 3 é 75 e é mais três oitavos porque estamos a falar de oitavos, a mexer com oitavos.

No problema 3 voltou a dar a sua resposta com base no conhecimento que tem da representação na forma de numeral misto " A minha resposta foi que "quem tem mais maçãs é o alguidar C, porque são 9 maçãs inteiras e o alguidar A e B são oito maçãs inteiras, por isso é menos uma maçã".

Em suma, o Rafael embora necessite ainda do material manipulável para concretizar a situação que lhe é proposta, resolve as questões sem revelar dificuldades. No início, talvez por ainda estar centrado na resolução do problema anterior, identifica a fração errada, mas depois quando lhe peço que veja essa situação no material manipulável, o aluno percebe que deu a resposta errada e soluciona a questão, indicando a resposta correta e dando uma explicação plausível.

Rafael identifica a fração correspondente a 5 maçãs e meia, representa os $\frac{9}{4}$ no papel e identifica as 2 unidades desta fração. Revelou compreender a representação do numeral misto, ao resolver as questões que lhe eram pedidas.

Os dois alunos com nível de desempenho médio revelam a necessidade de utilizar o material manipulável, para representarem a situação proposta. Talvez já pudessem progredir no tipo de representação, mas considero que os 'queijinhos' lhes dão segurança para indicar as respostas.

Ambos compreenderam a representação em numeral misto, no entanto, apenas o Rafael conseguiu indicar as respostas certas. Já a Susana, apesar de não ter completado o seu raciocínio na pergunta 2, demonstrou ter compreendido como se passava da representação em fração para a de numeral misto.

4.2.5. Entrevista do Bruno

Na pergunta 1.1, o aluno disse: "Pedia para representar a fração de cinco maçãs e um meio e eu fiz por desenho, fiz…cinco bolinhas e meia maçã". Quando lhe digo que não representou a fração, o aluno diz: "Já está. Eu pus cinco unidades e meia, aqui em baixo". O aluno continuava sem perceber o que era pedido, pois escreveu por extenso 'cinco unidades e meia'. A seguir propus-lhe que dividisse as 5 maçãs em meios e foi o suficiente para que o aluno chegasse à solução. A seguir representou no papel as 11 metades e escreveu $\frac{11}{2}$ (figura 21).

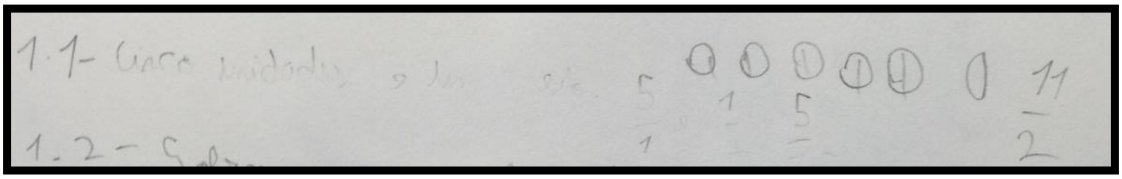


Figura 21 – Resposta escrita do Bruno (1.1)

Na questão 1.2 o aluno identificou a parte inteira da fração, sem apresentar nenhuma dúvida. Identificou a unidade como '4' [referindo-se a $\frac{4}{4}$], adicionou mais quatro [querendo referir-se novamente a $\frac{4}{4}$] e viu que dava para completar outra unidade e que ainda sobrava $\frac{1}{4}$ da maçã:

> **Bruno:** Ok, eu…então aqui dizia que tinham sobrado nove quartos de maçã e, então eu vi, que quatro mais quatro é oito então ainda sobra um, por isso já se sabe que só há duas maçãs inteiras, porque o máximo é oito. Porque se fizermos oito mais quatro já é 12, já passa dos nove quartos.

Investigadora: E o (...) que queres dizer com os oito? Os oito quê? O (...) que o oito representa?
Bruno: Ah, quartos.
Investigadora: Oito quartos representam o quê?
Bruno: Duas unidades.

Na 1.3, o Bruno não estava a representar corretamente o que era pedido. Desenhou 3 maçãs, mas depois como queria realçar o quarto da terceira maçã, que tinha desenhado, pintou esse quarto, ignorando as duas maçãs inteiras. Durante a entrevista, o aluno indicou que as outras duas maçãs também era o que tinha sobrado:

Bruno: Na 1.3 é, então, pediam para desenhar uma figura que possa representar o que sobrou da maçã, das maçãs. Eu fiz duas maçãs inteiras e ali uma maçã inteira, mas pintando um quarto.
Investigadora: Pintaste o quarto que era o que falta… sobrava?
Bruno: Sim.
Investigadora: Ou seja, o quarto é o que sobra?
Bruno: Ah, sobra duas maçãs e um quarto (figura 22).

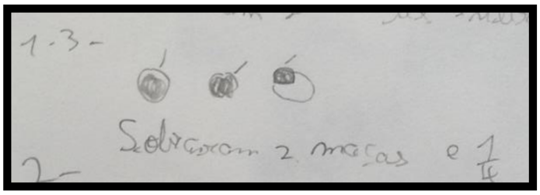


Figura 22 – Resposta escrita do Bruno (1.3)

Na pergunta 2, em que era pedida a identificação do número de maçãs inteiras e a representação da fração em numeral misto, o aluno não teve dúvidas. Bruno utilizou o algoritmo da divisão. Pôs o numerador da fração, “75”, no dividendo, o denominador da fração , “8”, no divisor, identificou a parte inteira do numeral misto, no quociente “9” e indicou que restava $\frac{3}{8}$ (parte fracionária do numeral misto), utilizando o “3” do resto e o “8 do divisor”. Quando pergunto o que tinha feito, disse:

Bruno: A 2, então a 2 pedia para … ahhh… para dizer quantos oitavos estavam no alguidar. E haviam… eram 75 oitavos. E eu fiz, eu peguei nos 75 e dividi-os por oito, que me deu nove… ahhh, depois eu… então

como sobrou 3, deu o resto 3, eu fiz numeral misto, nove unidades e três oitavos.
Investigadora: Então e este resto significa o quê?
Bruno: É os que estão a mais, é o que passa da unidade.

Na pergunta 3, o aluno começou por errar na resposta, porque fez uma interpretação errada do numeral misto, dizendo "Eu pus o A, porque se multiplicarmos três vezes oito dá vinte e quatro e oito mais vinte e quatro é trinta e dois. Eu tive a ver também dos outros e nenhum deles conseguia chegar." A seguir pergunto ao aluno o que representa um numeral misto e o aluno diz:

Bruno: O numeral misto é… para mostrar quantas unidades têm e quanto é que passa da unidade.
Investigadora: Hum, e então? Quantas unidades têm no alguidar, A?
Bruno: Oito.
Investigadora: No B?
Bruno: Oito.
Investigadora: No C?
Bruno: Nove.
Investigadora: Então e qual é que tem mais? – o aluno fica pensativo a olhar para a ficha e eu volto a perguntar – o que tem nove maçãs, o que tem oito ou o que tem oito?
Bruno: Então, a 3, é a C, porque tem 9 unidades e um oitavo e as outras duas não chegam às nove unidades, porque as outras duas têm, oito oitavos e, oito unidades e três oitavos, ahhh na B oito unidades e três quartos e nenhuma consegue chegar às nove unidades.
Investigadora: Então entre a A e a B qual é a maior? Qual é que tem mais?
Bruno: A e a B é, então a B.
Investigadora: Porquê?
Bruno: Porque os quartos são, como são três quartos, os quartos são maiores do que os oitavos. E como tem o mesmo número por cima, o mesmo … ahhh numerador… - deu o toque - ahhh, eles, ahhh, então três oitavos chega… é como se fosse um quarto e um oitavo, mas nos três quartos já são três quartos.

Bruno dá a resposta certa, olhando apenas para a parte inteira do numeral misto e identificando o alguidar que tinha mais pedaços de maçã, até ao que tinha menos.

Em suma, o aluno apenas revelou dificuldades na primeira questão, quando tinha que transformar as 5 maçãs e meia em fração.

Depois desta fase mais complicada para o aluno, Bruno conseguiu resolver todas as outras questões sem necessitar da minha ajuda.

Apenas na última questão é que o aluno começou por resolver de uma forma errada, mas a partir do momento que perguntei o que representava o numeral misto, as ideias ficaram mais claras para o aluno.

4.2.6. Entrevista do Guilherme

O aluno revelou algumas dificuldades na interpretação do problema porque achava que tinha de representar as 5 maçãs e meia em numeral misto, o que seria fácil, dado que já havia a parte inteira e ele já tinha identificado a metade como sendo $\frac{1}{2}$. Tive que explicar ao aluno o que tinha de fazer. Uma vez que o aluno já tinha identificado a metade como sendo $\frac{1}{2}$, reforcei essa ideia e perguntei o que poderia fazer com as restantes maçãs. Em seguida, o aluno não teve dificuldades em responder:

> **Investigadora:** Fizeste 11 meios, porquê?
> **Guilherme:** Porque dividi-as em meios e depois contei-as e deu-me 11 meios.

Na questão 1.2 o aluno identificou, sem hesitar, a parte inteira da fração respondendo que "sobraram duas maçãs inteiras. E sobrou um quarto da maçã, porque 8 quartos são duas maçãs e o que sobra é um quarto por isso adicionei tudo e deu-me 9 quartos. Deu-me duas maçãs inteiras".

O aluno refere que as duas maçãs correspondem a $\frac{8}{4}$ e que para chegar a $\frac{9}{4}$ ainda falta $\frac{1}{4}$, indicando a parte inteira que sobrou.

Na pergunta 1.3 Guilherme regista no papel $\frac{1}{4}$ da maçã. Quando pergunto o que sobrou, o aluno diz "um quarto". Depois comento com o aluno que na pergunta anterior ele tinha referido que tinham sobrado 2 maçãs inteiras e pergunto o porquê de ele agora responder que só sobrou $\frac{1}{4}$. O aluno persiste na ideia de que só sobrou mesmo $\frac{1}{4}$, visto que já tinha identificado, na pergunta anterior, que sobraram as 2 maçãs inteiras. Em seguida, leio o enunciado da pergunta 1.2 indicando que sobraram $\frac{9}{4}$ na fruteira e, que a pergunta 1.3 pede para representar o que sobrou das maçãs. Assim, o aluno teria que representar os $\frac{9}{4}$ no papel. Após esta clarificação, Guilherme acrescenta as 2 maçãs que faltam representar (figura 23).

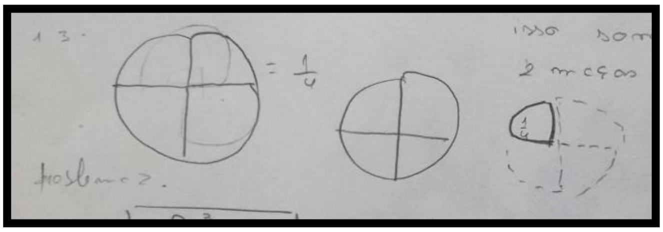


Figura 23 – Resposta escrita do Guilherme (1.3)

Na pergunta 2, o aluno identifica corretamente o numeral misto correspondente a $\frac{75}{8}$. Quando pergunto como chegou aos 9 $\frac{3}{8}$, o aluno diz "porque 8x9 dá 72 e ... se pusermos mais oito dá oitenta e não dava… por isso sobrava 3 oitavos. Meti 9 unidades inteiras e na fracionária 3 oitavos".

O aluno identificou a parte inteira através do algoritmo da multiplicação, e indicou a parte fracionária verificando que sobrava $\frac{3}{8}$ para chegar a $\frac{75}{8}$.

Na última questão, Guilherme decide passar todos os numerais mistos para a fração correspondente e colocar todas as frações com o mesmo denominador (figura 24). Depois compara as frações e identifica o alguidar maior. Quando está a realizar os cálculos, o aluno pergunta como pode passar a fração dos 'quartos' para os 'oitavos'. Depois pergunto "...se multiplicares 35 por 2 fica quanto?" e, o aluno diz "Ahh, está bem ... 70". Penso que a pergunta do aluno não tenha sido uma dificuldade, mas sim, uma distração, até porque já lhe tinha perguntado quantos ‘oitavos’ correspondiam a $\frac{1}{4}$ e o aluno respondeu, imediatamente “dois”.

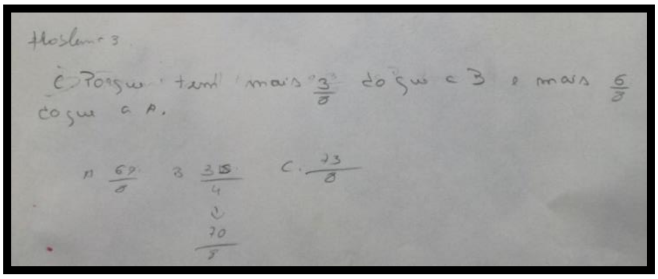


Figura 24 – Resposta escrita do Guilherme (3)

Em suma, Guilherme mostrou ter dificuldade na interpretação da primeira (1.1) e da terceira (1.3) pergunta. A primeira porque estava focado na resolução através do numeral misto e então, não conseguiu associar uma forma de dividir as maçãs, sem que eu lhe tivesse dado uma ajuda. A terceira, porque fez uma interpretação diferente, indicando que $\frac{1}{4}$ era o que tinha sobrado dos $\frac{9}{4}$ de maçãs, depois de ter identificado que as duas maçãs inteiras já tinham sobrado, na alínea anterior. Em ambas as alíneas, o aluno precisou de um ‘empurrãozinho’. Na pergunta 1.2, o aluno identificou com facilidade a parte inteira da fração imprópria $\frac{9}{4}$.

Na pergunta 2 e 3, o aluno revelou ter compreendido a representação do numeral misto e um grande ‘interesse’ neste tipo de representação, quando se deu ao trabalho de transformar todos os numerais mistos em frações, sabendo que a parte inteira já indicava qual dos alguidares tinha mais maçãs.

Os dois alunos com nível de desempenho mais alto mostraram dificuldades na interpretação da primeira pergunta. Os dois precisaram de uma ajuda para avançar. Na pergunta 1.3, ambos representaram apenas um quarto da maçã, o Bruno porque se esqueceu de pintar as duas maçãs inteiras e o Guilherme por achar que o enunciado se referia ao ‘quarto’ que não constituía uma unidade.

Na representação em numeral misto, ambos resolveram a questão através do algoritmo, mas o Bruno através da divisão e o Guilherme através da multiplicação.

Não necessitaram de utilizar o material manipulável.

4.3. Problema “Percursos”

O último problema foi entregue aos 6 alunos, depois destes terem feito um problema semelhante na aula.

4.3.1. Entrevista do Daniel

O Daniel colocou as frações no sítio errado do segmento. Colocou os $\frac{7}{10}$ no lugar dos $\frac{9}{10}$ e os $\frac{2}{5}$ no lugar dos $\frac{2}{10}$. Depois, acabei por ajudá-lo a identificar as frações decimais no segmento.

> **Investigadora:** Quantos décimos são aqui?
> **Daniel:** É um quinto.
> **Investigadora:** Estou a falar dos décimos.
> **Daniel:** Um décimo.
> **Investigadora:** E aqui?
> **Daniel:** Dois décimos.
> **Investigadora:** Aqui?
> **Daniel:** Três … décimos, quatro décimos, cinco décimos, seis décimos, sete décimos, oito décimos, nove décimos, dez décimos - [enquanto indicava os traços do segmento].
> **Investigadora:** E porquê que aqui tens 2 quintos e aqui três quintos, se aqui são os dois décimos e os três décimos?

O aluno também não conseguiu identificar os ‘quintos’ no segmento. Pedi que verificasse, no material manipulável, quantos décimos cabiam nos $\frac{2}{5}$. Respondeu corretamente 4. Conseguiu identificar os $\frac{2}{5}$ no segmento, mas continuou a demonstrar dificuldades em identificar os restantes ‘quintos’. Com a minha ajuda e com o auxílio do material manipulável, o aluno foi conseguindo identificar os ‘quintos’ no segmento. Apesar de verificar que $\frac{1}{5}$ é igual a $\frac{2}{10}$, através dos ‘queijinhos’, o aluno teve dificuldades na ordenação dos ‘quintos’ no segmento. Por exemplo, ao perguntar onde se localizava $\frac{3}{5}$ no segmento, o aluno indicou o lugar correspondente a $\frac{1}{5}$. Quando perguntei “Então vais para trás? Três quintos é mais pequeno que dois quintos?”, o aluno verificou que tinha colocado a fração no sentido errado e respondeu “Ah, não. É aqui”, indicando o lugar correto. Depois de sinalizar os ‘quintos’ e os ‘décimos’ no segmento, o aluno já identificou onde é que cada amigo tinha parado (figura 25).

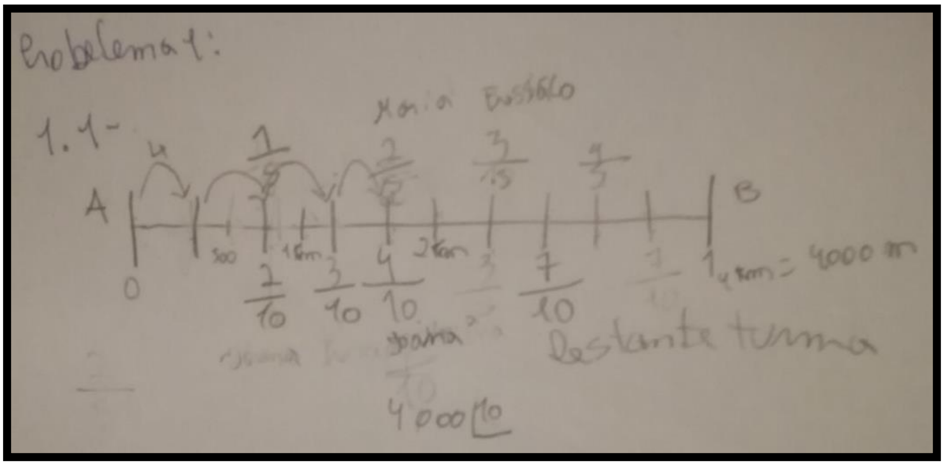


Figura 25 – Resposta escrita do Daniel (1.1)

Na pergunta 1.2, era pedido que identificassem quantos quilómetros tinham sido feitos pela Joana e pela Maria, quando estas fizeram a primeira paragem.

Daniel disse que não estava a perceber a pergunta. Pedi ao aluno que voltasse a ler o que era pedido. Após uma breve explicação sobre o que era pedido, perguntei ao aluno se já sabia quantos quilómetros é que elas tinham feito, ao que o aluno diz “Foram quatro décimos”. Fiz ver ao aluno que ele não estava a indicar os quilómetross que elas tinham percorrido até ao momento da sua primeira paragem e, de imediato o aluno disse “Hum, 4 km”. Reparei que Daniel não estava a conseguir resolver o problema, pelo que optei por tentar ajudá-lo, convertendo os 4 km em 4000 m e dividi-los em 10, para identificar quantos metros correspondiam a cada ‘décimo’ do percurso. Durante este processo fui questionando o Daniel e reparei que o aluno sentia dificuldades, pelo que decidi introduzir alguns esclarecimentos sobre a conversão de quilómetro em metros e vice-versa. Por isso, este problema demorou mais tempo a ser resolvido. Aproveitei o facto da outra aluna com baixo nível de desempenho estar presente, que também tinha a mesma dificuldade, para dar a explicação em simultâneo.

Durante a minha explicação ao dividirmos o segmento em 10 e, sempre que o aluno indicava a distância percorrida em cada ‘décimo’ do percurso, pedi ao aluno que registasse essa mesma distância no segmento que tinha desenhado no papel. Assim, acabou por dar como resposta “A Maria e a Joana descansaram ao fim de 1600“. Quando perguntei que conclusão poderia tirar para o facto de as duas meninas terem parado ao fim de 1600 m, sendo que uma tinha percorrido $\frac{4}{10}$ do percurso e a outra $\frac{2}{5}$ do percurso, o aluno disse “Porque é no mesmo ponto”. Como o aluno tinha desenhado no segmento todos os ‘quintos’, ‘décimos’ e representado os metros correspondentes a cada décimo, conseguiu perceber que as duas meninas pararam exatamente no mesmo ponto (figura 26).

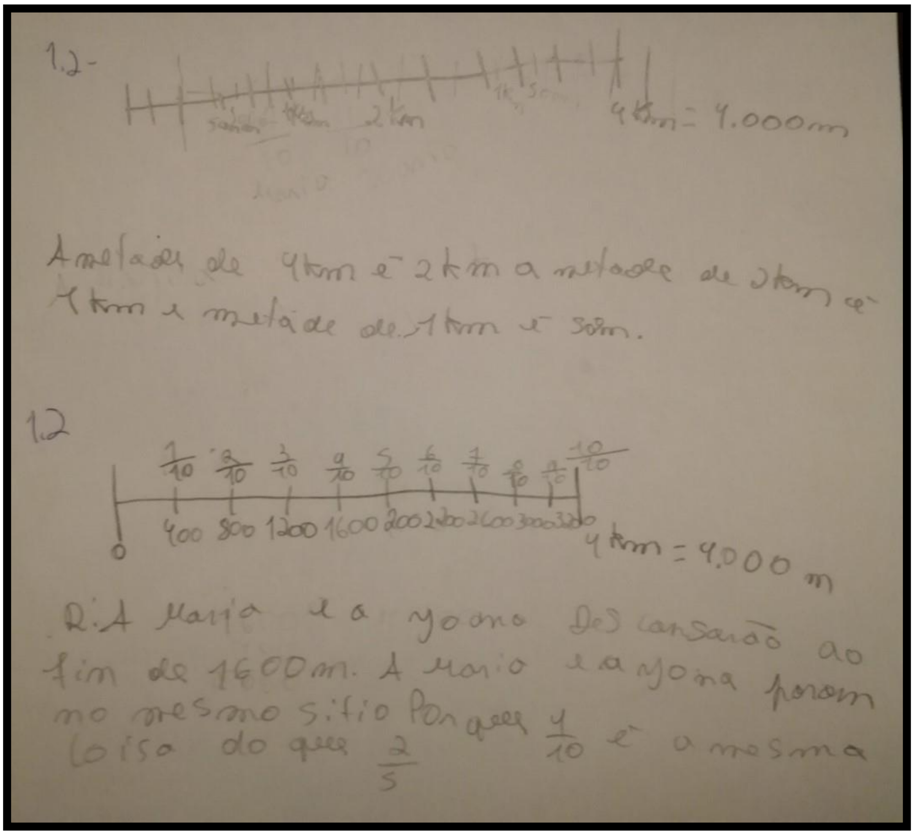


Figura 26 – Resposta escrita do Daniel (1.2)

Na pergunta 1.3, como o tempo disponível do aluno já estava a terminar e, visto que não me iria encontrar mais com o aluno, sugeri que utilizasse o segmento que já continha anotações, na pergunta anterior, e que desenvolvesse a partir daí o pensamento. Desse modo, o aluno percebeu que o Francisco tinha percorrido 2400 m. Indiquei-lhe que esse percurso, feito pelo Francisco, iria corresponder ao percurso total do João. Assim sendo, o segmento ficaria dividido em 6 partes e o percurso do Francisco corresponderia aos $\frac{6}{6}$. O aluno respondeu que o João tinha percorrido 2 km, uma vez que tinha feito $\frac{5}{6}$ do percurso do Francisco.

No fim, pedi ao aluno, que representasse um novo segmento, dividido em 6 partes, em que o percurso total era de 2400 m. Fez essa representação com a minha ajuda e indicou que os 2000 m feitos pelo João correspondiam aos 2 km.

Em suma, Daniel precisou da minha ajuda para resolver este problema. Não consegue, por si só, ordenar as frações mas através do material manipulável consegue identificar as frações equivalentes entre os ‘quintos’ e os ‘décimos’, reconhecendo, por exemplo, que $\frac{1}{5}$ é equivalente a $\frac{2}{10}$. No entanto, tem dificuldades em representar estas frações no segmento de reta.

Na pergunta seguinte, como já tinha as distâncias registadas no segmento, conseguiu identificar os percursos feitos pela Maria e pela Joana, indicando a sua resposta em metros. Também compreendeu que as duas meninas tinham feito o mesmo percurso, por estarem ambas no mesmo ponto do segmento. A representação do segmento, com as respetivas distâncias e as diferentes frações foi uma mais-valia para o aluno tirar as suas conclusões.

Na última pergunta, o aluno identificou os 2 km percorridos pelo João. As várias representações que o aluno fez na sua folha de resolução, ajudaram-no a perceber que a posição do João correspondia à metade do percurso total do Francisco. Daí, o aluno ter apresentado a sua resposta em quilómetros.

4.3.2. Entrevista da Marta

A Marta teve dificuldades idênticas às de Daniel.

Começa a resolver o problema sozinha e quando vou ter com ela, a aluna diz:

Marta: ... já pus aqui a Maria, a Joana, o Francisco e os elementos da turma.
Investigadora: E porque puseste assim?
Marta: Porque, eu vi aqui na Maria 2 quintos e então pus 2 quintos, na Joana 4 décimos, então apontei lá, no Francisco 3 quintos, também pus e nos elementos da turma 7 décimos.
Investigadora: E tu estás a dizer que 7 décimos, é o mesmo que 4 décimos, que 4 décimos é o mesmo que 3 décimos, que 3 quintos é o mesmo que 2 quintos e que 2 quintos é o mesmo que um quinto?
Marta: Sim.

A aluna tinha as frações todas desorganizadas, no segmento representado no papel. Para tentar ajudar a aluna a fazer a divisão correta do segmento, comecei por relembrar o que tinha sido feito na aula, quando utilizámos as tiras e as dividimos, primeiro ao meio, depois em quatro partes e a seguir em 8. A seguir, pergunto à aluna "se formos dividir este segmento ao meio, onde é a metade?", ao que a aluna me diz "Mais ou menos aqui", apontando para os $\frac{4}{10}$. Depois verifiquei com a aluna onde se situava a metade no segmento e pedi que a mesma representasse com uma fração essa metade. A aluna identificou imediatamente a metade, com a fração $\frac{1}{2}$. Quando lhe pedi a metade da metade em fração, a aluna disse "$\frac{2}{2}$". Então sugeri que a aluna verificasse essa situação, no material manipulável. Através deste material, a aluna já consegue identificar as frações. Quando lhe pergunto onde pode colocar a fração $\frac{1}{10}$ no segmento, a aluna não responde corretamente, mas depois vai verificar quantos 'décimos' cabem numa unidade, através do material manipulável, e responde "10", indicando imediatamente onde se situa a fração $\frac{1}{10}$ no segmento. A seguir peço que registe os restantes 'décimos' no segmento e a aluna regista as frações corretamente, até aos $\frac{4}{10}$ no segmento.

Quando tem que identificar os 'quintos', no segmento, as dificuldades voltam a surgir. A aluna através do material manipulável verificava qual era a fração equivalente entre os 'quintos' e os 'décimos', mas quando tinha que representar no segmento, a aluna não conseguia perceber, por exemplo, que o lugar dos $\frac{4}{10}$ também era o lugar dos $\frac{2}{5}$ e, persistia em colocar os $\frac{2}{5}$ no lugar dos $\frac{2}{10}$. A aluna igualava as frações através do numerador.

Quando fui ver as frações que a aluna tinha representado no segmento verifiquei que a Marta tinha colocado os $\frac{5}{10}$ no lugar dos $\frac{6}{10}$ e, por aí adiante. Quando perguntei o porquê de 'ter saltado' uma marcação na reta, a aluna diz

“Então porque aí é a metade”. Quando pedi que verificasse essa situação nos ‘queijinhos’, a aluna conseguiu identificar as duas frações ($\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$) como equivalentes. Depois de identificar todas as frações no segmento, a aluna conseguiu indicar onde tinham parado os amigos para descansar (figura 27).

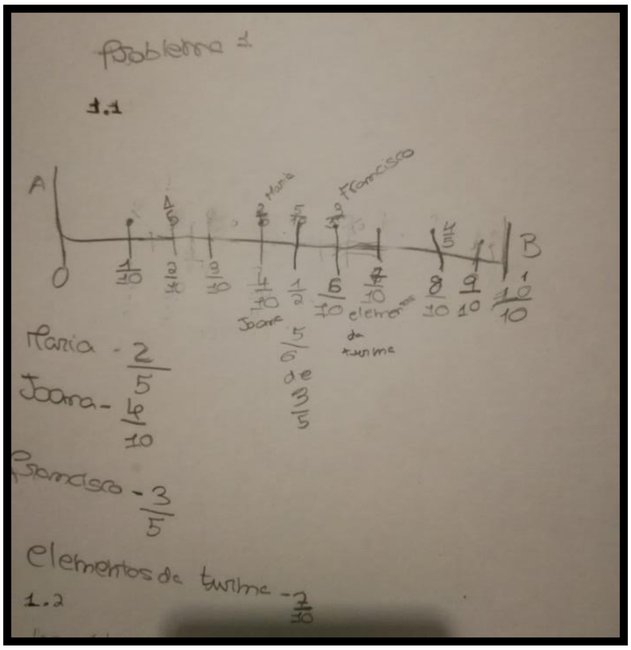


Figura 27 – Resposta escrita da Marta (1.1)

Na pergunta 1.2, a aluna identifica 4 km como 4000 metros, porque ouviu a explicação que dei ao Daniel. Mas quando pergunto os quilómetros que a Maria e a Joana fizeram, a aluna responde:

Marta: 2 … acho que é 2000.
Investigadora: 2000 é aqui, no meio. É metade e elas chegaram aqui. – apontando para o sítio no segmento onde pararam.
Marta: 1000.
Investigadora: 1000 metros? Mas aqui é 2000m, 1000m seria aqui no 1 quarto. **(...)**

Digo à aluna que tem de dividir o total do percurso por 10, para indicar quantos metros corresponde a cada ‘décimo’ e depois adicionar essas distâncias até chegar ao lugar onde a Maria e a Joana pararam. A aluna estava com dificuldades em dividir o 4000 por 10. Passado algum tempo, identifica os

400 m correspondentes a cada décimo e efetua a adição, indicando que as meninas tinham feito a primeira paragem aos 1600 m. Quando perguntei porque percorreram ambas 1600 m, a aluna não me conseguiu dar nenhuma resposta. Acabei por ser eu a indicar uma explicação e pedi que a aluna registasse tudo no papel (figura 28).

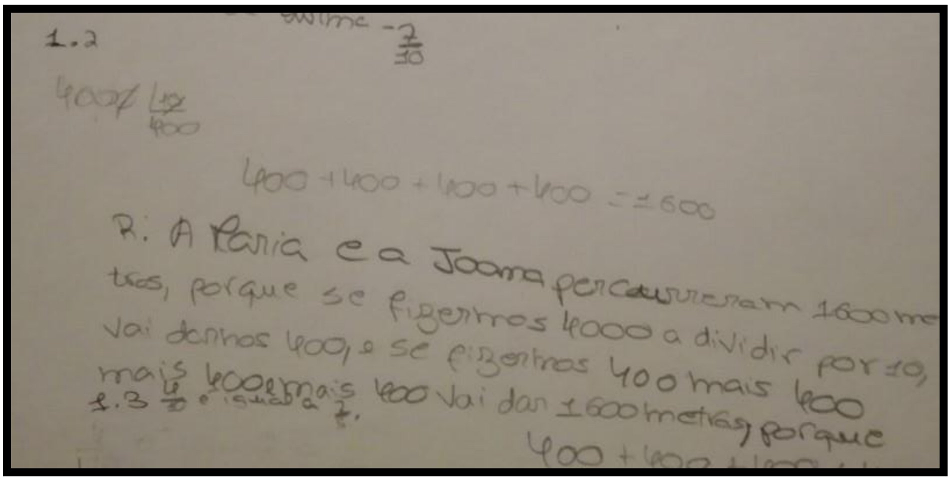


Figura 28 – Resposta escrita da Marta (1.2)

Na última pergunta, a aluna já não tinha muito tempo para responder e acabei por lhe explicar o que tinha de fazer e pedir que registasse a resposta:

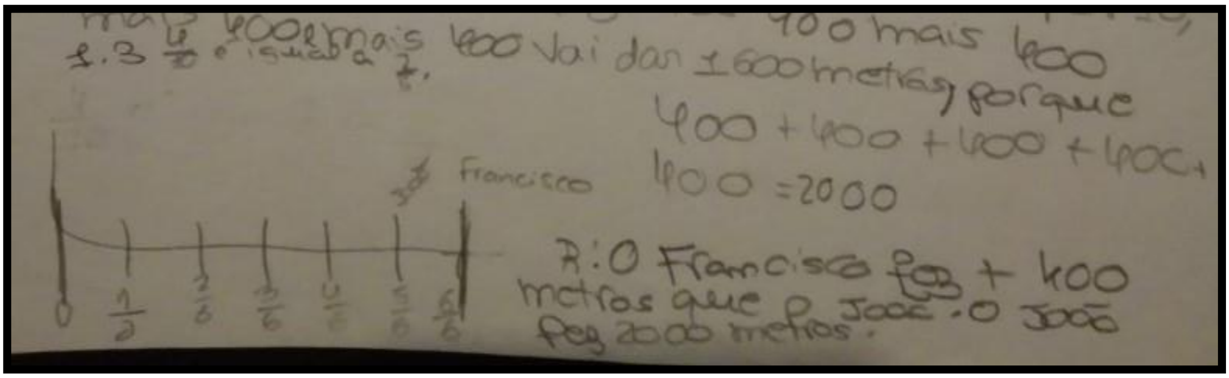


Figura 29 – Registo de Marta, após a explicação da investigadora (1.3)

Em suma, a Marta também precisou de ajuda para resolver o problema. Revelou dificuldades na ordenação das frações e não identificava as frações equivalentes no segmento.

Na segunda pergunta, quando identificou os 400 m correspondentes à fração $\frac{1}{10}$ já conseguiu indicar que a Joana e a Maria tinham feito 1600 m.

As marcações já assinaladas na reta eram assumidas por Marta como 'lugares já ocupados' e que não podiam ser tidos em conta para prever onde se poderia marcar uma fração que 'passasse' essa localização. Por isso, assinala $\frac{5}{10}$ no lugar de $\frac{6}{10}$ pois $\frac{5}{10}$ já estava 'ocupado' com $\frac{1}{2}$.

Os dois alunos com baixo nível de desempenho, apenas conseguem identificar frações equivalentes através do material manipulável. Revelaram dificuldades em ordenar as frações no segmento.

4.3.3. Entrevista da Susana

Susana consegue representar bem as frações decimais, mas inicialmente não ordena bem os 'quintos'.

Investigadora: Então, 2 décimos corresponde a quê?
Susana: Um quinto.
Investigadora: Então porque puseste um quinto, nos 4 décimos?
Susana: Ahhh…
Investigadora: Então vá, corrige lá.

Dei algum tempo à aluna, para corrigir o segmento e, quando cheguei perto da aluna, reparei que a mesma, já tinha identificado as paragens feitas pelos amigos durante o percurso e corrigido algumas frações cujo denominador era 5. Mas continuava com alguns 'quintos' desordenados. Quando perguntei à aluna qual era fração decimal equivalente a $\frac{4}{5}$, a aluna respondeu corretamente. A aluna identificou as frações equivalentes, mas não representou todas as frações, corretamente, no segmento (figura 30).

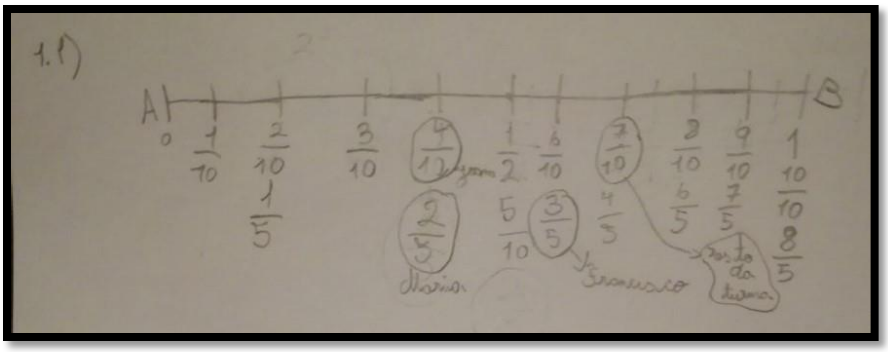


Figura 30 – Resposta escrita da Susana (1.1)

Na pergunta 1.2, induzi a aluna a utilizar a estratégia que tínhamos feito na aula, com um problema semelhante a este:

Investigadora: Então se isto são 4 quilómetros, quanto é que achas que vão ser os 4 décimos? Pensa lá um bocadinho, como é que vais dividir isso? Lembra-te do que fizemos na aula hoje. Sobre os 4 décimos de … quantos quilómetros é que são?
Susana: Na aula eram oito quilómetros.
Investigadora: Na aula eram 8 e, então fazíamos um meio de 8 km, não era? E o "de" correspondia ao quê?
Susana: Ao vezes.
Investigadora: Então era um meio vezes o número de quilómetros. Então e a Joana fez quantos?
Susana: 4 décimos.
Investigadora: De quantos quilómetros?
Susana: De 4.
Investigadora: Então o que vais fazer?
Susana: 4 décimos vezes 4 km.

A aluna recordou o que tinha sido feito na aula e conseguiu utilizar o operador.

Depois verifiquei que tinha multiplicado o numerador e o denominador, da fração ($\frac{4}{10}$) por 4. Indiquei que não se multiplicava o denominador por 4 e, a aluna corrigiu, escrevendo "$\frac{16}{10}$". Depois perguntei quanto é que era $\frac{16}{10}$ e, a aluna disse "um, zero vírgula um, não". Comecei a perguntar quanto é que era 1 a dividir por 10, 2 a dividir por 10 e depois voltei ao 16 a dividir por 10. A aluna respondeu corretamente às duas primeiras divisões "0,1 e 0,2", mas depois indica “0,16”. A seguir perguntei quanto é que era $\frac{10}{10}$ e a aluna disse “1”. Depois decompus $\frac{16}{10}$ ($\frac{10}{10}$ + $\frac{6}{10}$), indicando-lhe que era o mesmo que “1 + 0,6” e, a aluna começa por dizer “0,7”, mas depois já indica que é “1,6”. Como a resposta era pedida em quilómetros pedi à aluna que indicasse a resposta em quilómetros e a aluna diz “um quilómetro e seis metros”, depois corrigi-a, indicando que se tratava de 1 km e 600 m.

Quando a Susana calcula o percurso da Maria, a aluna diz “Professora, se eu fizer dois vezes quatro vai dar 8 e vai ficar maior que o denominador”. A preocupação da aluna era saber se uma fração podia ter um numerador maior que o denominador (fração imprópria). Indiquei que não havia problema, que $\frac{16}{10}$, correspondente ao percurso da Joana, também tinha o numerador maior que o denominador e, que a aluna depois teria que me indicar qual era a parte inteira dessa fração. A aluna decompôs $\frac{8}{5}$ ($\frac{5}{5}$ + $\frac{3}{5}$) e indicou o resultado “1,60”. Depois escreveu “A Maria fez mais quilómetros que a Joana, porque a Maria fez 1,60 e a Joana 1,6”. Acabei por dizer à aluna que 1,6 ou 1,60 correspondia ao mesmo número. A aluna corrigiu a resposta (figura 31).

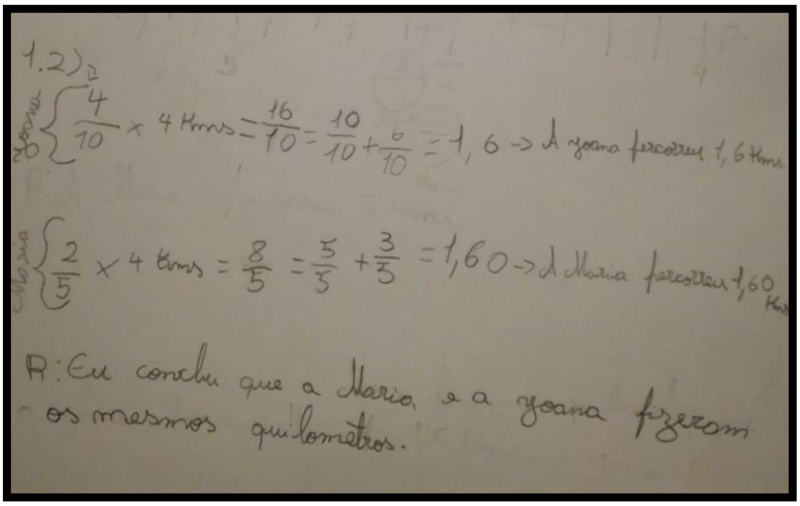


Figura 31 – Resposta escrita da Susana (1.2)

Na última pergunta, a Susana voltou a utilizar o operador da multiplicação para resolver o problema. Começou por indicar os quilómetros percorridos pelo Francisco, considerando o total de 4 km e depois indicou os quilómetros feitos pelo João, considerando os quilómetros que o Francisco tinha percorrido até à sua primeira paragem (figura 32).

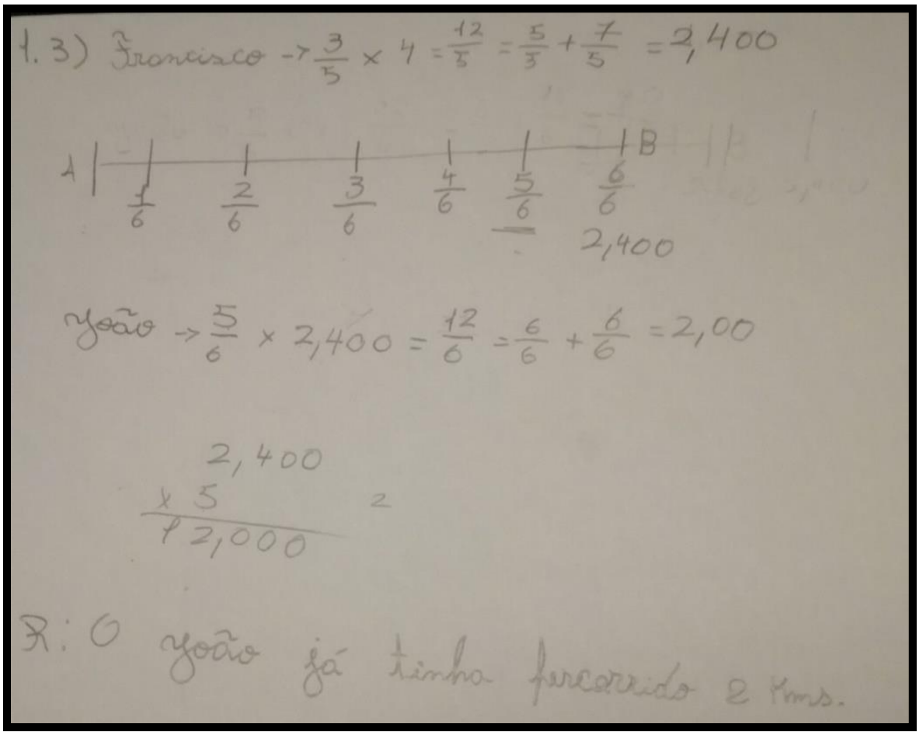


Figura 32 – Resposta escrita da Susana (1.3)

Durante o processo de resolução, Susana ao calcular o percurso feito pelo Francisco, identifica a fração $\frac{12}{5}$, mas depois indica que o Francisco tinha feito 1,20 km. Pedi à aluna que reunisse os $\frac{12}{5}$ com o material manipulável e que verificasse quantas unidades conseguia fazer com essa fração. Através deste material, a aluna indicou as 2 unidades. Depois reparei que a aluna tinha escrito no papel, o número 40 e perguntei porque o tinha escrito e a aluna disse "como são 2 quintos, eu pensei em 0,20 + 0,20". Depois perguntei quanto é que dava e a aluna respondeu 0,40. Depois adicionou tudo indicando o 2,40 e voltou a mencionar que a parte decimal correspondia a 40 metros.

Quando vai calcular o percurso feito pelo João, a aluna escreve "$\frac{5}{6}$ x 4", utilizando o percurso total do Francisco. Indico que tem de considerar o percurso que o Francisco fez, até à sua primeira paragem, como sendo o total do percurso do João e a aluna corrige, indicando "$\frac{5}{6}$ x 2,4". Ao calcular esta multiplicação, Susana indica que o resultado são $\frac{21}{6}$. Quando pergunto como chegou a essa conclusão, a aluna diz:

> **Susana:** Ah, peguei nos 5 sextos e fui multiplicar por 2,400.
> **Investigadora:** E dá-te 21 sextos?
> **Susana:** Sim. Eu multipliquei o numerador pelo dois e pelo 4.

Sugiro que realize a operação da multiplicação e a aluna já identifica o 12. A seguir diz que o número 12 corresponde aos 12 km feitos pelo João. Indico que ainda tem de dividir o 12 pelo 6 e a aluna indica que o resultado é $\frac{6}{6}$, "a unidade". Depois escreve $\frac{6}{6} + \frac{6}{6}$ e acaba por indicar que são 2 km.

Em suma, Susana tem a tendência de, nas frações impróprias, apenas indicar uma unidade, deixando a restante fração com o numerador maior que o denominador, o que neste caso, ía fazendo com que a aluna não desse a resposta correta, caso eu não a advertisse.

Susana revelou algumas dificuldades em relação ao numeral decimal. A aluna não compreende as ordens e a grandeza dos números. Quando tinha o numeral decimal 1,6 a aluna referiu que este número correspondia a 1 km e 6 m, depois com o 2,40, a aluna referiu que eram 2 km e 40 m. Também evidenciou essa confusão quando identificou que 1,60 era maior que 1,6.

A aluna consegue ordenar as frações decimais e identifica algumas frações equivalentes, as que diziam respeito ao percurso feito pela Maria e pelo Francisco, representando-as corretamente no segmento. Todas as outras indica, mas não verifica se as posições estão corretas.

4.3.4. Entrevista do Rafael

O Rafael foi muito rápido na sua explicação. Começou a resolver e disse:

Rafael: Eu primeiro não estava a entender muito bem e depois entendi. É fácil porque vou à fração e vejo o quê que diz, por exemplo 3 quintos, meto os quintos em cima da mesa e meto os décimos em cima a ver quantos décimos é que são e depois é só escrever na …
Investigadora: No segmento?
Rafael: No segmento.

O aluno necessitou do material manipulável para identificar as frações equivalentes, mas acaba por identificá-las no segmento e ordená-las corretamente (figura 33).

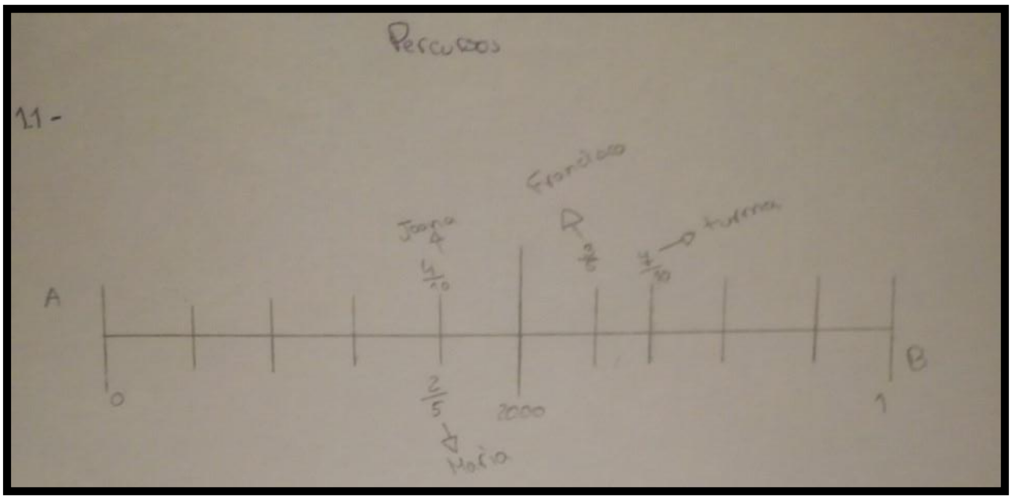


Figura 33 – Resposta escrita do Rafael (1.1)

Na segunda pergunta, o Rafael pergunta:

Rafael: Professora é para fazer 4000 a dividir por 10?
Investigadora: Sim, quanto é?
Rafael: 400. Ahh.

Quando o Rafael fez esta pergunta, pensei que tivesse adotado a mesma estratégia que eu tinha induzido nos outros alunos e que estivesse a compreender o que era para fazer. Depois, quando indica a resposta percebi que o aluno tinha 'apanhado' esta estratégia, enquanto eu entrevistava os colegas. O aluno dá como resposta “Fez 400 km… não, fez…” e depois indica “Fez 400 m”. Depois eu pergunto:

> **Investigadora:** Ela fez 400 metros? Porquê que tu dividiste os 4000 metros em dez?
> **Rafael:** Porque … aqui, daqui…isto é o zero e depois daqui até aqui vão 10 … - apontando para o segmento.
> **Investigadora:** 10 ‘tracinhos’?! Então e aqui, quantos metros são?
> **Rafael:** 1.
> **Investigadora:** Aqui no 1 décimo, quantos metros são?
> **Rafael:** Ahh, são … e stora …
> **Investigadora:** 4000 a dividir por 10?
> **Rafael:** Sim.
> **Investigadora:** Quantos é que são aqui?
> **Rafael:** Ichhh.
> **Investigadora:** 4000 a dividir por 10, quantos é que são?
> **Rafael:** 400.

O aluno tinha percebido que, como o segmento eram 4000 m e, como o mesmo estava dividido em 10 partes iguais, poderia fazer uma divisão. Mas depois não percebeu que o resultado dessa divisão (400) correspondia à distância entre as frações decimais, indicando que esse resultado seria a solução do problema. Depois expliquei que se a distância entre cada fração decimal era de 400 m e, se a Joana e a Maria estavam na mesma posição do segmento, o aluno teria que adicionar as várias distâncias, até chegar às duas meninas. Assim, o Rafael compreendeu e indicou a seguinte resposta (figura 34).

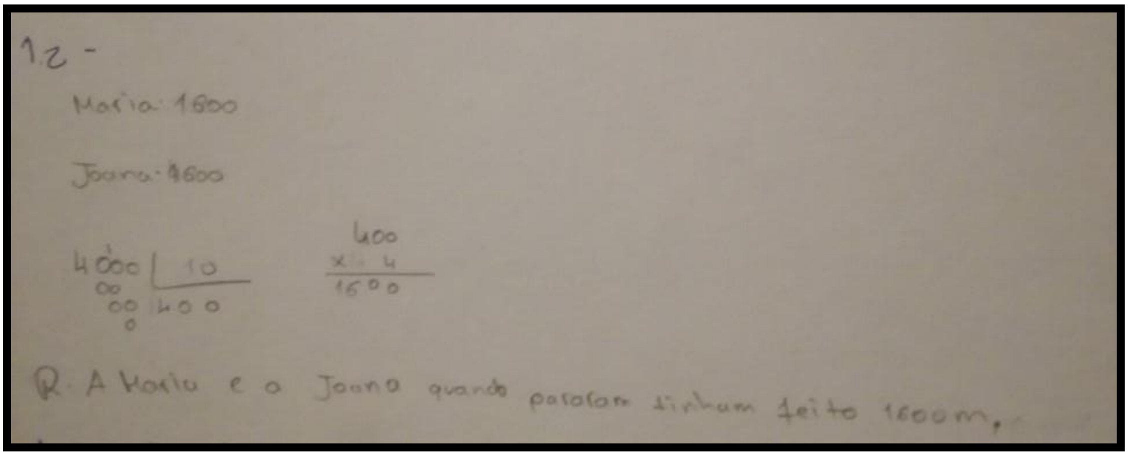


Figura 34 – Resposta escrita do Rafael (1.2)

Na folha de resolução Rafael optou pela operação da multiplicação, indicando a distância entre as frações decimais e o número de vezes que essa distância se repetia.

Na última pergunta comecei por indicar ao aluno, que o percurso total nesta pergunta era o percurso feito pelo Francisco. Que agora só importava o segmento a iniciar no zero e a terminar no percurso do Francisco e que este segmento se encontrava dividido em seis partes iguais. O aluno começou a resolver e passado pouco tempo apresenta como resposta “O João percorreu 5 sextos do percurso do Francisco, sabendo que o Francisco fez 2400 m, significa que o João fez menos 400 que é 2000”.

Em suma, Rafael identifica as frações equivalentes, com o auxílio do material manipulável, e ordena as frações no segmento, indicando as paragens efetuadas pelos amigos.

Na pergunta 2, não se percebe bem como é que o aluno chegou à estratégia que utilizou porque quando o entrevistei verifiquei que o aluno não estava tão seguro da sua resposta. Compreendeu a divisão que efetuou, mas demonstrou não compreender o cálculo a realizar para determinar o número de quilómetros efetuados pelas meninas. Depois de explicar que poderia usar a adição para determinar as várias distâncias, o aluno apresenta a operação da multiplicação indicando a resposta certa.

Na última questão, como também já não havia muito tempo, optei por dar a mesma explicação que já tinha dado aos outros colegas, utilizando a adição, mas o aluno resolveu através da subtração. Indicou o percurso efetuado pelo Francisco e subtraiu a distância que separava os dois amigos (figura 35).

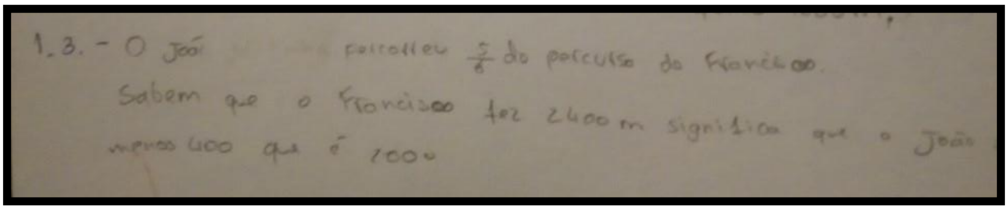


Figura 35 – Resposta escrita do Rafael (1.3)

Os dois alunos com nível de desempenho médio, continuaram a necessitar do material manipulável para representar as situações e chegarem a algumas conclusões. Utilizam este material quando é para determinar frações equivalentes.

Em relação à resolução do problema, o Rafael foi mais rápido na concretização do mesmo, no entanto, a Susana apresentou uma estratégia totalmente diferente dos colegas, nas duas últimas perguntas. Todas as estratégias tiveram a minha influência, devido ao tempo que os alunos tinham para concretizar o problema. Apenas a primeira pergunta é que estes dois alunos optaram pela sua própria estratégia, recorrendo ao material manipulável. O Rafael foi mais assertivo na ordenação das frações no segmento, do que a Susana.

4.3.5. Entrevista do Bruno

Durante a entrevista, o Bruno revelou não compreender, o que era pedido e, de que maneira poderia resolver o problema. Como já referi anteriormente, os alunos já não dispunham de mais tempo para a concretização deste estudo e como a tendência durante a minha entrevista foi obter as respostas dos alunos, expliquei todos os problemas ao Bruno e até sugeri que o aluno utilizasse ‘os queijinhos’ para uma melhor perceção do que estava a fazer.

Na primeira pergunta, o aluno apenas tinha indicado a metade do segmento e referiu não estar a conseguir dividir o segmento em 5 partes iguais. Perguntei ao aluno em quantas partes estava o segmento dividido e o aluno indicou que o segmento estava dividido em 10 partes iguais, mas continuava sem conseguir dividir por 5. Passado algum tempo o aluno diz que 5 é a metade de 10, mas continua sem conseguir dividir o segmento. Posteriormente, referi que a unidade do segmento (dividido em 10 partes iguais), poderia ser representado pela fração $\frac{10}{10}$. Depois sugeri que olhasse para os ‘queijinhos’ e que juntasse $\frac{10}{10}$, para indicar qual a fração que correspondia a uma fatia e, o aluno disse “Ahhhh, então tenho de… se aqui é um décimo,… e se dois décimos é um quinto, … ahhh, já percebi” e, começou a identificar as frações no segmento (figura 36).

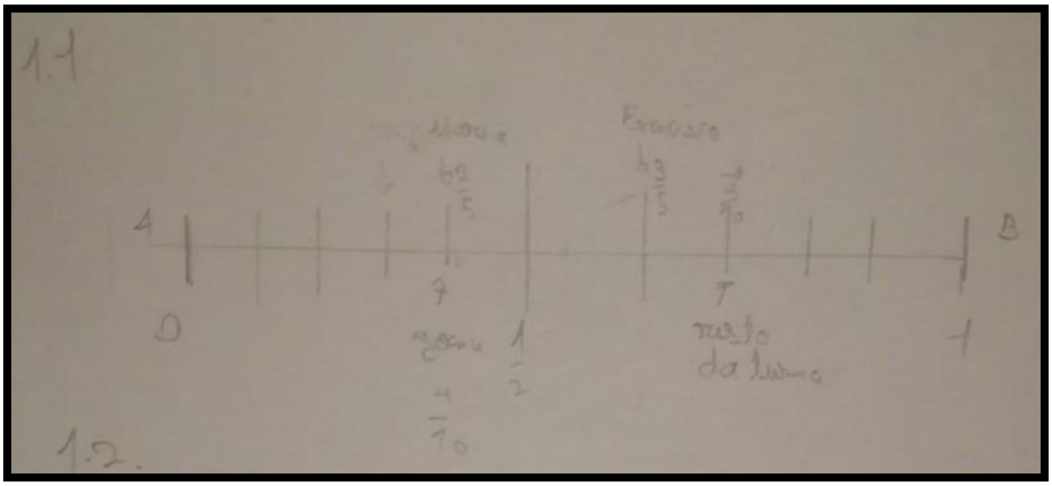


Figura 36 – Resposta escrita do Bruno (1.1)

Na pergunta 1.2, o aluno também não estava a conseguir identificar os quilómetros percorridos pela Joana e pela Maria, quando efetuaram a primeira paragem. Indiquei que podia converter o segmento de quilómetros para metros e que assim, o percurso total seria de 4000 m. O aluno continuou sem perceber e, então dei um exemplo “tens 4000 batatas a dividir por 10 amigos” e o aluno disse “porquê que eu não me lembrei disto antes” e começou a resolver. Quando terminou disse:

Bruno: Então eu dividi 4000 por 10 e deu 400.
Investigadora: Então e agora tens 400 batatas?
Bruno: Não. Ahh, 400 m. E agora estive a verificar e é 400, 800, 1200, 1600 e 2000. Então isto é numa metade, na outra metade tem que ser igual, que vai até 4000. Então ali na Maria e na Joana é 1600 m (figura 37).

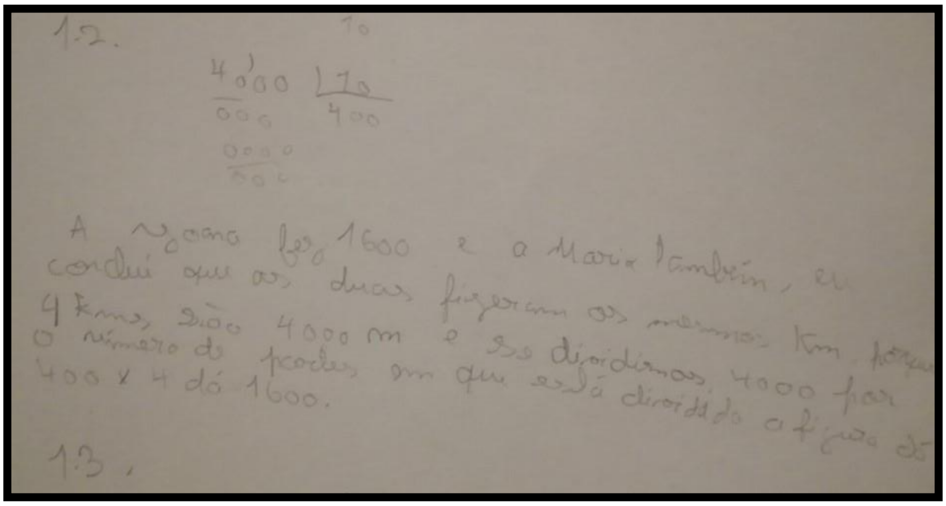


Figura 37 – Resposta escrita de Bruno (1.2)

O aluno indicou a sua resposta em metros. Não conseguiu solucionar o problema sozinho.

Na última questão, o aluno indica que o Francisco fez 2400 m, mas que não consegue dividir o segmento em 'sextos'. Depois indico ao aluno que o segmento, nesta questão, termina no percurso efetuado pelo Francisco. Assim, o aluno já consegue dividir o segmento (figura 38) em seis partes iguais e chegar à resposta, dizendo:

> **Bruno:** Sim. Na 1.3, vi quantos quilómetros fez o Francisco. Então se eu sabia que 4 km são 4000 m, a metade é 2000 m. Então o Francisco fez mais 400, fiz a mesma coisa que há bocado…se um décimo é 400, ahhh, o Francisco seria 2400. Se a metade de 4000 é 2000 e se cada décimo é 400, 2000 + 400 é …, porque o Francisco fez 1 meio mais 1 décimo. Então e se juntarmos 2000 + 400, 2400. Se o João fez, eu acho que fez 2000 m, porque se contarmos do ponto A ao Francisco dá 6, dá 6 décimos e se for 5 sextos e agora em vez de ser décimos é sextos.

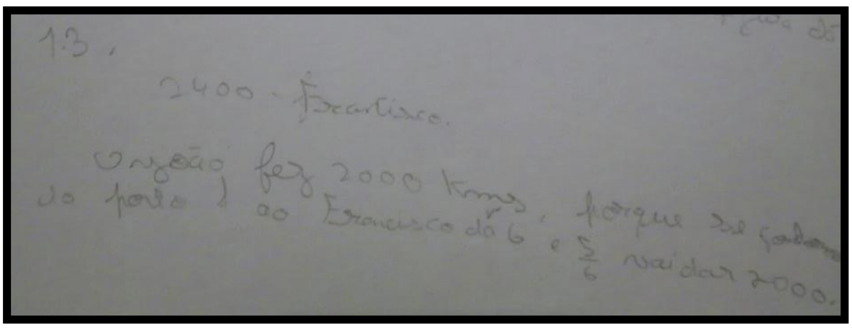


Figura 38 – Resposta escrita do Bruno (1.3)

Em suma, Bruno revela dificuldades em iniciar as resoluções das perguntas e eu acabo, sempre por indicar uma forma de resolver.

Sugiro ao Bruno, que utilize o material manipulável, para demonstrar a situação proposta, mas o aluno acaba por não precisar de utilizar, porque identifica logo a fração equivalente a $\frac{1}{10}$.

Na segunda questão começa por não conseguir identificar os quilómetros que as meninas percorreram, mas depois, quando lhe dou um exemplo, já identifica esse percurso indicando essa distância em metros.

Na última questão só precisei de salientar que o percurso a dividir nesta pergunta era até ao percurso do Francisco. O aluno identifica os 2000 m, mas depois na resposta que apresenta na folha de resolução indica 2000 km.

Talvez se este aluno tivesse mais tempo para resolver este último problema, eu não tivesse ajudado tanto.

4.3.6. Entrevista do Guilherme

Neste problema, o Guilherme adultera todos os dados do problema e só consegui que o aluno corrigisse o primeiro.

Na primeira pergunta, representa no papel, um segmento dividido em 11 partes, o que o leva a pedir uma régua para identificar a metade do segmento. Depois quando identifico que o aluno tem uma parte a mais no segmento, o aluno já consegue identificar todas as frações, sem necessitar da régua (figura 39).

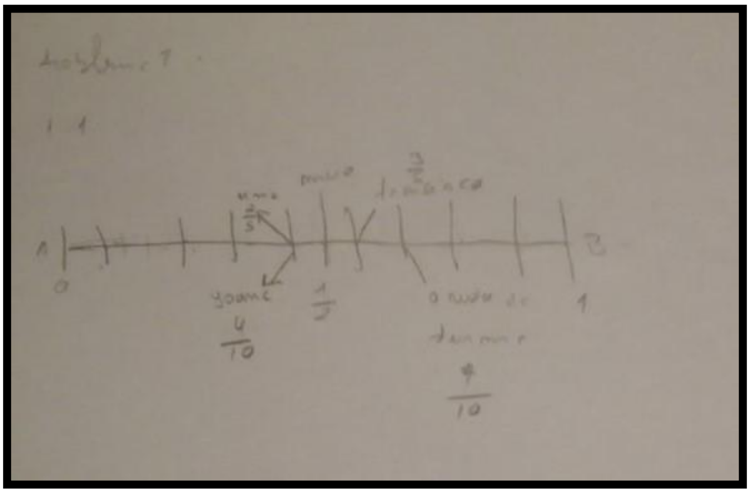


Figura 39 – Resposta escrita do Guilherme (1.1)

Na segunda pergunta, o aluno identifica o percurso total como sendo 8 km. Já não pedi que corrigisse porque o aluno já não tinha mais tempo para o fazer. Optei por ouvir a resolução do aluno como se o percurso fosse de 8 km.

Guilherme deu a seguinte explicação:

> **Guilherme:** ... posso concluir que elas fizeram 3 km, porque a Maria fez 2 quintos do percurso que é 4 quartos [décimos] e a Joana fez quatro décimos que é o mesmo que a Maria.

O aluno, independentemente, de ter adulterado o percurso total, deu a resposta errada (figura 40). Não houve tempo para perguntar como tinha chegado a essa conclusão, pois o aluno ía ter uma aula e já estava atrasado para a mesma.

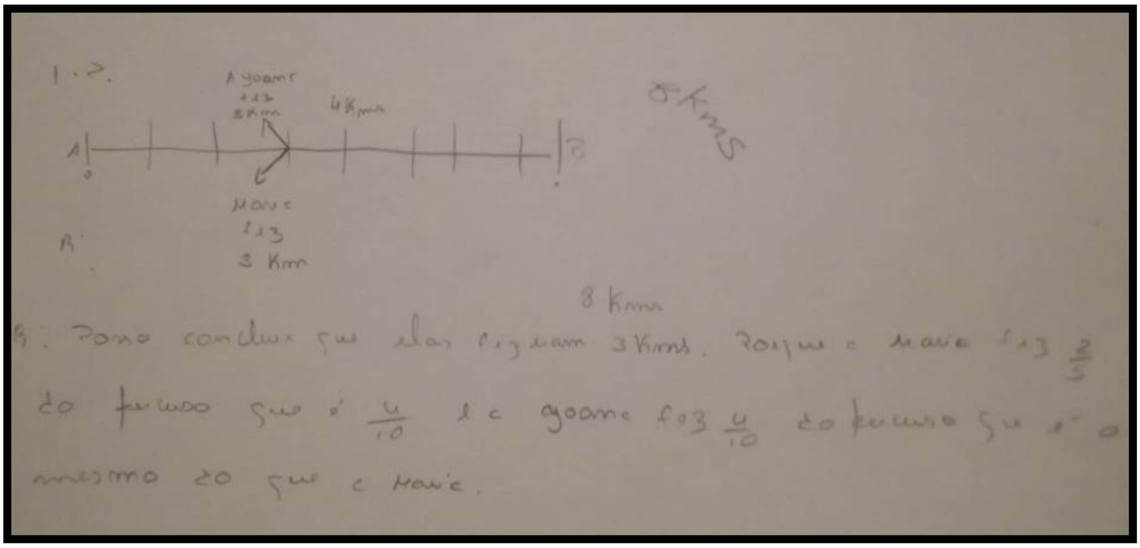


Figura 40 – Resposta escrita do Guilherme (1.2)

Na pergunta seguinte, o aluno ainda não tinha resolvido a questão e eu indiquei que o João tinha feito os $\frac{5}{6}$ do percurso do Francisco. Quando estou a dividir o segmento por 6, o aluno diz que o segmento está dividido em ‘quintos’. Então explico que nesta questão só vamos ter em atenção o segmento até à paragem do Francisco e, que assim, o segmento fica dividido em 6 e, que o João parou na fração anterior. O aluno diz que o João “fez $\frac{1}{2}$”, quando pergunto a quanto é que corresponde $\frac{1}{2}$, o aluno identifica os 4 km, escreve a resposta (“O João percorreu 4 km”) e vai para a aula.

Nesta questão, o aluno identificou a metade como sendo 4 km, por ser a metade de 8 km e, porque o aluno verificou que o João tinha parado no meio, do segmento que correspondia a 8 km.

Em suma, Guilherme resolveu este último problema à pressa, pois não conseguiria encontrar-se, novamente comigo. Adulterou os dados e, indicou a resposta errada na pergunta 2.

Conseguiu dividir o segmento em diferentes partes, identificar as frações e ordená-las no segmento.

Na última questão, não teve tempo para refletir. Acabei por indicar como ficaria o segmento dividido e, considerando o percurso total do Francisco, como sendo 8 km, o João teria feito 4 km, logo a resposta estava certa. O aluno ainda indicou que o João tinha parado na metade do percurso total do Francisco.

Em suma, os dois alunos com alto nível de desempenho revelaram mais dificuldades neste problema do que é qualquer outro dos que fizeram para este estudo. Talvez por não terem muito tempo para reflectir, tenham se sentido pressionados para terminar depressa, o que levou a este resultado. É de salientar que estes dois alunos foram os que tiveram menos tempo para resolver este problema. No entanto, não precisaram do apoio do material manipulável.

Os alunos que melhor resolveram este problema foram os alunos com nível de desempenho médio.

Capítulo V

Considerações finais

Nesta fase do estudo é importante responder às questões do estudo e salientar as dificuldades sentidas durante a investigação e o que poderia ser melhorado. Deste modo, irei verificar se obtive as respostas para as perguntas da minha investigação e tentar perceber o que mais poderia ser feito para obter as respostas das mesmas.

Representações usadas pelos alunos, na resolução de problemas que envolvem números racionais

Para explorar as tarefas propostas, os alunos usaram representações concretas que obtiveram a partir do uso do material manipulável de que dispunham (‘queijinhos’), representações pictóricas e representações simbólicas. No quadro 3 estão representadas este tipo de representações.

Problemas	Perguntas	Representações	Alunos
Partilhando pizas	1.1	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Todos
		Simbólica	Todos
	1.2	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Daniel
		Simbólica	Todos
	2.1	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Todos
		Simbólica	Todos
	2.2	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Daniel
		Simbólica	Todos
	3	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Daniel
		Simbólica	Todos
As maçãs	1.1	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Daniel / Marta / Rafael / Bruno
		Simbólica	Todos
	1.2	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Daniel
		Simbólica	Todos
	1.3	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Todos
		Simbólica	Bruno / Guilherme
	2	Concreta	Susana
		Pictórica	Marta
		Simbólica	Todos
	3	Concreta	
		Pictórica	
		Simbólica	Todos
Percursos	1.1	Concreta	Daniel / Marta / Susana / Rafael
		Pictórica	Todos
		Simbólica	Todos
	1.2	Concreta	
		Pictórica	Daniel
		Simbólica	Todos
	1.3	Concreta	
		Pictórica	Marta / Daniel / Susana
		Simbólica	Todos

Quadro 3 – Representações feitas pelos alunos

A representação simbólica foi utilizada por todos os alunos, em todas as perguntas, exceto na 1.3, do segundo problema “As maçãs”, em que era pedida especificamente a representação pictórica. Nesta alínea, apenas os dois alunos com nível de desempenho alto é que utilizaram a representação simbólica, para reforçarem o seu desenho.

A representação concreta e a representação pictórica foram utilizadas o mesmo número de vezes. A representação concreta foi utilizada, sempre pelos mesmos alunos (alunos com nível baixo e médio de desempenho). É de salientar a não utilização desta representação por parte dos alunos com nível de desempenho alto.

No primeiro problema, nas perguntas 1.1 e 2.1, todos os alunos utilizaram, pelo menos, duas representações (simbólica e pictórica). Apenas os alunos com alto nível de desempenho é que não utilizaram a representação concreta. Nas perguntas 1.2; 2.2 e 3, todos os alunos utilizaram a representação simbólica, apenas os alunos com nível médio e a Marta utilizaram duas representações (simbólica e concreta), já o Daniel utilizou todas as representações.

No segundo problema “as Maçãs”, na pergunta 1.1, o Guilherme foi o único que apenas utilizou uma representação (simbólica). O Bruno e a Susana utilizaram duas representações, o Bruno utilizou a representação simbólica e pictórica e a Susana a representação simbólica e concreta. Todos os outros alunos utilizaram as três representações. Na pergunta 1.2, o Daniel foi o único a utilizar os três tipos de representações. A Marta e os dois alunos de nível médio de desempenho utilizaram duas representações (simbólica e concreta) e os de nível de desempenho alto apenas utilizaram uma representação. Na pergunta 1.3, todos os alunos utilizaram duas representações, os de nível de desempenho alto utilizaram as representações simbólica e pictórica, já os outros alunos utilizaram a representação pictórica e concreta. Na pergunta 2, apenas a Susana e a Marta utilizaram duas representações. A Susana utilizou a representação simbólica e concreta, já a Marta utilizou a representação pictórica e simbólica. Todos os outros alunos apenas utilizaram a representação simbólica. Na última pergunta, apenas foi utilizada a representação simbólica.

No último problema “os percursos”, a representação simbólica e pictórica foi utilizada por todos os alunos, na pergunta 1.1. Os alunos com níveis, médio e baixo, de desempenho utilizaram todas as representações. Na segunda pergunta, apenas o Daniel utilizou duas representações, a simbólica e a pictórica. Todos os outros alunos, apenas utilizaram a representação simbólica. Na última questão, a Marta, o Daniel e a Susana utilizaram duas representações (simbólica e pictórica), já o Rafael, Bruno e Guilherme apenas utilizaram uma representação, a simbólica.

Em suma, o aluno que mais representações utilizou foi o aluno com baixo nível de desempenho, o Daniel. A representação concreta, usando material manipulável, serviu para representar as diversas situações, ajudando os alunos na compreensão e resolução dos problemas. Mais concretamente, foi um auxílio para os 4 alunos com os níveis de desempenho mais baixo compararem as frações entre elas e com a unidade e para procurarem as frações equivalentes. A representação pictórica foi utilizada por todos os alunos, muitas das vezes para representarem e compreenderem determinada situação e, no caso dos alunos que utilizavam o material concreto, para reforçar as suas respostas, indicando o que viam na situação concreta.

Para representarem os números racionais os alunos usaram representações na forma de fração, na forma de numeral decimal e na forma de numeral misto. No entanto, a representação do numeral decimal foi utilizada apenas por uma aluna (aluna com nível de desempenho médio). Esta representação foi utilizada no problema 3, nas alíneas 1.2 e 1.3, quando utiliza o operador para identificar o número de quilómetros efetuado pela Joana, Maria, Francisco e João. Na questão 1.3, quando tenta descobrir o número de quilómetros efetuados pelo João depara-se com uma multiplicação em que um dos fatores é um número decimal.

A representação na forma de fração foi usada pelos alunos, mesmo nas questões em que tal não era pedido explícitamente. O único aluno que usou esta representação, sempre da forma correta foi o Guilherme, aluno com alto nível de desempenho. O Bruno (nível de desempenho alto) e o Rafael (nível de desempenho médio) nem sempre utilizaram esta representação corretamente, quando apresentaram a fração $\frac{3}{4}$ designando a mesma por “3 quartos”, mas sem usarem a notação de fração. Os outros três alunos não utilizaram esta representação corretamente, quando as posicionaram no segmento de forma errada e quando não souberam representar o numeral misto, que era composto por uma parte inteira e uma parte fracionária.

Dificuldades dos alunos

Ao longo desta investigação surgiram muitas dificuldades por parte dos alunos, principalmente, dos alunos com nível de desempenho baixo.

Uma das dificuldades diz respeito à identificação de frações, como por exemplo quando tiveram de representar as 5 maçãs e meia em fração (pergunta 1, do problema 2). Nenhum aluno conseguiu representar por si só as 5 maçãs e meia na forma de fração. Daniel começa por identificar a unidade $\frac{5}{5}$ e a metade $\frac{1}{2}$. No entanto, como ainda não tinha sido explicado a adição de frações com denominadores diferentes, o aluno não conseguiu identificar uma única fração. A Marta e o Rafael identificam a fração $\frac{5}{2}$. Ambos representaram a parte inteira (5) no numerador e a metade, sabendo que esta é dividida por 2, no denominador. O Rafael quando lhe digo que essa fração não está correta, associa imediatamente, que se não é $\frac{5}{2}$, então tem de ser $\frac{2}{5}$. Aqui, pareceu querer resolver esta questão através da relação parte-todo, em que o todo seria o 5 e a parte o 2. Demonstrou ainda estar ligado à relação parte-todo. A Marta quando lhe digo que a resposta dela está errada e peço à aluna que conte as metades que tem representadas no material manipulável, a aluna diz “dez e meia”, não associando a metade da maçã isolada às metades que formavam as unidades. A Susana identifica a fração $\frac{6}{2}$, por associar a última maçã à metade da sexta maçã. O Bruno, inicialmente, refere que desenhou 5 maçãs e meia, depois escreve por extenso “cinco maçãs e meia”, mostrando não ter interpretado o que era pedido. O Guilherme pergunta se pode representar o número de maçãs através do numeral misto. Todos estes alunos necessitaram da minha ajuda.

Outra dificuldade foi na representação pictórica dos $\frac{9}{4}$ de maçã. A Susana e a Marta representaram inicialmente 2 maçãs e meia. À Susana e ao Bruno, com a minha ajuda, percebem que não sobrou apenas $\frac{1}{4}$ e acabam por pintar também as duas unidades. Já o Guilherme fez uma interpretação diferente, considerando que apenas tinha sobrado $\frac{1}{4}$ das maçãs. Depois leio o enunciado da questão 1.2, em que evidencio que sobrou $\frac{9}{4}$ e, o aluno já completa a sua representação. O Daniel representa os $\frac{9}{4}$ desenhado 9 circunferências em cima e 4 circunferências pequenas em baixo. Quando peço ao aluno que represente os $\frac{9}{4}$ através do material manipulável, o aluno representa 3 circunferências divididas em 4 partes, mas pinta 11 dessas partes. Quando perguntei à Marta se o que tinha representado eram os $\frac{9}{4}$, a aluna disse que não e através do material manipulável acabou por fazer a representação correta. Questionando a Susana sobre o que tinha desenhado, a aluna mencionou as duas maçãs e uma fatia e que essa fatia representava uma metade. Pedi que lesse novamente o enunciado e a aluna já identifica a fatia como sendo $\frac{1}{4}$ e diz como a pode representar. Só que quando volta a representar o que sobrou, já só representa a fração $\frac{1}{4}$, o mesmo aconteceu com os alunos, com o nível de desempenho alto. À Susana e ao Bruno quando pergunto se só sobrou $\frac{1}{4}$, os alunos dizem que não e acabam por pintar também as duas unidades. Já o Guilherme fez uma interpretação diferente, considerou que apenas tinha sobrado $\frac{1}{4}$ das maçãs, porque já tinha identificado as duas unidades, na questão acima. Depois leio o enunciado da questão 1.2, em que evidencio que sobrou $\frac{9}{4}$ e, o aluno já completa a sua representação. O Daniel representa os $\frac{9}{4}$ desenhado 9 circunferências em cima e 4 circunferências pequenas em baixo. Quando peço ao aluno que represente os $\frac{9}{4}$ através do material manipulável, o aluno representa 3 circunferências divididas em 4 partes, mas pinta 11 dessas partes. Tentei que me explicasse qual era a parte que tinha sobrado e o aluno indicou que era a parte não pintada. Depois, ao perguntar se era o que via no material manipulável, apagou as duas partes a mais. O Rafael foi o único que representou, utilizando o material manipulável, sem ser questionado por apresentar a resposta correta.

Outra dificuldade foi na divisão do segmento, em que a maior parte demonstrou mais dificuldades na divisão em cinco partes iguais. Marta, inicialmente, representa as frações no segmento de forma desorganizada, embora ordenada de forma crescente. Depois de representar as frações decimais no segmento, a aluna começa a representar 'os quintos' comparando o numerador dos 'quintos' ao numerador dos 'décimos' e, colocando-os na mesma posição no segmento. A aluna revelou dificuldade na relação entre frações, ao não posicionar $\frac{5}{10}$ no mesmo sítio que $\frac{1}{2}$. Daniel não consegue marcar na reta as várias frações. O aluno não comparou os numeradores das diferentes frações, mas sim, o numerador dos 'quintos', de acordo com os traços que dividiam o segmento, ou seja, o segundo traço que dividia o segmento correspondia à posição dos $\frac{2}{5}$ e, assim sucessivamente. A Susana tinha as frações decimais bem posicionadas no segmento, no entanto, as frações com denominador 5 não indicavam a posição correta. Quando perguntei “2 décimos correspondem a quanto?” a aluna respondeu sem hesitar, $\frac{1}{5}$. Depois corrigiu apenas as frações que indicavam o percurso dos alunos a posicionar. Bruno começou por não conseguir dividir o segmento em 5 partes iguais e, depois quando comecei a dialogar com o aluno, lembrou-se das frações equivalentes e já conseguiu posicionar as frações. O Guilherme (aluno com nível alto de desempenho) e o Rafael (aluno com nível médio de desempenho) não tiveram dificuldades em posicionar e ordenar as frações no segmento. O Rafael recorreu ao material manipulável para identificar as frações equivalentes.

Outra das dificuldades, desta vez apresentada pela Susana, foi na representação do numeral decimal. Na ordenação dos números decimais, a aluna compara os números decimais e indica que 1,60 é maior que 1,6. Quando tem de converter os números decimais indicando uma distância, a aluna refere que 1,6 corresponde a 1 quilómetro e 6 metros e que 2,40 corresponde a 2 quilómetros e 40 metros.

Em relação à representação do numeral misto, os alunos com baixo nível de desempenho não conseguiram realizar a questão 2. Na questão 3, em que tinham de identificar o alguidar com mais maçãs, ambos apenas olharam para a parte fracionária. O Daniel mencionou que o alguidar A era o que tinha mais maçãs, pois apresentava o maior numerador (3), o que também não era verdade, pois a opção B tinha o mesmo numerador. Já a Marta, selecionou o alguidar B, por indicar a fração maior ($\frac{3}{4}$). Os alunos com o nível médio de desempenho identificaram o alguidar correto, no entanto quando tiveram que transformar a fração $\frac{75}{8}$ em numeral misto deram uma resposta errada. Os dois alunos com nível de desempenho alto, não revelaram dificuldades nesta representação.

Na comparação de frações com a unidade, apenas os dois alunos com nível de desempenho baixo e a Susana é que revelaram dificuldades. Susana ao dividir as pizas, identificou uma fatia de cada piza para cada um dos amigos, logo todos os amigos comiam das três pizas, o que a fez pensar que como comeram das 3 pizas estavam a comer mais do que uma piza. Ou seja, a aluna não estava a comparar a quantidade que cada amigo comia com a unidade, mas sim, a identificar que os amigos comeram de todas as pizas. A Marta começou por fazer a mesma interpretação que a Susana, no entanto, quando a questiono, a aluna já diz que todos comeram o mesmo, por estar a comparar as quantidades que todos comeram. Esta interpretação também foi feita pelo Daniel. Ambos, com o apoio do material manipulável conseguem compreender o enunciado e identificar a fração $\frac{3}{4}$ como sendo menor que a unidade.

Conhecimentos dos alunos sobre os números racionais

O significado parte-todo é compreendido pelos alunos do meu estudo quando estes evidenciam os diferentes aspectos, que vou passar a identificar:

- Compreendem que a fração representa a relação entre a parte de um todo, em que o todo é o número total de partes em que a unidade foi dividida e a parte o número de partes escolhidas. Esta noção está implícita quando os alunos fazem a representação pictórica das 3 pizas, divididas pelas 4 pessoas. Apenas os alunos com baixo nível de desempenho revelaram mais dificuldades para operacionalizar a divisão de 3 por 4.
- Têm a noção de partição, ao compreenderem que as partes em que o todo é dividido têm o mesmo tamanho. Neste caso, temos o exemplo dos alunos com baixo nível de desempenho, quando identificam que todos comeram o mesmo. Ou seja, têm a noção que os 4 amigos comeram todos a mesma quantidade de piza ($\frac{3}{4}$).
- Quanto mais o todo é dividido, mais pequenas as partes se tornam. Todos os alunos evidenciam esta noção, quando comparam as duas frações ($\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$) e identificam a fração maior.

- Que as partes todas juntas perfazem o todo. Ao compararem as frações com a unidade identificam que a fração é menor e que para completarem o todo, é necessário reunir mais uma fatia. Embora, os alunos com baixo nível de desempenho e a Susana revelem dificuldades ao comparar com a unidade, quando têm a representação, da fração, no material manipulável identificam-na como sendo menor que a unidade e que falta uma fatia para completar a mesma.

O Guilherme consegue converter todos os numerais mistos para frações.

O significado de medida está implícito na divisão do segmento, na localização das frações e ao identificarem a unidade de medida, determinarem um comprimento e medirem um comprimento através da repetição da unidade de medida. Este é o significado que os alunos deste estudo menos desenvolveram. Na localização das frações como já referi, nas dificuldades dos alunos, todos apresentaram dúvidas na divisão do segmento por 5. No entanto, depois de dividirem o segmento e de determinarem a unidade de medida, conseguiram através da repetição, medir os vários percursos.

A estratégia mais utilizada pelos alunos, deste estudo, para resolverem os problemas de ordenação e comparação dos números racionais foi a determinação de frações equivalentes.

Assim, posso concluir que todos os alunos do meu estudo apresentam algum conhecimento do número, embora ainda haja alunos que têm de desenvolver mais essa competência. Os alunos com alto nível de desempenho são os que parecem ter conhecimentos mais sólidos seguido dos alunos com nível médio de desempenho e por último, os alunos com nível de desempenho baixo.

Reflexão final

As dificuldades que senti durante a realização deste estudo foram:

- O fator tempo.
- Introdução do tema “Números Racionais” durante a investigação.
- Inexperiência na realização das entrevistas

O tempo que tínhamos para nos dedicarmos à investigação era escasso, pelo facto de estarmos em estágio e termos outras tarefas a realizar, como o de preparar as aulas, planificar e procurar atividades para apresentar aos alunos. Este estágio também ele era avaliado, o que fez com que dedicássemos muito tempo no seu melhoramento.

O tempo que tive para entregar os problemas aos alunos e entrevistá-los também estava limitado, pois os alunos não tinham tempo disponível, fora das horas letivas, para responderem aos problemas propostos. Tive que pedir aos professores da disciplina de Estudo acompanhado e de Formação cívica que me disponibilizassem esse tempo, para dedicá-lo ao meu estudo. Comecei também por aproveitar os intervalos, mas depressa me apercebi que não era o melhor método, pois os alunos não tinham tempo de finalizar o problema e no intervalo seguinte, já tinham perdido o raciocínio.

O tempo que dediquei à realização da tese, também foi um fator negativo, pois se me tivesse dedicado a tempo inteiro, não teria tantas dificuldades em interpretar os resultados obtidos. Na transcrição das entrevistas e na sua interpretação também foi um problema, pois já não me lembrava, o que tinha sido feito com os alunos e, tive que dedicar muito tempo a escutá-las para as compreender.

Outra das dificuldades, teve a ver com o facto de introduzir o tema “Números Racionais” nas últimas 3 semanas de estágio, que correspondia às últimas 3 semanas de aulas dos alunos. Os alunos não estavam familiarizados com o tema e tive que lhes entregar os problemas do meu estudo nessas mesmas 3 semanas, o que dificultou a realização dos problemas e consequentemente, influenciou o meu estudo. Para que os problemas ficassem concluídos, tive que ajudar os alunos a interpretarem os problemas e, acabei por induzi-los às estratégias de resolução, referindo muitas vezes o que tinha sido feito na aula. Por outro lado, havia os alunos com baixo nível de desempenho, que para além das dificuldades com o tema, também apresentavam dificuldades em situações mais básicas, como as operações da multiplicação, as conversões das medidas, entre outras, o que fez com que estes alunos demorassem imenso tempo a concluir os problemas e muitos destes problemas, também eu os induzisse à resposta. Considero que seria relevante ter introduzido este tema nas 3 primeiras semanas de estágio ou então que já tivesse sido dado pelo professora cooperante, antes do início do nosso estágio, para que os alunos já tivessem mais bases e pudessem resolver os problemas, maioritariamente, sozinhos.

Relativamente à minha inexperiência na realização das entrevistas fez com que eu me centrasse muito na obtenção de respostas e conduzisse a entrevista por essa via. Deveria ter procurado compreender o que os alunos tentavam explicar para uma melhor compreensão dos significados das suas resoluções.

A revisão de Literatura, os objetivos do meu estudo e os problemas que iria propor aos alunos, deveriam ter sido feitos antes de iniciar a investigação, para estar preparada e para saber o que devia fazer, quando entreguei os problemas aos alunos. Só mais tarde, quando delineei os objetivos do meu estudo é que vi que tinha falhado quando os induzi à solução, não permitindo que a maior parte deles tivesse utilizado a sua própria estratégia. Também deveria ter deixado os alunos resolverem tudo sozinhos e só depois é que os entrevistava, para saber o modo como pensaram e quais as dificuldades que sentiram. Não deveria ter permitido que os alunos apagassem a sua resolução, quando esta se encontrava mal, pois assim teria uma análise mais precisa dos erros mais comuns dos alunos. A análise que fiz, relativamente aos problemas que os alunos resolveram, inicialmente foi mais descritiva pois senti dificuldades em interpretar as resoluções que os alunos tinham feito.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I. (1999). A Matemática na Educação Básica. Lisboa: ME/DEB (pp. 40 - 57)

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC

Boavida, A., Marques, T. (2010). *Números decimais: uma proposta de abordagem*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal: PFCM

Boavida, A., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J., Duarte, J. (2016). *Matemática para professores do Ensino Primário.* Luanda: Ministério de Educação República de Angola.

Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação qualificativa em educação.* Porto: Porto Editora

Brocardo, J. (2010). Os diferentes significados das frações. (adaptação de um documento elaborado no âmbito do PFCM-ESE/IPS). http://projectos.ese.ips.pt/pfcm/wpcontent/uploads/2010/12/Racionais-Diferentes-significados-das-fracções_2010-11.pdf (captado em 2012)

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspetiva de desenvolvimento do sentido do número. *Educação e Matemática*, 109, 15 – 23.

Ciscar, S., Garcia, M., (1999). *Fracciones*. Madrid: Editorial Sintesis.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria-prática*. Coimbra: Almedina

Delgado, C. (2009). *Os Números e as Operações no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Fonseca, M., Reis, R. (2000). *Números e Operações*. Lisboa: Universidade Aberta

Godino, J., Cid, E., Batanero, C. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Retirado a 14 de junho de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Gonçalves, F. (2011). *Números Naturais e Subtração: um estudo no 1º ciclo*. Dissertação de mestrado: Universidade de Lisboa

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8 e 44.

Monteiro, C., Pinto, H. (2007). *Desenvolver o sentido do número racional*. Lisboa: APM

Monteiro, C., Pinto, H., Ribeiro, S. (2010). *MP.5 – Matemática para Pensar* (Vol.2). Sebenta

Oliveira, I. (1994). *O Conceito de número racional em alunos do 6ºano de escolaridade: estratégias e dificuldades conceptuais*. Lisboa: APM

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E.& Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. ME – DGIDC

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino*. Dissertação de mestrado: Universidade de Lisboa

Serrazina, L., (1996). Ensinar/Aprender Matemática. In H. M. Guimarães (Org.), Dez anos de ProfMat: Intervenções (pp. 235-247). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Serrazina, L., & Ferreira, E. (2005). Competência de cálculo? Sim! E também…colaborando a distância. in equipa do projecto Desenvolvendo o sentido do número - Perspetivas e exigências curriculares eds pp. 29-39. Lisboa: APM

Sequeira, L.; Freitas, J.; Nápoles, S. , (2009) Números e operações: programa de formação contínua em matemática para professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico. - Lisboa: ME

Vieira, C. (2010). *Promover a Literacia Matemática dos Alunos: Resolver problemas e investigar desde os primeiros anos de escolaridade.* Vila Nova de Gaia: Educação Nacional

Anexos

Anexo 1

Problema 1: Partilhando pizas

Questão 1

1.1. Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizas. Dividiram igualmente as pizas. Que parte da piza comeu cada amigo?

1.2. Cada amigo comeu mais que uma pizza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Questão 2

2.1. Se em vez de quatro amigos fossem oito amigos, pedissem três pizas e as dividissem igualmente, que parte de pizza comeria cada um?

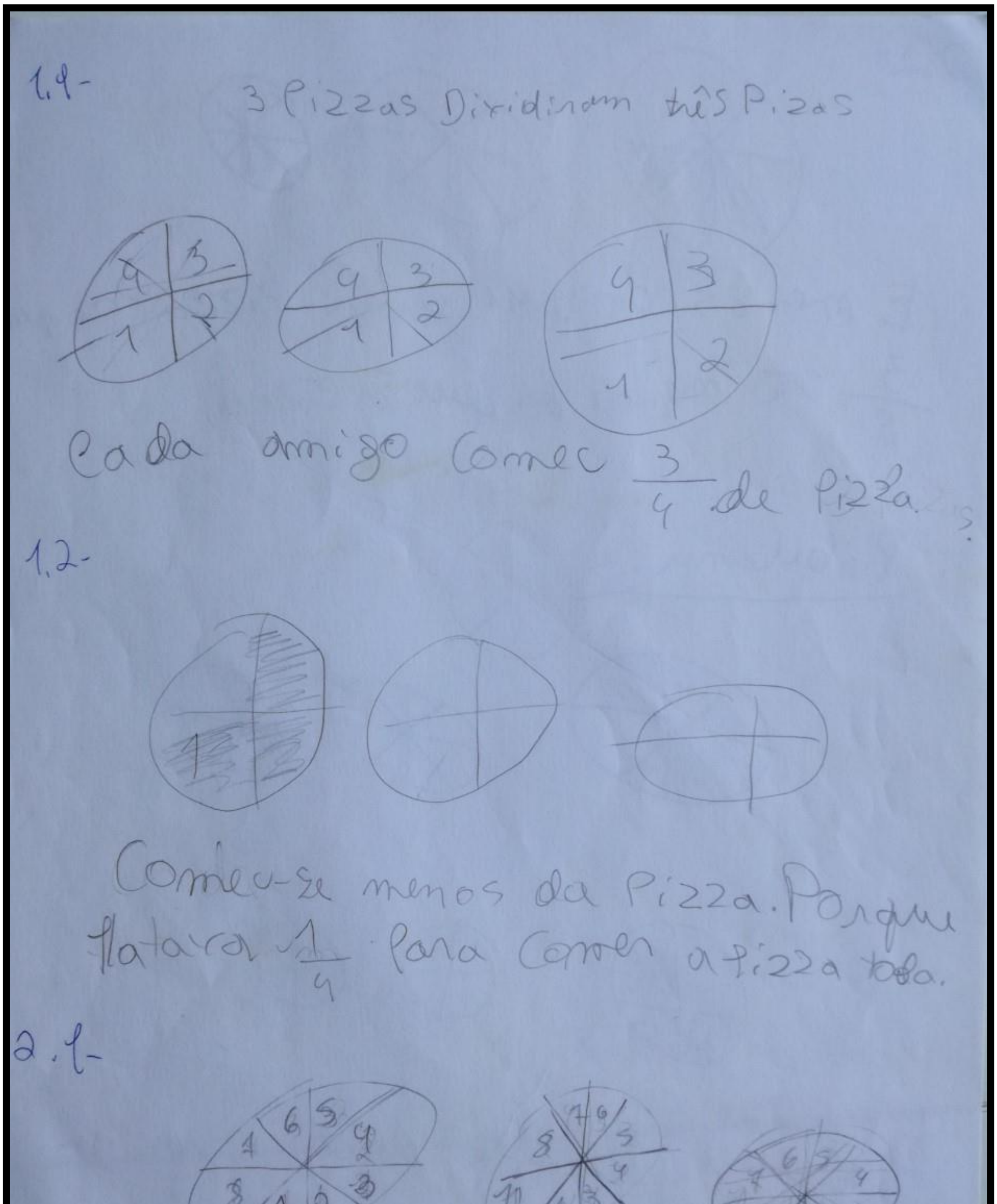
2.2. Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Questão 3

3. Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (Questão 1) ou o de oito amigos (Questão 2), cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio.

Anexo 2

Resolução do Daniel


1.1- 3 Pizzas Dividiram três Pizas

Cada amigo Comeu $\frac{3}{4}$ de Pizza.

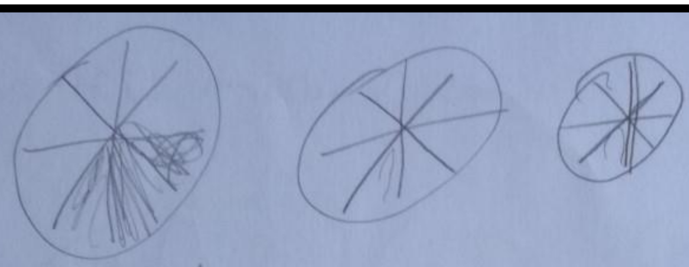
1.2-

Comeu-se menos da Pizza. Porque flatava $\frac{1}{4}$ para Comer a pizza toda.

2.1-

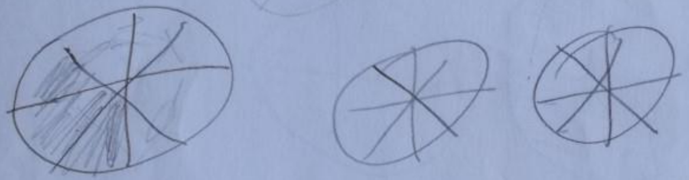
Cada Amigo Comeu $\frac{3}{5}$ da Pizza.

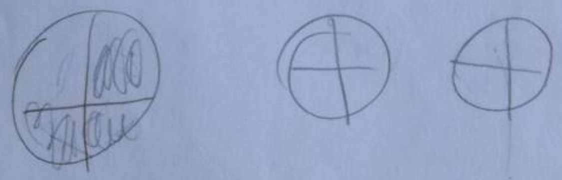
2.2º



É menos do que uma pizza porque $\frac{3}{8}$ são menos do que a pizza.

Probelema: 3

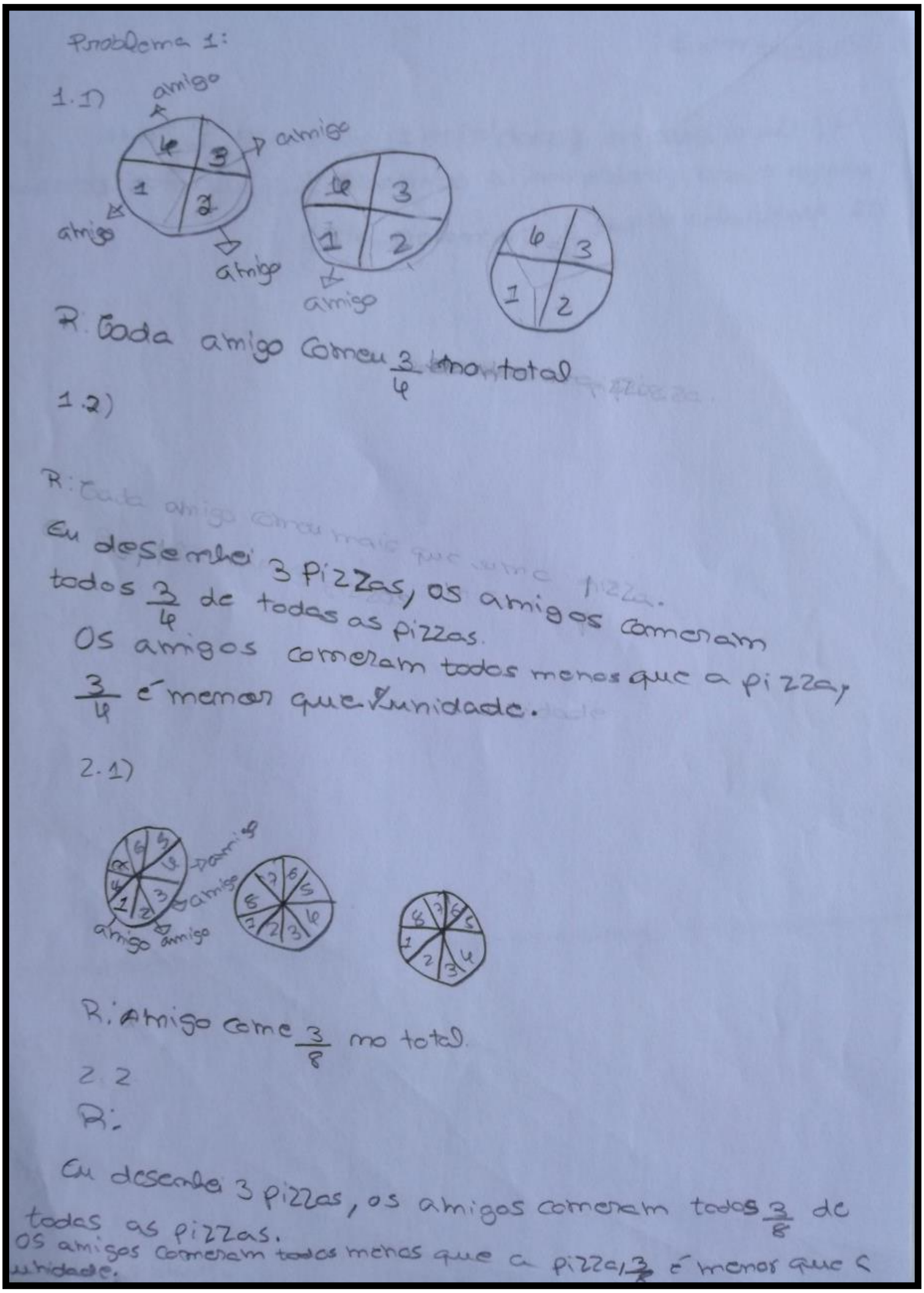




É Igual porque cada amigo come o mesmo.
O Grupo do Probelema o m
Comeu mais porque faltava 3 ao grupo 2.

Anexo 3

Resolução da Marta



Problema 1:

1.1)

R. Cada amigo comeu $\frac{3}{4}$ no total

1.2)

R:

Eu desenhei 3 pizzas, os amigos comeram todos $\frac{3}{4}$ de todas as pizzas.

Os amigos comeram todos menos que a pizza, $\frac{3}{4}$ é menor que unidade.

2.1)

R: Amigo come $\frac{3}{8}$ no total.

2.2

R:

Eu desenhei 3 pizzas, os amigos comeram todos $\frac{3}{8}$ de todas as pizzas.

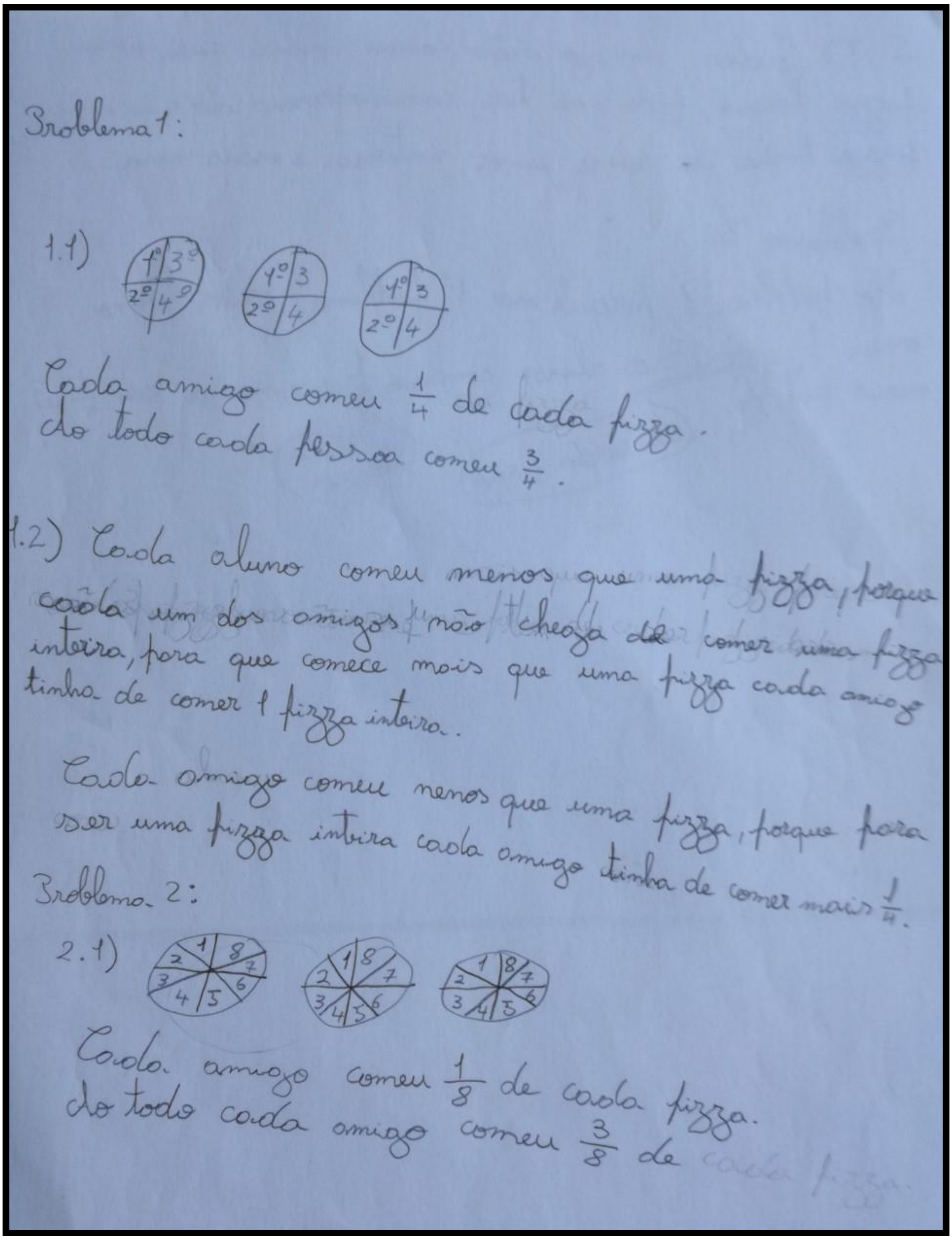
Os amigos comeram todos menos que a pizza, $\frac{3}{8}$ é menor que a unidade.

Problema 3:

R: Eu vi que no problema 1 comeram $\frac{3}{4}$ cada amigo e no problema 2 comeram $\frac{3}{8}$, quando coloquei os queijinhos vi que $\frac{3}{4}$ era maior que $\frac{3}{8}$.

Anexo 4

Resolução da Susana



Problema 1:

1.1)

Cada amigo comeu $\frac{1}{4}$ de cada pizza.
do todo cada pessoa comeu $\frac{3}{4}$.

1.2) Cada aluno comeu menos que uma pizza, porque cada um dos amigos "não" chega de comer uma pizza inteira, para que comece mais que uma pizza cada amigo tinha de comer 1 pizza inteira.

Cada amigo comeu menos que uma pizza, porque para ser uma pizza inteira cada amigo tinha de comer mais $\frac{1}{4}$.

Problema 2:

2.1)

Cada amigo comeu $\frac{1}{8}$ de cada pizza.
do todo cada amigo comeu $\frac{3}{8}$ de cada pizza.

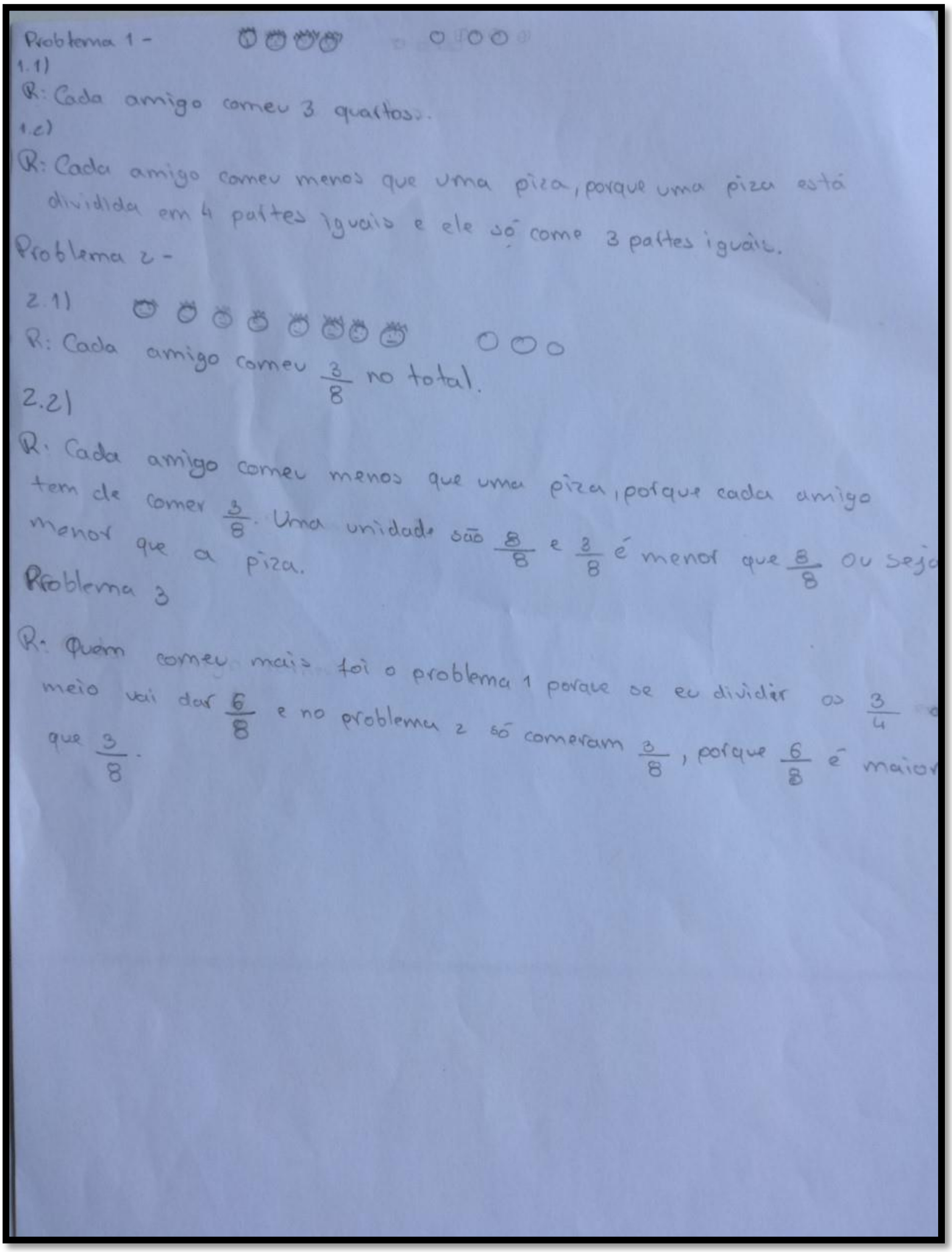
2.2) Cada amigo não comeu mais que uma pizza porque, para que ter comido mais do que uma pizza tinha de comer uma interma e mais uma.

Problema 3:

No problema 1, porque no 1º problema cada aluno comia $\frac{1}{4}$ (de cada pizza) e no 2º os alunos comiam $\frac{1}{8}$ (de cada pizza.) e como já sei $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{8}$.

Anexo 5

Resolução do Rafael



Problema 1 -

1.1)

R: Cada amigo comeu 3 quartos.

1.2)

R: Cada amigo comeu menos que uma piza, porque uma piza está dividida em 4 partes iguais e ele só come 3 partes iguais.

Problema 2 -

2.1)

R: Cada amigo comeu $\frac{3}{8}$ no total.

2.2)

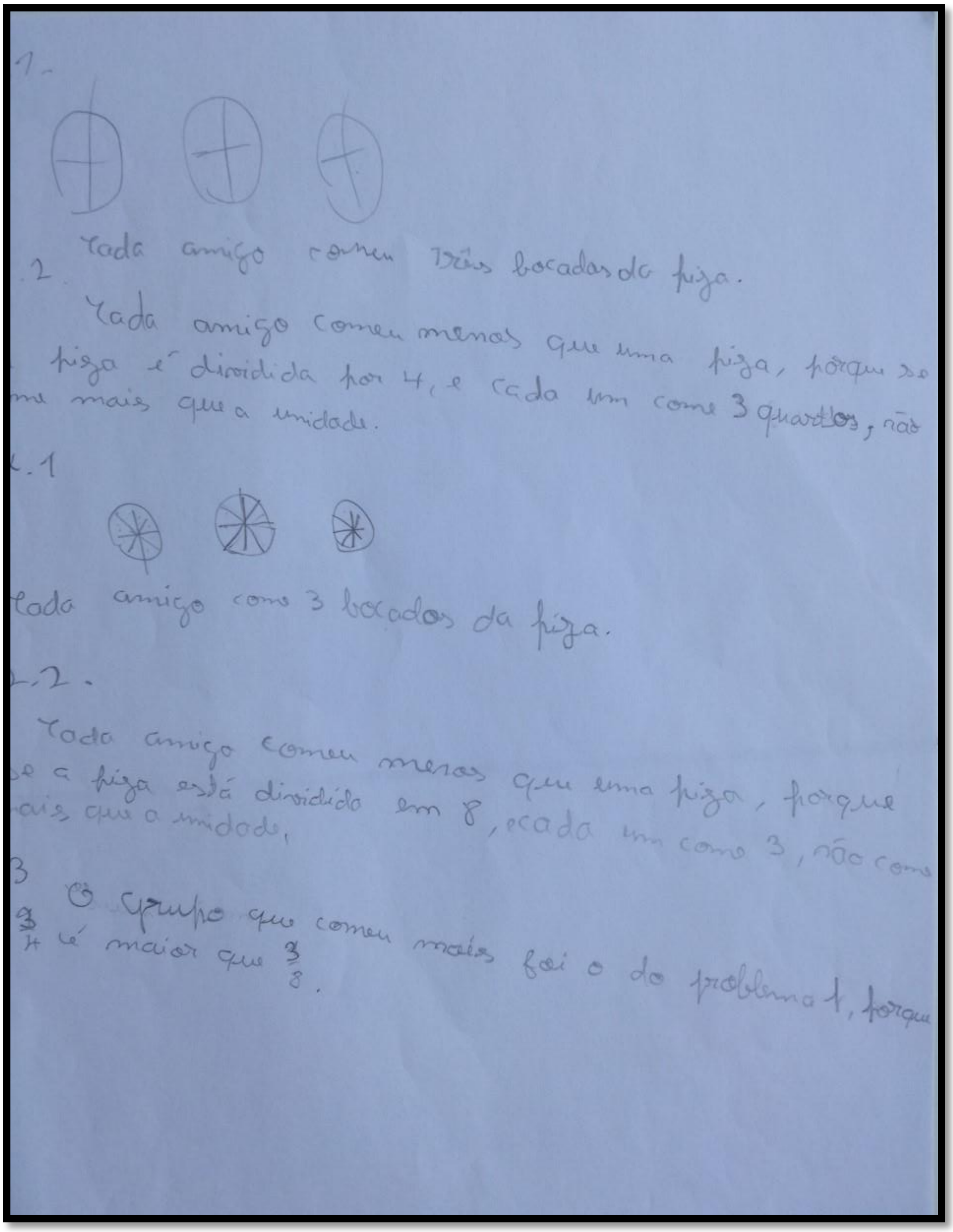
R: Cada amigo comeu menos que uma piza, porque cada amigo tem de comer $\frac{3}{8}$. Uma unidade são $\frac{8}{8}$ e $\frac{3}{8}$ é menor que $\frac{8}{8}$ ou seja menor que a piza.

Problema 3

R: Quem comeu mais foi o problema 1 porque se eu dividir os $\frac{3}{4}$ ao meio vai dar $\frac{6}{8}$ e no problema 2 só comeram $\frac{3}{8}$, porque $\frac{6}{8}$ é maior que $\frac{3}{8}$.

Anexo 6

Resolução do Bruno



1.

2 Cada amigo comeu três bocados da piza.

Cada amigo comeu menos que uma piza, porque so

piza é dividida por 4, e cada um come 3 quartos, não

me mais que a unidade.

2.1

Cada amigo come 3 bocados da piza.

2.2.

Cada amigo comeu menos que uma piza, porque

o a piza está dividido em 8, e cada um come 3, não come

ais que a unidade.

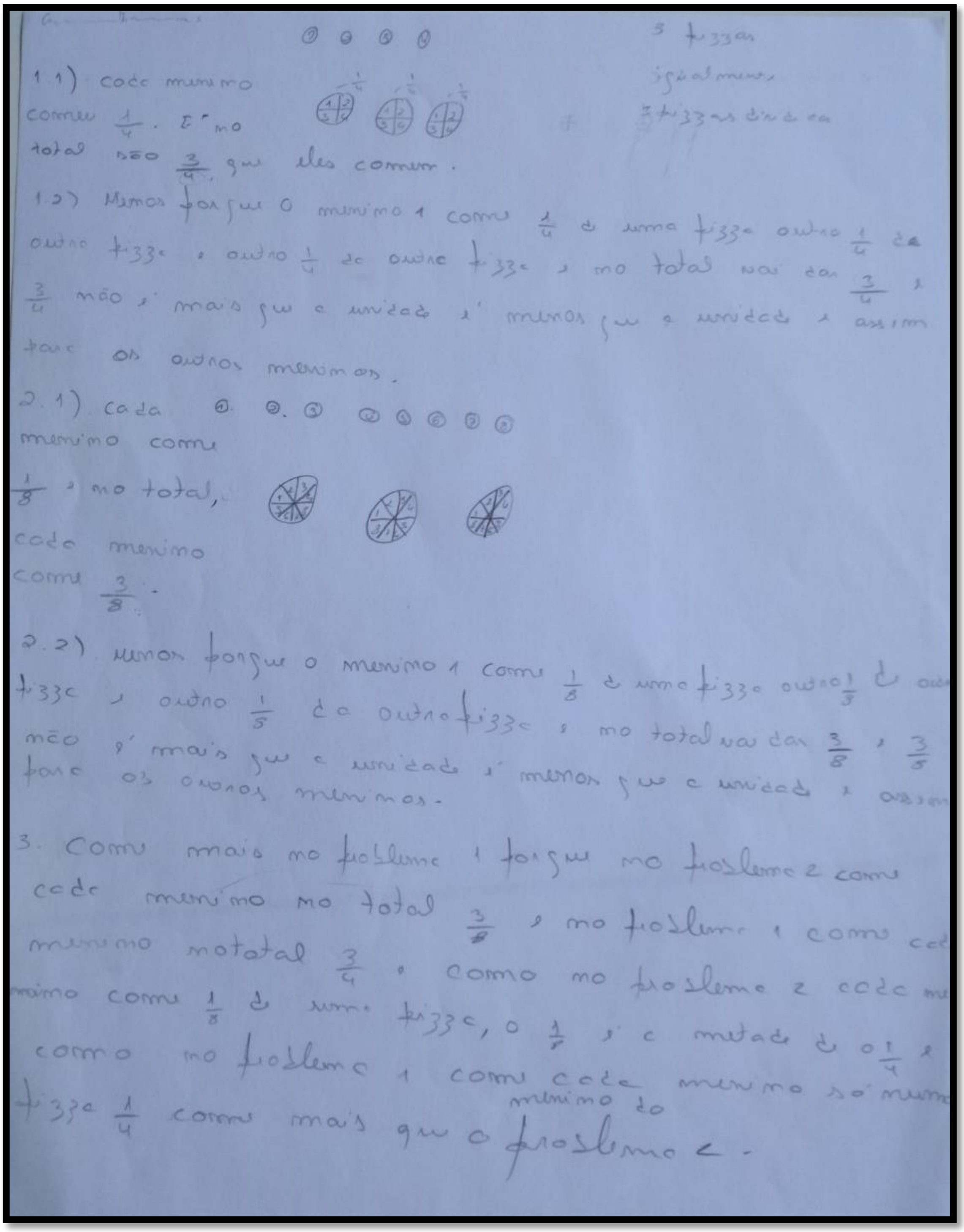
3

O grupo que comeu mais foi o do problema 1, porque

$\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{3}{8}$.

Anexo 7

Resolução do Guilherme


3 pizzas
igualmente
3 pizzas divida

1.1) cada menino comeu $\frac{1}{4}$. E no total são $\frac{3}{4}$ que eles comem.

1.2) Menos porque o menino 1 comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza outro $\frac{1}{4}$ da outra pizza e outro $\frac{1}{4}$ da outra pizza e no total vai dar $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}$ não é mais que a unidade é menos que a unidade e assim para os outros meninos.

2.1) Cada menino comeu $\frac{1}{8}$ e no total, cada menino comeu $\frac{3}{8}$.

2.2) menos porque o menino 1 comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza outro $\frac{1}{8}$ da outra pizza e outro $\frac{1}{8}$ da outra pizza e no total vai dar $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{8}$ não é mais que a unidade é menos que a unidade e assim para os outros meninos.

3. Comeu mais no problema 1 porque no problema 2 comeu cada menino no total $\frac{3}{8}$ e no problema 1 comeu cada menino no total $\frac{3}{4}$. Como no problema 2 cada menino comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza, o $\frac{1}{8}$ é a metade do $\frac{1}{4}$ e como no problema 1 comeu cada menino só numa pizza $\frac{1}{4}$ comeu mais que o menino do problema 2.

Anexo 8

Problema 2: As maçãs

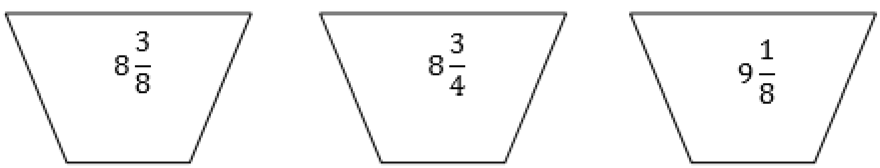
1.1. Quando a Sara e a irmã foram lanchar havia na fruteira cinco maçãs e meia. Escreve uma fração que represente o número de maçãs que havia na fruteira.

1.2. Quando terminaram de lanchar ficaram na fruteira $\frac{9}{4}$ de maçã. Quantas maçãs inteiras sobraram?

1.3. Desenha uma figura que possa representar o que sobrou das maçãs.

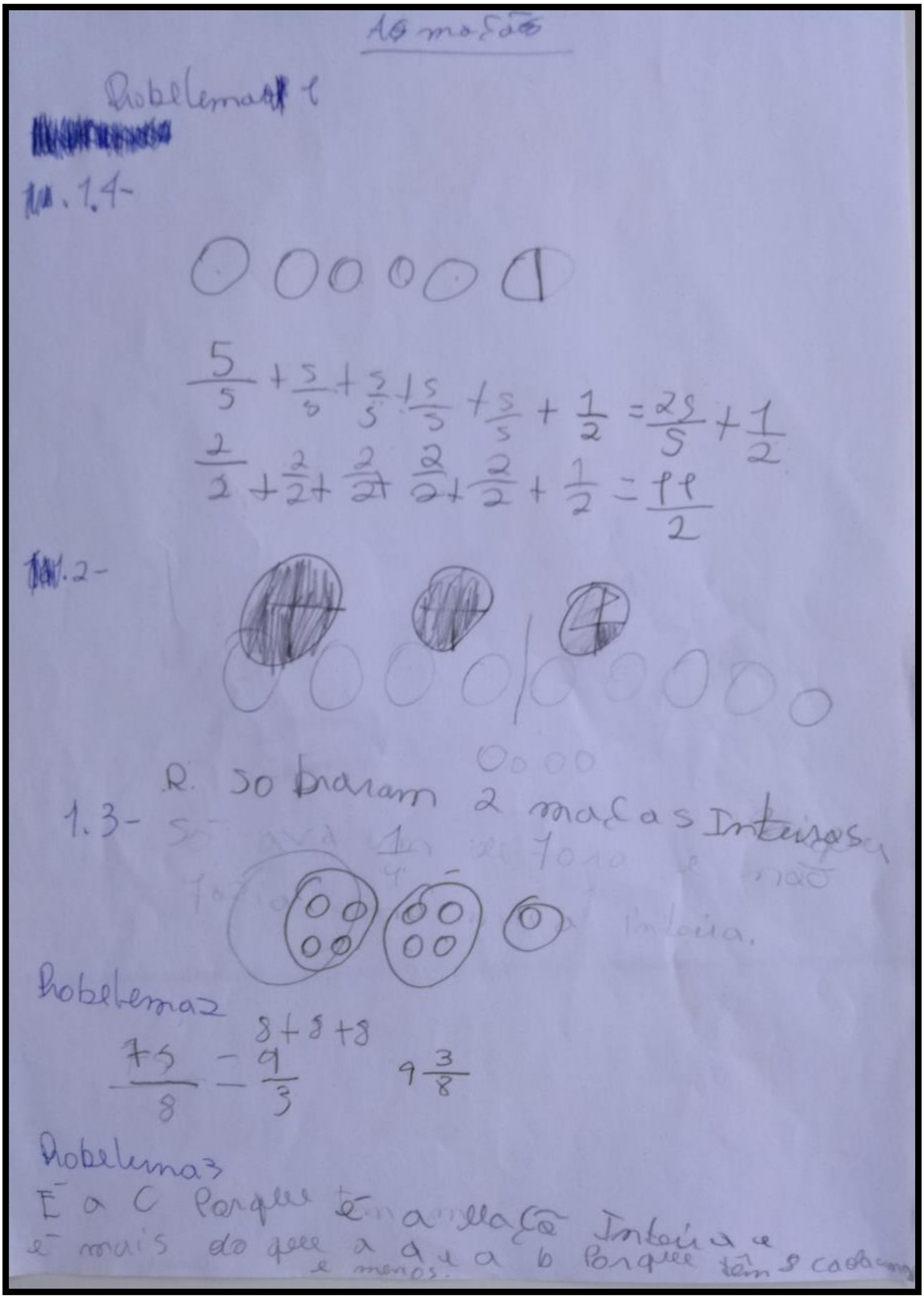
2. A avó da Rita faz todos os anos compota de maçã em grandes quantidades para distribuir pelos netos. Para cozinhar as maçãs corta-as em oitavos que vai colocando em alguidares até ficarem cheios. A Rita resolveu contar os pedaços de maçã de um deles e contou 75 bocados. És capaz de dizer a quantas maçãs inteiras correspondem os oitavos que estavam no alguidar? Escreve na forma de numeral misto $\frac{75}{8}$.

3. Dos três alguidares A, B e C, qual deles tem mais maçã? Justifica a tua resposta.



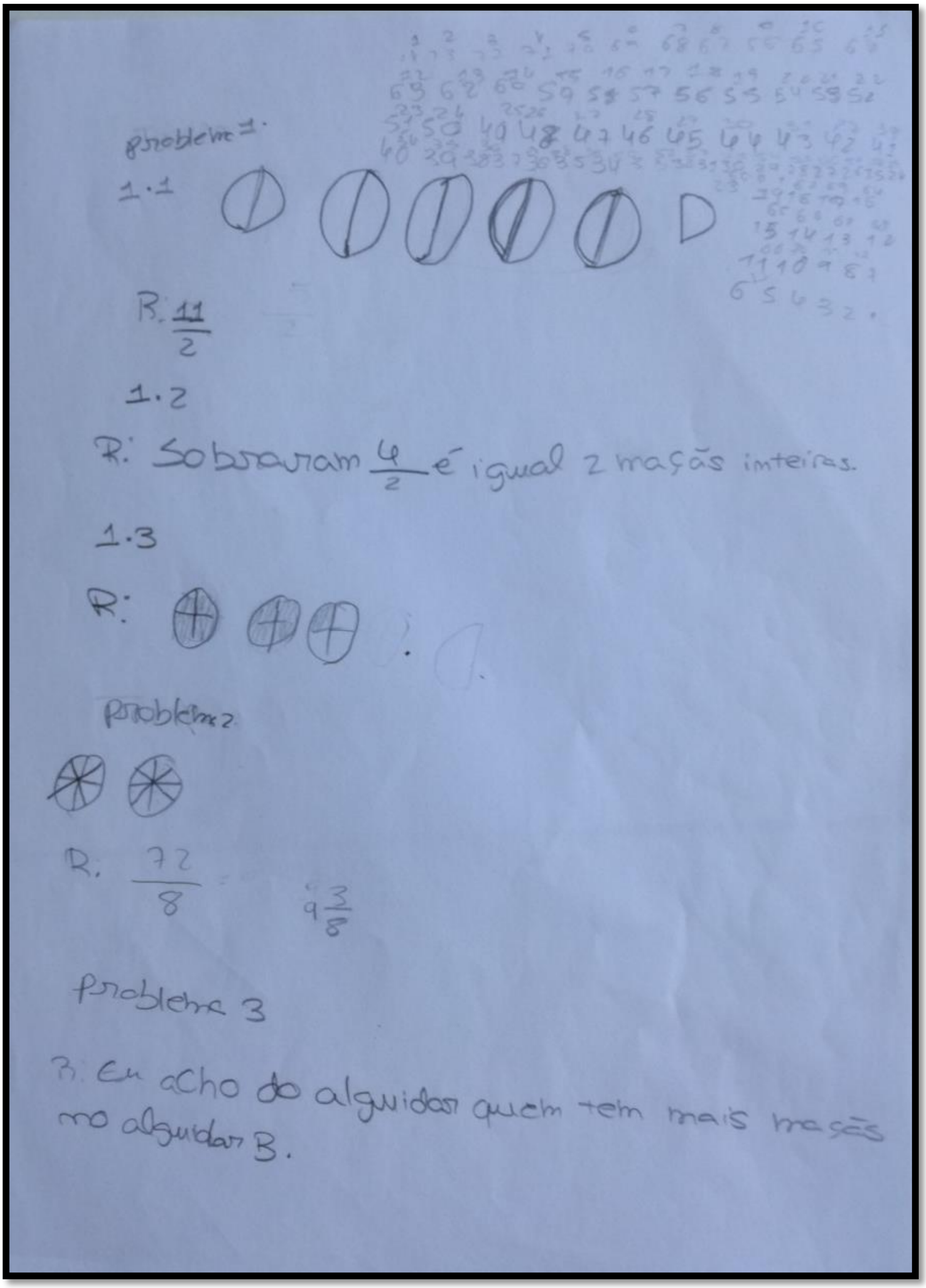
Anexo 9

Resolução do Daniel



Anexo 10

Resolução da Marta



problema 1.

1.1

R. $\frac{11}{2}$

1.2

R: Sobraram $\frac{4}{2}$ é igual 2 maçãs inteiras.

1.3

R:

problema 2

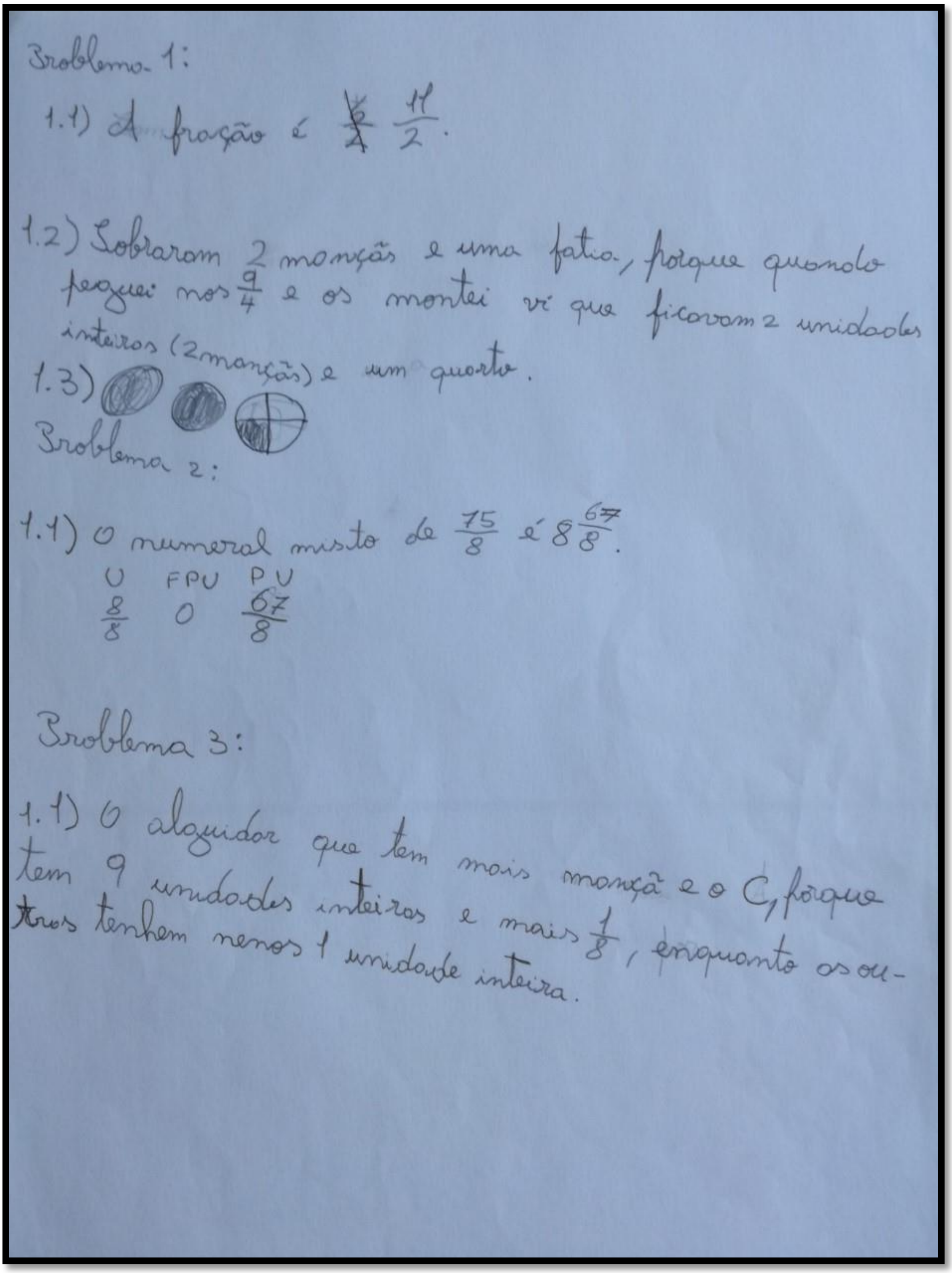
R. $\frac{72}{8}$ $9\frac{3}{8}$

problema 3

R: Eu acho do alguidar quem tem mais maçãs no alguidar B.

Anexo 11

Resolução da Susana



Broblema 1:

1.1) ~~A~~ fração é $\cancel{\frac{6}{4}}$ $\frac{11}{2}$.

1.2) Sobraram 2 mançãs e uma fatia, porque quando peguei nos $\frac{9}{4}$ e os montei vi que ficavam 2 unidades inteiros (2 mançãs) e um quarto.

1.3)

Broblema 2:

1.1) O numeral misto de $\frac{75}{8}$ é $8\frac{67}{8}$.

U	FPU	PU
$\frac{8}{8}$	0	$\frac{67}{8}$

Broblema 3:

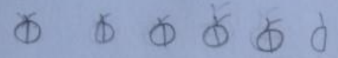
1.1) O alguidar que tem mais mançã é o C, porque tem 9 unidades inteiros e mais $\frac{1}{8}$, enquanto os ou-tros tenhem nenos 1 unidade inteira.

Anexo 12

Resolução do Rafael

As maçãs

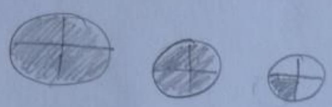
Problema 1



1.1 - A fração que representa o número de maçãs é $\frac{11}{2}$.

1.2 - Sobraram 2 maçãs e $\frac{1}{4}$, porque eu fui buscar os queijinhos que representam os quartos e tirei nove e depois fui montar e deu 2 maçãs e $\frac{1}{4}$. Sobraram 2 maçãs inteiras.

1.3 -



Problema 2

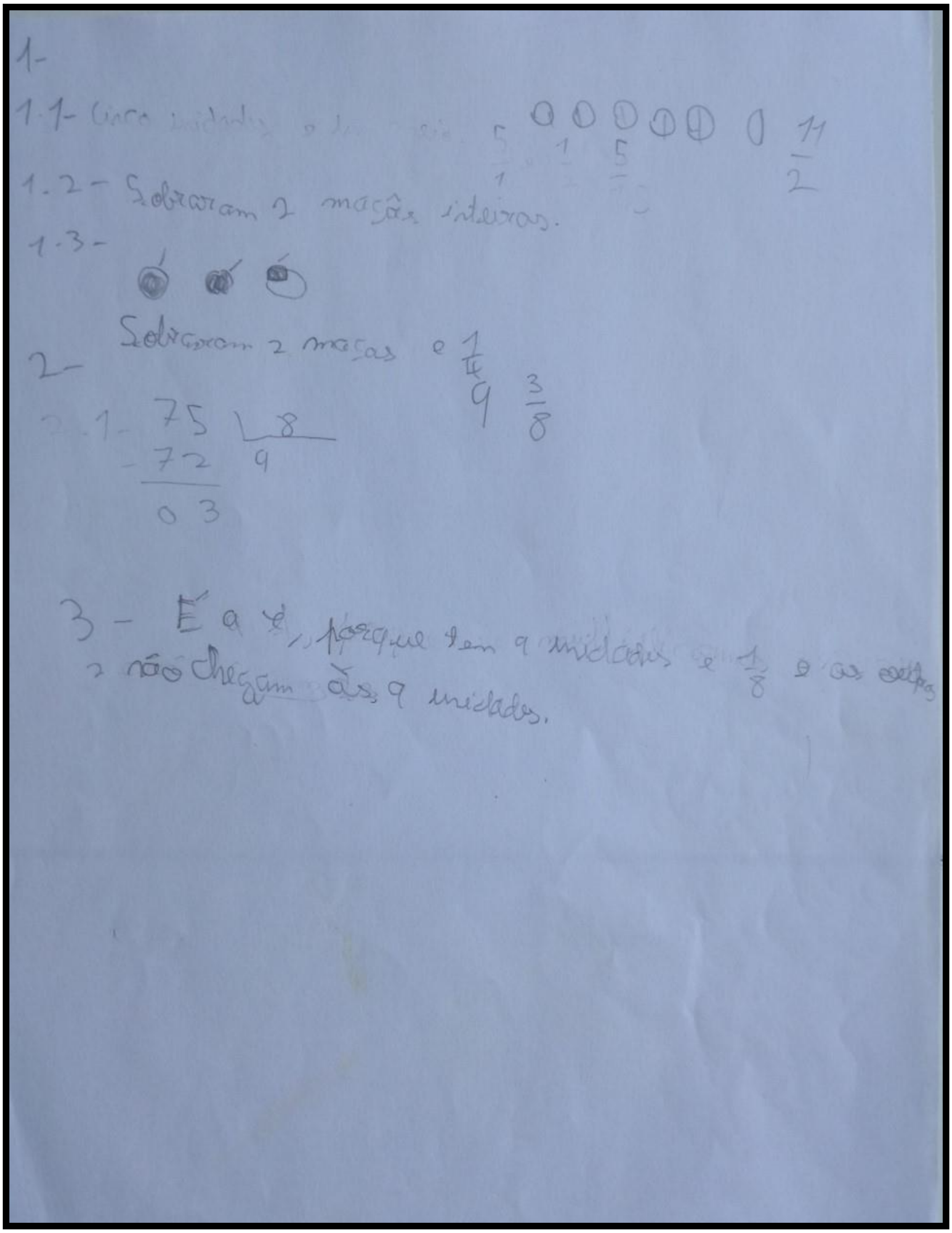
R: Estavam no alguidar 19 $\frac{3}{8}$, porque eu fui contar na minha cabeça 8 + 8 etc até chegar ao 75 mas depois deu-me 72 e foram 19 unidades e $\frac{3}{8}$ porque 72 mais 3 é 75 e é mais $\frac{3}{8}$ porque estamos a falar com oitavos.

Problema 3

R: O que tem mais maçãs inteiras é o C, porque são 9 maçãs inteiras e o A e B são 8 maçãs inteiras por isso é menos uma maçã.

Anexo 13

Resolução do Bruno



1-

1.1- Cinco unidades e ... 5/1 1/... 5/... 11/2

1.2- Sobraram 2 maçãs inteiras.

1.3-

Sobraram 2 maças e 1/4

2-

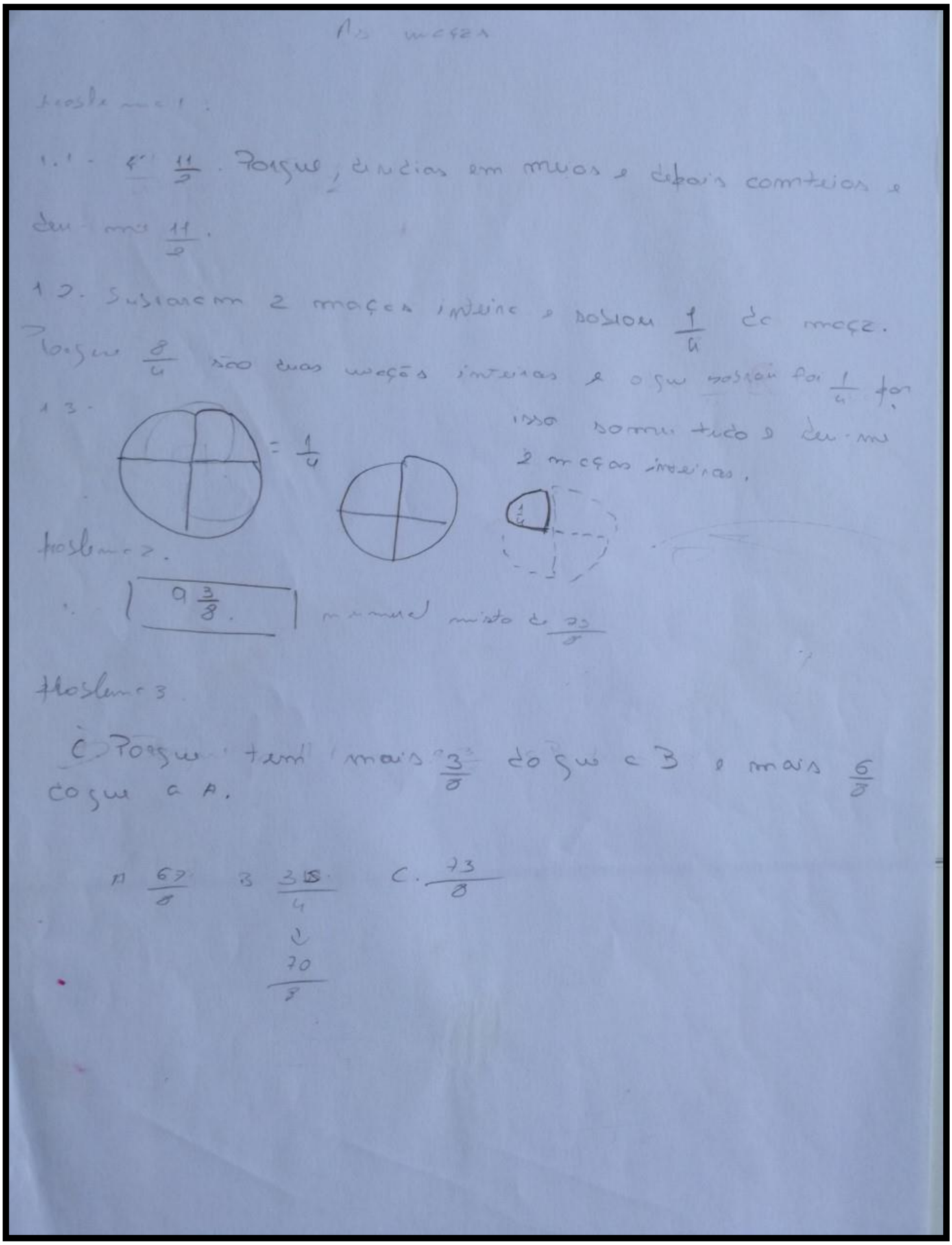
2.1- 75 | 8
-72 9
03

9 3/8

3- É a 4, porque tem 9 unidades e 1/8 e as outras não chegam às 9 unidades.

Anexo 14

Resolução do Guilherme


As maças

Problema 1:

1.1 - É $\frac{11}{2}$. Porque, dividi em meios e depois contei-os e deu-me $\frac{11}{2}$.

1.2. Sobraram 2 maçãs inteiras e sobrou $\frac{1}{4}$ de maçã. Porque $\frac{8}{4}$ são duas maçãs inteiras e o que sobrou foi $\frac{1}{4}$ por isso somei tudo e deu-me 2 maçãs inteiras.

1.3 -

$= \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$

Problema 2.

$\boxed{9\frac{3}{8}}$ numeral misto de $\frac{75}{8}$

Problema 3

C. Porque tem mais $\frac{3}{8}$ do que a B e mais $\frac{6}{8}$ do que a A.

A $\frac{67}{8}$ B $\frac{35}{4}$ C. $\frac{73}{8}$

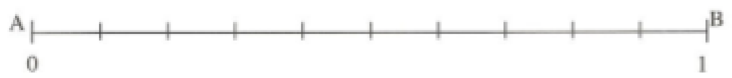
$\frac{70}{8}$

Anexo 15

Problema 3: Percursos

1.1. A turma do João organizou um percurso pedestre do Parque Natural da Serra d' Aire e Candeeiros, representado na figura por [AB]. A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ do percurso, a Joana parou ao fim $\frac{4}{10}$, o Francisco ao fim de $\frac{3}{5}$ e os restantes elementos da turma ao fim de $\frac{7}{10}$ do percurso.

Assinala no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.

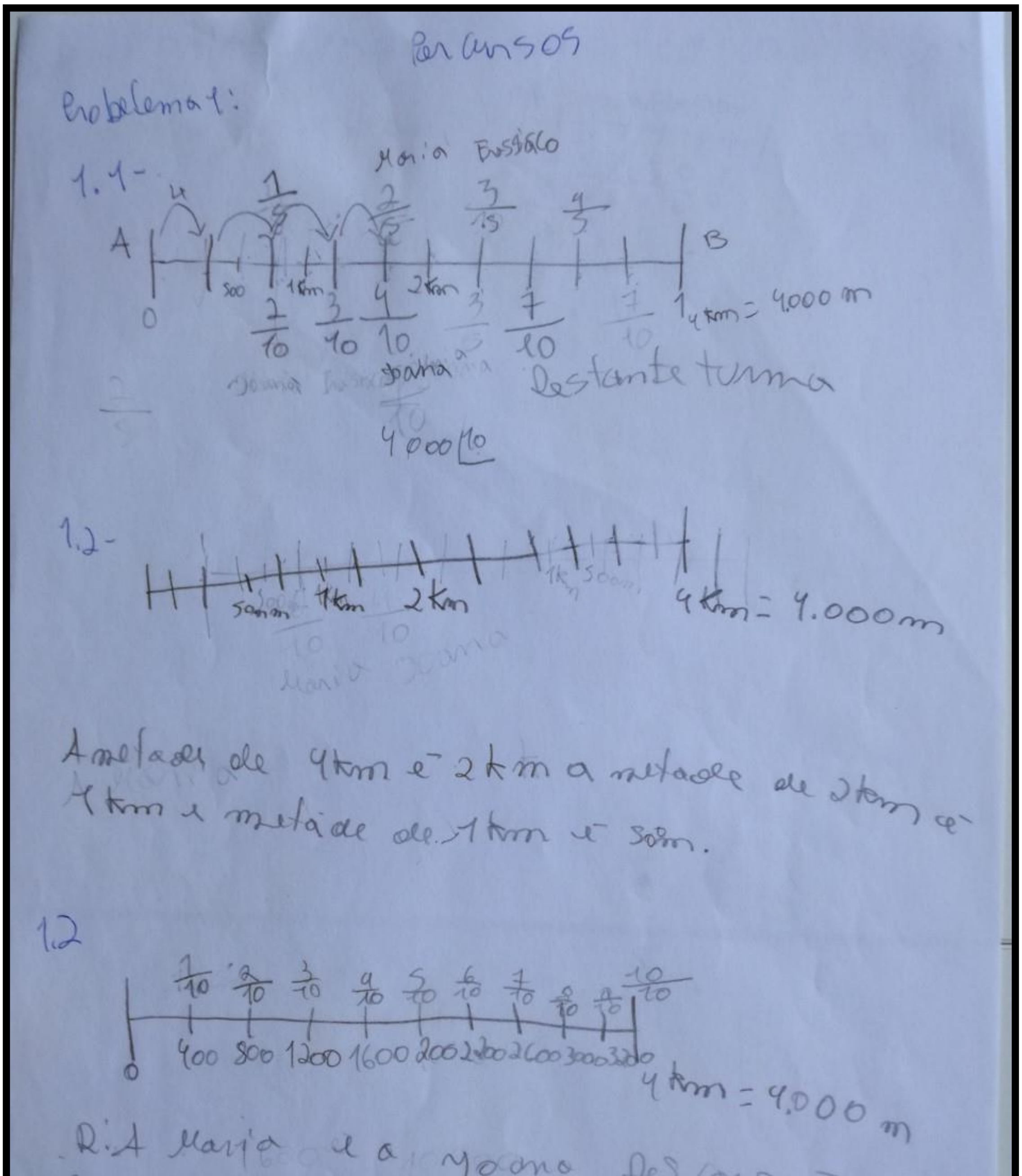


1.2. Sabendo que o percurso era de 4 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

1.3. O João quando fez a sua primeira paragem tinha percorrido $\frac{5}{6}$ do percurso feito pelo Franscisco antes de parar. Quantos quilómetros já tinha percorrido o João?

Anexo 16

Resolução do Daniel


Percursos

Probelema 1:

1.1-

Destante turma

4000 | 10

1.2-

1km 500m 1km 2km 4km = 4.000m

A metade de 4km é 2km a metade de 2km é 1km e metade de 1km é 500m.

1.2

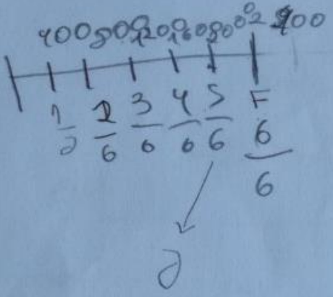
1/10 2/10 3/10 4/10 5/10 6/10 7/10 8/10 9/10 10/10

0 400 800 1200 1600 2000 2400 2800 3200 3600

4 km = 4.000 m

R: A Maria e a Joana descansarão ao fim de 1600m. A Maria e a Joana param no mesmo sitio porque 4/10 é a mesma coisa do que 2/5

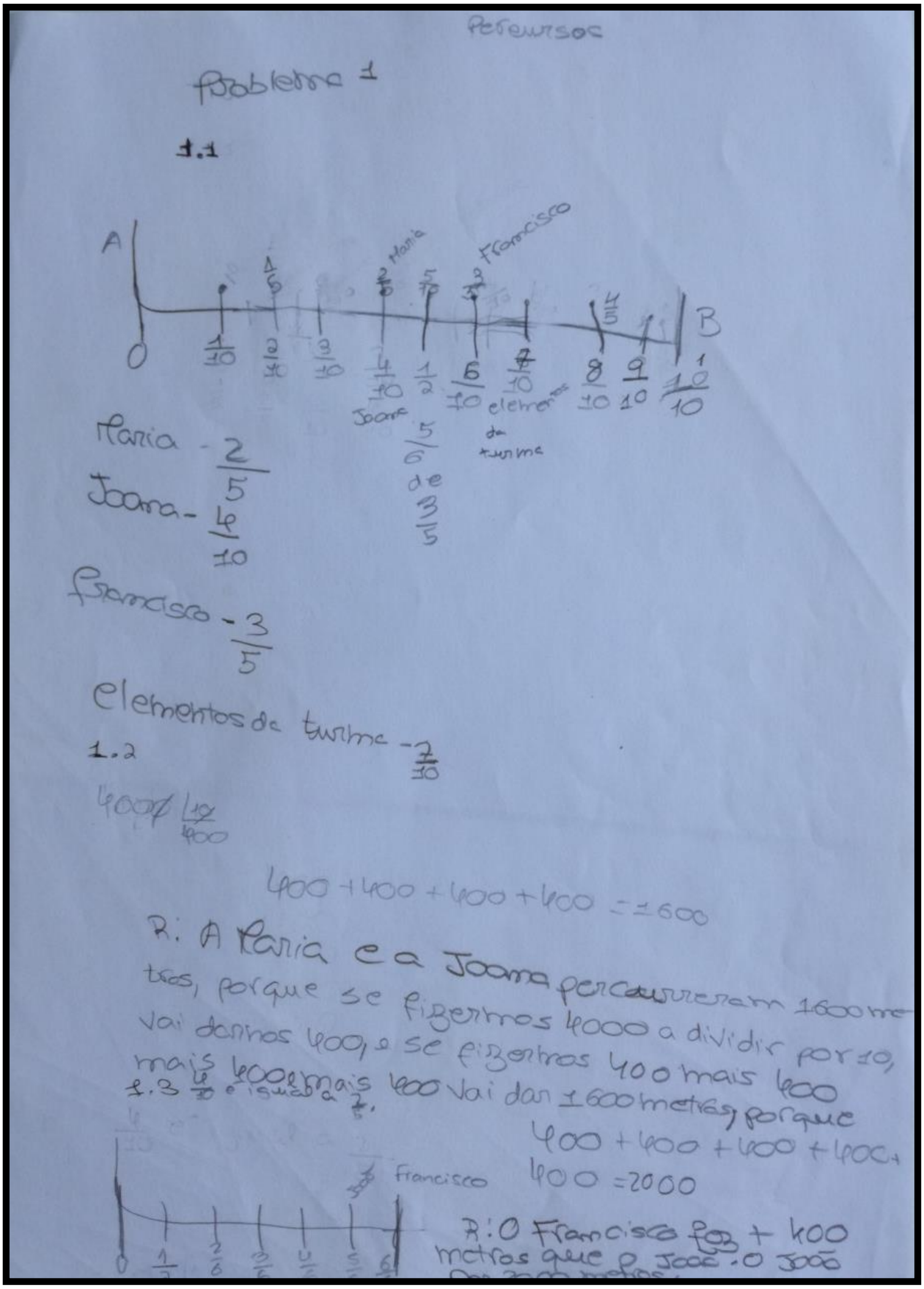
1.3. O João fez 2 km porque $\frac{5}{6}$ do percurso do



trasisco é 2000 m.

Anexo 17

Resolução da Marta



Percursos

Problema 1

1.1

Maria - $\frac{2}{5}$

Joana - $\frac{4}{10}$

Francisco - $\frac{3}{5}$

elementos da turma - $\frac{7}{10}$

$\frac{5}{6}$ de $\frac{3}{5}$

1.2

$4000 \; \frac{4}{400}$

$400 + 400 + 400 + 400 = 1600$

R: A Maria e a Joana percorreram 1600 metros, porque se fizermos 4000 a dividir por 10, vai dar-nos 400, e se fizermos 400 mais 400 mais 400 mais 400 vai dar 1600 metros, porque

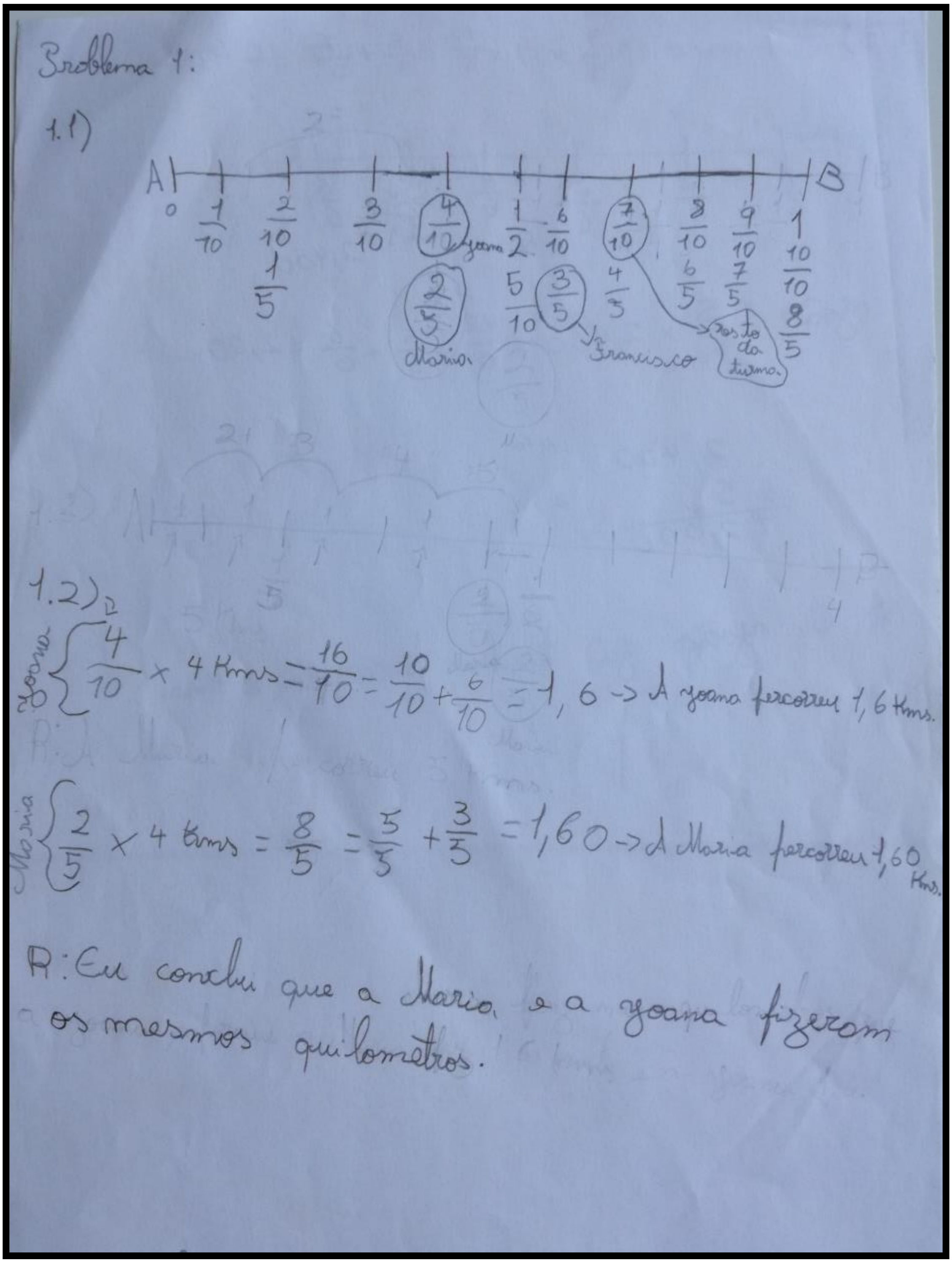
1.3 $\frac{4}{10}$ é igual a $\frac{2}{5}$.

$400 + 400 + 400 + 400 + 400 = 2000$

R: O Francisco fez + 400 metros que o João. O João

Anexo 18

Resolução da Susana



Problema 1:

1.1)

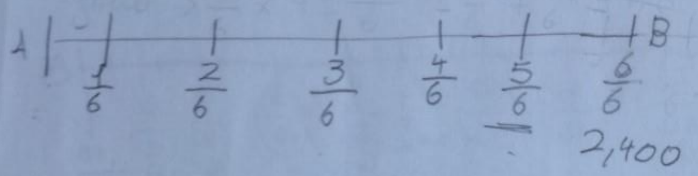
1.2)

Joana $\left\{ \frac{4}{10} \times 4 \text{ Kms} = \frac{16}{10} = \frac{10}{10} + \frac{6}{10} = 1,6 \right.$ -> A Joana percorreu 1,6 Kms.

Maria $\left\{ \frac{2}{5} \times 4 \text{ kms} = \frac{8}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = 1,60 \right.$ -> A Maria percorreu 1,60 Kms.

R: Eu conclui que a Maria e a Joana fizeram os mesmos quilometros.

1.3) Francisco → $\frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5} = \frac{5}{5} + \frac{7}{5} = 2,400$



João → $\frac{5}{6} \times 2,400 = \frac{12}{6} = \frac{6}{6} + \frac{6}{6} = 2,00$

$$\begin{array}{r} 2,400 \\ \times\ 5 \\ \hline 12,000 \end{array}$$

2

R: O João já tinha percorrido 2 Kms.

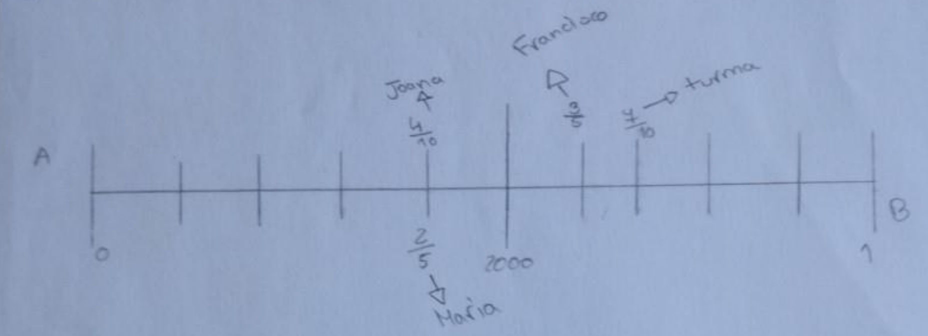
FIM

Anexo 19

Resolução do Rafael

Percursos

1.1 -



1.2 -

Maria: 1600

Joana: 1600

$$4000 \div 10 = 400$$

$$400 \times 4 = 1600$$

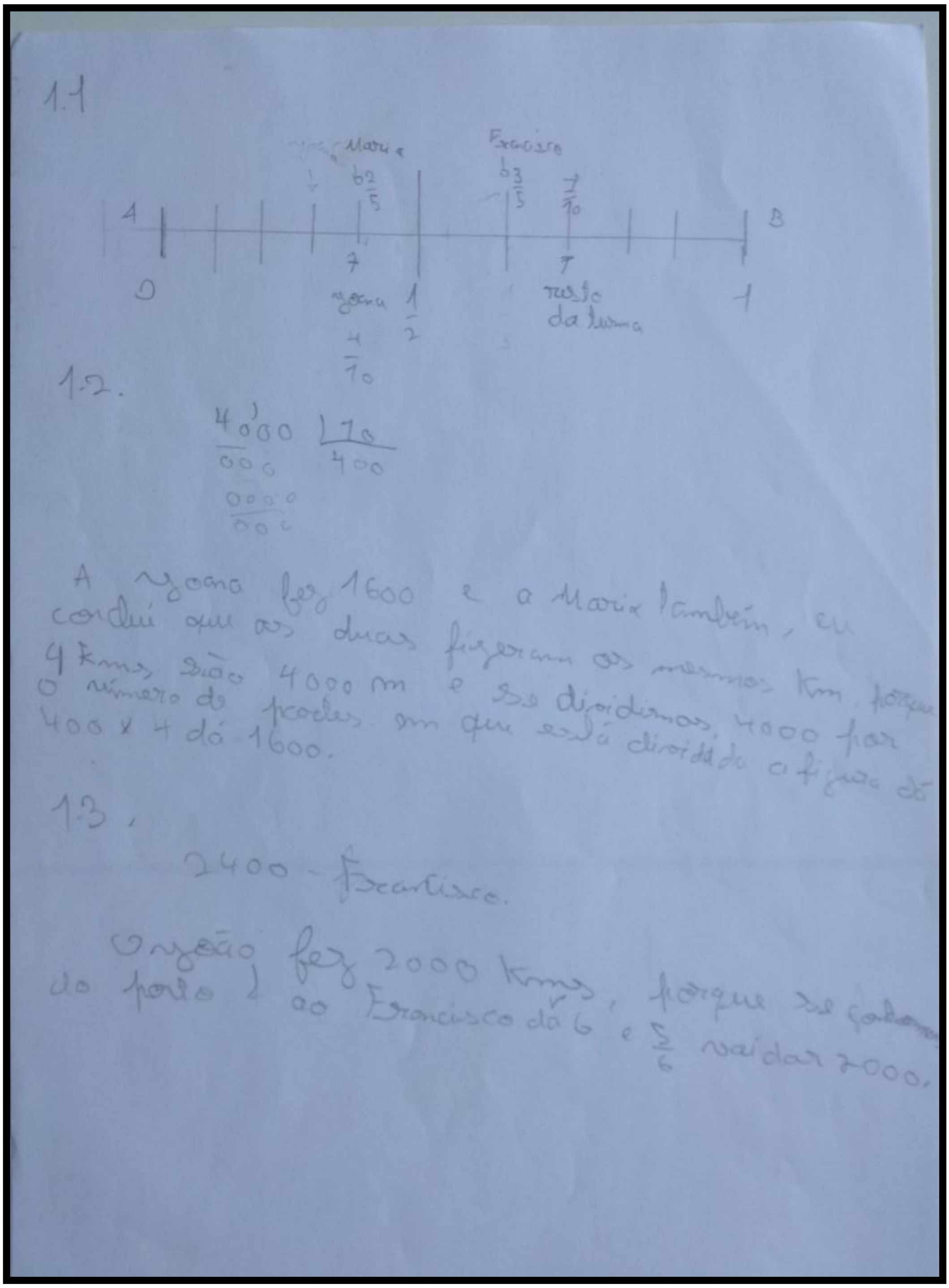
R: A Maria e a Joana quando pararam tinham feito 1600 m.

1.3. - O João percorreu $\frac{5}{6}$ do percurso do Francisco.

Sabem que o Francisco fez 2400 m significa que o João fez menos 400 que é 2000

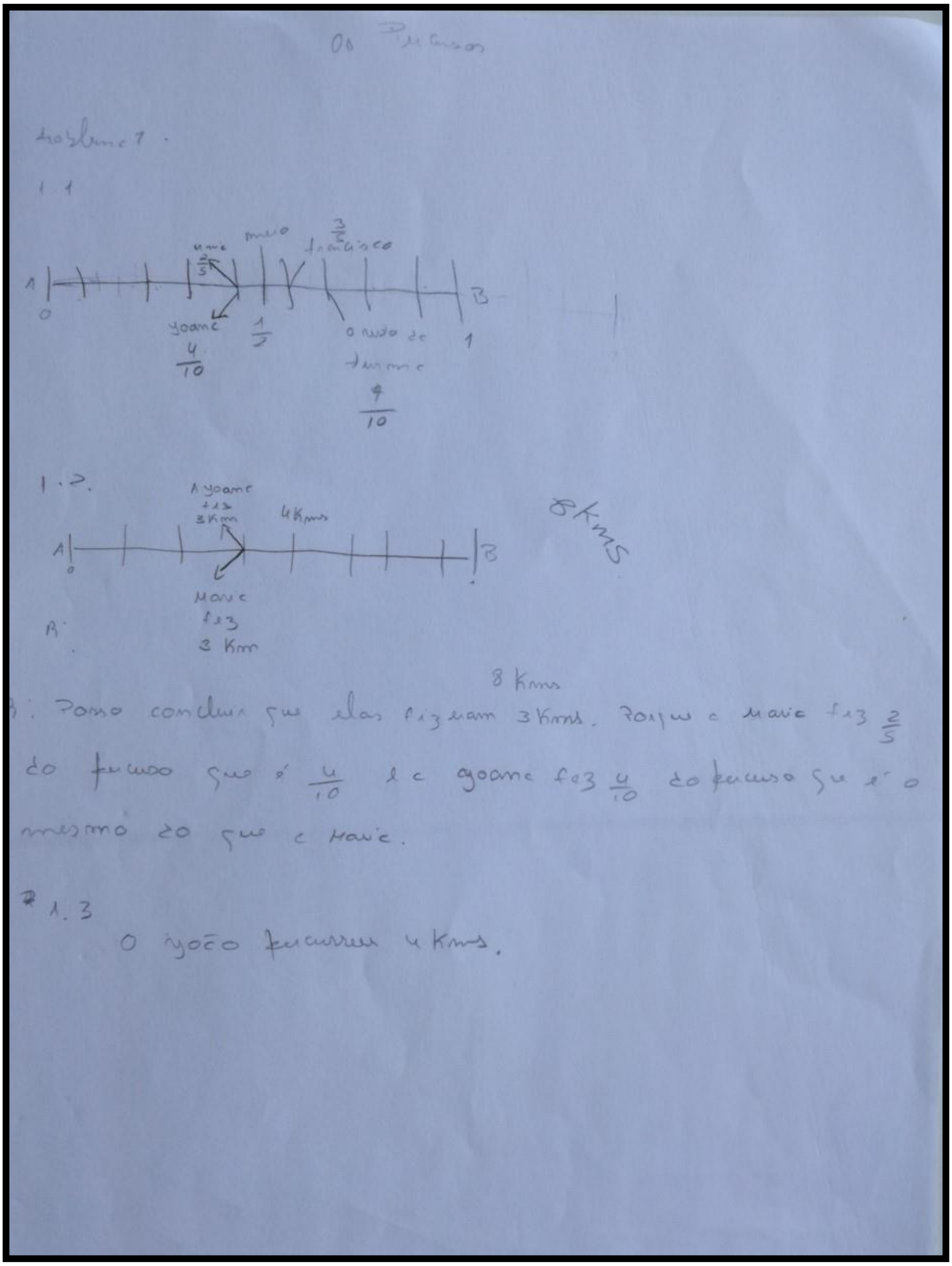
Anexo 20

Resolução do Bruno



Anexo 21

Resolução do Guilherme



Os Percursos

Problema 1.

1.1

1.2.

R:

8 Kms

R: Posso concluir que elas fizeram 3Kms. Porque a Maria fez $\frac{2}{5}$ do percurso que é $\frac{4}{10}$ e a Joana fez $\frac{4}{10}$ do percurso que é o mesmo do que a Maria.

1.3

O João percorreu 4Kms.