Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Cristina de Jesus Cardoso Sousa

Aprender a resolver problemas: um estudo com alunos do 2.º ano de escolaridade

Relatório da componente de investigação de Estágio III do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Orientadora:
Professora Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes

Setúbal, dezembro de 2015

Versão Final

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Cristina de Jesus Cardoso Sousa

N.º 130140011

Aprender a resolver problemas: um estudo com alunos do 2.º ano de escolaridade

Relatório da componente de investigação de Estágio III do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Orientadora:
Professora Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes

Setúbal, dezembro de 2015

Versão Final

Agradecimentos

O presente relatório do Projeto de Investigação, apesar do seu cariz individual, reúne contributos de várias pessoas que me acompanharam desde o início do meu percurso académico e permitiram alcançar o sonho de finalizar o curso. Neste sentido, não posso deixar, especialmente, de agradecer:

À minha orientadora, Professora Doutora Fátima Mendes, pela paciência, pelo apoio que sempre me prestou, pela motivação e palavras de incentivo que me ajudaram a continuar e superar dificuldades e pelas críticas pertinentes que me ajudaram a crescer como pessoa e como profissional de educação.

À professora cooperante, por ter possibilitado a realização deste estudo, por me ter apoiado e encorajado, ajudando-me a superar algumas dificuldades e incertezas e pela disponibilidade para acompanhar o meu trabalho.

Aos professores que estiveram presentes ao longo do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, por terem partilhado comigo os seus conhecimentos e um pouco de si mesmos.

Aos alunos do 2.º B que participaram neste projeto, que vi crescer e fiz parte do seu crescimento e que marcaram o meu coração.

Às minhas colegas e amigas Marisa Figueiredo, Ana Filipa Vieira e Brígida Sineiro que foram incansáveis ao longo do percurso académico, pela ajuda, pelas palavras de incentivo e pela amizade e carinho.

Às minhas amigas Cristiana Santo, Patrícia Batista e Bárbara Santos por me terem dado a mão e segurado para que não desistisse, por me terem ouvido e dado palavras de incentivo, por me terem ajudado a crescer e sobretudo pela amizade sincera.

À minha família, especialmente à minha mãe, pai e irmão que acompanharam todo o meu percurso, viram de perto os meus piores e melhores momentos e, mesmo assim, orgulham-se por ter chegado até aqui.

A todos, muito obrigada!

Resumo

Este estudo centra-se na temática da resolução de problemas, tendo como objetivo principal compreender o modo como os alunos do 2.º ano de escolaridade resolvem problemas. Mais concretamente pretende identificar as estratégias usadas pelos alunos para resolver os problemas, as etapas de resolução de problemas de Pólya por que passam e as dificuldades que manifestam.

A fundamentação teórica apresenta essencialmente os seguintes tópicos: a importância da resolução de problemas; a resolução de problemas na aula de Matemática; caracterização de problema, etapas e estratégias de resolução; e, por fim, a resolução de problemas nas orientações curriculares.

O estudo segue uma abordagem qualitativa e insere-se no paradigma interpretativo. Nele participaram vinte alunos de uma turma do 2.º ano de escolaridade, tendo sido escolhidos quatro alunos para uma análise mais aprofundada das suas resoluções.

A recolha de dados decorreu durante cinco semanas e um dia após o final do estágio, e foi conseguida através da observação participante e da recolha documental. Os seis problemas propostos foram construídos ou adaptados por mim, tendo subjacente uma estratégia de resolução de problemas diferente. O seu trabalho em sala de aula baseou-se numa prática de ensino exploratório.

As conclusões deste estudo evidenciam que: (i) os alunos recorrem a diversas estratégias para resolver problemas; (ii) nos problemas propostos verifica-se a preferência pela estratégia "fazer uma simulação/dramatização/experimentação"; (iii) as principais dificuldades apresentadas relacionam-se com a compreensão dos enunciados, o uso da estratégia "trabalhar do fim para o princípio", a interpretação do resultado obtido e a justificação do raciocínio usando a expressão escrita ou oral; (iv) os alunos percorrem essencialmente as três etapas "compreender o problema", "escolher um plano" e "realizar o plano" durante a sua resolução.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Estratégias de resolução de problemas; Etapas de resolução de problemas; Dificuldades dos alunos na resolução de problemas.

Abstract

This study focuses on the problem solving and has as main objective the understanding on how students of 2nd grade solve problems. More specifically it aims to identify the strategies used by students to solve problems, the phases of problem solving by Pólya which they passed and the difficulties revealed in the exploration process.

The theoretical framework present the following topics: the importance of problem solving; the problem solving in Mathematics class; definition of problem, phases and strategies of the problem solving; and finally, the problem solving according to the school curriculum.

The study follows a qualitative approach and is part of the interpretative paradigm. Which involved twenty second grade students belonging to a class, although only four students were chosen for further analysis of their resolutions.

The data collection took place during five weeks and one day after the end of internship, and it was collected through participant observation and documental collection. The six problems were made and/or adapted by me and with a different underlying problem solving strategies. The work in the classroom was based on the practice of exploratory teaching.

The final results of this project showed that: (i) the students use diverse strategies to solve problems; (ii) on the problems solved there was preference for the strategy "make a simulation/role play/experimentation"; (iii) the major difficulties revealed are related to understanding the problem, the strategy "work backward", interpreting the obtained results and explaining their reasoning by written or oral expression; (iv) the students primarily undergo three phases of problem solving, "understand the problem", "choose a plan" and "try the plan"; (iv)

Keywords: Problem solving; Problem solving strategies; Phases of problem solving; student's difficulties in problem solving.

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

Capítulo I

-

Introdução

O presente Relatório do Projeto de Investigação surge no âmbito da Unidade Curricular (UC) Estágio III do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Este foi desenvolvido numa turma de 2.º ano de escolaridade de uma escola situada num meio urbano, no ano letivo 2014/2015.

Neste capítulo explicito as minhas motivações para a realização desta investigação e justifico a sua pertinência. Apresento, igualmente, os objetivos da mesma e identifico as questões principais que a orientam. Concluo este capítulo com a organização geral do relatório.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

“A resolução de problemas pode constituir o ponto de partida e o ponto de chegada do ensino-aprendizagem da Matemática.”

(Ponte & Serrazina, Didáctica da Matemática do 1º Ciclo, 2000, p. 56)

A presença da Matemática no nosso dia-a-dia é inquestionável, sendo mais notória devido às mudanças decorrentes da evolução da sociedade. Estas, ao originarem “situações complexas que é necessário interpretar e resolver” (Lopes, Bernardes, Loureiro, Varandas, Oliveira, Delgado, Bastos & Graça, 1990, p. 7), suscitam uma adaptação dos indivíduos tanto ao nível do conhecimento matemático como ao nível do desenvolvimento das competências transversais à Matemática, nomeadamente, a comunicação e o raciocínio levando-os a tornarem-se "competentes, críticos e confiantes nos aspectos essenciais em que a sua vida se relaciona com a matemática" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 18). Além disso, as mesmas mudanças desenvolvem nos indivíduos a capacidade de formularem "problemas decorrentes de situações com que se deparem e de os resolver habilmente" (Lopes et al., 1990, p. 7).

Para dar resposta às diferentes situações, as aulas de Matemática devem constituir um espaço propício à aprendizagem dos alunos, contribuindo para que sejam cidadãos críticos e informados. Para isso, é importante que o trabalho nesta área envolva a resolução de problemas que possibilite o uso de diferentes estratégias de resolução, com o objetivo de a criança compreender que na Matemática, tal como na sociedade, podem existir diferentes olhares sobre uma mesma questão e diferentes resoluções e/ou soluções para um mesmo problema. Tal como referem Vale, Fão, Portela, Geraldes, Fonseca, Gigante, Lima e Pimentel (2006):

> A constatação de que um mesmo problema pode ser resolvido de vários modos, recorrendo a diferentes estratégias […] permite aos alunos ir consolidando a ideia de que, em matemática, é possível encontrar vários caminhos para chegar ao mesmo fim e também que, de um mesmo ponto de partida, se pode chegar a vários destinos […]. (p. 11)

Contudo, muitos professores investem sobretudo na aprendizagem dos conteúdos, onde dão primazia à memorização de regras, conteúdos e conceitos a utilizar, "dispensando-se muito pouca atenção ao desenvolvimento de capacidades fundamentais à resolução de problemas" (Vale et al., 2006, p. 11). Este tipo de ensino apenas levará os alunos a utilizarem de forma mecânica as aprendizagens memorizadas, o que, por sua vez, origina respostas incorretas por falta de interpretação e raciocínio sobre as questões colocadas.

O presente projeto de investigação incide sobre a área da Matemática não apenas pela importância que esta tem no nosso quotidiano mas também por outros motivos. Primeiramente, a nível pessoal, importa referir que sempre nutri um certo gosto por esta área disciplinar porém, devido às metodologias adotadas pelos professores que me levaram a memorizar regras e conteúdos, tive necessidade de investir no desenvolvimento do meu raciocínio matemático. Desta forma, comecei a sentir-me mais confiante em trabalhar este aspeto, pois, para mim, o raciocínio matemático é a chave para uma melhor compreensão da Matemática

Além disso, durante a minha escolaridade básica, senti uma certa dificuldade no que diz respeito à resolução de problemas pois sempre fui orientada para o uso de um dos quatro algoritmos para chegar à resposta, não tendo oportunidade de construir e explorar diferentes estratégias de resolução.

A incidência sobre esta temática deve-se igualmente ao facto de a resolução de problemas ser referida nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar como um dos mais importantes processos a ser abordados no ensino básico, desde a educação pré-escolar visto que "As primeiras experiências das crianças mais novas com a matemática surgem através da resolução de problemas" (NCTM, 2007, p. 59). Uma vez que realizei estágio numa turma de 2.º ano, esta temática surge aliada, essencialmente, à aprendizagem das quatro operações, tal como sugere o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013). Este documento apresenta, nos seus objetivos, a resolução de problemas como um dos fatores que contribuem para o desenvolvimento do gosto pela Matemática. Além disso, refere ainda que os "desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar" (p. 3), ao longo da escolaridade básica, "devem concorrer (…) para a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, para a comunicação adequada à matemática, para a resolução de problemas em diversos contextos (…)" (p. 4).

Além dos documentos anteriormente referidos, é possível perceber a importância desta temática através de outros, nomeadamente das Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, ao encontrar-se presente na norma 1 "A Matemática como Resolução de Problemas" (NCTM, 1994, p. 29) a referência a esta temática como "o foco central do currículo de Matemática" e um "objectivo prioritário do ensino da Matemática e uma parte integral de toda a actividade Matemática" (*ibidem*). Esta importância é igualmente salientada pelo *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics*, sendo referida em todos os anos de escolaridade como a "base" para a abordagem dos conteúdos essenciais, ou seja, "É fundamental que os pontos essenciais sejam abordados em contextos que promovam a resolução de problemas (…)" (NCTM, 2006, p. 11).

As diferentes observações realizadas na sala de aula, em estágios anteriores, associadas ao desempenho dos alunos, justificam a pertinência na conceção desta investigação. Durante os momentos de resolução de problemas, era percetível a dificuldade dos alunos na interpretação dos enunciados, o que se refletia na construção da estratégia a utilizar para a sua resolução. Essa, muitas vezes, passava pela escolha de uma das quatro operações básicas pois, tal como referem Ponte e Serrazina (2000) alguns dos alunos "não chegam a compreender muito bem o problema, não pensam se pode haver mais de uma forma de os resolver e começam logo a fazer as contas" (p. 53), o que corresponde "a uma ideia muito incorreta sobre o que é resolver um problema [conduzindo] com muita frequência a resultados errados e inibe os alunos de desenvolver a sua capacidade de resolver problemas mais complexos" (*ibidem*).

Considera-se a resolução de problemas como um desafio para os alunos pois, segundo Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) um problema apresenta situações não rotineiras que não se podem resolver "utilizando processos conhecidos e estandardizados" (p. 15) sendo necessário utilizar o "que se designa por estratégias" (*ibidem*), proporcionando-lhes curiosidade, uma certa tensão e no final, um sentimento de alegria ao descobrir a solução. Desta forma, decidi focar-me neste tema com o intuito de estimular os alunos para a resolução de problemas, levando-os a pensar para além dos conhecimentos adquiridos anteriormente.

Para que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas, são consignadas três abordagens relativas à resolução de problemas: "ensinando acerca da resolução de problemas, ensinando para a resolução de problemas e ensinando através (via) da resolução de problemas" (Schroeder & Lester, 1989 in Veia, 1996, p. 19). Estas, apesar de surgirem insuladas, segundo Luciano Veia (1996), na prática, "encontram-se ligadas e podem surgir em várias sequências e combinações" (p. 19).

No meu projeto, tentei ter em consideração duas das três abordagens relativas à resolução de problemas. Por um lado, a abordagem de ensino para a resolução de problemas, ao explorá-los com o intuito de permitir que os alunos desenvolvessem diferentes estratégias de resolução; e por outro, a abordagem de ensino através da resolução de problemas, pois, os problemas utilizados tinham sempre subjacentes conteúdos que estavam a ser trabalhados tanto na área da matemática como nas restantes áreas curriculares. Desta forma, procurei basear-me na ideia de que "A resolução de problemas não só constitui um objectivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática" (NCTM, 2007, p. 57).

Associada à temática da resolução de problemas, é importante realçar o tipo de ensino que o professor deve desenvolver. Este deve dar oportunidade aos alunos para apresentarem as suas ideias e discutirem em turma, pois ajuda-os a "clarificar e aprofundar o seu conhecimento matemático" (Vale et al., 2006, p. 11). Desta forma, mais do que realizar o problema individualmente, torna-se essencial que estes possam tirar as suas dúvidas coletivamente e discutir as suas ideias, levando-os a aplicar os conhecimentos adquiridos e a desenvolver o pensamento, por forma a criar novas aprendizagens.

Estes aspetos-chave remetem-nos para o ensino exploratório da Matemática. Este defende que os alunos aprendem "a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva" (Canavarro, 2011, p. 11). Ao explorar tarefas cuidadosamente selecionadas e discutir com os colegas e o professor, o aluno tem a possibilidade de "desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (*ibidem*). Desta forma, é possível referir que uma aula de ensino exploratório é propícia ao desenvolvimento de resolução de problemas, na medida em que o professor apoia os alunos na descoberta e construção do conhecimento.

Apesar de não existir nenhuma "estratégia de actuação do professor de forma a desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas" (Lopes et al., 1990, p. 20), Pólya, citado por Jeremy Kilpatrick (2014) salienta a importância do papel do professor enquanto ator e como apoio, ou seja, o aluno não aprende a resolver problemas sozinho, é necessário propor situações de resolução de problemas. Contudo, não é dando as respostas que estes vão aprender mas sim, partilhando com eles ideias, deixando que contribuam também com as suas, construindo novos conhecimentos. Além disso, considera-se também o professor como "orientador e desbloqueador de situações de impasse" (Lopes et al., 1990, p. 20), intervindo apenas no momento certo, dando liberdade aos alunos "para encontrarem os seus próprios caminhos [e provocando] o aparecimento das ideias que os podem fazer avançar" (*ibidem*).

Outro aspeto relativo ao papel do professor diz respeito à alteração de conceções erradas que os alunos têm sobre a resolução de problemas e a Matemática em geral, e que são consideradas umas "das causas do fraco rendimento dos alunos na resolução de problemas" (Lopes et al., 1990, p. 19). Um exemplo de uma conceção errónea diz respeito à ideia de que só existe um caminho que possibilita a resolução de um problema, descartando a ideia de que existem várias estratégias que podem ajudar a chegar à solução correta. Perante isto, o professor terá de ajudá-los a desmistificar essa ideia e a construir as estratégias possíveis.

Segundo vários autores (Boavida et al., 2008; O'Connell, 2007) as estratégias de resolução de problemas estão associadas a importantes capacidades cognitivas, sendo mesmo um dos primeiros aspetos a ser aprendido com o objetivo de conseguirem generalizar a outros problemas. O'Connell (2007) refere que muitas crianças com idades compreendidas entre os 5 e os 8 anos "consideram os problemas difíceis ou confusos por ainda não terem desenvolvido as competências de planear uma abordagem, organizar as ideias e simplificar os problemas" (p. 26). Para ajudá-los a ultrapassar estas dificuldades, é importante que sejam confrontados com estratégias diversificadas pois "o conhecimento de estratégias de resolução de problemas proporciona o desenvolvimento de ferramentas para simplificar os problemas" (*ibidem*).

As estratégias de resolução de problemas, sendo ferramentas que "se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas" (Boavida et al., 2008, p.23), devem ser usadas como forma de ajudar os alunos a perceberem e construirem o seu raciocínio. Além disso, quanto mais estratégias diversificadas forem trabalhadas com o aluno, mais facilmente este será capaz de passar da resolução de "uma situação fechada para outra mais aberta sem se sentir perdido" (*ibidem*).

Perante os aspetos anteriormente referidos e realçando o facto de os alunos conseguirem resolver efetivamente os problemas quando percebem os diferentes raciocínios que precisam de realizar, combinando o conhecimento e a compreensão dos conceitos matemáticos, considero pertinente aprofundar o meu conhecimento sobre as estratégias de resolução de problemas, fazendo estas, parte dos objetivos e questões deste trabalho.

1.2. Objetivos e questões

Atendendo às minhas motivações para o estudo e considerando a pertinência da resolução de problemas como temática do trabalho que desenvolvi, pretendi investigar as diferentes estratégias que os alunos utilizam para resolver problemas, bem como as dificuldades que estes manifestam quando os resolvem.

Assim, para a realização desta investigação, delineei o seguinte objetivo:

- Compreender o modo como os alunos do 2.º ano resolvem problemas, identificando as dificuldades que revelam;

Relacionadas com o objetivo, identifiquei as seguintes questões que me orientaram ao longo da investigação:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas?
- Que dificuldades manifestam os alunos na resolução de problemas?
- Quais as etapas de Pólya por que passam os alunos na resolução de problemas?

Na resolução de problemas é importante que cada criança passe por um conjunto de fases que "podem [ajudá-la] a atacar o problema ou a encaminhar no sentido de obter a solução, adquirindo, simultaneamente, destrezas úteis na resolução de outros problemas" (Boavida et al., 2008, p. 22). Por isso, embora estas estejam muitas vezes subentendidas no seu raciocínio, uma das minhas questões está associada às etapas delineadas por Pólya (Pólya, 2003) na resolução de problemas.

1.3. Organização geral do trabalho

Este relatório encontra-se organizado em seis capítulos. O primeiro corresponde ao presente capítulo onde apresento o tema de estudo, bem como a sua pertinência e as minhas motivações para a escolha. Além disso, identifico igualmente o objetivo principal da investigação e as questões orientadoras.

No segundo capítulo apresento a revisão da literatura, encontrando-se dividida em três partes. Começo por salientar a importância da resolução de problemas, referenciando perspetivas de vários autores, bem como das Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar. Seguidamente foco-me no tema da resolução de problemas na sala de aula, considerando essencialmente as três abordagens de ensino da resolução de problemas e o ensino exploratório da matemática. Na terceira parte caracterizo o termo problema, apresentando perspetivas de diversos autores, nomeadamente Kantowski (1977 in Lopes et al., 1990), Pólya (1981 in Fonseca, 1995) e

NCTM (1994), e baseio-me em Boavida et al. (2008) para caracterizar os tipos de problemas. Segue-se a apresentação das etapas de resolução de problemas segundo Pólya e das estratégias de resolução de problemas, tendo como referência Boavida et al. (2008), O'Connell (2007) e Vale et al. (2006).

No terceiro capítulo descrevo e justifico a metodologia adotada neste estudo. Desta forma, começo por fundamentar o porquê do estudo se inserir num paradigma interpretativo e de ter optado por uma abordagem de carácter qualitativo. Seguidamente caracterizo o contexto do estudo e da turma e os métodos de recolha de dados. Além disso justifico a seleção das produções de alguns alunos para serem analisadas. Por fim, termino com a descrição dos processos de recolha e análise de dados.

O quarto capítulo diz respeito à proposta pedagógica que propus desenvolver para a concretização deste projeto. Como tal, apresento os problemas explorados em contexto sala de aula, referindo os seus objetivos e como foram adaptados e enquadrados aos participantes. Explico ainda o modo como foram dinamizados, desde a sua introdução, à exploração e discussão em sala de aula.

No quinto capítulo procedo à análise dos dados recolhidos, centrando-me nas produções escritas dos alunos selecionados anteriormente e interligando-as com gravações áudio e vídeo, gravadas ao longo do processo de recolha de dados. A análise foca-se essencialmente nas estratégias utilizadas, nas dificuldades apresentadas e nas etapas de resolução de problemas consideradas pelos alunos para os resolver.

Por fim, no sexto capítulo apresento as conclusões do estudo. Neste sentido elaboro primeiramente uma síntese geral, onde volto a destacar alguns motivos que me levaram a enveredar por esta temática, os objetivos da investigação, as questões orientadoras e a metodologia adotada. Seguidamente apresento as conclusões, respondendo às questões orientadoras e interligando alguns aspetos evidenciados no capítulo do quadro teórico com a análise efetuada. Termino com uma reflexão sobre todo o processo de investigação, destacando algumas dificuldades e aprendizagens conseguidas.

Capítulo II

Quadro teórico

Neste capítulo apresento a revisão da literatura, com o objetivo de aprofundar os aspetos essenciais da temática de investigação. Inicio com um tópico relativo à importância da resolução de problemas ao nível da área da Matemática e do desenvolvimento de outras características importantes nos alunos e, seguidamente, apresento a resolução de problemas na aula de Matemática. Associadas a esta questão, apresento algumas definições de problema segundo diferentes autores, as etapas de resolução segundo Pólya e as estratégias gerais, que este propõe. Por último discuto a presença desta temática nas orientações curriculares, estabelecendo pontes entre os documentos curriculares de referência: Programa e Metas Curriculares de Matemática de 2007 e 2013 e Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar de 1994 e os Princípios e Normas para a Matemática Escolar de 2007.

2.1. A importância da resolução de problemas

A resolução de problemas é considerado um termo global que originou diferentes tentativas de definição por parte de diversos autores pois, tal como refere NCTM (1980) "A resolução de problemas é um termo abrangente que pode significar coisas diferentes para pessoas diferentes ao mesmo tempo e coisas diferentes para a mesma pessoa em momentos diferentes" (p. 3).

Mason (1992 in Fonseca, 1995) refere que a resolução de problemas "é a tentativa de resolver ou reformular questões não estruturadas para as quais nenhuma técnica específica ocorre prontamente" (p. 27), enquanto Lester (1992 in Fonseca, 1995) considera que esta é um "conjunto de acções levadas a cabo para desempenhar uma tarefa" (*ibidem*). Mayer (1985 in Fonseca, 1995) acrescenta ainda que esta é "a descoberta do caminho que leva de uma situação (inicial) a outra situação (final) e que envolve uma série de operações mentais" (*ibidem*).

Tendo em conta estas definições, é possível afirmar que a resolução de problemas diz respeito à ação, ou ações, que são executadas para conseguir chegar a uma solução coerente com a problemática inicial que é apresentada. Ao ser necessário passar por várias etapas, implica recorrer a capacidades básicas do pensamento que, segundo Lopes et al. (1990) são analisar, resumir, classificar, interpretar e avaliar. Desta forma, considera-se a resolução de problemas como "uma componente essencial de fazer Matemática [que] permite o contacto com ideias matemáticas significativas" (Boavida et al., 2008, p. 14).

Neste sentido, a resolução de problemas pode constituir-se como uma situação de aprendizagem, dadas as suas características. Além de desenvolver o raciocínio lógico do aluno, instiga-os "na busca de soluções de situações diversas, escolares ou não, [desenvolve] a habilidade de criar estratégias [e fomenta] a criatividade do aluno […]" (Marques, Oliveira, Santana, & Chagas, 2013, pp. 3221-3222). Segundo Duarte (2000) esta promove ainda "o desenvolvimento de determinados comportamentos e atitudes (autoconfiança), que apontam para níveis cognitivos elevados (compreensão, aplicação) e não apenas para o conhecimento de factos e técnicas" (p. 99).

Dada a sua importância, a resolução de problemas é denominada muitas vezes como um processo que permite aos alunos serem transportados para o meio envolvente, pois todos os dias nos deparamos com "situações complexas que é necessário interpretar e resolver" (Lopes et al., 1990, p. 7). Esta temática possibilita, igualmente, explorar os restantes conteúdos matemáticos anteriormente, ou não, explorados, visto que "os bons problemas proporcionam aos alunos a oportunidade de consolidar e ampliar os seus conhecimentos e […] podem estimular a aprendizagem da matemática" (NCTM, 2007, p. 57).

Desta forma, a resolução de problemas é importante para que os alunos aprendam, uma vez que se distancia do ensino centrado na aprendizagem de conteúdos, onde o importante é que os alunos "memorizem dados e efetuem cálculos de forma mecanizada" (O'Connell, 2007, p. 7), sendo privilegiado o "desenvolvimento de capacidades fundamentais à resolução de problemas" (Lopes et al., 1990, p. 7).

2.2. A resolução de problemas na aula de Matemática

Contrapondo com a conceção de que a Matemática se baseia em decorar fórmulas e aprender vários tipos de regras, a resolução de problemas transporta-nos para a ideia de que esta disciplina é uma ciência viva, em que os alunos têm oportunidade de entrar em contacto com diversas situações problemáticas da sociedade, com o objetivo de se prepararem para a vida futura, levando-nos a afirmar que a escola é "um centro transformador de práticas sociais e [prepara] o aluno para ser agente de tais transformações" (*ibidem*, p.3222).

Pólya (1967 in Guimarães, 2014) refere que "uma vez que o aluno deverá aprender não receptivamente mas pelo seu próprio esforço" (p. 47), devemos começar "onde o esforço é menor e o resultado do esforço mais compreensível do ponto de vista do aluno" (*ibidem*). Esta afirmação evidência a importância de proporcionar uma aprendizagem gradual à criança, que deve começar por tratar algo concreto e só posteriormente avançar para aprendizagens abstratas, tal como acontece com a resolução de problemas. Esta, ao apresentar-se como "a atividade matemática que mais se aproxima do fundamental do pensamento quotidiano" (*ibidem*), permite inicialmente uma contextualização dos problemas que os alunos terão de solucionar, sendo esta gradualmente abandonada.

Boavida et al. (2008) salientam ainda a importância de fomentar a resolução de problemas em sala de aula referindo que esta:

- "Proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação;
- Fomenta o raciocínio e a justificação;
- Permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares;
- Apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana." (p. 14)

Desta forma é incontestável a importância da resolução de problemas na aula de Matemática.

A questão: “como ensinar a resolver problemas?” surge, assim, no momento em que a resolução de problemas é considerada importante no ensino e no quotidiano dos alunos. Desta forma, compreendem-se três abordagens relativas à resolução de problemas, nomeadas no capítulo anterior: “ensinando acerca da resolução de problemas, ensinando para a resolução de problemas e ensinando através (via) da resolução de problemas” (Schroeder & Lester, 1989 in Veia, 1996, p. 19).

A primeira abordagem diz respeito à teorização acerca da resolução de problemas, ao salientar os procedimentos e estratégias de acordo com o modelo de Pólya. Desta forma, “pressupõe que os alunos recebem instrução sobre cada uma para a implementação de cada uma delas” (Veia, 1996, p. 19). O ensino para a resolução de problemas considera que o professor deve apresentar “a Matemática formal para depois oferecer aos alunos o problema, como aplicação da Matemática” (Costa & Allevato, 2013, p. 3275). Ou seja, é mais importante a “aquisição de técnicas e conhecimentos matemáticos que podem ser úteis na implementação de estratégias para a resolução de problemas” (Porfírio, 1993, p. 21). Desta forma, a atividade de resolução de problemas apenas será realizada após a introdução destes conceitos, ou “como forma de trabalhar uma técnica de cálculo ou algoritmo” (Veia, 1996, p. 19). Por fim, a terceira abordagem considera a resolução de problemas como meio de ensinar os restantes conteúdos. Ou seja, os problemas são usados “para mostrar como o conteúdo (tópico) se relaciona com o mundo real” (*ibidem*) e para introduzir e motivar a discussão do mesmo, possibilitando aos alunos “mobilizar os conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão ao seu alcance” (Costa & Allevato, 2013, p. 3275). Além disso, os problemas são valorizados como meio fundamental para aprender Matemática.

Se o objetivo é ensinar Matemática considerando que esta deve preparar os alunos para enfrentarem e resolverem os eventuais problemas da sociedade, significa que é necessário ter sempre presente a resolução de problemas na sala de aula. Esta, segundo O’Connell (2007), providencia aos alunos oportunidades para explorarem e perceberem os conceitos e processos que muitas vezes lhes são pedidos apenas para memorizar, sendo possível afirmar que é importante que “se proponha problemas para envolver os alunos na exploração e para promover o raciocínio sobre importantes conceitos matemáticos” (p. 8). Como tal, as três abordagens podem surgir interligadas na prática, apesar de, considerando o que foi dito anteriormente e a perspetiva de

Schroeder e Lester (1989 in Veia, 1996), o ensino da matemática através da resolução de problemas é aquele que se enquadra com a ideia de que a "principal razão do ensino da Matemática escolar é ajudar as crianças a compreenderem os conceitos matemáticos, técnicas e procedimentos" (Veia, 1996, p. 19).

Esta ideia remete-nos para a resolução de problemas como um processo, contrariando a ideia de que é um conteúdo ou unidade isolada, tal como os restantes conteúdos da Matemática. Isto acontece pois a resolução de problemas permite "englobar todas as cinco áreas de conteúdo" (NCTM, 2007, p. 57). Ou seja, através da resolução de problemas é possível abordar as áreas de conteúdo da Matemática apresentadas no programa, seja para iniciar a aprendizagem desse conteúdo, seja para consolidar o mesmo, permitindo a "construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido" (Gazire, 1988 in Marques et al., 2013, p. 3223).

Outro aspeto a ter em conta e que se relaciona com a resolução de problemas diz respeito ao gosto e interesse pela Matemática. Muitas vezes os alunos perdem o interesse e sentem-se pouco motivados devido ao facto de considerarem a Matemática "um assunto árido, de difícil compreensão" (Duarte, 2000, p. 97), o que pode ser contrariado se as aulas se tornarem mais interessantes e desafiadoras. Para isso, a resolução de problemas pode mesmo ser uma ajuda pois "possibilita envolvê-los em situações novas e diferentes, aguçam a criatividade e colaboram com o desenvolvimento de estratégias que possam ser aplicadas em diferentes situações" (Marques et al., 2013, p. 3223).

Perante as questões anteriormente referidas, é necessário salientar que "aquilo que se faz na sala de aula influencia as convicções dos alunos acerca da Matemática" (Duarte, 2000, p. 98). Desta forma, é essencial criar condições para que as crianças desenvolvam a capacidade para resolver problemas, tal como se pode ler nas Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática (1994), onde se evidencia que os problemas devem partir de situações partilhadas por eles, dando-lhes espaço para refletir sozinhos, para discutir e "partilhar os seus raciocínios com os colegas e os professores" (p. 29), não esquecendo que se deve "valorizar o processo de resolver problemas, tanto pelo menos quanto valorizam as soluções" (*ibidem*).

Considerando as características apresentadas, a abordagem do ensino exploratório da Matemática é aquela que se aproxima da prática de ensino que propícia uma melhor aprendizagem da Matemática e particularmente de capacidades matemáticas como a resolução de problemas. Esta é apresentada como sendo um ensino de "natureza interativa […] envolvendo professor e alunos" (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013, p. 31), distinguindo-se do ensino direto que está normalmente associado "a uma aula de Matemática tradicional [onde] o processo está muito centrado no professor, sendo a informação transmitida deste para os alunos" (*ibidem*).

O ensino exploratório foca-se numa atividade ensino-aprendizagem, onde os alunos têm a possibilidade "de trabalharem com tarefas matemáticas ricas e de poderem partilhar com os colegas e os professores as suas ideias" (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013, p. 31). Sendo um processo individual e coletivo, este privilegia as interações entre os alunos e o professor e entre alunos e o conhecimento matemático, tendo como base a exploração de situações que permitem construir o saber, sem que seja transmitido diretamente pelo professor, "pressupondo que aprender matemática é sobretudo fazer matemática" (NCTM, 2007 in Silva, 2014, p. 14). Neste sentido, o professor "não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005, p. 13).

Para esta abordagem, a escolha das tarefas é um aspeto importante pois esta "baseia-se na evidência de que os alunos aprendem a partir da resolução de tarefas desafiantes que fazem emergir, de forma significativa, as ideias, os conceitos e procedimentos matemáticos" (Silva, 2014, p. 14). Como tal, os problemas e investigações são exemplos de bases "de construção do conhecimento tanto para o aluno como para o professor" (Ponte, 2010, p. 21) por apresentarem características que ajudam os alunos a construir ou aprofundar ideias matemáticas, nomeadamente não dispor "de um método de resolução de tarefas" (Silva, 2014, p. 14) e necessitar de recorrer à interpretação e à adoção de estratégias para chegar à resposta.

Após a escolha das tarefas, importa também que o professor equacione "como explorar as suas potencialidades junto aos alunos e [se prepare] para lidar com a complexidade dessa exploração na sala de aula" (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012, p. 256).

2.3. Caracterização de problema, etapas e estratégias de resolução

2.3.1. Caracterização de problema

Quando se fala em resolução de problemas torna-se pertinente caracterizar o que se entende por problema, visto este ser muitas vezes confundido com exercício.

Assim, estamos perante um problema quando somos confrontados "com uma questão a que não [podemos] dar resposta ou com uma situação que não [sabemos] resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis" (Kantowski, 1977 in Lopes et al., 1990, p. 8). Pólya (1981 in Fonseca, 1995) acrescenta que resolver um problema "significa procurar conscientemente alguma acção apropriada para atingir um objectivo claramente definido, mas não imediatamente atingível" (p. 24). Relativamente às Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, estas referem que um problema verdadeiro é "uma situação em que, para o indivíduo (…) uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel" (NCTM, 1994, p. 11).

Analisando as definições suprarreferidas é viável depreender que um problema apenas pode ser designado como tal se não apresentar uma solução óbvia, não sendo possível utilizar processos conhecidos e estandardizados para o resolver. Como tal, é "necessário encontrar um caminho para chegar à solução e esta procura envolve a utilização do que se designa por estratégias" (Boavida et al., 2008, p. 15).

Perante o anteriormente supradito, é possível referir que um problema se distingue de um exercício quando um aluno "não tiver nenhum meio para encontrar uma solução num único passo" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 52), o que significa que se a criança conseguir obter a solução de imediato, muitas vezes utilizando apenas um algoritmo já aprendido, esta está perante um exercício. Porém, "Uma questão pode ser um exercício ou um problema para um certo aluno, dependendo dos seus conhecimentos prévios" (*ibidem*). Assim, quando o objetivo é propor a resolução de um problema, é necessário ter em atenção as características dos alunos e as suas aprendizagens anteriores.

A escolha de um problema a propor em sala de aula depende, igualmente, dos objetivos que estão subjacentes à sua realização. Segundo Boavida et al. (2008) e Vale et al. (2006), existem várias tipologias de problemas matemáticos. Contudo, considerando o contexto do presente trabalho, optei pela terminologia adotada por Boavida et al. (2008), nomeadamente: problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos.

Uma vez que é um aspeto importante para a posterior análise dos dados recolhidos para este trabalho, passo a caracterizar os problemas matemáticos, baseando-me essencialmente em Boavida et al (2008).

Problemas de cálculo

Os problemas de cálculo requerem o uso de uma, ou mais operações para chegar à solução. Neste tipo de problemas, os alunos leem o enunciado, "avaliam o que é conhecido e o que é pedido e, finalmente, efectuam uma ou mais operações que consideram apropriadas" (Boavida et al., 2008, p. 17).

Segundo Boavida et al. (2008) nos problemas de cálculo, é possível diferencia-se dois tipos de problemas: os problemas de um passo e os problemas de mais passos. Apesar de Charles e Lester (1986 in Vale et al., 2006) considerarem estes tipos de problemas como duas tipologias diferentes e não associadas ao termo "problemas de cálculo", ambos definem-nos da mesma forma.

Assim, os problemas de um passo são caracterizados por poderem ser resolvidos utilizando uma das quatro operações básicas de aritmética (Boavida et al., 2008 & Vale et al., 2006). Enquanto os problemas de mais passos podem ser resolvidos recorrendo a duas ou mais operações aritméticas para chegar à solução.

Para diferenciar estes dois tipos de problemas, apresento dois exemplos.

> O quintal da Sandra é quadrado com 5 metros de lado. Quantos metros de rede são necessários para vendar o quintal?
>
> (Boavida, et al., 2008, p. 17)

Figura 1 - Problema de cálculo de um passo "Vedar o quintal"

O Luís pintou três mesas na segunda-feira e quatro na terça. Na quarta à noite precisa de entregar uma dúzia. Quantas mesas precisa de pintar na quarta-feira?

(Boavida, et al., 2008, p. 17)

Figura 2 - Problema de cálculo de mais passos "Pintar mesas"

Através das figuras é possível perceber que o primeiro problema pode ser resolvido recorrendo a uma operação, nomeadamente a adição (5+5+5+5) ou a multiplicação (4x5). Relativamente ao segundo problema, é necessário utilizar mais do que uma operação, neste caso a primeira operação seria uma adição (3mesas+4mesas) e a segunda seria uma subtração entre o resultado obtido anteriormente e as 12 mesas que são necessárias (12-7).

Este tipo de problemas aparece principalmente nos manuais escolares e, segundo Boavida et al. (2008) tem um conjunto de potencialidades, designadamente proporcionar "aos alunos a oportunidade de aplicarem conceitos e destrezas previamente aprendidos e praticarem esta aplicação" (p. 18). Contudo, estes autores referem ainda que não se devem explorar apenas este tipo de problemas em sala de aula, uma vez que poderá levá-los "a leituras demasiado rápidas, a análises superficiais ou a respostas sem qualquer nexo" (*ibidem*).

Problemas de processo

Os problemas de processo são aqueles que "não utilizam processos mecanizados ou estandardizados" (Vale et al., 2006, p. 4), ou seja, não podem ser resolvidos apenas com a utilização das operações aritméticas. Neste sentido, para resolver um problema de processo, é necessário recorrer a "uma ou mais estratégias de resolução" (*ibidem*).

A Inês comprou um CD por 3 euros e vendeu-o ao Luís por 5 euros. Mais tarde comprou-o de volta ao Luís por 7 euros e tornou a vendê-lo por 9 euros. Será que a Inês ganhou ou perdeu com esta compra e venda?

(Boavida, et al., 2008, p. 19)

Figura 3 - Problema de processo "A compra e venda de CD's"

A figura 3 apresenta um problema de processo que não tem uma solução óbvia. Como tal, para o resolver, o aluno precisará "de ir para além dos aspectos enganadores nele implicados” (Boavida et al., 2008, p. 19) nomeadamente os processos de compra e venda do CD. Assim, é necessário compreender que se a Inês vendeu o CD por um valor mais elevado do que comprou, significa que ficou com lucro pois, além de pagar o custo inicial do CD, ainda fica com dinheiro (5-3=2, logo ganhou 2€). Depois, se voltou a comprá-lo por um valor mais elevado do que o vendeu anteriormente, a Inês perdeu dinheiro (7-5=2, logo perdeu 2€). Como volta a vendê-lo novamente e mais caro do que o comprou da última vez, volta a ficar com lucro (9-7=2, logo ganhou 2€).

Perante esta análise, é possível dizer que ela teve um lucro de 2€ visto que perdeu o lucro inicial de 2€ após ter comprado o CD por um valor mais caro que o anterior. Porém, segundo Boavida et al. (2008), esta não é a única solução possível pois, se analisarmos a situação problema considerando que a Inês tem uma quantia inicial no bolso, o lucro irá ser de 4€. Ou seja, se ela tivesse 10€, ao comprá-lo por 3€ ficaria apenas com 7€ (10-3=7); seguidamente, ao vendê-lo por 5, ficaria com 12€ (7+5=12); ao voltar a comprá-lo por 7, ficaria com 5€ (12-7=5); por fim, ao vendê-lo novamente por 9 ficaria com 14€ (5+9=14). Ao subtrairmos os 14€ finais pelos 10€ iniciais percebemos que esta ficou com mais 4€ do que tinha, logo, teve um lucro de 4€.

Segundo Boavida et al. (2008), estes problemas, ao estarem “embutidos em contextos mais complexos e [requererem] um maior esforço para compreender a Matemática necessária para chegar à solução” (p. 19), ajudam a desenvolver capacidades importantes, introduzem diferentes conceitos e podem ajudar a explorar “conhecimentos e procedimentos matemáticos anteriormente aprendidos” (*ibidem*).

Problemas abertos

Os problemas abertos são denominados, muitas vezes, por investigações (Boavida et al., 2008) por terem como característica principal a necessidade de percorrer mais do que um caminho para chegar à solução ou terem mais do que uma resposta correta. Para os resolverem “os alunos têm de fazer explorações para descobrir regularidades e formular conjecturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão” (*ibidem*, p. 20).

A Catarina vai pôr a secar guardanapos. Porque é uma rapariga organizada, pendura, todos os guardanapos, usando o mesmo processo. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 30 guardanapos.

(Boavida, et al., 2008, p. 21)

Figura 4 - Problema aberto "Mais guardanapos"

O problema "Mais guardanapos" na figura 4 permite várias abordagens, pois, os dados que são fornecidos podem levar os alunos a fazer diferentes interpretações. Apesar de ser pedido o número de molas que são necessárias para pendurar 30 guardanapos, é necessário considerar que existem várias maneiras de os pendurar e, dependendo da maneira adotada, podem ser utilizadas mais ou menos molas. Além disso, não são dadas informações sobre o formato do estendal e sobre o número de cordas que tem. Desta forma, podem surgir diferentes soluções corretas para a situação apresentada.

Através da análise do exemplo é necessário realçar que, neste tipo de problemas, a discussão final em grande grupo é bastante importante, uma vez que "poderá haver alunos que fazem uma exploração total da questão e outros que só descobrem algumas possibilidades" (Boavida et al., 2008, p. 22). Segundo Vecchi & Giordain (2002 in Soares, 2013) os problemas abertos servirão de pouco aos alunos:

> "Se o professor não lhes der a possibilidade de explicitarem os seus raciocínios, de descreverem os percursos que utilizaram para os resolver; se não lhes der oportunidades de os compararem para que possam tomar consciência de que não existe um único modo de os resolver, nem uma única solução; para os habituar a justificar as suas opções, a colocarem-se e a respeitarem outros pontos de vista; para descobrirem e se apropriarem de processos de resolução mais rápidos e mais económicos" (p. 2).

Neste sentido, é possível referir que as descobertas feitas pelos alunos devem ser valorizadas, incentivando-os a verbalizá-las em grande grupo.

2.3.2. Etapas de resolução de problemas segundo Pólya

O momento de resolução de problemas é considerado um "processo sequencial onde se estabelecem diversas fases" (Krulik & Rudnick, 1993, p. 3) que, de certa forma, ajudam a sistematizar e organizar o mesmo. Apesar de vários autores terem sugerido diferentes modelos de resolução de problemas, o primeiro que "serviu de base a todos os outros" (Lopes et al., 1990, p. 10) foi o de George Pólya.

Segundo Pólya (1973 in Fonseca, 1995) para resolver um problema é necessário "uma abordagem organizada, seguindo os procedimentos utilizados por bons resolvedores" (p. 27), uma vez que "A monitorização, pelo aluno, do seu processo de resolução de um problema é um dos aspectos essenciais das suas capacidades metacognitivas" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 53).

Assim, este autor definiu quatro fases para a resolução de problemas apresentadas do seguinte modo por Davis e Hersh (1995):

- "Primeiro: tem de *compreender* o problema;
- Segundo: encontre a relação entre os dados e o que quer saber. […] Eventualmente, deve obter um *plano* para a solução;
- Terceiro: *realize* o plano;
- Quarto: *examine* a solução obtida." (p. 269)

Por serem um dos aspetos-chave do trabalho que realizei, passo a caracterizar as fases de resolução de problemas, apoiando-me em Pólya e outros autores que se basearam nas suas propostas.

Compreender o problema

A primeira fase é considerada a mais importante na resolução de um problema dado que, para delinear um plano, realizá-lo e chegar a uma conclusão, é necessário compreender o que é pedido. Tal como refere George Pólya (2003) "É uma tolice responder a uma pergunta que não se tenha compreendido" (p. 28).

Num primeiro momento é necessário realizar uma leitura cuidada do enunciado com o objetivo de perceber "o que lhes é pedido para resolver" (O'Connell, 2007, p. 16), considerando as partes principais do problema. Para tal, os alunos poderão reescrever o que é pedido utilizando palavras deles, facilitando a sua interpretação ao longo da resolução do problema, visto existirem momentos em que é necessário voltar ao enunciado.

"Ouvir o que os outros pensam, irá reforçar a capacidade de identificar a questão" (O'Connell, 2007, p. 16) como tal, nesta fase, é importante que, após uma leitura individual, o professor e os alunos coloquem questões sobre o enunciado, partilhando as suas ideias e conhecimentos.

Escolher um plano

Nesta fase é necessário escolher como se vai proceder para encontrar a solução, tendo em conta a interpretação anteriormente realizada, pois, tal como refere O' Connell (2007), "Geralmente existe mais do que uma forma para resolver um problema" (p. 16). Com o objetivo de escolher a estratégia a utilizar, o aluno poderá procurar palavras-chave ou relacionar o problema com outro mais familiar.

Segundo Pólya (2003) "temos um plano quando conhecemos, pelo menos em linhas gerais, quais os cálculos ou as construções que temos de executar para obter a incógnita" (pp. 29-30) sendo que este caminho é muitas vezes moroso pois a "ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas aparentemente infrutíferas e um período de hesitação" (*ibidem*).

O problema pode ser resolvido utilizando diversas estratégias que o aluno vai construindo consoante a informação recolhida na etapa anterior e tendo em consideração o conhecimento matemático já adquirido. Sendo necessário perceber qual a estratégia que se adequa melhor a um problema, é importante que os alunos conheçam diversas estratégias pois estes tendem a ter a ideia errónea de que "há só uma maneira de resolver qualquer problema" (Duarte, 2000, p. 99). Assim, quantas mais estratégias o aluno conhecer e compreender, mais aberto estará para as situações problemáticas da sociedade, visto estas, por vezes, terem mais do que uma forma de ser resolvidas ou não terem solução.

Realizar o plano

Na terceira etapa os alunos têm oportunidade de realizar a estratégia delineada anteriormente, com o objetivo de chegar à solução pretendida. Porém, é importante perceber que esta pode não ser a mais correta e, como tal, é necessário que o aluno avalie cada passo do seu plano.

Este processo pode ser difícil para os alunos pois, ao errarem uma primeira vez, podem assumir a derrota, desistindo da resolução do problema. Contudo, devem perceber que o erro não significa que não saibam resolver o problema e podem por em prática as estratégias que acharem necessário para chegar à solução. Até porque “Reconhecer que uma estratégia não foi bem-sucedida e decidir sobre uma estratégia alternativa são competências importantes na construção de bons resolvedores de problemas (O'Connell, 2007, p. 17).

Examinar a solução

Após chegar a um resultado e à possível resposta, é necessário perceber se estes se adequam ao que é solicitado no problema, ou seja, é necessário que os alunos reflitam e se questionem a si próprios “Esta resposta faz sentido? Ou alguma coisa não está correta?” (O'Connell, 2007, p. 17).

A fase examinar a solução é caracterizada como a “verificação do resultado em função da situação inicial e do raciocínio” (Krulik & Rudnick, 1993, p. 4), sendo bastante importante para os alunos pois ao fazerem “uma revisão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que conduziu até este, poderão consolidar os seus conhecimentos e desenvolver a capacidade de resolver problemas” (Pólya, 2003, p. 36).

Apesar do cuidado e atenção na realização das fases anteriores, é sempre possível cometer erros, seja na escolha da estratégia ou, na sua execução. Por isso torna-se imprescindível que os alunos se habituem a verificar os passos dados ao longo da resolução do problema. Além disso, ao examinarem a solução, poderão começar de novo e perceber se existe outra estratégia que se adeque ao mesmo problema.

2.3.3. Estratégias gerais de resolução de problemas

As estratégias gerais de resolução de problemas podem ser igualmente denominadas como heurísticas (Pólya, 2003). Segundo este autor (2003) o objetivo da heurística é “o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção” (p. 133), tendo surgido seguidamente o termo heurística moderna que se encontra mais focado na resolução de problemas, dizendo respeito, nomeadamente, à compreensão “de resolução de problemas, em particular, as operações mentais tipicamente úteis nesse processo” (*ibidem*). Como tal, a expressão “estratégias gerais” aparece associada ao termo “heurística” visto terem por base o processo de raciocínio no momento da resolução de problemas.

Perante ambos os termos, para este trabalho apenas será utilizado "estratégias gerais", sendo baseado essencialmente nos autores Boavida et al. (2008), O'Connell (2007) e Vale et al. (2006).

Desta forma, as estratégias de resolução de problemas surgem da necessidade de ajudar os alunos "a atacar o problema ou a encaminhar no sentido de obter a solução" (Boavida et al., 2008, p.22), sendo caracterizadas como "ferramentas que (…) se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas" (*ibidem*, p. 23).

Apesar de estas serem construídas pelos alunos, visto derivarem dos seus processos de raciocínio, não significa que o professor não tenha um papel importante na construção das estratégias. "Os alunos precisam de ver alguém a pensar em voz alta diante deles, enquanto trabalha um problema desafiante" (Kilpatrick, 2014, p. 7) e, como tal, estas muitas vezes surgem a partir de pensamentos partilhados entre o aluno e o professor.

Vários autores (Boavida et al., 2008, O'Connell, 2007, Vale et al., 2006) sugerem um conjunto de possíveis estratégias de resolução de problemas que, na sua essência, são as mesmas embora se possam diferenciar no nome e/ou no número, visto que alguns autores apresentam mais estratégias que outros.

Boavida et al. (2008) apresentam seis estratégias gerais possíveis:

- "Fazer uma simulação/dramatização;
- Fazer tentativas;
- Reduzir a um problema mais simples;
- Descobrir um padrão;
- Fazer uma lista organizada;
- Trabalhar do fim para o início" (p. 23).

Vale et al. (2006) apresentam as mesmas estratégias que os autores anteriores, diferenciando em alguns nomes, nomeadamente "fazer uma simulação/experimentação/dramatização" (p. 7) e "fazer tentativas/fazer conjeturas" (*ibidem*). Contudo, estes não referem a estratégia "trabalhar do fim para o início" (Boavida et al., 2008, p.23) e acrescentam outras três estratégias que consideram importantes:

- “Fazer um esquema;
- Fazer uma tabela;
- Usar raciocínio lógico” (Vale et al., 2006, p. 9).

Relativamente a O’Connell (2007), as estratégias que refere destinam-se ao público-alvo entre o Ensino Pré-escolar e o 2º ano do Ensino Básico. Como tal, estas diferenciam-se das estratégias apresentadas anteriormente, nomeadamente através do nome dado à estratégia. Por exemplo a estratégia “fazer tentativas” é descrita como “adivinha, verifica e revê” (*ibidem*, p.88). Além disso, esta autora não faz referência às estratégias “fazer um esquema” e reduzir a um problema mais simples”, mas considera importante a estratégia “escolhe uma operação” (*ibidem*, p.35).

É necessário salientar ainda que, segundo Krulik e Rudnick (1993) , existem estratégias que podem agrupar-se, nomeadamente “fazer um esquema” com “fazer uma tabela” visto existirem problemas onde ambas se podem utilizar.

Considerando as estratégias supramencionadas, torna-se relevante explicar cada uma delas, ilustrando com exemplos. Apesar de cada estratégia ter um exemplo específico, é necessário referir que o mesmo problema pode ser resolvido recorrendo a mais do que uma estratégia.

Fazer uma simulação/experimentação/dramatização

Esta estratégia diz respeito à utilização de objetos, criação de um modelo ou a elaboração de uma dramatização que “traduza o problema a ser resolvido” (Vale et al., 2006, p. 7), ou seja, trata-se de uma, ou mais, representações da situação problemática da forma que o aluno considerar mais apropriada e o ajude a compreende-la melhor.

As representações são, muitas vezes, feitas através de desenhos pois, segundo O’Connell (2007) muitas crianças entre o pré-escolar e o 2º ano de escolaridade têm dificuldades em resolver os problemas no abstrato. Como tal, para simplificar, utilizam desenhos que os ajudam a transformar a situação problemática em algo compreensível aos seus olhos.

Segue-se um exemplo de um problema onde se poderia recorrer a esta estratégia.

> A Sílvia fez anos e convidou as suas três melhores amigas, Lena, Raquel e Mafalda, para lanchar. Quando chegaram cumprimentaram-se todas umas às outras com um abraço. Quantos abraços foram dados?
>
> (Vale, et al., 2006, p. 7)

Figura 5 - Problema para explorar a estratégia "Fazer uma simulação/experimentação/dramatização"

Considerando o problema e a estratégia apresentada, é possível que o aluno simule os abraços que foram dados, desenhando as personagens da situação problema, podendo representar os abraços de diversas formas: ligando as personagens ou agrupando as mesmas como se tivessem a dar o abraço. Neste momento, os alunos poderão desenhar as personagens utilizando símbolos pois é importante que percebam que a mesma coisa pode ser representada de diferentes formas.

Fazer tentativas/Fazer conjeturas

Os alunos são, muitas vezes, confrontados com problemas que não sabem por onde começar para os resolver. Desta forma, ao invés de ficarem confusos e desistirem, esta estratégia "incentiva-os a experimentar e tentar resolver, fazendo tentativas" (O'Connell, 2007, p. 89).

Por outras palavras, nesta estratégia as crianças têm de "adivinhar a solução para o problema" (Vale et al., 2006, p. 5), experimentar para verificar se se adequa e rever. Existem situações em que a primeira tentativa não é a mais correta e por isso o aluno deverá experimentar outra, até chegar à resposta.

Além de permitir que a criança tente uma resposta e a coloque em prática, esta estratégia desafia-as igualmente a "usar a sua compreensão sobre os números e operações para ajustar a resposta até que esteja correta" (O'Connell, 2007, p. 88).

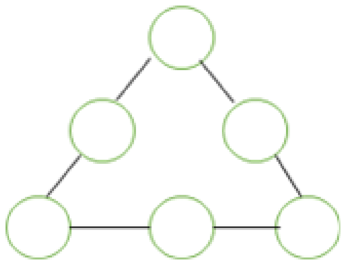
Considerando os aspetos acima referidos, são apresentados exemplos de dois problemas onde seria possível recorrer a esta estratégia.

Numa quinta existem ovelhas e galinhas. Ao todo, a Inês conseguiu contar 7 cabeças e 20 patas. Quantas são as galinhas e quantas são as ovelhas?

(Adaptado de A Grande Aventura Matemática 2º ano – Caderno de Atividades, p.12)

Figura 6 - Problema para explorar a estratégia "Fazer tentativas/fazer conjeturas"

Este triângulo com círculos é um triângulo mágico. Basta que se disponham os números de 1 a 6 nos círculos, para que cada lado some 9. Onde deverá ficar cada um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6?



(Krulik & Rudnick, 1993, p. 6)

Figura 7 - Problema para explorar a estratégia "Fazer tentativas/fazer conjeturas"

Ao observar ambos os problemas, é possível perceber que, tendo em conta os primeiros anos de escolaridade aos quais se destinam, não é possível chegar a uma resposta imediata. Desta forma, será mais simples se o aluno pensar numa resposta e tentar aplicá-la, ou seja, verificar se este faz sentido perante os dados que o problema nos apresenta e a pergunta que é colocada. Essa primeira tentativa permitirá que o aluno perceba se está próximo ou não da solução e o que deve fazer para conseguir alcançá-la.

No caso do exemplo apresentado nas figuras 2 e 3, é necessário salientar que este momento é importante pois além de compreender o problema, o aluno terá de perceber as características do sistema de numeração e, em alguns dos casos, das operações básicas.

Reduzir a um problema mais simples

Esta estratégia, tal como é denominada, passa por transformar o problema num mais simples visto que “Formulando um problema mais simples, é possível resolver o problema mais facilmente e entender melhor o problema a resolver” (Krulik & Rudnick, 1993, p. 7).

Por exemplo, muitas vezes, os enunciados apresentam valores numéricos que são difíceis de trabalhar porque são elevados ou porque o aluno não se sente confortável com os mesmos. Como tal este pode utilizar valores mais pequenos e, após perceber a lógica do problema, pode aumentar até chegar ao valor apresentado inicialmente. Este momento permitirá ao aluno eliminar “uma dificuldade suplementar e [libertar] a atenção [para a] compreensão do problema” (Lopes et al., 1990, p. 15).

Ao reduzir a um problema mais simples, também é possível que o aluno utilize conhecimentos adquiridos através de problemas semelhantes explorados anteriormente pois, tal como referem Lopes et al. (1990) “O tipo de solução obtida, o método utilizado ou, ainda, a experiência vivida podem ser de grande utilidade para enfrentar o «novo» problema” (p. 15).

Desta forma, apresenta-se um problema que se poderia explorar recorrendo a esta estratégia, não significando que outras estratégias não pudessem ser usadas.

> Num número de ginástica as oito participantes devem ficar unidas duas a duas com fitas coloridas. Quantas fitas são necessárias para realizar o número?
>
> (Boavida, et al., 2008, p. 24)

Figura 8 - Problema para explorar a estratégia "Reduzir a um problema mais simples"

Apesar de os valores apresentados no problema não serem difíceis de trabalhar para alguns anos de escolaridade, poderão ser mais complexos para outros. Como tal, este pode ser iniciado supondo que há menos participantes, por exemplo duas ou quatro, determinando as fitas de cada caso. Seguidamente, o aluno pode ir aumentando até chegar ao número de participantes do problema.

Descobrir um padrão

A exploração de padrões começa desde cedo, através de cores, sons, símbolos ou números, sendo um aspeto central no nosso sistema de numeração. No momento em que as crianças compreendem que os padrões são conseguidos através de repetições de uma certa forma, “são rapazes de continuar o padrão, prevendo o que vem a seguir” (O'Connell, 2007, p. 47). Esta competência de perceber, identificar e continuar um padrão poderá ajudar os alunos a resolver diversos problemas matemáticos.

Desta forma, esta estratégia diz respeito a "generalizações de soluções específicas" (Vale et al., 2006, p. 5) onde, seguindo os passos do problema, o aluno descobre o padrão e vai aumentando, até compreender como generalizar o mesmo. Tendo em consideração estes aspetos, apresenta-se um problema onde se poderia recorrer a esta estratégia.

> A Susana estava a construir um colar com bolas coloridas. Ela colocou uma bola vermelha no fio, depois uma bola azul, seguidamente uma amarela, outra vermelha, outra azul e outra amarela. Qual será a cor da próxima bola que ela vai colocar?
> E se a Susana colocar 15 bolas no seu colar, quantas bolas terá de cada uma das cores?
>
> (Adaptado de O'Connell, 2007, p. 52)

Figura 9 - Problema para explorar a estratégia "Descobrir um padrão"

No momento em que os alunos descobrirem como o é formado o padrão, estes conseguirão determinar o elemento seguinte e os restantes, permitindo continuar o mesmo e encontrar a solução pois, tal como refere O'Connell (2007) "Reconhecer qual é o padrão e como o continuar, é uma informação importante para resolver o problema" (p. 52).

Quando é pedido mais do que o padrão, por exemplo, no caso do problema, quantas bolas terá de cada cor, o aluno necessitará também de compreender algumas operações ou representar as suas ideias visualmente.

Fazer uma lista organizada

Segundo O'Connell (2007) os alunos que são capazes de selecionar os dados e organizá-los de forma sistematizada, "estão mais aptos para controlar a informação e determinar todas as possibilidades" (p. 69). Como tal, esta poderá ser uma estratégia a considerar na resolução de problemas.

Quando a criança se encontra perante uma situação em que é necessário determinar possíveis combinações para a resolver, a estratégia mais indicada é a de fazer uma lista organizada. Esta permite "representar, organizar e guardar informação" (Vale et al., 2006, p. 8), ao mesmo tempo que ajuda o aluno a chegar à resposta e é caracterizada, segundo O'Connell (2007), por duas ideias-chave:

- Listar as ideias num papel ou na memória, de forma a relembra-las;
- Organizar da forma mais confortável de forma a não esquecer nenhum dado.

Considerando estes aspetos, apresenta-se um problema onde se poderia recorrer a esta estratégia.

A Cristina queria preparar o lanche para a escola. Para comer tinha bolachas ou maçãs. Para beber podia escolher sumo de laranja, leite ou água. Se a Cristina pudesse escolher uma coisa para comer e outra para beber, quantos lanches diferentes ela conseguia preparar?

(Adaptado de O'Connell, 2007, p. 71)

Figura 10 - Problema para explorar a estratégia "Fazer uma lista organizada"

No problema apresentado, o aluno necessita de ter em consideração a informação relevante nomeadamente o que é pedido, neste caso quantos lanches diferentes se consegue preparar; quais os dados, designadamente a existência de bolachas ou maçãs para comer e sumo de laranja, leite e água para beber; e as suas restrições que são, neste caso, só poder escolher uma coisa para beber e outra para comer.

No momento em que este proceda às combinações possíveis, é importante que atenda a todas as possibilidades de forma "exaustiva" de forma a não se esquecer de nenhum elemento e considerando as restrições. É necessário salientar que a lista pode ser feita com palavras e também com símbolos para os alunos mais novos ou com mais dificuldades em organizar-se escrevendo todas as palavras.

Fazer uma tabela

Como a estratégia anterior, fazer uma tabela também pressupõe uma capacidade de organização por parte da criança. Porém, apesar de a tabela também permitir encontrar possíveis combinações, a sua utilização pressupõe uma forma de ver claramente os dados, de reconhecer padrões e relações entre a informação, ao mesmo tempo que se poderá perceber se existem dados em falta e quais são.

Desta forma, é possível referir que quando os alunos estão perante um problema onde têm de elaborar uma tabela, estes são "desafiados" a colocar a informação relevante de forma organizada. Além disso, mais do que reconhecer a informação, é necessário perceber quando se deve fazer a tabela.

Segue-se um exemplo de um problema onde se poderia recorrer a esta estratégia.

Para fazer um bolo é preciso dois ovos. Para fazer dois bolos preciso de quatro ovos. Quantos ovos preciso para fazer quatro bolos? E seis? E se quiser fazer oito bolos?

(Adaptado de O'Connell, 2007, p. 59)

Figura 11 - Problema para explorar a estratégia "Fazer uma tabela"

Ao observar o problema, o primeiro aspeto importante é perceber as relações entre os dados apresentados nomeadamente qual é a relação entre os ovos e os bolos e entre a quantidade de ovos utilizada e os bolos que é possível fazer. Essas relações ajudam o aluno a perceber se é necessário construir uma tabela e como deve dispor os dados.

A partir da tabela, existem outras relações que passam a ser visíveis, neste caso o aumento do número de ovos de um bolo para o outro. Esta vai ajudar os alunos a perceberem quantos ovos precisam para fazer três, quatro bolos e assim sucessivamente, chegando à solução do problema.

Trabalhar do fim para o princípio

Esta estratégia apresenta-se associada a problemas onde se conhece a situação final e quer-se conhecer a inicial. Por outras palavras, quando trabalhamos do fim para o início estamos a inverter o raciocínio apresentado no enunciado do problema.

Como tal, esta estratégia pode trabalhar-se de diferentes formas, consoante os graus de ensino e de acordo com os diferentes graus de dificuldade. Nos primeiros anos, é importante que as crianças percebam que a situação pretende que estas desfaçam aquilo que já foi feito e neste caso têm de perceber como devem reverter os passos do problema para chegar à solução. Em níveis mais avançados, trabalhar do fim para o princípio leva os alunos a pensarem de forma mais abstrata, invertendo as operações, por exemplo, se a situação apresentar adições, este deve perceber que a operação inversa será a subtração e é com a mesma que poderá encontrar a solução.

Considerando os aspetos mencionados, segue-se um exemplo de um possível problema onde a estratégia a utilizar seria a de trabalhar do fim para o princípio.

Um autocarro partiu da estação com alguns passageiros. Na primeira paragem entraram dois passageiros; na segunda saíram cinco e na terceira entrou um, tendo chegado ao destino doze passageiros. Quantos passageiros iniciaram a viagem?

(Boavida, et al., 2008, p. 24)

Figura 12 - Problema para explorar a estratégia "Trabalhar do fim para o princípio"

No problema apresentado, é necessário considerar todos os aspetos, ou seja, sabemos que o autocarro partiu com passageiros da sua estação e foram entrando e saindo alguns até chegar ao final com o número apresentado, neste caso, doze passageiros. Se temos o último valor exato e sabemos o que foi acontecendo para o obtermos, o mais fácil será inverter a situação, começando do fim para saber o início.

Ao "descobrirmos a sequência correcta na ordem inversa" (Pólya, 2003, p. 230) vamos chegar ao primeiro valor que, por sua vez, é a resposta ao problema. Porém é importante voltar a realizar o problema utilizando o valor obtido e trabalhando do início para o final com o objetivo de perceber se é possível chegar ao número de passageiros que o enunciado apresenta. Se isso acontecer, significa que o resultado corresponde à solução do problema.

Usar raciocínio lógico

O raciocínio lógico "é um aspeto fundamental no processo de saber e fazer matemática" (O'Connell, 2007, p. 96), o que, segundo esta mesma autora, nos permite afirmar que a maioria das estratégias dependem do mesmo.

Na maioria das situações, é difícil separar o raciocínio lógico das restantes estratégias, porém existem problemas onde se utiliza o raciocínio lógico como a principal estratégia. Em qualquer um dos casos esta é sempre importante para o sucesso dos alunos na resolução de problemas. Nesta, os alunos precisam de analisar pistas ou pedaços da informação presentes no problema para o conseguirem resolver e poderão necessitar de recorrer a outras formas de organizar a informação disponibilizada.

Apresento um problema que poderia ser explorado por alunos entre os 5 e os 8 anos recorrendo, maioritariamente, a esta estratégia.

O Daniel alimentou os seus cavalos com seis maçãs, três peras e quatro cenouras. Quantas peças de fruta deu aos cavalos?

(Adaptado de O'Connell, 2007, p. 100)

Figura 13 - Problema para explorar a estratégia "Usar raciocínio lógico"

Ao observar este problema é possível perceber que existe informação que não é relevante perante o que é pedido. Como tal, mais do que saber utilizar uma das quatro operações aritméticas, o aluno deve ser capaz de compreender o que é pedido e identificar a informação necessária à sua resolução.

Muitas vezes os alunos apenas leem os enunciados e respondem sem analisarem corretamente os dados e refletirem sobre o que é pedido, resultando em respostas que não fazem sentido tendo em conta o que é apresentado. Porém, tendo em conta a faixa etária entre os 5 e os 8 anos, é necessário considerar, igualmente, "os conhecimentos dos alunos perante a situação que queremos apresentar e as suas capacidades de tirar conclusões" (O'Connell, 2007, p. 100). Assim, no caso do problema apresentado, se é pedido o número de peças de fruta que foram dadas ao cavalo, é fundamental que a criança saiba quais dos três alimentos apresentados correspondem a frutas.

Escolher uma operação

Considerando as crianças entre os 5 e os 8 anos, a estratégia mais usada é precisamente a escolha de uma das quatro operações, tal como refere O'Connell (2007) "Determinar qual a operação mais adequada para resolver um problema é a estratégia mais frequentemente utilizada na resolução de problemas" (p. 35). Porém, esta é tão importante como as restantes e requer que as crianças compreendam totalmente as quatro operações pois não basta apenas saber aplicá-las.

Quando se escolhe realizar uma operação, seja de subtração, adição, multiplicação ou divisão, é necessário saber porque se optou por essa ao invés das restantes. Compreender as operações matemáticas não passa apenas por saber aplicá-las na prática mas também perceber em que situação é indicado aplicar cada uma. Desta forma, apenas se pode considerar um "bom resolvedor de problemas" (O'Connell, 2007, p. 36) se conseguir reconhecer quando adiciona, subtrai, multiplica ou divide.

Apesar de esta se apresentar como uma boa estratégia para esta autora, é importante salientar que existem outros autores que não têm a mesma opinião pois quando um enunciado é apresentado como um problema, a sua solução não pode ser conseguida através de "processos conhecidos e rotineiros" (Vale et al., 2006, p. 3), que acontece quando o cálculo (algoritmos) associado às operações se torna mecânico e rotineiro. Para estes (Boavida et al., 2008, Lopes et al., 1990, Vale et al., 2006) quando estamos perante uma situação "que pode ser resolvida utilizando processos para nós conhecidos, repetitivos ou mecanizados, que conduzem directamente à solução" (Boavida et al., 2008, p. 15) não estamos perante um problema mas um exercício. Ainda assim, a classificação de O'Connell parece estar relacionada com a faixa etária das crianças.

Seguidamente apresenta-se um exemplo onde o aluno poderá recorrer a esta estratégia, não esquecendo que para O'Connell trata-se de um problema, sendo uma das razões a faixa etária a que se destina. Porém para outros autores mencionados (Boavida et al., 2008, Lopes et al., 1990, Vale et al., 2006) e considerando níveis etários mais avançados, este apenas se trata de um exercício.

Se a Cátia tiver 14 cromos e o Miguel tiver 10, quantos cromos a mais tem a Cátia?

(Adaptado de O'Connell, 2007, p. 37)

Figura 14 - Problema para explorar a estratégia "Escolher uma operação"

No exemplo apresentado é possível perceber que para chegar à solução o aluno pode realizar uma operação de adição, não significando que este não pudesse utilizar outras estratégias, nomeadamente fazendo uma simulação e usando cromos ou pequenos cubos.

2.4. Dificuldades na resolução de problemas

Na área da Matemática, a temática na qual os alunos apresentam mais dificuldades é a resolução de problemas (Almeida, 2006; Pereira, 2008). Para esta dificuldade contribuem aspetos relacionados com a sintaxe, ou seja, a nível da interpretação e compreensão dos enunciados; o contexto do problema; o conteúdo e o comportamento heurístico, ou seja, as estratégias de resolução (Leitão, 2000/2002).

Segundo Costa e Fonseca (2009), o desempenho dos alunos na resolução de problemas, não depende apenas das competências a nível matemático mas "essencialmente das competências manifestadas na Língua Portuguesa" (p. 7). Neste sentido, as dificuldades ao nível do Português repercutem-se na resolução de problemas, principalmente ao nível da compreensão e interpretação de enunciados e justificação e explicação dos raciocínios efetuados, seja oral ou escrita. Ou seja, manifestam-se numa primeira etapa e após a resolução do problema.

Ao nível da justificação do raciocínio usando a expressão oral e escrita, salienta-se que esta "exige um esforço de organização de ideias" (Boavida et al., 2008, p. 68), uma vez que o aluno precisa de refletir sobre o que fez e sobre o resultado obtido. Como tal, as dificuldades a este nível podem surgir associadas ao fraco domínio do Português, nomeadamente no que se refere ao vocabulário, e ainda relacionadas com a exigência do ato de refletir.

Também durante o momento de concretização podem surgir dificuldades, tal como refere O'Connell (2007), "As simples estratégias de resolução de problemas não são, na verdade, simples, mas representam raciocínios importantes" (p. 27). Neste sentido, num estudo realizado por Costa e Fonseca (2009), algumas dificuldades manifestadas pelos alunos dizem respeito à "selecção da estratégia de resolução do problema [e à] inter-relação entre os raciocínios" (p. 9).

Reportando-se às crianças dos níveis entre o Pré-escolar e o 2.º ano do Ensino Básico, O'Connell (2007) identifica a estratégia "trabalhar do fim para o princípio" como uma das estratégias mais complexas, uma vez que "durante o processo de trabalhar do fim para o princípio, os alunos necessitam de reverter os processos matemáticos, ao mesmo tempo que aplicam conhecimentos matemáticos" (*ibidem*, p. 108).

Além dos aspetos mencionados, podem ser verificadas dificuldades ao nível dos conteúdos matemáticos implícitos no problema. Estas estão muitas vezes relacionadas com a capacidade para usar conhecimentos adquiridos associados a cada ano de escolaridade. Contudo, alguns estudos (Garafalo & Lester, 1985; Schoenfeld, 1987 in NCTM, 2007) mostram que, geralmente, o insucesso dos alunos nesta temática "não se deve à falta de conhecimentos matemáticos, mas antes à deficiente utilização dos mesmos" (p. 60).

Por fim, é necessário salientar que as dificuldades que surgem no momento de resolução de problemas podem também estar relacionadas com a motivação, pois é importante que o aluno tenha vontade de resolver o problema (Pólya, 2003), com as características do aluno e a sua predisposição para resolver problemas. O'Connell refere que "enquanto alguns alunos veem os problemas como algo simples, outros consideram-nos dificeis, não conseguindo encontrar uma forma de os resolver" (2007, p. 26).

2.5. Resolução de problemas nas orientações curriculares

A visão sobre a resolução de problemas nas orientações curriculares tem-se modificado ao longo dos anos devido às exigências provocadas pelas alterações da sociedade e pelas mudanças de políticas educativas. Estas originaram novos problemas a resolver que se caracterizam por ser mais exigentes, onde, além do conhecimento do conteúdo matemático, "outros conhecimentos e capacidades precisam de ser desenvolvidas" (Fonseca, 2014, p. 19).

As Normas para o currículo e a avaliação e matemática escolar em 1994 apresentam, na primeira norma, "A matemática como resolução de problemas" (p. 29), salientando que esta deve ser "o foco central do currículo de Matemática [,] um objectivo prioritário no ensino [da mesma] e uma parte integral" de toda a sua atividade. (*ibidem*), dissipando a ideia de que esta se trata apenas de um conteúdo. Para o NCTM (1994) "Quando a resolução de problemas se torna parte integral da educação matemática e as crianças experimentam o sucesso em actividades deste tipo, adquirem confiança em fazer matemática e desenvolvem a perseverança e o espírito investigativo" (pp. 29-30). Desta forma, é necessário que os alunos comecem desde cedo a contactar com situações desafiadoras "que melhorem não só a sua capacidade de resolução de problemas, mas também a sua autoconfiança" (Fonseca, 2014, p. 19).

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2007) é outro documento onde se preconiza que "a resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática" (p. 57). Sendo que esta deve ser introduzida desde os primeiros anos de escolaridade, o documento acrescenta que a resolução de problemas deve incluir uma variedade de contextos, não apenas situações da rotina das crianças mas também "situações matemáticas que possam surgir numa história" (*ibidem*, p. 134).

Além disso, é salientado que os problemas são um meio para os alunos adquirirem "modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática" (*ibidem*, p. 57).

Na mesma linha de orientação, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) de 2007 realça a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática como capacidades que devem ser transversais na aprendizagem da Matemática, ou seja, "devem ser objeto de atenção sistemática durante o ensino de qualquer tópico matemático seja qual for o ano de escolaridade considerado" (Boavida & Menezes, 2012, p. 287). Além de se apresentar como um dos objetivos gerais do documento, ainda é possível ler-se que esta constitui uma importante orientação metodológica para estruturar as atividades a realizar em aula. Isto é, as situações trabalhadas devem permitir que os alunos "possam resolver problemas, analisar e reflectir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas" (ME, 2007, p. 9), dando ênfase a que a resolução de problemas deve ser uma parte integral desta disciplina.

Neste programa de 2007 é possível verificar que no âmbito da resolução de problemas, os seus autores consideram importante a discussão, apresentação de estratégias e a discussão de soluções, sendo explicitados os seguintes objetivos:

- "Compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
- Apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam;
- Monitorizar o seu trabalho e reflectir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;
- Formular problemas" (ME, 2007, p. 5).

Atendendo aos objetivos referidos, é visível a importância que é dada às capacidades anteriormente referidas nomeadamente a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, considerando-as "ao mesmo nível dos temas matemáticos" (Boavida & Menezes, 2012, p. 287), o que significa que são tão importantes como os restantes conteúdos apresentados no programa.

No ano de 2013 surgiu um novo programa de Matemática, substituindo o de 2007, que, ao explicitar orientações diferentes e sustentar uma "conceção diferente sobre o papel do professor e do aluno" (Fonseca, 2014, p. 19), veio alterar algumas das ideias anteriormente mencionadas.

Este novo programa propõe que os problemas seja resolvidos de acordo com um conjunto de passos, sendo solicitado que o "número de passos necessários à resolução de problemas vá aumentando de ano para ano" (ME, 2013, p. 5). Além disso, um dos objetivos presentes neste documento refere que "na resolução de problemas aplicam-se regras e procedimentos previamente estudados e treinados" (Fonseca, 2014, p. 20), ou seja, nesta perspetiva, os problemas são apenas utilizados para aplicar o que foi anteriormente ensinado, sejam conteúdos, sejam regras.

A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais (ME, 2013, p. 5).

A perspetiva veiculada pelo novo programa, tal como é apresentada, de acordo com Jeremy Kilpatrick (2014), restringe a resolução de problemas a uma "receita específica, sugerindo que os alunos precisam simplesmente de praticar, seguindo regras e procedimentos previamente aprendidos, e que, assim, ficarão preparados para resolver qualquer problema de matemática que encontrem" (p. 6).

Ainda assim, o Programa atual refere que a resolução de problemas e a compreensão matemática podem contribuir para o desenvolvimento do gosto pela Matemática. Além disso, salienta igualmente a importância de não se confundir a resolução de problemas "com atividades vagas de exploração e de descoberta" (ME, 2013, p. 5), mostrando que esta deve estar sempre presente nas aulas de Matemática, juntamente com outros conteúdos e possivelmente com outras disciplinas.

Considerando os aspetos anteriormente referidos relativamente ao PMEB de 2013, é possível verificar que este contraria em alguns aspetos os documentos dos anos anteriores, nomeadamente o programa anterior referente ao ano de 2007.

O aspeto que mais se destaca diz respeito à tipologia de problema que, para o PMEB de 2013, parece estar associado à resolução através de um ou dois passos e que, em todos os anos de escolaridade, estes estão ligados apenas a conteúdos, não dando ênfase às estratégias e à discussão das mesmas. Contrariamente a esta ideia, os

Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2007) salientam que os verdadeiros problemas não têm um número limitado de passos para a sua resolução e, além disso, têm significado para as crianças quando partem de situações partilhadas por eles. Contudo, isto não significa que os problemas propostos pelo professor não devam merecer destaque.

Em suma, é possível verificar as diferenças entre ambos os programas no que diz respeito ao processo de resolução de problemas e às estratégias utilizadas: enquanto o PMEB de 2007 dá mais importância às estratégias e à discussão como partilha de ideias para gerar novos conhecimentos, o novo programa dá atenção às etapas para resolver um problema e aos problemas de conteúdo. Para alguns autores (Fonseca, 2014), estas diferenças criaram, no ensino da Matemática, "obstáculos ao desenvolvimento da capacidade de raciocinar do aluno" (p. 21), deixando algumas dúvidas sobre o mesmo, nomeadamente se "o período que agora vivemos é um retrocesso no ensino da matemática" (*ibidem*).

Apesar disso, a resolução de problemas continua a ocupar um lugar importante na educação em Portugal e cabe ao professor saber valorizá-la em sala de aula, considerando sempre que os alunos "precisam de se adaptar, aprender, arriscar novas tentativas e estar sempre prontos a aprender com os erros" isto porque "o mundo profissional atual procura pessoas que consigam resolver problemas não rotineiros, simples ou complexos" (Alvega, 2014, p. 11).

Capítulo III

Metodologia

No presente capítulo descrevo e justifico as opções metodológicas adotadas nesta investigação, o contexto e os participantes, bem como as técnicas de recolha de dados. Por fim, descrevo igualmente os processos de recolha e análise de dados.

3.1. Opções metodológicas

Considerando as questões orientadoras para a realização desde trabalho e o objetivo principal, optei por uma abordagem de carácter qualitativo, estando esta subjacente ao paradigma interpretativo.

O paradigma, sendo "um conjunto de crenças que orientam a acção" (Aires, 2011, p. 18) do investigador, funcionam como justificação para as metodologias escolhidas, uma vez que a base para o trabalho da investigação é a teoria. Segundo Coutinho (2011) existem atualmente três paradigmas investigativos em Ciências Sociais e Humanas entre os quais destaco o paradigma no qual o meu estudo se insere: Paradigma Interpretativo ou Qualitativo.

Este paradigma é caracterizado "pela preocupação em compreender o mundo social a partir da experiência subjetiva" (Afonso, 2005, p. 34) procurando "penetrar no mundo pessoal dos sujeitos para saber como interpretam as diversas situações e que significado tem para eles" (Latorre et al., 1996 in Coutinho, 2011, p.16). Ou seja o investigador atua diretamente no contexto com o objetivo de compreender uma problemática que observou.

Tendo em conta esta definição, é possível concluir que o meu estudo se insere neste paradigma pois após ter identificado uma problemática relativamente à resolução de problemas, procurei perceber como e porque acontece, e como intervir para solucioná-lo. Desta forma, o meu interesse focou-se mais no processo do que nos resultados propriamente ditos, ao mesmo tempo que os alunos assumiram também o papel principal pois, tal como refere Usher (1996 in Coutinho, 2011) "tanto o sujeito como o objecto da investigação têm a característica comum de serem, ao mesmo tempo, «intérpretes» e «construtores de sentidos» " (p. 17).

No que diz respeito à metodologia de investigação, esta é fundamentada no paradigma, pois este apresenta as ideias e crenças que justificam a metodologia. Como tal, considerando o paradigma acima referido, optei por seguir uma abordagem de carácter qualitativo. Esta centra-se "em contextos singulares e nas perspectivas dos actores individuais" (Afonso, 2005, p. 14), preocupando-se em recolher informação "fiável e sistemática sobre aspectos específicos da realidade social [,] usando procedimentos empíricos com o intuito de gerar e inter-relacionar conceitos que permitam interpretar essa realidade" (*ibidem*).

Considerando Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa "exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permite estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo" (p. 49), sendo assim considerado um processo de observação em que se descreve e analisa situações concretas, centrando o interesse dos investigadores na compreensão das perceções individuais do mundo (Bell, 1997).

A abordagem qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994), apresenta cinco características importantes, sendo estas: (i) "a fonte directa de dados é o ambiente natural constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47), ou seja, o investigador está inserido no contexto recolhendo os dados diretamente através de gravações ou notas de campo; (ii) a investigação qualitativa é descritiva, uma vez que, "os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números" (*ibidem*, p. 48); (iii) "os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (*ibidem*, p. 49); (vi) os investigadores "tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (*ibidem*), ou seja, não são recolhidos dados com o objetivo de confirmar ou refutar hipóteses já existentes mas "as abstracções são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando" (*ibidem*, p. 50); (v) e "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (*ibidem*).

Perante as características apresentadas, importa interligar a presente investigação com a vertente teórica. Para a investigação, o essencial é compreender como os alunos resolvem problemas, considerando mais do que um método de recolha de dados de forma interativa, sendo realizada diretamente no contexto. Este objetivo relaciona-se com o objetivo da abordagem qualitativa, uma vez que este passa por "compreender e encontrar significados através de narrativas verbais e de observações em vez de através de números" (Bento, 2012, p. 40).

Além disso, é possível salientar que esta investigação tem um carácter interpretativo e descritivo, tal como a abordagem qualitativa, visto o significado e o processo serem mais importantes do que os resultados.

Assim, atentando a questões práticas do trabalho quotidiano como ponto de partida (Afonso, 2005), eu, enquanto investigadora, procurei interpretar dados, descrever os participantes, analisar e retirar conclusões (Bento, 2012), tornei-me "o principal instrumento de recolha de dados" (*ibidem*, p. 42) e, essencialmente, refleti sobre o meu papel na investigação.

3.2. Contexto e participantes

O projeto de investigação foi desenvolvido em contexto de estágio, durante onze semanas, numa escola básica do 1.º ciclo, sediada numa freguesia próxima de um grande centro urbano.

3.2.1. Caracterização do contexto

A escola na qual estagiei pertence a um agrupamento de escolas localizado numa freguesia inserida nos arredores de um grande centro urbano. Caracterizada pelo seu grande desenvolvimento demográfico, económico e social, esta é constituída por uma população pertencente a diferentes etnias (africana, cigana, brasileira e de Europa de Leste) e cujo nível socioeconómico é baixo, com algumas bolsas significativas de pobreza. Neste sentido, o seu perfil socioprofissional incide em profissões do setor produtivo e do setor terciário e, a nível da escolaridade, o número de indivíduos com a escolaridade a nível do secundário fica abaixo do dos indivíduos com escolaridade básica. Além disso, uma vez que o grande número de residentes pertence a diferentes países, por exemplo Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa, significa que existe um confronto com diferentes línguas maternas, por exemplo, o crioulo.

Com o crescente aumento da população e dadas as suas características, no ano letivo 1985/86 surgiu a primeira escola do atual agrupamento. No entanto, este apenas foi definido anos mais tarde, no ano letivo 2003/04, integrando um total de cinco escolas. No ano letivo 2006/07 juntou-se a última escola ao agrupamento, tendo sido realizado o meu estágio na mesma.

Esta escola abrange os ensinos de educação pré-escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico, formando um grupo de aproximadamente 230 crianças no ano letivo 2013/2014[1]. As suas instalações foram melhoradas entre os anos de 2009 e 2010, adequando o espaço ao número de crianças, pessoal docente e pessoal não docente. Além das salas de aula e jardim-de-infância, esta contém um ginásio, refeitório, biblioteca, recreio e uma sala de unidade de multideficiência que não se encontra acessível atualmente.

3.2.2. Caracterização da turma

A turma na qual estagiei e desenvolvi este trabalho pertence ao 2º ano de escolaridade, sendo constituída por vinte alunos, dos quais dez são raparigas e dez são rapazes, todos com oito anos de idade.

Tal como foi referido na caracterização do contexto relativamente à população da freguesia localizada nos arredores de um grande centro urbano, o grupo é constituído maioritariamente por crianças de nível socioeconómico baixo, sendo uma de etnia cigana, uma proveniente de França que se encontra na turma desde Fevereiro do ano letivo anterior e outra criança com Necessidades Educativas Especiais (NEE) que recebe acompanhamento por parte de uma professora de educação especial. Além dos alunos acima referidos, existem três que recebem acompanhamento por parte de um

[1] Informação retirada do Projeto Educativo 2014/2017.

professor que pertence ao projeto Fénix. Este projeto foi criado no Agrupamento Campo Aberto, Beiriz e diz respeito à criação de turmas Fénix, também denominadas por Ninho, "nos quais são temporariamente integrados os alunos que necessitam de um maior apoio para conseguir recuperar aprendizagens, permitindo um ensino mais individualizado, com respeito por diferentes ritmos de aprendizagem" (ME, s.d.).

Atendendo às observações realizadas e às conversas formais e informais com a professora cooperante, é possível referir que a turma é bastante interessada e curiosa, aceitando rapidamente os desafios que são propostos. Porém, existem alunos que têm pouca autoestima e confiança em si mesmos, o que se reflete no trabalho pois desistem à primeira dificuldade que encontram. Isto deve-se, essencialmente à falta de apoio efetivo e afetivo por parte da família na realização de trabalhos e "talvez o mais importante, um envolvimento que valorize a escola e o estudo como factor decisivo de desenvolvimento" (Projecto Educativo TEIP/2 Nun'Álvares, 2009, p. 5).

É importante salientar que o grupo tem diferentes ritmos de trabalho e de aprendizagem, tal como é possível perceber pelo trabalho mais individualizado que é feito com alguns alunos. Porém o interesse e a curiosidade é uma característica coletiva, como tal, é possível realizar um conjunto de atividades e explorações diferentes.

3.2.2. Participantes

Para a realização do presente estudo, apesar de a maioria dos alunos da turma ter participado nos momentos de resolução de problemas que propus, selecionei as produções de quatro para analisar aprofundadamente.

Para esta seleção, tive em consideração que todos os alunos analisados fossem bons informantes, que apresentassem diferentes ritmos de aprendizagem e trabalho, que participassem nos momentos de apresentação do problema e discussão do mesmo, permitindo-me compreender e justificar as suas produções, e que apresentassem uma diversidade de estratégias entre eles, para o mesmo problema, e entre os problemas realizados por cada um. Assim, de acordo com estes critérios, foram selecionados a Marta, o Daniel, a Letícia e o Tomás.

Marta

Marta é uma criança bastante interessada, alegre, extrovertida e bastante expressiva no que diz respeito aos seus sentimentos. Gosta imenso de aprender, querendo ser a primeira a terminar as tarefas propostas e a mostrá-las à professora. Quando não consegue realizá-las com sucesso, mostra descontentamento e questiona sempre onde errou.

De acordo com informações prestadas pela professora titular de turma e com a minha observação, Marta não revela dificuldades de aprendizagem e aparenta estudar bastante em casa. Apesar de ser uma aluna distraída, é bastante participativa e gosta de ajudar os colegas sempre que necessário. Além disso, não gosta de estar parada e assim que termina uma tarefa, solicita sempre à professora uma outra para fazer.

Daniel

Daniel é um aluno que não evidencia, de forma explícita, interesse pela escola e pelas atividades escolares, apesar de estar sempre pronto a realizá-las e a partilhá-las com os colegas de mesa. Desconcentra-se com facilidade, mas empenha-se quando é necessário e tem notas razoáveis.

De acordo com as informações da professora titular e com as minhas observações, o aluno é bastante inseguro, querendo explicar o seu raciocínio à professora, antes de realizar as tarefas. Especialmente na disciplina de matemática, Daniel gosta de resolver as tarefas, sabe resolver mas tem medo de errar, apesar de saber explicar o seu raciocínio quando é pedido. A nível pessoal é uma criança muito meiga e pede sempre atenção e carinho aos adultos presentes na sala.

Letícia

Letícia é uma criança calma e bastante introvertida, participando oralmente, de forma pertinente, quando solicitada, ou não, pela professora. É bastante interessada, responsável e concentrada, empenhando-se em todas as tarefas propostas.

De acordo com informações prestadas pela professora titular da turma e com a minha observação, Letícia não revela dificuldades de aprendizagem e aparenta estudar bastante em casa. É exigente consigo mesma e destaca-se pelas suas excelentes notas e pelo seu ótimo aproveitamento.

Tomás

Tomás é uma criança bastante afectuosa, está sempre alegre e pronto a ajudar os colegas. Gosta de aprender e mostra-se interessado e curioso sobre os temas abordados dentro e fora da sala de aula. Participa, de forma espontânea, para responder a questões colocadas, para dar sugestões ou para tirar dúvidas.

De acordo com as informações da professora titular de turma e com as minhas observações, o aluno é inseguro e distraído quando realiza as tarefas sozinho mas, quando apresenta o seu raciocínio oralmente, fá-lo de forma correta. As principais dificuldades apresentadas dizem respeito à escrita, dando vários erros ortográficos, possivelmente relacionados com o modo como fala. Ainda assim, gosta de apresentar e defender as suas ideias.

3.2.3. Técnicas de recolha de dados

Uma investigação, para ser concretizada, pressupõe que sejam recolhidos dados tendo em conta a metodologia optada para o respetivo estudo. Como tal, é "necessário pensar nas formas de recolher a informação que a própria investigação vai proporcionando" (Coutinho et al., 2009, p. 373). A essas formas de recolher a informação dá-se o nome de técnicas de recolha de dados.

Neste sentido, torna-se indispensável identificar e justificar as técnicas de recolha de dados que contribuíram para a realização do presente estudo.

3.2.3.1. Observação participante

A observação é um dos instrumentos de recolha de dados mais usados no campo da investigação, seja quantitativa ou qualitativa, por conseguir captar "os comportamentos no momento em que eles se produzem e em si mesmos, sem mediação de um documento ou de um testemunho" (Quivy & Campenhoudt, 1995, p. 196). Por outras palavras, ao observarmos, estamos a lidar diretamente com a informação, não existindo condicionantes geradas por opiniões ou pontos de vista.

Esta técnica permite, muitas vezes, "revelar características de grupos ou indivíduos impossíveis de descobrir por outros meios" (Bell, 1997, p. 140). Porém é necessário refletir sobre a ação para que a análise não seja influenciada por opiniões pessoais visto que, segundo Bell (1997), existe a preocupação de que "cada observador terá o seu foco particular de atenção e interpretará os acontecimentos significativos à sua maneira" (p. 141).

A observação tem diferentes modalidades concretas de entre as quais se salienta a observação participante. Esta variante da observação é do tipo etnológico, consistindo "em estudar uma comunidade durante um longo período, participando na vida colectiva" (Quivy & Campenhoudt, 1995, p. 197). Lacey (1976 in Bell, 1997) definiu-a como "a transferência do indivíduo total para uma experiência imaginativa e emocional na qual o investigador aprendeu a viver e a compreender o novo mundo" (p. 141). Ou seja, o investigador insere-se no interior do grupo observado, tornando-se parte dele.

Como ponto de partida para esta investigação, enveredei por esta variante da observação que, complementada com registos áudio e vídeo, me permitiu recolher a maioria dos dados para a sua concretização. A utilização destes recursos ajuda o investigador pois há momentos em que estamos a intervir e não é possível registar situações ou comentários importantes. Além disso, e tal como refere Bell (1997), estes irão tornar a análise mais rápida e mais fácil.

Outra forma de registo diz respeito aos registos escritos, nomeadamente as notas de campo. Estas são caracterizadas como "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150), ou seja, após ou durante a observação, há momentos sobre os quais o investigador necessita escrever, juntamente com ideias, estratégias, reflexões e palpites que o ajudarão na posterior análise.

Segundo os autores supramencionados, "nos estudos de observação participante todos os dados são considerados notas de campo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150), desde transcrições de entrevistas, notas de campo, documentos oficiais, entre outros materiais. Desta forma, considerando o anteriormente mencionado, além de complementar a observação com registos áudio e vídeo, também foram elaboradas notas de campo.

Neste sentido, o estudo foi realizado na primeira pessoa, o que possibilitou a observação direta do contexto, das interações das crianças entre elas e com a ação e a minha interação com os atores tentando "perturbá-los o menos possível" (Quivy & Campenhoudt, 1995, p. 197). As observações principais prenderam-se essencialmente com os momentos em que os alunos faziam a interpretação do problema individual e oralmente, quando tentavam resolvê-lo e quando apresentavam as estratégias à turma.

É necessário salientar que, tendo em conta que realizei observação participante, intervim apenas como apoio e como moderadora em todo o trabalho realizado pelos alunos, com o objetivo de estes serem os atores principais em toda a investigação.

3.2.3.2. Recolha documental

A recolha documental é caracterizada como um complemento à "informação obtida por outros métodos" (Bell, 1997, p. 90), consistindo na recolha de informação através de "uma pesquisa e leitura de documentos escritos que se constituem como uma boa fonte de informação" (Coutinho et al., 2009, p. 373).

Afonso (2005) refere que esta técnica de recolha de dados consiste "na utilização de informação existente em documentos anteriormente elaborados, com o objectivo de obter dados relevantes para responder às questões de investigação" (p. 88). Como tal, o investigador limita-se a consultar informação já organizada, não precisando de a recolher.

Na recolha documental, os documentos a analisar podem ser de natureza oficial, pública ou privada. Os documentos oficiais dizem respeito a documentos dos arquivos de departamentos da administração pública, nomeadamente o Ministério da Educação, dos arquivos das organizações escolares ou educativas e publicações oficiais do Estado, das escolas e centros de formação. No caso dos documentos públicos, são habitualmente relevantes notícias, artigos, cartas ao diretor e publicidade. Por fim, a documentação privada inclui "os arquivos de empresas, escolas particulares, […] movimentos pedagógicos, etc." (Afonso, 2005, p. 90).

É necessário salientar que além destes, há que ter em conta outros documentos, nomeadamente objetos, registos audiovisuais e produções artísticas que, segundo Afonso (2005), "numa perspetiva não interferente, estes materiais permitem recolher informação relevante" (p. 91).

Além desta caracterização, os documentos podem dividir-se em fontes primárias, que dizem respeito àquelas "que surgem durante o período de investigação" (Bell, 1997, p. 91), por exemplo as atas de reuniões do conselho diretivo da escola ou as produções dos alunos; e fontes secundárias que "são interpretações dos acontecimentos [do período de investigação] baseadas nas fontes primárias" (*ibidem*), por exemplo "a história da escola comprovada pelas actas do conselho directivo" (*ibidem*).

Desta forma, para completar os dados recolhidos através da observação participante, recolhi as produções dos alunos surgidas no período de investigação, nomeadamente gravações áudio e vídeo, os problemas resolvidos pelos alunos e o cartaz elaborado pelos mesmos; e documentos caracterizados como secundários, sendo estes relacionados com a área da Matemática, por forma a completarem e ajudarem na interpretação das observações realizadas e no complemento do trabalho prático.

3.3. Processo de recolha de dados

A recolha de dados para a realização do presente trabalhos decorreu ao longo de cinco semanas, no período de estágio, sendo necessário regressar ao local de estágio, após este ter terminado, para um último momento de observação e recolha de dados.

Durante a primeira semana de estágio destinada apenas a observação, e algumas semanas de prática, tentei compreender a relação dos alunos com a Matemática, visto ser a disciplina pela qual queria enveredar para a realização do projeto. Nesse momento, percebi que estes resolviam poucos problemas em sala de aula e quando o faziam, apresentavam algumas dificuldades. Para compreender melhor estas observações, conversei com a professora cooperante e propus desafiar os alunos com alguns problemas que foram realizados a pares.

Após compreender que a turma apresentava diversas estratégias, apesar de ter algumas dificuldades em estruturar a resolução de um problema, considerei importante perceber o modo como estes resolvem problemas, caracterizando as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas. Como tal, delineei, juntamente com a professora cooperante e a minha colega de estágio, um dia em cada semana para apresentar e explorar um problema com a turma, visto o estágio decorrer apenas durante três dias por semana.

Neste sentido foram selecionados seis problemas onde estavam subjacentes as diferentes estratégias, sendo que a sua seleção tinha por base as dificuldades e a evolução que os alunos demonstravam a cada problema que era proposto. Para que isso fosse possível, procedia à análise documental, neste caso, dos problemas resolvidos pelos alunos, tendo também como horizonte o Programa de Matemática.

Cada momento de resolução de problemas era gravado através de áudio ou vídeo, nomeadamente a discussão inicial do problema após a sua leitura individual e a apresentação de estratégias por parte dos alunos, escrevendo-as no quadro e explicando-as oralmente. Quando necessário, eram realizadas conversas individuais com alguns alunos no momento da resolução do problema ou após a mesma, sendo estas igualmente gravadas ou apenas efetuadas notas de campo.

Por fim, as observações realizadas foram transcritas para notas de campo, complementando as gravações feitas.

3.4. Processo de análise de dados

Após a recolha de material empírico conseguida ao longo da investigação, torna-se necessário proceder à sua organização e análise para que seja possível retirar conclusões e chegar a novos conhecimentos pois, tal como refere Bell (1997), “uma centena de pedaços soltos de informação interessante não terá qualquer significado para o investigador ou para um leitor se não tiverem sido organizados” (p. 160).

Neste sentido, procedi à análise dos dados recolhidos, na qual diz respeito a análise do trabalho em sala de aula e a análise das produções dos alunos, tendo por base dados de natureza qualitativa: notas de campo, registos de áudio e vídeo e os problemas que os alunos resolveram. Um primeiro momento de análise decorreu ao longo da investigação uma vez que os problemas apresentados em cada semana eram fruto dos resultados das semanas anteriores e de uma reflexão sobre o momento de exploração dos mesmos. Como tal, o objetivo era adequar os problemas às aprendizagens dos alunos e melhorar a minha prática.

Um segundo momento de análise inicia-se após a recolha de dados, com o objetivo de organizar, interpretar, refletir e atribuir significado às produções dos alunos. Desta forma, esta teve início com o visionamento das gravações, com a leitura das notas de campo e das resoluções dos alunos, confrontando os mesmos com a revisão da literatura. A revisão da literatura permitiu compreender se os problemas se adequavam ao ano de escolaridade do grupo onde decorreu a investigação e ajudou na análise e interpretação dos resultados obtidos.

Uma vez que estamos perante dados de natureza qualitativa, a análise realizada caracteriza-se como análise de conteúdo. Esta "é uma técnica que consiste em avaliar de forma sistemática um corpo de texto" (Coutinho, 2011, p. 193) com o objetivo de encontrar elementos chave para a sua interpretação. Como tal, para conseguir responder às questões de investigação e construir o significado associado ao conhecimento dos alunos sobre a resolução de problemas, a análise resulta em textos e diferentes quadros síntese.

É ainda necessário salientar que as conclusões decorrentes da análise realizada dizem respeito especificamente a um contexto, nomeadamente aquele onde foi realizado o estudo. O que significa que esses resultados são válidos neste contexto e "permitem compreender ou explicar apenas o que acontece nesse lugar e naquele tempo." (Máximo-Esteves, 2008, p. 104). Porém, estes são considerados importantes e úteis pois "aumentam o conhecimento e a compreensão do professor acerca do seu contexto de trabalho" (*ibidem*).

Capítulo IV

Proposta Pedagógica

No presente capítulo apresento os problemas propostos às crianças, no contexto da sala de aula, referindo os objetivos subjacentes a cada um deles, e o modo como foram adaptados e enquadrados ao público-alvo. A apresentação dos problemas respeita a ordem cronológica pela qual foram realizados, considerando o objetivo principal desta investigação. Por fim, descrevo o modo como foram preparados, explorados e discutidos na sala de aula.

4.1. Problemas propostos

Considerando a temática do presente estudo, foram propostos e explorados seis problemas em sala de aula, num período de seis aulas, cada uma com uma duração de cerca de uma hora e meia. Os problemas realizados tiveram como base a temática a ser trabalhada na respetiva semana, bem como o Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2013). Como tal, alguns problemas foram construídos por mim e outros foram retirados ou adaptados de alguns documentos, nomeadamente:

- "Matemática no 1º. Ciclo – Propostas para a sala de aula", de Vale et al. (2006);

- "A experiência Matemática no Ensino Básico", de Boavida et al. (2008);

- "Introduction to Problem Solving: Grades PreK-2", de O'Connell (2007);

- “A Grande Aventura Matemática 2º. Ano”, de Landeiro e Gonçalves (2011).

A tabela seguinte apresenta a lista dos problemas e a ordem pela qual foram explorados e a respetiva data de exploração.

Tabela 1 - Identificação dos problemas e das datas de realização

N.º do problema	**Nome do problema**	**Data de realização**
1	O problema do Tomé	18 – novembro – 2014
2	O problema da senhora redondinha	25 – novembro – 2014
3	Os biscoitos de Natal	1 – dezembro – 2014
4	Os abraços	9 – dezembro – 2014
5	As sandes dos Reis Magos	5 – janeiro – 2015
6	O lanche da Andreia	5 – fevereiro – 2015

A realização dos problemas, no total das seis aulas, dividiu-se em três partes. Primeiramente foi proposto um problema diagnóstico (O problema do Tomé) para compreender o grau de dificuldade dos alunos relativamente a esta temática e para discutir as etapas de resolução de problemas, com o objetivo de tentarem organizar o seu pensamento no momento de exploração do problema. Num segundo momento foram propostos quatro problemas onde estavam subjacentes diversas estratégias de resolução de problemas, permitindo que os alunos fossem confrontados com as mesmas. E, por fim, o último problema (O lanche da Andreia), correspondente ao sexto problema proposto, não tinha nenhuma estratégia subjacente pois o seu objetivo era verificar qual a estratégia que os alunos iam recorrer e perceber se estes compreenderam os contextos onde estas podem ser usadas para os ajudar a resolver o problema.

Cada um dos problemas propostos será apresentado seguidamente, a fim de clarificar os seus objetivos e identificar o tema em que este foi inserido, uma vez que em cada semana todas as tarefas propostas estavam interligadas por um tema. Refiro, ainda, possíveis estratégias que os alunos poderiam utilizar na sua resolução.

É necessário salientar que todos os problemas têm subjacentes alguns objetivos comuns, nomeadamente o desenvolvimento de capacidades transversais tais como: comunicação, resolução de problemas e raciocínio. No que respeita ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, um dos objetivos foi também dar a conhecer as estratégias gerais de resolução de problemas (heurísticas).

Problema 1 – "O problema do Tomé"

Durante a primeira semana de estágio, as observações realizadas permitiram-me perceber que enquanto alguns alunos resolviam problemas através de diversas estratégias, outros apresentavam alguma dificuldade em resolvê-los por admitirem, *a priori*, que tinham de utilizar uma das quatro operações aritméticas. Além disso, tinham a característica comum de não conseguirem explicar oralmente as suas resoluções, levando-me a querer ajudá-los a desenvolver essa competência, uma vez que se pretendia que partilhassem as suas estratégias de resolução com os restantes colegas.

Nesse sentido, considerei o primeiro problema como um "problema diagnóstico" com o objetivo de perceber o nível de dificuldade dos problemas a serem propostos, bem como ajudar os alunos a identificar as etapas de resolução de problemas propostas por Pólya.

O problema, cuja realização decorreu a 18 de novembro de 2014, é caracterizado como um problema fechado onde se encontra toda a informação que é necessária para resolvê-lo. Uma vez que durante a semana, o tema predominante foi a higiene oral, o contexto do problema fazia referência a utensílios para manter uma boa higiene oral.

O Tomé queria comprar uma escova de dentes com pasta dentária que custava 37€.

Tem andado a guardar no seu mealheiro o dinheiro que o pai lhe dá quando se porta bem. Reparou que já tem 18€.

Quanto dinheiro lhe falta para poder comprar a escova de dentes e a pasta dentária?

Figura 15 - O problema do Tomé

Para a resolução deste problema, é possível serem utilizadas diferentes estratégias, nomeadamente fazer uma simulação/experimentação onde o aluno poderia representar a situação através de um desenho ou símbolos; fazer tentativas, ou seja, experimentando diferentes valores que pudessem corresponder à solução; ou escolher uma operação aritmética. Apesar de esta última não ser considerada, para alguns autores, uma estratégia, o aluno poderia usar a adição para resolver o problema, uma vez que o seu contexto apela à subtração no sentido completar, ou seja, a pensar qual o valor que é preciso juntar ao 18 para obter 37. Outra estratégia será usar a subtração 37-18, sendo esta mais difícil de concretizar, considerando os números envolvidos.

Uma das finalidades da resolução deste primeiro problema foi identificar, em conjunto com os alunos, as etapas de resolução propostas por Pólya. Estas servem como base para os problemas que foram propostos seguidamente pois, os alunos devem considerar todas as etapas no momento de resolução, para conseguirem chegar ao resultado. Como tal, além de resolver o problema, foi proposta a construção de um cartaz com a identificação das etapas a considerar quando se resolve um problema.

Problema 2 – "O problema da senhora redondinha"

O segundo problema, explorado no dia 25 de novembro de 2014, apresenta-se como o primeiro da sequência de problemas onde o objetivo é a construção de diferentes estratégias de resolução de problemas, através da partilha e discussão em grande grupo.

Após uma conversa informal com a professora cooperante, percebi que os alunos, até esse momento, não tinham tido oportunidade para resolver problemas onde estaria subjacente a estratégia de "trabalhar do fim para o princípio". Como tal, o problema proposto tinha como objetivo trabalhar esta estratégia mas de forma indutiva, ou seja, deixar que os alunos a construísse e a usasse sem que ela tivesse sido ensinada previamente.

O "problema da senhora redondinha" foi proposto numa semana onde o tema a trabalhar era a alimentação e, por isso, a personagem que os alunos iriam conhecer seria a senhora redondinha, nome dado à roda dos alimentos. Assim, esta tornou-se a figura principal do problema adaptado Boavida et al. (2008).

O autocarro onde ia a senhora redondinha partiu da estação com alguns passageiros. Na primeira paragem entraram dois passageiros; na segunda saíram cinco passageiros e na terceira entrou apenas um, tendo chegado ao destino com doze passageiros.

Quantos passageiros iniciaram a viagem?

Figura 16 - O problema da senhora Redondinha

Para resolver este problema, prevê-se que os alunos possam utilizar outras estratégias além da estratégia que se encontra subjacente. Tendo em conta que a situação apresentada pode ser similar ao quotidiano dos alunos, estes podem representá-la, utilizando desenhos ou símbolos. Além disso, podem também fazer tentativas, experimentado possíveis valores para o número de passageiros que iniciaram a viagem e verificarem se depois de todas as paragens, os passageiros que chegaram ao destino são os mesmos que o problema apresenta.

Problema 3 – "Os biscoitos de Natal"

Uma vez que a escolha dos problemas dependia do trabalho que ia sendo realizado na sala de aula no âmbito desta temática, o terceiro problema surgiu da necessidade de ajudar os alunos a compreenderem situações onde a estratégia "trabalhar do fim para o princípio" melhor se adequa.

Desta forma o problema "os biscoitos de Natal", realizado a 1 de dezembro de 2014, tinha subjacente a estratégia "trabalhar do fim para o princípio", já explorada no problema anterior. Este pretendia, assim, esclarecer possíveis dúvidas que tivessem permanecido desde o problema anterior e identificar outras possíveis estratégias que os alunos pudessem construir.

O tema do problema está relacionado com o Natal uma vez que nos encontrávamos na época das festividades natalícias. Além disso, visto que tinha sido abordada anteriormente a receita como tipo de texto, é feita referência a algo que as crianças gostam muito de confecionar com os pais, nesta altura: biscoitos.

Com a proximidade do Natal, a Jéssica preparou alguns biscoitos para oferecer aos seus amigos da turma B. Quando chegou deu 8 às suas amigas e no intervalo deu 6 a alguns rapazes da turma do primeiro ano. Quando chegou a casa tinha 6 biscoitos.

Quantos biscoitos tinha a Jéssica levado para a escola?

Figura 17 - Problema "Os biscoitos de Natal"

Apesar de já terem tido contacto com a estratégia "trabalhar do fim para o princípio", não significa que os alunos não poderão escolher outra para resolverem o problema. Como tal, prevê-se que estes possam resolver o problema recorrendo a representações, sejam desenhos, símbolos ou esquemas, podendo também fazer tentativas sobre o número de biscoitos inicial que, tal como no problema anterior, poderá levar o aluno a chegar à quantidade de biscoitos com que a Jéssica ficou depois de dar alguns aos amigos.

Problema 4 – "Os abraços"

O quarto problema foi proposto, igualmente, na época natalícia, levando a que o Natal permanecesse como o tema subjacente. Porém, este sugere uma outra estratégia de resolução de problemas, nomeadamente "fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização".

Tal como nos restantes problemas, o objetivo é compreender a estratégia de resolução de problemas que mais se enquadra à situação apresentada. Contudo, é necessário considerar que os alunos já usaram anteriormente esta mesma estratégia, sem saber que é denominada como tal e que tem uma designação.

O Pai Natal resolveu fazer uma festa em sua casa para comemorar a chegada do Natal. Convidou três amigos, a rena Rodolfo, o duende Miguel e o coelho Vasco. Quando chegaram cumprimentaram-se todos uns aos outros com um abraço.

Quantos abraços foram dados?

Figura 18 - Problema "Os abraços"

Para resolver este problema, além da estratégia referida anteriormente, que será a que mais se adequa ao mesmo, o aluno pode usar outra estratégia. Por exemplo, prevê-se que possam utilizar um esquema ou uma lista organizada, referindo quais os abraços que são dados; ou possam fazer tentativas.

Problema 5 – "As sandes dos Reis Magos"

O quinto problema é o último da sequência cujo objetivo é conhecer e compreender uma estratégia que pode ser utilizada para resolver certos tipos de problemas. Dado o tempo limitado de duração do estágio, foi necessário escolher um conjunto de estratégias que alguns alunos não conhecessem e/ou estratégias que já utilizassem noutros problemas.

Desta forma, o problema “As sandes dos Reis Magos”, realizado no dia 5 de janeiro de 2015, teve como objetivo a exploração das estratégias “fazer uma lista organizada” e “fazer uma tabela”. Apesar de estas aparecerem separadas, existem problemas em que ambas podem ser usadas, tal como este.

Os Reis Magos vão preparar a sua viagem para festejar as Janeiras com o 2ºB e pensaram em preparar sandes pois podem ter fome pelo caminho. Assim têm dois tipos de pão: pão de trigo e pão integral e têm três ingredientes: queijo, fiambre e manteiga.

Quantas sandes diferentes podem os Reis Magos fazer com apenas um ingrediente em cada uma?

Figura 19 - Problema "As sandes dos Reis Magos"

O tema do presente problema relaciona-se com o Ano novo e com o dia de Reis e, por isso, os Reis Magos são as personagens principais.

Para a sua resolução, prevê-se essencialmente que os alunos utilizem a estratégia “fazer uma simulação/experimentação” além das estratégias acima mencionadas. Isto porque é possível representar as sandes que se podem fazer através de desenhos ou símbolos, procedendo seguidamente à sua contagem.

Problema 6 – “O lanche da Andreia”

O último problema, cuja realização decorreu no dia 5 de fevereiro de 2015, teve como objetivo considerar todas as estratégias até então exploradas. Isto é, colocando um problema onde podiam ser utilizadas mais do que uma estratégia para a sua resolução, os alunos tinham de refletir sobre as mesmas e escolher a mais adequada para eles, referindo o porquê da sua escolha.

Além de possibilitar que os alunos pudessem relembrar as estratégias usadas em problemas anteriores, este problema permitia-me perceber a sua evolução e as dificuldades que se geraram ou que permaneceram após a exploração dos diversos problemas.

Considerando estes aspetos, o problema “o lanche da Andreia” é considerado um problema aberto visto poder ter “mais do que um caminho para chegar à solução e mais do que uma resposta correcta” (Boavida et al., 2008, p. 20). Este podia ser resolvido (i) através de tentativas/conjeturas, experimentando distribuir os queques por um, dois, ou mais amigos, com o objetivo de perceber quando é impossível que estes comam o mesmo número de queques; (ii) através de uma simulação/experimentação/dramatização, pois os alunos podem representar os amigos e simular a distribuição dos queques por cada pessoa; (iii) reduzindo a um problema mais simples, por exemplo, imaginando que são menos queques que a Andreia tem para os amigos, de forma perceber o que acontece com valores mais pequenos e ir aumentando até ao número que se encontra no problema; (iv) e fazendo uma lista ou uma tabela, uma vez que estas ajudam o aluno a organizar a informação e compreender o problema.

> A Andreia fez 12 queques para o lanche dos amigos. Ele distribuiu-os, igualmente, por todos os amigos. Se não sobrar nenhum queque e se a Andreia não comer, quantos amigos é que a Andreia pode ter a lanchar?

Figura 20 - Problema "O lanche da Andreia"

Uma vez que o problema foi realizado fora do período de estágio, tornou-se um pouco difícil definir um tema para o mesmo. Por isso optei por criar uma personagem que se relacionasse com a vida quotidiana dos alunos, para que eles pudessem imaginar a situação-problema como se fosse real e pudessem, de certa forma, vivenciar. Assim, esta personagem tem o nome da minha colega de estágio, levando-os a identifica-la de imediato.

4.2. Exploração em sala de aula

A exploração dos problemas decorrida ao longo de seis semanas preencheu o horário letivo dedicado ao Apoio ao Estudo, todas as terças-feiras. Estas aulas organizaram-se em três fases distintas, nomeadamente a (i) introdução do problema, a (ii) exploração do mesmo e a (iii) discussão coletiva.

Entre as três fases, a exploração do problema revelou-se a única realizada individualmente onde apenas intervim quando os alunos me solicitavam, originando, assim, algumas conversas informais de partilha de ideias. Os momentos de introdução do problema e discussão coletiva foram realizados em grande grupo, sendo que a discussão foi sempre orientada por mim.

Apresento seguidamente cada uma das fases distintas das aulas de resolução de problemas, atentando a possíveis distinções originadas pelos diferentes objetivos dos problemas propostos.

Introdução do problema

No primeiro momento da fase de introdução, é explicado aos alunos que o trabalho vai ser realizado individualmente, mas que vão decorrer dois momentos em grande grupo nomeadamente a apresentação e a discussão do problema e das estratégias utilizadas. Além disso, saliento igualmente que a aula é conduzida por eles e eu apenas ajudo e oriento no que for necessário.

Seguidamente é distribuído um problema por cada aluno, sendo pedido que cada um leia o enunciado para si mesmo e assinale aspetos que considere importantes ou nos quais tenha dúvidas. Quando o grupo terminar, um aluno deve ler o enunciado em voz alta e dizer o que considerou relevante para resolver o problema. Nesta fase, os restantes colegas podem e devem intervir, de forma ordeira, com o objetivo de ajudar, completar e colocar outras dúvidas que vão surgindo. É importante referir que as questões e dúvidas que surgem nesta fase são respondidas pela própria turma, sendo que apenas intervenho se for estritamente necessário, ou seja, se o aluno não percebe ou se os colegas não se conseguem fazer entender ou explicar.

As informações que os alunos vão referindo como importantes são escritas por mim no quadro para depois, quando for dito o que é pedido no problema, estes possam associar todos os dados ou palavras-chave. Com o decorrer dos problemas, este procedimento passa a ser feito individualmente, existindo apenas o momento de discussão e de esclarecimento de dúvidas em grande grupo.

Após a discussão sobre a proposta de problema, é explicado aos alunos que deve ser efetuado todo o registo de cálculos ou procedimentos utilizados, mesmo que sejam feitos mentalmente e, ainda, a justificação do modo como pensaram. Isto porque os raciocínios são importantes tanto para conseguirem explicar aos colegas como chegaram a determinado resultado, como para que o professor compreenda o modo como pensaram e a estratégia utilizada. A partir do primeiro problema, os alunos devem também identificar se passaram por todas as etapas de Pólya na resolução de problemas.

Nos primeiros problemas, esta fase decorre num período mais alargado, sendo progressivamente reduzido à medida que os alunos se sentem confiantes na leitura e interpretação do enunciado. Porém, é necessário salientar que existem exceções dado o grau de dificuldade dos problemas propostos, exigindo que esta fase se prolongue um pouco mais.

Exploração do problema

O momento de exploração decorre individualmente e de forma autónoma, apesar de ser mais natural que os alunos me chamem para mostrar os resultados conseguidos do que troquem impressões entre alguns colegas que se encontram ao seu lado. Este aspeto foi previsto por mim antes da colocação dos problemas, visto a turma ser um pouco insegura e necessitar de apoio por parte do adulto.

Desta forma, tentei dar aos alunos algum tempo para refletirem sozinhos sobre as suas estratégias e os resultados obtidos, intervindo apenas depois de estes terem tentado resolver sozinhos. Isto não significa que não circule pela sala entre eles, de forma a monitorizar o seu trabalho pois o meu papel é sempre de apoio, esclarecendo-lhes as dúvidas e fomentando a reflexão sobre o seu trabalho, sem que o meu discurso influencie diretamente a sua forma de resolver os problemas. Assim, em vez de responder se está certo ou errado, tento colocar questões que os levem a repensar sobre o seu raciocínio.

É também nesta fase que decorrem algumas conversas informais com alguns alunos com o objetivo de compreender o seu modo de pensar, as estratégias utilizadas para resolver o problema, se passaram por todas as etapas de Pólya e quais as principais dificuldades. Estes momentos permitem ajudar a compreender o seu raciocínio relativamente à resolução de problemas, facilitando a análise dos dados para este estudo.

A escolha das estratégias a serem apresentadas na fase de discussão em turma resulta dos momentos de esclarecimento de dúvidas e de conversas informais entre mim e os alunos. Nesta seleção, considero como critério de escolha o uso da estratégia subjacente ao problema, outra estratégia diferente e a correção ou não dos cálculos.

Dado que a professora cooperante e a minha colega de estágio também circulam pela sala para me ajudar a monitorizar o trabalho do grupo, tenho igualmente em consideração a sua opinião sobre as estratégias que devo optar para discussão.

A duração da fase de exploração do problema é variável, considerando o grau de complexidade do mesmo e os diferentes ritmos de trabalho da turma.

Discussão coletiva

Quando todos, ou a maioria, dos alunos terminam a exploração da tarefa, inicia-se a fase de discussão coletiva. Esta, tal como as restantes, não tem tempo de duração fixo, dependendo, muitas vezes, do tempo que os alunos demoram nas outras fases anteriores.

Nesta fase, os alunos que escolhi para apresentarem as suas estratégias, deslocam-se ordenadamente ao quadro onde devem registar, de igual forma, tudo o que fizeram na sua folha e explicar aos colegas o seu raciocínio. Sendo que, neste momento, deve ser o aluno a tentar explicar tudo por palavras suas com o objetivo de desenvolver a comunicação matemática, eu apenas intervenho se este sentir dificuldades em fazê-lo ou se considerar que a sua explicação está incompleta. Neste sentido, vou colocando questões ao aluno para que este consiga refletir e completar a sua explicação da melhor forma. Os restantes colegas poderão, igualmente, intervir tanto colocando questões como fazendo comentários, tornando a discussão mais rica.

O final da discussão é diferente de problema para problema, considerando os objetivos propostos. Na discussão associada ao primeiro problema, os alunos, além de apresentarem as diferentes estratégias, são confrontados com as etapas de resolução de problemas que estão implícitas quando estes os resolvem. Neste momento, enquanto eu coloco questões, é o grande grupo que vai referindo todas as etapas, sendo seguidamente escritas num cartaz (figura 21) para ser exposto na sala, com o objetivo de ajudá-los a estruturar o raciocínio, visto ser importante que os problemas sejam resolvidos atendendo a essas etapas.

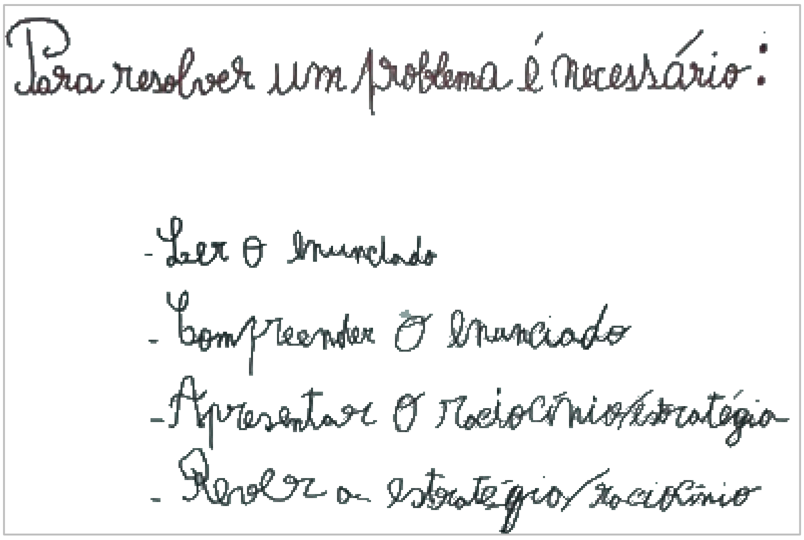


Figura 21 - Cartaz com as etapas de resolução de problemas

Nas discussões associadas aos quatro problemas seguintes, após serem apresentados diferentes raciocínios, eu introduzo o nome da estratégia, ou estratégias, utilizadas, explicando porque são assim denominadas e as características principais. Tal como as etapas de resolução de problemas, as estratégias são incorporadas no cartaz e expostas na sala de aula (figura 22).

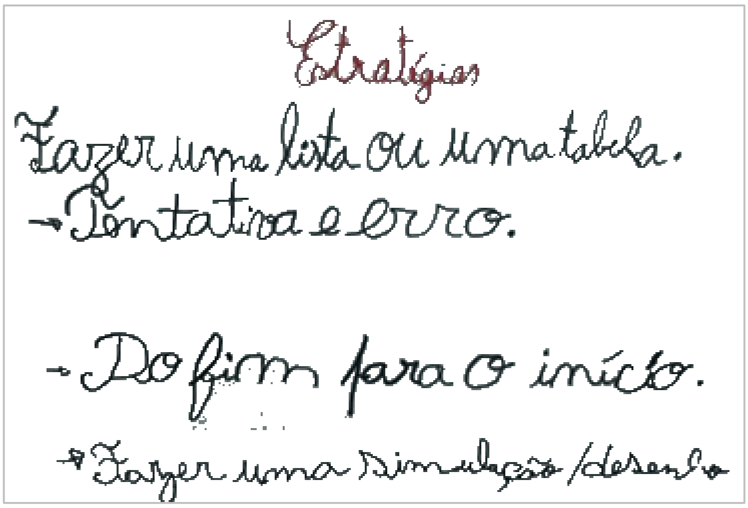


Figura 22 - Cartaz com as estratégias de resolução de problemas exploradas em sala de aula

Finalmente na discussão do último problema, pretendia-se que os alunos usassem a estratégia que considerassem mais correta atendendo à situação e baseando-se no cartaz e nas aulas anteriores. Assim, no momento da discussão, além de os alunos apresentarem os seus raciocínios e os justificarem, deviam referir igualmente a estratégia que utilizaram, justificando a sua escolha.

Capítulo V

Análise de dados

Considerando que o objetivo do presente projeto é compreender o modo como os alunos do 2.º ano resolvem os problemas propostos, neste capítulo, procedo à descrição e análise dos dados recolhidos durante o período de estágio.

A análise foca-se nas resoluções de quatro alunos, num total de seis problemas por cada um. Desta forma, apresento e analiso as resoluções de cada um, sustentando-me nos seus registos escritos, bem como nas suas explicações orais, gravadas ou registadas nas notas de campo ao longo da investigação. Em cada análise considero os principais aspetos, já referidos ao longo do projeto, nomeadamente: as etapas de resolução de problemas propostas por Pólya, as estratégias de resolução de problemas e as dificuldades apresentadas pelos alunos.

No final da análise de cada aluno, é apresentada uma síntese das estratégias de resolução dos problemas, recorrendo a uma tabela. Assim é possível identificar as diferenças entre os alunos e possíveis evoluções de cada um no que diz respeito à resolução de problemas.

5.1. Marta

5.1.1. As resoluções dos problemas

Problema 1 - O problema do Tomé

Para resolver o primeiro problema, em que era necessário calcular o dinheiro que faltava ao Tomé para comprar a escova e a pasta de dentes, Marta parece ter recorrido à adição, tal como mostra a figura 23.

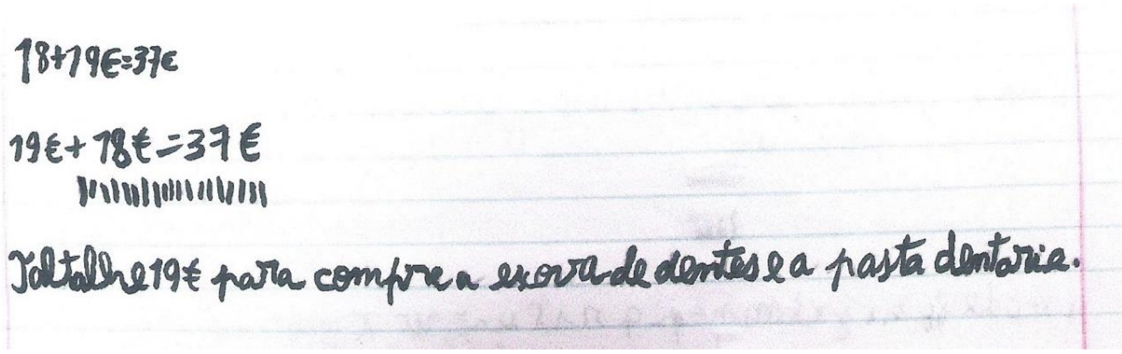


Figura 23 – Resolução de Marta do problema n.º 1

A análise da sua resolução permite perceber que Marta considerou que teria de juntar um certo valor aos 18 euros para obter o total de 37 euros. Desta forma, parece ter colocado na primeira parcela o dinheiro que a personagem do problema tinha, na segunda possivelmente o dinheiro que lhe faltava e igualou ao total que ia precisar para comprar o que queria.

Apesar de esses cálculos parecerem ter sido realizados mentalmente, a aluna representa também 19 riscos que, possivelmente, a ajudaram a chegar ao resultado obtido. Efetivamente a aluna parece ter partido do valor que tinha e, através dos riscos, que devem corresponder à contagem desde o 18 até ao 37, obteve 19 que, neste caso, era o dinheiro necessário para fazer a compra.

A resolução de Marta apresenta ainda uma outra adição cujo total é igual à anterior, trocando apenas as parcelas. No entanto, não é possível perceber a razão que levou a aluna a registar este cálculo.

A estratégia usada por Marta é uma estratégia aditiva, sendo a proposta apresentada, um problema de subtração no sentido de completar. Para encontrar o número que adicionando a 18 dava um total de 37, Marta parece ter contado um a um a partir do 18.

No que diz respeito às etapas de resolução de problemas de Pólya, Marta possivelmente tentou, numa primeira fase, compreender o problema, parecendo preocupar-se depois com a seleção e construção de uma estratégia que lhe permitisse chegar à solução. No entanto não é possível perceber se a aluna verificou o resultado obtido, ou seja, se passou pela última etapa de resolução de problemas.

Problema 2 – O problema da Senhora Redondinha

Para resolver o problema 2, em que era preciso saber o número de passageiros que iniciaram a viagem, considerando as paragens que efetuou ao longo do percurso, Marta recorre às operações adição e subtração, utilizando desenhos comprovar os cálculos que efetuou. A figura seguinte apresenta a resolução da Marta.

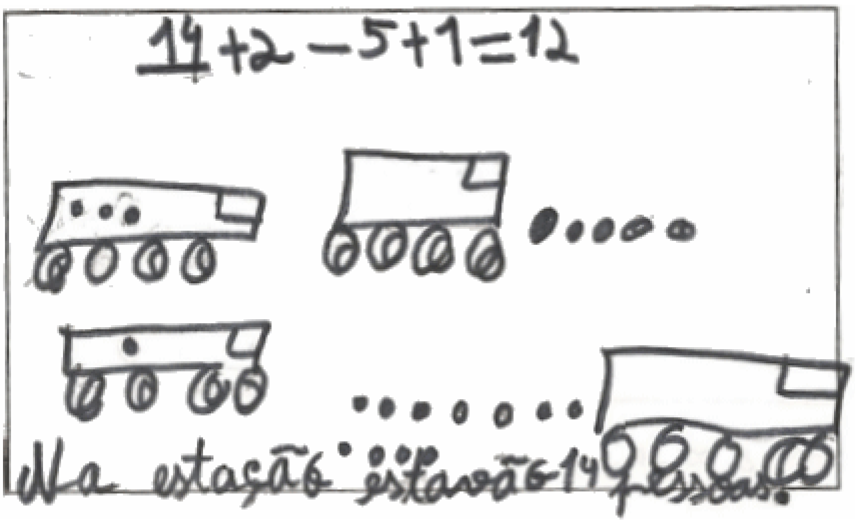


Figura 24 - Resolução de Marta do problema n.º 2

Através da análise dos registos de Marta é possível perceber que esta transforma os dados que o problema fornece em somas e subtrações, parecendo deixar numa primeira fase, um espaço que corresponde à primeira parcela (identificado com uma linha), que corresponde à solução correta (número inicial de passageiros). Nas restantes parcelas, Marta parece colocar o número de passageiros que entrou e saiu, por ordem dos acontecimentos, sendo possível identificar que quando saem passageiros, a aluna regista uma subtração e quando entram, regista uma soma. O total corresponde ao número de passageiros que chegou ao destino.

Após realizar os cálculos e ter encontrado o número inicial de passageiros, Marta chama-me, referindo já ter terminado o problema. Nessa altura, embora não tenha registado exatamente o diálogo que mantive com Marta, nem por escrito nem usando um gravador, escrevi nas minhas notas de campo "perguntei-lhe se já tinha verificado se a solução encontrada era a correta e se tinha passado por todas as etapas de resolução de problemas" (Notas de campo, 25-Novembro-2014). Às minhas perguntas, "Marta responde que não tem a certeza, especialmente no que se refere à última etapa, correspondente à verificação da solução" (notas de campo, 25-Novembro-2014).

Depois deste diálogo, Marta elabora todos os restantes registos, que parecem ter como finalidade a verificação da adequação da solução ao contexto do problema. Ao desenhar quatro autocarros, Marta parece querer representar os quatro momentos que o enunciado apresenta. Neste sentido, o desenho do primeiro autocarro representa a primeira paragem onde entraram duas pessoas, o segundo a segunda paragem, onde saíram cinco passageiros, o terceiro onde apenas entrou uma pessoa e o último autocarro representa o destino, onde chegaram doze pessoas.

Contudo, no primeiro autocarro, apesar de representar a entrada de dois passageiros, a aluna desenha três círculos e no último desenha onze círculos, em vez de doze. Este aspeto leva-me a refletir que a aluna parece querer mostrar que compreende a última etapa da resolução de problemas, no entanto, não a concretiza de forma atenta, originando pequenas incorreções que não ajudam a confirmar os cálculos e não estão de acordo com o enunciado.

Após ter terminado a resolução do problema, questiono Marta sobre a estratégia que utilizou, ao que esta respondeu:

> Marta: Nós queremos saber quantos estavam ao início (…). Então na primeira paragem entraram dois passageiros. Então, nesse número que ainda não sabemos, chegaram mais dois, pões mais dois. Depois, na segunda saíram cinco passageiros, então nós temos de tirar cinco passageiros. E na terceira entrou apenas um passageiro, temos de juntar mais um passageiro. Tendo chegado ao destino com doze passageiros.

A sua resposta oral parece confirmar os seus registos escritos, ou seja, parece que a aluna estrutura o seu raciocínio sempre do início para o fim, registando-o sob a forma de uma expressão numérica. Embora não a tenha questionado especificamente sobre isso, Marta, para chegar ao 12, poderá ter experimentado alguns números para completar a igualdade, utilizando uma estratégia de tentativa e erro.

A resposta de Marta e a sua resolução permitem-me afirmar que esta percorreu as três primeiras etapas de resolução de problemas, passando apenas para a última etapa após a ter questionado sobre isso.

Problema 3 – Os biscoitos de Natal

Para resolver o problema "Os biscoitos de Natal", em que era necessário calcular quantos biscoitos tinha a Jéssica levado para a escola, sabendo quantos deu aos colegas e quantos sobraram, Marta recorre à subtração. A figura seguinte apresenta a resolução da Marta.

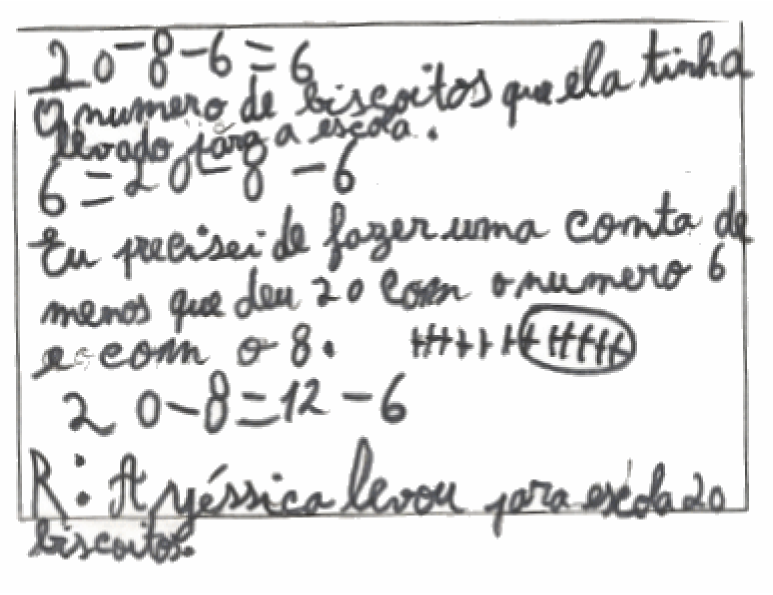


Figura 25 - Resolução de Marta do problema n.º 3

A análise dos registos de Marta permite perceber que a aluna representa o problema através da subtração, apresentando duas igualdades (troca a ordem dos membros de uma para a outra). Na primeira igualdade aparece mais à esquerda um espaço representando a primeira parcela que parece corresponder ao número inicial de biscoitos, desconhecido no início do problema. A esse valor subtrai primeiro o número oito e seguidamente o seis, que correspondem ao número de biscoitos dados no primeiro e segundo momentos. O total apresenta o valor seis que, no contexto do enunciado, corresponde ao número de biscoitos que a menina tinha quando chegou a casa.

Relativamente à segunda expressão, esta é igual à primeira porém parece que a aluna começa por colocar o valor de biscoitos que tinha quando chegou a casa e seguidamente representa o número total de biscoitos a que foi subtraindo oito e depois seis. É visível que Marta coloca o número 20 primeiro, subtraindo depois oito e depois seis, seguindo possivelmente a ordem da entrega de biscoitos.

A análise das duas igualdades não me permite perceber como a aluna encontrou o número 20, uma vez que Marta apresenta este número sem explicar ou apresentar cálculos que mostrem como chegou a ele. Provavelmente, tal como no problema anterior, Marta usou uma estratégia de tentativa e erro.

Após o registo das duas igualdades, as suas produções mostram que Marta tenta explicar o seu raciocínio através da linguagem natural. Ao escrever "eu precisei de fazer uma conta de menos", parece que compreende que a ação de dar biscoitos corresponde à subtração, ficando com menos do que tinha antes. Porém, em seguida refere "que deu 20", o que mostra que a aluna parece ter algumas dificuldades em explicar o seu raciocínio, embora evidencie ter pensado corretamente.

Nos registos de Marta ainda é possível identificar uma igualdade 20 – 8 = 12 – 6 que, do ponto de vista matemático não está correta pois 20 – 8 = 12 e 12 – 6 = 6. Contudo, considerando o enunciado do problema, parece que a aluna pretende mostrar que, num primeiro momento, são dados oito biscoitos, por isso retira-se oito ao número inicial de biscoitos. Aos doze que sobram, retiram-se seis biscoitos da segunda vez que a Jéssica distribuiu pelos seis colegas, sobrando assim seis biscoitos.

Ao lado desta expressão incorreta encontra-se uma representação icónica que poderá ter ajudado Marta a realizar alguns cálculos.

Provavelmente, e de acordo com os seus registos, Marta parece ter usado uma estratégia de tentativa e erro, partindo da representação das diferentes situações do problema através da "equação com lacunas" __ - 8 – 6 = 6. Embora uma das estratégias subjacentes ao problema seja "trabalhar do fim para o princípio", não há evidências que Marta tenha recorrido a ela.

Em relação às etapas de resolução de problemas de Pólya, é possível perceber que a aluna compreende o problema, fazendo referência, nos seus registos, ao que era pedido, nomeadamente "O número de biscoitos que ela tinha levado para a escola", delineando depois uma estratégia para a sua resolução. Os registos seguintes parecem corresponder à última etapa da resolução de problemas "examinar a solução", de modo a confirmar se 20 era, de facto, o número pretendido.

Problema 4 – Os abraços

Para resolver o problema quatro, onde era necessário calcular o número de abraços dados entre os amigos, Marta recorre a representações do tipo icónico para apoiar os cálculos que efetua. As figuras 26 e 27 apresentam a resolução da Marta.

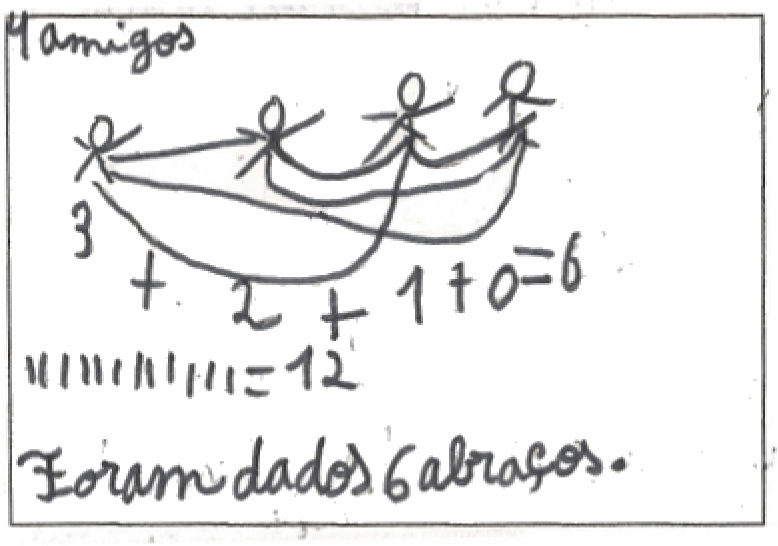


Figura 26 - Resolução de Marta do problema n.º 4

Analisando os registos de Marta é possível perceber que a aluna representa, no início, quatro pessoas, possivelmente os amigos referidos no enunciado. Em cada uma das representações das pessoas, inclui ainda linhas (ligações) que parecem representar o número que abraços dados entre eles. Além disso, por baixo da representação de cada um dos amigos, a aluna coloca um número que corresponde ao número de abraços que dá cada um dos amigos e, entre eles, um sinal de adição, parecendo estar a fazer um cálculo.

A seguir Marta representa ainda alguns "tracinhos" igualando-os ao número doze. Este registo parece mostrar que a aluna conta três abraços dados por cada amigo num total de doze abraços. Aparentemente, Marta embora tenha contado doze abraços (tracinhos), chega à conclusão que a solução do problema são seis abraços. Apesar de não lhe ter perguntado como resolveu o problema, os seus registos mostram que, numa dada altura, Marta percebeu que eram dados apenas seis abraços. No verso da sua folha de registo (figura 27), a aluna explicita a solução encontrada de três maneiras diferentes.

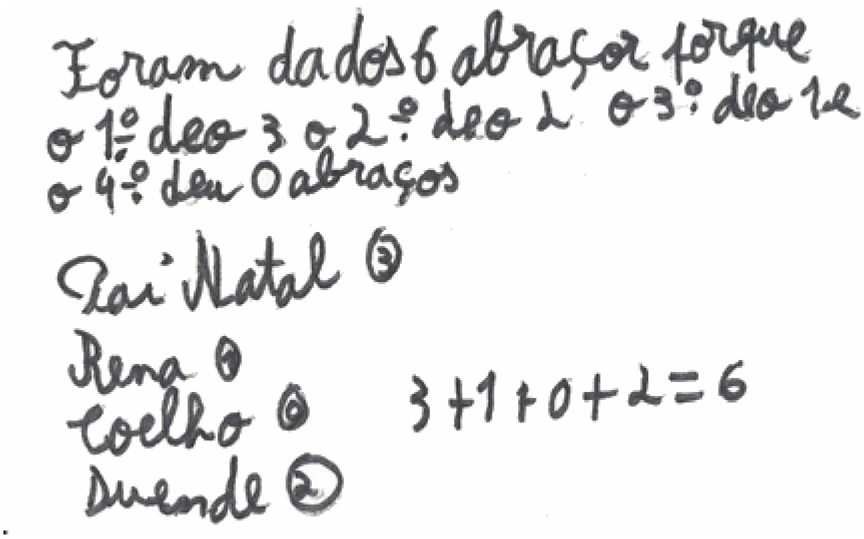


Figura 27 – Verso da resolução de Marta do problema n.º 4

A análise do verso da sua folha permite perceber que Marta escreve, em linguagem natural, o número de abraços dados por cada um dos amigos. Depois, identifica ordenadamente cada um (Pai Natal, rena, coelho e duende) e indica o número de abraços que cada um dá. É de realçar o facto de ter identificado que o último amigo (o coelho) não dá abraços, para além dos que já foram dados.

Os seus registos apresentam ainda um cálculo aditivo que corresponde à soma dos abraços de cada um, considerando a ordem do nome dos amigos. Estes últimos cálculos parecem mostrar que Marta verificou o seu raciocínio anterior.

Em síntese, Marta parece ter compreendido o problema proposto e ter delineado uma primeira estratégia de resolução que corresponde a fazer uma simulação da situação através do desenho. Aí representa os quatro amigos e os abraços dados entre eles.

A certa altura parece ter pensado que cada amigo dá três abraços, num total de 12, daí ser apresentado o registo de 12 "tracinhos". Contudo, quando explica o seu raciocínio, evidencia que compreende que o total de abraços é apenas de seis, de modo a não haver abraços repetidos. Este facto parece revelar que Marta, após ter chegado à possível solução, confirma-a e justifica-a de modo correto e completo.

Problema 5 – As sandes dos Reis Magos

Neste problema, em que era pedido o número de sandes diferentes que podiam ser feitas com apenas um ingrediente e um tipo de pão, Marta recorre a representações icónicas e à elaboração de uma lista para apoiar o seu raciocínio. As figuras 28 e 29 apresentam a sua resolução.

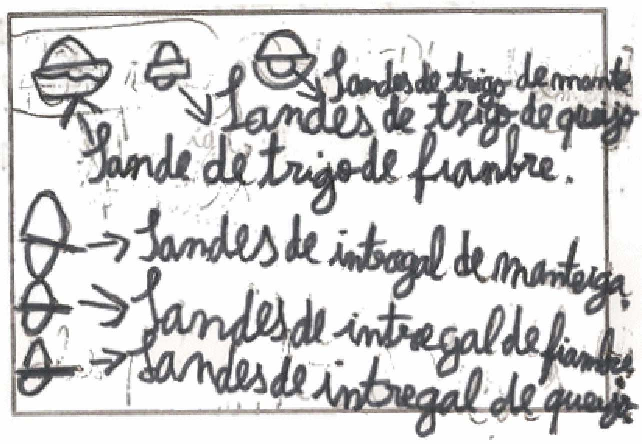


Figura 28 - Resolução de Marta do problema n.º 5

O registo de Marta mostra que a aluna parece recorrer, num primeiro momento, à representação icónica dos vários tipos de sandes, desenhando primeiramente três sandes na parte superior da folha e outras três no canto inferior esquerdo.

Num segundo momento, parece associar essas representações à correspondente expressão escrita, descriminando o tipo de pão e o tipo de ingredientes. Começa por fixar um tipo de pão (pão de trigo) e relaciona-o com os três ingredientes (manteiga, queijo e fiambre). Depois faz o mesmo para o pão integral, embora não mantenha a ordem dos ingredientes Esta estratégia aproxima-se da construção de uma lista.

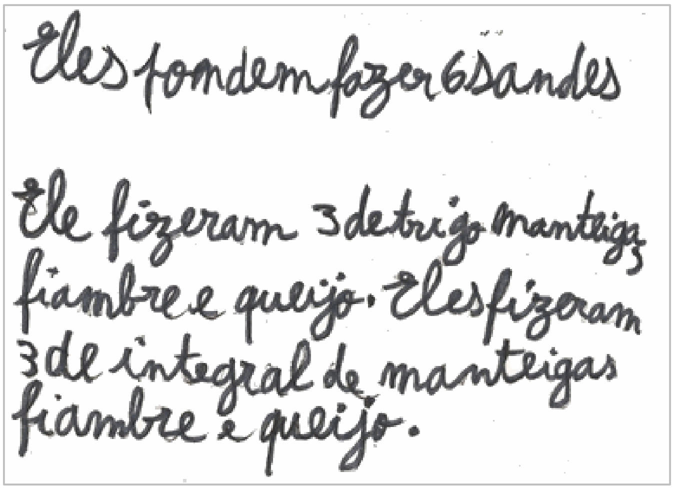


Figura 29 – Verso da resolução de Marta do problema n.º 5

No verso da folha Marta escreve a sua resposta final, incluindo uma explicação dos diferentes tipos de sandes. Assim, a aluna refere quantas sandes se podem fazer e descrimina-as, escrevendo o tipo de pão e cada ingrediente. No entanto, a forma como

Marta escreve quais as sandes que podiam ser feitas, não é a mais correta do ponto de vista linguístico. Desta forma, é possível referir que a aluna evidencia algumas dificuldades no momento de explicar o seu raciocínio usando a linguagem natural, embora tenha pensado corretamente.

A análise dos registos permite também identificar que Marta parece ter alterado a sua estratégia inicial de resolução, tendo apagado alguns registos correspondentes à primeira tentativa. Este facto pode significar que, depois de uma primeira tentativa de resolução, Marta opta por usar uma outra estratégia que a conduz à solução correta, daí ter apagado alguns registos associados à primeira estratégia construída.

Embora tenha resolvido corretamente, os registos de Marta não permitem perceber se verificou a solução obtida.

No que diz respeito à estratégia de resolução, Marta recorre a uma das estratégias de resolução previstas, nomeadamente, fazer uma lista organizada para estruturar os dados e conseguir chegar à possível solução.

Problema 6 – O lanche da Andreia

Para resolver o último problema, em que era necessário calcular quantos amigos a Andreia podia ter a lanchar, distribuindo os 12 queques por todos de igual forma, Marta recorre sobretudo a uma representação icónica para apoiar possíveis cálculos efetuados. A figura 30 apresenta a resolução da aluna.

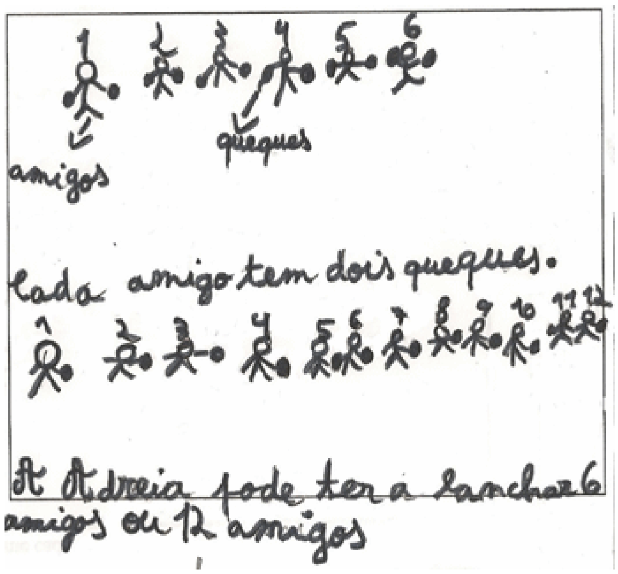


Figura 30 - Resolução de Marta do problema n.º 6

A análise dos registos de Marta permite perceber que a aluna desenha seis representações de figuras humanas, assinalado-as como os amigos convidados. Em cada figura representa com um círculo os queques distribuídos por Andreia e, por cima de cada figura, coloca um número por ordem, iniciando à esquerda com o número um e terminando com o número seis, parecendo ter efetuado uma contagem um a um. Além disso, legenda os registos que fez, identificando os amigos e os queques.

Por baixo dessa representação, a aluna escreve que "cada amigo tem dois queques", o que parece mostrar que pensou em distribuir dois queques por amigo. Porém, seguidamente volta a desenhar amigos e queques, representando agora doze amigos e um queque por cada um. Em seguida escreve em linguagem natural as duas possibilidades encontradas.

A análise dos registos de Marta permite perceber que esta compreende o problema e delineia um plano que usa para encontrar as duas hipóteses possíveis. Contudo, não é possível afirmar que esta examinou a solução obtida, visto que, ao observar a sua resolução, não se percebe se verificou os dados e se refletiu sobre o resultado.

No que diz respeito à estratégia propriamente dita, embora o problema pudesse ser resolvido recorrendo a mais do que uma, os registos de Marta mostram que recorre à estratégia "fazer uma experimentação/dramatização/simulação", utilizando desenhos para simular quantos queques podia distribuir para cada amigo.

É importante ainda referir que Marta apresenta apenas duas das soluções possíveis.

5.1.2. Síntese das resoluções dos problemas

Ao longo da análise dos registos de Marta, são visíveis diferenças entre as resoluções dos diferentes problemas. Para tentar compreender essas diferenças, a tabela seguinte apresenta os principais aspetos analisados, nomeadamente as estratégias, as etapas de resolução de problemas propostas por Pólya e as dificuldades apresentadas pela aluna.

Tabela 2 – Síntese das estratégias de resolução de problemas, das dificuldades e das etapas percorridas por Marta

	Prob. 1	**Prob. 2**	**Prob. 3**	**Prob. 4**	**Prob. 5**	**Prob. 6**
Estratégias de resolução	Fazer tentativas	Fazer tentativas	Fazer tentativas	Fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização	Fazer uma lista	Fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização
Etapas de resolução que parece ter percorrido	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.
Dificuldades manifestadas			Justificar o raciocínio usando a expressão escrita (linguagem natural); Usar o sinal de igual		Justificar o raciocínio usando a expressão escrita (linguagem natural)	Encontrar todas as soluções do problema

A análise da tabela e das produções de Marta permitem afirmar que recorre a diferentes estratégias para resolver os problemas, auxiliando, de uma forma geral, os seus cálculos com representações icónicas e/ou simbólicas.

Nos três primeiro problemas, Marta parece optar por uma estratégia de tentativa a erro. Contudo, subjacente aos problemas 2 e 3 estava uma estratégia de "trabalhar do fim para o princípio" que Marta não usa. Nos problemas 4 e 6 a aluna opta por simular a situação proposta usando uma representação icónica associada a registos simbólicos.

No problema 5 a aluna começa também por tentar representar a situação usando registos icónicos mas, a meio do processo, muda de estraégia, optando por fazer uma lista das hipóteses possíveis.

A tabela síntese mostra também que Marta parece ter compreendido as etapas de resolução de problemas propostas por Pólya uma vez que recorreu a elas para resolver os problemas. Apenas no que diz respeito à última etapa, não é possível perceber pelos seus registos se, em todas as situações, a aluna verificou se a solução era adequada.

Os registos de Marta parecem mostrar igualmente que a aluna, por vezes, tem dificuldade em justificar o seu raciocínio usando a linguagem natural. Ou seja, a aluna parece compreender os problemas, apresenta o seu raciocínio recorrendo a representações icónicas e/ou simbólicas no entanto, não consegue explicar por palavras suas porque recorre a determinada estratégia. É possível verificar estas dificuldades na resolução dos problemas 3 e 5, em que Marta tenta explicar como pensou, escrevendo por palavras suas, contudo apresenta alguns erros do ponto de vista matemático e da língua portuguesa (ao referir, por exemplo, "eu precisei de fazer uma conta de menos que deu 20" após apresentar o cálculo 6 = 20-8-6).

Além disso a aluna parece mostrar igualmente dificuldades no uso da linguagem simbólica (matemática), usando de forma incorreta o sinal de igual na resolução do problema 3. Neste caso, Marta iguala duas expressões cujo total é diferente, nomeadamente 20 – 8 = 12 – 6.

Na resolução do problema 6, Marta parece também ter dificuldades em encontrar todas as soluções do mesmo, conseguindo apenas apresentar duas das soluções possíveis na sua resposta.

5.2. Daniel

5.2.1. As resoluções dos problemas

Problema 1 – O problema do Tomé

Para resolver o primeiro problema, em que era necessário calcular o dinheiro que faltava ao Tomé para comprar a escova e a pasta dentária, Daniel parece ter recorrido à adição e subtração e à reta numérica, tal como mostra a figura 31.

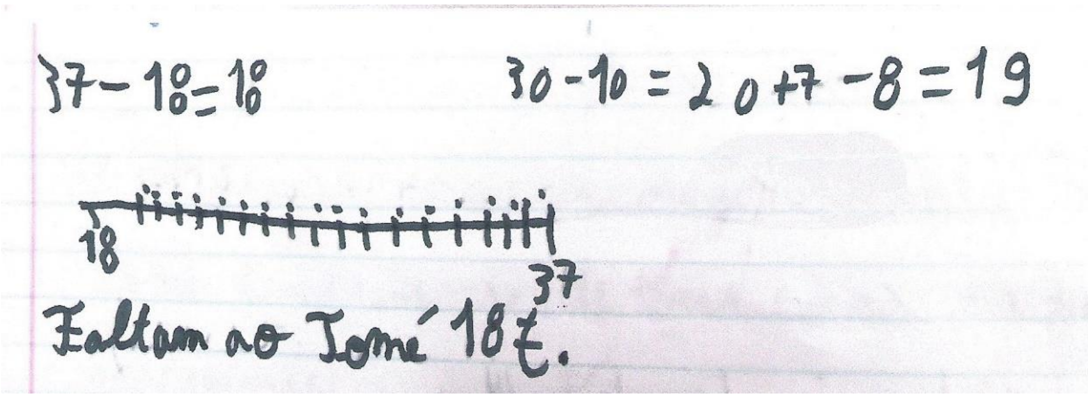


Figura 31 - Resolução de Daniel do problema n.º 1

A análise da resolução de Daniel permite perceber que o aluno considera que tem de retirar o valor dos objetos que queria comprar, ou seja 37 euros, ao dinheiro que já tinha, 18 euros. Desta forma coloca no aditivo o dinheiro que iria precisar para comprar a escova e a pasta dentária, e no subtrativo coloca o dinheiro que a personagem do problema tinha e iguala ao dinheiro que possivelmente lhe faltava.

Contudo, o resultado da subtração está incorreto. À direita da primeira expressão Daniel regista o que parece ser uma tentativa de efetuar o cálculo 37-18. Primeiro subtrai as dezenas (30 e 10 respetivamente) e ao seu resultado adiciona sete, as unidades do número 37, e de seguida subtrai oito, as unidades do número 18. O resultado é 19, valor correto da subtração 37-18.

Por baixo dos cálculos efetuados, Daniel representa também uma reta numérica que, possivelmente, o ajudou a obter e confirmar o resultado. Efetivamente, o aluno parece ter partido de um dos valores assinalados, 37 ou 18, e contado os riscos que separam um valor do outro, chegando ao resultado que lhe parece ser a solução do problema.

No momento final de discussão do problema, o aluno desloca-se ao quadro para explicar o seu raciocínio. A sua resposta oral foi registada nas minhas notas de campo, não tendo sido possível utilizar gravador áudio ou vídeo:

> Investigadora: Explica-nos lá como fizeste
>
> Daniel: Primeiro fiz esta conta [aponta para a operação 37-18] e depois fiz 30-10.
>
> Investigadora: Porque fizeste 30-10?
>
> Daniel: Porque é o 30 do 37 e o 18 é o 8+10. (…) Depois juntei ao 20 o 7 e depois juntei 8 para dar o 19.

(Notas de campo, 18-novembro-2014)

Em síntese, o aluno, apesar de ter chegado a uma possível solução incorreta ao resolver a primeira subtração, volta a realizar outros cálculos que o ajudaram a confirmar a solução. Daniel recorre igualmente à reta numérica para o ajudar, voltando a confirmar os seus cálculos e dando resposta ao problema. É de realçar que, embora aparentemente Daniel tenha calculado o valor correspondente à solução do problema e até o tenha confirmado, a solução correta era 19 euros e não 18. Desta forma parece que o aluno teve em consideração todas as etapas de resolução de problemas, embora tenha encontrado uma solução incorreta.

Problema 2 – O problema da Senhora Redondinha

Para resolver o segundo problema, em que é preciso calcular o número de passageiros que iniciou a viagem, sabendo quantos saíram e entraram nas paragens seguintes e quantos chegaram ao final, Daniel recorre à adição, utilizando desenhos para apoiar os seus cálculos. A figura seguinte apresenta a resolução de Daniel.

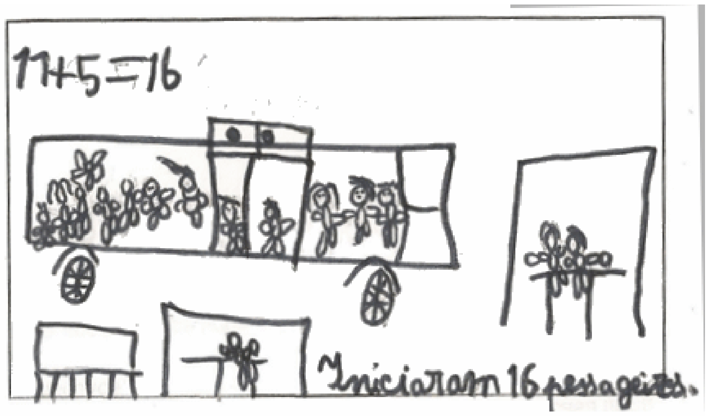


Figura 32 - Resolução de Daniel do problema n.º 2

A análise dos registos de Daniel permite perceber que o aluno representa o problema através de uma adição. Esta é composta por duas parcelas em que a primeira é o número 11, e a segunda parcela que apresenta o número cinco que parece dizer respeito ao número de passageiros que saíram na segunda paragem. Apesar de ser possível referir o significado do número cinco, não existe nenhum dado relativo ao número onze.

Ao realizar uma adição recorrendo ao número de passageiros que saíram (cinco), significa que Daniel parece considerar o número 11 como o número de passageiros que estavam no autocarro antes de saírem os cinco. Desta forma parece que, para o aluno, estavam mais cinco passageiros no autocarro antes dessa paragem, dando um total de 16 passageiros. O seu raciocínio parece estar, assim, apresentado do fim para o príncipio.

Após o registo desta operação, Daniel elabora representações icónicas que parecem ter como finalidade auxiliar e completar os seus cálculos. Nessas representações, é possível identificar o desenho de um autocarro e de três paragens que parecem representar os quatro momentos apresentados no problema. Neste sentido, o desenho do autocarro representa a chegada ao destino, uma vez que dentro deste estão doze representações de figuras humanas, enquanto os desenhos das três paragens parecem representar as três paragens que o autocarro fez. Assim, a paragem ao lado do autocarro representa o momento em que entraram duas pessoas e a paragem com o desenho de uma pessoa representa a terceira paragem, onde entrou apenas uma pessoa. Existe ainda outra paragem que não tem nenhuma pessoa representada, porém não é possível compreender a que situação do problema esta corresponde.

As representações icónicas de Daniel parecem tê-lo ajudado a determinar o valor que iria somar ao cinco para descobrir a solução do problema. Ao ter desenhado a paragem com uma pessoa, Daniel parece ter considerado o momento em que o passageiro não tinha entrado, ou seja, em que havia menos um passageiro do que os que chegaram ao destino (12-1=11). Nesse momento, antes de entrar o último passageiro estavam assim onze passageiros.

Relativamente à representação da paragem com duas pessoas, o aluno não parece recorrer à mesma ao longo da resolução do problema.

Em síntese, os registos de Daniel mostram que recorre à representação dos diferentes momentos relativos à situação descrita, no sentido de identificar o número inicial de passageiros. Ainda assim, revela algumas difiuldades na interpretação da situação, uma vez que não usa todos os dados nos cálculos que efetua. As dificuldades reveladas por este aluno parecem, também, estar assocadas ao uso da estratégia "trabalhar do fim para o princípio", subjacente ao problema proposto.

Relativamente às etapas de resolução de problemas, Daniel parece não ter passado pela última etapa e revela dificuldades em implemenar a estratégia que pensou para alcançar a solução pedida.

Problema 3 – Os biscoitos de Natal

Para resolver o terceiro problema, em que era necessário calcular o número de biscoitos que a Jéssica tinha inicialmente, Daniel recorre às operações adição e subtração e a representações do tipo icónico e simbólico para justificar os seus cálculos. A figura seguinte apresenta a resolução de Daniel.

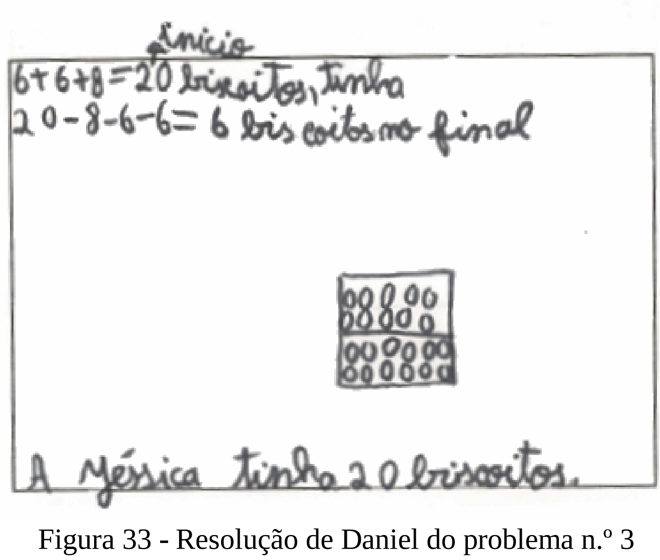


Figura 33 - Resolução de Daniel do problema n.º 3

A análise dos registos de Daniel permite perceber que o aluno começa por adicionar os números seis (duas vezes) e oito. O primeiro seis parece representar o número de queques com que ficou Jéssica no final, o segundo seis e o oito devem representar o número de queques que Jéssica deu aos seus amigos (duas vezes). Assim, o total corresponde ao número inicial de biscoitos.

Este modo de resolução é explicado por Daniel no momento de discussão coletiva:

> Daniel: Fiz seis mais seis
>
> Investigadora: Porquê?
>
> Daniel: Porque quando ela no final ficou com seis, ela tinha dado seis na outra parte e na primeira parte deu oito. Então pus 6 + 6 + 8.
>
> Investigadora: Então o primeiro seis é o quê?
>
> Daniel: É o que deu no total, depois de dar aos colegas.
>
> Investigadora: (…) O segundo seis é o quê Daniel?
>
> Daniel: O segundo seis foi o que ela deu.
>
> Investigadora: Então e este oito que está aqui?
>
> Daniel: Foi os biscoitos que deu às suas amigas.
>
> Investigadora: (…) Porque somaste?
>
> Daniel: Porque eu queria fazer primeiro o total de biscoitos que ela tinha antes.

Considerando as suas respostas orais é possível compreender que o aluno pensou do fim para o início, começando a operação com o número de biscoitos com que a Jéssica ficou no final. As parcelas seguintes dizem respeito ao número de biscoitos que foram dados nos dois momentos, na segunda parcela os biscoitos que deu aos rapazes e na terceira parcela os biscoitos que deu às raparigas. Desta forma, o aluno coloca os valores por ordem inversa dos acontecimentos, ou seja, do fim para o princípio.

O total corresponde ao número de biscoitos que Jéssica tinha inicialmente, tal como escreve nos seus registos. O facto de o aluno ter realizado uma adição, parece mostrar que compreende que Jéssica, no início, tinha mais biscoitos, antes de dar aos colegas.

Na segunda expressão, Daniel começa por colocar na primeira parcela o resultado dos cálculos anteriores, ou seja 20, e subtrair ao mesmo oito e duas vezes o número seis, apresentando no total o número seis como os “biscoitos no final”. Do ponto de vista matemático a igualdade não está correta pois, 20 – 8 – 6 – 6 = 0, contudo, considerando a primeira igualdade e as respostas do aluno, parece que este se enganou a registar os cálculos que realizou mentalmente. Desta forma parece que o aluno queria confirmar os seus primeiros cálculos, realizando a operação inversa, ou seja, queria verificar se ao ter 20 biscoitos, a Jéssica ficaria com seis após dar seis e oito biscoitos aos amigos, tal como apresentado no enunciado.

Após realizar os cálculos, Daniel desenha um retângulo dividido em duas partes e com alguns círculos inseridos no mesmo. Os círculos parecem representar os biscoitos de Jéssica, contudo, o número de círculos não corresponde a 20 mas a 22. De modo a compreender esta representação, solicito que a explique, no momento de discussão coletiva das resoluções do problema. O aluno volta a fazer o desenho no quadro (agora com 20 biscoitos) e explica para toda a turma:

> Daniel: Eu fui rever a minha estratégia fazendo uma caixa de biscoitos. Eu fiz uma caixa com 10 biscoitos em cada sítio e deu 20, eu contei. (…) São os biscoitos da Jéssica.
>
> Investigadora: O que fizeste com esses biscoitos?
>
> Daniel: Eu pensei em tirar seis biscoitos [desenha um traço por cima de seis círculos]. A seguir tirei outros seis [desenha mais traços em cima de seis círculos]. A seguir foi oito que deu ao 2º. Ano [faz um traço por cima dos restantes círculos].
>
> Investigadora: E assim? Podes dizer que esta tinha 20 biscoitos antes?
>
> Daniel: Sim.

A explicação do aluno revela que este parece querer mostrar que verificou a sua resposta e a sua estratégia, no entanto, não a concretiza de forma atenta, cometendo pequenas incorreções.

Em síntese, Daniel parece ter compreendido o problema proposto e ter delineado uma estratégia do fim para o princípio para o resolver, usando cálculos aditivos. Após ter chegado à possível solução, o aluno tenta confirmá-la usando representações simbólicas. Usa também representações icónicas recorrendo, assim, à estratégia “fazer uma simulação/dramatização/experimentação”.

Problema 4 – Os abraços

Para resolver o problema "Os abraços", em que é necessário calcular o número de abraços que foram dados entre os quatro amigos, Daniel recorre à operação de adição e a representações icónicas para apoiar os seus cálculos, tal como no problema anterior. A figura 34 apresenta a sua resolução.

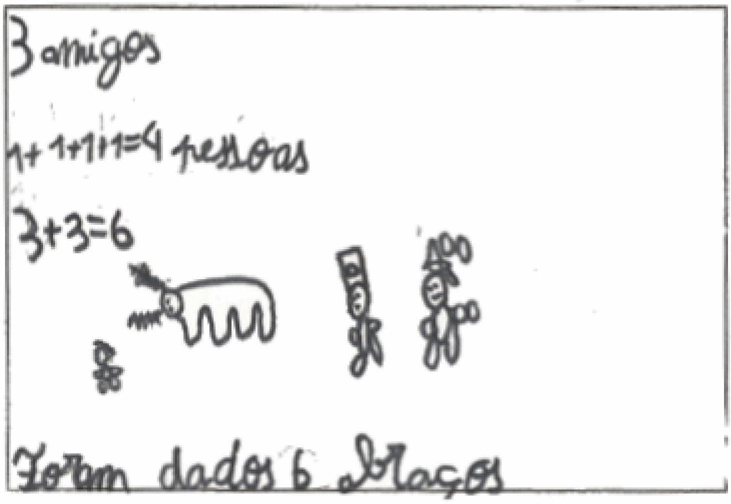


Figura 34 - Resolução de Daniel do problema n.º 4

Analisando os registos de Daniel é possível perceber que o aluno apresenta, no início, os dados do problema, nomeadamente o número de amigos e o número de pessoas que se vão cumprimentar com um abraço. Este último dado encontra-se na forma de uma operação de adição com quatro parcelas, tendo todas o número um e referindo o total como o número de personagens envolvidas no problema.

Seguidamente, Daniel apresenta uma outra adição com duas parcelas, cada uma com o número três, e cujo total parece ser o número de abraços dados. Embora não tenha explicado como fez, a expressão 3+3=6 parece corresponde ao número de abraços que é possível dar em dois momentos. Ou seja, um dos amigos dá três abraços e depois só se dão mais três abraços, de modo a não haver repetições.

Por baixo da expressão o aluno representa o desenho das personagens implícitas no problema que, possivelmente, o auxiliaram na realização dos cálculos.

A análise das produções de Daniel permitem identificar que este parece ter alterado a sua primeira estratégia de resolução, tendo apagado os registos correspondentes às primeiras tentativas. Este aspeto pode significar que o uso da primeira estratégia não resolveu o problema, tendo optado por apagar os registos associados. Em seguida parece ter usado uma outra estratégia que conduziu à solução adequada.

Embora o aluno tenha resolvido corretamente o problema, não é possível perceber através dos seus registos, se Daniel verificou a solução obtida.

No que diz respeito à estratégia utilizada, o aluno parece recorrer a uma estratégia aditiva auxiliando os seus cálculos com representações icónicas.

Problema 5 – As sandes dos Reis Magos

Neste problema, em que era necessário descobrir o número de sandes que é possível fazer com dois tipos de pão e três ingredientes, Daniel recorre a representações icónicas para apoiar o seu raciocínio. A figura seguinte apresenta a resolução do aluno.

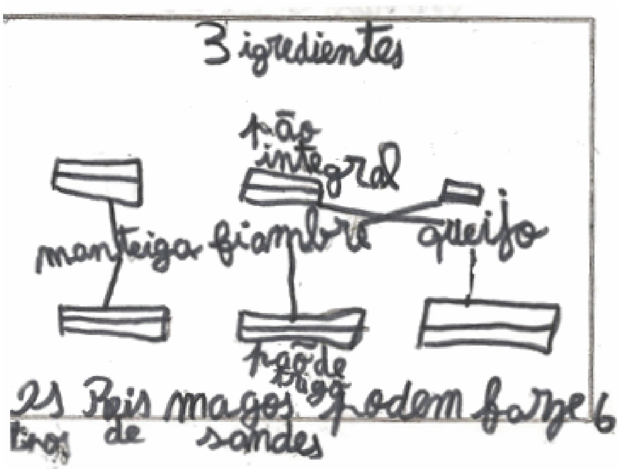


Figura 35 - Resolução de Daniel do problema n.º 5

A análise dos registos de Daniel permite perceber que o aluno tenta elaborar um esquema para resolver o problema. Desta forma, parece começar por colocar, na parte superior, lado a lado, três representações retangulares que identifica como sendo as sandes de pão integral. Mais abaixo volta a desenhar mais três representações retangulares, identificando-os como as sandes de pão de trigo. Entre ambas as representações dos tipos de pão, o aluno recorre à linguagem escrita para identificar os ingredientes que pode utilizar para fazer cada uma das sandes, manteiga, fiambre e queijo. A cada uma das representações dos tipos de pão, o aluno liga-as diretamente a apenas um ingrediente, sendo possível verificar que existem seis ligações, valor que Daniel considerou como solução para o problema.

Considerando os aspetos descritos e analisados, é possível referir que o aluno compreendeu o problema, numa primeira fase, parecendo preocupar-se depois com a seleção e construção de uma estratégia que lhe permitisse chegar à solução. Embora Daniel tenha resolvido corretamente o problema, não é possível perceber, através dos seus registos, se verificou a solução obtida.

No que diz respeito à estratégia de resolução, os registos de Daniel indicam que este recorre à elaboração de um esquema, uma das estratégias subjacentes a este problema.

Problema 6 – O lanche da Andreia

Para resolver o problema "O lanche da Andreia", em que era necessário calcular o número de amigos que a Andreia podia convidar para lanchar, de forma a distribuir o mesmo número de queques a cada um, Daniel recorre sobretudo a um misto de representações simbólicas e icónicas para apoiar os seus cálculos. A figura seguinte apresenta a sua resolução.

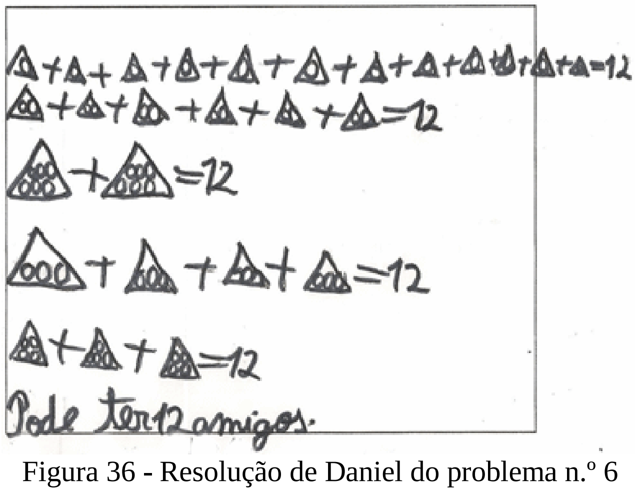


Figura 36 - Resolução de Daniel do problema n.º 6

A análise dos registos de Daniel mostra que usa representações icónicas (triângulos com círculos no seu interior) para simular as várias situações que correspondem a hipóteses possíveis de distribuir doze queques por um número diferente de amigos. Entre as representações de números diferentes de queques, o aluno usa os símbolos de adição, igualando depois cada conjunto de representações a queques.

Na primeira "igualdade" Daniel adiciona doze vezes um queque e na segunda adiciona seis vezes dois queques. Na terceira representa seis mais seis queques, na quarta quatro vezes três queques e, finalmente, representa a adição de três conjuntos de quatro queques. Ou seja, os registos de Daniel evidenciam cinco hipóteses de distribuir doze queques, embora na resposta escrita só tenha referido a uma delas.

Para compreender melhor o que simbolizavam os triângulos e os círculos, questionei o aluno sobre os mesmos e, embora não tenha registado exatamente o diálogo que mantive com Daniel, nem por escrito nem usando o gravador, escrevi nas minhas notas de campo o seguinte: "Os triângulos são os amigos e os círculos os queques" (Notas de campo, 5-fevereiro-2015).

Considerando a sua resposta oral e a análise dos seus registos escritos é possível dizer que, para efetuar os cálculos, Daniel altera o número de queques por pessoa, aumentando ou diminuindo o número de pessoas, mas obtendo sempre o mesmo total de queques referidos no enunciado do problema.

No momento de discussão do problema, Daniel desloca-se ao quadro para explicar os seus cálculos:

> Daniel: Eu fiz de quatro maneiras diferentes. De um em um, depois dois em dois, de seis em seis, de três em três e de quatro em quatro. Todos dão o mesmo resultado só que de maneiras diferentes. Podem ser dois amigos, seis amigos, quatro amigos e três amigos.
>
> Investigadora: Porquê?
>
> Daniel: Porque há quatro formas diferentes.
>
> Investigadora: Quatro formas diferentes de quê…
>
> Daniel: Há cinco.
>
> Investigadora: (…) Então há cinco formas de quê?
>
> Daniel: De fazer… Para dar doze. [aponta para a primeira expressão] Aqui os amigos comem um queque, [aponta para a segunda expressão] aqui dois queques, [aponta para a terceira expressão] aqui comem seis queques, [aponta para a quarta expressão] aqui comem três e aqui [aponta para a quinta expressão] comem quatro.
>
> Investigadora: Quatro queques? Cada pessoa?
>
> Daniel: Sim.

A sua resposta confirma que o aluno compreende o problema, utilizando uma estratégia "fazer uma experimentação/dramatização/simulação", ou seja, simulando as várias situações possíveis. Contudo verifica-se ainda que a resposta registada não corresponde à dada oralmente e aos cálculos efetuados. Este aspeto leva-me a pensar que, possivelmente, o aluno não examinou a solução nem verificou a resposta, apesar de os registos não permitirem confirmar esta minha suposição.

Ainda no momento de discussão do problema, os registos e a explicação de Daniel geram algumas dúvidas na turma. Desta forma é iniciada uma troca de ideias que permite completar a resposta do aluno:

> Afonso: Se primeiro o Daniel disse que pode ter doze amigos (…) depois diz que pode ser dois, seis, quatro, três… Não estou a perceber.
>
> Daniel: Pode ser de maneiras diferentes só que o número de amigos muda.
>
> Afonso: Quer dizer que cinco dias seguidos, a Andreia e os amigos vão comer queques? Eu estou a dizer cinco dias porque (…) um dia a Andreia convida doze amigos, outro dia seis amigos, outro dia dois, outro dia quatro amigos, outro dia três.
>
> Investigadora: É isso Daniel?
>
> Daniel: O Afonso não está a perceber (…). Pode ser de diferentes maneiras em um dia. Só que sem aumentar o número de amigos.
>
> Jéssica: (…) Pode ir um amigo ou pode ir só dois, ou quatro, ou três, ou seis…
>
> Investigadora: Tu disseste que pode ir só um amigo? Se for só um amigo o que acontece?
>
> Afonso: Vai comer os queques todos.

Ao analisar o diálogo é possível perceber que Afonso interpreta a explicação de Daniel considerando que são feitos vários lanches em dias diferentes, oferecendo sempre doze queques mas convidando um número diferente de amigos. Perante esta interpretação, Daniel tenta explicar de outra forma, referindo que "pode ser de diferentes maneiras", ou seja, podem ser distribuídos mais ou menos queques consoante o número de amigos que Andreia convida mas num só dia.

Nesse momento, Jéssica intervém, referindo quantos amigos podem ser convidados e, no seu discurso, usa a conjunção "ou". Uma vez que esta designa uma alternativa, é possível dizer que a aluna completou a explicação de Daniel, mostrando que podem ser convidados mais ou menos amigos. Além disso, refere que pode ser convidado apenas um amigo, hipótese essa que Daniel ainda não tinha referido neste diálogo. Para comprovar se Afonso compreendeu e se é possível convidar um amigo, pergunto o que acontece se essa hipótese se verificar, ao que aquele responde que o amigo come os queques todos.

Assim, a discussão permite confirmar que Daniel compreendeu que o problema podia ter mais do que uma solução e, como tal, apresenta as cinco soluções possíveis.

5.2.2. Síntese das resoluções dos problemas

A tabela seguinte sintetiza as estratégias usadas por Daniel na resolução dos problemas propostos, as etapas de resolução que percorreu e as principais dificuldades manifestadas.

Tabela 3 – Síntese das estratégias de resolução de problemas, das dificuldades e das etapas percorridas por Daniel

	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Prob. 5	Prob. 6
Estratégias de resolução	Estratégia de subtração (decompor ordem a ordem)	Trabalhar do fim para o princípio	Trabalhar do fim para o princípio	Estratégia aditiva	Fazer um esquema	Fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização
Etapas de resolução que parece ter percorrido	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema (de forma incorreta); Escolher um plano; Realizar o plano	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano;	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.
Dificuldades manifestadas	Realizar subtrações com grandes números	Compreender o problema Usar a estratégia “Trabalhar do fim para o princípio”				Descrever todas as situações possíveis usando linguagem natural Encontrar todas as soluções do problema

A análise da tabela e das produções de Daniel permitem afirmar que recorre a diferentes estratégias de resolução de problemas, auxiliando os seus cálculos com representações icónicas.

As representações icónicas usadas dizem respeito essencialmente a desenhos e esquemas e parecem auxiliá-lo no processo de raciocínio. Em alguns casos as representaões icónicas parecem servir para confirmar as soluções obtidas como no problema 3.

No problema 1 e 4, Daniel parece ter recorrido a estratégias relacionadas com as operações de subtração e adição respetivamente, auxiliando os seus cálculos com representações icónicas associadas a registos simbólicos.

No que diz respeito aos problemas 2 e 3, estava subjacente uma estratégia de "trabalhar do fim para o princípio" que Daniel usa no momento em que efetua e regista os seus cálculos. É possivel ainda refeir que para resolver o problema 2, o aluno auxiliou o seu raciocínio recorrendo também a representações icónicas. No caso do problema 5, o aluno parece ter optado igualmente por uma das estratégias que estava subjacente ao mesmo, nomeadamente "fazer um esquema".

Por fim, no problema 6, o aluno parece ter optado por simular a situação proposta usando uma representação icónica para apoiar os seus cálculos.

Através da análise da tabela, é possível referir que Daniel parece compreender as etapas de resolução de problemas de Pólya, passando pela maioria das suas etapas quando resolve os problemas propostos. Contudo alguns dos seus registos não permitem inferir se o aluno verificou se a solução obtida era adequada. Desta forma, apenas nas resoluções dos problemas 1 e 3 é possível dizer que o aluno passa por todas as etapas de resolução de problemas.

A resolução do problema 2 mostra que o aluno teve algumas dificuldades na compreensão e interpretação do problema, originando cálculos incompletos, uma vez que não usa todos os dados, e uma solução menos correta. Além disso, a dificuldade de Daniel em resolver o problema pode estar associada ao uso da estratégia subjacente "trabalhar do fim para o princípio", visto que, os seus registos mostram que o aluno tenta recorrer a esta estratégia no entanto não consegue concretizá-la de forma a obter a solução correta.

Os registos de Daniel mostram igualmente que o aluno, por vezes, tem dificuldade em realizar subtrações. No problema 1, Daniel regista a operação 37 – 18, tenta resolvê-la e, apesar de chegar a uma possível solução (incorreta), sente necessidade de recorrer a outras estratégias para o ajudar a confirmar esse resultado. Essas estratégias parecem evidenciar que o aluno precisa de simplificar a operação para conseguir resolvê-la, nomeadamente decompondo os números por ordens (dezenas e unidades).

Na resolução do problema 6, Daniel mostra igualmente dificuldade em descrever todas as situações possíveis usando linguagem natural. Apesar de o aluno resolver o problema e apresentar cinco das soluções possíveis, este parece ter algumas dificuldades em explicar o seu raciocínio, no momento de discussão em turma, originando algumas dúvidas entre os colegas. Além disso, nos seus registos o aluno não consegue encontrar todas as soluções possíveis, encontrando apenas cinco e registando uma na resposta final. Contudo, após a discussão coletiva, foi possível compreender todas as soluções possíveis.

5.3. Letícia

5.3.1. As resoluções dos problemas

Problema 1 – O problema do Tomé

Ao resolver o primeiro problema, em que era preciso calcular o dinheiro que faltava ao Tomé para comprar a escova e pasta dentária, Letícia identifica-o como sendo de subtração, tal como mostra a figura 37.

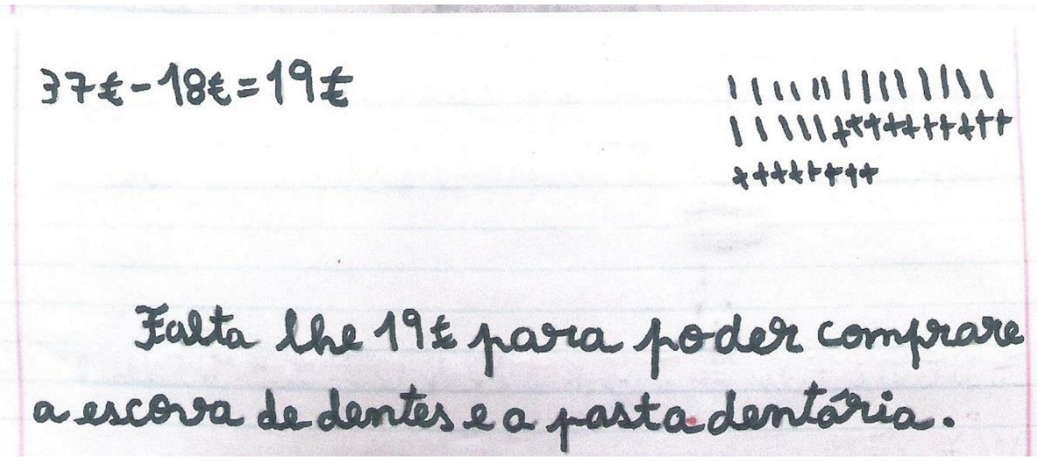


Figura 37 - Resolução de Letícia do problema n.º 1

A análise da resolução de Letícia permite perceber que a aluna considera que, para descobrir o dinheiro que faltava ao Tomé, tem de saber a diferença entre o preço da escova e o da pasta de dentes e o dinheiro que este tinha. Desta forma escreve a igualdade 37-18=19.

Ao lado da expressão, Letícia representa traços verticais que, possivelmente, a ajudaram a chegar ao resultado obtido. Efetivamente, a aluna parece ter partido do valor que ia precisar, 37 euros, pois há um total de 37 tracinhos, e destes risca 18. Ao riscar 18 tracinhos, deve ter verificado que restavam 19, valor que Letícia coloca como solução da subtração e que corresponde ao dinheiro que o Tomé necessitava para fazer a compra.

A estratégia de cálculo utilizada parece ser uma estratégia de contagem, embora a aluna pareça ter associado a subtração à situação proposta. O uso desta estratégia de contagem parece indicar que Letícia, provavelmente, não conseguia efetuar o cálculo 37-18 de outro modo.

Relativamente às etapas de resolução de problemas de Pólya, a aluna possivelmente tentou compreender o problema em primeiro lugar, parecendo preocupar-se com a seleção e construção de uma estratégia que lhe permitisse chegar à possível solução. Contudo, através dos seus registos, não é possível compreender se Letícia verificou a adequação do resultado encontrado ao contexto do problema.

Problema 2 – O problema da Senhora Redondinha

Para resolver o segundo problema, em que era necessário calcular o número de passageiros que iniciaram a viagem, Letícia recorre a representações icónicas para apoiar os seus cálculos. A figura seguinte apresenta a resolução da aluna.

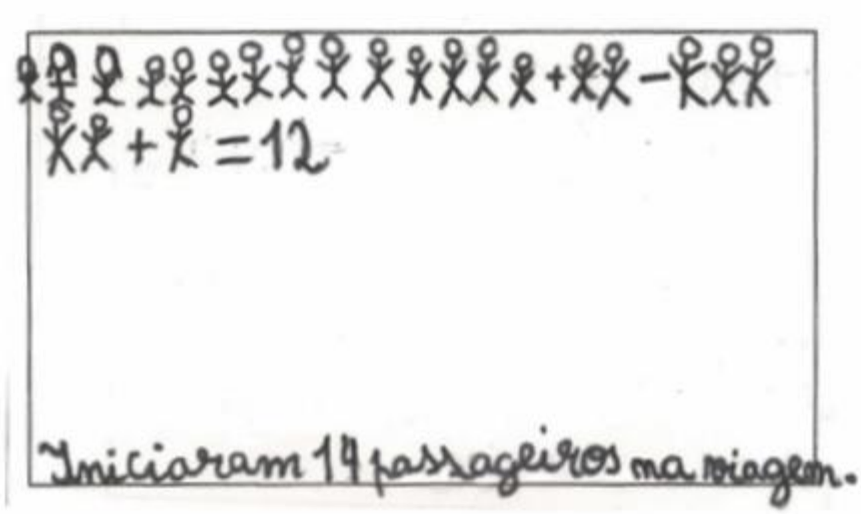


Figura 38 - Resolução de Letícia do problema n.º 2

A análise da sua resolução permite perceber que Letícia representa os dados que o problema fornece utilizando representações icónicas e números ao mesmo tempo. Em primeiro lugar, a aluna desenha cartorze pessoas, desenhando a seguir o número de passageiros que entrou e saiu, por ordem dos acontecimentos. É ainda possível identificar que, para representar a saída de passageiros, esta usa o sinal de subtração e para representar uma entrada usa o sinal de adição. O total corresponde ao número de passageiros que chegou ao destino.

Após realizar os cálculos e ter encontrado o número inicial de passageiros, Letícia chama-me, referindo já ter terminado o problema. Observando a sua resolução, questiono-a sobre a forma como pensou:

Investigadora: Explica-me como fizeste.

Letícia: Desenhei as pessoas e fiz as contas.

Investigadora: Sim? Já comprovaste se está certo?

(Letícia conta as representações da primeira parcela, adiciona dois, subtrai cinco e adiciona um, utilizando os dedos para auxiliar os cálculos. Verifica que não obtém o resultado que tem no total.)

Investigadora: Então?

Letícia: Falta um (desenha mais uma pessoa).

Investigadora: Podes confirmar?

Letícia: (volta a fazer os cálculos) Sim, dá.

(Notas de Campo, 25-novembro-2015)

A sua resposta parece mostrar que a aluna foi experimentando diferentes números iniciais de passageiros de forma a obter, no total, o número doze. Assim, o seu raciocínio parece ter subjacente uma estratégia de “tentativa e erro”. Além disso, a aluna verifica o resultado quando por mim solicitada. Assim, considerando as etapas de resolução de problemas, a aluna, possivelmente, passou por todas.

Problema 3 – Os biscoitos de Natal

Para resolver o terceiro problema, em que era preciso saber quantos biscoitos a Jéssica tinha levado para a escola, Letícia recorre à adição e à elaboração de um esquema para auxiliar e/ou comprovar os seus cálculos. As figuras 39 e 40 apresentam a resolução de Letícia.

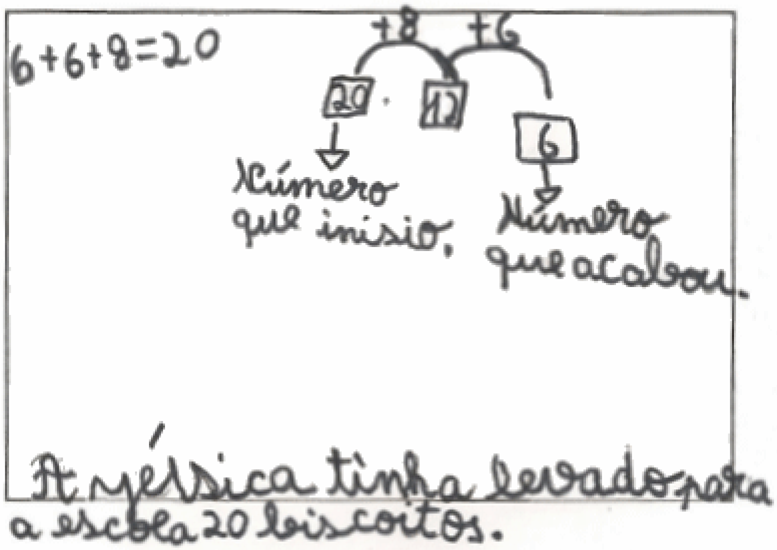


Figura 39 - Resolução de Letícia do problema n.º 3

A análise dos registos de Letícia permite perceber que a aluna começa por representar o problema através de uma adição que regista no canto superior esquerdo da folha. Esta operação apresenta, na primeira parcela, o número seis que parece corresponder ao número de biscoitos com que Jéssica ficou no final, na segunda parcela novamente o número seis que parece corresponder ao número de biscoitos dados aos rapazes do 1.º ano e, na terceira parcela, o número oito que parece ser o número de biscoitos dados aos amigos. O total é o número vinte que parece ser a solução para o problema, ou seja, o número de biscoitos que Jéssica tinha inicialmente.

Ao lado da igualdade, Letícia elabora um esquema que parece auxiliar e/ou verificar o resultado obtido. Este tem três quadrados em que o primeiro, com o número 20, está identificado como sendo o "número do início", possivelmente o número de biscoitos inicial, e o terceiro quadrado com o número seis, que a aluna escreve como sendo o "número que acabou", ou seja, o número de biscoitos que sobraram. Apesar de o quadrado com o número doze, que se encontra entre o primeiro e o segundo, não ter igualmente uma legenda, parece corresponder aos biscoitos que ela tinha depois de dar a primeira vez às amigas e antes de dar aos rapazes. Isto porque se encontra entre o número inicial e final de biscoitos.

O esquema inclui ainda a identificação dos "saltos" entre os três valores. O salto entre o número 20 e o número 12 está representado com o sinal de adição e o número oito, correspondendo possivelmente aos biscoitos que Jéssica deu aos rapazes. O outro "salto", entre o número 12 e o número 6, tem o sinal de adição e número seis que parece corresponder ao número de biscoitos que deu às amigas.

A primeira representação de Letícia 6+6+8=20 parece indicar que num primeiro momento a aluna recorre a uma estratégia do fim para o príncipio. Ainda assim, o esquema que parece construir posteriormente, tem subjacente uma estratégia do início para o fim. Provavelmente, esta representação corresponde a uma confirmação do número 20 como o número inicial de biscoitos.

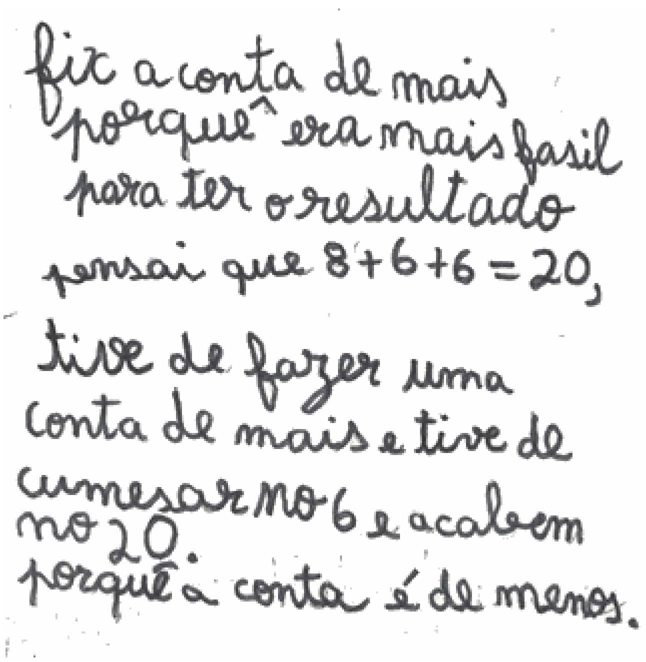

fiz a conta de mais
porquê era mais fasil
para ter o resultado
pensai que 8+6+6 = 20,
tive de fazer uma
conta de mais e tive de
cumesar no 6 e acabem
no 20.
porquê a conta é de menos.

Figura 40 - Verso da resolução de Letícia do problema n.º 3

Depois de resolver o problema, numa tentativa de explicitar o seu raciocínio, Letícia explica e justifica, em linguagem natural, a escolha da operação que realiza para conseguir chegar à solução do problema. Ao escrever “tive de fazer uma conta de mais e tive de começar no 6 e acabar no 20” a aluna parece confirmar que pensou do fim para o princípio. Em seguida refere “porquê a conta é de menos”, o que parece mostrar que Letícia sabe que, se foram dados biscoitos, Jéssica fica com menos do que tinha antes. Como tal, ao realizar o seu raciocínio ao contrário, tem de usar uma adição.

Contudo, embora os registos que efetua evidenciem que pensou corretamente, a aluna parece ter dificuldades em explicar o seu raciocínio recorrendo à linguagem natural.

Em relação às etapas de resolução de problemas de Pólya, é possível perceber que Letícia compreende o problema, identifica e constrói uma estratégia, registando os passos dados. Embora a aluna não o tenha explicitado, o segundo conjunto de registos parece ser a confirmação dos primeiros cálculos efetuados.

Problema 4 – Os abraços

Para resolver o problema “Os abraços”, em que era necessário calcular o número de abraços que foram dados entre os amigos, Letícia recorre a uma mistura entre registos do tipo icónico e simbólico. As figuras seguintes apresentam a resolução da aluna.

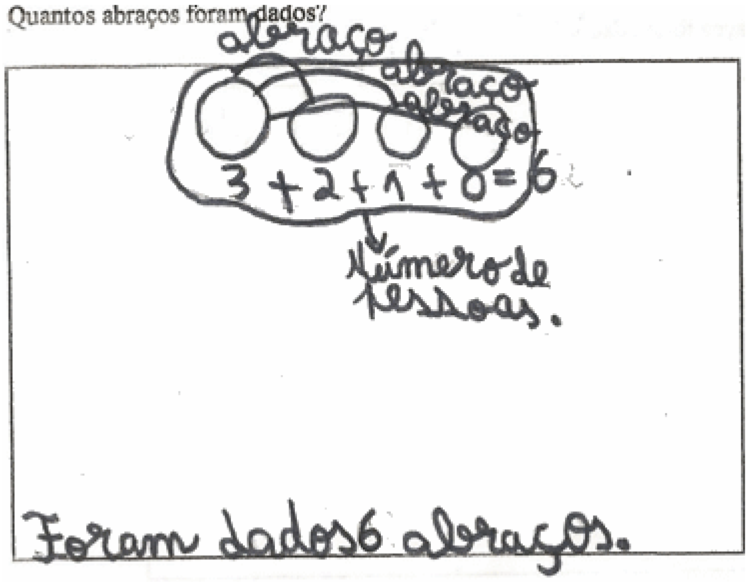


Figura 41 - Resolução de Letícia do problema n.º 4

Analisando os registos de Letícia é possível perceber que a aluna desenha, na parte superior, quatro círculos que parecem representar as personagens referidas no enunciado. No círculo mais à esquerda, a aluna desenha linhas que representam o número de abraços que essa personagem deu aos amigos, uma vez que, por cima dessas linhas, a aluna escreve "abraços".

Por baixo da representação de cada um dos amigos, Letícia coloca um número e entre eles um sinal de adição, de modo a fazer um cálculo. Cada uma das quatro parcelas parece representar o número de abraços dados por cada amigo. É de realçar que, a primeira parcela corresponde ao número três, a segunda ao número dois, a terceira ao número um e a última ao número zero, mostrando que o último amigo não dá mais abraços, para além dos que já foram dados.

É ainda de destacar que a aluna apenas representa de modo icónico o número de abraços dado pelo primeiro amigo, não precisando de representar, desse modo, os restantes abraços dados.

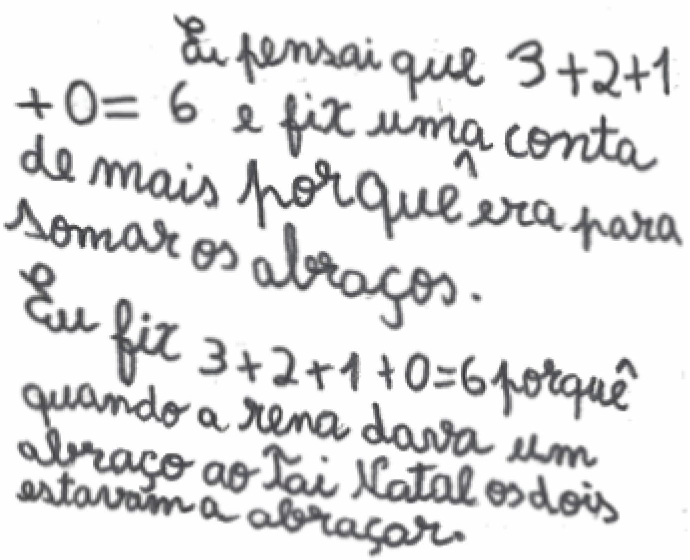

Eu pensai que 3+2+1
+0= 6 e fiz uma conta
de mais porquê era para
somar os abraços.
Eu fiz 3+2+1+0=6 porquê
quando a rena dava um
abraço ao Pai Natal os dois
estavam a abraçar.

Figura 42 - Verso da resolução de Letícia do problema n.º 4

Após resolver o problema, numa tentativa de explicitar o seu raciocínio, Letícia descreve, em linguagem natural, a escolha da operação que realizou para conseguir chegar à solução do problema. Neste sentido, a aluna começa por referir que fez "uma conta de mais porque era para somar os abraços", mostrando que compreende o problema, nomeadamente que, para ter o número total de abraços dados, teria de somá-los. Seguidamente, ao escrever "quando a rena dava um abraço ao Pai Natal os dois estavam a abraçar", a aluna parece querer explicar que a rena abraçar o Pai Natal, e o Pai Natal abraçar a rena é a mesma coisa e, por isso, só conta um abraço.

No momento de discussão do problema, a aluna desloca-se ao quadro e tenta explicar o seu raciocínio oralmente, com o apoio das suas representações:

> Letícia: Eu pensei que este [aponta para o primeiro círculo] tinha dado três abraços. Este [aponta para o segundo círculo] dois, este [aponta para o terceiro círculo] um e este [aponta para o quarto círculo] zero. E era igual a seis abraços.
>
> Investigadora? Porque é que o primeiro dá três abraços, o segundo dá dois, o terceiro um?
>
> Letícia: Porque este quando dá abraço a este…
>
> Investigadora: Então imagina que este é o Pai Natal [aponta para o primeiro círculo]. Ele dá um abraço…
>
> Letícia: À rena.
>
> Investigadora: Muito bem…
>
> Letícia: A rena já não pode dar um abraço ao Pai Natal. (…)

Investigadora: (…) Então e o último vai dar um abraço a alguém?

Letícia: Não.

Investigadora: Porquê?

Letícia: Porque já deram todos um abraço a ele e ele também.

A sua resposta parece confirmar os seus registos escritos, ou seja, a aluna compreende o problema e começa por utilizar representações icónicas para simular a situação e chegar à resposta, apoiando-se também nos cálculos que efetua. Além disso, confirma o que foi dito anteriormente no que diz respeito aos registos em linguagem natural. É necessário salientar que não é percetível se Letícia passa pela última etapa de resolução de problemas.

Problema 5 – As sandes dos Reis Magos

No quinto problema, em que era preciso calcular o número de sandes que era possível fazer com apenas um ingrediente, Letícia recorre a representações icónicas e à elaboração de uma lista para apoiar o seu raciocínio. A figura seguinte apresenta a resolução da aluna.

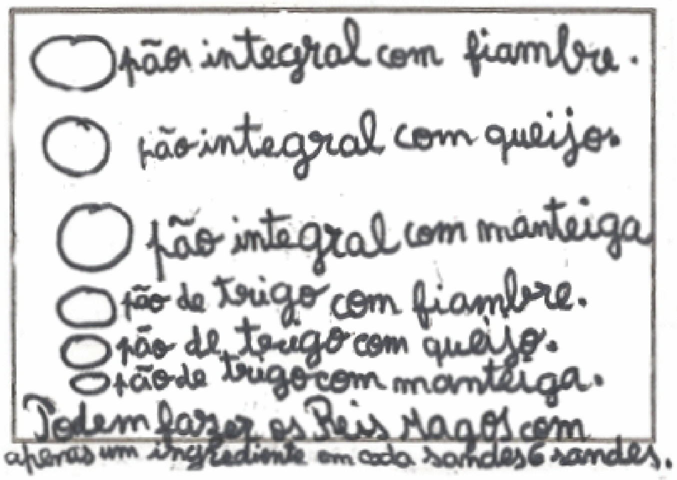


Figura 43 - Resolução de Letícia do problema n.º 5

A análise dos registos de Letícia permite perceber que a aluna recorre, num primeiro momento, à representação icónica dos vários tipos de sandes, desenhando seis círculos, verticalmente, no canto esquerdo. Num segundo momento parece associar a cada uma dessas representações, a correspondente expressão escrita, discriminando o tipo de pão e o tipo de ingrediente. Desta forma, começa por fixar um tipo de pão (pão integral) e relaciona-o com os três possíveis ingredientes (fiambre, queijo e manteiga).

Depois faz o mesmo para o pão integral, mantendo a mesma ordem dos ingredientes. Esta estratégia aproxima-se da construção de uma lista ordenada.

No momento de discussão do problema, a aluna desloca-se ao quadro para explicar o seu raciocínio:

> Letícia: Havia dois tipos de pão, um integral e um de trigo. E havia três ingredientes, fiambre, queijo e manteiga.
>
> Investigadora: Então o que fizeste com essa informação?
>
> Letícia: Fiz três de integral e três de trigo. Um integral era de fiambre, outro era de queijo e outro era de manteiga. E depois de trigo era outro de fiambre, um de queijo e um de manteiga.
>
> Investigadora: Certo Letícia…
>
> Letícia: Depois juntei estes todos e deu seis. Então foram seis pães que os Reis Magos fizeram para eles. (…)
>
> Investigadora: (…) Letícia diz-me uma sandes que tenhas feito.
>
> Letícia: Pão integral com fiambre.
>
> Investigadora: Outra diferente.
>
> Letícia: Pão integral com queijo (…) E pão integral com manteiga.
>
> Investigadora: Podes fazer mais sandes com pão integral?
>
> Letícia: Não.
>
> Investigadora: Porquê?
>
> Letícia: Porque só tenho três ingredientes.

As suas respostas parecem confirmar os seus registos escritos, ou seja, a aluna pensou nas diferentes sandes que podia fazer, começando por considerar o tipo de pão e só depois os ingredientes que colocaria em cada um. Além disso, a sua resposta também permite afirmar que Letícia parece ter compreendido o problema, selecionando uma estratégia e usando-a até chegar a uma possível solução. Embora tenha resolvido corretamente o problema, não é possível perceber se a aluna verificou a solução obtida.

No que diz respeito à estratégia de resolução, Letícia recorre a uma das previstas, nomeadamente, fazer uma lista ordenada para estruturar os dados e conseguir chegar à solução.

Problema 6 – O lanche da Andreia

Para resolver o último problema, em que era necessário calcular quantos amigos a Andreia podia convidar para lanchar, de forma a distribuir o mesmo número de queques a cada um, Letícia recorre a representações icónicas para apoiar o seu raciocínio. A figura seguinte apresenta a solução de Letícia.

Figura 44 - Resolução de Letícia do problema n.º 6

A análise dos registos de Letícia permite perceber que a aluna desenha três situações possíveis para o problema, separando as várias representações para, possivelmente, se organizar. Em cada uma das divisões, Letícia desenha várias representações de figuras humanas que poderão dizer respeito aos amigos e, junto a cada uma, desenha círculos que parecem corresponder aos queques distribuídos.

Num primeiro momento, Letícia representa quatro amigos e, por baixo de cada um, desenha três círculos, ou seja, três queques. Mais à direita representa seis amigos, fazendo corresponder dois queques a cada um. Por fim representa, no canto inferior direito, dois amigos, desenhando ao lado de cada um, seis queques.

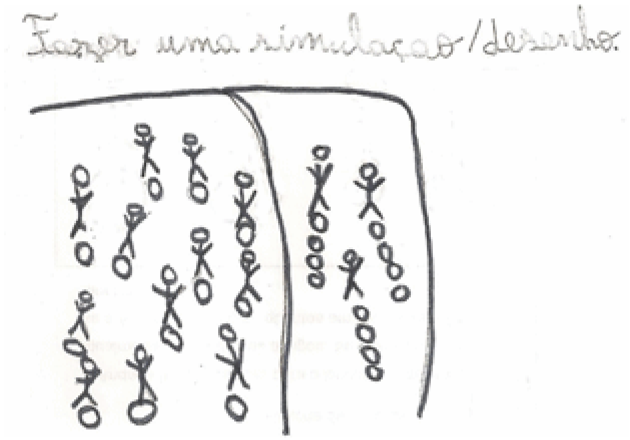


Figura 45 - Verso da resolução de Letícia do problema n.º 6

No verso da sua folha de registos, Letícia concretiza mais duas representações de soluções do problema, voltando a desenhar os amigos e os queques. As situações apresentadas são diferentes das anteriores. À esquerda, a aluna representa doze amigos com um queque cada um e à direita desenha três amigos com quatro queques cada um. Tal como nos primeiros registos, Letícia volta a separar as situações dividindo a folha em duas partes.

A aluna simula assim cinco situações diferentes para o problema, alterando o número de amigos e, consequentemente, o número de queques por amigo. Na primeira parte dos registos de Letícia observa-se a resposta final da aluna, em que identifica as cinco soluções encontradas, embora não indique o número de queques que cada amigo recebe em cada situação.

Relativamente à estratégia e embora o problema permitisse recorrer a mais do que uma, os registos de Letícia mostram que recorre a representações/simulações/experimentações, utilizando desenhos para simular quantos queques podia distribuir por cada amigo. Além disso, é possível verificar que a aluna escreve o nome da estratégia nos seus registos, utilizando a denominação “fazer uma simulação/desenho”.

A análise dos registos permite identificar que a aluna compreende o problema e delineia um plano que usa para encontrar as hipóteses possíveis de solução. Contudo, não é possível perceber se esta examinou a solução obtida, visto que, ao observar a sua resolução, não é visível se verifica os dados obtidos e se reflete sobre o resultado. É importante ainda referir que Letícia apresenta apenas cinco das seis soluções possíveis.

5.3.2. Síntese das resoluções dos problemas

Ao longo da análise dos registos de Letícia, são visíveis diferenças entre as resoluções dos diferentes problemas. Para tentar compreender essas diferenças, a tabela seguinte sintetiza os principais aspetos analisados, nomeadamente as estratégias usadas pela aluna na resolução dos problemas propostos, as etapas de resolução que percorreu e as principais dificuldades que manifestou.

Tabela 4 – Síntese das estratégias de resolução de problemas, das dificuldades e das etapas percorridas por Letícia

	Prob. 1	**Prob. 2**	**Prob. 3**	**Prob. 4**	**Prob. 5**	**Prob. 6**
Estratégias de resolução	Estratégia de contagem	Fazer tentativas	Trabalhar do fim para o princípio	Fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização	Fazer uma lista	Fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização
Etapas de resolução que parece ter percorrido	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.
Dificuldades manifestadas			Justificar o raciocínio usando a expressão escrita (linguagem natural)			Encontrar todas as soluções do problema

A análise da tabela e das produções de Letícia permitem afirmar que a aluna recorre a diversas estratégias para resolver os seis problemas propostos, auxiliando, geralmente, os seus cálculos com representações icónicas e/ou simbólicas.

Consoante a informação recolhida no momento de compreensão do problema, Letícia constrói uma estratégia que lhe parece mais adequada para chegar à solução correta. Como tal, no primeiro problema a aluna parece ter optado por uma estratégia de contagem, sendo a proposta apresentada um problema de subtração no sentido de completar.

Subjacente aos problemas 2 e 3 estava uma estratégia de "trabalhar do fim para o princípio" que Letícia apenas usa para resolver o problema 3, após a estratégia ter sido introduzida na sessão anterior. Assim, para resolver o problema 2, a aluna parece optar por uma estratégia de tentativa e erro.

Nos problemas 4 e 6 Letícia opta por simular a situação proposta usando representações icónicas que a ajudam a auxiliar os seus cálculos. No que diz respeito ao problema 4, a estratégia usada pela aluna era a subjacente ao problema proposto "fazer uma simulação/experimentação/dramatização".

No problema 5, Letícia representa também a situação usando registos icónicos, mas estes têm a função de auxiliar a construção de uma lista com as hipóteses possíveis.

Além das estratégias usadas, os seus registos mostram que a aluna não parece apresentar grandes dificuldades na resolução dos diferentes problemas. Apenas no que diz respeito ao problema 3, os seus registos mostram que Letícia teve dificuldade em justificar o seu raciocínio usando a linguagem natural, uma vez que, não consegue explicar os cálculos efetuados.

Na resolução do último problema, a aluna apenas encontra cinco das soluções possíveis, parecendo não ter conseguido encontrar todas. Contudo percebe que o problema tem mais do que uma solução e aproxima-se da resposta mais completa.

A tabela mostra também que Letícia parece compreender a maioria das etapas de resolução de problemas propostas por Pólya, pois em quase todos os problemas, a aluna passa pelas três primeiras etapas. Relativamente à última etapa não é possível perceber pelos seus registos se, em todas as situações, a aluna verifica se a solução encontrada se adequa ao contexto, sendo apenas possível confirmar esse aspeto nas resoluções dos problemas 2 e 3.

5.4. Tomás

5.4.1. As resoluções dos problemas

Problema 1 – O problema do Tomé

Para resolver o "Problema do Tomé" em que era necessário calcular o dinheiro que faltava à personagem para comprar a escova e a pasta de dentes, Tomás parece ter recorrido a representações do tipo icónico para apoiar o seu raciocínio, tal como mostra a figura.

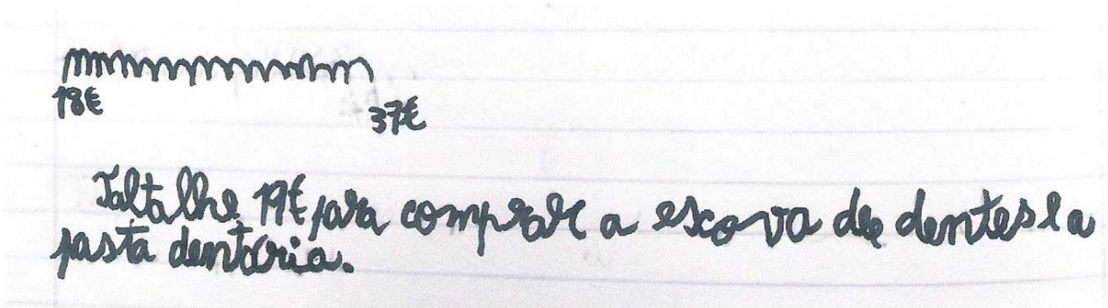


Figura 46 - Resolução de Tomás do problema n.º 1

A análise da sua resolução permite perceber que Tomás considera que tem de saber quantos números estavam entre o 18 e o 37 para descobrir o dinheiro que faltava ao Tomé. Como tal, mais à esquerda, representa o número 18, correspondendo ao dinheiro que o Tomé tem guardado e, mais à frente, apresenta o número 37 que diz respeito ao valor da escova e pasta de dentes. Entre esses números o aluno parece representar "saltos", ou seja, parece ter representados saltos de "um" desde o 18 até ao 37. Ao contá-los deve ter verificado que foram dados 19, valor que Tomás coloca como resposta ao problema.

No momento inicial de introdução do problema, com o objetivo de compreender o seu raciocínio, questionei o aluno sobre como estaria a pensar realizá-lo. E, embora não tenha registado o diálogo usando um gravador, anotei-o nas minhas notas de campo:

> Investigadora: Como é que tu vais pensar?
>
> Tomás: Começo no 18 e vou fazer de um em um até chegar ao 37.

(Notas de campo, 18-novembro-2014)

A sua resposta confirma os seus registos escritos, ou seja, o aluno conta, de um em um, quantos saltos é possível dar do 18 até 37. Assim, ao contar 19 saltos, Tomás considera que esse é o dinheiro que falta ao Tomé para comprar a escova e a pasta de dentes.

Além disso, os seus registos parecem mostrar, ainda, que o aluno apagou a contagem dos saltos dados, que se encontrava por cima dos mesmos, embora isso o tenha ajudado a contar corretamente.

No que diz respeito às etapas de resolução de problemas de Pólya, Tomás possivelmente tentou, numa primeira fase, compreender o problema, parecendo preocupar-se depois com a seleção e construção de uma estratégia que lhe permitisse chegar à solução. Contudo, embora tenha resolvido corretamente o problema, os seus registos não permitem perceber se o aluno verificou a solução obtida.

Problema 2 – O problema da Senhora Redondinha

Para resolver o segundo problema, em que era necessário calcular o número de passageiros que iniciaram a viagem, considerando as paragens que efetuou ao longo do percurso, Tomás parece recorrer à adição e à reta numérica para auxiliar os seus cálculos. A figura 47 apresenta a resolução do aluno.

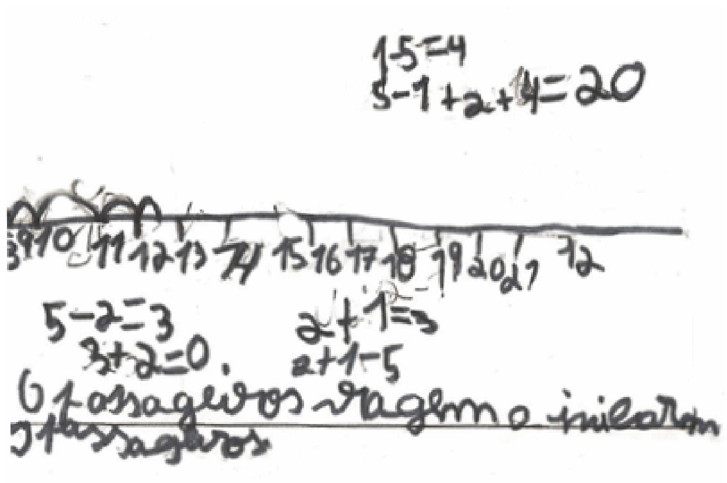


Figura 47 - Resolução de Tomás do problema n.º 2

Analisando os registos de Tomás é possível perceber que o aluno começa por representar, no canto superior direito, duas operações. Na primeira expressão coloca o número um no aditivo, que parece dizer respeito ao número de passageiros que entrou na terceira paragem e, no subtrativo coloca o número cinco que deve ser o número de passageiros que saiu na segunda paragem. Ao realizar uma subtração o aluno poderia estar a pensar que ao saírem cinco passageiros, ficaram menos contudo, não é possível compreender porque Tomás subtrai o número de passageiros que entraram na terceira paragem ao número de passageiros que saiu no segundo momento. Além disso, do ponto de vista matemático, a operação está incorreta pois no conjunto dos números naturais, o aditivo tem de ser maior ou igual ao subtrativo.

Na segunda expressão, o aluno volta a recorrer aos números cinco e um, colocando o número maior na primeira parcela, o um na segunda e adiciona também dois e quatro. O número dois parece dizer respeito aos passageiros que entraram na primeira paragem enquanto o número quatro parece ser o resultado (incorreto) da subtração anterior. Ao somar dois parece que o aluno compreende que ao entrarem pessoas, o autocarro fica com mais passageiros. Contudo, tal como na primeira expressão, não é possível compreender porque o aluno a regista e efetua. Além disso, o seu resultado apresentado não está matematicamente correto, pois 5-1+2+4= 10.

No momento de exploração do problema, o aluno pede que me desloque até junto dele, mostrando-me os seus registos com os primeiros cálculos e parte da reta numérica já elaborada. Embora não tenha gravado o diálogo que mantive com Tomás, registei-o nas minhas notas de campo:

> Tomás aponta para a reta numérica.
>
> Investigadora: Vais realizar o problema recorrendo à reta numérica?
>
> Tomás: Sim.
>
> Investigadora: Explica-me como vais fazer. Vais começar por que número?
>
> Tomás: Vou começar no doze e vou dar saltos.
>
> Investigadora: Como assim "saltos"?
>
> Tomás: Para trás. Como saiu um passageiro vou andar para trás.

(Notas de campo, 25-novembro-2014)

As suas respostas mostram que o aluno pensa que tem de começar no número de passageiros final e dar saltos consoante as pessoas que saem e entram no autocarro. Assim parece que Tomás estrutura o seu raciocínio do fim para o princípio. No entanto, na sua resposta, o aluno refere que a viagem se iniciou com zero passageiros. Este aspeto pode estar associado ao facto de, na reta numérica, os números mais à esquerda (“atrás”), serem menores e, na situação proposta, no princípio há um número maior de passageiros.

Por baixo da resta numérica, Tomás apresenta ainda várias operações em que utiliza o número de passageiros que entraram e saíram do autocarro durante a viagem. Contudo não é possível compreender porque realizou essas operações. Além disso, a operação 3+2 está incorreta do ponto de vista matemático pois 3+2=5.

Em síntese, os registos de Tomás mostram que recorre essencialmente à reta numérica no sentido de identificar o número inicial de passageiros. Ainda assim, não usa os dados de forma correta, revelando dificuldades que podem estar associadas ao uso da estratégia “trabalhar do fim para o princípio”, subjacente ao problema proposto, e à sua concretização usando a reta numérica.

Relativamente às etapas de resolução de problemas, Tomás parece não ter passado pela última etapa e revela dificuldades na concretização do plano recorrendo à reta numérica.

Problema 3 – Os biscoitos de Natal

Para resolver o problema “Os biscoitos de Natal”, em que era necessário calcular quantos biscoitos a Jéssica tinha levado para a escola, Tomás parece ter recorrido à adição, tal como mostra a figura 48.

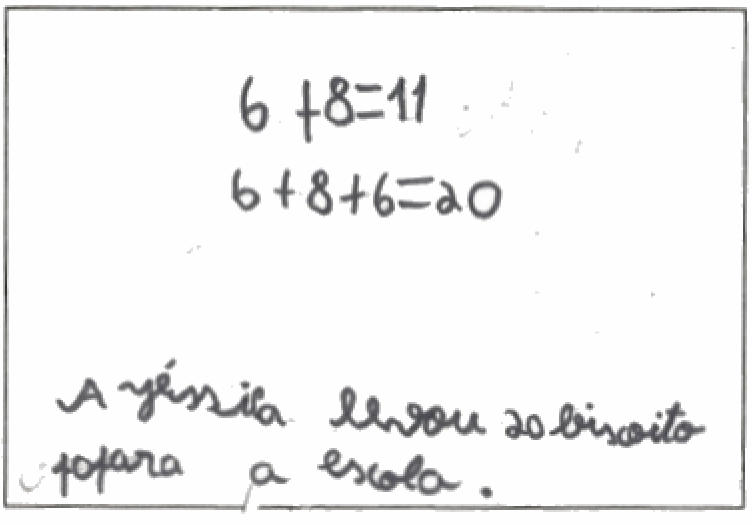


Figura 48 - Resolução de Tomás do problema n.º 3

A análise dos registos de Tomás permite perceber que o aluno começa por adicionar os números seis e oito, que parecem representar os biscoitos dados aos rapazes da turma do primeiro ano e às suas amigas, respetivamente. O resultado da adição, além de estar incorreto, não parece ser usado em mais nenhum momento da resolução do problema.

Por baixo da primeira expressão, Tomás regista o que parece ser o cálculo que o ajudou a chegar a solução do problema. Assim, volta a realizar uma adição mas com três parcelas, colocando novamente nas duas primeiras os números seis e oito e na terceira coloca o número seis. Neste sentido, o número seis e oito parecem corresponder aos biscoitos dados aos amigos (duas vezes), tal como no cálculo anterior, e o último seis representa o número de biscoitos com que Jéssica ficou no final. Assim, o total corresponde ao número inicial de biscoitos que Jéssica tinha levado para a escola, 20 biscoitos.

Ao efetuar cálculos aditivos, o aluno parece compreender que Jéssica, no início, tinha mais biscoitos, antes de dar alguns aos colegas. Além disso, parece ter estruturado o seu raciocínio do fim para o princípio, tal como está subjacente ao problema.

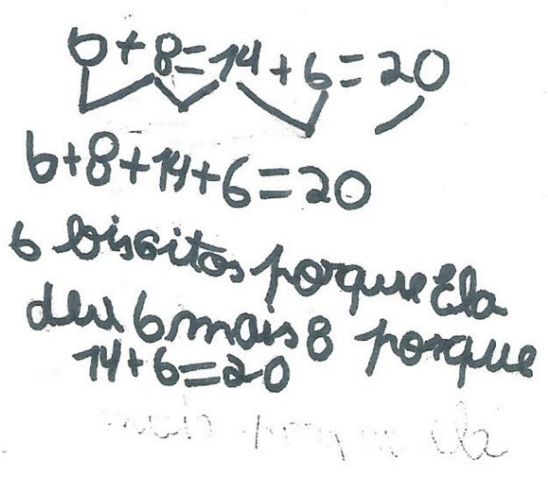


Figura 49 – Verso da resolução de Tomás do problema n.º 3

No verso da sua folha de registos, Tomás parece tentar recorrer a uma outra estratégia para verificar os cálculos anteriores. Desta forma o aluno começa por efetuar a operação 6+8 e, ao seu resultado (14), adiciona seis, obtendo no final o número 20 que o aluno referiu como sendo a solução do problema. Esta expressão parece ser igual à segunda que se encontra na figura 48, contudo o aluno mostra mais explicitamente como realizou os cálculos, ou seja, primeiramente fez 6+8 e ao seu resultado soma seis.

Seguidamente, Tomás volta a apresentar uma expressão com os mesmos valores que a anterior mas somando-os todos. Ao realizar esta operação, o aluno parece ter como objetivo comprovar o resultado anterior, embora as duas igualdades estejam matematicamente incorretas.

Após realizar os cálculos e numa tentativa de explicar o seu raciocínio, Tomás justifica, em linguagem natural, porque realiza uma operação de adição. Desta forma o aluno escreve "6 biscoitos porque ela deu 6 mais 8 porque 14+6=20", o que parece mostrar que pensou primeiramente nos biscoitos que a Jéssica deu aos amigos, adicionando os que deu no primeiro momento com os do segundo momento. Além disso, verifica-se que o aluno possivelmente ia continuar a explicação do seu raciocínio, no entanto acaba por apagar alguns registos.

No que diz respeito às etapas de resolução de problemas de Pólya, Tomás possivelmente tentou, numa primeira fase, compreender o problema, parecendo preocupar-se depois com a seleção e construção de uma estratégia que lhe permitisse chegar à solução. Os registos que se encontram no verso da folha parecem corresponder à última etapa de resolução de problemas "examinar a solução", de modo a verificar se 20 era, de facto, o número pretendido.

Problema 4 – Os abraços

Para resolver o problema quatro, onde era preciso calcular o número de abraços dados entre os amigos, Tomás recorre a representações do tipo icónico para apoiar possíveis cálculos efetuados. A figura seguinte apresenta a resolução do aluno.

Figura 50 - Resolução de Tomás do problema n.º 4

Analisando os registos de Tomás é possível perceber que o aluno começa por representar, mais à esquerda, o problema utilizando desenhos de figuras humanas e linhas que parecem ligar cada uma das figuras. Contudo, estes registos estão parcialmente apagados e aparentemente o aluno "abandona" essa estratégia.

À direita da folha, Tomás desenha sete círculos, estando estes agrupados dois a dois exceto o último, dando um total de quatro representações, que parecem corresponder aos amigos referidos no enunciado. Em cada uma das representações das pessoas, existem linhas a ligá-las umas às outras, que parecem representar o número de abraços dados entre eles. Por baixo de cada representação, o aluno coloca um número que corresponde ao número de abraços que dá cada um dos amigos. Começa por identificar que o primeiro amigo dá três abraços, o segundo dois, o terceiro um e o último não dá abraços, para além dos que já foram dados.

Quando termina o problema, Tomás chama-me para junto dele para me mostrar a sua resposta e a sua resolução. Este diálogo foi registado nas minhas notas de campo, embora não tenha gravado:

Investigadora: Deram seis abraços? É essa a tua resposta?

Tomás: Sim.

Investigadora: Podes explicar-me?

Tomás: Então está aqui. [Aponta para a representação mais à direita].

Investigadora: Então explica-me. Como são seis abraços no total?

Tomás: Este [aponta para o primeiro par de círculos] abraça este, este e este [aponta para os restantes, um de cada vez]. Este [aponta para o segundo par de círculos] abraça este e este [aponta para os outros círculos representados à frente].

Investigadora: Então e não abraça o outro?

Tomás: Não.

Investigadora: Porquê?

Tomás: Então se eu der um abraço ao Diogo [levanta-se e vai abraçar o colega ao lado] já nos abraçámos.

(Notas de campo, 9-dezembro-2015)

A sua resposta parece confirmar os seus registos escritos, ou seja, o aluno "imaginou" os abraços e compreende que, quando uma pessoa abraça a outra, estão ambas a abraçar-se e, por isso, é apenas contabilizado um abraço. Neste sentido, a sua resposta e respetiva resolução permitem-me afirmar que Tomás percorreu as três primeiras etapas de resolução de problemas. Ainda assim não é possível perceber se passou pela última etapa "examinar a solução".

No que diz respeito à estratégia de resolução, o aluno recorre a uma simulação da situação para apoiar os seus cálculos e assim chegar à solução correta.

Problema 5 – As sandes dos Reis Magos

Para resolver o quinto problema, em que era necessário calcular o número de sandes que podiam ser feitas com dois tipos de pão e três ingredientes, Tomás recorre à adição tal como apresenta a figura 51.

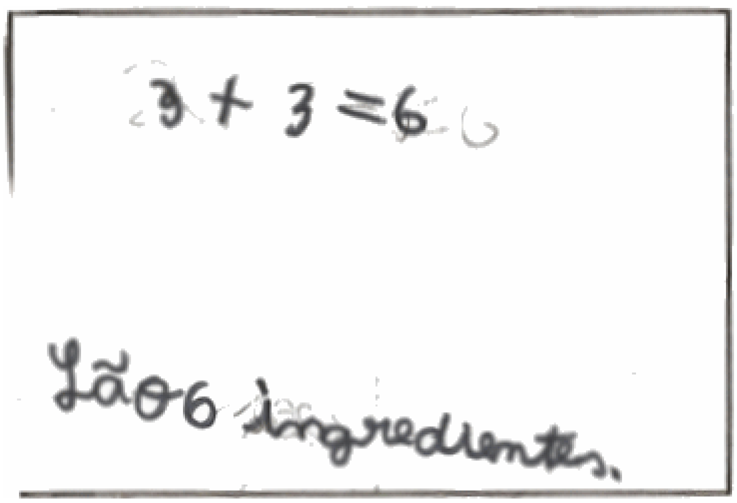


Figura 51 - Resolução de Tomás do problema n.º 5

O registo de Tomás mostra que o aluno efetua uma adição com duas parcelas, cada uma com o número três e cujo total é seis, que corresponde aos “ingredientes”, tal como o aluno indica na sua resposta. Embora não tenha explicado como fez, a sua resposta parece mostrar que Tomás somou duas vezes os três ingredientes, uma vez que o enunciado refere a existência de dois tipos de pão e assim obteve seis ingredientes no total. Ou seja, o aluno parece interpretar que existem três ingredientes e dois tipos de pão e que assim pode fazer duas sandes com três ingredientes cada, num total de seis.

Contudo, Tomás não responde quantas sandes são possiveis fazer, referindo-se a ingredientes e não a sandes.

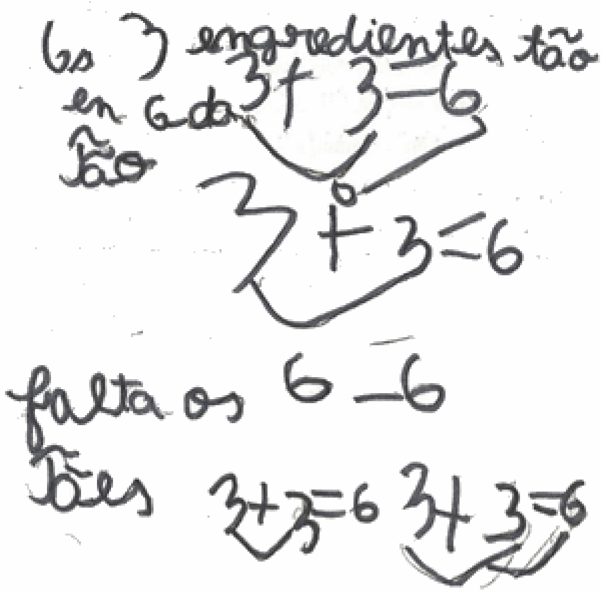


Figura 52 - Verso da resolução de Tomás do problema n.º 5

No verso da sua folha, Tomás parece tentar explicar o seu raciocínio, escrevendo “Os três ingredientes tão em cada pão”, ou seja, para o aluno podem ser feitas sandes com os três ingredientes, voltando a apresentar a operação 3+3=6. Seguidamente escreve “falta os 6-6 pois 3+3=6”, não sendo possível perceber porque apresenta este cálculo.

Em síntese, os registos de Tomás mostram que recorre à adição para identificar o número de ingredientes a ser usados para fazer as sandes. Contudo, a resposta revela-se incorreta perante o enunciado do problema. Como tal, parece que o aluno teve dificuldades na interpretação final da situação, ou seja, o significado do número seis que obteve.

Relativamente às etapas de resolução de problemas, Tomás parece não ter passado pela última etapa e revela dificuldades na interpretação dos cálculos que efetua e no confronto com o contexto proposto.

Problema 6 – O lanche da Andreia

Para resolver o problema seis, em que era necessário calcular quantos amigos a Andreia podia ter a lanchar distribuindo 12 queques por todos de igual forma, Tomás recorre à adição, tal como mostra a figura 53.

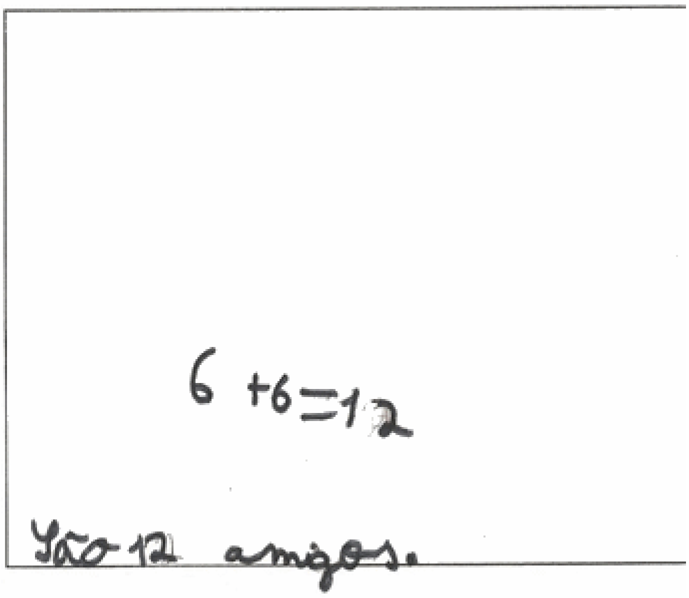


Figura 53 - Resolução de Tomás do problema n.º 6

A análise dos registos de Tomás permite perceber que o aluno apresenta uma adição com duas parcelas, colocando em ambas o número seis. Ambos os números parecem dizer respeito ao número de queques por amigo, ou seja, o aluno parece assumir que existem dois amigos, ficando cada um com seis queques. No entanto, quando apresenta a resposta ao problema, refere-se a doze amigos.

Uma vez que o problema inclui mais do que uma solução, é importante referir que Tomás apresenta apenas uma das soluções possíveis.

No que diz respeito à estratégia propriamente dita, embora o problema pudesse ser resolvido recorrendo a mais do que uma, os registos de Tomás mostram que este recorre a uma estratégia aditiva.

A análise dos registos de Tomás permite também perceber que o aluno parece compreender o problema e delineia um plano que usa para encontrar uma das hipóteses possíveis. Considerando a sua resolução, o aluno não parece ter verificado e refletido sobre a solução obtida.

Contudo, não é possível perceber se este examina a solução obtida, visto que, ao observar a sua resolução, não é visível se verifica os dados e de reflete sobre o resultado.

5.4.2. Síntese das resoluções dos problemas

Ao longo da análise dos registos de Tomás, são identificadas diferenças entre as resoluções dos diferentes problemas. Para tentar compreender essas diferenças, a tabela seguinte sintetiza os principais aspetos analisados, nomeadamente as estratégias usadas pelo aluno na resolução dos problemas propostos, as etapas de resolução que percorreu e as principais dificuldades manifestadas.

Tabela 5 – Síntese das estratégias de resolução de problemas, das dificuldades e das etapas percorridas por Tomás

	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Prob. 5	Prob. 6
Estratégias de resolução	Estratégia de contagem de um em um	Trabalhar do fim para o princípio	Trabalhar do fim para o princípio	Fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização	Estratégia aditiva	Estratégia aditiva
Etapas de resolução que parece ter percorrido	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano (de forma incorreta).	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.
Dificuldades manifestadas		Usar a estratégia "trabalhar do fim para o princípio"	Usar o sinal de igual		Interpretar a solução obtida Justificar o raciocínio usando a expressão escrita (linguagem natural)	Encontrar todas as soluções do problema

A análise da tabela e das produções de Tomás permitem afirmar que o aluno recorre a diferentes estratégias para resolver os problemas, auxiliando, de uma forma geral, os seus cálculos com representações simbólicas.

No primeiro problema, Tomás parece optar por contar de um em um, registando como pensou através dos “saltos” para a frente que podiam ser dados entre dois valores. Subjacente aos problemas 2 e 3 estava uma estratégia de “trabalhar do fim para o princípio” que o aluno usa para resolver ambos, apesar de apenas ter conseguido chegar à solução correta do problema 3.

No problema 4, Tomás opta por simular a situação proposta usando uma representação icónica associada a registos simbólicos. A estratégia a que o aluno recorre é a estratégia subjacente ao problema, nomeadamente “fazer uma simuação/experimentação/dramatização”.

Subjacente ao problema 5 estavam as estratégias “fazer um esquema” ou “fazer uma lista organizada” que Tomás não usa, parecendo optar por uma estratégia aditiva. No problema 6, em que era possível recorrer a mais do que uma estratégia, o aluno volta a recorrer à adição para tentar chegar à solução pretendida.

A tabela síntese mostra ainda que Tomás parece ter compreendido as etapas de resolução de problemas uma vez que a elas recorre para resolver os problemas. Apenas no que diz respeito à última etapa, não é possível perceber pelos seus registos se, em todas as situações, o aluno verifica se a solução se adequa.

Apesar de ter recorrido a quase todas as etapas, a resolução do problema 2 mostra que Tomás teve dificuldades em concretizar o plano que delineou para chegar à solução, originando cálculos incorretos e, consequentemente, a uma solução menos correta. As dificuldades reveladas podem estar associadas ao uso da estratégia subjacente “trabalhar do fim para o princípio” e à sua concretização usando a reta numérica. Isto acontece possivelmente porque, na reta numérica, os números mais à esquerda são menores, enquanto na situação proposta, no principio há um número maior de passageiros.

Além disso, os seus registos mostram alguns cálculos matematicamente incorretos, parecendo que o aluno, por vezes, tem dificuldade em efetuar adições e subtrações principalmente com mais do que duas parcelas. Na subtração, o aluno parece não diferenciar ainda o aditivo do subtrativo pois coloca o número maior no subtrativo.

Na resolução do problema 3, o aluno mostra também dificuldades no uso da linguagem simbólica, usando de forma incorreta o sinal de igual. Neste caso, Tomás iguala 6+8=14+6=20 e 6+8+14+6=20.

Na resolução do problema 6, Tomás parece também ter dificuldades em encontrar todas as soluções do mesmo, registando apenas uma das soluções possíveis na sua resposta. Isto parece mostrar que o aluno não compreendeu que o problema podia ter mais do que uma solução.

Por fim, na resolução do problema 5, Tomás parece mostrar dificuldade em justificar o seu raciocínio usando a linguagem natural, ou seja, o aluno resolve o problema no entanto, quando tenta explicar por palavras suas porque recorre a determinada estratégia, não o consegue fazer. Além disso, revela igualmente dificuldades na interpretação dos cálculos que efetua relativamente ao contexto do problema, uma vez que atribui um significado incorreto à solução obtida.

Capítulo VI

Conclusão

Neste capítulo apresento uma síntese do estudo, as suas principais conclusões e uma reflexão sobre o percurso desenvolvido para a sua concretização. Como tal, encontra-se organizado em três partes. A primeira parte inclui uma síntese de todo o estudo, focando novamente o seu objetivo, as três questões de investigação, os principais aspetos metodológicos e o contexto em que foi realizado. Na segunda parte tento dar resposta às questões formuladas, considerando a análise dos dados que efetuei e o seu confronto com autores de referência. A terceira parte compreende uma reflexão pessoal sobre todo o trabalho realizado.

6.1. Síntese do estudo

A investigação desenvolvida decorre no âmbito do estágio realizado numa escola básica localizada nos arredores de um grande centro urbano, numa turma de um 2.º ano.

Os motivos que originaram a conceção deste estudo passam pela importância da área da Matemática e, principalmente, da resolução de problemas, no nosso quotidiano visto esta promover o contacto com ideias matemáticas significativas (Boavida et al., 2008), a criatividade (Marques et al. 2013) e o desenvolvimento de comportamentos e atitudes essenciais no aluno (Duarte, 2000). Em estágios anteriores observei as dificuldades dos alunos na resolução de problemas, em particular, na interpretação dos enunciados e, consequentemente, na construção da estratégia a utilizar para o resolver.

Como tal, nesta investigação procurei compreender o modo como alunos do 2.º ano resolvem problemas e identificar as dificuldades que revelam.

Neste sentido, formulei três questões orientadoras que estão relacionadas com o objetivo do estudo:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas?
- Que dificuldades manifestam os alunos na resolução de problemas?
- Quais as etapas de Pólya por que passam os alunos na resolução de problemas?

Considerando o objetivo e as questões orientadoras, a metodologia adotada para a concretização desta investigação caracteriza-se como qualitativa e enquadra-se num paradigma interpretativo. Os dados recolhidos dizem respeito às resoluções, de quatro alunos, de seis problemas cada um e a sua análise permitiu dar um contributo na resposta às questões formuladas inicialmente.

Em seguida, apresento as conclusões do estudo, organizadas de acordo com as questões de investigação.

6.2. Conclusões do estudo

6.2.1. Estratégias de resolução de problemas

Após analisar os dados obtidos, pude constatar que, de um modo geral, os alunos recorrem a diferentes estratégias de resolução. Para evidenciar essa diversidade, elaborei uma tabela com as diferentes estratégias usadas por cada aluno para resolver os seis problemas propostos, identificando também as estratégias subjacentes aos mesmos.

Tabela 6 - Estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos

Problemas / Alunos	Marta	Daniel	Letícia	Tomás
Problema 1	Fazer tentativas	Estratégia de subtração	Estratégia de contagem	Estratégia de contagem
Problema 2 (Trabalhar do fim para o princípio)	Fazer tentativas	Trabalhar do fim para o princípio	Fazer tentativas	Trabalhar do fim para o princípio
Problema 3 (Trabalhar do fim para o princípio)	Fazer tentativas	Trabalhar do fim para o princípio	Trabalhar do fim para o princípio	Trabalhar do fim para o princípio
Problema 4 (Fazer uma simulação /dramatização/ experimentação)	Fazer uma simulação /dramatização /experimentação	Estratégia de adição	Fazer uma simulação /dramatização /experimentação	Fazer uma simulação /dramatização /experimentação
Problema 5 (Fazer uma tabela/esquema/ lista)	Fazer uma lista organizada	Fazer um esquema	Fazer uma lista organizada	Estratégia de adição
Problema 6	Fazer uma simulação /dramatização /experimentação	Fazer uma simulação /dramatização /experimentação	Fazer uma simulação /dramatização /experimentação	Estratégia de adição

Como é possível observar na tabela 6, a maioria dos alunos recorre à estratégia subjacente ao problema, embora existam algumas exceções.

Entre as estratégias referidas, verifica-se que os alunos recorreram mais vezes à estratégia "fazer uma simulação/dramatização/experimentação" usando as representações icónicas para interpretar e expor as suas ideias (Araújo, 2014). Estas são elementos essenciais à compreensão dos conceitos e relações matemáticas (NCTM, 2007).

Uma vez que as estratégias são construídas pelos alunos, pois derivam de processos de raciocínio (Boavida et al., 2008), estes usam-nas mesmo sem terem sido abordadas anteriormente, tal como se verifica, por exemplo, nos registos referentes à resolução de Daniel do problema 2. Ainda assim, alguns alunos recorrem a estratégias que já tinham explorado noutros problemas (Pólya, 2003) e com as quais se sentem à vontade, tal como acontece na resolução de Marta do problema 3.

Contudo, isto não se verifica no caso de a estratégia "trabalhar do fim para o princípio" pois esta não tinha sido explorada ou abordada anteriormente, uma vez que a professora não propôs nenhum problema em que esta estivesse subjacente. Assim, no problema 2 verifica-se que dois alunos recorreram a essa estratégia, embora não tenham conseguido chegar à solução pretendida. Isto leva-me a concluir que os alunos compreenderam que esta estratégia era a mais indicada para resolver este problema mas tiveram dificuldade em usá-la. Esta dificuldade é apontada por O'Connell (2007), que considera a estratégia "trabalhar do fim para o princípio" como uma das mais complexas para crianças entre o Pré-escolar e o 2.º ano do Ensino Básico.

Assim, propus outro problema com esta estratégia subjacente para que pudessem explorá-la novamente depois de ter sido abordada em turma no momento de discussão final do problema 2. Ao verificar que alguns alunos tinham tido dificuldades nessa estratégia, percebi que precisavam de "ver exemplos do que é que é a resolução de problemas" (Kilpatrick, 2014, p. 7), neste caso específico, e voltar a explorá-la. Além disso, e tal como refere NCTM (2007), "nenhuma estratégia é aprendida definitivamente; as estratégias são aprendidas ao longo do tempo […]" (pp. 59-60). Assim, no problema seguinte (problema 3), apenas um dos quatro alunos cujas produções foram analisadas não recorreu à estratégia "trabalhar do fim para o princípio" possivelmente por ainda não se sentir à vontade com a mesma.

Tal como referi anteriormente, cada problema tem uma estratégia subjacente, contudo, não era obrigatório que esta fosse usada para resolvê-lo, visto que, apesar de alguns problemas apresentarem características que levam ao uso de uma determinada estratégia, é possível recorrer a outras na sua resolução (Ponte & Serrazina, 2000). Por isso, alguns alunos optaram por estratégias diferentes que os conduziram à solução correta em causa, tal como os que recorreram à estratégia subjacente ao problema.

No que diz respeito ao primeiro e último problema, estes não tinham subjacente uma estratégia dominante. No primeiro problema o objetivo era perceber o nível de dificuldade dos problemas a serem propostos, bem como ajudar os alunos a identificar as etapas de resolução de problemas segundo Pólya. Em relação ao último problema, o objetivo era verificar se os alunos tinham compreendido as estratégias anteriormente exploradas e se eram capazes de escolher a que consideravam mais adequada para o resolver.

A proposta de problemas que sugeriam o recurso a diferentes estratégias permitiu aos alunos a construção de estratégias diversificadas, tal como mostra a tabela 6. A minha opção em propor problemas que sugerissem diferentes estratégias está de acordo com o afirmado por Pinto e Canavarro (2012): "A investigação, no âmbito da resolução de problemas, aponta para a utilização de problemas que apelem ao uso de estratégias diversificadas" (p. 3).

O conhecimento e uso de diversas estratégias também poderá estar relacionado com os momentos de discussão e partilha que aconteciam depois da resolução individual dos alunos, tal como afirma NCTM (1994), embora não tenha dados que o fundamentem.

Em síntese, dando resposta à questão de estudo – Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas? – concluo que:

- Os alunos recorrem a diferentes estratégias para resolver os problemas.
- Alguns alunos usam a mesma estratégia em mais do que um problema, mostrando compreendê-la.
- Na resolução dos problemas propostos verifica-se que os alunos recorrem mais vezes à estratégia "fazer uma simulação /dramatização /experimentação", estando esta associada ao contexto de dois problemas.
- Alguns alunos usam a estratégia subjacente ao problema proposto.
- A maioria das estratégias inclui representações icónicas.

6.2.2. Dificuldades manifestadas pelos alunos

A análise das produções dos quatro alunos, auxiliadas pela observação em sala de aula, permitem concluir que as principais dificuldades manifestadas relacionam-se com: a compreensão do enunciado, a concretização do plano, sobretudo quando se relaciona com a estratégia “trabalhar do fim para o princípio”, o cálculo que envolve a subtração com dois dígitos, a interpretação do resultado e a justificação do raciocínio usando a expressão escrita e oral.

A primeira dificuldade evidenciada, relaciona-se essencialmente com a compreensão da expressão escrita do enunciado. Para interpretar e compreender um problema matemático é necessário conhecimento tanto ao nível desta área como da de Português. Efetivamente, de acordo com um estudo realizado por Costa e Fonseca (2009), os alunos que possuem menos facilidade no Português, menos hábitos de leitura, dela não fazem “uso na interpretação/compreensão dos enunciados” (p. 7) e não compreendem o vocabulário são aqueles que apresentam menos sucesso na resolução de problemas. Neste sentido, as dificuldades na compreensão do enunciado estão relacionadas com as dificuldades de leitura e compreensão do texto (Lopes et al., 1990) e com o desconhecimento de algumas palavras e expressões. Além disso estas dificuldades podem também estar ligadas com a falta de atenção e pouca motivação de alguns alunos pois, tal como refere Pólya (2003) ao aluno não basta compreender o problema, “deve também desejar resolvê-lo” (p. 28).

Na resolução do problema 2, foram verificadas dificuldades na execução do plano, estando estas relacionadas com o uso da estratégia subjacente, “trabalhar do fim para o princípio”. Os alunos em causa tentam recorrer a esta estratégia mas não conseguem concretizá-la de forma correta. Esta, além de ser pouco abordada e explorada, é mais complexa que as restantes, uma vez que é necessário reverter os passos do problema para o conseguir resolver (O'Connell, 2007).

Na resolução de Tomás, as suas dificuldades parecem estar igualmente associadas ao uso da reta numérica considerando a estratégia “trabalhar do fim para o princípio” e a tentativa de modelar a situação usando a reta numérica.

Dificuldades relacionadas com a operação de subtração foram identificadas nas resoluções de um dos quatro alunos analisados. Ao efetuar o cálculo e obter um resultado incorreto, o aluno opta por simplificá-la, decompondo os números por ordens. Ao optar por esta estratégia, a sua dificuldade pode estar relacionada com a sua falta de conhecimento sobre os números, considerando que o aluno é do 2.º ano de escolaridade.

No que diz respeito às dificuldades no uso do sinal de igual, estas são explícitas nas resoluções de dois alunos, referentes ao problema 3, nas quais estes efetuam as operações de modo sequencial. Esta dificuldade é também identificada por Cusi e Malara (2007 in Ponte, Branco & Matos, 2009) que refere que na resolução de problemas, é frequente "os alunos realizarem operações de um modo sequencial, da esquerda para a direita, usando o sinal de igual tanto como «separador» entre dois raciocínios como para introduzir um novo resultado, a partir de valores numéricos anteriores" (p. 22).

Relativamente às dificuldades na interpretação dos resultados, estas são verificadas na resolução do problema 5 de Tomás. Nos seus registos, o aluno parece encontrar a solução correta, no entanto, tem dificuldades na interpretação do significado do número que obteve, acabando por referir-se a ingredientes em vez de sandes.

Após resolverem os problemas, a maioria dos alunos tentou explicitar o raciocínio através da linguagem natural. Contudo tiveram algumas dificuldades em fazê-lo possivelmente porque escrever é um ato complexo que "obriga a reflectir sobre o próprio trabalho e a clarificar pensamentos sobre as ideias desenvolvidas" (Boavida et al., 2008, p. 68). A mesma autora refere ainda que as nossas ideias se tornam mais claras quando as articulamos oralmente ou por escrito (*ibidem*, p. 62) e, por isso, tanto a explicação do raciocínio de forma oral como escrita são aspetos importantes para a resolução de problemas.

Relativamente à justificação do raciocínio de forma oral, os alunos apenas o conseguiram fazer com a minha orientação, ou seja, era necessário colocar questões que os auxiliavam a explicitar os seus raciocínios usando a lingagem natural. Estas dificuldades relacionam-se sobretudo com a organização e clarificação do pensamento (Boavida et al., 2008) que devem ser trabalhadas continuamente por serem um aspeto difícil e exigente para os alunos, embora contribuam para o desenvolvimento da comunicação mais formal na matemática.

6.2.3. Etapas de resolução de problemas segundo Pólya

Depois de analisar os dados recolhidos relativos aos quatro alunos, pude constatar que estes não percorrem sempre as quatro etapas de resolução de problemas de acordo com o modelo de Pólya (Pólya, 2003), sendo a quarta etapa, "Examinar a solução", a menos usada. A tabela seguinte mostra as etapas que cada aluno parece ter percorrido durante a resolução dos problemas.

Tabela 7 – Etapas de resolução de problemas usadas pelos alunos

	Marta	Daniel	Letícia	Tomás
Problema 1	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.
Problema 2	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema (de forma incorreta); Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano (de forma incorreta).
Problema 3	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.
Problema 4	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano; Examinar a solução.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.
Problema 5	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.
Problema 6	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.	Compreender o problema; Escolher um plano; Realizar o plano.

A exploração do problema 1 tinha como um dos objetivos ajudar os alunos a identificar as etapas de resolução de problemas. Ou seja, foi a partir da sua discussão que foram explicitadas as etapas do modelo de Pólya. Ainda assim, um dos alunos percorreu as quatro etapas na sua resolução (tabela 7).

Após terem sido identificadas as etapas em grande grupo, foi elaborado um cartaz para auxiliar os alunos no momento da resolução dos problemas posteriores. Contudo, embora os alunos tenham compreendido a existência de quatro etapas, nem sempre passam por todas na resolução dos problemas seguintes. Destaca-se o problema 3, na resolução do qual os quatro alunos passaram por todas as etapas, e os dois últimos problemas, nos quais nenhum aluno parece ter passado pela etapa "examinar a solução".

Ao analisar os dados aluno a aluno, concluo que Marta foi aquela que mais vezes percorre as quatro etapas de resolução de problemas, enquanto Tomás apenas as parece ter percorrido a todas na resolução do problema 3.

É necessário salientar que, em algumas resoluções, não foi possível confirmar se os alunos percorreram a quarta etapa e, como tal, apenas foram consideradas três.

As três etapas pelas quais os alunos passaram maioritariamente são assim "compreender o problema", "escolher o plano" e "realizar o plano". Para conseguir realizar o plano, é obrigatório passar pelas duas primeiras fases pois só conseguimos responder a uma pergunta se a tivermos compreendido (Pólya, 2003). Além disso, o mesmo autor refere que só é possível prosseguir na resolução do problema se estivermos seguros que o compreendemos e que pensámos numa ou mais formas para o resolver. Assim podemos justificar a passagem por estas três etapas na maioria das resoluções corretas dos alunos.

Contudo a quarta etapa "examinar a solução" é raramente visível nos registos dos alunos. Uma vez que os alunos não se questionam ou são questionados sobre a solução obtida, pensam que o primeiro resultado é a resposta correta e registam-no sem o verificarem. Tal como refere Pólya (2003), "Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e posta por escrito a sua resolução, fecham os livros e passam a outro assunto" (p. 35).

No que diz respeito à forma como os alunos percorrem as etapas de resolução de problemas, a maioria não regista o modo como pensou nem como delineou o plano, contudo registam nas folhas as suas estratégias. É possível compreender através da observação em sala de aula e da análise dos registos dos alunos, que a interpretação do problema e a escolha do plano são frequentemente realizados mentalmente, antes de iniciarem a resolução propriamente dita. Segundo O'Connell (2007), a discussão associada à interpretação do enunciado do problema é um aspeto importante para compreenderem o que é pedido e pensarem no plano. Ainda assim, alguns alunos sentem necessidade de registar os dados na sua folha para organizarem o seu pensamento e para os ajudar na compreensão do problema.

Quando consideram a última etapa, os alunos recorrem, por vezes, à linguagem natural, tentando explicar como pensaram para chegar à solução, e/ou recorrem a outra estratégia que confirma, ou não, o resultado que apresentam.

Assim, dando resposta à questão de estudo – Quais as etapas de Pólya por que passam os alunos na resolução de problemas? – concluo que:

- Os alunos passam maioritariamente pelas três etapas "compreender o problema", "escolher um plano" e "realizar o plano".
- Alguns alunos não efetuam registos escritos relativos às duas primeiras etapas.
- Para examinar a solução, alguns alunos recorrem à linguagem natural e/ou a outras estratégias de resolução.
- A quarta etapa é aquela em que os alunos parecem ter mais dificuldade e alguns não evidenciam ter examinado as soluções obtidas.

6.3. Reflexão sobre o estudo

A presente reflexão incide sobre todo o processo investigativo. Neste sentido começarei por salientar a importância do professor reflexivo na aprendizagem dos alunos, principalmente no que diz respeito à Matemática e à resolução de problemas. Seguidamente irei destacar alguns aspetos positivos e dificuldades enfrentadas ao longo da realização deste estudo, fazendo referência às opções metodológicas e terminando com a minha perspetiva relativamente à resolução de problemas após a concretização da investigação.

Segundo Dewey (in Alarcão, 1996), "não se pode conhecer sem agir e não se pode agir sem conhecer" (p. 7), sendo importante que o professor considere a relação teoria-prática antes, durante e após a sua prática letiva. Neste sentido a reflexão surge com a necessidade de o professor querer saber mais sobre a sua prática, procurando readaptá-la e assim conduzir à aprendizagem dos alunos. No caso do ensino da Matemática, mais especificamente da resolução de problemas, uma vez que o professor necessita equacionar como explorar os conteúdos em sala de aula, de modo a criar um ambiente de aprendizagem para todos os alunos (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012), é inquestionável a necessidade de refletir e tomar decisões.

No meu caso, considerando os aspetos mencionados anteriormente, senti necessidade de refletir ao longo do desenvolvimento deste projeto. Assim, antes da implementação dos problemas, foi necessário escolhê-los e planificar como iriam decorrer os momentos de exploração dos mesmos, o que implicou tempo para "acolher os imprevistos e guardar maior lucidez" (Perrenoud, 2002, p. 199) sobre o trabalho dos alunos. Seguidamente, durante o momento de exploração dos problemas, era preciso adaptar constantemente o que tinha previsto aos acontecimentos em sala de aula, pois por vezes era necessário seguir o trabalho e as ideias dos alunos. Desta forma, é possível inferir que "Na acção, a reflexão permite desvincular-se da planificação inicial, corrigi-la constantemente, compreender o que acarreta problemas, descentralizar-se e regular o processo em curso" (*ibidem*). No final de cada aula, a reflexão voltou a ganhar relevo pois foi necessário compreender os pontos positivos e negativos dos problemas escolhidos e da forma como tinham sido discutidos, de modo a melhorar as sessões seguintes e a permitir o desenvolvimento dos alunos na sua capacidade de resolver de problemas.

No que diz respeito à exploração em sala de aula, considero que a estrutura "introdução do problema, exploração e discussão coletiva" foi a melhor escolha. Esta permitiu aos alunos, primeiramente, partilhar e ouvir as ideias dos colegas para que entendessem o que era pedido e para se sentirem desafiados a realizar o problema (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012). Seguidamente, tinham um momento de exploração individual para estruturar as suas ideias e resolver sozinhos, sendo ajudados quando necessário. No final tinham um momento em grande grupo para partilhar as suas aprendizagens, discutir as diversas estratégias e construir conhecimento matemático. Esta estrutura aproxima-se da prática de ensino exploratório da Matemática na qual me baseei quando desenvolvi esta investigação.

Considero importante salientar a apresentação e a discussão coletiva de ideias como um dos aspetos principais e indispensáveis na exploração dos problemas em sala de aula. Estes momentos, além de permitirem tentativas de comunicação do raciocínio pessoal que "proporcionam oportunidades para uma compreensão mais profunda da Matemática" (Lampert, 2001 in Boavida et al., 2008, p.62), também possibilitam que os alunos percebam que existem raciocínios diferentes, sem que um seja necessariamente melhor que o outro. Tal como refere NCTM (2007), "a verbalização ajuda ao desenvolvimento da linguagem comum e das representações e contribui para que os outros alunos compreendam o trabalho desenvolvido pelo primeiro" (p. 59).

Relativamente à minha prática, os principais desafios foram a condução dos momentos de discussão inicial e final dos problemas, uma vez que os alunos nunca tinham trabalhado desse modo. No final, além de ser necessário escolher algumas estratégias para serem apresentadas e discutidas em turma, e ajudar na intervenção dos alunos, também tinha de verificar se os restantes alunos compreendiam e acompanhavam os raciocínios apresentados. Efetivamente, estes momentos devem contribuir para que se realizem novas aprendizagens relevantes, não apenas sobre os conceitos mas também sobre outras formas de pensar (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012). Tal como refere Anghileri (2006 in Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012), o papel do professor é o de orientar os alunos "para o apurar das principais ideias matemáticas que surgem a partir da discussão" (p. 257).

Apesar de os momentos de discussão serem os mais difíceis, senti que foram igualmente os mais gratificantes visto ter sido possível partilhar diferentes estratégias e envolver todos os alunos. Recordo a discussão final do problema 4 – Os abraços quando foram escolhidos alguns alunos para serem as personagens e a restante turma discutia quem tinha de abraçar quem, assinalando o número de abraços dados. A partir desta simulação foi construída uma tabela em conjunto, introduzindo assim uma nova estratégia que não tinha sido apresentada por nenhum aluno.

Uma das dificuldades com que me deparei esteve relacionada com a última questão de investigação. De facto foi bastante difícil perceber se os alunos consideraram todas as etapas, resultando este um aspeto mais complicado de analisar nos registos dos alunos. Apenas no momento de exploração individual é que tive oportunidade de conversar com alguns alunos pois na discussão coletiva o foco incidia sobre as estratégias, as dificuldades e os conceitos matemáticos que surgissem.

Ao analisar a proposta pedagógica questiono-me sobre a ordem dos problemas propostos, uma vez que alguns alunos mostraram dificuldades na resolução do problema 2. Contudo, apesar das dificuldades que tiveram, mostraram raciocínios que permitiram uma discussão rica, que levou à compreensão da estratégia subjacente. Permitiu também realçar a importância de passar por todas as etapas de resolução de problemas, principalmente a última etapa "examinar a solução".

Os resultados obtidos com a resolução deste problema ajudaram-me a selecionar os restantes, considerando que estes devem ser desafiantes para os alunos mas, ao mesmo tempo, que os levem a acreditar que são capazes de os resolver e sintam o prazer de descobrir/aprender algo (Lopes et al., 1990).

Assim, propus o último problema tendo em conta que seria um bom desafio para os alunos, pois sendo este um problema aberto, podia originar diferentes respostas, vontade de descobrir quais e quantas eram as soluções e permitir que os alunos ficassem felizes por as ter descoberto.

Relativamente à metodologia adotada, gostaria de fazer referência à recolha de dados e à sua análise. Como apresento no capítulo III, optei por recorrer às gravações áudio e vídeo e às notas de campo para recolher os dados. Contudo, as gravações foram maioritariamente conseguidas na apresentação e discussão dos problemas, sendo que os dados recolhidos nos momentos de resolução foram conseguidos apenas através das notas de campo. Ao iniciar a análise dos dados percebi que deveria ter gravado também a exploração dos problemas pois existiram trocas de ideias entre os alunos e discussões entre mim e eles que não foram possíveis reter através das notas de campo. Além disso, as gravações são recursos fidedignos (Coutinho, 2011), permitindo ter acesso ao que aconteceu na íntegra, sem o olhar ou opinião de outras pessoas, o que poderia facilitar a análise de dados.

No que concerne à análise de dados, considero importante referir que a forma como foi organizada ajudou à elaboração das conclusões e consequentemente a responder às perguntas de investigação. Neste sentido, como analisei as seis produções de cada aluno e no final das mesmas elaborei um quadro e fiz uma síntese, este trabalho facilitou a identificação das estratégias usadas pelos alunos, das etapas de resolução de problemas percorridas e das dificuldades manifestadas. Assim ao analisar os aspetos relacionados com as questões colocadas e elaborar o quadro síntese, consegui verificar a evolução de cada aluno e comparar as resoluções dos quatro alunos analisados, elaborando, por fim, as conclusões.

Apesar de o tempo de estágio e recolha de dados terem sido reduzidos, este projeto influenciou a minha visão sobre a resolução de problemas e sobre o ensino e aprendizagem da Matemática enquanto futura professora. Como referi no Capítulo I – Introdução, uma das razões que me levou a enveredar por este tema relaciona-se com as dificuldades que tinha na resolução de problemas, uma vez ter sido orientada para o uso dos quatro algoritmos. Contudo, ao compreender que existem outras formas de representação do raciocínio e que a resolução de problemas tem uma ligação forte com situações do quotidiano, considerei importante proporcionar aos alunos esta compreensão, levando-os a pensar para além dos conhecimentos anteriormente adquiridos, uma vez que a resolução de problemas é mais do que números e algoritmos.

Para tornar isso possível, foi necessário recorrer à literatura relativa às etapas de resolução de problemas, estratégias e abordagens desta temática na sala de aula e, também, aos documentos relativos às orientações curriculares. A análise destes documentos permitiu-me compreender que existem diferentes visões sobre a temática da resolução de problemas em sala de aula, cabendo ao professor optar pela abordagem na qual acredita.

Apesar de ter considerado duas das três abordagens para a realização deste projeto, ensino para a resolução de problemas e ensinando através da resolução de problemas, penso que, futuramente, precisarei de voltar a refletir sobre as mesmas uma vez que é importante adaptar o ensino às características do contexto sala de aula e à sociedade, que se encontra em constante mudança. Considero que os problemas não devem ser apenas explorados para aplicar conceitos e conteúdos abordados mas devem permitir o desenvolvimento de capacidades específicas (NCTM, 2007) e de novas aprendizagens ligadas tanto à Matemática, como às outras áreas e à sociedade (novos conceitos, ser capaz de interpretar enunciados e desenvolver características pessoais como a curiosidade e a confiança). Esta ideia está presente no PMEB de 2007, onde a resolução de problemas é um ponto forte, sendo uma das capacidades a ser desenvolvida de forma transversal na aprendizagem da Matemática (Boavida & Menezes, 2012; PMEB, 2007). Contrariamente, o novo PMEB de 2013 não destaca com a mesma ênfase a resolução de problemas, sendo mesmo caracterizada como forma de aplicar conhecimentos previamente adquiridos (Fonseca, 2014; Kilpatrick, 2014).

Contudo cabe ao professor saber valorizar esta temática e, como tal, a principal ideia que retive e na qual me quero basear é a de que a resolução de problemas não é só um objetivo de aprendizagem da Matemática mas deve ser um meio pelo qual os alunos aprendem Matemática (NCTM, 2007).

Apesar de ser uma prática complexa sobre a qual ainda tenho muito que aprender, considero que a concretização deste projeto me ajudou a ultrapassar algumas inseguranças e dificuldades e a tornar possível o desenvolvimento da resolução de problemas na sala de aula.

Referências bibliográficas

Abbott, F. B. (2011). *Estudo de caso sobre estratégias de resolução de problemas de matemática no ensino básico.* Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Afonso, N. (2005). *Investigaçação Naturalista em Educação: Um guia prático e crítico.* Porto: ASA.

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Lisboa: Universidade Aberta.

Alarcão, I. (1996). *Formação reflexiva de professores* - *estratégias de supervisão.* Porto: Porto Editora.

Almeida, C. S. (2006). *Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área.* Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Católica da Brasília, Brasília.

Alvega, P. (2014). Pisa-papéis: um olhar sobre a avaliação da resolução de problemas no PISA 2012. *Educação e Matemática,* (130), 10-16.

Araújo, D. R. (2014). *As representações usadas por alunos do 2.º ano na resolução de problemas.* Setúbal: Escola Superior de Educação de Setúbal.

Bell, J. (1997). *Como realizar um projecto de investigação.* Lisboa: Gradiva.

Bento, A. (Abril de 2012). Investigação quantitativa e qualitativa: Dicotomia ou complementaridade?. *Revista JA (Associação Académica da Universidade de Coimbra),* VII (64), 40-43.

Boavida, A. M., & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). Portalegre: SPIEM.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico - Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Brito, L. P. (2008). Ler e Resolver Problemas. *Educação e Matemática*, (99), 40-44.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática,* (115), 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). *Práticas de ensino exploratório da matemática: e caso de célia.* Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Costa, A. M., & Fonseca, L. (2009). *Os números na interface da Língua Portuguesa e da Matemática.* In *SPIEM: Actas do XIXEIEM.* Vila Real: 2009 (1-11).

Costa, M., & Allevato, N. (2013). Resolução de problemas como metodologia de ensino: um caminho para ensinar, aprender e avaliar os conteúdos matemáticos.In *VII CIBEM*, Montevideo, 16-20 Set. 2013 (3274-3281).

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas - Teoria e Prática.* Lisboa: Almedina.

Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M., & Vieira, S. R. (2009). Investigação-acção : metodologia preferencial nas práticas educativas. *Psicologia, Educação e Cultura,* XIII (2), 355-380.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

Duarte, J. (2000). A resolução de problemas no ensino da matemática. *Educação & Comunicação,* (4), 97-100.

Fonseca, L. (2014). Resolução de problemas em Matemática: regresso ao passado. *Educação e Matemática,* (130), 17-21.

Fonseca, L. M. (1995). *Três futuros professores perante a resolução de problemas: concepções e processos utilizados.* Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Guimarães, H. M. (2014). O ensino por meio de problemas. *Educação e Matemática*, (130), 45-50.

Kilpatrick, J. (2014). Como vamos de resolução de problemas? (H. Guimarães, Entrevistador). *Educação e Matemática*, (130), 3-9.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Resolução de Problemas.* Coligido por Lurdes Serrazina. Texto mimeo.

Landeiro, A., & Gonçalves, H. (2011). *A Grande Aventura Matemática 2º ano - Caderno de Atividades.* Lisboa: Texto Editores.

Leitão, A. P. (2000/2002). *As dificuldades dos alunos do 6.º ano na resolução de problemas.* Dissertação de Mestrado, Instituto Superior de Psicologia Aplicada, Lisboa.

Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Oliveira, M., Delgado, M., Bastos, R., Varandas, J. (1990). *Atividades matemáticas na sala de aula.* Lisboa: Texto Editora.

Marques, A. B., Oliveira, H. A., Santana, F. D., & Chagas, W. d. (2013). O lugar da resolução de problemas nas aulas de matemática. In *VII CIBEM,* Montevideo, 16-20 Set. 2013 (3221-3228).

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da Investigação-Acção.* Porto: Porto Editora.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática - Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME. (s.d.). *O modelo «Fénix»*. Obtido em Abril de 2015, de DGE: http://www.dgidc.min-edu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=111

NCTM. (1980). *Problem solving in school mathematics.* Virginia: NCTM.

NCTM. (1994). *Normas para o currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

NCTM. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics.* United States of America: NCTM.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Nun'Álvares, A. d. (2009). *Projecto Educativo TEIP/2 Nun'Álvares.* Agrupamento de Escolas de Nun'Álvares.

Nun'Álvares, A. d. (2014). *Projeto Educativo 2014/2017.* Seixal: Agrupamento de Escolas de Nun'Álvares.

O'Connell, S. (2007). *Introduction to Problem Solving: grades preK-2.* Portsmouth: Heinemann.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º Ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante,* XXII (2), 29-53.

Perrenoud, P. (2002). *A Prática Reflexiva no Ofício do Professor.* Porto Alegre: Artmed.

Pinto, M. E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque (Org), *Práticas de investigação em Educação.* Évora: Universidade de Évora.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas - Um aspecto novo do método matemático.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Coord), *O professor e o desenvolvimento curricular*, pp. 11-34. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2010). Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (21), 13-30.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. d. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de matemática: uma experiência no 7º ano de escolaridade.* Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências - Universidade de Lisboa, Lisboa.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. V. (1995). *Manual de investigação em ciências sociais.* Lisboa: Gradiva.

Santos, O. K. (s.d.). *Realize.* Obtido em Junho de 2015, de Recursos Didáticos: Uma melhoria na qualidade da aprendizagem: http://editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/Trabalho_Comunicacao_oral_idinscrito__fde094c18ce8ce27adf61aedf31dd2d6.pdf

Silva, R. A. (2014). *Prática de ensino supervisionada do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico: A discussão no ensino exploratório da matemática.* Relatório de Estágio, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa.

Soares, J. (2013). *Problemas fechados, problemas abertos e situações-problemáticas.* Lisboa.

Vale, I., Fão, A., Portela, F., Geraldes, F., Fonseca, L., Gigante, M., Pimentel, T. (2006). *Matemática no 1º Ciclo - Propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

Veia, L. (1996). *A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico.* Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências - Universidade de Lisboa, Lisboa.