EDUCAÇÃO

ESCOLA SUPERIOR
POLITÉCNICO SETÚBAL

MARTA COSTA SILVA

A APRENDIZAGEM DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ATRAVÉS DE PRÁTICAS DE ENSINO EXPLORATÓRIO

Relatório do Projeto de Investigação do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

ORIENTADORA

Professora Doutora Maria de Fátima Mendes

Julho de 2025

MARTA COSTA SILVA

A APRENDIZAGEM DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ATRAVÉS DE PRÁTICAS DE ENSINO EXPLORATÓRIO

JÚRI

Presidente: Joana Isabel Gaudêncio de Matos, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Arguente: Joana Filipa Oliveira Cabral, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Orientadora: Maria de Fátima Pista Calado Mendes, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Julho de 2025

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar a minha gratidão a algumas pessoas que tornaram possível a realização deste projeto.

Primeiramente à minha orientadora, a professora Fátima Mendes, pelo apoio constante, dedicação e confiança depositada em mim ao longo de todas as etapas.

À supervisora de estágio, a professora Ana Sequeira, pelas suas palavras e ensinamentos que me ajudaram a ser uma professora melhor.

À professora cooperante, a professora Vitória Fernandes, por ter possibilitado a realização deste estudo na sua sala de aula e por me ter acompanhado em todos os momentos. Expresso um agradecimento especial às crianças que, generosamente, aceitaram participar neste projeto, recebendo-me com imenso carinho e dedicação.

Aos professores do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico por todos os conhecimentos e orientações providenciados.

Aos meus pais, ao Pedro, à Catarina, à Dida e à Margarida, obrigada por fazerem parte de todas as etapas desta jornada.

RESUMO

O estudo centra-se no tema da aprendizagem da resolução de problemas, mais especificamente através da utilização de práticas de ensino exploratório e foi desenvolvido numa turma do 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Para este estudo foi definido como objetivo compreender como os alunos desenvolvem a capacidade de resolução de problemas a partir de práticas de ensino exploratório. Para este efeito, foram definidas duas questões orientadoras:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas?
- Que desafios se colocam aos alunos durante a resolução de problemas e como são ultrapassados:
  (i) na fase de apresentação do problema;
  (ii) na fase de exploração autónoma;
  (iii) na fase de discussão coletiva das diferentes resoluções.

A fundamentação teórica tem subjacente dois tópicos principais. O primeiro é a resolução de problemas, nomeadamente, o entendimento de problema, as etapas de resolução de problemas, as estratégias de resolução de problemas e a resolução de problemas nos documentos curriculares. O segundo tópico é o ensino exploratório, especificando como se caracteriza e as suas diversas fases.

No que diz respeito à metodologia de investigação utilizada, esta foi de natureza qualitativa, tendo sido desenvolvida uma investigação sobre a prática. Para a recolha de dados foram utilizadas a observação participante e a recolha documental e, no que respeita à análise de dados, foi usada a análise de conteúdo.

Este estudo decorreu quinzenalmente durante quatro semanas, uma manhã por semana. Foram propostos quatro problemas adaptados de outros autores e as aulas foram dinamizadas de acordo com uma abordagem exploratória.

Os principais resultados obtidos no estudo indicam que os alunos recorreram a diversas estratégias de resolução de problemas, sendo a mais utilizada fazer tentativas e fazer esquemas/desenhos. Para além disso, evidenciou que os principais desafios (i) na fase de apresentação do problema foi a compreensão do enunciado, (ii) na fase de exploração autónoma foram estabelecer um plano, organizar o registo de resolução, encontrar regularidades e trabalhar em colaboração com os seus pares e (iii) na fase de discussão coletiva foi fazer as apresentações orais e justificar os raciocínios efetuados.

Palavras-chave: resolução de problemas; estratégias de resolução de problemas; ensino exploratório; fases do ensino exploratório.

ABSTRACT

This study focuses on learning to solve problems, more specifically using exploratory teaching practices, and was carried out in a 4th grade class.

The aim of this study was to understand how students develop their problem-solving skills through exploratory teaching practices. To this end, two guiding questions were defined:

- What strategies do students use to solve problems?
- What challenges do students face when solving problems and how do they overcome them?
  - (i) in the problem presentation phase.
  - (ii) in the autonomous exploration phase.
  - (iii) in the phase of collective discussion of the different solutions.

The theoretical foundation is based on two main topics. The first is problem solving, namely the understanding of a problem, the stages of problem-solving, problem-solving strategies and problem solving in curriculum documents. The second topic is exploratory teaching, specifying how it is characterized and its various phases.

Regarding the research methodology used, it was of a qualitative nature, and an investigation into practice was carried out. Participant observation and document collection were used for data collection and content analysis was used for data analysis.

This study took place every two weeks for four weeks, one morning a week. Four problems adapted from other authors were proposed and the classes were organized according to an exploratory approach.

The main results obtained in the study indicate that the students used a variety of problem-solving strategies, the most used being making attempts and drawing diagrams. In addition, it showed that the main challenges (i) in

the task presentation phase were understanding the statement, (ii) in the autonomous exploration phase were establishing a plan, organizing the resolution record, finding regularities and working collaboratively with their peers, and (iii) in the collective discussion phase were making oral presentations and justifying their reasoning.

Keywords: problem solving; problem-solving strategies; exploratory teaching; phases of exploratory teaching.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE ANEXOS

INTRODUÇÃO

O presente relatório do projeto de investigação surge no âmbito da unidade curricular Estágio IV do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º ciclo do Ensino Básico. Foi desenvolvido numa turma do 4.º ano de escolaridade numa escola situada no meio urbano de Setúbal no ano letivo 2023/2024.

No presente capítulo são apresentadas as motivações e a pertinência do estudo, bem como o seu objetivo e as questões orientadoras. No final é explicitada a organização geral do relatório.

Motivações e pertinência do estudo

A matemática sempre foi uma área de estudo que me interessou muito ao longo do meu percurso escolar, apesar de sentir que os métodos de ensino dos meus professores eram antiquados e não promoviam a aprendizagem através da descoberta do aluno. A metodologia de ensino a que fui, maioritariamente, exposta, era baseada na exposição sistemática dos conteúdos pelo professor e o aluno era apenas o ouvinte, o que se revelou ser pouco eficiente. Acredito que, por este facto, tenha tido mais dificuldade em compreender os conteúdos, o que provocou desmotivação, no meu caso refletindo-se, principalmente, na matemática.

A partir desta ideia, quando comecei a refletir acerca daquilo que queria propor à turma de 3.º ou 4.º ano na qual seria integrada, decidi que teria de ser algo que fizesse com que os alunos se interessem mais pela matemática. Deste modo, interessei-me pela abordagem exploratória do ensino da matemática. Compreendi que este método permite que os alunos explorem tarefas variadas e que, através das suas três fases de organização (apresentação do problema, exploração autónoma e discussão coletiva) os alunos construam o próprio conhecimento, que é partilhado e sistematizado no final da aula.

Ponte et al. (2015) afirma que através do método de ensino exploratório os alunos têm a possibilidade de "desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução, que devem ser capazes de apresentar e justificar aos seus colegas e ao professor" (p. 114). Desta forma, o professor dá oportunidade aos alunos de descoberta enquanto proporciona também momentos de reflexão de significados, de argumentação e de discussão.

Em conversa com a professora orientadora, concordámos que seria pertinente restringir este estudo a uma das capacidades matemáticas transversais (Canavarro et al., 2021). Depois de debater acerca da natureza do estudo e do que faria mais sentido no contexto pretendido, foi decidido trabalhar sobre o tópico da resolução de problemas.

Este tópico mostrou-se muito pertinente de acordo com as minhas motivações, isto porque a resolução de problemas é um tópico fundamental e transversal a todos os outros conteúdos matemáticos. Tal como referido no documento curricular Perfil do Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017), onde se define que a resolução de problemas envolve "processos de encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões" (p. 23).

Também de acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (2007), procura-se que, através da resolução de problemas, os alunos sejam encorajados a formular, discutir e refletir sobre os seus raciocínios, de modo a desenvolver a capacidade de resolver problemas cada vez mais complexos. Este objetivo era algo que me motivava neste tópico, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo do aluno através da resolução de problemas.

Objetivo e questões orientadoras

Atendendo às minhas motivações pessoais para o estudo e considerando a pertinência da aprendizagem da resolução de problemas através de práticas de ensino exploratório, decidi investigar especificamente as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, assim como os desafios com que se depararam ao longo das três fases da aula de ensino exploratório e como os ultrapassaram.

Deste modo, para a realização deste estudo defini como objetivo **compreender como os alunos desenvolvem a capacidade de resolução de problemas a partir de práticas de ensino exploratório.**

Tendo em conta este objetivo, foram então delineadas duas questões orientadoras:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas?
- Que desafios se colocam aos alunos durante a resolução de problemas e como são ultrapassados:
  (iv) na fase de apresentação do problema;
  (v) na fase de exploração autónoma;
  (vi) na fase de discussão coletiva das diferentes resoluções.

Organização geral do estudo

O presente relatório encontra-se organizado em quatro capítulos, para além da Introdução.

No primeiro capítulo é apresentada a fundamentação teórica, organizada em duas secções: a resolução de problemas e o ensino exploratório.

Na primeira secção é, inicialmente, explicitada a importância da resolução de problemas para a construção do conhecimento matemático. Posteriormente está dividida em quatro subtópicos: Entendimento de problema, especificando os tipos de problema segundo a proposta de Boavida et al. (2008), Etapas de resolução de problemas segundo o modelo de Pólya; Estratégias de resolução de problemas segundo Boavida et al. (2008); por fim, a resolução de problemas nos documentos curriculares, nomeadamente nas Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021) e no Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017).

A segunda secção diz respeito ao ensino exploratório. Este é definido e caracterizado, explicita-se ainda cada uma das suas fases, e fundamentando a sua importância na sala de aula e qual o papel do professor para a sua dinamização.

No segundo capítulo apresento a metodologia de investigação utilizada. Primeiramente, justifico as opções tomadas, a abordagem qualitativa e a investigação sobre a prática. Em seguida, apresento os métodos de recolha de dados, nomeadamente a observação participante e a recolha documental. Por fim, explicito mais aprofundadamente o processo de recolha e análise dos dados.

O terceiro capítulo diz respeito à intervenção pedagógica. Em primeiro lugar são caracterizados o contexto e os participantes do estudo. Seguidamente são descritos cada um dos problemas propostos à turma, apresentando os seus objetivos, a resolução e a previsão de alguns desafios que possam surgir por parte dos alunos. Finalmente, é explicado como os problemas foram dinamizados em sala de aula.

No capítulo quatro é apresentada a análise dos dados recolhidos. Esta análise divide-se em quatro partes que correspondem aos quatro problemas propostos em sala de aula. Cada um dos problemas foi analisado em duas vertentes distintas: as estratégias usadas pelos alunos, analisando e comparando algumas estratégias de resolução que surgiram na fase de exploração da tarefa; e os desafios dos alunos em cada uma das fases do ensino exploratório e como os ultrapassaram.

Na última parte deste relatório são apresentadas as considerações finais da investigação. Num primeiro momento é descrita uma breve síntese do estudo realizado. Em seguida são apresentadas as conclusões do estudo, respondendo às questões orientadoras. No final, é apresentada uma reflexão pessoal e global sobre a investigação, explicitando o seu contributo para a construção do meu perfil profissional docente.

CAPÍTULO 1 | **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Neste capítulo é apresentada e discutida a fundamentação teórica do tema em estudo, sendo aprofundadas as duas principais temáticas da investigação: a resolução de problemas e o ensino exploratório.

Na secção sobre resolução de problemas apresento e discuto: o entendimento de problema, as etapas de resolução de problemas, as estratégias de resolução de problemas e a resolução de problemas nos documentos curriculares. Na segunda secção, sobre a temática do ensino exploratório, caracterizo o ensino exploratório e explicito como se desenvolve uma aula de acordo com esta metodologia.

1.1 A resolução de problemas

A resolução de problemas tem sido uma temática discutida entre professores e investigadores ao longo dos anos. A investigação desenvolvida em torno desta temática evidenciou que não é possível os alunos aprenderem matemática compreensivamente se não se apropriarem de um conjunto de tópicos matemáticos, desenvolvendo capacidades que lhes permitam compreender e utilizar os seus conhecimentos sobre esses tópicos em contextos distintos (Boavida & Menezes, 2012).

As Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática reconhecem a resolução de problemas como uma das seis capacidades matemáticas transversais, juntamente com o raciocínio matemático, a comunicação matemática, as representações matemáticas, as conexões matemáticas e o pensamento computacional. Isto significa que estas capacidades devem ser valorizadas como objeto de aprendizagem e devem ser abrangidas a todos os anos de escolaridade (Canavarro et al., 2021).

De acordo com Boavida e Menezes (2012), apesar do reconhecimento da importância da resolução de problemas na aprendizagem da matemática, esta não se tem materializado em práticas de ensino. Ainda predomina um ensino que atribui ao aluno o papel de "memorizar ideias, técnicas e procedimentos mesmo que não lhes atribua significado nem compreenda a sua razão de ser" (p. 288). Para além disso, ainda se desvaloriza o papel da resolução de problemas no ensino da matemática, frequentemente encarados apenas como meio de consolidação de conhecimentos.

Deste modo, a resolução de problemas admite-se como fundamental na aprendizagem da Matemática, nomeadamente no ensino básico, pois incide transversalmente sobre todos os conteúdos matemáticos e tem como finalidade desenvolver as capacidades necessárias para a formação global dos alunos (Vale, 1997). A autora afirma que a "resolução de problemas é mais do que um conteúdo matemático; é um contexto, uma filosofia, uma metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática" (p. 3).

Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) sustenta esta ideia, afirmando que “A resolução de problemas implica o envolvimento da tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente” (NCTM, 2007, p. 57). Para encontrar esta solução, os alunos devem recorrer aos seus conhecimentos e, deste modo, desenvolver novos conhecimentos matemáticos.

Ainda de acordo com o NCTM (2007), procura-se que, através da resolução de problemas, os alunos sejam encorajados a formular, discutir e refletir sobre os seus raciocínios, de modo a aumentar a capacidade de resolver problemas cada vez mais complexos. Para além disso, um bom conjunto de problemas deve abranger uma variedade de tópicos e envolver matemática significativa, dessa forma, “os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática” (NCTM, 2007, p. 57).

1.1.1 Entendimento de problema

Um aspeto essencial quando caracterizamos um problema é o facto de ser uma atividade para a qual o aluno não dispõe imediatamente de um método de resolução (Matos & Serrazina, 1996). Os autores acrescentam ainda a perspetiva de Kantowski (1977) que afirma que um individuo está perante um problema quando se depara com uma questão à qual não pode dar resposta ou a qual não consegue resolver através dos conhecimentos imediatamente disponíveis.

Assim sendo, para que determinada situação seja um problema para um individuo é necessário que esta lhe desperte interesse e, dessa forma, faça uma tentativa deliberada para o resolver (Matos & Serrazina, 1996). Deste modo, Pólya (1977) citado em Matos e Serrazina (1996) define que “um problema pode ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e puser em jogo faculdades inventivas, quem o resolver pelos próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta” (p. 140).

Ponte (2005) afirma que foi através do trabalho de Pólya que foi possível clarificar o papel educativo dos problemas no ensino da matemática. Pólya defendia que os problemas propostos pelo professor devem desafiar os seus alunos, as suas capacidades matemáticas e despertar o gosto pela descoberta. Esta é uma condição fundamental para que os alunos compreendam a verdadeira natureza da matemática e desenvolvam o gosto por esta disciplina.

Os autores Boavida et al. (2008) identificam as seguintes características fundamentais dos problemas:

i. “sejam, realmente, compreensíveis pelo aluno apesar de a solução não ser imediatamente atingível”;
ii. “sejam intrinsecamente motivantes e intelectualmente estimulantes”;
iii. “possam ter mais do que um processo de resolução”;
iv. “possam integrar vários temas” (p. 16).

Deste modo, os autores defendem que se um problema for imediatamente solucionável e pouco interessante não se considerará um problema para o aluno. Acrescentando a esta ideia, Ponte (2005) refere que um problema acarreta sempre um grau de dificuldade. Se for muito difícil, pode levar o aluno a perder o interesse e desistir dele. Se for demasiado acessível, não se considerará um problema, mas sim um exercício. Neste sentido, o mesmo autor refere que é fundamental que o professor compreenda a relação entre exercício e problema, afirmando

> A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema (Ponte, 2005, p. 4).

O exercício é necessário para que o aluno coloque em prática os conhecimentos que já adquiriu, servindo, essencialmente, o papel de consolidação de conhecimentos. Porém, resolver exercícios em série não consiste numa atividade interessante para a maioria dos alunos. Para além disso, recorrer apenas à resolução de exercícios no ensino da matemática, acarreta riscos de desmotivação por parte dos alunos e empobrecimento nos desafios propostos (Ponte, 2005).

Deste modo, Ponte (2005) sugere duas dimensões fundamentais das tarefas propostas em sala de aula: o grau de desafio e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático refere-se à dificuldade de cada questão que é proposta aos alunos, desta forma, este podem variar entre "reduzido" e "elevado". O grau de estruturação relaciona-se com a explicitação das questões colocadas, assim, estas podes classificar-se como "abertas" ou "fechadas". Ao cruzar estas duas dimensões, Ponte (2005) propõe quatro tipos de tarefas: (i) exercício – tarefa fechada e desafio reduzido; (ii) problema – tarefa fechada e desafio elevado; (iii) investigação – tarefa aberta e desafio elevado; (iv) exploração – tarefa aberta, desafio reduzido.

Pretende-se que o professor seja capaz de distinguir os vários tipos de tarefas, de modo a escolhê-las de acordo com os objetivos que tem em mente. Assim, o tipo de problema selecionado pelo professor deve, também, ir ao encontro desses objetivos (Boavida, 2008).

De acordo com o NCTM (2007) o professor tem um papel essencial na escolha dos problemas e das tarefas matemáticas, em geral. A escolha ponderada dos problemas a utilizar revelam-se tarefas complexas no ensino da matemática.

> Ao analisar e adaptar um determinado problema, ao antecipar as ideias matemáticas que dele possam emergir e as próprias questões dos alunos, os professores podem decidir se determinados

> problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objetivos propostos (p. 58).

Desta forma, os autores Boavida, et al. (2008) propuseram três tipos de problemas: problemas de cálculo; problemas de processo e problemas abertos.

Problemas de cálculo

Segundo Boavida et al. (2008), este é o tipo de problemas que requer decisões acerca da operação a efetuar de acordo com os dados apresentados. É necessário que os alunos leiam o problema, avaliem o que conhecem e aquilo que o problema pretende para que, finalmente, apliquem as operações que considerem corretas utilizando os dados apresentados no enunciado.

Deste modo, este tipo de problemas pode diferir entre problemas de um passo e problemas de mais passos. Os problemas de um passo requerem apenas que os alunos utilizem uma operação para o resolver, já nos problemas de mais passos é necessário recorrer a mais de uma operação para obter uma solução. Os problemas apresentados na Figura 1 denominados "Vedar o quintal" e "Pintar mesas" ilustram um exemplo de um problema de um passo e um problema de mais passos, respetivamente.

Figura 1

Exemplos de problemas de cálculo passo a passo e mais um passo

Vedar o quintal O quintal da Sandra é quadrado com 5 metros de lado. Quantos metros de rede são necessários para vedar o quintal? **Pintar mesas** O Luís pintou três mesas na segunda-feira e quatro na terça. Na quarta à noite precisa de entregar uma dúzia. Quantas mesas precisa de pintar na quarta-feira? (Boavida et al. 2008, p. 17)

O problema "Vedar o quintal" é um problema de um passo, pois recorrendo apenas a uma operação (adicionar a medida do comprimento de cada um dos lados de um quadrado, neste caso seria 5+5+5+5, ou multiplicar o número de lados pela medida respetiva, isto é 4×5) se obteria a resolução do problema (20 metros).

Já o problema "Pintar mesas" classifica-se como um problema de mais passos pois requer duas operações, primeiramente adicionar a quantidade de mesas já pintadas pelo Luís (3+4=7), em seguida, sabendo que tem de entregar 12, é necessário calcular a diferença entre 12 e o resultado obtido da operação anterior, e, assim, obter a solução (12−7=5, faltam pintar 5 mesas).

De acordo com os mesmos autores, os problemas de cálculo são normalmente utilizados nos manuais escolares no fim dos temas. Desta forma, permitem que os alunos apliquem conceitos e competências aprendidos anteriormente e desenvolvam a sua aplicação. Contudo, o uso excessivo deste tipo de problemas, pode resultar em leituras apressadas, análises superficiais e, consequentemente, respostas sem sentido.

Problemas de processo

Segundo Boavida et al. (2008), contrariamente aos problemas de cálculo, os problemas de processo exigem mais do que um conjunto de operações pertinentes à sua resolução. Estes implicam estratégias de resolução mais criativas, pois estão, geralmente, inseridos em contextos mais complexos que exigem um esforço de compreensão matemática mais elevado.

De acordo com o NCTM (2000), citado em Boavida et al. (2008), "estes problemas podem ser usados para desenvolver diferentes capacidades, para introduzir diferentes conceitos ou para aplicar conhecimentos e procedimentos matemáticos anteriormente aprendidos. Colocam questões que apelam ao envolvimento dos alunos e proporcionam experiências matemáticas ricas e significativas" (p. 19). O sucesso para a resolução destes problemas reside na capacidade do aluno de compreensão e identificação da estrutura do problema. A Figura 2 apresenta um exemplo de problema de processo "A compra e venda de CDs".

Figura 2

Exemplo de problema de processo

A compra e venda de CDs

A Inês comprou um CD por 3 euros e vendeu-o ao Luís por 5 euros. Mais tarde comprou-o de volta ao Luís por 7 euros e tornou a vendê-lo por 9 euros. Será que a Inês ganhou ou perdeu com esta compra e venda?

(Boavida et al. 2008, p. 19)

De acordo com Boavida et al. (2008), o problema não tem uma resolução óbvia, podendo *seguir duas* linhas de pensamento:

1. Na primeira transação, a Inês ao comprar o CD por 3€ e vender por 5€, obteve 2€ de lucro. Na segunda transação, ao comprar por 7€ aquilo que vendeu por 5€, perdeu 2€, o que anula o primeiro lucro. Em seguida vendeu o CD por 9€, resultando assim num lucro total de 2€.
2. Na primeira transação, a Inês ao comprar o CD por 3€ e vender por 5€, obteve 2€ de lucro. Na segunda transação, ao comprar o CD por 7€ e vender por 9€, ganhou 2€ de lucro. Assim, adicionando o lucro das duas transações, a Inês obteve um ganho de 4€.

Para justificar qual é a resposta correta ao problema, as autoras Boavida et al. (2008) utilizam duas vias diferentes de pensamento:

- "A segunda transação só por coincidência é efetuada sobre o mesmo objeto. Experimente pensar que na segunda vez a Inês foi comprar não um CD, mas um livro, e não ao Luís, mas ao João. Como estes acontecimentos são independentes, já é claro verificar que a Inês ganhou dois euros em cada transação, donde ganhou no total 4 euros" (p. 19).
- "Podemos supor que temos no bolso uma determinada quantia, por exemplo 10 euros, e, fazendo os cálculos correspondentes às transações, comparar a quantia final com a inicial: $10-3=7$; $7+5=12$; $12-7=5$; $5+9=14$; $14-10=4$. Ou seja, houve um lucro de 4 euros" (p. 20).

De acordo com Pinto e Canavarro (2012), a investigação da resolução de problemas revela que este tipo de problema é aquele que apela à utilização de estratégias mais diversificadas.

Problemas abertos

As autoras Boavida et al. (2008) afirmam que os problemas abertos, também designados por investigações, caracterizam-se por poderem ter mais do que um caminho para chegar à sua resolução, tendo também mais do que uma resposta correta. “Para os resolverem, os alunos têm de fazer explorações para descobrir regularidades e formular conjeturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão” (p. 20). Na Figura 3 está apresentado um exemplo de um problema aberto.

Figura 3

Exemplo de problema aberto

Mais guardanapos

A Catarina vai pôr a secar guardanapos. Porque é uma rapariga organizada, pendura, todos os guardanapos, usando o mesmo processo. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 30 guardanapos.

(Boavida et al. 2008, p. 20)

Pelo facto de este problema ser aberto, permite que os alunos explorem diferentes abordagens, pois não é referido o modo como a Catarina irá pendurar os 30 guardanapos, permitindo aos alunos encontrarem várias organizações diferentes.

Algumas propostas dos alunos poderão ser pendurar em conjuntos de 1, 2, 3, 5 … guardanapos, isto é, se os guardanapos forem colocados em conjuntos de 1 com uma mola cada um, serão necessárias 30 molas, se foram pendurados em conjuntos de 2 com uma mola cada um, já serão apenas necessárias 15 molas, e assim sucessivamente com os outros conjuntos possíveis. Todas essas possibilidades são respostas corretas ao problema.

Neste tipo de problemas, é comum que nem todos os alunos encontrem todas as possibilidades, porém todos têm a oportunidade de explorar a tarefa e descobrir algo novo, através dos seus conhecimentos e capacidades. “Cabe ao professor acompanhar o trabalho dos alunos e ir fornecendo pistas de modo que possam ir desenvolvendo, cada vez mais, o seu raciocínio indutivo e dedutivo” (Boavida et al. 2008, p. 22).

Esta é uma terminologia de tipos de problemas sugerido por Boavida et al. (2008), porém existem outras, como a proposta de Vale & Pimentel, (2004) citado em Pinto e Canavarro (2012): (A) problemas de um passo; (B) problemas de dois ou mais passos; (C) problemas de processo; (D) problemas de aplicação e (E) problemas tipo puzzle.

1.1.2 Etapas de resolução de problemas

Pólya (1977) citado em Matos e Serrazina (1997) defende que a resolução de problemas deve possibilitar uma experiência na sua resolução bem como uma análise dos processos que conduzem à mesma. Deste modo, o modelo proposto por Pólya para a resolução de problemas considera quatro etapas:

1. Compreensão do problema;
2. Estabelecimento de um plano;
3. Execução do plano;
4. Reflexão sobre o que foi feito.

Em seguida serão explicitadas cada uma das fases do modelo de Pólya.

A fase da compreensão é a primeira e mais importante de acordo com Pólya (2003), citado em Sousa e Mendes (2017) “É uma tolice responder a uma pergunta que não se tenha compreendido” (p. 246).

Os autores Viseu et al. (2016) referem-se a esta fase como aquela onde é necessário “identificar as partes principais, retirar os dados, escolher a incógnita, fazer perguntas, construir figuras e fazer esquemas” (p.13). De acordo com Sousa e Mendes (2017), para uma compreensão eficiente de um problema, nos primeiros anos, pretende-se que os alunos comecem por fazer a leitura do enunciado com intuito de compreender o que se pretende com o problema. Uma estratégia útil para este efeito é que os alunos reescrevam o que é pedido pelas próprias palavras, ajudando-os na interpretação. É ainda importante para uma boa compreensão que tanto os alunos como o professor coloquem questões sobre o enunciado.

A segunda fase é aquela onde se pretende "delinear uma estratégia que permita encontrar conexões entre os dados e a incógnita" (Viseu et al., 2016, p. 13). Isto é, onde é necessário decidir como agir para encontrar a solução de um problema, pelo facto de ser frequente existirem vários modos de resolver determinado problema. Para este efeito é fundamental que os alunos estejam familiarizados com as estratégias de resolução de problemas de modo a selecionarem a mais adequada (Sousa & Mendes, 2017).

Sousa e Mendes (2017) defendem que, por vezes, os alunos vão delineando o plano e executando-o ao mesmo tempo, tornando difícil distinguir a segunda fase da terceira. Apesar disso, na terceira fase pretende-se que os alunos concretizem a estratégia que planearam na fase anterior, tal como definido por Viseu et al. (2016) "seguir a estratégia delineada e assegurar que é adequada, verificando cada passo efetuado" (p. 13).

Esta parte de "verificar cada passo efetuado" é muito importante pois a estratégia escolhida pelo aluno pode não ser a mais apropriada para encontrar a solução de um problema. A autora O'Connell (2007) citada por Sousa e Mendes (2017) afirma que "reconhecer que uma estratégia não foi bem-sucedida e decidir sobre uma estratégia alternativa são competências importantes na construção de bons resolvedores de problemas" (p. 17).

Na última fase pretende-se "refletir na solução encontrada tendo em conta o contexto do problema, verificar essa solução e considerar a possibilidade de aplicar o processo desenvolvido à resolução de outros problemas" (Viseu et al., 2016, p. 13). Isto é, depois de chegarem à solução é necessário que os alunos reflitam se está correta conforme aquilo que é solicitado. Desta forma, é fundamental que os alunos verifiquem todos os passos dados ao longo da resolução do problema, pois podem verificar-se erros, tanto na escolha da estratégia a utilizar como na sua execução. Para além disso, neste processo pode ser necessário começar do início e descobrir se existe outra estratégia mais adequada à resolução do mesmo problema (Sousa e Mendes, 2017).

Dar aos alunos a conhecer estas etapas não irá significar que eles pensarão todos da mesma maneira, mas irá dar-lhes ferramentas para resolverem um problema do princípio até ao fim. Torna-se imprescindível que o professor ajude os alunos nos primeiros anos a refletir sobre estas etapas, dando-lhes um ponto de partida e um caminho a seguir para chegar a uma solução, tornando possível a resolução de um problema (O'Connell, 2007, citado em Sousa & Mendes, 2017).

1.1.3 Estratégias de resolução de problemas

Vale et al. (2015) referem que, quando nos deparamos com um problema, é necessário escolher e utilizar estratégias pensadas para fazer face às situações que surjam. Foi Pólya o primeiro a introduzir a noção de estratégia, as quais foram "reconhecidas como úteis para dar pistas sobre o caminho a seguir, e ao longo dos anos foram defendidas como capacidades que é importante o aluno desenvolver" (p. 41-42). Isto é, as estratégias surgiram como orientações para os alunos resolverem um problema e ao longo do tempo foram definidas como capacidades fundamentais a desenvolver pelos alunos.

Segundo Matos e Serrazina (1997), Pólya considera essencial ensinar aos alunos estratégias gerais (questões heurísticas) de resolução de problemas. As heurísticas consideram-se um conjunto de questões que o aluno deve fazer a si próprio em cada uma das etapas de resolução de problemas, de modo a organizar o seu pensamento de forma sistemática e eficaz.

> Acredita-se que se aprende a resolver problemas, sobretudo se se for persistente e disciplinado na forma de pensar e de estruturar o pensamento e se se for capaz de comunicar o que se pensou. Neste sentido, a familiaridade com o uso de estratégias irá permitir ao aluno passar gradualmente de uma situação fechada para outra mais aberta sem se sentir perdido (Boavida et al. 2008, p. 22-23).

No entanto, segundo Vale et al. (2015) “as heurísticas ajudam a refletir e interpretar situações-problema, mas como são demasiado genéricas não ajudam o aluno que está sem saber o que fazer durante uma tentativa de resolução” (p. 42). Isto é, apenas recorrendo às heurísticas os alunos não se tornaram “melhores resolvedores de problemas” (p. 42), apesar de ajudarem a organizar o pensamento, eram muito abrangentes e forneciam apenas vagos processos de raciocínio.

De acordo com Boavida et al. (2008) é ainda, fundamental distinguir as etapas de Pólya das estratégias. O modelo de Pólya permite uma visão geral de como nos devemos orientar para resolver um problema, enquanto as estratégias são ferramentas, que se identificam com processos de raciocínio e que se mostram úteis nos vários momentos da resolução de um problema. “O conhecimento matemático e as estratégias de raciocínio devem ser aprendidas e usadas em simultâneo e não isoladamente” (p. 23).

Assim, Boavida et al. (2008) listam algumas das estratégias de resolução de problemas que podem ser utilizadas no ensino básico:

- Fazer uma simulação/dramatização;
- Fazer tentativas;
- Reduzir a um problema mais simples;
- Descobrir um padrão;

- Fazer uma lista organizada;
- Trabalhar do fim para o princípio.

Para além destas, recorre-se muitas vezes a representações que ajudam a tornar o problema mais visual, através de desenhos ou esquemas, ou utilizando tabelas.

Através de alguns exemplos de problemas apresentados em seguida, é possível perceber a utilização das várias estratégias referidas, tal como consta em Boavida et al. (2008).

O primeiro exemplo de problema (Figura 4) permite explorar a estratégia "**Fazer tentativas**".

Figura 4

Problema para explorar a estratégia "Fazer tentativas"

Iogurtes

O André e o Bernardo foram comprar iogurtes para o grupo de amigos com quem estão acampados. Uns iogurtes são vendidos em embalagens de quatro e outros de seis. Em conjunto, compraram 12 embalagens, num total de 58 iogurtes. Descobre quantas embalagens de cada tipo compraram os dois rapazes?

(Boavida et al. 2008, p. 23)

Uma possível estratégia a utilizar para resolver o problema "Iogurtes" será fazendo tentativas, atendendo às condições do enunciado, tal como consta na Figura 5.

Figura 5

Possível resolução do problema recorrendo a tentativas

Total de embalagens	Embalagens de 4	Embalagens de 6	Total de iogurtes
12	6	6	6×4+6×6=24+36=70
12	8	4	8×4+4×6=32+24=56
12	7	5	8×4+4×6=32+24=58

(Boavida et al., 2008, p. 23)

Fazendo as tentativas, concluía-se que o André e o Bernardo compraram 7 embalagens de 4 e 5 embalagens de 6 iogurtes.

De acordo com as autoras Sousa e Mendes (2017), a estratégia de fazer tentativas surge pelo facto de, quando os alunos se depararam com um problema ao qual não sabem como resolver, têm tendência para começar a fazer tentativas. Este processo ocorre de forma sucessiva até ser encontrada uma solução válida.

O problema seguinte (Figura 6) permite explorar a estratégia "**Trabalhar do fim para o princípio**".

Figura 6

Problema para explorar a estratégia "Trabalhar do fim para o princípio"

Os passageiros do autocarro

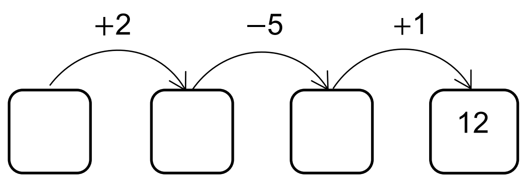
Um autocarro partiu da estação com alguns passageiros. Na primeira paragem entraram dois passageiros; na segunda saíram cinco e na terceira entrou um, tendo chegado ao destino doze passageiros. Quantos passageiros iniciaram a viagem?

(Boavida et al., 2008, p. 24)

Neste problema, sabemos a situação final e queremos descobrir a inicial, por isso utiliza-se a estratégia "Trabalhar do fim para o princípio", a qual é pertinente fazer um esquema (Figura 7) para organizar o raciocínio.

Figura 7

Possível resolução do problema trabalhando do fim para o princípio



O esquema deverá ser preenchido utilizando as operações inversas para chegar à solução: na partida da viagem de autocarro estavam 14 passageiros (12−1=11, 11+5=16, 16−2=14)

A estratégia "trabalhar do fim para o principio" surge em problemas onde se tem conhecimento da situação final e pretendemos conhecer a situação inicial, invertendo o raciocínio do enunciado do problema (Sousa e Mendes, 2017)

O último problema (Figura 8) permite exemplificar as estratégias "**Fazer uma simulação/dramatização**", "**Reduzir a um problema mais simples**" e "**Fazer uma lista organizada**".

Figura 8

Problema para explorar as estratégias "Fazer uma simulação/dramatização", "Reduzir a um problema mais simples" e "Fazer uma lista organizada"

> **Ginástica rítmica**
> Num número de ginástica as oito participantes devem ficar unidas duas a duas com fitas coloridas. Quantas fitas são necessárias para realizar o número?
>
> (Boavida et al., 2008, p. 24)

Para começar, pode reduzir-se a um problema mais simples, supondo só haver 2, 3 ou 4 participantes, encontrando a solução nesses casos. Tal como o nome indica, a estratégia "reduzir a um problema mais simples" procura simplificar um problema, resolvendo-o mais facilmente, visto que é possível compreender melhor o problema inicial (Sousa & Mendes, 2017).

Seria também pertinente, sobretudo com alunos mais novos, fazer uma dramatização da situação apresentada para determinar a resposta. Esta estratégia pretende utilizar objetos e criar um modelo que interprete a situação do problema, ajudando o aluno a compreendê-la melhor e saber como resolvê-la (Sousa & Mendes, 2017).

Outra estratégia possível seria fazer uma tabela, relacionando o número de participantes com o número necessário de fitas. Será importante os alunos começarem com um número de participantes reduzido para descobrirem o padrão que relacione as duas variáveis.

Para além disso, ainda se pode resolver o problema utilizando a estratégia de fazer uma lista organizada (Figura 9), atribuindo uma letra aos oito participantes (A, B, C, D, E, F, G, H).

Figura 9

Possível resolução do problema fazendo uma lista organizada

AB	*BC*	*CD*	*DE*	*EF*	*FG*	*GH*
AC	*BD*	*CE*	*DF*	*EG*	*FH*	
AD	*BE*	*CF*	*DG*	*EH*		
AE	*BF*	*CG*	*DH*			
AF	*BG*	*CH*				
AG	*BH*					
AH						

Atribuindo uma fita a cada par de participantes, concluímos que são necessárias 28 fitas.

A estratégia "fazer uma lista organizada" dá a possibilidade ao aluno de selecionar e organizar sistematicamente os dados do problema e é utilizada quando é necessário formar combinações para resolver o problema (Sousa & Mendes, 2017).

Boavida et al., (2008) defendem que, maioritariamente, os alunos são capazes de descobrir seus próprios processos de resolução. Deste modo, é mais produtivo que o professor proponha tarefas variadas que careçam de estratégias diversificadas, em vez de ensinar sistematicamente o conjunto de estratégias de resolução de problemas. Ao utilizá-las e identificá-las o processo de decisão de adequação das estratégias para determinado problema será facilitado aos alunos.

Também o NCTM (2007) sustenta esta ideia, afirmando que o professor deve ajudar os alunos "a expressar, a classificar e a comparar as suas estratégias" (p. 59). As estratégias utilizadas pelos alunos deverão ser adequadas à variedade de problemas com que se deparam e à dificuldade crescente dos mesmos.

> Os alunos deverão tomar consciência dessas estratégias, à medida que vai surgindo a necessidade de as utilizar, e à medida que vão sendo modeladas nas atividades levadas a cabo na sala de aula, o professor deverá encorajar os alunos a registá-las. (p. 59)

Assim, o aluno vai descobrindo que quando uma estratégia não resulta, que outras pode recorrer, ganhando confiança nas suas capacidades de resolução de problemas. "Neste contexto, os bons problemas são aqueles que desafiam os alunos a desenvolver e aplicar estratégias, que são um meio para introduzir novos conceitos e que oferecem um contexto para usar e desenvolver diferentes capacidades" (Boavida et al., 2008, p. 26).

Desta forma, revela-se que "a resolução de problemas não é um tópico específico a ser ensinado, mas um processo que deve permear toda a aprendizagem da Matemática." (Boavida et al., 2008, p. 26). As autoras defendem assim que a resolução de problemas não deve ser um conteúdo a ser lecionado, mas sim um processo transversal ao ensino da matemática, estando presente em contextos diversos.

1.1.4 A resolução de problemas nos documentos curriculares

As Aprendizagens Essenciais (AE) de matemática no 1.º Ciclo definem que um dos objetivos gerais para a aprendizagem da matemática é desenvolver a capacidade de resolução de problemas. Estes objetivos definem que "todos os alunos devem conseguir atingir e que envolvem, de forma integrada, conhecimentos, capacidades e atitudes relativas a esta área do saber" (Canavarro et al., 2021, p. 2). Na perspetiva de resolução de problemas este documento curricular define que:

> Desenvolver a capacidade de resolver problemas recorrendo aos seus conhecimentos matemáticos, de diversos tipos e em diversos

> contextos, confiando na sua capacidade de desenvolver estratégias apropriadas e obter soluções válidas. A resolução de problemas é uma atividade central da Matemática, na qual todos os alunos devem poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes (p. 3).

Nas AE a resolução de problemas está integrada no tema das capacidades matemáticas, que diz respeito ao desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais.

> A resolução de problemas deve ser uma constante e apoiar tanto a abordagem aos conhecimentos matemáticos como oferecer oportunidades para a sua aplicação. Importa explicitar as diferentes estratégias de resolução de problemas que vão sendo mobilizadas, nomeadamente as que estão associadas ao pensamento computacional, a ser explorado de forma simples e em estreita ligação com o uso de tecnologia (Canavarro et al., 2021, p. 9).

Assim, as AE da Matemática do 4º ano (Canavarro et al., 2021, p. 3-4), no tema capacidades matemáticas, organizam o tópico de resolução de problemas em dois subtópicos: processo e estratégias.

No que diz respeito ao processo, as AE definem dois objetivos de aprendizagem: “Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas” (p. 13) e “Formular problemas a partir de uma situação dada, em contextos diversos (matemáticos e não matemáticos)” (p. 13).

Estes objetivos propõem ações estratégicas de ensino do professor. O primeiro objetivo define duas ações: “Solicitar, de forma sistemática, que os alunos percorram e reconheçam as diferentes etapas de resolução de um problema, incentivando a sua perseverança no trabalho em Matemática” (p. 13) e “Propor problemas com excesso de dados ou com dados insuficientes”

(p. 13). No segundo objetivo define apenas uma ação do professor: "Formular problemas a partir de uma situação dada, em contextos diversos (matemáticos e não matemáticos)" (p. 13).

Já nas estratégias são também definidos dois objetivos de aprendizagem: "Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia" (p. 13) e "Reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias da resolução de um problema" (p. 14).

As ações estratégicas de ensino do professor sugerem uma para cada um dos objetivos enunciados anteriormente. Para o primeiro objetivo sugere-se

> Acolher resoluções criativas propostas pelos alunos, valorizando o seu espírito de iniciativa e autonomia, e analisar, de forma sistemática, com toda a turma, a diversidade de resoluções relativas aos problemas resolvidos, de modo a proporcionar o conhecimento coletivo de estratégias que podem ser mobilizadas em outras situações: fazer uma simulação, por tentativa e erro, começar por um problema mais simples, usar casos particulares, criar um diagrama, começar do fim para o princípio (pp. 13-14).

Já para o segundo objetivo, propõe-se

> Orquestrar discussões com toda a turma que envolvam não só a discussão das diferentes estratégias da resolução de problemas e representações usadas, mas também a comparação entre a sua eficácia, valorizando o espírito crítico dos alunos e promovendo a apresentação de argumentos e a tomada de posições

> fundamentadas e a capacidade de negociar e aceitar diferentes pontos de vista (p. 14).

As ações estratégicas de ensino do professor vão bastante ao encontro da minha proposta para este estudo, tanto naquelas sugeridas no subtópico de processo como no das estratégias.

No documento curricular Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) (Martins et al., 2017) estão representadas as áreas de competência a desenvolver com os alunos até ao final da escolaridade obrigatória. Este define dez Áreas de Competências, sendo uma delas denominada por "Raciocínio e Resolução de problemas".

As competências que vão ao encontro da Resolução de problemas estão relacionadas com os "processos de encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões" (Martins et al., 2017, p. 23).

O PASEO especifica que as competências associadas a "Raciocínio e resolução de problemas" implicam que os alunos sejam capazes de:

- "interpretar informação, planear e conduzir pesquisas;"
- "gerir projetos e tomar decisões para resolver problemas;"
- "desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados." (Martins et al., 2017, p. 23).

Além disso, pelo facto de as AE estarem interligadas com o PASEO, estas definem que a resolução de problemas está associada a outras áreas de competência, para além de "Raciocínio e Resolução de problemas", isto é, "Pensamento crítico e pensamento criativo", "Relacionamento interpessoal", "Desenvolvimento pessoal e autonomia" e "Saber científico, técnico e tecnológico".

De acordo com os tópicos já mencionados até aqui, evidencia-se que a resolução de problemas se caracteriza por algo muito maior do que aquilo que parece transparecer à primeira instância. Permite que os alunos desenvolvam capacidades matemáticas, mas, para além disso, proporciona-os a melhorar o próprio pensamento critico e as relações com as pessoas à sua volta, desenvolvendo a sua autonomia e o seu conhecimento científico e tecnológico. Assim, transcende além da aula de matemática.

No documento “Princípios e Normas para a Matemática Escolar” do NCTM (2007) foram definidos seis princípios para a matemática escolar (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia), os quais referem a importância da resolução de problemas.

No Princípio da Equidade, o qual defende o ensino da matemática para todos os alunos, refere que, com o auxílio de ferramentas e ambientes tecnológicos, poderá ser possível proporcionar aos alunos com necessidades educativas especiais, oportunidades para explorar problemas e conceitos matemáticos complexos.

No Princípio do Currículo, que sustenta que o currículo escolar de matemática deve ser: coerente, onde “as ideias matemáticas estão associadas e construídas umas sobre as outras” (p. 15); efetivo, o qual incide sobre uma matemática relevante, isto é “matemática que irá preparar os alunos para a continuação dos seus estudos e para a resolução de problemas numa diversidade de contextos” (p. 15); bem articulado, que estimule os alunos a aprender conceitos matemáticos cada vez mais aprofundados, ao longo que vão avançando na sua escolaridade. No que diz respeito à matemática relevante, este princípio defende que “algumas ideias poderão ainda, merecer destaque no currículo, uma vez que poderão ser úteis na representação e resolução de problemas no seio da própria matemática ou fora dela.” (p. 16).

O Princípio do Ensino defende um ensino efetivo da matemática, que exige um conhecimento por parte do professor daquilo que os alunos já sabem e aquilo que ainda precisam de aprender, estimulando-os constantemente para que aprendam corretamente.

> Os alunos aprendem matemática através das experiências que os professores proporcionam. Como tal, os seus conhecimentos matemáticos, a sua capacidade de os utilizar na resolução de problemas, a sua confiança e a sua pré-disposição em relação à matemática são modelados pelo tipo de ensino com que se deparam na escola (p. 17).

O Princípio da Aprendizagem, que defende que é essencial os alunos aprenderem matemática com compreensão, refere que a compreensão de conceitos numéricos e a modelação dos procedimentos através da resolução de problemas é algo que merece atenção.

> Quando os alunos trabalham arduamente na resolução de um problema difícil ou na compreensão de uma ideia complexa, obtêm uma sensação especial de realização que, por sua vez, aumenta a sua vontade de continuar e de aprofundar o seu envolvimento na matemática (p. 22).

O Princípio da Avaliação que sustenta a ideia de uma avaliação como uma orientação e um apoio à aprendizagem dos alunos, defende o uso de discussões em turma, “onde os alunos apresentam e avaliam diferentes tipos de resolução de problemas complexos, poderão estimular a sua perceção da diferença entre uma resposta excelente e uma medíocre” (p. 24).

Por fim, o Princípio da Tecnologia, que defende que a tecnologia é uma ferramenta essencial na aprendizagem da matemática. Sustenta a ideia de que os alunos, quando lhes é criado um ambiente tecnológico propício, “os alunos podem concentrar-se nas decisões a tomar, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas" (p. 26).

Em suma, a resolução de problemas representa uma competência de grande importância no ensino da matemática, cabendo ao professor saber valorizá-la enfrentando os desafios que acarreta. "Importa conhecer e discutir o que está a ser feito, nomeadamente em Portugal, nos diversos níveis de ensino e, simultaneamente, delinear caminhos que permitam fazer-lhes face e avançar na compreensão dos seus principais contornos" (Boavida & Menezes, 2012, p. 293).

Em síntese, a resolução de problemas está muito presente em documentos curriculares internacionais e nacionais. Ainda assim, apresenta-se como um tópico que gera dificuldades nos alunos. Através deste estudo, pretendo diferenciar um pouco o modo como é interpretada a resolução de problemas na sala de aula, desafiando os alunos a algo diferente e estimulante.

1.2 O ensino exploratório

As tarefas propostas em sala de aula devem ser diversificadas, uma vez que desempenham um papel crucial na aprendizagem dos alunos. Ponte (2005) defende que para cada tarefa com objetivo específico, também o tipo de ensino tem de ser adaptado pelo professor. Assim, o autor identifica duas metodologias diferentes de ensino da matemática: o "ensino direto" e o "ensino-aprendizagem exploratório".

O ensino direto caracteriza-se pelo papel do professor como fornecedor de informação de forma clara, sistematizada e atrativa aos seus alunos. O aluno assume o papel de ouvinte atento das palavras do professor, colocando e respondendo a questões, e resolvendo exercícios que mobilizam os conhecimentos anteriormente apresentados pelo professor (Ponte, 2005).

Ponte (2005) sugere o termo “ensino-aprendizagem exploratório”, que surge por ser uma metodologia de ensino na qual “a ênfase desloca-se da atividade «ensino» para a atividade mais complexa «ensino aprendizagem»” (p. 13). Esta destaca-se pelo facto da sua “característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (p. 13).

Além disso, não significa que o ensino-aprendizagem exploratório resulta apenas da exploração dos alunos, mas sim de toda uma dinâmica de trabalho em sala de aula. Assim, não se trata de uma realização circunstancial de algum problema específico, mas sim uma “tendência geral do trabalho desenvolvido” (Ponte, 2005, p. 14).

Na verdade, segundo o autor mencionado, as duas estratégias de ensino dependem uma da outra. O ensino direto surge como como a “teoria”, isto é a exposição da matéria por parte do professor, seguido da resolução de exercícios, tornando-se a “primeira etapa no estudo de um novo assunto” (Ponte, 2005, p. 15). Só em seguida surge a “prática”, onde se destacam as atividades de exploração que “valoriza mais os momentos de reflexão e discussão com toda a turma, tendo por base o trabalho prático já previamente desenvolvido” (Ponte, 2005, pp. 15-16).

Na abordagem exploratória podem ser analisadas uma grande variedade de tarefas/problemas, nomeadamente, problemas mais fechados ou investigações mais abertas, nos quais os alunos mobilizam os seus conhecimentos anteriores (Ponte et al., 2015).

Deste modo, os autores Stein et al. (2008) citado em Oliveira et al. (2013) propuseram três fases de organização para uma aula de ensino exploratório: apresentação da tarefa, exploração da tarefa e discussão coletiva.

Na primeira fase, procura-se que o professor apresente à turma a tarefa matemática que pretende desenvolver que, normalmente, é um problema ou uma investigação. É fundamental nesta fase que o professor se certifique que os alunos compreendem o objetivo da tarefa apresentada e que se sintam desafiados para desenvolverem a tarefa com sucesso (Oliveira et al., 2013).

Na fase seguinte, de exploração da tarefa, o professor acompanha o trabalho autónomo dos alunos durante a realização da tarefa. Durante esta fase, que pode ocorrer individualmente ou em pequenos grupos, o professor pode ir respondendo às questões colocadas pelos alunos, garantindo que todos os alunos estão ativamente envolvidos. O professor deve ainda assegurar que os alunos se estão a preparar a sua apresentação na fase seguinte, e selecionar a sequência de apresentação no momento de discussão (Oliveira et al., 2013).

A última fase, a discussão coletiva, é um elemento essencial no ensino exploratório, tal como refere Ponte (2005), que se caracteriza por ser o momento em que os alunos “apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjeturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros” (p. 16). Já o professor procura “que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática.” (p. 16).

Ponte (2005) caracteriza a discussão por ser algo que assume a interação de vários intervenientes aos quais trocam ideiam e questionam-se uns aos outros. “Uma discussão tem sempre um objetivo, por exemplo, a estratégia a seguir para a realização de uma tarefa, a avaliação de uma dada solução, o balanço do trabalho realizado ao longo de todo um período, etc” (p. 16).

No momento da discussão, o professor assume o papel de “protagonista central” (Ponte, 2005, p. 16), isto porque, tem de gerir a sua participação com a dos alunos. Deste modo, cabe-lhe moderar a sequência de apresentações dos alunos, garantindo uma discussão rica, a qual estabelece conexões entre ideias, desenvolvendo o conhecimento e pensamento matemático dos alunos (Oliveira et al., 2013).

Os mesmos autores definem ainda uma quarta fase: “sistematização das aprendizagens matemáticas”, na qual se faz uma síntese do trabalho desenvolvido.

O trabalho exploratório torna-se fundamental numa aula de matemática, pois cria a oportunidade aos alunos de construírem aprofundarem a sua compreensão acerca de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas (Ponte et al., 2015). No mesmo sentido, Canavarro (2011) refere que “O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva” (p. 11).

Deste modo, de acordo com Ponte et al. (2015) os alunos têm a possibilidade de “desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução, que devem ser capazes de apresentar e justificar aos seus colegas e ao professor” (p. 114). Enquanto o professor dá oportunidade aos alunos de descoberta, simultaneamente proporciona momentos reflexão de significados, argumentação e discussão. Da mesma forma, procura que os alunos desenvolvam o seu raciocínio e a sua compreensão matemática, de modo a utilizá-los em diversos contextos.

Nota-se que este tipo de ensino integra um desafio acrescido para os professores, nomeadamente na seleção das tarefas, na antecipação das estratégias possíveis que possam surgir por parte dos alunos, na organização da sala de aula e na condução de toda a dinâmica que este tipo de ensino exige, carecendo de conhecimentos profundos e específicos, competência e investimento pessoal por parte dos professores (Ponte et al., 2015).

> O professor precisa de criar um ambiente de aprendizagem que acolha todos os alunos, de gerir as suas participações e interações

> de modo que se relacionem produtivamente com o conteúdo matemático e as suas representações, de identificar e interpretar o que os alunos fazem e dizem de modo a orientá-los por trajetórias em que se possam desenvolver matematicamente (Canavarro et al., 2012).

Conclui-se então que é essencial que o ensino exploratório da matemática não seja algo utilizado pontualmente para realizar alguma tarefa específica, mas sim que seja utilizado ao longo do tempo, desse modo, vai sendo aperfeiçoado tanto pelo professor como pelos alunos. "É um desafio a perseguir de forma continuada por todos" (Canavarro, 2011).

Assim, o método de ensino exploratório dá a compreender ao professor o poder que tem em influenciar e agir sobre a compreensão matemática dos seus alunos.

CAPÍTULO 2 | **METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO**

Neste capítulo são apresentadas e justificadas as opções metodológicas adotadas no desenvolvimento deste projeto de investigação, são explicitadas e fundamentadas as técnicas de recolha de dados utilizadas, bem como os processos de recolha e análise dos dados.

2.1 Opções metodológicas

2.1.1 Abordagem qualitativa

Uma investigação pode recorrer a uma de duas abordagens, a qualitativa e a quantitativa, ou pode recorrer a ambas. Considerando as características da investigação que desenvolvi, considero que esta se enquadra numa abordagem qualitativa.

Uma abordagem qualitativa é caracterizada por Amado (2017) como sendo uma abordagem que

> permanecerá sempre em torno do mundo subjetivo do ou dos participantes da sua pesquisa numa tentativa de entender o significado que eles dão às suas próprias ações, o sentido que dão às suas vidas ou a aspetos circunscritos dela, as interpretações que fazem das situações em que estão ou estiveram envolvidos (p. 12).

No mesmo sentido, esta abordagem é caracterizada por Bogdan e Biklen (1994) por:

i. Acontecer num ambiente natural, à qual o investigador é o "instrumento principal" (p. 47). Assim, o investigador frequenta o local de estudo, onde recolhe dados sem manipular a realidade, de forma a entendê-lo e a apropriar-se dele.
ii. Os dados são analisados de forma descritiva. Como tal, esta abordagem carece de dados simbólicos, relevantes para a investigação, em vez de dados estatísticos. "Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números" (p. 48).

iii. O investigador prioriza o processo desenvolvido em vez dos resultados obtidos, procurando entender a relação entre a ação e o resultado, analisando como uma influência a outra.
iv. O investigador analisa os dados de forma indutiva. Desta forma não se pretende que o investigador recolha dados de forma a confirmar teorias previamente construídas, ao invés disso, estas hipóteses vão sendo contruídas à medida que os dados vão sendo recolhidos.
v. "O significado é de importância viral" (p. 50). O investigador qualitativo tende a preocupar-se com as "perspetivas participantes" (p. 50), isto é, este importa-se em definir estratégias que lhe permitam ter em consideração o ponto de vista dos sujeitos.

Neste sentido, a minha investigação enquadra-se na abordagem qualitativa pelo facto de ter recolhido dados num período significativo que me permitem analisar aprofundadamente as aprendizagens dos alunos, não me focando apenas no produto obtido. Também se justifica pelo facto de, como investigadora, ter tido uma participação ativa no ambiente da investigação, que neste caso era o contexto de sala de aula no estágio onde estive inserida. Desta forma foi-me possível observá-lo de forma aprofundada, analisando os dados de forma indutiva e não tendo hipóteses previamente construídas sobre as aprendizagens dos alunos.

2.1.2 Investigação sobre a prática

Ponte (2002) define a investigação sobre a prática como um

> processo privilegiado de construção do conhecimento. A investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o

desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente (p. 3).

De acordo com o mesmo autor, existem quatro grandes razões para os professores investigarem sobre a própria prática:

(i) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa mesma prática;

(ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional;

(iii) para contribuírem para a construção de um património de cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional;

(iv) como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos.

(Ponte, 2002, p. 3)

O mesmo autor defende ainda que o professor, de forma a aprender a lidar com as situações problemáticas com as quais é confrontado, deve envolver-se no processo de investigação sobre a sua prática, exercendo uma pedagogia reflexiva, referindo que "Torna-se necessária a exploração constante da prática e a sua permanente avaliação e reformulação." (p. 2). A investigação sobre a prática procura resolver problemas profissionais e aumentar o conhecimento relativamente a estes problemas, de forma a tornar-se referência para a comunidade profissional (Ponte, 2002).

Segundo Lopes da Silva (2013) estes problemas com os quais o professor se depara no contexto profissional requerem outro nível de reflexão, pois exigem um conhecimento mais aprofundado da situação e o conhecimento profissional do docente que lhe permita responder ao problema adequadamente.

Neste sentido, considero que a minha investigação se insere numa investigação sobre a prática, porque procura questionar e refletir sobre as práticas pedagógicas adotadas e as aprendizagens realizadas pelos alunos. Neste caso da lecionação de aulas de carácter exploratório para desenvolver a capacidade de resolução de problemas matemáticos dos alunos.

2.2 Recolha de dados

2.2.1 Observação participante

Afonso (2005) defende que a observação como técnica de recolha de dados "é particularmente útil e fidedigna, na medida em que a informação obtida não se encontra condicionada pelas opiniões e pontos de vista dos sujeitos" (p. 91). Ainda os autores Selltiz et al. (1987) citados em Richardson (1999) definem que a observação se torna uma técnica de recolha de dados à medida que segue um objetivo formulado do estudo, que é sistematicamente planeada, registada e ligada a verificações da sua veracidade.

Deste modo, a observação é classificada, tradicionalmente, como um método de recolha de dados em investigação qualitativa, nomeadamente, a observação participante.

Segundo Amado (2017) "a observação participante tem como princípio a necessidade de o pesquisador manter sempre algum grau de interação com a situação estudada, afetando-a e sendo por ela afetado" (p. 153). Neste sentido, um observador entende-se por "participante" no sentido em que:

i. Este participa na vida do observado, o qual exige uma permanência longa no local de estudo. O tempo estabelecido no local irá depender dos objetivos definidos pelo investigador, pela sua disponibilidade e experiência e a sua aceitação pelo grupo que está a observar.
ii. O observado participa como informante do estudo que está a realizar. É fundamental que os informadores conheçam os motivos pelos quais é importante colaborarem na investigação

A observação também pode ser distinguida por estruturada e não estruturada. A observação estruturada é normalmente sustentada por fichas ou grelhas de observação que vão ao encontro dos objetivos da pesquisa. A observação não estruturada consiste num conjunto de registos de observação, onde são produzidas notas de campo, manuscritas ou gravadas em áudio. Mais tarde estes registos de observação tornam-se relatórios de campo, que são constituídos por textos mais elaborados e as notas de campo são analisadas e refletidas pelo observador. Outro instrumento de registo utilizado na observação não estruturada é o diário de campo, que consiste na transcrição dos acontecimentos quotidianos, que normalmente tomam um carácter reflexivo, que respeitam a fundamentação teórica e conduzem as estratégias da investigação (Afonso, 2005).

Ainda assim, Afonso (2005) defende que toda a observação é necessariamente estruturada, no sentido que tem sempre como ponto de partida um questionamento específico no contexto onde o investigador se insere, sendo orientada por questões de partida e diretrizes de análise da investigação.

Ao longo da minha investigação utilizei, fundamentalmente, instrumentos de observação não estruturada, tais como notas de campo dos acontecimentos que considerei relevantes e registos transcritos de gravações de áudio ou vídeo dos momentos mais significativos. Porém, pela ideia enunciada anteriormente por Afonso (2005), todos estes instrumentos de registo de observação estavam relacionados com os objetivos definidos da investigação, o que os torna estruturados a um certo nível.

Pelo facto de as quatro atividades de resolução de problemas terem sido realizadas num contexto de ensino exploratório, em que os alunos estavam organizados em 10 grupos de trabalho (7 pares e 3 trios), procurei gravar em áudio e registar em notas de campo os momentos mais relevantes. Nas duas primeiras dinâmicas limitei-me a gravar o momento de discussão coletiva e a registar o que considerei mais significativo. Nas duas atividades seguintes complementei estes dois registos com a gravação de áudio do momento de exploração autónoma. Estas gravações de áudio auxiliaram-me no sentido de estar mais atenta às intervenções dos alunos e interagir com eles.

2.2.2 Recolha documental

Segundo Afonso (2005) a recolha de documentos consiste na consulta e utilização, por parte do investigador, de informação contida em documentos já existentes e nas produções dos alunos com objetivo de obter dados pertinentes que sustentem as questões de investigação.

O mesmo autor sustenta que, no que diz respeito à natureza dos documentos a investigar, é possível distinguir entre documentos oficiais, documentos públicos e documentos privados.

Definem-se por documentos oficiais todos aqueles que são possíveis encontrar nos arquivos dos diversos departamentos da administração pública (por exemplo, da Direção-Geral de Educação) e toda a documentação dos arquivos das instituições escolares ou educativas. Outro tipo de documentos oficiais incluem as informações estatísticas recolhidas pelos departamentos do Estado, por exemplo, o Instituto Nacional de Estatística, e os diversos serviços do Ministério da Educação, assim como os dados quantitativos de cada organização educativa.

Os documentos oficiais que utilizei nesta investigação pertencentes a entidades estatuais passam pelas "Aprendizagens Essenciais do Ensino Básico", pelo "Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória", e específico do ensino da matemática, o documento "A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico". No que diz respeito aos documentos da instituição utilizei maioritariamente o Projeto Educativo e o Regulamento Interno.

Relativamente aos documentos públicos, nestes incluem-se todas as publicações, nomeadamente livros, artigos, brochuras, entre outros. Neste sentido, para a realização desta investigação procurei sempre encontrar fontes fidedignas de informação que correspondessem à temática em estudo e que me permitissem aprofundar o meu conhecimento.

No âmbito dos documentos privados, definem-se por serem arquivos de empresas mais restritos e documentos pessoais. Os documentos desta natureza que utilizo na minha investigação são as produções dos alunos, onde estão registadas as suas estratégias de resolução dos diferentes problemas propostos, e as planificações dos problemas, que foram elaboradas à priori da realização das mesmas.

2.3 Processo de recolha e análise de dados

A recolha de dados decorreu ao longo de quatro semanas no contexto de estágio entre os meses de abril e junho, sendo que foi realizado um problema por semana. Os dados recolhidos consistiram não só nas produções escritas dos alunos, mas também nas explicitações que eram realizadas nos diferentes momentos da aula, que foram registadas nas notas de campo e gravadas na forma de áudio.

Depois dos dados recolhidos realizei uma análise flutuante dos mesmos, tendo em seguida procedido a uma análise mais detalhada, de acordo com os objetivos do estudo.

Bogdan e Biklen (1997) definem a análise de dados como um

> processo de busca e de organização sistemático de transcrições (...) de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou (p. 205).

Bardin (1977) define que existem três etapas de análise dos dados recolhidos: a pré-análise, a exploração do material; e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Na fase de pré-análise os dados são organizados. Esta etapa tem três objetivos: escolher os documentos a serem analisados, formular hipóteses e objetivos e elaborar indicadores que fundamentem a interpretação. No sentido de cumprir estes objetivos é necessário organizar os dados através de etapas não estruturadas:

a) A "leitura flutuante" dos dados, que se define como "A primeira atividade consiste em estabelecer contacto com os documentos a analisar e conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações" (Bardin, 1977, p. 96). Neste sentido, organizei todas as produções dos alunos, assim como as notas de campo e gravações de áudio, de modo a "filtrar" o mais relevante no âmbito do estudo.
b) A escolha dos documentos, que já tinha sido determinado anteriormente, na qual selecionei a documentação que considerei mais pertinente para o estudo em causa (Bardin, 1977).
   A formulação de hipóteses e dos objetivos, onde são criadas suposições e questionamentos que partem dos dados recolhidos (Bardin, 1977).

A fase da exploração do material define-se como a “administração sistemática das decisões tomadas” (Bardin, 1977, p. 101). É a fase a qual o material recolhido anteriormente será analisado no seu todo, nomeadamente, as transcrições escritas, as produções dos alunos, tais como as suas explicitações orais, recolhidas através das gravações de áudio.

A terceira fase, em que foram analisados e interpretados os resultados obtidos e onde os dados se tornam significativos e válidos. “O analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas” (Bardin, 1977, p. 101).

A análise foi orientada por categorias, estando estas relacionadas diretamente com o objetivo e questões do estudo. Assim, na última fase da análise foram definidas as seguintes categorias de análise: estratégias de resolução de problemas; desafios sentidos pelos alunos e formas de os ultrapassar nas fases de apresentação, exploração e discussão coletiva do problema.

CAPÍTULO 3 | **INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA**

Neste capítulo é apresentada a intervenção pedagógica em sala de aula, constituída por um conjunto de problemas propostas aos alunos. O capítulo está organizado em duas secções: primeiramente serão apresentados os contextos e os participantes do estudo e em seguida é realizada uma apresentação e respetiva fundamentação dos problemas propostos à turma do 4.º ano de escolaridade.

Na secção sobre o contexto e os participantes, apresento o contexto no qual foi realizado o estudo, tanto a nível da instituição como da sala de aula, e caracterizo os participantes no seu coletivo.

A secção da apresentação e fundamentação da intervenção pedagógica está dividida em duas partes. Primeiramente, a apresentação dos problemas, em que é justificada a organização dos problemas propostos e apresentado cada um dos problemas individualmente. Na segunda parte, descrevo o modo como foi realizada a dinamização dos problemas em sala de aula de acordo com uma abordagem de ensino exploratório.

3.1 Contexto e participantes

3.1.1 O contexto

O estágio no qual desenvolvi a investigação foi realizado no contexto da Unidade Curricular Estágio IV no âmbito do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, sendo realizado a pares. A escola pública onde foi realizado o referido estágio localiza-se numa zona periurbana, no concelho de Setúbal, distrito de Setúbal. Esta escola foi inaugurada formalmente em 2010.

Em relação às infraestruturas, o edifício tem dois pisos: 4 salas de Pré-Escolar no rés do chão e 8 salas destinadas ao 1.º Ciclo do Ensino Básico no primeiro andar. Para além disso, a escola tem uma sala de professores, uma sala de ensino estruturado, duas arrecadações (uma delas é utilizada para acondicionar material didático e outra é destinada ao acondicionamento do material desportivo) um refeitório, uma cozinha, um espaço dedicado ao lazer e à leitura, uma sala de reuniões e várias casas de banho, distribuídas pelos dois pisos que integram o edifício, que servem as diferentes salas, valências e departamentos. Tem, ainda, um espaço exterior amplo com várias áreas de jogo e recreio.

A sala onde decorreu o referido estágio está organizada em 3 filas de mesas na horizontal, estando as mesmas todas juntas umas às outras, à exceção de uma que se encontra isolada. As filas da frente e de trás são constituídas por oito mesas, enquanto a fila do meio tem apenas sete. À frente da sala encontra-se a secretária da professora e uma mesa para o computador, que faz ligação ao quadro interativo da sala. Para além deste há ainda um quadro de giz.

Nas paredes da sala é possível encontrar diversos trabalhos elaborados pelos alunos, tanto a nível individual, como a nível coletivo, nomeadamente, cartazes informativos sobre os conteúdos aprendidos. Existe bastante espaço de arrumação disponível e ainda uma sala entre as duas salas do 4º ano, que serve para arrumação e para momentos de reunião entre as duas professoras do mesmo ano de escolaridade.

3.1.2 Os participantes

O estágio foi desenvolvido numa turma de 4.º ano de escolaridade, da qual fazem parte 23 alunos, 15 rapazes e 8 raparigas, com idades compreendidas entre os 9 e os 11 anos.

Trata-se de uma turma que, globalmente, e de acordo com as informações da professora cooperante e com a minha observação, participa com interesse nos problemas propostos e revela autonomia. Existem, no entanto, alunos com baixa autoestima e pouca confiança nas suas capacidades, o que, por vezes, provoca frustrações e desânimo na realização de determinadas atividades.

Foi possível observar, ainda, alguma dificuldade de cooperação em grupo, uma vez que os alunos não estavam habituados a realizar trabalhos em grupo. Estes são apenas mais colaborativos entre si quando é necessário utilizar o computador para a realização de trabalhos (embora cada aluno traga o seu computador, quando solicitado pela professora).

É uma turma que, globalmente, vai ao encontro das Aprendizagens Essenciais esperadas para o 4.º ano de escolaridade, no entanto, existem três alunos com Necessidades Educativas Específicas, sendo que dois deles têm também um Relatório Técnico-Pedagógico (RTP).

Não obstante, foi possível constatar que quatro alunos não se encontram no mesmo nível de aprendizagem que os restantes, sendo realizado um trabalho diferenciado para cada um.

Numa perspetiva geral, a turma é um pouco agitada, porém responsável e proativa, revelando, assim, uma vontade constante de aprender e corresponder aos objetivos das problemas propostas.

3.2 Apresentação e fundamentação da intervenção pedagógica proposta

3.2.1 Apresentação dos problemas

Primeiramente, pretendo realçar que as tarefas propostas em sala de aula para este estudo caracterizam-se como problemas.

Os problemas dinamizados tinham como base o objetivo do estudo, isto é, a compreender como os alunos desenvolvem a capacidade de resolução de problemas a partir de práticas de ensino exploratório. Estas foram pensadas de acordo com as capacidades de resolução de problemas que já me tinham sido possível observar por parte dos alunos e o seu grau de complexidade foi aumentando no decorrer da intervenção. A partir de um conjunto de problemas disponibilizados no âmbito da Didática da Matemática no 1.º ciclo, fiz a seleção dos mesmos e ordenei-os de acordo com o seu nível de complexidade.

Deste modo, os problemas propostos foram adaptados de outros autores e foram as seguintes: "Quantos telefonemas", "O V Mágico", "Regularidades no calendário" e "Chupa-chupas". Uma particularidade dos problemas selecionados é que o primeiro e o último problema ("Quantos telefonemas" e "Chupa-chupas") eram de natureza mais aberta, com enunciados mais curtos e vagos, enquanto os restantes ("O V mágico" e "Regularidades no calendário") eram mais direcionados, com enunciados mais longos e mais questões orientadas.

No que diz respeito à organização dos problemas, pelo facto de a minha colega de estágio também estar a desenvolver um projeto de investigação na área da Matemática, decidimos organizar a planificação das semanas de modo que cada uma realizasse uma atividade do seu projeto de forma alternada. Assim, os problemas dinamizados por mim eram realizados numa semana e o estudo da minha colega na semana seguinte. Desta forma, o meu projeto foi iniciado no dia 22 de abril de 2024 e terminou dia 3 de junho de 2024 e cada problema foi explorado quinzenalmente, tal como se observa na tabela 1.

Tabela 1

Ordenação e calendarização dos problemas propostos

Ordem de realização	Problema	Data de realização
1.ª	"Quantos telefonemas"	22 de abril de 2024
2.ª	"O V Mágico"	6 de maio de 2024
3.ª	"Regularidades no calendário"	20 de maio de 2024
4.ª	"Chupa-chupas"	3 de junho de 2024

Esta organização foi facilitadora do trabalho realizado, pois deste modo tinha tempo para preparar os problemas, planificar como decorreria a dinâmica da aula, prever possíveis estratégias de resolução dos alunos e discutir com a minha orientadora antes deste ser apresentado à turma. Deste modo, também os alunos conseguiam distinguir as diferentes investigações e quando começavam uma nova semana já sabiam qual das estagiárias iria explorar o seu projeto.

Uma das questões com as quais nos deparámos foi a formação dos grupos de trabalho, visto que decidimos utilizar os mesmos grupos (pares e trios) para a dinamização de ambos os projetos. Apesar de ainda não conhecermos totalmente as capacidades dos alunos, com o apoio da professora cooperante, tentámos organizar grupos de trabalho eficientes. Em alguns dos grupos formados, ambos os elementos tinham facilidade na matemática, porém métodos de trabalho diferentes, o que os permitia potenciar as capacidades de cada um. Nos outros grupos, pelo menos um dos elementos tinha facilidade na matemática e podia ajudar o outro elemento. Os três alunos da turma que não vão ao encontro dos objetivos de aprendizagem esperados para o 4.º ano de escolaridade estavam juntos no mesmo grupo de trabalho e tinham alguns enunciados adaptados e a ajuda constante durante a fase de exploração autónoma da outra estagiária da sala.

Antes de iniciar a concretização do projeto, quis tomar conhecimento do modo como os alunos trabalhavam em grupo, considerando os grupos que formei, bem como as capacidades dos alunos sobre o processo de resolução de problemas. Nesse sentido, propus a resolução de um conjunto de problemas relacionados com o tema capacidade, que estava a ser abordado nas aulas nessa altura. Deste modo, foi-me possível verificar se a dinâmica de trabalho dos grupos funcionava bem e foram feitas as devidas alterações. Formaram-se então 10 grupos (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9 e G10), dos quais 7 eram pares e 3 eram trios, tal como podemos observar na Figura 10.

Figura 10

Lista de grupos

Grupo 1 – A e L

Grupo 2 – C, J e D

Grupo 3 – D e I

Grupo 4 – J e G

Grupo 5 – M e K

Grupo 6 – M e L

Grupo 7 – R e G

Grupo 8 – R e D

Grupo 9 – T, B e H

Grupo 10 – V, S e N

Houve momentos em que foi necessário alterar os grupos, pois acontecia que determinados elementos faltavam. Nesses casos, o outro elemento do grupo do elemento que faltou era redirecionado para outro grupo (exemplo: o faltou o G do G7, a R juntou-se ao G3 e o grupo 7 é retirado da lista de participantes desse problema). Porém os restantes grupos mantêm o seu número original (utilizando o exemplo anterior, o G8, G9 e G10 mantêm a sua denominação, apesar de ter sido retirado o G7).

Todos os alunos foram autorizados a participar no presente estudo pelos encarregados de educação através do Formulário de Consentimento Informado apresentado no anexo 1.

Em seguida, apresento cada um dos problemas explorados pelos alunos.

3.2.1.1 Problema 1 – "Quantos telefonemas"

O primeiro problema a ser apresentado aos alunos foi "Quantos telefonemas", que foi adaptado de Canavarro (2007).

Considerei este problema uma boa forma de iniciar a investigação, pelo facto de considerar que tem um baixo nível de complexidade, de acordo com os conhecimentos dos alunos, e que podia ajudar os grupos a trabalharem colaborativamente. Além disso, é um problema a partir da qual podiam surgir diversas estratégias de resolução. Os objetivos de aprendizagem associados ao problema estão associados ao desenvolvimento do pensamento algébrico e são os seguintes:

- Descrever em linguagem natural a regra de formação de uma sequência de crescimento, explicando as suas ideias.
- Interpretar e modelar situações com variação de quantidades ou grandezas e resolver problemas associados, usando representações múltiplas

(Canavarro et al., 2021)

O enunciado do problema está presente no anexo 2.

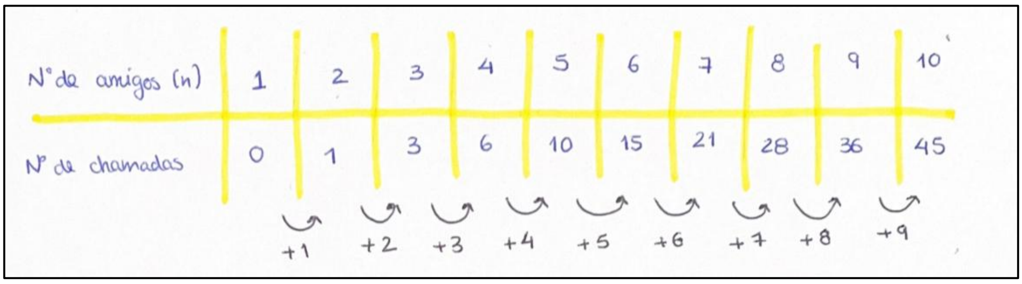
O grupo de alunos que não está ao nível do 4.º de escolaridade (grupo 9) recebeu um enunciado adaptado do problema (anexo 3).

Para resolver o problema era necessário que os alunos descobrissem o número de chamadas que cada um dos amigos tinha de realizar para contactar os restantes. O primeiro amigo tinha de contactar os outros quatro, o segundo amigo, que já tinha sido contactado pelo primeiro, apenas tinha de fazer três ligações, o terceiro amigo, que já foi contactado pelos outros dois, apenas liga a dois amigos, o quarto amigo, que já foi contactado pelos três amigos, faz apenas uma ligação, por conseguinte o quinto amigo já foi contactado pelos outros e por isso não vai ligar para ninguém. Deste modo para calcular o número total de chamadas dos 5 amigos podemos calcular 4+3+2+1, isto é, um total de 10 chamadas entre os amigos. Para os seis amigos, calculava-se 5+4+3+2+1, ou seja, seriam 15 chamadas. Para sete amigos calculava-se 6+5+4+3+2+1, assim seriam realizadas 21 chamadas.

Na segunda parte do problema pretende-se descobrir a regra para encontrar o número de chamadas para qualquer número de amigos (n). Para tal, seria possível encontrar o número de chamadas até 10 amigos, por exemplo, através de uma tabela, como a da Figura 11.

Figura 11

Possível estratégia de resolução do problema



Observamos que para encontrar o próximo termo (n =11) teríamos de adicionar o número de chamadas anterior com o termo que pretendemos encontrar menos 1 ($n-1$), isto é 45+(11−1) que corresponde a 45+10. Deste modo, para 11 amigos seriam necessárias fazer 55 chamadas.

Antes de dinamizar esta atividade previ algumas das estratégias que podiam surgir por parte dos alunos, nomeadamente cálculos, desenhos/esquemas (Figura 12) ou uma lista organizada, utilizando cores ou letras (Figura 13). Outra estratégia que podia surgir dos alunos era a dramatização da situação.

Figura 12

Resolução do problema através de esquema em árvore

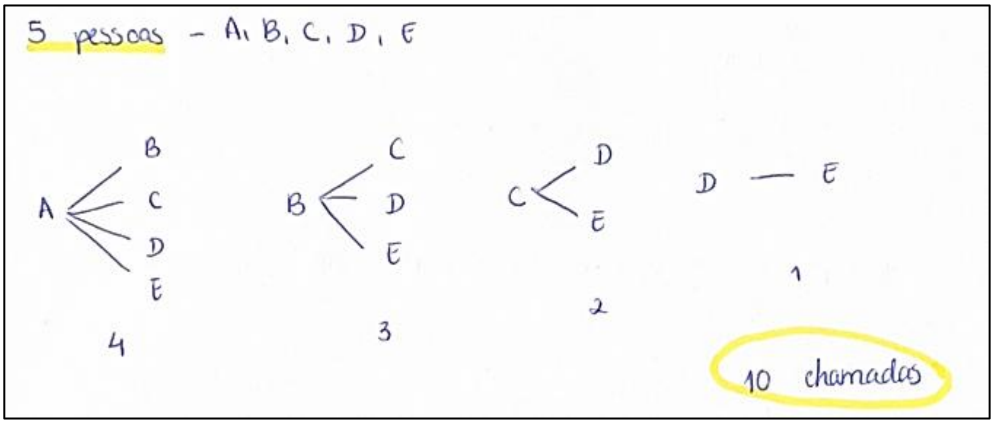
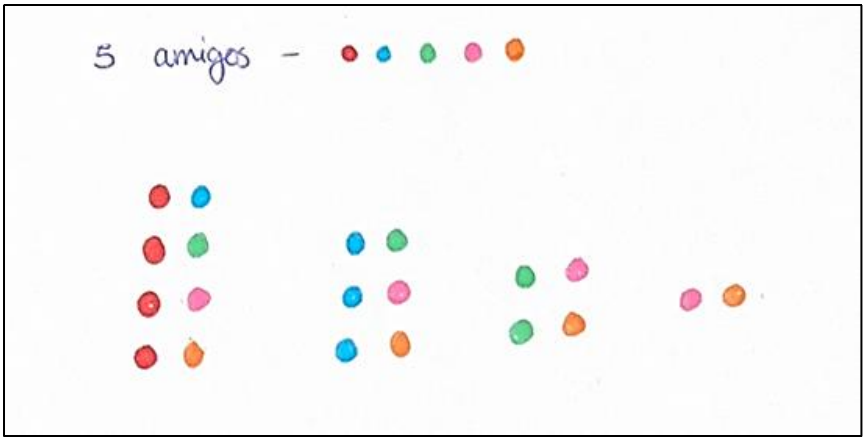


Figura 13

Resolução do problema através de uma lista organizada



3.2.1.2 Problema 2 – "O V mágico"

O segundo problema "O V mágico" foi adaptado de Delgado et al. (2022) "Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º ciclos: Números".

Este problema pretende desenvolver tópicos associados ao tema dos Números e Operações e, simultaneamente, o raciocínio matemático.

(Delgado et al., 2022). Os objetivos de aprendizagem segundo as AE são os seguintes:

- Reconhecer regularidades e propriedades numéricas relativas a números pares e ímpares;
- Formular, testar e justificar conjeturas e generalizações associadas à paridade dos números.

(Canavarro et al., 2021)

Pretende-se que os alunos encontrem as relações numéricas necessárias para corresponder a um V mágico e que identifiquem o maior número possível de V mágicos. O enunciado do problema encontra-se no anexo 4.

Para a realização deste problema, para além do enunciado, os alunos receberam uma folha de registo dos V mágicos encontrados (Figura 14), e um envelope que continha os números de um a cinco em pequenos papéis circulares (Figura 15), de modo a facilitar a realização das tentativas de descobrir os V mágicos.

Figura 14

Folha de registo dos V mágicos

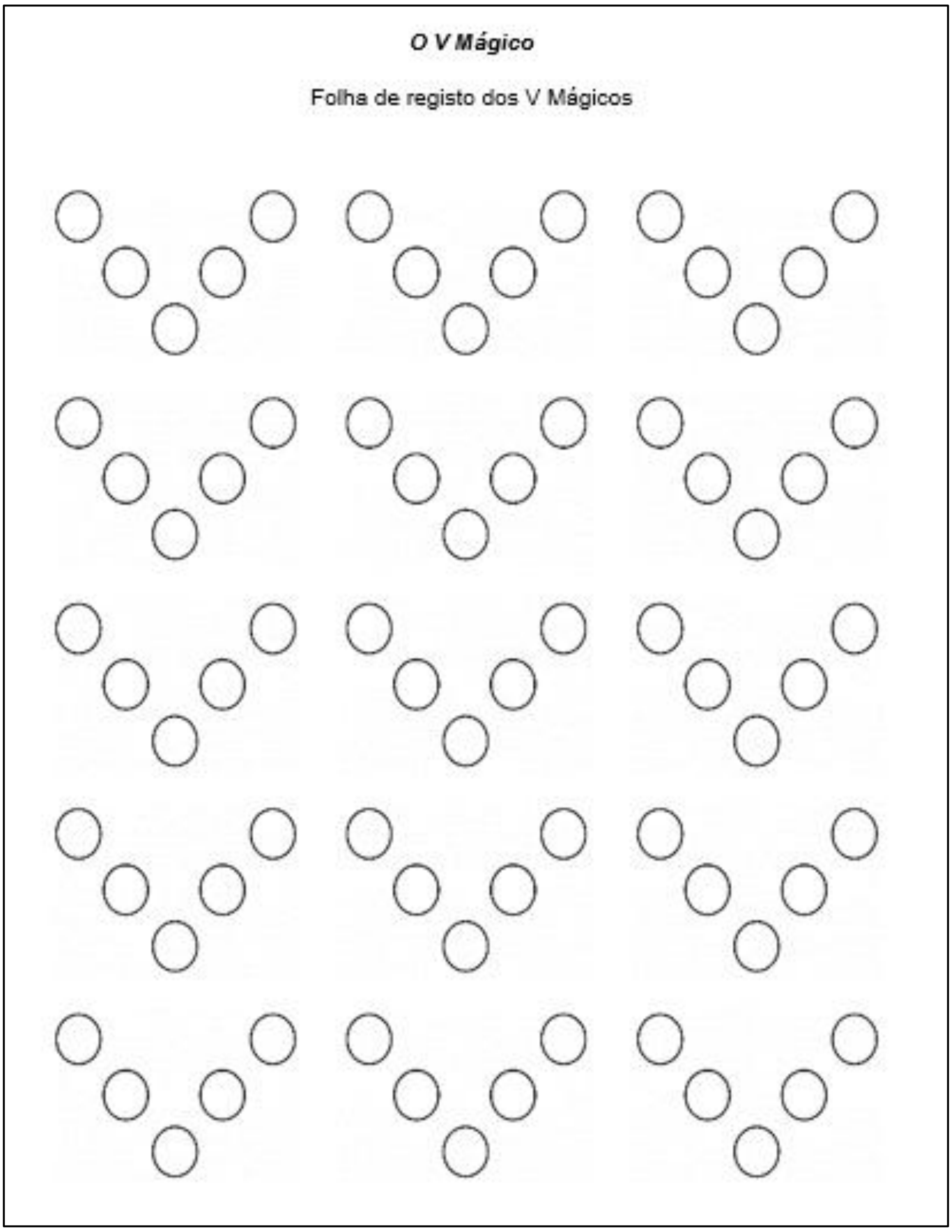
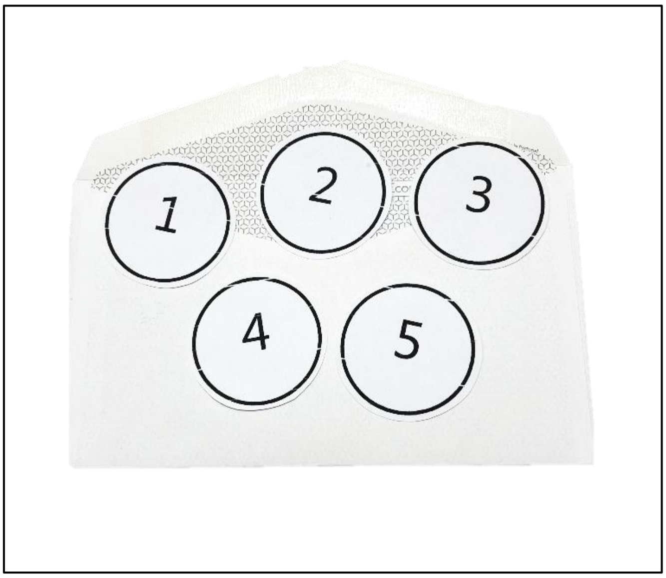


Figura 15

Envelope e números de 1 a 5



Através do processo de tentativa e erro, os alunos deviam encontrar os V mágicos possíveis com números de 1 a 5. As igualdades numéricas existentes eram:

(i) 3+4+1=5+2+1;

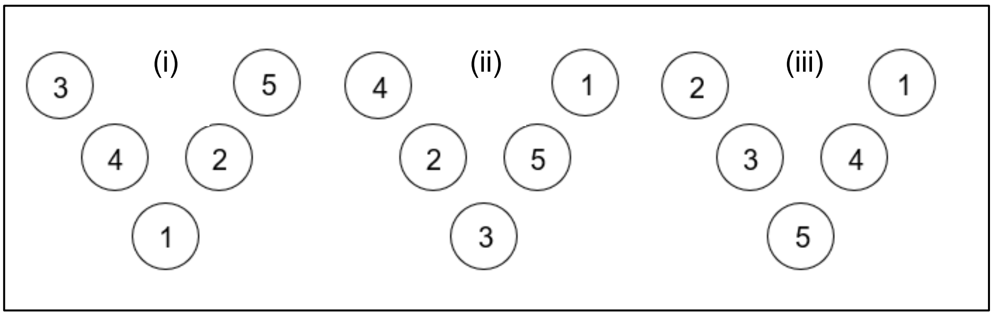
(ii) 4+2+3=5+1+3;

(iii) 2+3+5=1+4+5.

Tal como demonstrado na Figura 16.

Figura 16

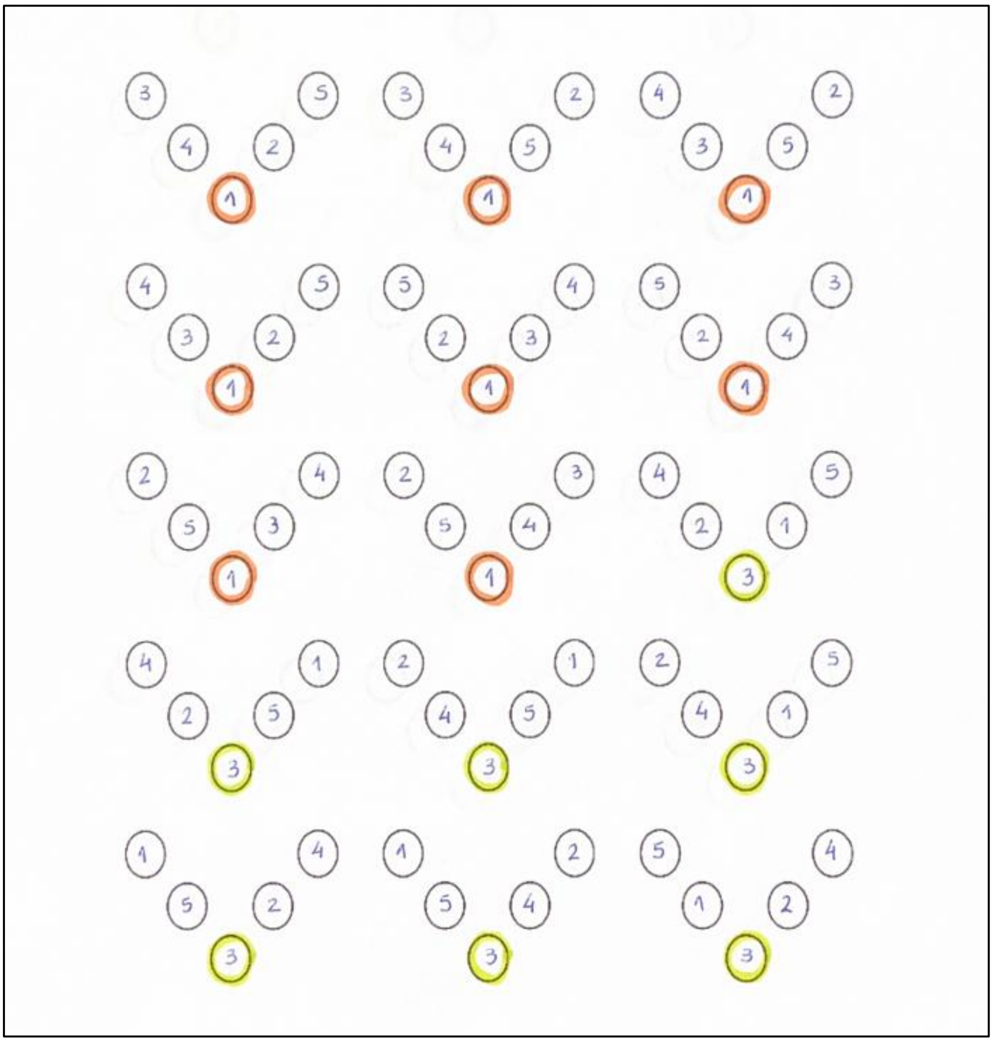
Possibilidades de V mágicos

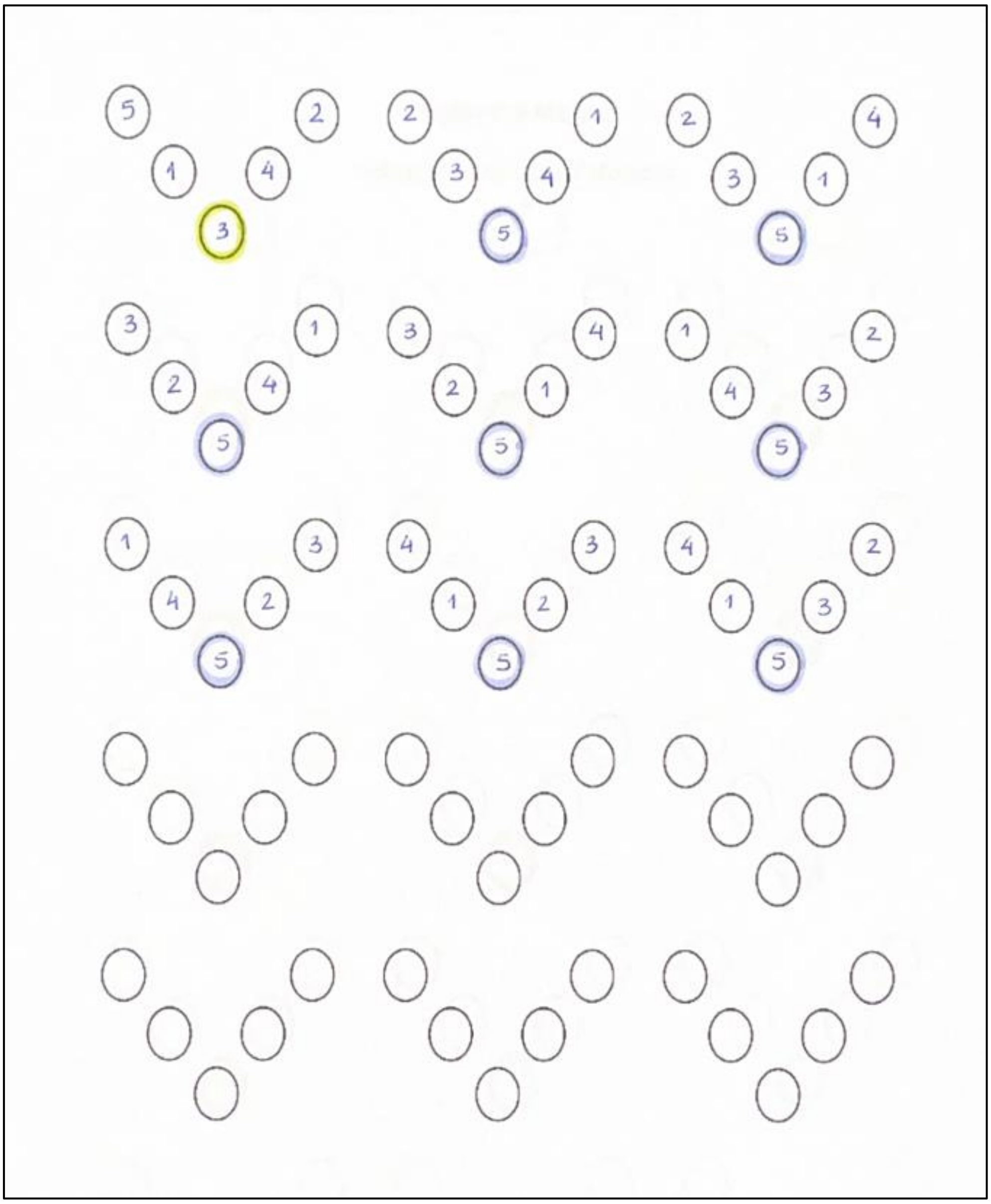


Os únicos números possíveis para colocar no vértice seriam 1, 3 e 5, isto é, os números ímpares. Para encontrar todos os V mágicos, os alunos tinham de alterar a ordem das adições e as parcelas dos “braços”. Deste modo, é possível encontrar oito combinações para cada um dos vértices, ou seja, 24 V mágicos, como apresentado na resolução da Figura 17.

Figura 17

Todos os V mágicos possíveis dados números de 1 a 5.





É importante que os alunos compreendam a relação entre os números pares e ímpares e a razão de um vértice par nunca resultar num V mágico com números de 1 a 5. Isto acontece pelo facto de, se adicionarmos dois números pares obtemos sempre número par, se adicionarmos par com ímpar obtemos sempre ímpar e se adicionarmos dois ímpares obtemos sempre par.

Provavelmente, a estratégia mais recorrente dos alunos será fazer tentativas, visto que é a forma mais intuitiva de resolver o problema através dos números físicos que foram facultados aos alunos. Acredito que a principal dificuldade dos alunos seja justificar o facto de não ser possível formar V mágicos com vértices pares (questão 3).

3.2.1.3 Problema 3 – "Regularidades do calendário"

O terceiro problema proposto à turma foi "Regularidades do calendário" que foi adaptado de Boavida et al. (2008).

Este problema tem como finalidade desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, formulando conjeturas e comprovando-as, ou não. De acordo com as Aprendizagens Essenciais, tem os seguintes objetivos de aprendizagem:

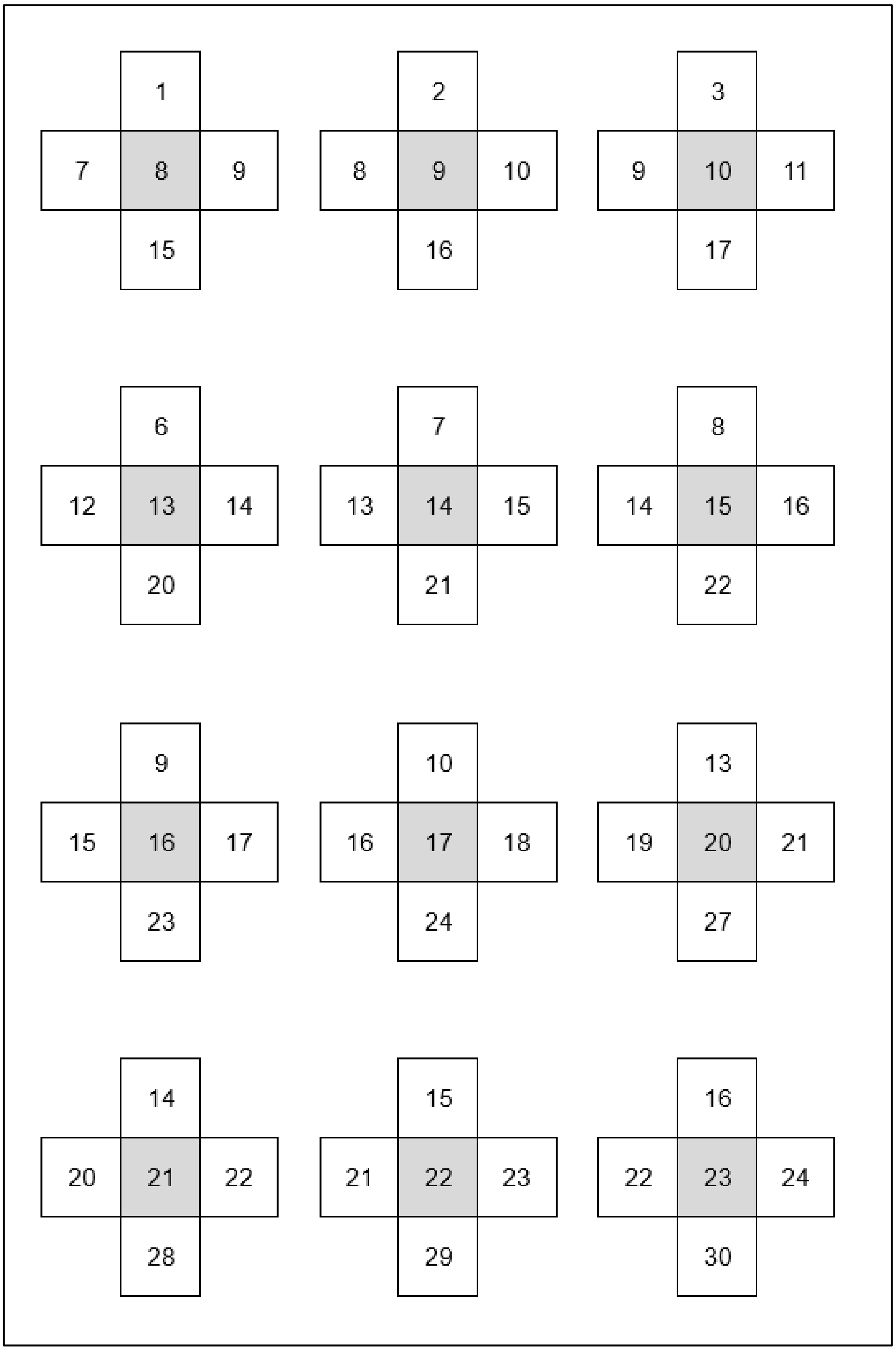
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Descrever em linguagem natural a regra de formação de uma sequência de crescimento, explicando as suas ideias.
- Interpretar e modelar situações com variação de quantidades ou grandezas e resolver problemas associados, usando representações múltiplas.
- Decidir sobre qual(is) a(s) representação(ões) gráfica(s) a adotar num dado estudo e justificar a(s) escolha(s).
- Analisar representações gráficas presentes nos media e discutir criticamente a sua adequabilidade, desenvolvendo a literacia (Canavarro et al., 2021).

Pretendia-se com o problema que os alunos encontrassem as combinações possíveis no calendário e descobrissem a relação entre elas. O enunciado do problema encontra-se no anexo 5.

Para resolver o problema, primeiramente adicionava-se todos os números contidos na cruz sombreada, obtendo o total de 75 (8+14+15+16+22). Em seguida, era necessário encontrar todas as cruzes possíveis no calendário. Nota-se que para formar as cruzes são necessários cinco números na forma indicada. Caso esta condição não se verifique não é possível formar as cruzes pretendidas. Deste modo, a primeira cruz possível será com o número central 8 e as extremidades 1, 7, 9 e 15 e a última será com o número central 23 com as extremidades 16, 22, 24 e 30. Todas as cruzes possíveis podem ser observadas na Figura 18.

Figura 18

Cruzes possíveis



Ao observarmos as cruzes obtidas, entende-se que nem todos os números entre 8 e 23 são números centrais possíveis para cruzes. Por exemplo, o 11, que no calendário não tem número à sua direita e por isso não forma uma cruz. Isto justifica o facto de existir um “salto” entre os números centrais, como acontece entre o 10 e o 13 e entre o 17 e o 20.

Posteriormente, era necessário encontrar a relação entre o número central e a soma dos números contidos na cruz. Esta informação podia ser registada através de uma tabela como exemplificado na tabela 2.

Tabela 2

Relação do número central e a soma dos números contidos na cruz

Nº central	Soma dos números contidos na cruz
8	1+7+8+9+15=40
9	2+8+9+10+16=45
10	3+9+10+11+17=50
13	6+12+13+14+20=65
14	7+13+14+15+21=70
15	8+14+15+16+22=75
16	9+15+16+17+23=80
17	10+16+17+18+24=85
20	13+19+20+21+27=100
21	14+20+21+22+28=105
22	15+21+22+23+29=110
23	16+22+23+24+30=115

Como é possível observar pelos resultados, a soma obtida ao adicionar todos os números contidos no interior de cada conjunto é sempre 5 vezes o número central da cruz. Podemos ainda constatar que o resultado adiciona sempre 5 ao resultado anterior, com exceção de quando há o “salto” nos números centrais.

Em seguida, era pedido para encontrar a relação entre o número central e as extremidades horizontais e verticais da cruz. Podíamos registar esta informação através de uma tabela, exemplificada na tabela 3.

Tabela 3

Relação do número central e a soma das extremidades horizontais e verticais

Nº central	Soma das extremidades	
	Horizontais	Verticais
8	7+9=16	1+15=16
9	8+10=18	2+16=18
10	9+11=20	3+17=20
13	12+14=26	6+20=26
14	13+15=28	7+21=28
15	14+16=30	8+22=30
16	15+17=32	9+23=32
17	16+18=34	10+24=34
20	19+21=40	13+27=40
21	20+22=42	14+28=42
22	21+23=44	15+29=44
23	22+24=46	16+30=46

Através dos resultados obtidos, podemos afirmar que a soma aos pares das extremidades horizontais e verticais é igual. Constata-se também que ao adicionarmos as extremidades de cada cruz duas a duas obtemos sempre o dobro do número central. Tal como na situação anterior, o resultado adiciona sempre 2 ao resultado seguinte.

Para organizar a informação obtida, era possível elaborar uma tabela, tal como exemplifica a tabela 4.

Tabela 4

Exemplo de possível organização dos dados.

Nº central	Soma de todos os números contidos na cruz	Soma das extremidades horizontais e verticais
8	40	16
9	45	18
10	50	20
13	65	26
14	70	28
15	75	30
16	80	32
17	85	34
20	100	40
21	105	42
22	110	44
23	115	46

×5 ×2

Para além do que é pedido no enunciado, era ainda possível fazer mais uma proposta a algum grupo que termine a resolução mais rápido, se forem adicionadas as quatro extremidades da cruz o valor obtido é sempre 4 vezes o número central.

Espera-se que os alunos descubram estas relações numéricas entre os vários valores contidos nas cruzes e que organizem essa informação através de esquemas ou tabelas.

3.2.1.4 Problema 4 – "Chupa-chupas"

O último problema proposto aos alunos foi "Chupa-chupas", adaptado de Delgado et al. (2022) "Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º ciclos: Números"

Este problema foi o último a ser apresentado, tendo também como objetivo compreender como os alunos são capazes de resolver um problema. Pretende desenvolver o pensamento algébrico e mobilizar o conhecimento dos alunos sobre números pares e ímpares. Os objetivos de aprendizagem de acordo com as AE são:

- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Interpretar e modelar situações com variação de quantidades ou grandezas e resolver problemas associados, usando representações múltiplas.
(Canavarro et al., 2021)

O enunciado do problema está presente no anexo 6.

Para resolver o problema, primeiro era necessário descobrir que o número de chupa-chupas no saco tinha de ser um número ímpar, visto que quando eram 2 amigos sobrou 1 chupa-chupa no saco.

Posteriormente, tendo em conta a segunda parte do problema, descobriam o número mínimo de chupa-chupas que estavam no saco, que eram 7, pois ao distribuir um para cada um dos 5 amigos sobravam 2 (5+2=7). Em seguida, tentando distribuir 2 chupa-chupas para cada um não resultava por ser par, ou seja, foram sempre distribuídos pelos amigos número ímpar de chupa-chupas. Neste sentido, distribuindo 3 chupa-chupas pelos 5 amigos seriam 17 chupa-chupas ($3\times5+2=17$), seguidamente com 5 chupa-chupas para cada amigo, seriam 27 chupa-chupas no saco ($5\times5+2=27$) e assim sucessivamente. Deste modo, descobre-se que todos os números com o algarismo 7 nas unidades são possibilidades da quantidade de chupa-chupas no saco.

A estratégia mais comum para resolver o problema seria por tentativas, podendo ser por esquemas, cálculos ou desenhos. Alguns desafios para os alunos na resolução do problema poderão ser encontrar as regularidades pretendidas.

3.2.2 Exploração dos problemas em sala de aula

A exploração dos problemas era realizada na segunda-feira de manhã no horário da matemática e normalmente decorria até ao intervalo (das 9h até as 11h). Ao longo do tempo os alunos já sabiam que na segunda-feira tinham de se organizar em grupos, o que se tornou rotineiro.

Todas as aulas em que foram propostos os problemas organizaram-se através das 3 fases do ensino exploratório: apresentação do problema, exploração autónoma e discussão coletiva.

Procurei realizar sempre a apresentação do problema do mesmo modo, distribuindo os enunciados e deixando-os fazer a leitura silenciosa em primeiro lugar, projetando também o enunciado no quadro interativo da sala. Desde o início especifiquei que só começavam a realizar o problema quando lhes fosse anunciado. Depois de algum tempo, ainda na primeira fase, discutíamos em conjunto o que entenderam sobre a situação do problema, sublinhando alguns dos aspetos importantes do problema no quadro interativo e esclarecendo as dúvidas que pudessem surgir nesta fase inicial. Quando considerava que os alunos estavam prontos e que não havia mais dúvidas de interpretação da situação exposta, os alunos iniciavam o momento de exploração autónoma.

Eram facultadas aos alunos folhas brancas, explicando que tinham de registar todos os cálculos, esquemas ou desenhos realizados, explicitando a forma como pensaram. Os alunos foram também informados que poderiam ser convidados a expor os seus raciocínios para a turma.

No momento da exploração autónoma circulava pela turma e auxiliava nas questões que surgiam. Procurei responder às mesmas de forma estratégica, colocando questões, levando-os a refletir sobre a situação e propondo outras estratégias no caso de a utilizada não estar a resultar para obterem o resultado esperado.

A minha colega de estágio sentava-se sempre com o grupo com mais dificuldades e auxiliava-os a todo o momento.

Uma questão que foi por vezes complicada de gerir era a participação e cooperação desigual dos grupos entre si. Em muitos grupos acontecia que um dos elementos se destacava e resolvia o problema sozinho, ou que um dos elementos com mais dificuldades deixava o trabalho para o outro. Foi importante referir constantemente para discutirem o problema em conjunto e chegarem à solução cooperativamente. Esta questão foi melhorando em alguns grupos ao longo do decorrer do estudo, porém noutros persistiu.

À medida que ia circulando pelos grupos ia observando as estratégias e raciocínios de cada um, com intenção de encontrar as mais diferenciadas para serem partilhadas no momento da discussão coletiva. O tempo esperado para este momento podia variar de acordo com a complexidade do problema e com o ritmo de trabalho dos diferentes grupos. Quando considerava oportuno iniciava o momento de discussão coletiva.

Nesse momento, escolhia os grupos que considerava terem estratégias de resolução do problema diferenciadas e interessantes e convidava-os a apresentá-las à turma. As apresentações decorriam com um grupo de cada vez e os alunos a apresentar expunham os seus raciocínios no quadro. Esperava-se que todos os elementos dos grupos interviessem, de modo a poder perceber a participação de cada um no seu grupo. Dei espaço aos alunos para exporem as suas resoluções, desenvolvendo as suas capacidades de comunicação matemática, colocando questões para os incentivar a explicar algo que, por vezes, tenha ficado pouco percetível. Os restantes alunos poderiam colocar questões ou fazer comentários pertinentes, enriquecendo a discussão, o que foi acontecendo cada vez mais ao longo do tempo.

Depois da discussão coletiva do primeiro problema, partilhei com os alunos, pela primeira vez, as fases de resolução de problemas de Pólya, de modo que os alunos pudessem refletir sobre o que tinham acabado de fazer. Depois de as partilhar, os alunos apontaram-nas nos seus cadernos de matemática. Procurei que os alunos voltassem a pensar sobre estas fases antes da resolução de cada um dos problemas, a partir daí.

CAPÍTULO 4 | **ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS**

No presente capítulo encontra-se a análise e discussão dos dados recolhidos ao longo da investigação, os quais permitem responder à questão principal “compreender como os alunos desenvolvem a capacidade de resolução de problemas a partir de práticas de ensino exploratório”.

Neste capítulo cada um dos quatro problemas propostos foi analisado a partir de duas perspetivas. A primeira relaciona-se com as estratégias usadas pelos alunos na sua resolução, analisando as resoluções dos alunos assim como as suas respostas escritas. A segunda perspetiva está associada aos desafios evidenciados pelos alunos ao longo da resolução do problema em cada uma das fases do ensino exploratório e ao modo como os ultrapassaram.

4.1 Problema 1 – “Quantos telefonemas”

4.1.1 As estratégias usadas pelos alunos

O primeiro problema proposto consistia em encontrar o número de chamadas telefónicas que um grupo de amigos teria de fazer para conversarem todos entre si (anexo 2).

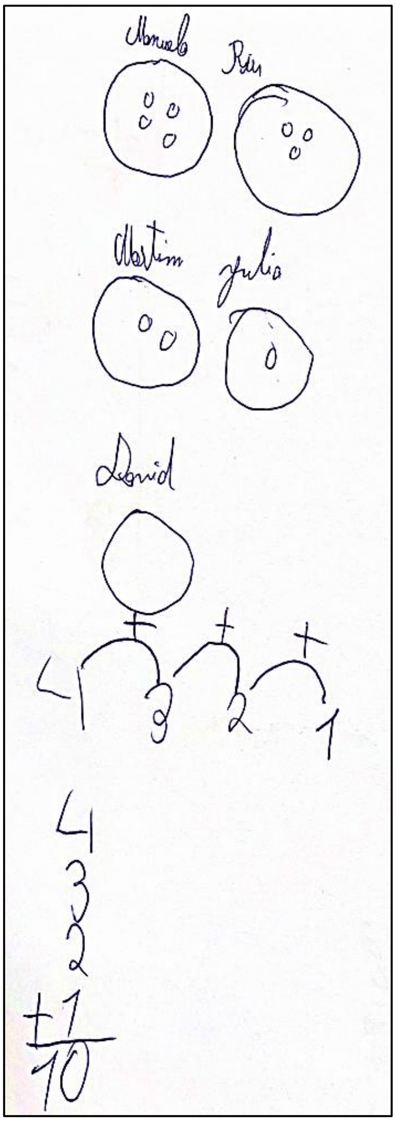
Surgiram várias estratégias de resolução diferentes por parte dos alunos. As estratégias mais utilizadas foram a utilização de esquemas, porém estes surgiram de várias formas. Dos dez grupos que participaram na resolução do problema (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9 e G10) todos recorreram à utilização de esquemas/desenhos/tabelas. Os registos das estratégias dos alunos também variaram entre registos informais e desorganizados, como o apresentado na Figura 19, e registos mais formais e estruturados, como o apresentado na Figura 23.

Em seguida, passo à análise das diferentes estratégias apresentadas pelos grupos.

O primeiro exemplo apresentado é o do grupo 4, que recorreu a nomes fictícios para cada um dos amigos e criou uma resolução em que representa o número de telefonemas de cada amigo através de diagramas de Venn (Figura 19).

Figura 19

Resolução do grupo 4

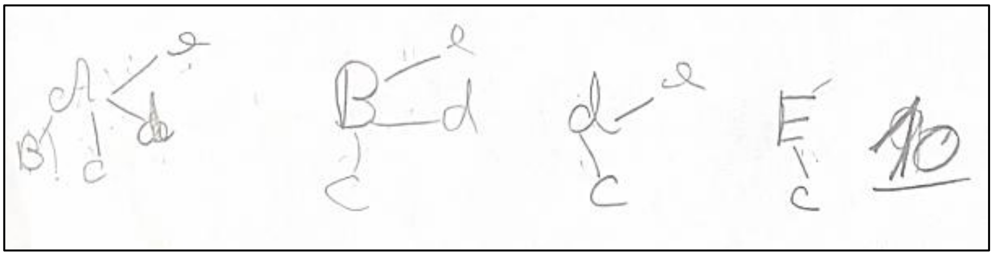


Constata-se que o grupo 4 utilizou diagramas de Venn para representar o número de telefonemas efetuados por cada amigo, atribuindo assim um nome a cada um dos diagramas (“Manuela”, “Rui”, “Martim”, “Júlia” e “David”). Através desta representação compreenderam o número de telefonemas necessário efetuar para cada um dos amigos e evidenciam que um dos amigos, o “David”, já não necessita de ligar para alguém. Registaram ainda um esquema horizontal de adição sucessiva, bem como uma representação vertical da adição necessária para obter o total de telefonemas para cinco amigos, dez telefonemas.

O grupo 9 recorreu a um esquema em árvore para resolver o problema (Figura 20).

Figura 20

Resolução do grupo 9

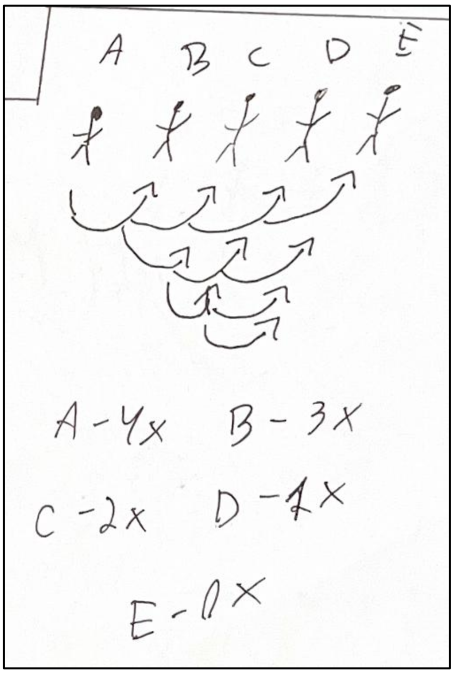


A análise da resolução do grupo 9 mostra que os alunos atribuíram letras de A a E para representar os 5 amigos. É de destacar que revelam alguma capacidade de abstração pois usam as primeiras letras do alfabeto e não iniciais de nomes de crianças. Provavelmente, contaram um a um para chegarem ao número total de telefonemas efetuados. O registo evidencia ainda que fizeram uma primeira contagem incorreta, obtendo um total de 9 e não de 10 telefonemas. Verifica-se ainda que o grupo não registou as chamadas do “amigo C”, apesar disso o número de chamadas efetuadas entre os amigos está correto. Isto mostra que o grupo compreendeu o que tinha de fazer, embora não tenha efetuado todos os registos. Este foi o único grupo que recorreu à esquematização em árvore como estratégia de resolução do problema.

Tal como o grupo anterior, o grupo 8 também representou cada amigo através de letras. Para além disso, recorreu ainda a uma representação esquemática da figura humana (Figura 21).

Figura 21

Resolução do grupo 8

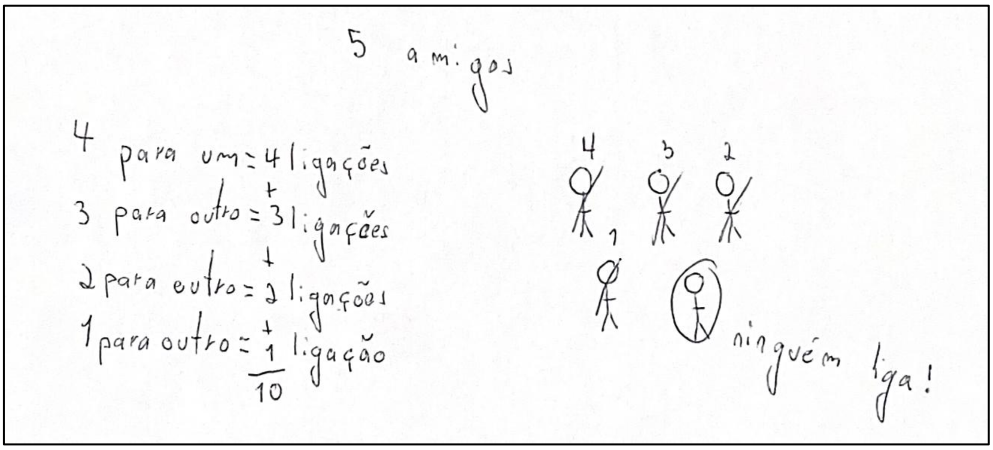


Na resolução do grupo 8 evidencia-se que este representou as ligações necessárias através de setas, apresentando abaixo o número de chamadas necessárias para cada um dos amigos. Semelhantemente ao grupo anterior, também evidenciaram na resolução que um dos amigos não faz nenhum telefonema, registando mesmo o número 0. Apesar de o esquema ser claro, o grupo não refere qual o número total de chamadas.

O grupo 1 desenhou também figuras humanas estilizadas para representar os amigos, como mostra a Figura 22.

Figura 22

Resolução do grupo 1



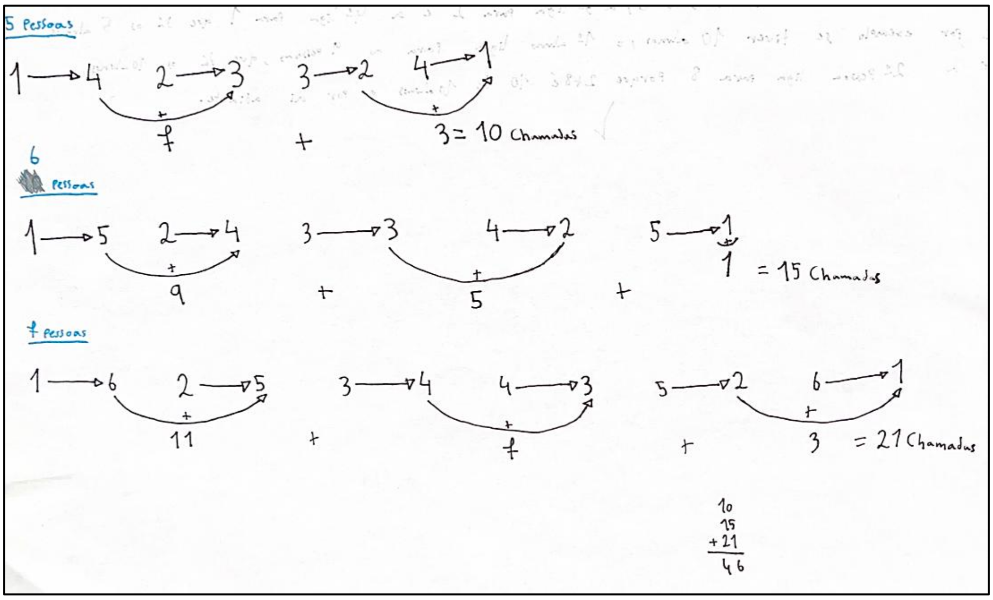
O grupo 1, ao representar os amigos colocou por cima da representação da figura humana o número de chamadas necessárias realizar por cada um deles, registando também que um dos amigos não fará qualquer ligação. Para além disso, utilizaram o texto escrito na forma de uma lista para explicar o que tinham descoberto, ou seja, “4 para um” quer dizer que um dos amigos faz “4 ligações”, repetindo este esquema para cada um dos amigos. Utilizando esta representação na forma de lista vertical, o grupo aproveitou-a para efetuar o cálculo vertical, chegando, assim, ao valor total de 10 telefonemas.

No que diz respeito à questão “Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos?”, apenas três grupos apresentaram respostas.

Um dos grupos que deu resposta à questão colocada foi o grupo 6. Este começa por representar o que acontecia para cinco, seis e sete pessoas, representando de forma esquemática e bem organizada o número de telefonemas que cada amigo fez, bem como o número total de telefonemas, em cada caso (Figura 23).

Figura 23

Resolução do grupo 6

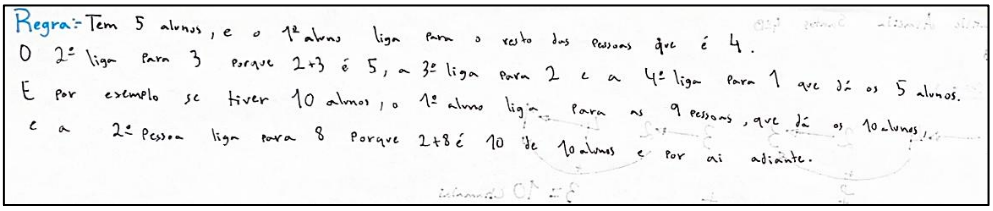


A análise dos seus registos evidencia que o grupo, usando numerais para representar cada amigo, tenta descobrir as características da sequência de crescimento. O grupo compreende que, no caso de cinco amigos, por exemplo, o primeiro liga para os restantes quatro, o segundo liga para três, o terceiro liga para dois e o quarto amigo liga para um. Para encontrar o número total de telefonemas necessários efetua primeiro somas parciais, 7 e 3, adicionando 7+3 depois para chegar ao total de 10. O grupo repete o mesmo processo para obter o resultado para o caso de serem 6 amigos e 7 amigos.

O grupo adicionou ainda os três resultados obtidos 10, 15 e 21, obtendo 46, porém não utilizou esta soma. Ao realizar esta adição o grupo mostra que tentou encontrar uma relação entre os três valores obtidos, mas sem sucesso. No final o grupo apresentou uma regra, como mostra a Figura 24.

Figura 24

Regra do grupo 6


Regra:- Tem 5 alunos, e o 1º aluno liga para o resto das pessoas que é 4.
O 2º liga para 3 porque 2+3 é 5, a 3º liga para 2 e a 4º liga para 1 que dá os 5 alunos.
E por exemplo se tiver 10 alunos, o 1º aluno liga para as 9 pessoas, que dá os 10 alunos
e a 2º pessoa liga para 8 porque 2+8 é 10 de 10 alunos e por aí adiante.

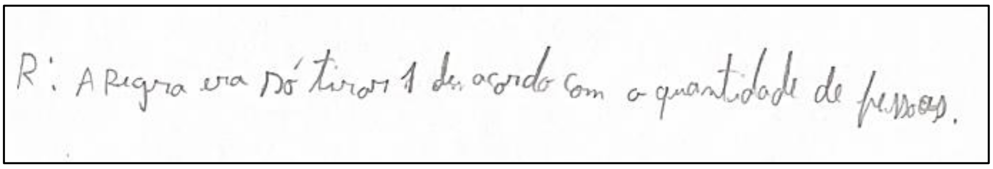
Na imagem é possível ler: “Regra: Tem 5 alunos, e o 1.º aluno liga para o resto das pessoas que é 4. O 2.º liga para 3 porque 2+3 é 5, a 3ª liga para 2 e a 4ª liga para 1 que dá os 5 alunos. E por exemplo se tiver 10 alunos, o 1.º liga para as 9 pessoas, que dá os 10 alunos e a 2ª pessoa liga para 8 porque 2+8 é 10 de 10 alunos e por aí adiante.”

A regra apresentada pelo grupo evidencia que este encontrou uma maneira para encontrar o número de chamadas para um número qualquer de amigos, dando o exemplo no caso de serem 10 amigos, evidenciando que funciona para qualquer outro valor de n. Ainda assim, esta regra não indica como é que os alunos encontram o número total de telefonemas, referindo apenas que é através da adição de números sucessivos.

A regra apresentada pelo grupo 10 mostra-se na Figura 25.

Figura 25

Regra do grupo 10


R: A Regra era só tirar 1 de acordo com a quantidade de pessoas.

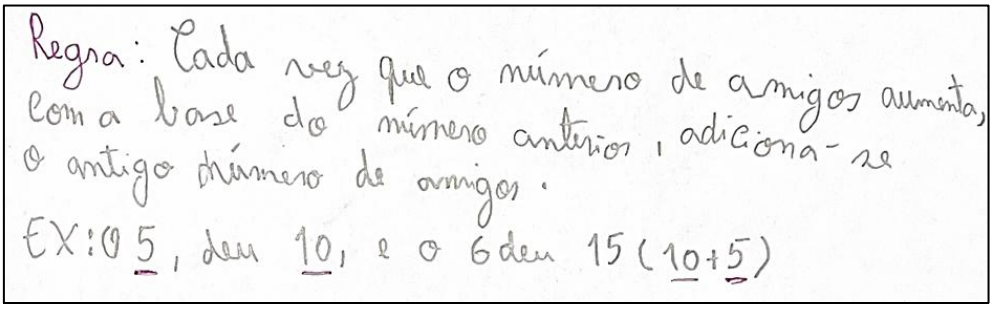
Na imagem é possível ler: “R: A regra era só tirar 1 de acordo com a quantidade de pessoas”. Provavelmente, o grupo pretendia explicar que para qualquer número de amigos, n, o primeiro amigo faria $n-1$

telefonemas, e assim sucessivamente, para se obter o número de chamadas a realizar entre os amigos. Apesar disso, podiam ter explicado melhor o raciocínio, de modo a ser mais compreensível para o leitor, além de evidenciar apenas uma das regularidades, mas não permite chegar ao valor total de telefonemas.

A ultima regra apresentada foi do grupo 2 (Figura 26).

Figura 26

Regra do grupo 2


Regra: Cada vez que o número de amigos aumenta, com a base do número anterior, adiciona-se o antigo número de amigos.
EX: O 5, deu 10, e o 6 deu 15 (10+5)

Na imagem é possível ler: "Cada vez que o número de amigos aumenta, com base do número anterior, adiciona-se o antigo número de amigos. Ex: O 5 deu 10, e 6 deu 15 (10+5)." O grupo 2 evidenciou que para descobrir o termo seguinte é necessário adicionar o número de amigos às chamadas feitas anteriormente, tal como mostra no exemplo apresentado. Utilizando um raciocínio baseado na recorrência, o grupo apresenta uma regra que não é possível de utilizar para qualquer valor de n, pois, de acordo com a mesma, precisamos sempre saber o número total de telefonemas anterior.

Apesar de ter obtido poucas respostas à questão de encontrar uma regra possível, acredito que esses grupos encontraram três regras diferentes, mas que evidenciam que os alunos identificaram algumas regularidades válidas. Tal como aconteceu com as estratégias utilizadas, a explicação da regra também variou entre explicações informais e formais, tendo sido algumas apresentadas com mais clareza do que outras.

4.1.2 Os desafios dos alunos e como os ultrapassaram

Ao longo do problema, os alunos depararam-se com diversos desafios em cada uma das fases do ensino exploratório.

Na fase de apresentação do problema, foram distribuídos pelos grupos os enunciados e uma folha branca para fazerem os registos. Depois de os grupos fazerem a leitura silenciosa, eu expliquei a situação-problema. Neste momento não surgiram questões dos alunos, o que provocou um desafio na fase de exploração autónoma.

Expliquei ainda aos alunos que deviam resolver o problema em conjunto com o colega. Pelo facto de, possivelmente, os alunos não terem experiência de trabalho coletivo, questionaram-me se ambos tinham de escrever na folha de registo. Esclareci que era necessário discutirem entre si, pois ambos tinham de conseguir explicar a resolução conjunta, mas que podiam decidir qual deles iria fazer o registo escrito, trocando de papéis no próximo problema.

No momento da exploração autónoma, circulei pelos grupos e foi notório que foram surgindo as mesmas questões por parte de muitos grupos, por isso foi necessário explicar de novo a situação do problema, de forma diferente, de modo que o contexto do problema fosse mais claro para os alunos.

Apesar das explicações, o grupo 3 teve dificuldade em compreender que um par de amigos não se telefona mutuamente (por exemplo, se *A* telefona a *B*, *B* já não telefona a *A*). Para tornar mais clara esta ideia tentei fazer uma dramatização com colegas de turma, porém a situação apenas se tornou percetível para os alunos quando alterei o contexto para abraços em vez de telefonemas.

Outro desafio evidenciado pelos alunos foi o facto de alguns dos grupos começaram imediatamente a realizar cálculos numéricos, sem sentido no contexto do problema. Este aspeto pode significar que os alunos estão muito acostumados a problemas de cálculo. A esses grupos, sugeri que refletissem um pouco e discutissem com o colega a situação do problema, propondo a utilização de desenhos, esquemas, tabelas, etc., que apoiassem a sua compreensão.

Ainda no momento de exploração, alguns grupos tiveram dificuldades em trabalhar coletivamente para a resolução do problema. Foi recorrente surgir um "líder" que resolvia e registava a resolução sozinho, sem discutir previamente com o colega. Ou, pelo contrário, houve alunos desinteressados, que deixavam a resolução para os restantes elementos do grupo. Sugeri a alguns alunos que ouvissem as estratégias dos outros elementos do seu grupo, ou explicassem como pensaram para que os colegas compreendessem. Alguns grupos também comunicaram entre si, no sentido de ajudar aqueles com mais dificuldades. Evidencia-se que trabalhar em coletivo para atingir um mesmo fim foi um desafio visível para alguns alunos.

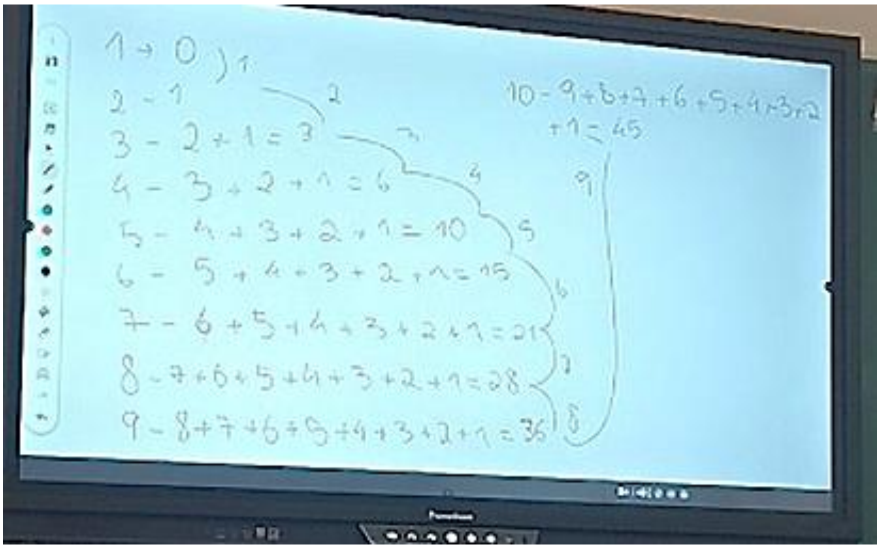
Para iniciar o momento da discussão coletiva, questionei a turma se estava pronta para discutirmos o que tinham feito e os resultados que tinham obtido. Já tinha selecionado previamente alguns grupos de forma a apresentar estratégias de resolução variadas. Quando a turma estava pronta chamei os grupos selecionados (aqueles com estratégias mais diferenciadas) para apresentarem as suas estratégias. Os grupos iam expondo as suas estratégias no quadro para a restante turma acompanhar o raciocínio dos colegas e os outros colegas ia participando com questões e comentários.

Em cada apresentação, procurava que todos os elementos do grupo participassem na exposição à turma, o que nem sempre aconteceu. Em momentos anteriores, já me tinha sido possível observar que alguns alunos não estão confortáveis com apresentações orais. Apesar disso, é provável que alguns dos elementos do grupo não se sentissem tão confiantes a apresentar por não terem tido o mesmo papel na resolução. Este facto parece evidenciar que em alguns grupos a participação e motivação para resolver o problema foi desigual.

No final de algumas apresentações dos alunos, em conjunto com o grande grupo, procurei esclarecer os alunos sobre uma possibilidade de organização dos dados recolhidos para ser possível descobrir uma regra para qualquer termo. Para este efeito, registei o número de chamadas necessário de 1 até 10 amigos (Figura 27) procurando que os alunos descobrissem a relação entre os valores apresentados.

Figura 27

Registo no quadro do número de chamadas de 1 a 10



Perante a observação dos meus registos no quadro, a C do grupo 2 afirmou: “Quanto mais o número de amigos vai aumentando, podemos fazer a conta do número base mais o número anterior de amigos.” Através desta explicação, a aluna apresentou uma regra para descobrir o número de chamadas seguinte, através de uma lei de formação por recorrência

Mostrei que, para calcular para 11 amigos, utilizando o número total de chamadas anterior, no caso 45, adicionávamos 10 a este, tal como foi evidenciado na sequência de crescimento e como referido pela C. Com base no que tinha sido feito, questionei os alunos de como descobrir o número de chamadas para 20 amigos, ao qual referiram que seria 19+18+17+16+..., assim evidenciamos que começamos sempre no número anterior ao que queremos descobrir, no caso o 19, que é o número de chamadas realizado pelo primeiro amigo, e assim sucessivamente. Deste modo foi possível criar a regra em conjunto com os alunos: "Regra: (nº de amigos−1) + (nº de amigos−2) + (nº de amigos−3) + …"

Apesar de os alunos terem facilmente descoberto que o cálculo necessário para 20 amigos seria 19+18+17+…, pois isso foi evidenciado ao calcular até 10 amigos em conjunto no quadro, foi desafiante para a maioria transcrevê-lo ou expressá-lo em forma de regra. Apenas se tornou claro para alguns alunos quando substituía por números e dava exemplos práticos no contexto do problema.

No sentido de dar ferramentas que facilitam o processo de resolução de problemas, desafiei aos alunos a refletirem sobre os seus procedimentos para resolverem o problema que lhes foi apresentado, de modo a apresentar-lhes as etapas de resolução de problemas de Pólya. Fui questionando os alunos sobre o que fizeram assim que receberam o enunciado, ao qual eles referiram "Ler" e "Entender", esta etapa designa-se por "Compreensão do problema", segundo Pólya. Em seguida, os alunos referiram que temos de "pensar como é que fazíamos", expressando a segunda etapa de Pólya "Estabelecimento de um plano". No terceiro passo, os alunos referiram "Fazer o plano", ou seja, "Desenvolver esse plano" segundo as etapas de Pólya. Para último passo, os alunos referiram "Rever", que faz alusão à etapa "Análise dos resultados". Os alunos registaram estas etapas nos seus cadernos.

Esta reflexão sobre as etapas para a resolução do problema foi desafiadora para alguns alunos, talvez por ser algo que não tinham pensado antes, pois eram precipitados a resolver imediatamente um problema sem o compreenderem. Acredito que através desta lista de etapas consigam futuramente resolver um problema de forma mais consciente.

O facto de esta este problema ser dinamizado através de uma aula de ensino exploratório permitiu aos alunos uma maior dedicação à resolução do mesmo, isto porque sentiram a distinção entre as diferentes fases e ia-lhes sendo explicado o que ia decorrer em cada uma.

4.2 Problema 2 – "O V mágico"

4.2.1 As estratégias usadas pelos alunos

O segundo problema apresentado, "O V mágico" consistia em encontrar a maior quantidade de igualdades numéricas usando os números de 1 a 5, formando um V mágico, tal como explica o enunciado (Anexo 4).

Deste modo, era necessário encontrar as três igualdades numéricas possíveis, podendo haver também a troca de posição dos números envolvidos. Rapidamente os alunos descobriram que apenas os números ímpares 1, 3 e 5 poderiam ser colocados no vértice do V mágico. Todos os grupos encontraram pelo menos uma igualdade para cada um dos vértices ímpares. Para cada vértice havia 8 combinações, perfazendo um total de 24 V mágicos.

Dos nove grupos que participaram (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G8, G9 e G10), apenas dois encontraram os 24 V mágicos. Cinco grupos encontraram pelo menos 20 V mágicos, o que evidencia que encontraram quase todas as combinações, porém surgiram algumas repetições. Dois grupos registaram 15 ou menos V mágicos, apesar de ambos encontrarem as três igualdades necessárias, não conseguiram descobrir todas as formas de alterar a ordem dos números entre si.

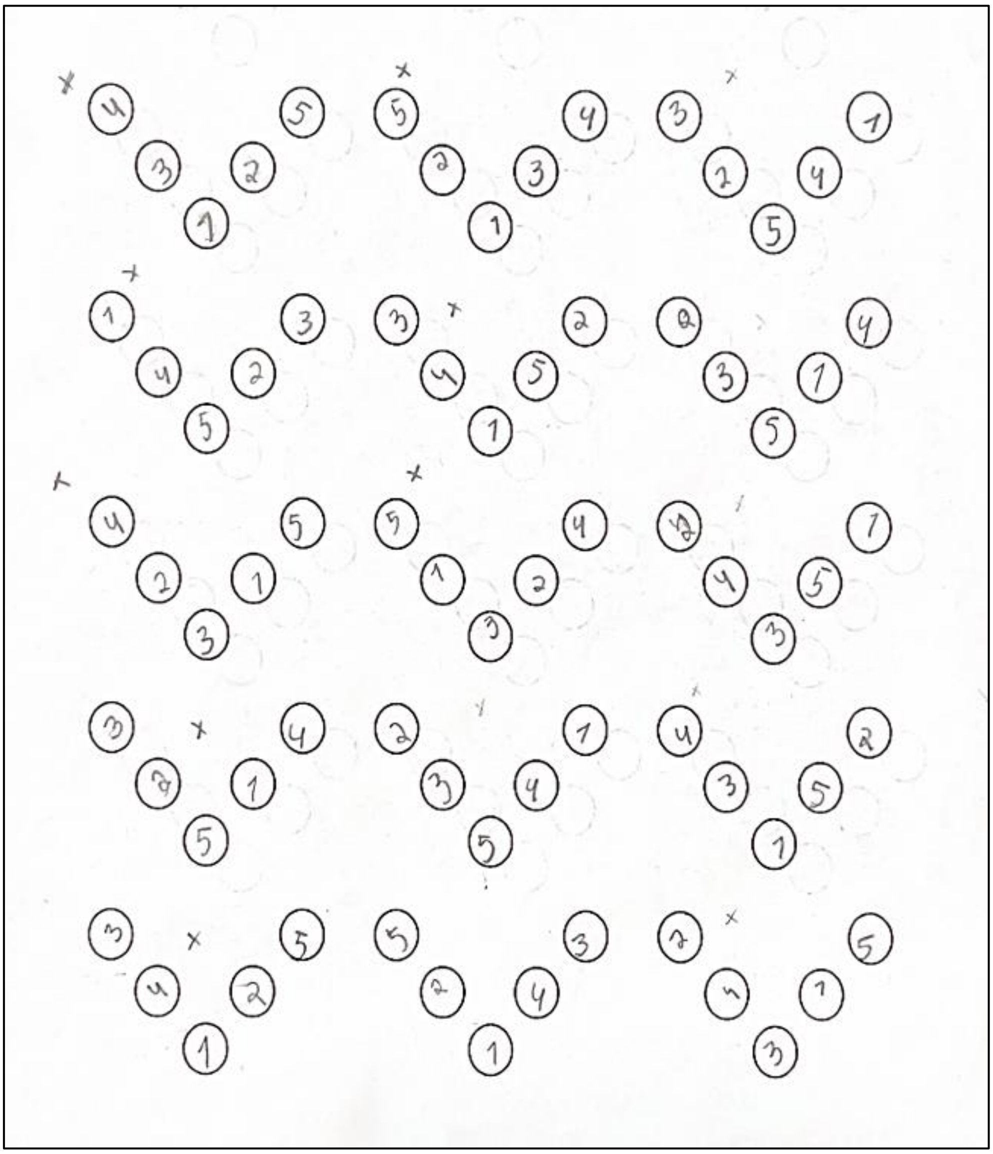
A grande maioria dos grupos precisou de realizar duas versões de registos na folha de registo dos V mágicos, passando a primeira a ser um rascunho. Isto porque iam registando à medida que iam descobrindo por tentativas através dos números físicos facultados no envelope (Figura 15). Os alunos perceberam que desta forma acabavam por se perder no registo, repetindo combinações ou esquecendo alguma. Houve dois grupos que no primeiro registo preencheram todos os espaços em branco para indicação dos V mágicos na folha de registo (30 espaços para os V), porém no segundo registo observaram que tinham repetido combinações e retificaram.

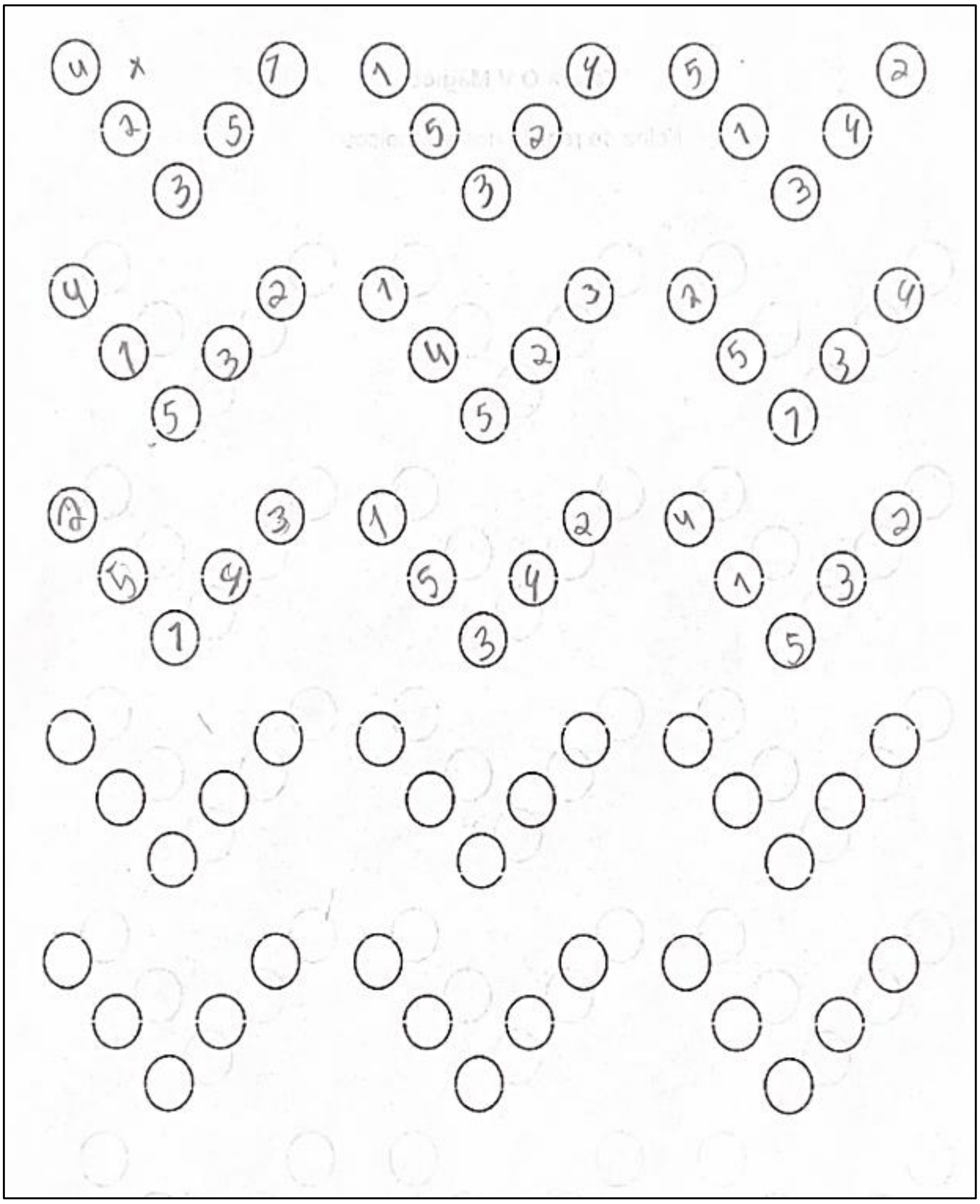
Deste modo na segunda tentativa de registo os alunos já estavam mais organizados e, na maior parte dos casos, registaram os V mágicos sistematicamente, isto é, registaram todos os V mágicos com vértice 1, depois todos com vértice 3 e por último com vértice 5.

Foi frequente os alunos desenharem algum tipo de marcação nos seus V mágicos para não se perderem no seu registo, como é possível observar no registo do grupo 2, presente na Figura 28.

Figura 28

Registo dos V mágicos do grupo 2



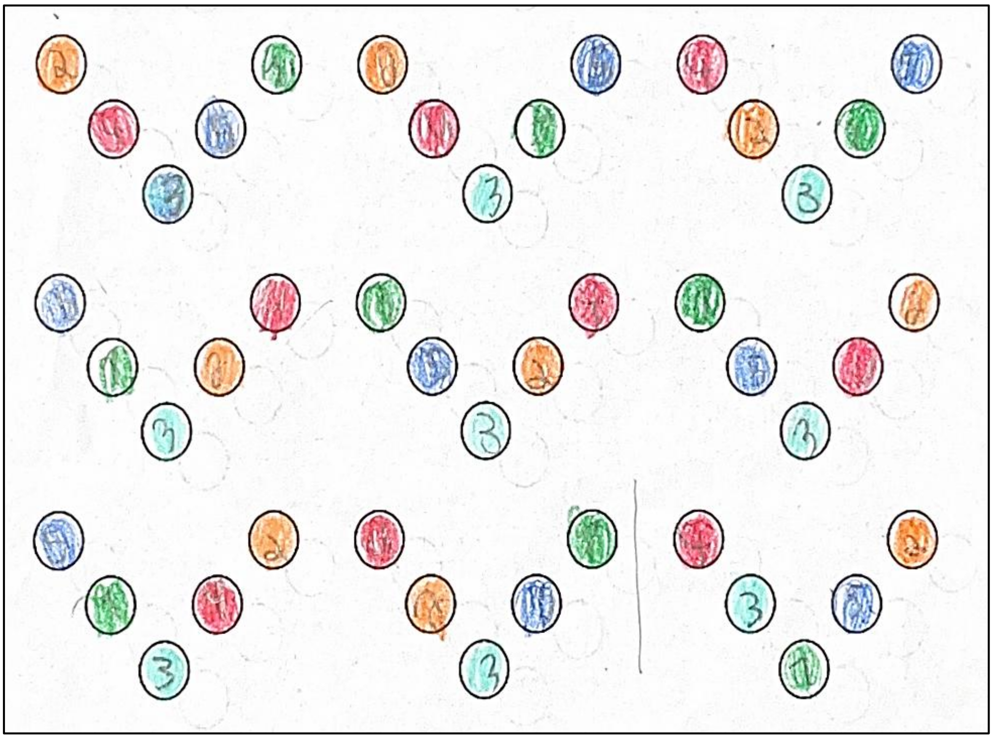


Tal como mostra a Figura, o grupo 2 assinalou com um “x” os seus V mágicos, possivelmente para organizar o seu registo sem perder nenhuma combinação. Apesar se não estarem organizados pelo número do vértice, o grupo registou todos os 24 V mágicos sem perder ou repetir nenhuma combinação.

O grupo 9 pintou cada um dos números de cor diferente (Figura 29), por sugestão da outra estagiária da sala.

Figura 29

Registo dos V mágicos do grupo 9



Para além das cores diferenciando os números, o grupo fez um traço para separar os V mágicos de vértice 3 dos que se seguiam. É possível que a colega de estágio tenha sugerido aos alunos pintarem os números de cor diferente para permitir observar de forma mais clara a sua posição, compreendendo melhor as relações entre os números pares e ímpares e como isso afeta a formação de um V mágico.

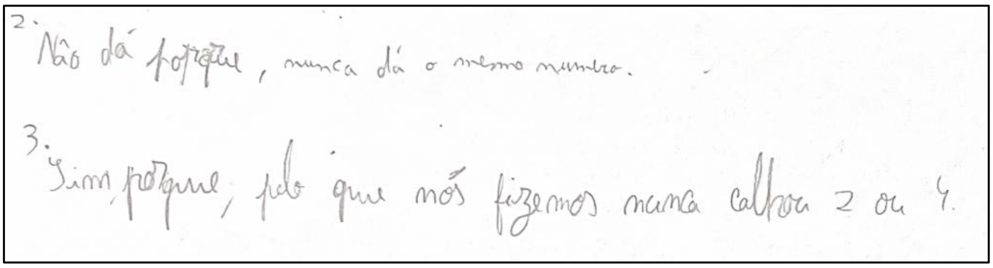
Para além de encontrarem o maior número de V mágicos possível, era ainda pedido aos alunos que encontrassem uma justificação para o facto de apenas ser possível formar V mágicos utilizando os números ímpares no vértice, através das questões "2. Consegues formar algum V mágico cujo vértice seja 2? Porquê?” e “3. O Gonçalo diz que num V mágico o vértice tem sempre de ser ímpar. Concordas com o Gonçalo? Porquê?”.

Dos nove grupos participantes, seis encontraram uma justificação para o facto mencionado anteriormente. Os restantes três não apresentaram qualquer resposta.

O grupo 10 não encontrou uma explicação para a questão 2, como mostra a Figura 30.

Figura 30

Resposta do grupo 10


2. Não dá porque, nunca dá o mesmo numero.

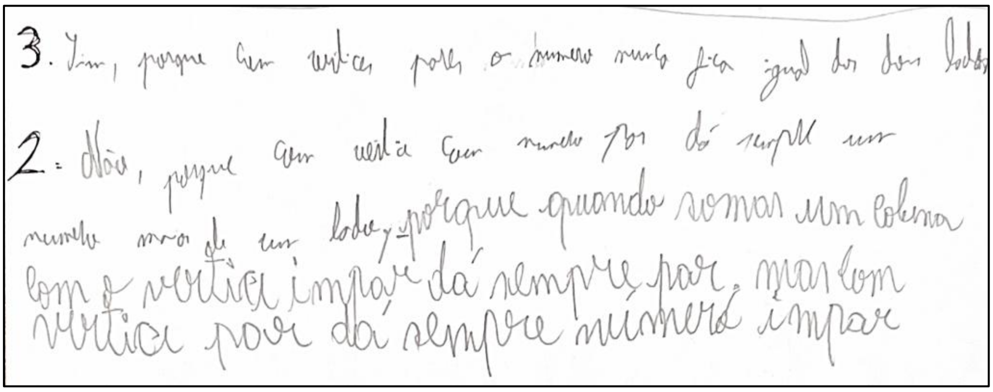
3. Sim, porque, pelo que nós fizemos nunca calhou 2 ou 4.

Na questão 3 a resposta “Sim, porque pelo que nós fizemos nunca calhou 2 ou 4” evidencia que o grupo compreende que os números pares nunca podiam estar no vértice, pois fez várias tentativas e isso nunca aconteceu, porém não encontraram uma explicação para o acontecimento.

O grupo 8 também tentou encontrar uma justificação para a questão, como mostra a Figura 31.

Figura 31

Resposta do grupo 8


3. Sim, porque com vértices pares o número nunca fica igual dos dois lados
2. Não, porque com vértice com número par dá sempre um
número maior de um lado, porque quando somar uma coluna
com o vértice ímpar dá sempre par, mas com
vértice par dá sempre número ímpar

Na imagem é possível ler: “3. Sim, porque com vértices pares o número nunca fica igual dos dois lados” “2. Não, porque com vértice com número par dá sempre um número maior de um lado, porque quando somas uma coluna com o vértice ímpar dá sempre par, mas com vértice par dá sempre número ímpar.”

A análise das suas respostas mostra que o grupo começa por afirmar que utilizando um número par no vértice não é possível obter uma igualdade pois uma das somas é sempre superior à outra. Em seguida, acrescenta que ao adicionar os “braços” com vértice ímpar o resultado será sempre par. Esta afirmação não está correta, pois, apesar de com vértice 1 e 5 obtermos as somas 8 e 10 em cada braço, respetivamente, com vértice 3, ao adicionarmos cada um dos “braços” obtemos 9 (4+2+3 e 5+1+3) que é um número ímpar.

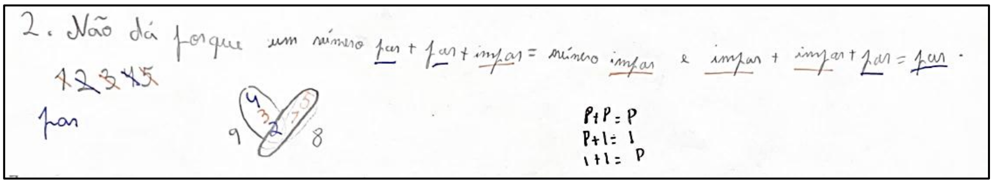
Por fim, o grupo afirma que ao adicionar os “braços” com vértice par o resultado obtido será sempre ímpar. Esta afirmação está incorreta porque, para além de não ser possível obter o mesmo resultado através da adição dos valores nos “braços” com um vértice par, é possível obter resultados ímpares e pares (ex. vértice 4 → 5+1+4=10 e 3+2+4=9). Ainda assim indicia que os alunos associam a formação de V mágicos à paridade e imparidade da soma de dois números pares, ímpares ou um par e um ímpar, embora não o saibam explicar.

Outra observação relativamente à resposta do grupo, nota-se que na resposta dada foram utilizadas duas caligrafias diferentes, de cada um dos elementos do grupo, o que evidencia que não se entenderam na resposta a dar, tendo cada um escrito a sua resposta.

A Figura 32 apres*enta a resposta do grupo 2 às questões 2 e 3 do enunciado.*

Figura 32

Resposta do grupo 2



Na imagem lê-se: “2. Não dá porque um número par + par + ímpar = número ímpar e ímpar + ímpar + par = par”. Além disso registam um V que não é mágico com os números pares a azul e os ímpares a laranja, adicionando os “braços” e comprovando a sua resposta. O grupo escreveu ainda mais um apontamento da soma de números pares com ímpares e os resultados obtidos (par + par = par; par + ímpar = ímpar; ímpar + ímpar = par).

A análise dos registos deste grupo mostra que compreendeu a relação de paridade entre os números facultados e a razão para apenas com números ímpares no vértice ser possível criar igualdades em cada “braço”.

Esta foi a única resposta que relacionou a soma de pares e ímpares à construção de V mágicos, o que evidencia a dificuldade dos alunos de justificarem as questões propostas no problema.

4.2.2 Os desafios dos alunos e como os ultrapassaram

Ao longo da dinamização da resolução do problema surgiram desafios nas três fases do ensino exploratório.

No momento de apresentação do problema os alunos foram separados pelos seus grupos de trabalho e foram distribuídos todos os recursos. Dei um momento aos alunos para fazerem a leitura silenciosa enquanto era projetado o enunciado no quadro. Passado algum tempo pedi a alguns alunos para explicarem a situação do problema.

Foi utilizado o V mágico e não mágico do enunciado para que todos os alunos entendessem a diferença entre ambos, fazendo esquemas circulares e adicionando os elementos em conjunto com o grande grupo. Foram explicados aos alunos os conceitos de "vértice" e "braços" do V mágico. Os alunos levantaram algumas questões, tais como: "Temos de utilizar o vértice nas duas somas?", "Para ser V mágico tem de dar igual nos dois braços, é isso?", "Registamos na folha todos os V mágicos que conseguirmos?". As questões dos alunos foram respondidas e evidenciadas utilizando os exemplos do enunciado.

Depois de todas as questões esclarecidas, foi iniciado o momento da exploração autónoma. Os grupos começaram rapidamente e fazer as tentativas para formar o máximo de V mágicos possíveis. Rapidamente compreenderam quais os números que resultavam nos vértices dos V mágicos e os que não resultavam, por tentativa e erro.

Alguns grupos não compreenderam as várias combinações que cada igualdade podia tomar, encontrando apenas três V mágicos. Estes grupos justificavam oralmente as várias tentativas feitas e as somas realizadas, explicando porque é que não resultavam. A estes grupos expliquei que observassem com atenção os V mágicos que encontraram e se poderiam formar novos a partir desses. Um dos grupos questionou "Quer dizer que se trocarmos a ordem dos números, é um V mágico novo?", eu aproveitei esta questão para esclarecer em grande grupo, já que estava a ser uma dúvida recorrente. Expliquei para a turma que desde que se mantenha a condição da soma igual nos dois braços, podemos alterar a posição dos números dos V mágicos.

Neste problema, em comparação com o anterior, observei que os grupos trabalharam de forma mais eficiente em grupo, visto que um dos elementos poderia fazer as tentativas com os números do envelope enquanto o outro fazia o registo dos V mágicos encontrados. Quando o elemento que fazia as tentativas não encontrava novos V mágicos o outro ajudava. Neste sentido, acredito que o trabalho de equipa foi bem conseguido pois ambos os elementos do grupo tiveram um papel participante na resolução do problema.

O maior desafio dos alunos associado à resolução do problema foi justificar o facto de apenas ser possível formar V mágicos com vértices ímpares, considerando os números de 1 a 5. No momento de exploração, ao circular pela sala, tentei ajudar alguns grupos a chegarem autonomamente à resposta, dando indicações como "Observem bem os V mágicos que fizeram", "Onde é que estão os números pares e ímpares?", "O que é que os V mágicos têm em comum entre si?". Apesar de lançar este tipo de questões, no sentido de apoiar os alunos a encontrar uma justificação, foi difícil para a grande parte de os alunos chegar a essa justificação. Apenas no momento de discussão coletiva, em que a questão foi explorada em grande grupo é que esta justificação foi percetível para os alunos.

O momento de exploração associado a este problema foi mais longo do que o esperado, visto que os alunos precisaram de muito tempo para encontrar todos os V mágicos e responder a todas as questões do enunciado.

No momento da discussão coletiva comecei por questionar os alunos sobre o número de V mágicos que era possível formar. Depois de várias respostas anunciadas, questionei os alunos quantas igualdades havia e quantas combinações era possível formar para cada uma delas. Deste modo os alunos chegaram à conclusão que havia 24 V mágicos (3 igualdades com 8 combinações cada uma $3\times8=24$). Escrevi no quadro uma das igualdades e todas as combinações com a participação dos alunos, descrevendo como podia ser alterado e formar um novo V mágico.

Para tentar que os alunos compreendessem a razão de apenas os números ímpares resultarem no vértice primeiro observámos um V mágico e um V não mágico, mostrando onde estão localizados os pares e os ímpares. Em conjunto com os alunos foram explicadas, utilizando exemplos, as adições entre dois e três termos pares e ímpares, como mostra a Figura 33.

Figura 33

Relações de adição entre os números pares e ímpares

$P + P = P$	$P + P + I = I$
$P + I = I$	$I + I + P = P$
$I + I = P$	$I + I + I = I$
	$P + P + P = P$

Nota: a letra *P* significa número par e a letra *I* significa número ímpar

Utilizando a regra elaborada e observando o V mágico de vértice 1, o L. do grupo 1, afirmou “Para obtermos 8, que é par, dos dois lados, num dos braços temos de ter um par e dois ímpares e no outro dois ímpares e um par”. Ou seja, o aluno compreende que para formar a igualdade temos de estrategicamente localizar os pares e os ímpares para obtermos a soma pretendida. Deste modo, foi debatido em grande grupo os restantes exemplos com vértice 3 e 5 e o porquê das localizações de cada número par e ímpar

Na explicação do V mágico de vértice 3 os alunos apontaram que este era o único em que havia três números da mesma categoria (ímpares) num dos braços. A C. do grupo 2 explicou que para os dois lados adicionarem 9, que é ímpar, um dos braços tinha de ter os três números ímpares, tal como foi comprovado nas relações de paridade evidenciadas anteriormente.

No decorrer da discussão coletiva, ao descobrirem as relações de paridade em conjunto, os alunos começaram a compreender a razão das posições dos números pares e ímpares e, consequentemente, o porquê de os números pares não funcionarem nos vértices, dado que foram facultados três números ímpares e dois pares.

Esta discussão coletiva não foi focada nas diferentes resoluções que surgiram da parte dos alunos, tal como aconteceu no problema anterior, mas teve como objetivo debater com os alunos algumas das soluções do problema, uma vez que nem todos os grupos as descobriram durante a resolução do mesmo. Assim, serviu para os alunos compreenderem a justificação da regularidade que ocorria no problema, tendo eu o papel de orientar a discussão.

4.3 Problema 3 – "Regularidades no calendário"

4.3.1 As estratégias usadas pelos alunos

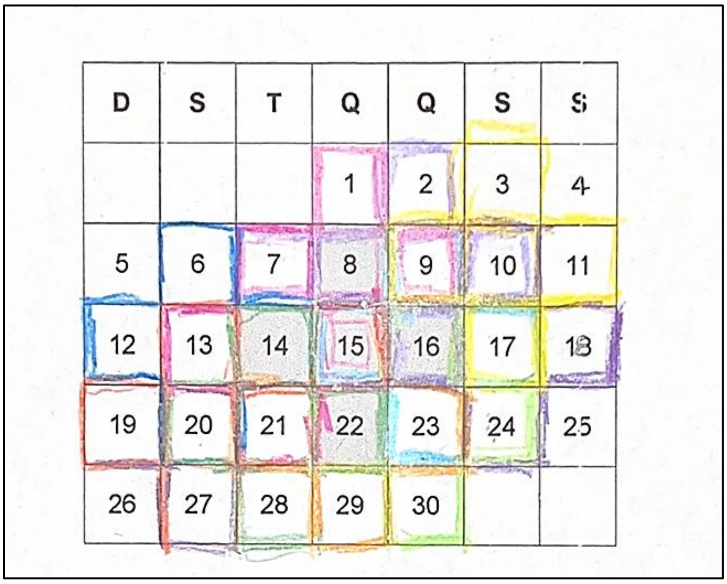
No terceiro problema apresentado "Regularidades no calendário" procurava-se que os alunos encontrassem as combinações possíveis num calendário e descobrissem as relações numéricas entre elas, tal como consta no enunciado do anexo 5.

Na resolução do problema todos os oito grupos participantes (G1, G2, G3, G4, G6, G7, G8 e G9) encontraram as 12 cruzes no calendário. Além disso, apenas um dos grupos não descobriu a relação entre o número do centro e a soma de todos os números contidos na cruz. No que diz respeito a descobrir a relação entre o número do centro e as extremidades horizontais ou verticais, também apenas um grupo não encontrou esta relação. A última alínea do enunciado demandava que os grupos organizassem a informação obtida, tendo sido apenas dois grupos que corresponderam ao pedido.

O primeiro passo realizado pelos grupos foi descobrir todas as cruzes no calendário. Facilmente os grupos compreenderam que eram necessários os cinco números para formar uma cruz e, por este motivo, alguns valores nunca podiam estar no centro. A estratégia utilizada pela maioria dos grupos para assinalar as cruzes possíveis foi a utilização de cores no enunciado, tal como efetuou o grupo 7, apresentado na Figura 34.

Figura 34

Registo do grupo 7

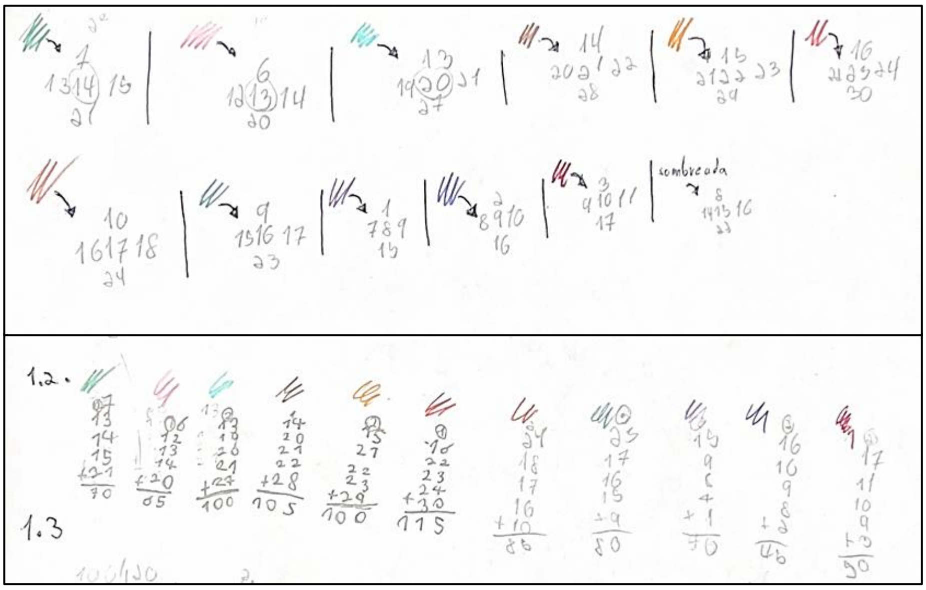


D	S	T	Q	Q	S	S
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Depois desta seleção, os grupos utilizaram as cores escolhidas para identificar as cruzes encontradas e fazer as somas pretendidas, tal como mostra a Figura 35.

Figura 35

Resolução do grupo 1

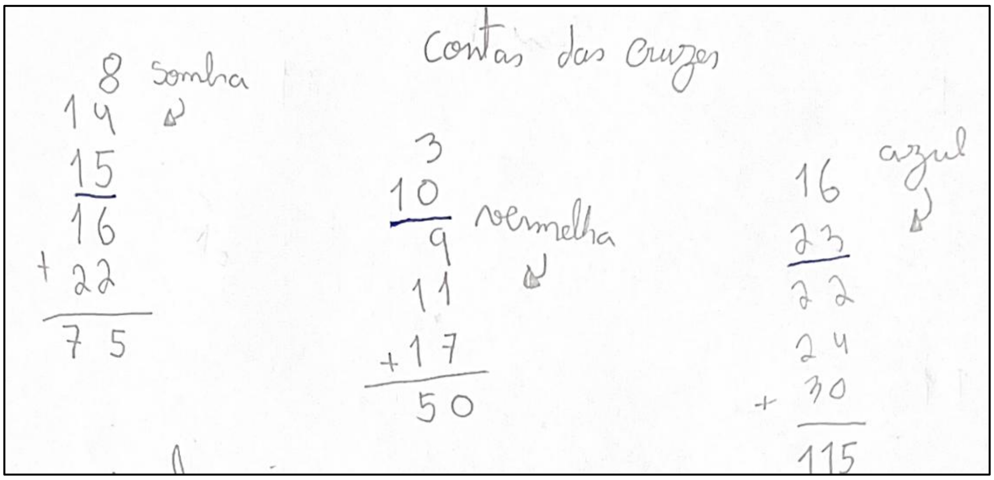


A análise do registo dos alunos mostra que eles apresentaram as cruzes que encontraram, inicialmente rodeando o número central e identificando a que cruz se referem através de cores. Estas cores referem-se às cruzes rodeadas no enunciado e às quais utilizaram de novo para identificar cada uma das adições que realizaram em seguida. Foi comum os grupos recorreram à representação vertical para efetuarem a adição de todos os números contidos na cruz.

Tal como o grupo anterior, também o grupo 2 recorreu à representação vertical para as suas adições, tal como se evidencia na resolução do grupo 2, demonstrado na Figura 36.

Figura 36

Resolução do grupo 2

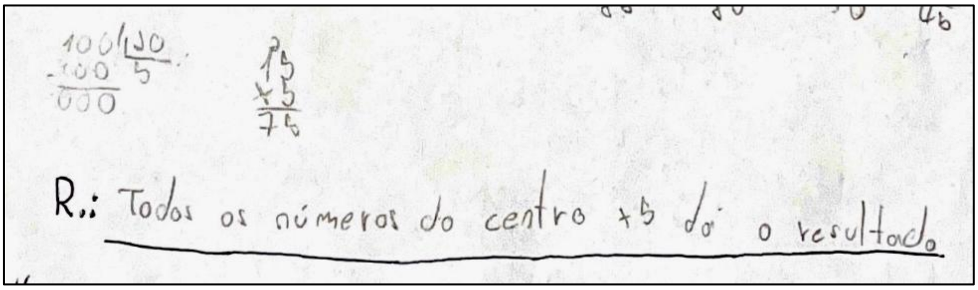


O grupo realizou as adições dos números contidos na cruz identificando à qual se referia (sendo “sombra”, “vermelha” e “azul” três exemplos utilizados). Além disso, os alunos sublinharam a azul o número central em cada uma das somas, de forma a facilitar a comparação entre o mesmo e o resultado obtido.

No sentido de descobrir a relação entre a soma dos cinco valores contidos na cruz e o número do centro, os grupos recorreram a cálculos, tal como se observa na resposta do grupo 1 na Figura 37.

Figura 37

Cálculos do grupo 1

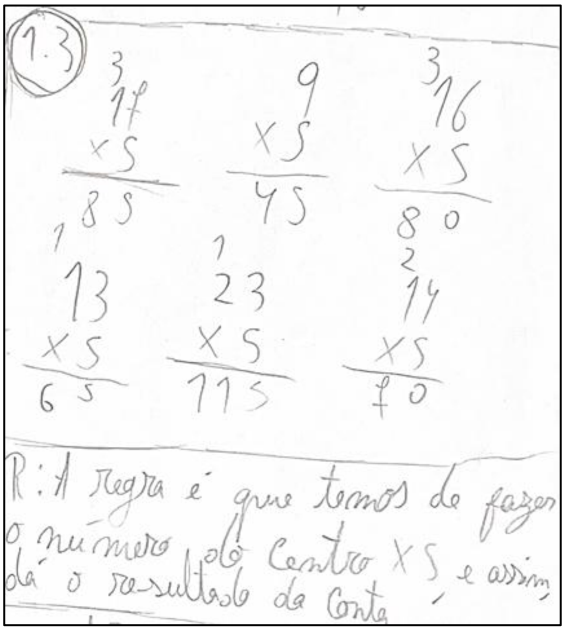


O grupo dividiu 100 por 20 (100 foi o resultado obtido na adição de todos os números contidos na cruz, cujo número do centro era 20) e obteve 5. Em seguida, para comprovar que a regra se aplicava a mais casos, o grupo multiplicou 15 por 5, que correspondia à cruz a sombreado no enunciado, obtendo 75 (valor calculado anteriormente ao adicionar todos os valores contidos nesta cruz). Deste modo, escreveram que “Todos os números do centro ×5 dá o resultado”, ou seja, parecem ter concluído que multiplicando por 5 o número do centro, iriam obter o total, resultado da adição de todos os números da cruz.

Enquanto o grupo anterior recorreu à divisão, o grupo 7 identificou a mesma regra através de multiplicações, como mostra a Figura 38.

Figura 38

Cálculos do grupo 7

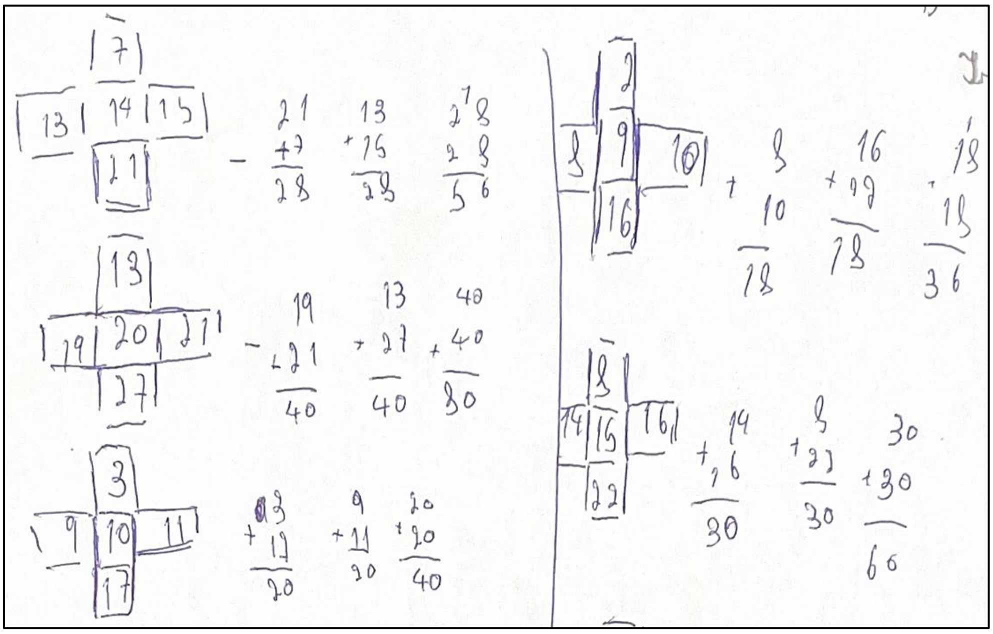


Através destas operações os alunos comprovaram que multiplicando por cinco o número do centro obtinham sempre a soma de todos os números contidos na cruz. Apesar de não justificarem como entenderam que seria 5 vezes o número central, apresentaram várias tentativas (num total de seis) que lhes permitiu chegar a esta regularidade. Deste modo, assumiram que esta regra se aplicava sempre, respondendo “A regra é que temos de fazer o número do centro ×5 e assim dá o resultado da conta”.

No que diz respeito ao cálculo da soma dos números posicionados nas extremidades horizontais e verticais da cruz, e da sua relação com o número central, os alunos seguiram a mesma linha de pensamento. Um exemplo é a resolução do grupo 3, apresentada na Figura 39.

Figura 39

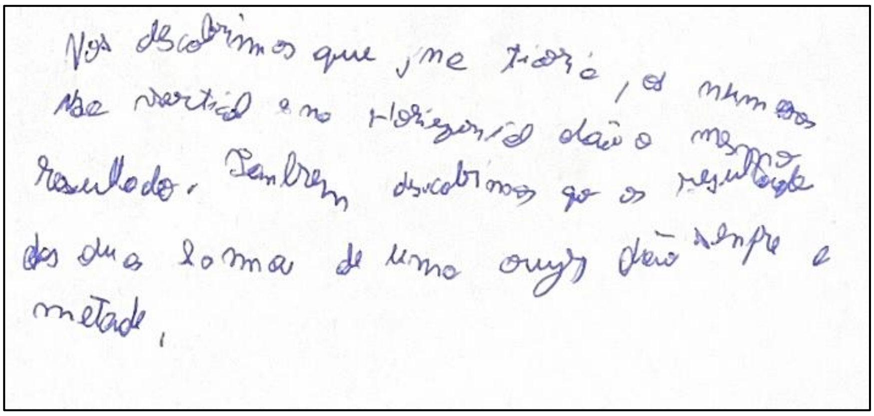
Registo do grupo 3



O grupo 3 registou as cruzes e realizou as adições das extremidades duas a duas e de seguida adicionou os dois resultados obtidos, obtendo o somatório dos números das quatro extremidades, repetindo este processo para todas as cruzes. No final, os alunos justificaram a sua resposta (Figura 40).

Figura 40

Resposta do grupo 3


Nós descobrimos que, na teoria, os números na vertical e na horizontal dão o mesmo resultado. Também descobrimos que os resultados das duas somas de uma cruz dão sempre a metade.

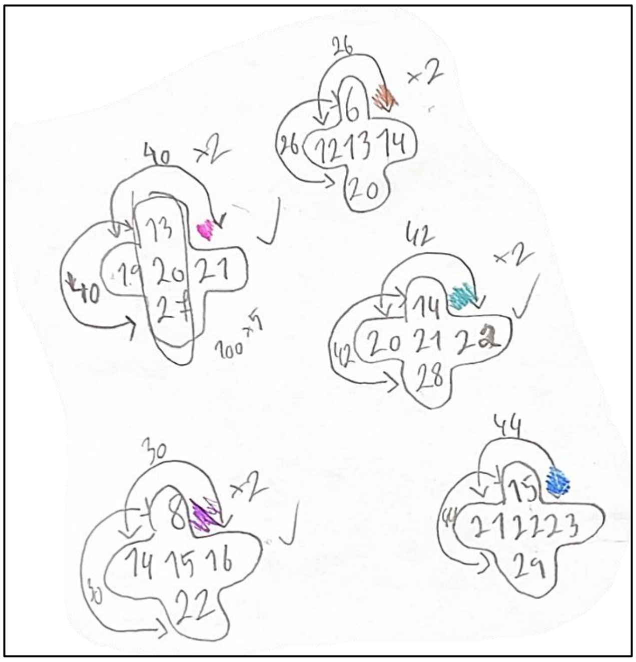
Na imagem é possível ler: “Nós descobrimos que, na teoria, os números da vertical e na horizontal dão o mesmo resultado. Também descobrimos que os resultados das duas somas de uma cruz dão sempre metade.” A análise desta resposta permite afirmar que o grupo descobriu que obtém sempre o mesmo resultado na adição das extremidades horizontais e verticais da cruz. Para além disso, o grupo refere que ao adicionar os resultados, obtém sempre metade, embora se deva ter enganado e deva ter querido referir que ao adicionar as duas somas parciais obtém um número que é o dobro dos anteriores.

A terceira adição que os alunos realizaram para cada uma das cruzes refere-se à soma das quatro extremidades da cruz, valor obtido pela soma dos dois resultados que obtiveram da soma das extremidades verticais e horizontais (dois valores iguais). Por sua vez, o valor central é também metade da soma das extremidades duas a duas, mas acredito que não era isso a que os alunos se referiam. Ao realizar este terceiro cálculo, que não era facultado, o grupo acabou por se perder na resposta, apesar do raciocínio estar correto.

O grupo 6 utilizou setas nas cruzes para mostrar a relação de dobro entre a soma dos números nas extremidades e o número do centro, como mostra a Figura 41.

Figura 41

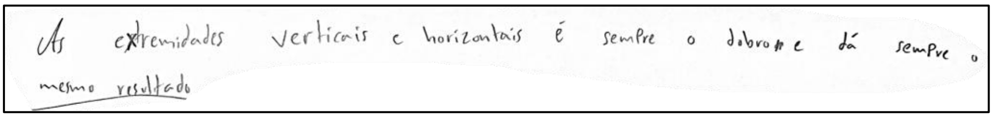
Registo do grupo 6



A análise dos seus registos mostra que o grupo utilizou cores para identificar as cruzes e recorreu a setas, para mostrar que obtém o mesmo resultado nas duas somas, e que, para além disso, o resultado é sempre o dobro do valor central da cruz. Tal como é referido na resposta dada pelo grupo, apresentada na Figura 42.

Figura 42

Resposta do grupo 6

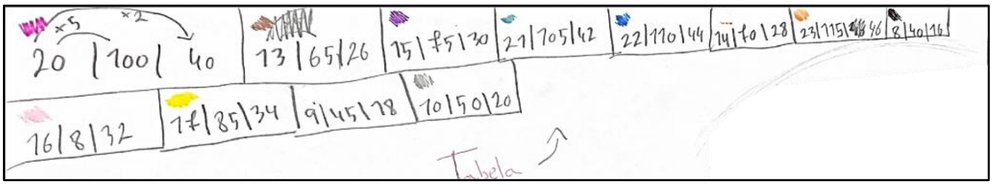


Na imagem é possível ler: “As extremidades verticais e horizontais é sempre o dobro e dá sempre o mesmo resultado.”, mostrando que o grupo identificou corretamente estas regularidades, embora não se tenha exprimido corretamente.

No que diz respeito a organizar a informação e identificar as regularidades que descobriram, dois grupos recorreram registos próximos de tabelas. Um deles foi o grupo 6, que organizou a informação como consta da Figura 43.

Figura 43

Organização de dados do grupo 6

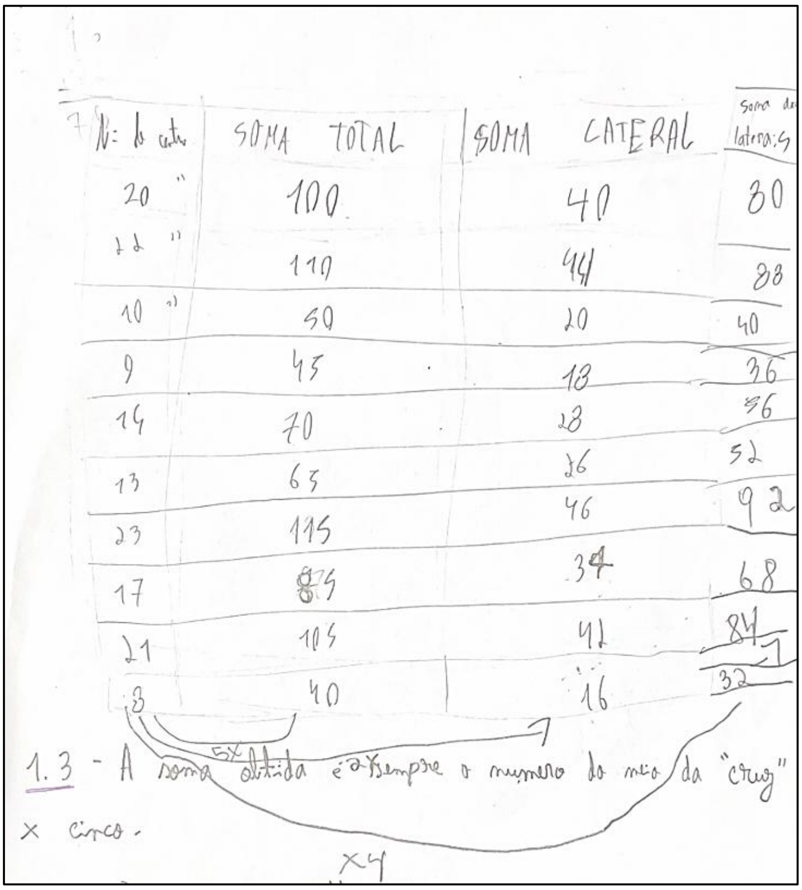


Na imagem é possível observar que o grupo regista em primeiro lugar o número central, depois o número seguinte é a soma de todos os valores contidos na cruz (que é sempre cinco vezes o número central) e o último é a soma dos números das extremidades dois a dois (que são sempre o dobro do número central). É ainda possível observar que utilizaram cores para identificar as diferentes cruzes, tal como na Figura 41. O grupo mostra que esta relação acontece em todas as cruzes, visto que escreveram pela segunda vez o “×5” e o “×2”, mas rasuraram, pois, entenderam que se repete sempre. O grupo considera que esta representação é uma tabela uma vez que o indicaram abaixo, apesar de não ter a aparência comum de uma tabela, assemelhando-se mais a um esquema.

O grupo 8 também decidiu que a melhor forma de organizar a informação obtida era através de uma tabela, como mostra a Figura 44.

Figura 44

Organização de dados do grupo 8



N: do centro	SOMA TOTAL	SOMA LATERAL	Soma das laterais
20	100	40	80
22	110	44	88
10	50	20	40
9	45	18	36
14	70	28	56
13	65	26	52
23	115	46	92
17	85	34	68
21	105	42	84
8	40	16	32

5X

1.3 - A soma obtida é sempre o numero do meio da "cruz" x cinco.

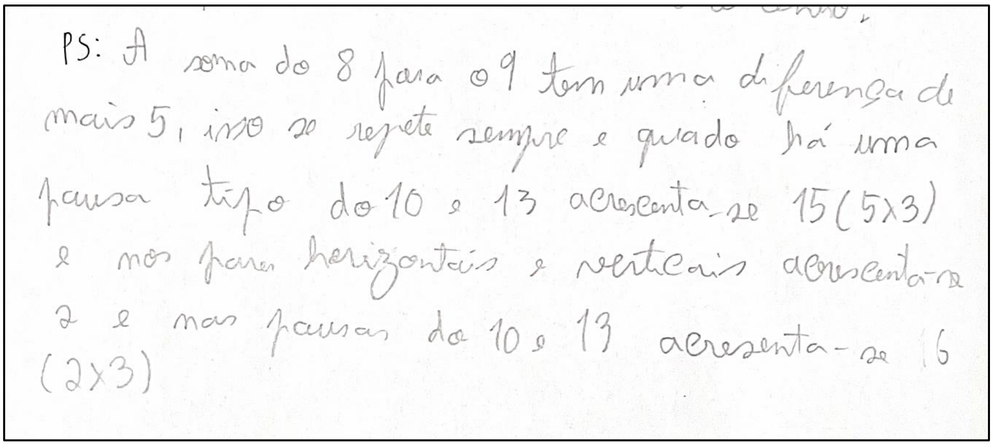
x4

O grupo 6, para além de apresentar os resultados obtidos nas diferentes adições ao longo do problema, colocou ainda uma coluna sobre a soma obtida ao adicionar os números das quatro extremidades da cruz. Esta foi uma questão extra que propus a estes alunos pelo facto de terem terminado a resolução mais rapidamente do que os restantes colegas. Apesar de não colocarem os valores centrais da cruz por ordem crescente nem colocarem as doze cruzes possíveis, evidenciaram compreender a relação entre o número central e as somas pretendidas através de setas e das multiplicações necessárias.

Para além do que era solicitado no enunciado, o grupo 2 acrescentou ainda uma informação adicional na sua resposta, como mostra a Figura 45.

Figura 45

Resposta do grupo 2


PS: A soma do 8 para o 9 tem uma diferença de
mais 5, isso se repete sempre e quado há uma
pausa tipo do 10 e 13 acrescenta-se 15 (5x3)
e nos pares horizontais e verticais acrescenta-se
2 e nas pausas do 10 e 13 acresenta-se 6
(2x3)

Na imagem é possível ler: "PS: A soma do 8 para o 9 tem uma diferença de mais 5, isso se repete sempre e quando há uma pausa tipo do 10 para o 13 acrescenta-se 15 (5×3) e nos pares horizontais e verticais acrescenta-se 2 e nas pausas do 10 e 13 acrescenta-se 6 (2×3)".

O grupo pretende explicar a sequência numérica entre as adições de todos os números contidos na cruz, adicionando sempre 5 ao valor anterior. Complementarmente, nas adições entre extremidades, adiciona sempre 2 ao valor anterior. O grupo refere que estas sequências são constantes exceto quando há uma "pausa", ou seja, quando há um intervalo pela impossibilidade de formar cruzes com determinados valores centrais. Assim, o grupo explica que quando ocorrem estes intervalos o número seguinte deverá adicionar 15 (5×3) e não 5, isto porque são três números que sofrem este salto, como o 10 e o 13, daí a multiplicação por 3. O mesmo acontece nas extremidades horizontais e verticais, que nestes intervalos soma 6 ao termo seguinte, e não 2. Esta informação acrescentada pelo grupo mostra que os alunos pretendiam encontrar uma outra regularidade na sequência numérica formada pelas cruzes, próxima de um termo geral.

Os alunos da turma, na generalidade, demonstraram bastante interesse e empenho neste problema, na qual conseguiram obter resultados muito positivos, compreendendo as relações entre os diferentes números pretendidas e conseguindo justificar como chegaram às suas respostas.

4.3.2 Os desafios dos alunos e como os ultrapassaram

Durante a dinamização do problema surgiram desafios para os alunos nos três momentos do ensino exploratório.

No momento da apresentação do problema, depois de distribuídos os enunciados, os alunos tiveram tempo para a leitura e interpretação dos mesmos. O enunciado foi projetado no quadro e discutido em grande grupo. Os alunos explicaram o que era pretendido, evidenciando compreensão da proposta do problema, e eu esclareci algumas dúvidas, utilizando o exemplo a sombreado. Foi discutido com os alunos o facto de apenas formarmos uma cruz quando obtemos a forma pretendida, a qual tem de conter sempre os cinco números. Clarificou-se ainda que o número central é o que está no centro da cruz, que no caso do enunciado é o 15. Ainda utilizando o exemplo no quadro, foi pedido aos alunos para darem outro exemplo de cruz possível, mostrando que os mesmos números podem estar presentes em mais que uma delas.

Esclarecidas as dúvidas dos alunos associadas à proposta do problema, deu-se início ao momento da sua exploração. Um dos desafios dos alunos era organizar a folha de respostas com todas as informações necessárias. Foi recorrente os alunos necessitarem de uma segunda folha de registo para organizarem melhor os seus raciocínios e os cálculos necessários. Também foi sugerido a alguns dos grupos que estabelecessem um plano de execução, tal como foi aconselhado anteriormente no decorrer dos problemas desta proposta pedagógica. Desta forma os grupos conversaram entre si sobre quais os passos necessários e qual a melhor ordem para os realizar.

O trabalho cooperativo entre os elementos dos grupos foi-se mostrando mais eficiente à medida que se foram acostumando a trabalhar com determinados colegas. Também o facto de alguns elementos da turma faltarem permitiu realocar alunos que se adaptaram muito melhor nesses novos grupos do que nos anteriores.

Um dos desafios com que alguns grupos se depararam foi encontrar a relação entre a soma obtida e o número central, que se aplicasse a todos os casos. Por exemplo, o grupo 6 apresentou uma conjetura que se comprovava num dos casos, defendendo "que tem de ser mais 80, porque 20 mais 80 é igual a 100". Eu confirmei que, de facto, nesse caso, essa poderia ser uma hipótese, mas não podemos afirmar que é a regra utilizando apenas um caso comprovado. Foi-lhes dito que é preciso que se verifique para todos os casos, o que não acontecia com a "regra" descoberta. Foi sugerido ao grupo que observasse com atenção os valores menores, questionando qual a relação entre o 8 e o 40, depois entre o 9 e o 45 e, por fim, entre o 10 e o 50. A partir daí o grupo identificou e compreendeu a relação pretendida, tendo verificado que, de facto, era aplicável a todos os casos.

O principal desafio nesta fase foi o facto de os alunos não conhecerem formas de organizar a informação que obtiveram na resolução do problema. Aos grupos que me questionaram acerca desta questão sugeri que pensassem nas representações que conheciam e escolhessem aquela que considerassem mais adequada. Depois de algum tempo e de alguns exemplos de representações facultados, os grupos decidiram que iam utilizar uma tabela para organizar os seus dados.

No que diz respeito ao momento de discussão coletiva, fui registando no quadro as cruzes encontradas em conjunto com o grande grupo. A turma confirmou que não era possível haver cruzes com os números centrais 11, 12, 18 e 19.

De seguida, foi debatido com os alunos a relação entre as somas obtidas e os números centrais. Foi pedido aos alunos que justificassem os seus raciocínios, explicando como descobriram as relações numéricas pretendidas, o que se evidenciou um desafio para alguns alunos. Uma das justificações foi, por exemplo, a D. do grupo 8 explicou que distribuiu três somas para ela e outras três para o colega de grupo, e recorrendo a tentativas, ambos perceberam que chegavam à mesma conclusão.

No que diz respeito à relação de dobro entre o número central e a soma dos números das extremidades da cruz, os alunos referiram que esta relação foi mais fácil de descobrir. Os alunos explicaram que observando com atenção os valores obtidos, facilmente entenderam que se tratava de uma relação de dobro.

No final, as várias adições foram resolvidas em conjunto com a turma e registadas no quadro numa tabela, como representada na tabela 4. Ao preencher a tabela, os alunos foram questionados sobre as sequências de crescimento aí representadas e suas regularidades. Tendo os alunos afirmado que no caso das somas de todos os números contidos na cruz, seria sempre adicionar 5 ao termo anterior, e no caso da soma das extremidades horizontais e verticais seria adicionar 2 ao termo anterior. Também afirmaram que havia exceções à regra nos intervalos em que não é possível formar cruzes com determinados números centrais.

Em conformidade com o problema anterior, esta discussão teve como objetivo rever e debater a resolução do problema em conjunto com a turma, mostrando diferentes possibilidades de resolução. De qualquer forma, os alunos entenderam que as relações aplicadas tinham de ser comuns a todos os casos e relembraram algumas representações de organização e tratamento de dados, que provavelmente já tinham sido esquecidas. Deste modo, foi feita uma sistematização das aprendizagens dos alunos.

4.4 Problema 4 – "Chupa-Chupas"

4.4.1 As estratégias usadas pelos alunos

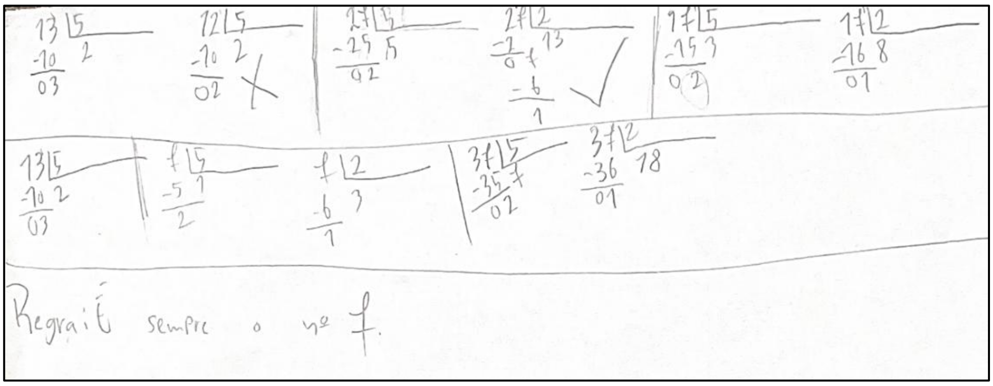
O quarto e último problema proposto tinha como objetivo descobrir as possibilidades de quantidade de chupa-chupas contidos num saco, tendo em conta duas partilhas entre amigos, como consta no enunciado do anexo 6.

Dos nove grupos que participaram (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G8, G9 e G10) todos encontraram pelo menos uma possibilidade de quantidade de chupa-chupas no saco. Para além disso, todos compreenderam que todas essas possibilidades tinham sempre o número 7 no algarismo das unidades. Cinco dos grupos recorreram a esquemas/desenhos para justificarem a sua resposta, três recorreram a tentativas e um recorreu apenas a cálculos. Tal como aconteceu em problemas anteriores, também os registos das estratégias dos alunos variaram entre registos informais e desorganizados, como o apresentado na Figura 46, e registos mais formais e estruturados, como o apresentado na Figura 52.

Começando pelo grupo 6, que recorreu a tentativas através de cálculos de divisão, como apresentado na Figura 46.

Figura 46

Resolução do grupo 6



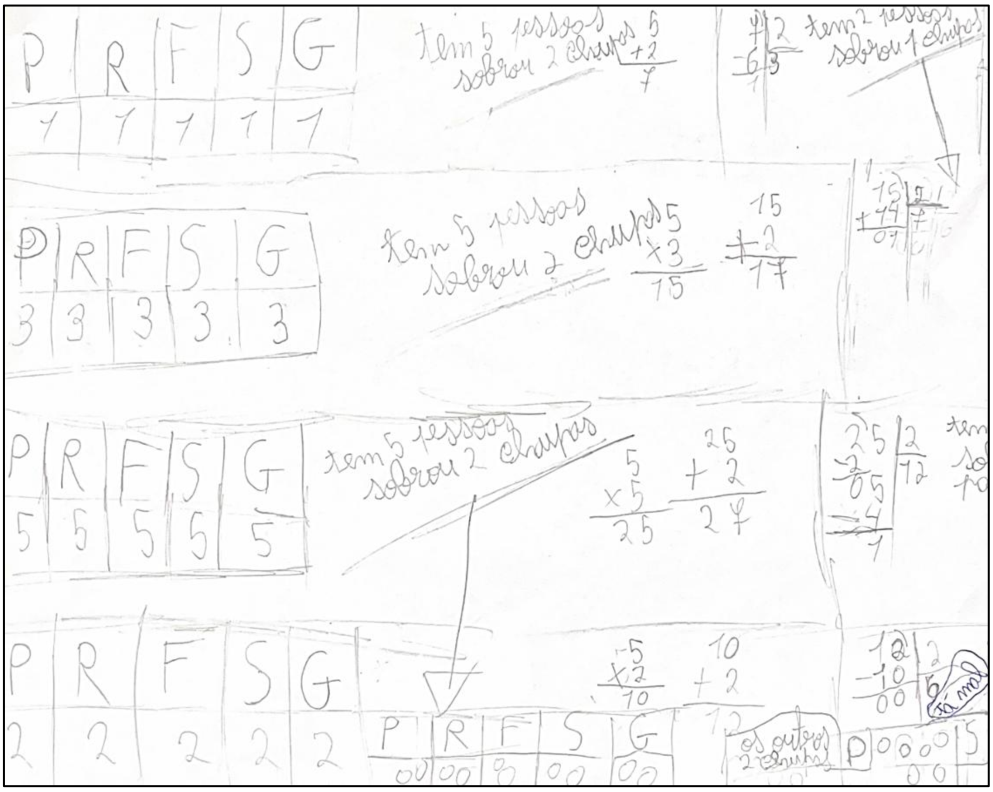
O grupo foi tentando algumas possibilidades usando diferentes números e dividindo-os por 5. Começou por testar com o 13, dividindo por 5, obtendo 2 e resto 3, ou seja, não era uma possibilidade pois procurava-se resto 2 (quando partilharam entre cinco amigos sobraram 2). Em seguida testaram com o 12, tendo obtido resto 2, acreditando que poderia ser uma possibilidade. Na procura de outras respostas, o grupo foi continuando com tentativas, usando diferentes números, porém agora dividindo por 5 e por 2, para comprovar se estariam nas condições das duas partilhas de chupa-chupas que estavam identificadas no enunciado.

A partir deste raciocínio o grupo compreendeu que o 12 afinal não era uma possibilidade, tendo feito a divisão por 2 e, em seguida, apagaram e colocaram uma cruz na divisão com 5, demonstrando que não era uma possibilidade. O grupo descobriu que as outras hipóteses que funcionavam eram o 27, o 17, o 7 e o 37. Assim, concluíram “Regra: é sempre o n.º 7”, o que parece evidenciar que identificaram que os números que são solução têm de ter o algarismo 7 nas unidades.

O grupo 4 recorreu a esquemas como estratégia de resolução, tal como evidenciado na Figura 47.

Figura 47

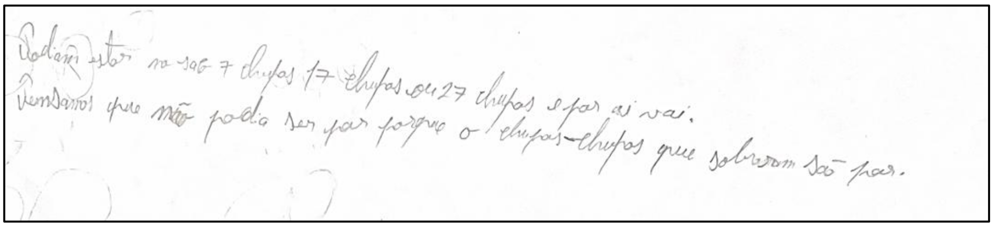
Resolução do grupo 4



O grupo utilizou as letras maiúsculas dos nomes dos amigos do enunciado (Pedro, Rute, Francisco, Sara e Gonçalo representado por P, R, F, S e G, respetivamente) para identificá-los. Em seguida procederam à partilha dos chupa-chupas para cada um deles através de uma representação em tabelas. Dividiram primeiramente um chupa-chupa para cada um dos cinco amigos, e escreveram “tem 5 pessoas, sobrou 2 chupas” recorrendo a uma representação vertical da adição para adicionar 5 e 2, obtendo 7. Em seguida, para verificar a primeira condição do problema, dividiram o 7 por 2, obtendo resto 1 e comprovando que o 7 era uma possibilidade de número de chupa-chupas no saco. O grupo seguiu o mesmo raciocínio nas repartições posteriores de três e cinco chupa-chupas por cada um dos cinco amigos, adicionando dois ao resultado obtido depois dessa distribuição. Depois recorreram à divisão por dois para comprovar que sobrava sempre um. Por fim, o grupo tentou dar dois chupa-chupas a cada um dos cinco amigos, recorrendo até a registos circulares para representar os chupa-chupas, obtendo 12, porém ao dividir 12 por dois, descobriram que não sobrava nenhum e por isso afirmaram que "tá mal". O grupo concluiu com a resposta demonstrada na Figura 48.

Figura 48

Resposta do grupo 4

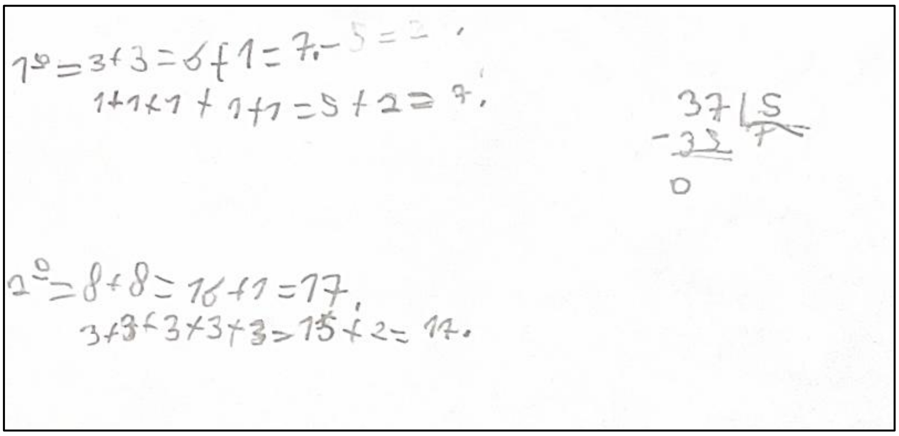


Na imagem é possível ler-se: "Podiam estar no saco 7 chupas, 17 chupas ou 27 chupas e por aí vai. Pensamos que não podia ser par porque os chupa-chupas que sobraram são par". A análise desta resposta do grupo 4 mostra que os alunos entendem que os números com o algarismo 7 nas unidades irão sempre funcionar e que descobriram que a resposta não podia ser um número par pelo facto de quando são cinco amigos sobra um número par de chupa-chupas.

O grupo 1 recorreu apenas a cálculos para descobrir as diferentes possibilidades de resposta, apresentados na Figura 49.

Figura 49

Resolução do grupo 1



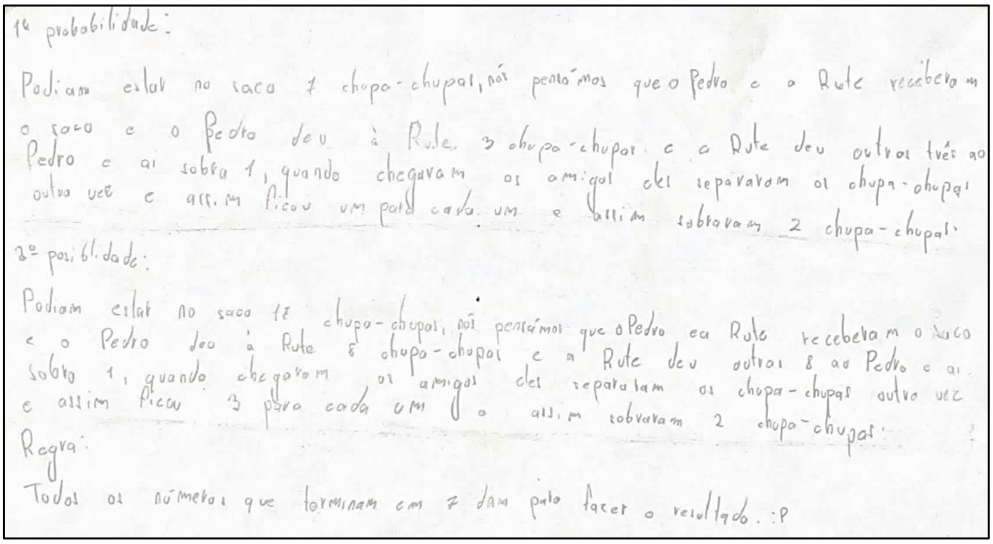
A análise da sua resolução mostra que o grupo descobriu duas possíveis respostas através de duas adições para cada uma destas possibilidades.

Na primeira possibilidade (representada pelos alunos como "1.º") adicionaram primeiramente 3+3 obtendo 6, adicionando em seguida 6+1, obtendo 7. Isto é, adicionaram primeiramente uma possibilidade de divisão dos chupa-chupas na primeira partilha relatada no enunciado, distribuindo três chupa-chupas para cada um dos amigos, tendo adicionado ao total o número um, pois o enunciado afirma que após essa repartição sobrou um chupa-chupa. É de notar que o grupo deve ter feito os registos à medida que ia pensando e, por isso, as igualdades estão incorretas. O grupo tentou ainda continuar os cálculos a partir deste, subtraindo 5 a 7 e obtendo 2, mas compreendeu que não bastava isso para obter uma resposta válida, por isso apagou e realizou uma segunda tentativa. Esta representa a segunda partilha apresentada no enunciado, na qual os alunos atribuíram um chupa-chupa para cada um dos cinco amigos (1+1+1+1+1) obtendo 5 e somando os chupa-chupas que sobraram no saco, que foram 2 (5+2) obtendo 7. Como o 7 era válido nas duas situações, o grupo confirma assim que essa era uma possibilidade de chupa-chupas no saco.

Na segunda possibilidade (representado pelos alunos como “2.º”) o grupo seguiu o mesmo raciocínio, desta vez dividindo oito chupa-chupas para cada um dos dois amigos e três para os cinco amigos, obtendo 17. Os alunos devem ter observado que os dois resultados obtidos tinham o 7 no algarismo das unidades. Para comprovarem esta teoria, decidiram testar ainda com o 37, porém de forma diferente, dividindo 37 por 5. Apesar do cálculo estar incompleto, pois não colocaram o resto 2, o grupo percebeu que esta era também uma possibilidade, concluindo que essa era a regularidade para todos os casos possíveis de chupa-chupas no saco, tal como se evidencia na sua resposta (Figura 50).

Figura 50

Resposta do grupo 1


1ª probabilidade:

Podiam estar no saco 7 chupa-chupas, nós pensámos que o Pedro e a Rute receberam o saco e o Pedro deu à Rute 3 chupa-chupas e a Rute deu outros três ao Pedro e aí sobra 1, quando chegaram os amigos eles separaram os chupa-chupas outra vez e assim ficou um para cada um e assim sobraram 2 chupa-chupas.

2º posibilidade:

Podiam estar no saco 17 chupa-chupas, nós pensámos que o Pedro e a Rute receberam o saco e o Pedro deu à Rute 8 chupa-chupas e a Rute deu outros 8 ao Pedro e aí sobra 1, quando chegaram os amigos eles separaram os chupa-chupas outra vez e assim ficou 3 para cada um e assim sobraram 2 chupa-chupas.

Regra:

Todos os números que terminam em 7 dam para fazer o resultado. :P

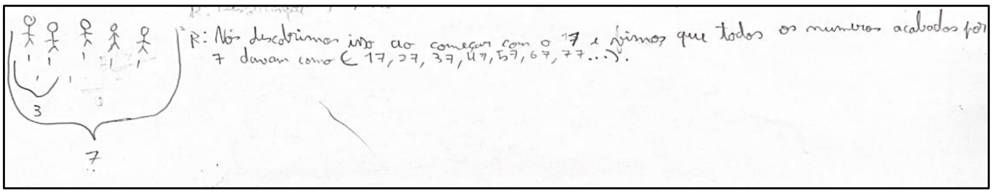
Na imagem é possível ler: “1.ª possibilidade: Podiam estar no saco 7 chupa-chupas, nós pensámos que o Pedro e a Rute receberam o saco e o Pedro deu à Rute 3 chupa-chupas e a Rute deu outros três ao Pedro e aí sobra 1, quando chegaram os amigos eles separaram os chupa-chupas outra vez e assim ficou um para cada um e assim sobraram 2 chupa-chupas. 2.ª possibilidade: Podiam estar no saco 17 chupa-chupas, nós pensámos que o Pedro e a Rute receberam o saco e o Pedro deu à Rute 8 chupa-chupas e a Rute deu outros 8 ao Pedro e aí sobra 1, quando chegaram os amigos eles separaram os chupa-chupas outra vez e assim ficou 3 para cada um e assim sobraram 2 chupa-chupas. Regra: Todos os números que terminam em 7 dão para fazer o resultado”

Deste modo, o grupo justificou o seu raciocínio, explicando os cálculos efetuados e concluindo a regularidade enunciada. Apesar disso, não explicam porque é que apenas pensaram nessas possibilidades de repartição e não 2 chupa-chupas para o grupo de cinco amigos, por exemplo. Provavelmente, os alunos compreenderam porque é que os pares não funcionariam, embora não tenham explicitado essas tentativas

O grupo 10 também recorreu a esquemas como estratégia de representação e resolução do problema, como apresentado na Figura 51.

Figura 51

Resolução do grupo 10

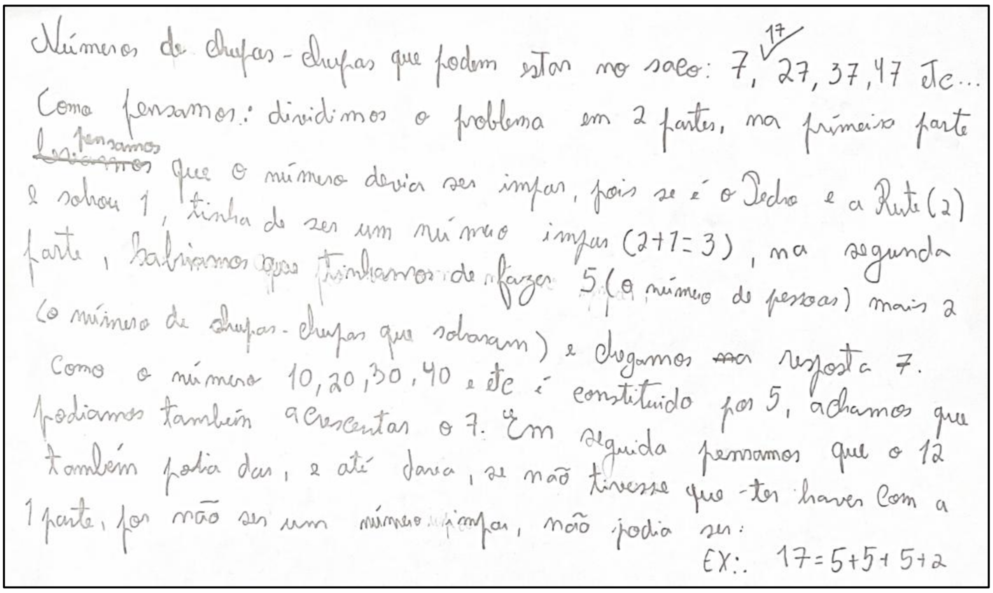


Evidencia-se que o grupo utilizou uma representação esquemática da figura humana para identificar os cinco amigos e através de pequenos traços lineares foram representando os chupa-chupas a repartir por cada um deles. O grupo foi contando os chupa-chupas necessários para distribuir entre os amigos e colocando em baixo desses aqueles que sobravam em cada partilha. Utilizando chavetas ({}) os alunos mostraram que no caso de serem dois amigos, o mínimo de chupa-chupas necessários eram 3 e no caso de serem cinco amigos, eram necessários, pelo menos 7. O grupo concluiu então: “Nós descobrimos isso ao começar com o 7 e vimos que todos os números acabados por 7 davam como (17, 27, 37, 47, 57, 67, 77…)". Esta afirmação parece evidenciar que, apesar de não o esquematizarem tal como fizeram para obter o número 7, o grupo compreendeu que todos os números terminados em 7 são uma possibilidade de número de chupa-chupas dentro do saco.

Outro grupo que recorreu a tentativas foi o grupo 2, que explicou o seu raciocínio como apresentado na Figura 52.

Figura 52

Resolução do grupo 2


Números de chupas-chupas que podem estar no saco: 7, 17, 27, 37, 47 etc...
Como pensamos: dividimos o problema em 2 partes, na primeira parte
pensamos que o número devia ser impar, pois se é o Pedro e a Rute (2)
e sobrou 1, tinha de ser um número impar (2+1=3), na segunda
parte, sabíamos que tínhamos de fazer 5 (o número de pessoas) mais 2
(o número de chupas-chupas que sobraram) e chegamos ~~na~~ resposta 7.
Como o número 10, 20, 30, 40 e etc é constituido por 5, achamos que
podiamos também acrescentar o 7. Em seguida pensamos que o 12
também podia dar, e até dava, se não tivesse que ter haver com a
1 parte, por não ser um número impar, não podia ser.
EX:. 17=5+5+5+2

Na imagem é possível ler: "Número de chupa-chupas que podem estar no saco: 7, 17, 27, 37, 47 etc… Como pensámos: dividimos o problema em 2 partes, na primeira pensamos que o número devia ser ímpar, pois se é o Pedro e a Rute (2) e sobrou 1, tinha de ser um número ímpar (2+1=3), na segunda parte, sabíamos que tínhamos de fazer 5 (o número de pessoas) mais 2 (o número de chupa-chupas que sobraram) e chegamos na resposta 7. Como o número 10, 20, 30, 40 e etc. é constituído por 5, achamos que também podíamos acrescentar o 7. Em seguida pensamos que o 12 também podia dar, e até dava, se não tivesse que ter haver com a 1ª parte, por não ser um número ímpar, não podia ser: Ex:. 17=5+5+5+2"

A resposta do grupo 2 evidencia que compreenderam o problema e as condições a ele associadas e conseguiram justificar o seu raciocínio de forma completa. Primeiramente dividiram o problema em duas partes e entenderam que a resposta tinha de ser aplicável nas duas partilhas. Assim, explicam com clareza como entenderam que a resposta tinha de ser um número ímpar e como obtiveram a resposta 7. A partir daí, tendo em conta que o 7 era o número "chave", o grupo compreendeu que como os números 10, 20, 30 e os seguintes são múltiplos de 5 ("constituídos por 5"), adicionando-lhes 7 iria funcionar sempre, daí obtendo o 17, 27, 37, etc. Por fim, o grupo acrescenta uma tentativa com o número 12, afirmando que o número respeita a segunda parte do problema, mas não a primeira. O grupo completa ainda a sua justificação com uma adição que explica porque é que o 17 é uma possibilidade, comprovando a sua "teoria".

Todos os grupos demonstraram interesse pela resolução do problema e todos encontraram a regularidade do problema, embora tivessem surgido diferentes modos de representação e de resolução. É de notar que nenhum dos grupos referiu que as soluções deste problema são infinitas.

4.4.2 Os desafios dos alunos e como os ultrapassaram

Ao longo da resolução do problema, os alunos depararam-se com diversos desafios em cada uma das fases do ensino exploratório.

Na fase da apresentação do problema, tal como nos anteriores, distribuí o enunciado pelos grupos, dando-lhes um momento para a leitura silenciosa, assim como uma folha branca para os seus registos. O enunciado foi também projetado no quadro, facilitando a apresentação para o grande grupo. Depois de alguns instantes selecionei alguns alunos para explicarem a situação do problema à turma.

Os desafios que se destacaram nesta fase foi no sentido da compreensão da situação enunciada no problema, nomeadamente entenderem que as duas partilhas que ocorreram entre os amigos não são independentes. Ou seja, no primeiro momento houve uma partilha de chupa-chupas entre amigos e em seguida houve outro momento de partilha entre amigos com os mesmos chupa-chupas e não outros. Para além disso, também foi necessário esclarecer os alunos que os chupa-chupas são sempre distribuídos de forma igualitária pelos amigos. Deste modo, para apoiar os alunos a lidar com estes desafios, procurei responder a todas as questões colocadas e, recorrendo ao enunciado no quadro, sublinhar a informação mais importante. Apesar das tentativas de explicação do enunciado, este ainda não tinha ficado claro para alguns alunos, tornando este um desafio evidente também na fase seguinte.

Na fase de exploração autónoma foram evidenciados dois principais desafios por parte dos alunos.

Primeiramente foi necessário dar um apoio extra aos alunos no sentido da compreensão da situação do enunciado. Para facilitar a compreensão dos alunos, utilizei canetas/lápis para representar os chupa-chupas e elementos da turma para representar os amigos e desta forma os alunos visualizarem a situação enunciada.

O segundo e mais recorrente desafio que surgiu foi o facto de alguns grupos não entenderem que o número de chupa-chupas no saco tinha de respeitar as regras de ambas as partilhas, sobrando os respetivos em cada distribuição.

Alguns exemplos de afirmações dos alunos que evidenciam este desafio são da R. do grupo 7 e a D. do grupo 8. A R. afirmou que havia muitas possibilidades, como 5, 11 e 12. Este resultado demonstra que a aluna estava apenas a considerar a segunda partilha de chupa-chupas no saco e não estava a ter em conta a primeira. Também a D. do grupo 8 referiu que podiam estar no saco 7, 12,17, 22, 27 e por aí adiante. A aluna distribuiu um chupa-chupa pelos cinco amigos acrescentando os dois que sobraram, depois dois chupa-chupas, três chupa-chupas e assim sucessivamente. Este raciocínio estaria correto se a primeira partilha não tivesse acontecido, a qual referia que na distribuição entre apenas dois amigos, sobrava um, e se dividir 12 chupa-chupas por dois amigos não irá sobrar nenhum (6 para cada um).

No sentido de orientar as alunas nestes desafios, expliquei às alunas que, apesar do seu raciocínio estar correto, era necessário ter em conta a primeira partilha entre apenas dois amigos, e que talvez isso afetasse a distribuição no segundo momento.

No momento da discussão coletiva os alunos apresentaram as suas estratégias oralmente para o grande grupo, o que evidenciou alguns desafios.

Um dos desafios foi a distribuição diferenciada do trabalho desenvolvido. Durante as apresentações tentei que todos os elementos do grupo participassem na explicação, o que aconteceu na maioria dos grupos, porém em alguns casos ainda continua a surgir um líder que resolve e explica o problema individualmente.

Ainda durante as apresentações, procurei que os restantes elementos da turma acompanhassem o raciocínio do grupo a apresentar. Deste modo, sugeri que os grupos fossem registando no quadro os seus raciocínios e no final incentivava a turma a colocar questões ao grupo de modo a criar uma discussão.

Pelo facto de não haver muito a acrescentar às resoluções dos alunos, visto que todos descobriram a regularidade procurada, não fiz a resolução para o grande grupo como habitual nos problemas anteriores. Em vez disso, e pelo facto de haver uma grande demanda por parte dos alunos de apresentarem a sua resolução à turma, deixei que esses grupos fizessem também as suas exposições.

O facto de vários grupos se proporem a apresentar a sua resolução para o grande grupo demonstra a vontade dos alunos de mostrarem aos restantes como é que resolveram o problema. Acredito que é um fator positivo pois, noutros momentos, os alunos não demonstravam interesse em apresentar oralmente as suas produções nem se voluntariavam. Também a participação do grande grupo durante as apresentações dos colegas melhorou, sendo mais capazes de fazer questões e terem um papel participante nas apresentações, dando aos alunos a apresentar ferramentas para melhorarem.

No final, foi feita uma síntese das diferentes estratégias que surgiram por parte dos alunos. Um desafio dos alunos foi de identificar a estratégia que tinham utilizado. Os alunos iam descrevendo o que fizeram e a partir daí identificaram possíveis estratégias, como por exemplo "fui tentando encontrar", que corresponde à estratégia "Fazer tentativas".

O facto de os alunos serem capazes de diferenciar os diferentes tipos de estratégias e reconhecerem se recorreram a elas ou não, foi um aspeto muito positivo desta discussão coletiva.

Em síntese, a análise realizada ao longo deste capítulo, evidencia que as estratégias usadas pelos alunos na resolução dos quatro problemas propostas e destaca quais os desafios com que os alunos se depararam ao longo de todo o processo de resolução e discussão coletiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentadas uma síntese do estudo realizado, as principais conclusões e uma reflexão final.

Na síntese do estudo estão identificados, novamente, o objetivo do estudo e as questões orientadoras, bem como uma breve explicação da proposta pedagógica desenvolvida na turma do 4.º ano e da metodologia de investigação utilizada.

Nas conclusões do estudo tento dar resposta às duas questões orientadoras da investigação, considerando a análise de dados efetuada anteriormente, em articulação com o referido por autores de referência, já mencionados na revisão da literatura.

Finalmente, procuro refletir sobre o trabalho desenvolvido ao longo de todo o processo de investigação, assim como sobre o contributo deste estudo para a construção do meu perfil como profissional docente.

Síntese do estudo

A investigação desenvolvida decorreu no âmbito do estágio realizado numa turma de 4.º ano de escolaridade, do 1.º ciclo do ensino básico numa escola em Setúbal.

A pertinência deste estudo é fundamentada considerando a importância da resolução de problemas no currículo de matemática do ensino básico, considerada como uma das capacidades matemáticas transversais a ser desenvolvida "A resolução de problemas deve ser uma constante e apoiar tanto a abordagem aos conhecimentos matemáticos como oferecer oportunidades para a sua aplicação." (Canavarro et al., 2021, p. 9). A partir desta ideia, considerando que numa aula que segue uma metodologia de ensino exploratório os alunos têm oportunidade de exploração e construção do próprio conhecimento, elaborei uma proposta pedagógica utilizando esta metodologia. "O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva" (Canavarro, 2011, p. 11).

Deste modo, foi definido o objetivo de compreender como os alunos desenvolvem a capacidade de resolução de problemas a partir de práticas de ensino exploratório. Em articulação com este objetivo, foram então delineadas duas questões orientadoras:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas?
- Que desafios se colocam aos alunos durante a resolução de problemas e como são ultrapassados:
  - (i) na fase de apresentação do problema;
  - (ii) na fase de exploração autónoma;
  - (iii) na fase de discussão coletiva das diferentes resoluções.

Considerando o objetivo e as questões elaboradas, a metodologia de investigação adotada caracteriza-se por ser uma abordagem qualitativa e uma investigação sobre a prática. Os dados recolhidos correspondem às produções escritas dos alunos, onde estão registadas as suas estratégias de resolução dos quatro problemas propostos, bem como as suas intervenções no decorrer da aula, decorrentes da observação. Os dados foram analisados recorrendo à análise de conteúdo.

Em seguida, apresento as conclusões do estudo, organizadas consoante as questões orientadoras da investigação.

Conclusões do estudo

Estratégias de resolução de problemas usadas pelos alunos

A análise dos dados evidenciou que os alunos recorreram a diferentes estratégias de resolução nos problemas propostos. Em seguida irei categorizar as estratégias que surgiram por parte dos alunos durante a resolução dos problemas dinamizados em sala de aula, de acordo a proposta de estratégias de Boavida et al. (2008).

No primeiro problema “Quantos telefonemas” a estratégia a que os alunos mais recorreram foi “Fazer um desenho ou esquema”. Apesar de os tipos de representações de desenhos ou esquema serem variados, sendo uns de carácter mais incipiente e outros mais formais, agrupam-se todos na mesma categoria.

No problema 2 “O V mágico” os grupos utilizaram os números de 1 a 5 facultados no envelope para fazerem as suas tentativas para encontrar os V mágicos, registando-os depois na folha disponibilizada para esse efeito. Em seguida, de acordo com os resultados obtidos, analisaram-nos e tiraram as próprias conclusões. Por isso, a estratégia utilizada por todos os alunos neste problema foi “Fazer tentativas”, uma vez que através dessa estratégia foi possível descobrir os V mágicos.

No terceiro problema “Regularidades no calendário” os alunos selecionaram as cruzes necessárias e recorreram a cálculos e diferentes tentativas para encontrar as regularidades pretendidas. Considerei, assim, que os alunos utilizaram as estratégias “Fazer cálculos” e “Fazer tentativas”.

Na tabela 5 estão apresentadas as estratégias que surgiram no problema “Chupa-chupas”

Tabela 5

Estratégias analisadas no problema “Chupa-chupas”

Problema 4 – “Chupa-chupas”	
Estratégia 1	Fazer tentativas
Estratégia 2	Usar uma tabela
Estratégia 3	Fazer cálculos
Estratégia 4	Fazer um desenho ou esquema
Estratégia 5	Fazer tentativas

Na tabela 5 evidencia-se que surgiram estratégias mais variadas por parte dos alunos, sendo elas “Fazer tentativas” (utilizado duas vezes), “Usar uma tabela”, “Fazer cálculos” e “Fazer um desenho ou esquema”.

Deste modo, evidencia-se que a estratégia mais utilizada, globalmente pelos alunos foi “Fazer tentativas” e “Fazer desenhos ou esquemas”

Analisando as estratégias utilizadas, nota-se que os alunos foram diversificando as estratégias que foram recorrendo ao longo do tempo da investigação. Isto pode ter ocorrido pelo facto de no primeiro problema os alunos não conhecerem muitas possibilidades de estratégias de resolução de problemas e talvez por não estarem habituados a resolver problemas sem recorrerem a estratégias rotineiras. À medida que o reportório de estratégias dos alunos foi aumentando, sendo confrontados com as estratégias dos colegas na discussão coletiva, foram utilizando-as nas próprias resoluções. Tal como defendido por Boavida et al. (2008) “Grande parte dos alunos consegue descobrir os seus próprios processos de resolução” (p. 25). Neste sentido, o NCTM (2007) também sustenta esta ideia defendendo que “os alunos deverão tomar consciência dessas estratégias, à medida que vai surgindo a necessidade de as utilizar, e à medida que vão sendo modeladas nas atividades levadas a cabo na sala de aula” (p. 59).

Pelos factos mencionados anteriormente, evidencia-se que os alunos no primeiro problema acabaram por recorrer frequentemente à estratégia que os ajudou a tornar a resolução mais visual e, daí surgiram os desenhos e os esquemas. O desenho, segundo Smole e Diniz (2001) citado por Pinto e Canavarro (2012) “serve como recurso de interpretação do problema e como registo da estratégia de solução” (p. 5). Já os esquemas, de acordo com Pinto e Canavarro (2012) “podem ser encarados como representações da estrutura dos problemas e podem transformar-se em verdadeiras ferramentas de apoio ao pensamento matemático” (p. 5). Deste modo, esta estratégia demonstrou-se essencial para organizar o pensamento dos alunos, de forma a visualizarem o problema através de outra estrutura e encontrarem a melhor forma de resolverem o problema. Recorrendo a estas representações, os alunos conseguiram mostrar o seu processo de raciocínio o que os orientou até à resposta certa.

Relativamente à estratégia “Fazer tentativas”, que foi aumentando de frequência ao longo do tempo do estudo, Sousa e Mendes (2017) justificam a utilização desta estratégia pelo facto de “Muitas vezes, os alunos são confrontados com problemas em que não sabem por onde começar para os resolver e vão fazendo tentativas, experimentando de várias maneiras, tentando resolver o problema." (p. 247). Deste modo, esta estratégia mostra-se como um método eficaz para os alunos irem tentando chegar à solução do problema, fazendo tentativas sucessivas.

Creio também que os alunos sabem distinguir quando fazer tentativas é eficiente ou não. No caso do primeiro problema "Quantos telefonemas" os alunos entenderam que não era eficaz tentar um telefonema, depois dois telefonemas, três telefonemas, e por adiante. Já no caso do problema "Chupa-chupas" os alunos fizeram tentativas bem pensadas segundo o contexto do problema. Pelo contrário, no "V mágico" os alunos utilizando os números facultados, fizeram tentativas irrefletidas até encontrarem hipóteses que se adequavam ao contexto.

Concluo que os alunos recorreram a estratégias apropriadas e eficientes para resolverem os problemas com que se foram deparando.

Assim, de modo a responder à questão orientadora da investigação "Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas?" conclui-se que, na resolução dos problemas propostos:

- As estratégias mais frequentemente utilizadas pelos alunos foram "Fazer tentativas" e "Fazer esquemas/desenhos"
- Outras estratégias que surgiram por parte dos alunos foram "Fazer cálculos" e "Usar uma tabela"

Desafios colocados aos alunos em cada uma das fases do ensino exploratório

A análise de dados focada nos desafios que surgiram aos alunos durante a dinamização dos problemas, nas três fases do ensino exploratório, evidencia que alguns são mais frequentes do que outros.

Na fase de apresentação do problema, o desafio mais frequente foi a dificuldade de compreensão do enunciado evidenciada pelos alunos.

A compreensão do enunciado do problema mostra-se como a primeira e mais importante etapa de resolução de problemas sugerida por Pólya. Esta etapa tem como objetivo "perceber o que é pedido para resolver" (Sousa & Mendes, 2017, p. 246). Assim, se os alunos não tiverem compreendido o que é pedido no problema não vão saber como o resolver. Procurei que, nesta fase, os alunos lessem o enunciado sozinhos e em seguida eu relia para a turma, respondendo a todas as suas perguntas. Na maior parte dos casos, as perguntas eram feitas para o grande grupo, uma vez que, ouvir as questões uns dos outros ajuda os alunos a "ouvir o que os outros pensam" e "irá reforçar a capacidade de identificar a questão" (O'Connell, 2007, p. 16, citado em Sousa & Mendes, 2017, p. 246).

Na fase de exploração autónoma surgiram desafios mais diversificados, porém comuns aos quatro problemas dinamizados.

Primeiramente, no caso de a compreensão do enunciado não ter sido bem conseguida na fase anterior, era imediatamente manifestado esse desafio nesta fase. Frequentemente, foi necessário explicar aos alunos que manifestaram dificuldades, a situação do problema de formas diversificadas. Tentei fazê-lo de modo a garantir a compreensão por parte dos alunos, geralmente recorrendo à dramatização da situação do enunciado.

Algo que ocorreu no primeiro problema, porém não foi observável nas restantes, foi o modo precipitado como alguns alunos começaram a realizar cálculos irrefletidos e ineficientes no que respeita ao contexto do problema. Acredito que, pelo facto de mais tarde terem sido introduzidas às etapas de resolução de problemas de Pólya, nomeadamente a etapa de "estabelecimento de um plano", em que os alunos delineiam uma estratégia que permita encontrar uma solução (Viseu et al., 2016), os tenha ajudado a refletir melhor e a evitar resoluções precipitadas. Efetivamente, os alunos parecem ter compreendido a importância de refletir acerca do melhor método da resolução de determinado problema e, além disso, a partilharem as suas ideias com o parceiro de grupo.

Outro desafio comum nesta fase foi a dificuldade dos alunos de encontrarem as regularidades presentes em cada um dos problemas. Cada um dos problemas tinha algum tipo de regularidade, porém o mais desafiante foi “O V mágico”, pois os alunos não compreenderam a justificação da regularidade que estava subjacente às soluções do problema. Perante esta dificuldade, auxiliei os alunos, colocando questões estratégicas que os ajudassem a chegar à solução sozinhos, porém nem todos conseguiram corresponder.

No entanto, o principal desafio com o qual uma grande parte dos alunos se confrontou foi trabalhar em grupo. Era evidente, em alguns grupos, um dos elementos se destacar com o “papel principal”, não partilhando os seus planos com os colegas e tomando as decisões individualmente. Além disso, sobretudo no início, havia alunos que afirmavam não saber resolver o problema e por isso deixavam o trabalho para os colegas. Principalmente durante a resolução do primeiro problema, esta grande discrepância de distribuição do trabalho de grupo foi bastante notória. Observei que, em alguns grupos, à medida que ia decorrendo o estudo, iam melhorando a sua dinâmica, mas noutros este desafio persistiu.

De uma forma geral, e provavelmente porque não estavam habituados, os alunos manifestaram grande dificuldade em trabalhar em cooperação com os seus pares e esta dificuldade foi evidente tanto nesta fase como na fase de discussão coletiva. Pelo facto de os alunos não terem participado igualmente na exploração do problema acontecia que na discussão coletiva não o sabiam explicar,

Na discussão coletiva, para além do desafio da desigualdade da distribuição do trabalho entre os vários elementos dos grupos, surgiram outros desafios relacionados com as apresentações dos alunos. Esta dificuldade surge associada a dois aspetos. Por um lado, alguns alunos são tímidos e não se expressam de forma tão inteligível como outros. Por outro lado, o facto de não estarem tão confiantes no trabalho que fizeram, gerou dificuldades na apresentação e partilha das resoluções de alguns dos grupos. Contudo, Ponte (2005) explicita que nesta fase os alunos "apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjeturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros" (p. 16). Tendo em conta este processo, evidencia-se que nesta fase se destacaram desafios, nomeadamente em "apresentar o seu trabalho" e "apresentar as suas justificações". Para auxiliar os alunos, procurei ir fazendo questões estratégicas com o objetivo de ajudar os alunos a justificarem e completarem as suas respostas.

No que diz respeito aos desafios com que se foram confrontando, os alunos foram evoluindo ao longo da investigação, à medida que iam ficando familiarizados com a dinâmica de trabalho, e foram conseguindo ultrapassar esses desafios autonomamente, sem grande necessidade de apoio da minha parte.

Assim, de modo a responder à questão orientadora da investigação "Que desafios se colocam aos alunos durante a resolução de problemas e como são ultrapassados" sistematizo os seguintes desafios, nas três fases da aula de ensino exploratório:

(i) na fase de apresentação do problema
- Compreender o problema

(ii) na fase de exploração autónoma
- Estabelecer um plano
- Organizar o registo da resolução
- Encontrar regularidades
- Trabalhar em colaboração com os seus pares

(iii) na fase de discussão coletiva das diferentes resoluções
- Fazer apresentações orais
- Justificar raciocínios efetuados

No sentido de apoiar os alunos a enfrentar as suas dificuldades, quando não as conseguiam ultrapassar de forma autónoma, fui auxiliando-os, questionando-os e fazendo-os refletir e compreender a resposta que procuravam. O papel que o professor assume na dinamização de uma aula de ensino exploratório é fundamental de acordo com Canavarro et al. (2012) que defendem que

> O professor precisa de criar um ambiente de aprendizagem que acolha todos os alunos, de gerir as suas participações e interações de modo que se relacionem produtivamente com o conteúdo matemático e as suas representações, de identificar e interpretar o que os alunos fazem e dizem de modo a orientá-los por trajetórias em que se possam desenvolver matematicamente. (Canavarro, et al., 2012)

Conclui-se que, nesta metodologia de ensino o professor precisa de orientar o trabalho dos alunos, direcionando-os no caminho certo e foi isso que eu tentei fazer ao longo da realização deste estudo, apoiando-os no sentido de ultrapassar os desafios que foram surgindo.

Reflexão sobre o estudo

Ao refletir acerca de todo o trabalho desenvolvido em torno deste projeto, sinto um grande privilégio por todas as aprendizagens e desafios que me proporcionou e as quais irei levar sempre comigo como profissional.

Primeiramente, por ter conseguido cativar aquela turma e possibilitar que a matemática se tenha tornado em algo um pouco mais divertido. A turma mostrou-se motivada e ativa no trabalho que tinham de fazer, o que me permitiu obter um resultado positivo neste estudo e proporcionar aprendizagens aos alunos.

Em conversa final com os alunos, questionei-os acerca daquilo que tinham gostado mais, tendo eles identificado os problemas que gostaram mais de resolver e porquê. Grande parte disse que gostou mais do problema

“Regularidades no calendário”, apesar de ter sido o mais demorado. A C. afirmou que gostou “da forma como nos obrigava a resolver o problema sem percebermos”. O argumento de quem gostou mais do “V mágico” foi que, apesar de ser difícil, “as «bolinhas» (números em cartões circulares) ajudaram a ver melhor”. Outros referiram o problema “Quantos telefonemas”, justificando que era mais fácil. Relativamente ao “Chupa-chupas” o T. disse que gostou porque “parecia um jogo”. Ver os alunos entusiasmados e ouvir as suas explicações sobre os problemas de que gostaram mais foi algo que me fez sentir muito realizada.

Quando questionados o que é que tinha sido mais difícil, os alunos referiram imediatamente “Trabalhar em grupo”. Evidencia-se que este foi o maior desafio para muitos dos alunos e alguns não conseguiram evoluir no trabalho desenvolvido com os seus pares. Porém, alguns alunos referiram que foi mais fácil trabalhar estes problemas em pares porque “conseguiam os dois pensar melhor” sobre a melhor solução para um problema.

Os principais desafios pessoais foram a dinamização da aula, principalmente a primeira vez, onde, por exemplo a compreensão dos alunos sobre o problema proposto ficou aquém do esperado. Isto porque eu apenas li o problema, não levantei muitas questões e os alunos também não. Tornou-se evidente que os alunos não tinham compreendido o problema na fase da exploração pois surgiram as mesmas perguntas por parte de vários alunos, tendo de explicar aos pequenos grupos e ao grande grupo de novo. Comprometi-me nos problemas seguintes a dedicar mais tempo à apresentação do problema para conseguir uma melhor compreensão por parte dos alunos.

Sinto que consegui desenvolver este projeto da forma que imaginava, em conjunto com a professora orientadora, escolhendo bons problemas para desenvolver com a turma. Foi possível também ter o tempo necessário para dinamizar uma aula de ensino exploratório para cada um dos problemas, o que me permitiu compreender a eficácia desta metodologia de ensino.

Sem dúvida que levo este método de ensino para as minhas futuras aulas de matemática, pois permite-me explorar um problema de várias perspetivas diferentes e possibilita aos alunos aprofundarem os seus conhecimentos matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Afonso, N. (2005). *A Investigação Naturalista em Educação: um guia prático e crítico*. ASA.

Amado, J. (2017). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Edições 70.

Boavida, A. M., & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. *Investigação em Educação Matemática — Práticas de ensino da Matemática*, 287-295.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008*). A experiência matemática no ensino básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. ME-DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118. http://hdl.handle.net/10174/4301

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais Matemática*. Direção-Geral de Educação.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). *Práticas de ensino exploratório da matemática: e caso de Célia*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Delgado, C., Brocardo, J. & Mendes, F. (2022). *Desenvolver o Raciocínio Matemático dos Alunos: Práticas e Desafios.* Projeto REASON.

Lopes da Silva, M. I. (2013). Prática educativa, teoria e investigação. *Revista Interações 9(*27), 283-304. https://doi.org/10.25755/int.3412

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., Rodrigues, S. (2017). *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Direção Geral da Educação.

Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didática da Matemática*. Universidade Aberta.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (M. Melo, Trad.). Associação de Professores de Matemática (Obra original publicada em 2000).

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22*(2), 29–54. https://doi.org/10.48489/quadrante.22895

Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque (Org.) Práticas de investigação em Educação. Departamento de Pedagogia e Educação.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In (Org.) *Refletir e investigar sobre a prática profissional*, 5-28. APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In *O professor e o desenvolvimento* (GTI ed., 11-34). APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante, 24*(2), 111-134.

Richardson, R. (1999). *Pesquisa social: métodos e técnicas* (3ª ed.) Editora Atlas.

Vale, I., (1997). Desempenho e conceções de futuros professores de matemática na resolução de problemas. In GIRP (Ed.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: múltiplos contextos e perspetivas*, 1-37.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, *24*(2), 39–60. https://doi.org/10.48489/quadrante.22923

Viseu, F., Fernandes, J. A., & Gomes, A. (2016). A resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da matemática. In Lulu, Raleigh, N. C., *Resolução de problemas de Geometria*, 3-17. https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/55403

ANEXOS

Anexo 1

Formulário de Consentimento Informado

Formulário de Consentimento Informado

Curso: Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º ciclo do Ensino Básico

Título dos Estudos:

A importância do feedback no ensino da Matemática

A resolução de problemas através da prática do ensino exploratório

Nome das investigadoras:

Margarida Piedade e Marta Silva

Nome das Orientadoras:

Joana Cabral e Fátima Mendes

Eu, ____________________________, encarregado de educação do/a aluno/a ______________________ declaro que

☐ Autorizo

☐ Não autorizo

a participação do meu/minha educando/a nos estudos "A importância do feedback no ensino da Matemática" e "A resolução de problemas através da prática do ensino exploratório".

Além disso, declaro que autorizo **a gravação de áudio e recolha de fotografias, sem visualização do rosto,** dos diversos momentos de participação nos estudos mencionados anteriormente, que decorrem no âmbito do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º CEB da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal. Compreendo que a participação do meu/minha educando/a é voluntária, não acarreta custos, vantagens ou desvantagens, e que tenho o direito a interromper, a qualquer momento, a recolha de áudio e fotografias, sem quaisquer penalizações.

Declaro ainda que compreendi que toda a informação fornecida e adquirida no âmbito destes projetos será: confidencial, anónima e utilizada apenas para fins de investigação científica do Mestrado.

Os resultados dos estudos serão divulgados no âmbito da apresentação do Relatório dos Projetos de Investigação, nunca sendo os participantes identificados de forma individual. **Eventualmente, os resultados poderão ser apresentados/publicados em conferências/revistas da especialidade, de forma agregada, garantindo a impossibilidade de individualizar as respostas de cada participante.**

Por fim, declaro ter lido e compreendido este documento.

___/___/______, ____
(data) (assinatura do encarregado de educação)

___/___/______, ____
(data) (assinatura da responsável pelo projeto "A importância do feedback no ensino da Matemática")

___/___/______, ____
(data) (assinatura da responsável pelo projeto "A resolução de problemas através da prática do ensino exploratório")

Este documento será impresso em duplicado de forma que o original seja anexado no processo de recolha de dados sendo o duplicado fornecido ao participante do estudo.

Anexo 2

Enunciado do problema "Quantos telefonemas"

Quantos telefonemas?

Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros a felicitarem-se. Descobre quantas chamadas tiveram de fazer os cinco amigos para se felicitarem todos entre si.

E se fossem seis amigos? E se fossem sete?

Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos?

Canavarro, A. P. (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.* Quadrante XVI, 2, 81-118

Anexo 3

Enunciado adaptado do problema "Quantos telefonemas"

Quantos telefonemas?

Quatro alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros a felicitarem-se. Descobre quantas chamadas tiveram de fazer os quatro amigos para se felicitarem todos entre si.

E se fossem cinco amigos? E se fossem seis?

Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos?

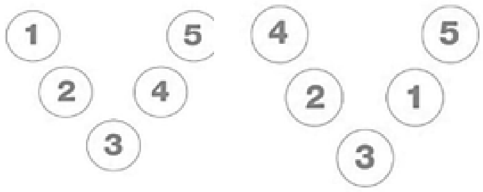
Canavarro, A. P. (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.* Quadrante XVI, 2, 81-118

Anexo 4

Enunciado do problema “O V mágico”

O V mágico

Os dois V seguintes são formados pelos números de 1 a 5.



O segundo V é mágico porque as somas dos dois “braços” do V são iguais, ou seja:

4 + 2 + 3 = 5 + 1 + 3

1. Usa os cartões que tens (cartões circulares e numerados de 1 a 5) para formar outros V mágicos e regista−os na tua folha de registo.

2. Consegues formar algum V mágico cujo vértice seja 2? Porquê?

3. O Gonçalo diz que num V mágico o vértice tem sempre de ser ímpar. Concordas com o Gonçalo? Porquê?

Delgado, C., Mendes, F., & Mata-Pereira, J. (2022). Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º ciclos: Números. REASON Raciocínio Matemático e Formação de Professores

Anexo 5

Enunciado do problema "Regularidades no calendário"

Regularidades no calendário

1. Observem a folha de calendário representada na tabela.

D	S	T	Q	Q	S	S
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

1.1. Observem a "cruz" sombreada e adicionem todos os números contidos no seu interior.

1.2. Repitam esse processo para todas as outras cruzes que encontrarem.

1.3. Qual a relação entre a soma obtida e o número que está no centro da "cruz"?

1.4. Somem as extremidades horizontais ou verticais de cada "cruz". Qual a relação com o número que está no centro da "cruz"?

1.5. Organizem a informação que descobriram.

Tarefa incluída em Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, C. Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Anexo 6

Enunciado do problema “Chupa-chupas”

Chupa-chupas

O Pedro e a Rute receberam um saco de chupa-chupas. Partilharam os chupa-chupas entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram os seus amigos Francisco, Sara e Gonçalo que também queriam chupa-chupas.

Decidiram então partilhá-los novamente e sobraram 2 chupa-chupas. Quantos chupa-chupas podiam estar no saco?

Explica como pensaste e justifica a tua resposta.

Tarefa adaptada de Delgado et al., (2022)