

RACIOCINANDO MATEMATICAMENTE NO 5º ANO DE ESCOLARIDADE: OS PROBLEMAS ENQUANTO PONTO DE PARTIDA

Carina Oliveira

carina_oliveira@hotmail.com

Ana Maria Roque Boavida

Escola Superior de Educação de Setúbal

ana.boavida@ese.ips.pt

Resumo: A comunicação que se apresenta decorre de um estudo mais amplo, realizado pela primeira autora, cujo objetivo foi analisar e compreender o raciocínio matemático de alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de problemas com números racionais não negativos. Do ponto de vista metodológico, o estudo enquadra-se no paradigma interpretativo e constitui uma investigação sobre a prática. Os dados foram obtidos através de entrevistas clínicas realizadas a dois alunos, de recolha documental e de observação participante. Esta observação esteve associada a uma intervenção pedagógica, com a duração de cinco semanas, concretizada pela referida autora durante o seu estágio. Nesta intervenção foram propostos vários problemas visando introduzir e trabalhar conteúdos matemáticos, associados aos números racionais, cujas resoluções eram objeto de discussões coletivas. Os resultados da investigação mostram que os alunos envolvidos no estudo evidenciam atividades associadas ao raciocínio matemático como a explicação, a justificação, a formulação de conjeturas e a generalização aquando a exploração das tarefas propostas. As atividades mais frequentes foram a explicação e a justificação, tendo a formulação de conjeturas e a generalização surgido com menos frequência. Os conhecimentos matemáticos e as representações utilizadas pelos alunos revelaram-se importantes recursos de apoio do seu raciocínio matemático.

Palavras-chave: Aprendizagem da Matemática; Raciocínio matemático; Problemas.

Introdução

É amplamente consensual que se se pretende que os alunos aprendam Matemática com compreensão é essencial que participem em atividades que envolvam raciocínio matemático (Henriques, 2012; NCTM, 2007). De facto, o raciocínio e a construção de sentido para ideias matemáticas são dois aspetos profundamente interligados ao longo de um continuum que vai de observações informais a deduções formais (NCTM, 2009). Estes aspetos são importantes em qualquer prática matemática quer esta se equacione ao nível do trabalho dos matemáticos quer ao da sala de aula seja qual for o conteúdo e nível de ensino.

Trazer para primeiro plano o raciocínio matemático conduz à importância do ensino deixar de ser conceptualizado como transmissão de conhecimentos a memorizar, independentemente dos alunos lhe atribuírem sentido, para passar a focar-se na compreensão do “porquê das coisas” (Boavida, 2008). Esta mudança de perspetiva requer, por um lado, a elucidação do que significa raciocinar matematicamente e, por

outro, a identificação de recursos que permitam ao professor favorecer e apoiar esta atividade.

O raciocínio em Matemática é entendido, amiúde, como raciocínio formal, ou prova, em que se parte de hipóteses e definições para se deduzirem conclusões. Esta é, no entanto, uma visão bastante redutora. “O raciocínio matemático pode assumir muitas formas, que vão desde explicações e justificações informais a deduções formais, bem como a observações indutivas” (NCTM, 2009, p. 4). Trata-se de “um processo evolutivo de conjecturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos” (Lannin, Ellis & Elliott, 2011, p. 12). Este processo, que não é linear, envolve ser capaz de resolver problemas e compreender porque é que certas ideias e resultados são, ou não, matematicamente apropriados.

Os problemas, entendidos como tarefas matemáticas cuja solução não é alcançável através da aplicação direta de conhecimento imediatamente disponível (Lampert, 2001), a par do envolvimento dos alunos na sua resolução e discussão, são, pois, um dos recursos que os podem impulsionar a raciocinar matematicamente. Como bem referem Yackel e Hanna (2003), “o raciocínio matemático é uma atividade coletiva em que os alunos participam enquanto interagem uns com os outros para resolver problemas matemáticos” (p. 228).

A presente comunicação inscreve-se num estudo mais amplo em que o principal objetivo foi analisar e compreender o raciocínio matemático de alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de problemas envolvendo números racionais não negativos (Oliveira, 2015). Neste âmbito, formularam-se três questões. A primeira focada na caracterização do raciocínio usado durante a resolução de problemas, a segunda nos conhecimentos e representações a que recorreram para o explicitar e a terceira nas dificuldades experienciadas. Este texto centra-se na primeira destas questões. Está organizado em seis secções de que a introdução é a primeira e a conclusão a última. Nas segunda e terceira referem-se aspetos do enquadramento teórico do estudo. Na quarta indicam-se as principais opções metodológicas e na quinta analisam-se dados relativos a dois dos problemas propostos no âmbito de uma intervenção pedagógica.

Raciocínio matemático: de que falamos?

Não é simples escrever sobre raciocínio matemático pois este termo “é amplamente usado tendo subjacente a hipótese implícita que há acordo universal sobre o seu significado (...) a maior parte dos matemáticos e educadores matemáticos usam o termo sem o clarificarem” (Yackel & Hanna, 2003, p. 228).

Tipicamente, distinguem-se dois tipos fundamentais de raciocínio: o indutivo e o dedutivo (Pimental & Vale, 2012). No primeiro tipo vai-se do particular para o geral, isto é formula-se uma generalização com base na identificação do que é comum a vários casos. No segundo, há uma relação de necessidade lógica entre o que se aceita como válido (premissas) e a conclusão. Há autores que referem, ainda, o raciocínio abduutivo considerando a abdução como “uma inferência não necessária (...) uma hipótese explicativa prévia” (idem, p. 38) em que as generalizações surgem a partir do estabelecimento de relações entre vários aspetos de uma situação.

Considera-se, amiúde, que “o raciocínio matemático é por excelência o hipotético-dedutivo” (MEC, 2013, p.4). No entanto, colocar em primeiro plano este tipo de raciocínio negligenciando, nomeadamente “processos intuitivos, observações indutivas, explicações, justificações e métodos informais de matematização, é caminhar em

sentido contrário ao que fez progredir a Matemática, eliminando bases poderosas para a aprendizagem” (Boavida, 2015, p. 1).

Lannin, Ellis e Elliott (2011), apresentam um modelo do processo de raciocínio matemático (fig. 1) que é útil para discernir atividades envolvidas neste processo que, como sublinham, não é fácil de compreender pelos alunos.



Figura 1. Um modelo do processo de raciocínio matemático (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011, p.11)

A figura 1 revela que raciocinar matematicamente é um processo cíclico que começa, muitas vezes, com a formulação de conjecturas; posteriormente, estas são analisadas procurando identificar razões que permitam fundamentar porque é que são, ou não, válidas para, se necessário, voltar a revê-las. Uma vez que o processo é dinâmico, os alunos podem mover-se entre as várias atividades em qualquer momento do ciclo.

Conjeturar e generalizar. “Conjeturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver enunciados que provisoriamente se pensa serem verdadeiros, embora não se saiba se o são” (Lannin, Ellis & Elliott, 2011, p. 12). Esta atividade é central em Matemática e é inquestionável a sua importância para a aprendizagem. O envolvimento dos alunos na formulação de conjecturas permite-lhes “aprender Matemática nova e compreender a Matemática que já aprenderam e usaram” (Henriques, 2012, p. 141).

As “conjeturas podem ou não ser generalizações” (Lannin, Ellis & Elliott, 2011, p. 14). Se, por exemplo, um aluno souber que 58 e 45 são números menores que 1, pode conjecturar que $58+45$ é um número menor que 2 e formular uma nova conjectura que é uma generalização: a soma de uma fração menor que 1 com outra menor que 1, é sempre menor que dois. “Os alunos generalizam quando se focam num aspeto particular de um problema ou numa ideia e pensam nesse aspeto de forma mais abrangente” (*idem*, p. 16).

Investigar porquê. Para além de formularem e investigarem conjecturas “os alunos deverão aprender a responder à questão *Porque é que isto resulta?*” (NCTM, 2007, p.63). Esta atividade remete para “investigar diversos fatores potenciais que podem explicar *porque é que* uma generalização é verdadeira ou falsa” (Lannin, Ellis & Elliott, 2011, p. 12). Trata-se de um “eixo essencial no raciocínio matemático” (*idem*, p. 30) que inclui atender a aspetos particulares que proporcionem *insights* sobre relações passíveis de permitir encontrar a referida explicação.

Justificar ou refutar. “Uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas” (Lannin, Ellis & Elliott, 2011, p. 35). Os alunos apresentam justificações “para se convencerem a si próprios e aos outros sobre o porquê de uma afirmação particular ser verdadeira” (*idem*) e, com frequência, as suas tentativas iniciais para enunciar justificações incluem afirmações válidas e inválidas ou que precisam de

ser mais aprofundadas. Independentemente disto, esta atividade não pode ser descurada pois a justificação é “um elemento central no raciocínio matemático” (Henriques, 2012, p. 141) que “não só fornece razões convincentes para as conjecturas estabelecidas, como permite aos alunos tornar o seu raciocínio claro e aumentar a sua compreensão conceptual” (*idem*).

Quando se justifica que uma afirmação é falsa, está-se a refutá-la. Para o efeito, basta encontrar um contraexemplo. Esta ideia nem sempre é de simples compreensão pois vai em sentido contrário à experiência do dia a dia: “em muitos casos, os alunos não consideram um contraexemplo suficiente para falsificar uma conjectura (...) em Matemática, contudo, é importante reconhecer que um único contraexemplo pode invalidar uma conjectura” (Lannin, Ellis & Elliott, 2011, p. 43).

A atividade de justificar “envolve várias componentes importantes” (Henriques, 2012, p. 141) entre as quais estão “criar argumentos, explicar porque é que são verdadeiros e compreender o papel das definições e contra-exemplos” (*idem*). Deste modo, explicar e argumentar são duas atividades relevantes no processo de raciocínio matemático, tanto mais que, na aula, a atividade de justificar aparece, muito frequentemente, entrelaçada com a de explicar (Boavida *et al.*, 2008).

Explicar não é, meramente, dizer ou descrever. Trata-se de um discurso que visa tornar inteligível para outros o que se pensou e que pode não ser prontamente evidente (Yackel, 2001). A argumentação em Matemática é “uma tentativa de justificar uma ideia, ou um conjunto de enunciados, a partir daquilo que se crê como verdadeiro, um processo em que as inferências se apoiam, principalmente, sobre os conteúdos daquilo que se enuncia” (Boavida *et al.*, 2008, p. 84). Esta atividade pode não conduzir, necessariamente, a conclusões verdadeiras mas tem por base ideias consideradas verdadeiras por quem argumenta.

Em Matemática, a função primeira da argumentação é a justificação tal como acontece com a prova matemática, embora nesta não sejam admitidos certos tipos de raciocínio que são legítimos na argumentação (por exemplo, raciocínios por analogia) (Boavida, 2005). Como referem Sowder e Harel (1998), as provas matemáticas são, talvez, o derradeiro objetivo das justificações. Estes autores apresentam a noção de *esquema de prova* do aluno indicando que se refere a tudo o que constitui, para esse aluno, confirmação (convencer-se a si próprio) e persuasão (convencer outros). Sublinham que, nesta expressão, a palavra prova deve ser entendida num sentido abrangente, ou seja, “no sentido psicológico de justificação em vez de no sentido mais restrito de prova matemática” (p. 670). Neste âmbito, organizam os esquemas de prova em três categorias: (i) esquemas de prova baseados externamente, (ii) esquemas de prova empíricos e (iii) esquemas de prova analíticos. Nos primeiros, tanto o que convence os alunos como o que estes usam para convencer os outros está numa fonte exterior. Esta fonte pode ser, por exemplo, uma autoridade como acontece num esquema de prova autoritário. Os empíricos caracterizam-se por serem justificações baseadas em exemplos sejam estes desenhos (esquema de prova perceptual) ou não (esquema de prova baseado em exemplos). Os esquemas de prova analíticos são justificações mais elaboradas matematicamente. Alunos que os usam preocupam-se com os aspetos gerais de uma situação e o seu raciocínio é orientado para estabelecer a validade de afirmações para o caso geral.

Criar condições para o desenvolvimento do raciocínio na aula

Desenvolver hábitos de raciocínio. O raciocínio matemático desenvolve-se, gradualmente, ao longo da escolaridade pelo que colocá-lo em primeiro plano implica

proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que lhes permitam desenvolver hábitos de raciocínio matemático (NCTM, 2009). “Um *hábito de raciocínio* é uma forma produtiva de pensar que se torna comum no processo de pesquisa matemática e de construção de sentido (*idem*, p. 9). Segundo o NCTM (2009), entre estes hábitos estão:

- *Analisar um problema*: por exemplo, identificar conceitos, procedimentos ou representações que revelam informação importante sobre o problema e contribuem para a sua resolução; fazer deduções preliminares e formular conjecturas;
- *Implementar uma estratégia*: por exemplo, usar intencionalmente procedimentos; fazer deduções lógicas baseadas no que se vai fazendo; monitorizar o progresso;
- *Procurar e usar conexões* entre diferentes domínios matemáticos, contextos e representações;
- *Refletir sobre a solução do problema*: por exemplo, interpretar a solução; considerar a sua razoabilidade; justificá-la ou validá-la.

Para que os alunos desenvolvam os hábitos de raciocínio referidos, é fundamental que o professor, nomeadamente proponha tarefas que exijam que descubram coisas por si próprios; lhes solicite que expliquem um problema por palavras suas, incluindo hipóteses que tenham formulado; os questione de forma a incentivar o seu pensamento – por exemplo, “porque é que isto funciona?”; lhes dê tempo para que analisem um problema intuitivamente e possam refletir sobre questões; os encoraje a colocarem a si próprios e a outros perguntas que os façam pensar mais profundamente; os incentive a comunicarem o seu raciocínio usando vocabulário matemático apropriado; estabeleça, na aula, “um ambiente em que os alunos se sintam confortáveis a partilhar os seus argumentos matemáticos e a criticar, de forma produtiva, os argumentos de outros” (NCTM, 2009, p. 11).

Selecionar tarefas matemáticas criteriosamente. Os professores propõem tarefas com diversos propósitos entre os quais estão introduzir novas ideias matemáticas e praticar destrezas aprendidas. Seja qual for o propósito, não há dúvidas que as tarefas “fornecem os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos” (Ponte, 2014, p. 16) pois “exprimem mensagens sobre o que é a matemática e o que significa fazer Matemática” (Henriques, 2012, p. 144).

Há diferentes tipos de tarefas matemáticas e cada tipo tem as suas potencialidades. Além disso, uma tarefa não determina a atividade dos alunos pois é fundamental a forma como é explorada na aula. No entanto, não descurando que “actividades de carácter argumentativo podem surgir mesmo no âmbito da resolução de exercícios, se o professor estiver atento aos acontecimentos da aula e os rentabilizar incentivando a apresentação de explicações e justificações” (Boavida, 2005, p. 896), se os alunos “forem desafiados, a um nível adequado, com tarefas não rotineiras (...) as oportunidades para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e a sua aprendizagem saem reforçadas” (Henriques, 2012, p. 144). Assim, se se pretende que estes raciocinem matematicamente, é importante propor tarefas que os desafiem cognitivamente “dando-lhes oportunidade de investigar, analisar, explicar, conjecturar e justificar o seu raciocínio e interagir com os seus colegas” (*idem*). Os problemas enquadram-se neste tipo de tarefas. Como refere Santos (2013), propor problemas aos alunos e desafiá-los a envolverem-se na sua resolução é “um meio favorável ao desenvolvimento (...) do raciocínio matemático” (p. 26).

Diversificar representações e conectá-las. Quaresma e Ponte (2013), defendem que “só é possível compreender o modo de pensar e de raciocinar dos alunos observando as suas representações” (p. 279).

No essencial, “pode descrever-se uma representação matemática como uma construção mental ou física que descreve aspetos da estrutura inerente de um conceito e as inter-relações entre o conceito e outras ideias” (Tripathi, 2008, p. 438). Neste âmbito, “uma representação pode incluir componentes concretas, verbais, numéricas, gráficas, contextuais, pictóricas ou simbólicas, que retratam aspectos de um conceito” (*idem*). Apesar de, na literatura, surgirem várias categorizações de representações, há uma ideia que é comum: a importância das conexões entre diferentes representações pois “representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações ou conceitos complexos” (NCTM, 2007, p. 77).

Possibilitar que os alunos contactem e usem diversas representações do conhecimento matemático, incentiva-os a criarem as suas próprias representações para resolver problemas (Coelho, 2010). Além disso, ao interpretarem representações dos alunos, os professores poderão aperceber-se do seu raciocínio e do conhecimento que têm sobre conceitos matemáticos (NCTM, 2007).

Metodologia

Face ao objetivo do estudo de que esta comunicação decorre, optou-se por enquadrá-lo, do ponto de vista metodológico, numa abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e num paradigma interpretativo (Erickson, 1986). Além disso, porque o estudo foi realizado, pela primeira autora, durante o seu estágio em que concebeu e concretizou uma intervenção pedagógica, constitui uma investigação sobre a própria prática (Ponte, 2002).

Esta intervenção decorreu num período de cinco semanas numa turma do 5.º ano. Entre os seus objetivos estavam ajudar os alunos a compreender conteúdos relacionados com os números racionais, a mobilizar os seus conhecimentos na resolução de tarefas de diverso tipo e a criar condições para que raciocinassem matematicamente tendo por ponto de partida problemas matemáticos. A figura 2 ilustra o modo como estas tarefas foram exploradas nas aulas.

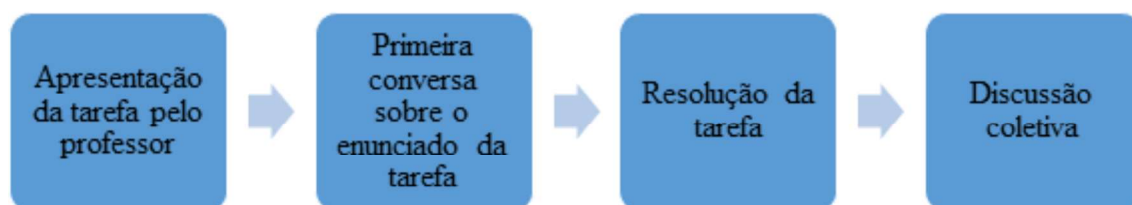


Figura 2. Etapas da exploração das tarefas matemáticas em sala de aula.

Uma das técnicas de recolha de dados foi a observação participante: todas as aulas da intervenção pedagógica foram registadas em vídeo e áudio e, sobre cada uma, elaboraram-se notas de campo. Além disso, foram recolhidas produções dos alunos associadas à resolução de tarefas propostas. Ademais, e porque se pretendia obter um conhecimento mais aprofundado acerca dos raciocínios matemáticos de alunos do 5.º

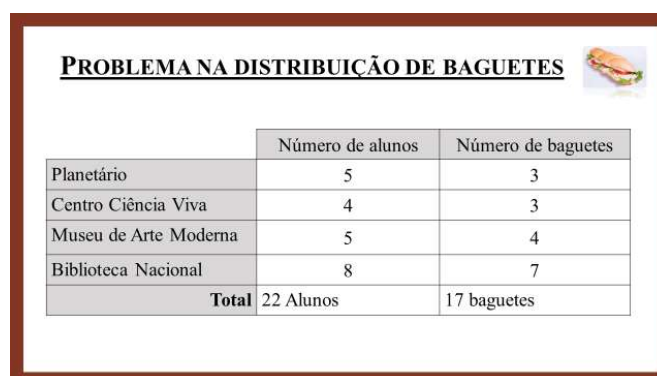
ano, optou-se por realizar quatro entrevistas clínicas (Hunting, 1997) a cada uma de duas alunas: Filipa e Márcia. Nestas entrevistas, também registadas em vídeo e áudio, foram revisitadas duas tarefas apresentadas na aula (*Problema na distribuição de baguetes* e *Terrenos nas aldeias*) e propostos novos problemas. Com base nos dados recolhidos durante a intervenção e nas entrevistas, que foram objeto de uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas, foram elaborados dois estudos de caso instrumentais: um por aluna.

Os problemas como promotores do raciocínio matemático

Nesta secção apresentam-se dois dos problemas propostos e analisam-se aspetos da atividade matemática dos alunos no decurso da sua resolução procurando dar evidência a raciocínios que emergiram.

Problema na distribuição de baguetes

Esta tarefa (anexo 1) surge na primeira aula da intervenção pedagógica. Foi apresentada recorrendo a um diapositivo (fig. 3) em que a turma poderia visualizar o número de alunos de cada grupo que participou numa visita de estudo bem como a quantidade de baguetes que lhe foi distribuída. Pretendia-se analisar se a distribuição foi justa e descobrir que quantidade de baguete coube a cada pessoa. A tarefa foi considerada um problema uma vez que os alunos tinham um conhecimento bastante elementar sobre o conceito de fração³.



	Número de alunos	Número de baguetes
Planetário	5	3
Centro Ciência Viva	4	3
Museu de Arte Moderna	5	4
Biblioteca Nacional	8	7
Total	22 Alunos	17 baguetes

Figura 3. Diapositivo com a distribuição de baguetes por cada grupo de alunos

Após a apresentação da tarefa, seguiu-se uma discussão no sentido de perceber se os alunos consideravam justa a distribuição de baguetes e de se chegar a um consenso sobre o significado de “justo”. Estes não hesitaram em dizer que não tinha havido justiça e, de imediato, sugeriram que teriam de aumentar o número de baguetes para que cada pessoa comesse uma. O verdadeiro desafio surgiu quando foram confrontados com a impossibilidade dessa ideia (episódio 1).

Episódio 1

1. **P⁴**: Cada um comia uma. Mas pronto, já vimos que isso não é possível. O que é que vocês acham...

³ Usa-se o termo fração para designar um número representado sob a forma de fração.

⁴ P – Abreviatura de Professora.

- (...)
2. **Filipa:** Não. Vamos dividir as baguetes pelo número de alunos.

(...)

 3. **P:** Há algum grupo que come mais ou comem todos o mesmo?
 4. **Filipa:** O da biblioteca nacional come mais.
 5. **P:** Porquê?
 6. **Filipa:** Porque tem mais baguetes.
 7. **P:** Então e em relação ao número de alunos?
 8. **Joana:** São mais do que as baguetes.
 9. **P:** Diz lá Daniela.
 10. **Daniela:** Nos outros [grupos] também são mais alunos do que baguetes.
 11. **P:** O que é que é ser justo? O que é que significa ser justo?
- (TA⁵)

O episódio revela que os alunos interpretaram o problema e começaram a partilhar ideias para a sua resolução. Por exemplo, Filipa (§2) apresenta uma pista que pode permitir resolver a tarefa; em seguida elege um dos grupos como sendo aquele em que cada pessoa “come mais” (§4) mas a justificação que apresenta (§6) é rebatida por uma colega (§10). Por esta via, começa a esboçar-se a ideia de que não se podem considerar os números (de baguetes e de alunos) separadamente e têm que se relacionar.

Após o episódio 1, a turma foi dividida em grupos sendo pedido a cada um que construísse um cartaz para apresentar, posteriormente, as estratégias de resolução. No início desta apresentação foi muito difícil estabelecer um clima de discussão coletiva que era algo a que os alunos estavam pouco habituados. Não questionavam os colegas que apresentavam as suas resoluções e, na maioria das vezes, dirigiam as questões à professora. Apesar disso, a apresentação e análise dos cartazes, constituiu um momento importante para que raciocinassem matematicamente uma vez que, para além de verbalizarem a forma como pensaram o que incrementou a possibilidade de reflexão sobre as estratégias utilizadas, permitiu o estabelecimento de conexões entre diferentes estratégias e representações.

Apresentam-se, em seguida, cartazes elaborados pelos grupos de Filipa e de Márcia bem como o que dizem estas alunas sobre os modos como pensaram.

⁵ TA designa transcrição de um episódio de aula.

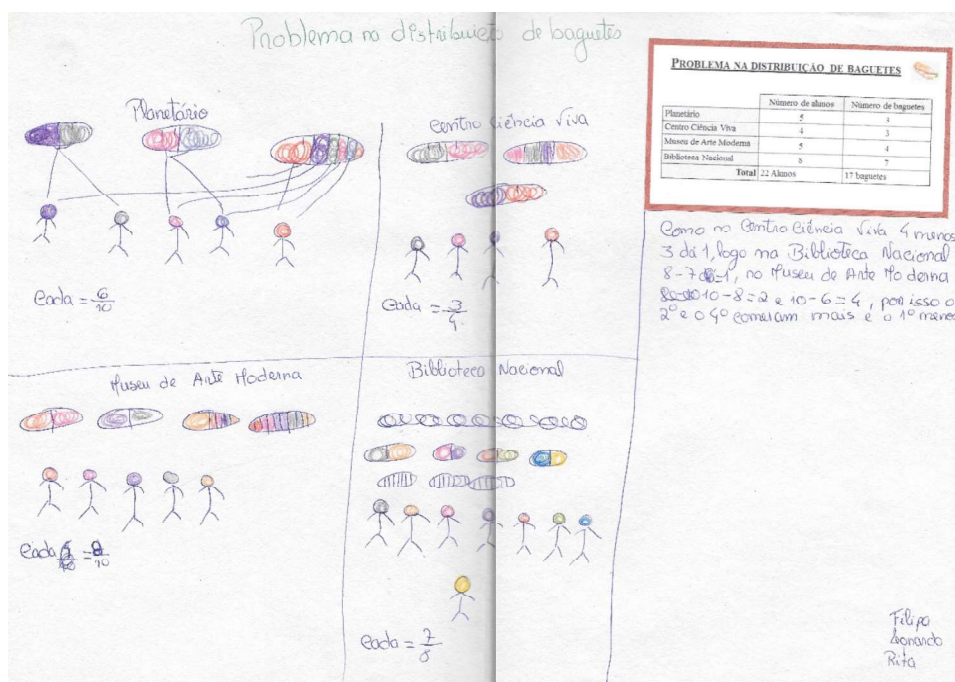


Figura 4. Cartaz do grupo de Filipa

Episódio 2

1. **Filipa:** Nós fizemos o número de alunos e o número de baguetes [referindo-se à fig. 4]. Depois dividimos as baguetes ao meio e deu uma metade para cada um e sobrou outra metade que dividimos em cinco porque eram cinco alunos. E então, como este equivale a cinco, este também equivale. Então, cada metade equivale a cinco [partes] logo é dez, cada baguete. Então comiam seis décimos porque comiam um bocadinho daqui e um bocadinho daqui, então era seis décimos.
2. **P** (apontando para metade da baguete): Então qual é a fração deste bocadinho?
3. **Filipa:** É um meio.
4. **P:** Um meio ... e como é que juntaste um meio com ... Isto é o quê? Qual é a fração deste bocadinho [apontando para uma das divisões de baguete correspondente a 1/10]?
5. **Filipa:** Um décimo.
6. **P:** Como é que sabes que é um décimo?
7. **Filipa:** Porque se este está dividido em cinco, este também devia estar dividido em cinco.
8. **P:** Então, no total ... explica lá melhor.
9. **Filipa:** No total é dez porque aqui tem cinco. Cinco mais cinco dá dez.

(EF1⁶)

Analisando a figura 4 e o episódio 2, constata-se que Filipa explica a forma como o seu grupo pensou para distribuir três baguetes por cinco alunos (§1). Além disso, porque sabe que se uma metade está dividida em cinco partes, o total terá de ter dez partes, justifica que 15 de uma metade é igual a 110 e que 12 é igual a 510 recorrendo a argumentos matematicamente válidos.

A figura 5 representa o cartaz elaborado pelo grupo de Márcia.

FF

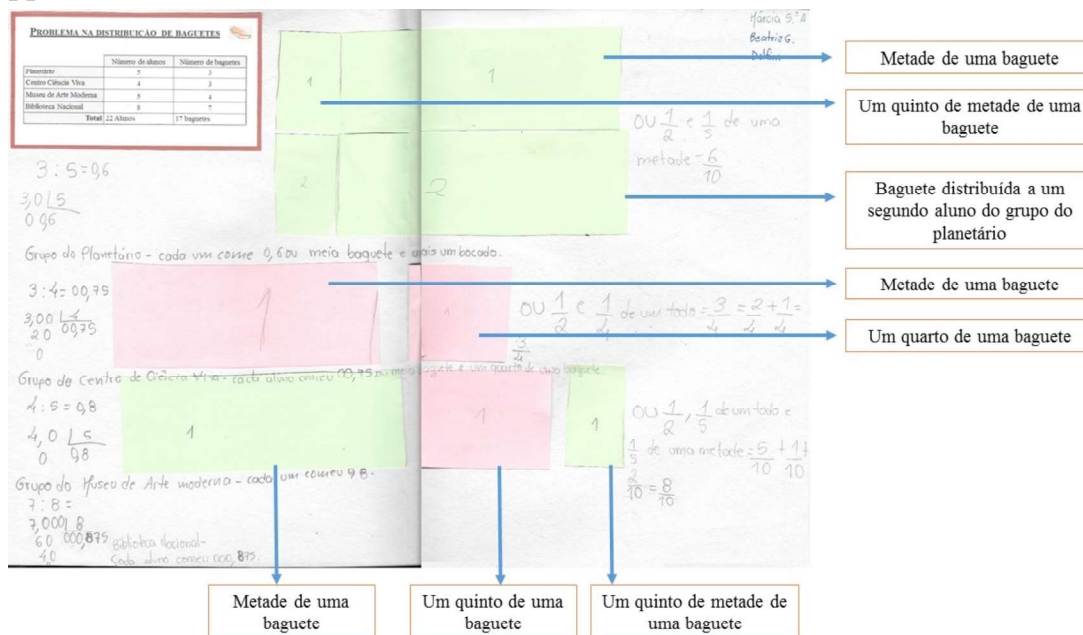


Figura 5. Cartaz do grupo de Márcia

A figura 5 revela que o grupo utilizou duas estratégias distintas: o algoritmo da divisão e a representação do quociente num numeral decimal; a divisão, em partes, de tiras de papel colorido, distribuídas à turma, e a representação da quantidade correspondente a cada parte através de frações e linguagem natural. Em todas as tiras de papel, o número 1 indica a porção de baguete distribuída a um aluno; no grupo do planetário o número 2 indica a quantidade de baguete distribuída a um outro aluno. A propósito de como pensou, Márcia diz:

No planetário havia cinco alunos. Mas só eram três baguetes. Então eu fui dividir as três baguetes pelos cinco alunos, que não me deu um número inteiro, deu 0,6. E depois, para ser mais fácil, para se perceber melhor, fomos... pegámos em três papéis, a fazer que eram baguetes, e fomos dividir. E cada... cada um comia um meio de uma baguete e depois ainda comia

⁶ EF e EM designam extratos da transcrição das entrevistas realizadas, respetivamente, a Filipa e a Márcia. Os numerais justapostos indicam o número da entrevista.

mais um quinto de uma metade de uma baguete. Ao todo, comiam seis décimos.

(EM1)

Márcia explica que dividiu as três baguetes pelos cinco alunos, obtendo 0,6 (§1). Para o efeito, recorre ao algoritmo da divisão como se pode observar na figura 5. A análise desta figura revela, também, que esta foi a estratégia privilegiada para descobrir a quantidade de baguete distribuída a cada aluno dos vários grupos da visita de estudo. A aluna apenas recorreu à divisão das folhas de papel em partes quando incentivada e, nas suas palavras, “para se perceber melhor”. É que havia colegas do seu grupo que não entendiam o que tinha sido feito.

A estratégia usada pelo grupo de Márcia que envolve o recurso ao algoritmo da divisão, é passível de se utilizar para qualquer caso, independentemente do número de alunos ou do número de baguetes considerado podendo, por essa razão, considerar-se que se está perante uma generalização.

Terrenos nas aldeias

Esta tarefa (anexo 2) foi proposta com o objetivo de trabalhar conhecimentos sobre a adição e subtração de frações. Os alunos tinham de identificar a fração correspondente ao terreno de cada família (fig. 6) e, posteriormente, conjeturar um algoritmo para adicionar e subtrair frações.

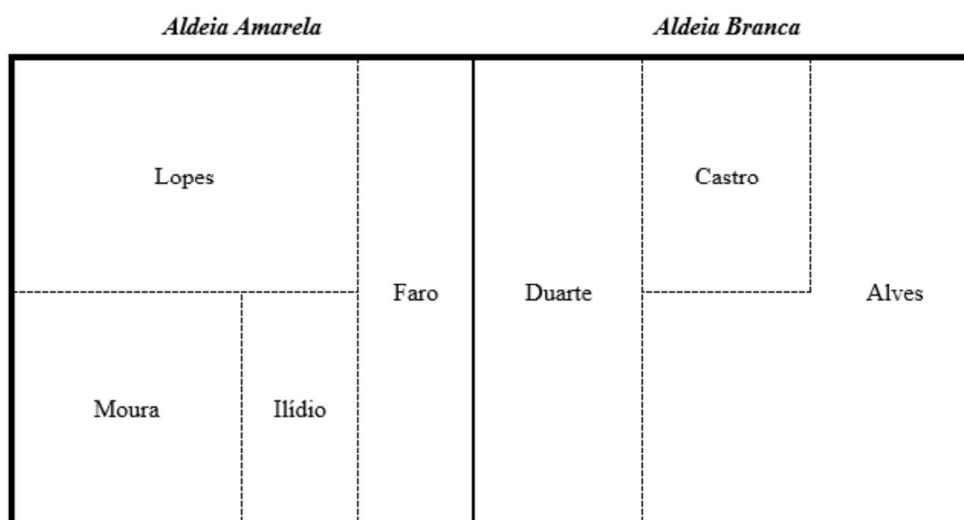


Figura 6. Representação das duas aldeias

O problema foi resolvido a pares e, para além da representação das aldeias (fig. 6), foram distribuídos pedaços de papel. Cada pedaço era geometricamente igual a um dos retângulos da figura e a cada terreno correspondia uma cor diferente. Na aula seguinte decorreram as apresentações das resoluções da tarefa. Os episódios 3 e 4 correspondem a duas destas apresentações.

Episódio 3

1. **Joana:** Na aldeia amarela fomos dividir as famílias todas. (...) Dividimos primeiro tudo e depois... e

depois fomos contar... como se fosse aquilo tudo uma unidade e vimos que tudo era um oitavo.

2. **P:** Sim... E o que é que descobriram?
3. **Joana:** Descobrimos que a família Moura tem dois oitavos.
4. **Delfim:** Igual a um oitavo mais um oitavo.
5. **Joana:** E a família Ilídio tem um oitavo.
6. **Delfim:** O Faro tem dois oitavos e o Lopes mais um oitavo...
7. **Joana:** O Lopes tem três oitavos, um oitavo mais um oitavo mais um oitavo.

(TA)

Episódio 4

1. **P:** Então como é que vocês começaram? Expliquem lá, começaram a partir de onde?
2. **Beatriz:** Nós começámos pela Faro.
3. **P:** Porquê? Explica lá... viram o quê?
4. **Beatriz:** Porque vimos que o Faro valia um quarto, que é 25%. (...) o Lopes também era um quarto, aqui... [sobrepondo no terreno da família Lopes o pedaço de papel correspondente à família Moura e referindo-se a essa parte] depois vamos fazer esta parcelazinha [da família Ilídio] assim por todo o terreno [referindo-se a toda a toda a aldeia amarela] e vimos que dava um oitavo.

(TA)

A análise dos episódios 3 e 4, revela dois modos distintos de pensar sobre a tarefa. Joana explica (§1) que optaram por dividir a aldeia Amarela partindo da família com a quantidade mais pequena de terreno (Ilídio), que através desta divisão observaram que a aldeia ficou dividida em oito partes e que este terreno correspondia a 18. No §7 justifica, recorrendo a um argumento matematicamente válido, que a fração do terreno da família Lopes é 38.

Em contrapartida, Beatriz explica que começaram pela família Faro (§2) e utiliza a designação de uma fração (um quarto) e percentagens (25%) para representar a parte da aldeia amarela desta família (§4). Para justificar que a fração de terreno da família é um quarto desta aldeia viram que esse terreno cabia quatro vezes na aldeia. Posteriormente, justifica porque é que o terreno da família Ilídio corresponde a 18. Neste âmbito, usa argumentos empíricos: cobre toda a aldeia amarela com os pedaços de papel relativos aos terreno das famílias Faro e Ilídio. No entanto, o recurso a percentagens não permite ao grupo identificar as frações correspondentes aos terrenos das restantes famílias, tendo, posteriormente, utilizado a estratégia de Joana.

Estes episódios mostram a importância da partilha de estratégias de resolução. Neste caso, um dos grupos concluiu que a estratégia apresentada pelos colegas era mais eficaz do que a sua para chegar à solução.

As figuras 7 e 8 representam os algoritmos apresentados pelos grupos de Filipa e de Márcia para adicionar e subtrair frações (segunda parte da tarefa).

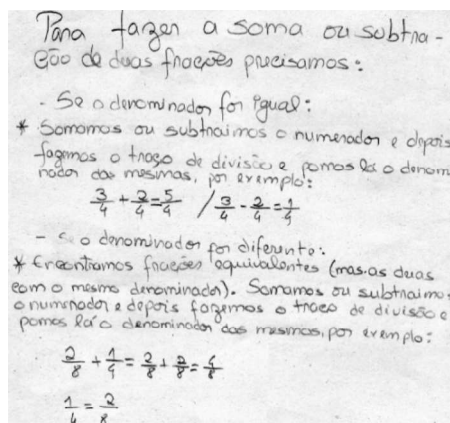


Figura 7. Extrato do cartaz elaborado pelo grupo de Filipa – algoritmo para adicionar e subtrair frações

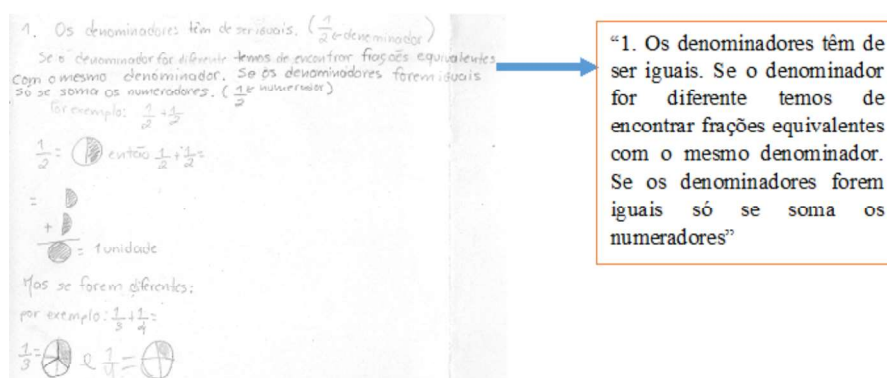


Figura 8. Algoritmo apresentado pelo grupo de Márcia para adicionar frações

Filipa (fig. 7) começa por conjecturar como pode adicionar ou subtrair frações que têm, ou não, o mesmo denominador. Posteriormente, tenta validar a sua conjectura recorrendo a um esquema de prova baseado em exemplos (Sowder & Harel, 1998).

Márcia (fig. 8) conjectura, também, um procedimento para adicionar frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes. Valida a conjectura apenas para o primeiro caso, recorrendo a representações icónicas. No entanto, não o consegue fazer para frações com denominadores diferentes, o que só vem a acontecer na entrevista em que recorre a outros exemplos (fig. 9).

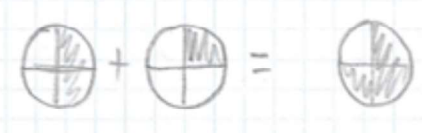
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{igual com a subtração}$$


Figura 9. Exemplo de como adicionar e subtrair frações

A aluna representa ambas as frações usando dois círculos distintos e, em seguida, divide o círculo onde está representado $\frac{1}{2}$ em quatro partes, para que fique com o mesmo número de partes do outro círculo. Posteriormente usa um novo círculo (o da direita) para representar a soma de $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{3}{4}$, como indica. Assim, para validar a sua conjectura, Márcia utiliza esquemas de prova empíricos perceptuais e baseados em exemplos (Sowder & Harel, 1998).

Quando questionada sobre a necessidade das frações terem o mesmo denominador para se poderem adicionar, Márcia diz: “temos de encontrar denominadores iguais (...) para podermos somar ou subtrair (...) as unidades têm de estar divididas à mesma... em quantidades iguais” (EM2). Apesar de revelar alguma dificuldade em expressar, com clareza, a justificação que apresenta, pode colocar-se a hipótese da aluna se ter começado a preocupar com aspetos gerais da situação, o que, a ser verdade, poderá indicar que está a iniciar um percurso que a poderá conduzir, mais tarde, a um esquema de prova transformacional (Sowder & Harel, 1998).

Em suma, constata-se que as alunas raciocinaram matematicamente sempre que explicaram e justificaram a forma como pensaram para resolver as tarefas propostas e também quando se envolveram em atividades de conjecturar, generalizar e investigar porquê.

Conclusões

Procurou-se evidenciar que, ao longo do estudo desenvolvido, houve a preocupação de promover hábitos de raciocínio, tentando que os alunos pensassem produtivamente sobre as tarefas propostas, usassem representações relevantes para a sua resolução e construíssem sentido para conceitos e procedimentos matemáticos. Simultaneamente, procurou-se desvelar raciocínios que emergiram durante a exploração de dois problemas.

As atividades associadas ao raciocínio matemático que surgiram com maior frequência foram a explicação e a justificação que, amiúde, se entrelaçaram. As justificações apresentadas foram, em muitos casos, baseadas em argumentos matematicamente válidos embora houvesse exceções. Por exemplo, Filipa, usa um esquema de prova autoritário (Sowder & Harel, 1998) para fundamentar o procedimento que usou para comparar $\frac{6}{10}$ e $\frac{3}{4}$: “como a professora ensinou” (EF1).

A formulação de conjecturas e a generalização foram menos frequentes, o que pode estar relacionado com o tipo de tarefas que, nalguns casos, não apelavam à necessidade de conjecturar e generalizar. Apesar disso, considera-se que a resolução e exploração dos problemas propostos permitiram que os alunos raciocinassem matematicamente. Como

refere Boavida (2008), “em salas de aula em que é valorizado o raciocínio, a explicação, a justificação e a argumentação são aspectos-chave da actividade dos alunos” (p. 1).

Ao raciocinarem matematicamente os alunos recorreram a vários recursos: (i) conceitos, procedimentos e representações matemáticos. As representações revelaram ser importantes ferramentas de apoio ao seu raciocínio, facilitando a interpretação, a comunicação e a discussão de ideias matemáticas, como salienta Tripathi (2008).

Não é simples criar condições para que os alunos raciocinem matematicamente e progridam no desenvolvimento deste raciocínio. No entanto, uma escolha criteriosa de tarefas cognitivamente desafiadoras e adequadas aos alunos, a criação de uma cultura de sala de aula que favoreça e apoie a aquisição de hábitos de raciocínio (NCTM, 2009) e a existência de tempo para que haja confronto e discussão de estratégias e resultados, parecem ser vias prometedoras.

Referências

- Boavida, A. (2015). Pensando sobre a Matemática para perspetivar o seu ensino. *Educação Matemática*, 132, 1.
- Boavida, A. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática*, 100, 1.
- Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Lisboa: APM.
- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Coelho, V. (2010). *Comunicação matemática num contexto de resolução de problemas: uma experiência com alunos do 9.º ano* (Tese de mestrado, Universidade do Algarve).
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.
- Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático na exploração de tarefas de investigação: Um estudo com alunos universitários. *Quadrante*, XXI, (2), 139-161.
- Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 145-165.
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven: Yale University Press.
- Lannin, J., Ellis, A., & Elliott, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten - Grade 8*. Reston: NCTM.
- MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico*. Lisboa: MEC.
- NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

- NCTM. (2009). *Focus in High School Mathematics - Reasoning and Proof*. Reston: NCTM.
- Oliveira, C. (2015). *Raciocinando matematicamente com números racionais: Um estudo com alunos do 5.º ano de escolaridade*. Disponível em <https://comum.rcaap.pt>
- Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante, XXI*, (2). 29-50.
- Ponte, J. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.
- Ponte, J. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. Ponte (org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-30). Lisboa: UL-IE.
- Quaresma, M., & Ponte, J. (2013). Representações e raciocínio matemático nos números racionais. In A. Domingos, I. Vale, M. Saraiva, M. Rodrigues, C. Costa, & R. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013 - Raciocínio Matemático* (pp. 277-295). Lisboa: SPIEM.
- Santos, L. (2013). O raciocínio matemático - Evocando Paulo Abrantes. In A. Domingos, I. Vale, M. Saraiva, M. Rodrigues, C. Costa, & R. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013 - Raciocínio Matemático* (pp. 15-30). Lisboa: SPIEM.
- Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91*, (8), 670-674.
- Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the middle school, 13*, (8), 438-445.
- Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-24). Utrecht: Utrecht University.
- Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter, *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston: NCTM.

Anexo 1

O problema na distribuição das baguetes¹

No ano passado, eu e uma das minhas turmas decidimos fazer uma visita de estudo para recolher informações para um projeto que estávamos a desenvolver. Pedimos a colaboração de alguns pais que estavam disponíveis para nos acompanhar e, cada um dos grupos de trabalho, foi visitar um local diferente já que tinha um adulto perto.

Cinco alunos foram para o Planetário, quatro foram para o Centro de Ciência Viva, cinco foram para o Museu de Arte Moderna e, por último, oito foram para a Biblioteca Nacional. Ficou combinado que a funcionária do bar prepararia baguetes, daquelas muito grandes, para o lanche. O problema é que fez apenas dezassete baguetes e distribuiu-as do seguinte modo: deu três baguetes aos quatro alunos que foram para o Centro de Ciência Viva e quatro aos cinco que foram ao Museu de Arte Moderna; os oito que foram à Biblioteca ficaram com sete baguetes e as três restantes deu-as aos cinco alunos do Planetário.

Na aula seguinte, conversámos sobre como tinha corrido a visita de estudo. Alguns dos meus alunos queixaram-se de que a distribuição das baguetes não tinha sido justa, pois alguns tinham tido mais comida do que outros. O que pensam disto? Será que tinham razão?

¹ Retirado de: Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at work - Constructing Fractions, Decimals and Percents*. Portsmouth: Heinemann.

Anexo 2

Terrenos nas Aldeias²

Parte 1: Aldeia Amarela e Aldeia Branca

Em duas aldeias vizinhas, algumas das famílias possuem terrenos de cultivo que estão distribuídos conforme mostra a figura seguinte.

1. Que fração dos terrenos de cultivo da respetiva aldeia possui cada um dos proprietários? Explica o teu raciocínio.

2. Algumas famílias venderam os seus terrenos a outros proprietários:



- A família Lopes comprou todo o terreno da família Moura.

- A família Duarte vendeu $\frac{1}{6}$ do seu terreno à família Castro.

a) Qual a fração dos terrenos que possui, agora, cada uma das famílias?

² Adaptado de: Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2009). *Números racionais não negativos - Tarefas para o 5.º Ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Parte 2: Em busca do algoritmo

Quando precisamos adicionar ou subtrair é necessário dispor de um conjunto de procedimentos que conduzam rapidamente ao resultado pretendido. Esse conjunto de procedimentos chama-se algoritmo.

Um algoritmo só é útil se descrever claramente e de forma compreensível os passos a seguir e se conduzir sempre ao resultado correto.

1. A partir das questões anteriores (Parte 1), descreve um algoritmo para adicionar frações. Regista o algoritmo de forma clara, tal como se fosses enviá-lo a alguém com quem não tivesses oportunidade de conversar e que, por isso, lendo a tua mensagem deveria compreender perfeitamente as tuas instruções.

2. Cria agora um algoritmo para subtrair frações. Regista o algoritmo de forma clara, tal como se fosses enviá-lo a alguém com quem não tivesses oportunidade de conversar e que, por isso, lendo a tua mensagem deveria compreender perfeitamente as tuas instruções.

3. Experimenta os teus algoritmos e verifica se funcionam, ou não, nos casos que se seguem:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{8}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{3}$$