

RECURSOS PARA A APRENDIZAGEM DA COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA: REFLEXÃO EM TORNO DE UMA TAREFA

Graça Cebola

Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Portalegre

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

gracacebola@esep.pt

Joana Brocardo

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

joana.brocardo@ese.ips.pt

Resumo: Nesta comunicação analisamos uma tarefa cujo objetivo é a exploração da comparação multiplicativa, numa perspetiva de desenvolvimento da flexibilidade de estratégias utilizadas pelos alunos. A tarefa em causa faz parte de uma sequência de tarefas e foi experimentada numa sala de aula de Matemática, numa turma do 6.º ano de escolaridade, no ano letivo 2015/16. A sua abordagem surge no contexto de uma experiência de ensino e de uma investigação que se insere na modalidade de *design research*. Fundamentamos teoricamente o recurso de aprendizagem proposto, quer sob o ponto de vista da comparação multiplicativa, quer da flexibilidade / adaptabilidade de estratégias. Apresentamos e discutimos uma primeira análise dos dados.

Palavras-chave: comparação multiplicativa; flexibilidade; estratégias; tarefas.

Introdução

Uma tarefa ou uma sequência de tarefas proposta pelo professor aos alunos na sala de aula é um recurso que pode ser muito relevante para a aprendizagem da Matemática. Para tal, a sua escolha deve, por um lado, permitir a abordagem e exploração de determinado tópico / conceito matemático; por outro lado, promover o desenvolvimento de processos matemáticos e ser um desafio para os alunos.

Nesta comunicação propomo-nos apresentar e discutir uma tarefa, que faz parte de uma sequência de tarefas que tem como objetivo primordial desenvolver o conceito de comparação multiplicativa, numa perspetiva de desenvolvimento da flexibilidade / adaptabilidade de estratégias utilizadas pelos alunos.

Começamos por discutir, de uma forma sucinta, diferentes perspetivas do ensino e da aprendizagem da comparação multiplicativa e da flexibilidade / adaptabilidade. De seguida, abordamos a tarefa que é objeto de discussão neste texto, enquadrando teoricamente a sua escolha e justificando a sua importância como um recurso no processo de ensino e aprendizagem. Analisamos e discutimos os dados relacionados com as resoluções apresentadas pelos alunos, focando-nos na evolução da comparação multiplicativa.

Comparação multiplicativa – conceito de razão

A proporcionalidade é um tema integrado explicitamente no final do 2.º ciclo e início do 3.º ciclo do ensino básico. Permite conexões dentro da própria Matemática e entre a Matemática e outros domínios (NCTM, 2007). Desenvolve-se através da exploração de diversos tópicos e a sua compreensão deverá emergir da resolução de problemas e do desenvolvimento do raciocínio proporcional. Os alunos devem, por um lado, compreender e utilizar os conceitos de razão e de proporção para representar relações quantitativas e, por outro lado, desenvolver, analisar e explicar os processos utilizados na resolução de problemas que envolvam proporções, como é o caso de razões equivalentes. Sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem, a proporcionalidade engloba, portanto, muitas vertentes suscetíveis de serem aprofundadas e, por isso, o foco desta comunicação incide na comparação multiplicativa, considerada como um aspeto relevante na sua consolidação.

A noção de comparação multiplicativa induz-nos, inicialmente, ao conceito de razão. Vergnaud (1988) nas suas investigações sobre estruturas multiplicativas refere-se a fator escalar e fator funcional, utiliza a terminologia *isomorfismo de medidas* e identifica *razões em espaços de medida* e *razões em sistema de razões*. Explicita que espaços de medida são usualmente tidos como diferentes conjuntos de objetos, diferentes tipos de quantidades ou diferentes unidades de medida. Freudenthal (2002) menciona que uma razão “é uma função de um par ordenado de números ou medidas de grandeza” (p. 179). Para este autor a razão é, portanto, num contexto fenomenológico, “uma relação de equivalência no conjunto dos pares ordenados de números (ou medidas de grandeza) e que pode ser formalmente representada por $a : b = c : d$, se o par (a, b) é equivalente ao par (c, d) ” (p. 180). Freudenthal vai mesmo mais longe ao classificar a razão como: (i) razão interna, ou razão ‘em’ (*in*, no original), se as magnitudes (*magnitudes*, no original) que a constituem partilham o mesmo espaço de medida ou, nas suas palavras, o mesmo sistema; (ii) razão externa, ou razão ‘entre’ (*between*, no original), quando é composta por magnitudes de diferentes espaços de medida. Esclarece, no entanto, que uma razão deve ser considerada num sentido mais amplo que o das relações “em” e “entre” grandezas e pode ser interpretada como um quociente em que a razão interna (dentro de uma grandeza ou no mesmo sistema) é um número (comparação multiplicativa) e a razão externa (composta por magnitudes de diferentes espaço de medida) é uma grandeza diferente das iniciais (unidade composta).

Desta forma, quando de acordo com NCTM (2010), se considera uma razão como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades ou como a junção de duas quantidades numa unidade composta, estamos implicitamente a trabalhar as razões internas e as razões externas mencionadas. A evidência de formação de uma unidade composta surge frequentemente na ação de a repetir ou de a dividir em partes iguais. Há situações do mundo real que são propícias para a exemplificação de unidades compostas. Por exemplo, a velocidade, que é uma razão entre as grandezas distância e tempo; a inclinação de uma rampa (declive), que é uma razão entre as grandezas altura e comprimento da base da rampa; o sabor do refresco, que é uma razão entre as grandezas concentrado de sumo e água.

Pensar um determinado valor como uma razão está igualmente subjacente à medição de grandezas, ou seja, o próprio ato de medir, é um processo de comparação. De facto, medir um objeto significa conceber que algum dos seus atributos foi segmentado e que essa segmentação está em comparação com uma quantidade normalizada desse atributo (Thompson & Saldanha, 2003). Estes autores mencionam mesmo que a “ideia de razão está no coração da medição” (p. 15) e, como tal, uma razão envolve uma comparação

que só pode ser uma comparação multiplicativa. Shield e Dole (2002) recordam que uma proporção surge quando esta comparação é usada para descrever também uma situação relacionada nos mesmos termos comparativos. Segundo NCTM (2010), compreender que “quando duas quantidades se relacionam proporcionalmente, a razão de uma relativamente à outra é numericamente invariante quando ambas as quantidades mudam através de um mesmo fator” (p. 11), permite fazer conexões entre razão, proporção e raciocínio proporcional.

A proporção, considerada como duas razões iguais, surge em resposta à resolução de uma grande variedade de problemas da vida real. Lesh, Post e Behr (1988) e Freudenthal (2002) referem como típicos, por exemplo, os problemas de velocidade, de misturas, de densidade, de escalas, de conversões, de consumo, de preços e ainda de outro tipo de comparações multiplicativas.

Post, Behr e Lesh (1988) salientam que o processo algorítmico de resolução de uma proporção tem sido questionado por vários investigadores que o consideram limitativo, no sentido de não ser suficiente saber manejá-la algebricamente e de forma automática para compreender o conceito de proporção. Para isso, é necessário dar significado e interpretar as razões dentro do contexto em causa, defendendo-se, mais uma vez, que a compreensão dos conceitos vai além da mera execução de procedimentos numéricos ou algébricos. Também a capacidade de construir uma igualdade de duas razões, isto é, uma proporção, e perceber que existe um número infinito de razões que respondem ao solicitado é um marco fundamental para o desenvolvimento do raciocínio proporcional (NCTM, 2010).

Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen e Keijzer (2008) propõem que uma trajetória de ensino e aprendizagem das proporções pode ser alicerçada em quatro aspetos: (a) exploração de tabelas de razões; (b) comparação proporcional; (c) análise de situações em que não existem relações lineares mas em que se atua como se existissem; e (d) foco nas relações que não são lineares.

Nesta comunicação discutimos algumas das ideias sumariamente expostas e exemplificamos, numa das tarefas englobadas na experiência de ensino em curso, os primeiros aspetos da trajetória de ensino e aprendizagem mencionada.

Flexibilidade – estratégias

O valor educacional do reconhecimento e da promoção da flexibilidade tem vindo a ser notado no campo da educação matemática pelas muitas investigações já realizadas.

De um modo geral, essas investigações apresentam-nos, segundo Heinze, Star e Verschaffel (2009) duas linhas de ação: uma que segue a utilização flexível (adaptativa) de estratégias na resolução de problemas em diferentes domínios da Matemática, nomeadamente, nos números e nas operações – cálculo por estimação (matemáticos e alunos); adição e subtração de números com mais de dois dígitos; simplificação de cálculos relativos à multiplicação e divisão; cálculo mental (adição e subtração); raciocínio proporcional; e outra que segue o uso flexível e adaptativo de representações que inclui compreender e alternar entre vários tipos, tais como, gráficos, tabelas, representações algébricas e verbais.

Nesta associação entre a flexibilidade e a utilização de estratégias individuais, alguns autores identificam significados diferentes para os conceitos ‘flexível’ e ‘adaptativo’ enquanto outros consideram-nos sinónimos. Uns distinguem entre o uso flexível de

estratégias (flexibilidade), que significa que cada um tem a capacidade de escolher entre múltiplas estratégias e de alternar entre elas, mas não de selecionar necessariamente a mais apropriada, e o uso adaptativo de estratégias (adaptabilidade) que engloba também a escolha da estratégia mais apropriada, onde realçam a capacidade de uma determinada pessoa, consciente ou inconscientemente, selecionar e utilizar a abordagem mais adequada para a resolução de um determinado problema, num determinado contexto sociocultural (Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren, 2009).

Quer no uso adaptativo de estratégias, quer de representações realçam-se, segundo Heinze *et al.* (2009), as características da tarefa, do contexto e do que pode fazer sentido para o aluno que, em grande parte, está intimamente relacionado com a fase de progressão da sua aprendizagem matemática. De facto, um aluno que ainda recorre frequentemente à contagem um a um tem necessariamente uma flexibilidade muito reduzida para resolver, por exemplo, problemas de adição/subtração; Um aluno que concebe a operação multiplicação simplesmente ligada à adição de parcelas iguais tem necessariamente uma flexibilidade muito reduzida para resolver, por exemplo, problemas envolvendo a multiplicação de números não inteiros, que podem estar ligados a ações intuitivas e elementares de partilha, de dobragem, de divisão igualitária e de ampliação.

Mas, relacionar flexibilidade / adaptabilidade com as estratégias de cada um, requer que valorizemos o conhecimento de conceitos e de procedimentos. Berk, Taber, Gorowara e Poetzl (2009) consideram mesmo que é possível amenizar as visões tradicionais de conhecimento de procedimentos como algo “habitual, superficial e binário” (p. 133) e, por isso, com características algorítmicas. Mais do que saber como usar um procedimento único para resolver uma classe de problemas, a flexibilidade implica o conhecimento e a capacidade de usar vários métodos, bem como a capacidade de escolher estrategicamente de entre esses métodos o que mais se adapta.

No trabalho que estamos a desenvolver pretendemos analisar a resolução de tarefas de comparação multiplicativa que permitam valorizar a compreensão dos alunos, em detrimento da mera aplicação de determinadas regras de cálculo. Propomo-nos fazê-lo sob a perspetiva da flexibilidade alicerçada, neste caso, nas diferentes estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos, nas diversas representações por si adotadas e na forma como relacionam os resultados obtidos nas várias questões da tarefa, de maneira a minimizar os cálculos a efetuar. Flexibilidade é, portanto, encarada no sentido de adaptabilidade onde o relevo é dado não apenas à escolha de estratégias mas também à escolha daquelas que, perante a questão em causa, são as mais adequadas (eficientes e rápidas). É, como referem Kraemer, Brocardo, Mendes e Delgado (2014) relativamente ao cálculo mental flexível, uma teia de relações entre conhecimento de conceitos, processos e símbolos e uma capacidade de os relacionar com compreensão e de maneira eficaz.

A exploração da tarefa na sala de aula

A tarefa *Fazer Limonadas*³ surge como um recurso natural para sala de aula de Matemática, porque permite explorar a comparação multiplicativa e promove, potencialmente, o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática. O cerne está na compreensão dos conceitos e procedimentos utilizados, em detrimento da

³ Enunciado completo em anexo.

mera aplicação de determinadas regras de cálculo que surgem, muitas vezes, sem qualquer justificação.

Na aula de exploração de *Fazer Limonadas* identificamos um primeiro momento, de introdução da tarefa onde a leitura do enunciado foi da responsabilidade de um aluno e a sua interpretação foi feita por todos, com ajuda da professora, e um segundo momento, de trabalho autónomo dos alunos, a pares, de resolução da primeira questão. Para uma melhor gestão do trabalho foi sugerido pela professora que as questões fossem resolvidas, corrigidas e discutidas no quadro uma a uma. Durante a exploração da tarefa a pares o papel da professora era agora o de observar, ouvir e ‘anotar’ o que os alunos iam fazendo e discutindo, de forma a identificar ideias, estratégias e procedimentos relevantes. Num terceiro momento, de discussão em grande grupo, perante as resoluções registadas, a professora solicitou a colaboração dos alunos para uma discussão e reflexão conjunta que incidiu na maneira de pensar sobre as condições iniciais, no que de facto era solicitado, nos procedimentos de cálculo efetuados e nas respostas apresentadas. Deu-se oportunidade aos alunos para explicarem os seus próprios processos de comparação e também para compreenderem os processos de raciocínio apresentados pelos colegas no sentido, por exemplo, de interiorizarem que não há uma única maneira de chegar à solução. Os três momentos desenrolaram-se de uma forma cíclica ao longo da aula, mas não foi nunca imposto nenhum processo de resolução específico, pelo que os alunos foram livres de utilizar os seus conhecimentos sobre razões e suas comparações da forma que consideraram mais conveniente. Mais do que apresentar uma solução, o objetivo era que fossem capazes de justificar as opções tomadas e as respostas que registavam.

A tarefa na experiência de ensino

A investigação em curso segue uma metodologia inserida na modalidade de *design research* (Brown, 1992; Gravemeijer e Cobb, 2006) e tem por objetivo compreender o modo como alunos do 6.º ano desenvolvem a comparação multiplicativa, no contexto de uma experiência de ensino. Os dados foram recolhidos na sala de aula, através de vídeo gravação e das produções escritas de todos os alunos, e referem-se ao primeiro ciclo de experimentação.

Nesta comunicação apresentamos e discutimos a tarefa *Fazer Limonadas* que faz parte de uma sequência de tarefas delineada para estudar a evolução conceptual da comparação multiplicativa numa perspetiva da flexibilidade / adaptabilidade das estratégias e representações utilizadas pelos alunos. Conceptualmente, a razão escalar encontra-se entre o fator multiplicativo e a razão funcional e é ela que vai fazer a ponte entre o primeiro (já do conhecimento dos alunos) e a última (em processo de apropriação pelos alunos) (figura 1, à esquerda). À medida que se avança de um nível conceptual para outro, as tarefas que protagonizam essa passagem devem incluir questões que permitam começar sempre no conhecimento que os alunos já possuem (*‘met-before’*, segundo Tall, 2013) e ir até à compreensão e utilização de propriedades, cada vez mais complexas e abstratas. O conhecimento anterior dos alunos vai-se alterando e basear-se na última aquisição de conceitos do nível anterior, a exploração de modelos físicos e/ou esquemáticos vai-se tornando irrelevante e o ponto crucial é o raciocinar sobre os números, as suas relações e propriedades. Desta forma, o esquema de evolução conceptual da comparação multiplicativa evolui para um esquema menos hierárquico que se baseia na escolha pessoal da estratégia mais adequada à situação em jogo (figura 1, à direita).

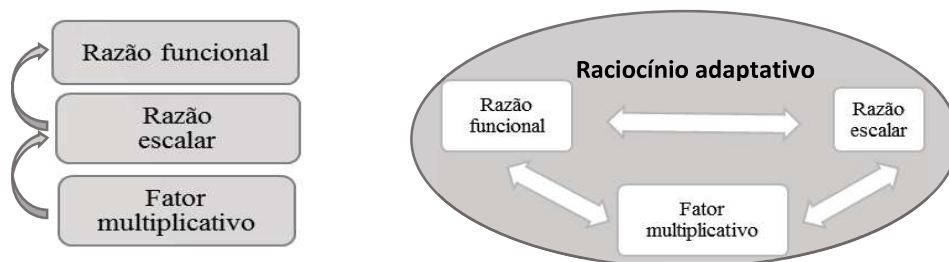


Figura 3 - Níveis de evolução conceitual da comparação multiplicativa, sem e com flexibilidade

Fazer Limonadas é uma tarefa, tipo problema (Ponte, 2005), uma vez que apresenta uma estrutura fechada (quatro questões de resposta direta) e um desafio moderado para os alunos porque se mostra com um enunciado diferente do usual. Com esta tarefa pretende dar-se continuidade à exploração da comparação multiplicativa e consolidar procedimentos que permitam a comparação de razões em contextos do quotidiano, no sentido de retirar conclusões fundamentadas. O contexto ilustra-se através de um universo contínuo (líquido) onde o *fazer limonadas* pressupõe a ação de misturar dois líquidos de tipos diferentes (água e concentrado de sumo de limão), com unidades de medida também elas diferentes (litro e chávena, respetivamente), para se obter um líquido com características distintas dos iniciais.

Pretende-se, na questão 1, que os alunos compreendam que vão ter que comparar multiplicativamente as duas misturas apresentadas, ou seja, considerar razões que permitam traduzir simbolicamente as duas limonadas. Podem compará-las de uma forma esquemática, através da construção e análise de tabelas de razões ou de linhas numéricas duplas que poderão surgir, primeiramente, pela construção das sequências dos múltiplos naturais dos números em causa, cujo procedimento é já do seu conhecimento. As sequências de múltiplos criadas, no contexto em causa, permitem em cada momento relacionar os valores das duas grandezas, encontrar e justificar as respostas apresentadas. O objetivo é que o raciocínio sobre o trabalho efetuado com os inteiros permita a generalização da situação anterior, através da utilização simultânea de um qualquer fator diferente de zero (inteiro ou não), aos elementos das duas grandezas em jogo, ou seja, uma extensão a outros universos numéricos, nos quais se continuam a verificar as propriedades das operações e as relações numéricas já evidenciadas.

Nas três últimas questões o objetivo é comparar razões sem se evidenciar a formação de proporções. Em concreto, pretende determinar-se um termo desconhecido de uma razão, sem utilizar a regra das proporções, tendo em atenção as condições específicas de comparação, ou seja, mantendo a limonada com um sabor pré definido.

Análise de dados

Apresentam-se e discutem-se os dados obtidos através das resoluções escritas dos alunos, apoiados por momentos de diálogo na sala de aula. O objetivo é identificar uma evolução da comparação multiplicativa que favoreça a flexibilidade / adaptabilidade e permita repensar a tarefa aquando da realização de um novo ciclo de experimentação.

Questão 1

Alguns amigos do João disseram que a limonada de sexta-feira tinha um sabor a limão diferente da de sábado. Concordas com eles? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

Na questão 1 todos os alunos consideram as razões referentes, respetivamente, à limonada feita na sexta-feira e no sábado, registadas de acordo com a sequência textual que é apresentada no próprio enunciado, ou seja, relacionam o número de chávenas de concentrado de sumo de limão com o número de litros de água de cada mistura, através da representação em fração. A representação sob a forma de divisão não surge em nenhuma das resoluções e também não é mencionada pela professora no decorrer de toda a aula.

Podemos realçar as seguintes estratégias / procedimentos de resolução:

Descobrir se é comum o fator multiplicativo entre os termos respetivos das razões $\frac{3}{4}$ e

$\frac{4}{5}$. Os alunos que utilizam este procedimento demonstram saber que duas razões são iguais se multiplicarmos ambos os termos de uma por um mesmo número, diferente de zero, e obtivermos os termos correspondentes na outra. Desta forma, Ricardo indica os cálculos efetuados (figura 2), explicitando o algoritmo usual da divisão para o caso de $4 : 3$; no outro, $5 : 4$, a não indicação do algoritmo, leva a pressupor que efetuou o cálculo mentalmente.

$$4 : 3 = 1,33... \quad 5 : 4 = 1,25$$

Figura 2 - As divisões de Ricardo

Ricardo explicita (figura 3) que as duas razões são diferentes porque para passar de $\frac{3}{4}$ para $\frac{4}{5}$, o numerador da primeira é multiplicado por 1,33..., enquanto o seu denominador é multiplicado por 1,25; refere que as frações não são equivalentes e regista este facto em texto e em linguagem matemática.

Não tem o mesmo sabor porque as frações não são equivalentes, dividindo os valores de cima e de baixo não dá o mesmo número.

$$5 : 4 = 1,25$$

$$3 \times 1,33... \neq 4$$

Figura 3 - Tradução em texto e em linguagem matemática

Comparar razões através de linhas numéricas duplas (ou de tabelas de razões). José apresenta, embora de uma forma pouco cuidada, duas linhas numéricas duplas, uma referente à mistura de sexta-feira e outra à de sábado. Os valores de uma e outra surgem através da sequência dos múltiplos naturais dos números iniciais: múltiplos de 3 e 4 até, respetivamente, 18 e 24; múltiplos de 4 e 5 até, respetivamente, 20 e 25.

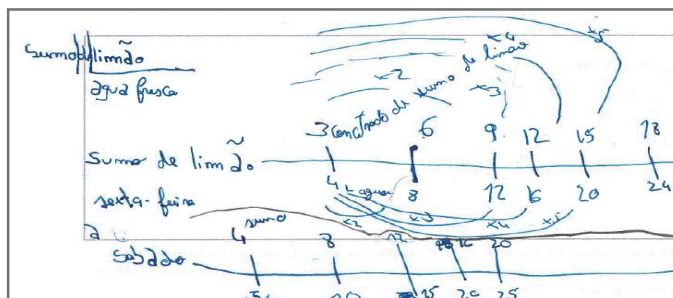


Figura 4 - As linhas numéricas duplas de José

Como se pode observar (figura 4), não surge nenhuma indicação de quais são, de facto, as razões que vai comparar para retirar uma conclusão. Apenas quando é convidado a ir ao quadro, José começa por explicitar o que fez e a professora, perante algumas das suas imprecisões de linguagem, dá uma ajuda no sentido de clarificar o seu procedimento (figura 5).

José – Eu vi aqui... estes dois eram quase iguais (parece que aponta apenas na segunda linha o 12 para 15). Eu primeiro pensava que eram equivalentes porque pensava que o doze era... vá, como era igual no sumo, pensava que daria igual, mas depois vi que o 15 e o 16 não eram bem igual[is] e, então, a conclusão a que che...que... a... (olha para a sua folha de resposta mas não acrescenta nenhuma ideia). Professora – Vá que eu ajudo. Ele está a dizer: olhou para aqui (aponta nas duas linhas) e viu que o 12 era igual ao 12 e pensou “Ah! Isto é igual”. Mas depois foi ver cá em baixo e viu que aqui [aponta] estava 16 e aqui [aponta] 15. Então, o que é que isto significa? José – As razões não são equivalentes. Professora – As razões não são equivalentes. Porquê? Na razão de sexta-feira [aponta sexta-feira], se eu puser 12 de concentrado... OH, Duarte! Se eu puser 12 de concentrado, quantos litros de água tenho que por?	José – Dezasseis. Professora – Dezasseis litros de água. Se for para o sábado [aponta sábado], o que é que acontece? Se eu puser 12 de concentrado, quanta água é que leva? José – Quinze. Professora – Quinze litros de água [aproveita para escrever (L) à frente de água, em cada uma das linhas]. Então, o que é que acontece? Então, o que é que eu daqui depreendo? Que... José – As razões... A professora – A limonada não vai ser... José – A mesma. Professora – A mesma. (...)
---	---

Figura 5 - O diálogo de José com a professora

Questão 2

Uns dias depois, a mãe do João pretendeu fazer limonada com o mesmo sabor a limão daquela que tinha feito no sábado, mas só tinha 1 chávena de concentrado de limão. Que quantidade de água devia ter utilizado?

Todos os alunos resolvem a questão e, analisando as estratégias de resolução, podemos realçar:

A utilização da linha numérica dupla com apenas dois pontos (ou tabela com duas linhas e duas colunas) que indicia que trabalham realmente sobre uma tabela uma vez que não mantêm a ordenação dos números. Ainda neste tipo de registo, o par Ricardo e Hugo é o único que evidencia a relação inversa entre 4 e $\frac{1}{4}$, escrevendo que dividir por 4 é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{4}$ e Ricardo explicita ainda a utilização de números decimais e de numerais mistos (figura 6).

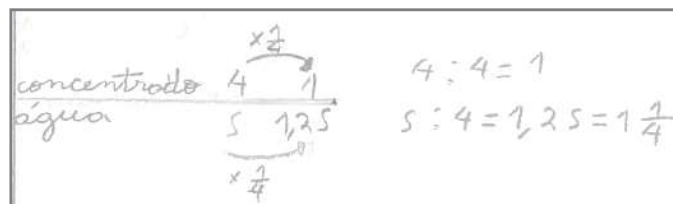
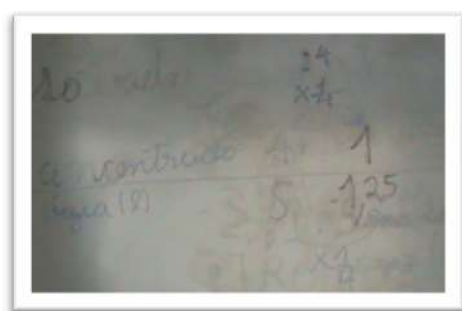


Figura 6 - Resposta de Ricardo

Quando é feita a correção no quadro (figura 7), a professora aproveita para realçar esta situação, no seu diálogo com os alunos.



Ricardo – No sábado havia 4 de concentrado e...
(A professora bate as palmas para impor silêncio à turma.)
Professora – No sábado havia...
Ricardo – Quatro de concentrado e 5 litros de água (aponta na tabela) e eles querem só com 1 de concentrado (aponta o 1 na linha). Portanto, temos que ver por quanto é que temos que multiplicar ou dividir o 4 para dar 1.
Professora – Pronto. Quatro para um, o que é que eu fiz? Dividi por...
Aluno – Quatro.
Professora – Por quatro. Todos pensaram nisto. Vou dividir por 4 e vai-me dar 1. Então, fizeram praticamente isto e puseram... então vou dividir o 5 por 4 também. Mas o Ricardo... podes sentar[-te] Ricardo. Obrigada. O Ricardo fez aqui uma coisa que nenhum fez.
Alunos – Vezes um quarto.
Professora – Que nós já vimos que dividir por 4 é o mesmo do quê?
Daniel – Vezes... fazer... vezes um quarto.
Professora – Multiplicar por um quarto. Porquê?
Aluno – Pelo inverso.
Professora – Pelo inverso.
Daniel – Pelo inverso.

Figura 7 – Registo no quadro e diálogo da professora com os alunos

Filipe tem os números colocados corretamente na reta mas depois risca-os e fica com um registo similar ao dos restantes colegas. De notar que este aluno, ao pretender traduzir simbolicamente o procedimento explicitado na linha numérica dupla, indica que

divide a razão $\frac{4}{5}$ por 4 e que obtém como resultado $\frac{1}{1,25}$ o que origina, obviamente, uma

situação falsa (figura 8). Mas para ele, que ainda não sabe efetuar divisões com números não inteiros, é perfeitamente compreensível este tipo de registo.

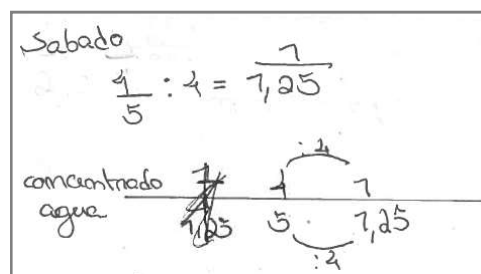


Figura 8 - A resposta de Filipe

A utilização da linha numérica dupla com mais de dois pontos. Manuel apresenta este esquema em que os números surgem colocados em sequência (figura 9) e onde não passa imediatamente do 4 para o 1 e do 5 para o 1,25 mas indica valores intermédios, 2 e 2,5, que surgem da divisão sucessiva por dois. Ao lado indica as divisões de 4 e 5 por 4, depois de riscar e emendar divisões que parecem sugerir que calcula o valor de cada

uma das razões da questão anterior. Como não há nenhum registo de diálogo entre Manuel e a professora ou os colegas, pressupõe-se que deu pelo erro e corrigiu ele próprio a estratégia.

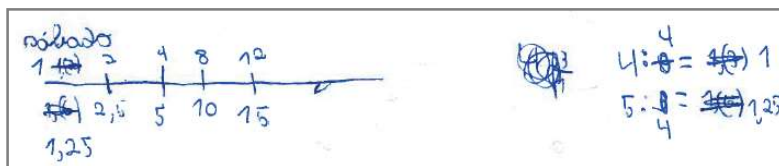


Figura 9 - A linha numérica dupla e os cálculos de Manuel

Indicação de razões. Luís e Ana indicam inicialmente duas razões, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{?}$, onde o termo que desconhecem na segunda está substituído por um ponto de interrogação (figura 10).

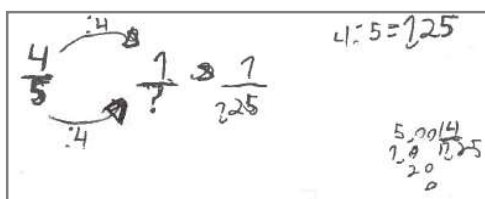


Figura 10 - As razões de Luís

Assinalam corretamente o procedimento a efetuar (dividir ambos os termos da primeira razão por 4), usam setas que vão da primeira para a segunda razão e registam o algoritmo da divisão de 5 por 4. No entanto, Luís engana-se na indicação horizontal da operação e escreve $4:5 = 1,25$. Ambos riscam o sinal igual entre $\frac{1}{?}$ e $\frac{1}{1,25}$, e Ana chega a substituí-lo por uma seta horizontal, pressupondo-se que para eles aquelas representações não são iguais mas gozam apenas de uma correspondência.

Mário e Isabel registam uma razão correspondente à mistura de sábado ($\frac{4}{5}$) e ainda o algoritmo usual da divisão para as situações de $4:4$ e $5:4$. No primeiro caso, e de uma forma algo incompreensível para alunos do 6.º ano, apresentam o algoritmo completo, numa situação que deviam calcular mentalmente, sem quaisquer problemas. No segundo caso, que também podia ser resolvido através de cálculo mental, o registo do algoritmo fica incompleto com o número de casas decimais do dividendo. Não representam a razão correspondente à mistura feita ‘uns dias depois’ mas Mário responde corretamente (figura 11).

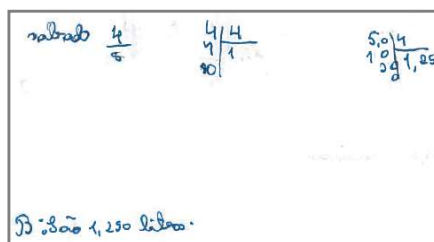


Figura 11 - Os registos de Mário

Questão 3

Quando foram à excursão, a mãe do João voltou a fazer limonada com o mesmo sabor da que tinha feito no sábado e, nesse momento, misturou 9 chávenas de concentrado de sumo de limão com água. És capaz de dizer quantos litros de água utilizou?

A resposta a esta questão pode analisar-se segundo duas perspetivas de resolução:

Os alunos utilizam a razão unitária encontrada na alínea anterior. Alguns alunos utilizam a razão unitária, $\frac{1}{1,25}$, encontrada na alínea anterior, mas Mariana e Sara expressam a relação de 1 copo de concentrado para 1,25 litros de água através do sinal igual e não de uma correspondência (figura 12). Para obter a resposta determinam o produto $9 \times 1,25$ através do algoritmo usual.

Sábado

$$\frac{4}{5}$$

1 copo de água = 1,25 l

$$1,25 \times 9 =$$

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ \times 9 \\ \hline 11,25 \end{array}$$

R: Utilizou 11,25 litros de água

Figura 12 - Os registos de Mariana

Mariana chega mesmo a referir-se a ‘copo de água’ (figura 12) o que torna questionável a autoria da sua resposta porque esta gralha foi expressa no quadro e não chegou a ser corrigida. Sara regista uma igualdade, que mais nenhum aluno realça, $1,25 = 1 + \frac{1}{4}$ (figura 13), onde evidencia a relação entre os decimais e as frações, que tinha sido salientada pela professora no momento da discussão da questão 2, mas não a usa para os cálculos seguintes onde o resultado de $9 \times 1,25$ surge sem indicações auxiliares, o que leva a pressupor que foi copiado do quadro e torna também questionável a autoria da sua resolução.

sábado	excursão
$\frac{4}{5}$	9

1 copo = 1,25 l $(1 + \frac{1}{4})$

$9 \times 1,25 = \cancel{11,25} 11,25$

Figura 13 - Os registos de Sara

José e Cláudia registam também a razão $\frac{4}{5}$

correspondente à mistura inicial de sábado mas depois, sem mais indicações, passam de imediato para a multiplicação de 1,25 por 9 e efetuam-na através do algoritmo usual (figura 14), sem qualquer apelo ao cálculo mental e, embora Cláudia não o registe, os números que surgem riscados no canto superior direito, levam a crer que o aplica ‘de cabeça’ (figura 14).

Figura 14 - O algoritmo usual da multiplicação e os registos de

José é convidado a ir ao quadro explicar a sua resolução (figura 15) e é neste momento que se percebe que trabalhou claramente com o resultado da questão anterior, como era expectável no momento de planificação da tarefa.

Professora – José, explica lá então como é que fizeste.
 José – Eu fiz, a medida do sábado é quatro quintos. Depois 1 copo de água tinha um vírgula vinte e cinco... e depois...
 Professora – Calma. Como é que tu sabes isto? (aponta 1 copo de água – 1,25 l) De onde é que tu...
 José – Da questão anterior.
 Professora – AH! É que o José e a Cláudia foram à resposta anterior (pega na folha de resposta de José para a mostrar a toda a turma.) e, na resposta anterior, eles tinham visto que para cada copo de concentrado era um litro e mais um quarto. Então, eles foram pegar nisto (aponta $1,25 \times 9 = 11,25$). Nove copos de concentrado, é só multiplicar, e está muito bem. Está certo.

Figura 15 - A explicação de José

Os alunos não utilizam a razão unitária. Uns trabalham com $\frac{4}{5}$ através de um registo em tabela com quatro células, ou numa linha numérica dupla, em que o valor a determinar é representado por um ponto de interrogação, como é o caso de Manuel (figura 16) que, por um lado, regista o algoritmo completo da divisão, onde não figura o resto e na qual seria previsível efetuar cálculo mental; por outro lado, não regista como efetuou a multiplicação e o resultado surge de forma muito rápida.

Figura 16 - A resolução de Manuel

Outros alunos utilizam unicamente razões escritas sob a forma fracionária (figura 17) e Mário regista os algoritmos das duas operações, divisão e multiplicação, assinalando as duas razões e o processo de multiplicar cada um dos termos da primeira pelo mesmo fator 2,25, para obter os respetivos termos da segunda. Mais uma vez, não há qualquer cálculo mental, todos os cálculos são efetuados através dos algoritmos usuais, mesmo se os números envolvidos apelam a que isso não aconteça.

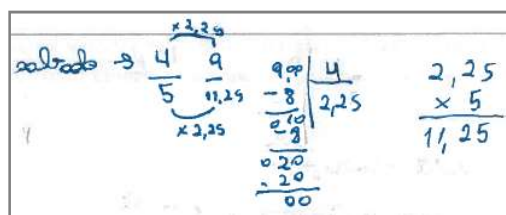


Figura 17 - Os registos de Mário

Ricardo é o único aluno que regista os cálculos de uma forma não algorítmica (figura 18). Uma falha de parênteses vai-lhe influenciar o resultado que tem registado e que não deve ter coincidido com o que tinha na sua cabeça, uma vez que utiliza corretamente o fator 2,25. Não se percebe como surge este número porque os cálculos apresentados são mais uma confirmação dos resultados do que propriamente um processo para os obter.

Nesta resolução é evidente a relação elementar entre decimais e frações ($0,25 = \frac{1}{4}$) a qual permite a decomposição de 2,25 em parte inteira e fracionária ($2,25 = 2 + \frac{1}{4}$).

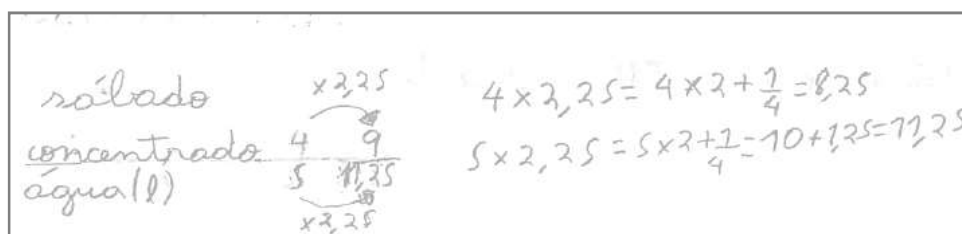


Figura 18 - Como Ricardo confirma o fator 2,25

Questão 4

Se a mãe do João utilizar 18 litros de água, quantas chávenas de concentrado de sumo de limão deve misturar para que a limonada tenha o mesmo sabor que a de sexta-feira?

Nesta questão os alunos trabalham com a razão $\frac{3}{4}$ que representa a mistura de sexta-feira. Vários deles registam uma linha numérica dupla onde colocam os valores correspondentes a essa mistura (número de chávenas de concentrado de sumo de limão, em cima, e número de litros de água, em baixo), o 18 (em baixo) e um espaço em branco (preenchido depois) ou um ponto de interrogação (em cima), como acontece. Mais uma vez está explícito o algoritmo completo da divisão numa situação de apelo ao cálculo mental. A multiplicação é apenas indicada, não está explícito nenhum algoritmo, nem cálculos auxiliares, e não se consegue saber como Manuel a resolve.

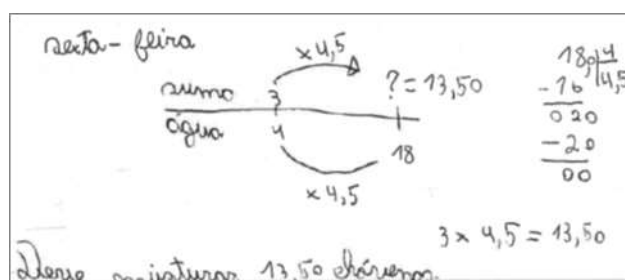
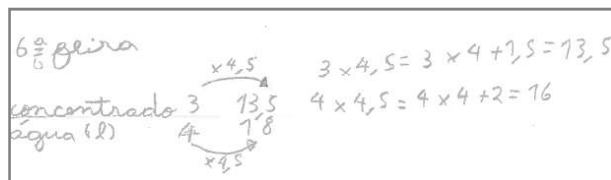


Figura 19 - A resolução de Manuel

Ricardo, sem um registo em tabela de razões (não há riscos de separação das colunas e das linhas) utiliza-a e, mais uma vez, os cálculos justificam o resultado apresentado e não explicitam como determinou 4,5 (figura 20). No entanto, quando é solicitado pela professora explica como chega àquele valor.



Professora – Ricardo, queres dizer como é que tu viste que havia quatro vezes e meia?

Ele não fez conta.

Ricardo – Quatro vezes quatro é dezasseis. E depois, mais metade de quatro.

Professora – Então, quatro vezes quatro são dezasseis. Do dezasseis para o dezoito falta-me o quê? Falta-me metade do quatro. Por isso, quatro vezes e meia. Está certo. Pronto, por isso ele não fez sequer a conta, fez o cálculo de cabeça. Pronto, ela fez a continha, como a maioria fez, e viu que daqui para aqui (aponta na seta anteriormente representada) era quatro e meio e depois...

Figura 20 - Os cálculos e a explicação de Ricardo

Conclusão

Fazer Limonadas é uma tarefa que permite exemplificar uma comparação multiplicativa entre quantidades de duas grandezas diferentes, na qual o ato de misturar origina uma unidade composta (sabor da limonada), compreensível para os alunos através do registo em tabela de razões ou linha numéricas duplas.

Numa primeira análise das resoluções escritas, complementada com a descrição da aula, é possível identificar que os alunos, na questão 1, recorrem basicamente a tabelas ou a linhas numéricas duplas, onde surgem as setas auxiliares dos procedimentos de multiplicar cada termo da razão pelo mesmo número (inteiro diferente de zero). Nas questões seguintes, esse registo continua visível mas de uma forma mais resumida (apenas com duas colunas e duas linhas, ou com dois pontos, respetivamente) e sempre com a ideia de organizar os dados e os procedimentos a realizar.

Os alunos resolvem esta tarefa, tipo problema de proporções, sem utilizarem um método algorítmico. Representam a razão sempre como uma fração onde os termos podem ser, ou não, números inteiros. Todo o seu raciocínio para a obtenção de razões iguais é baseado numa relação multiplicativa entre os termos correspondentes das razões em causa. O procedimento de multiplicar cada um dos termos da razão por um mesmo fator, inteiro ou não inteiro, diferente de zero, leva-os implicitamente ao conceito de razão escalar.

No entanto, poucos são os alunos que demonstram raciocinar de uma maneira flexível ou adaptativa, uma vez que os cálculos realizados são apoiados nos algoritmos escritos das operações divisão e multiplicação e não recorrem ao uso de relações numéricas e propriedades das operações que simplificariam os cálculos. Apenas um aluno parece ‘dar sentido’ aos cálculos que realiza, relacionando os números escritos na forma decimal e fracionária.

Tirar partido do que se conclui numa parte da tarefa para resolver a ou as alíneas seguintes é difícil para a maioria dos alunos. De facto, são raros os alunos que relacionam entre si os resultados anteriormente obtidos e, como tal, a maioria utiliza processos que se tornam repetitivos, não demonstrando sensibilidade para pensar em utilizar procedimentos ‘expeditos’ e que lhe facilitem o cálculo.

Sob o ponto de vista da comparação multiplicativa com flexibilidade / adaptabilidade, *Fazer Limonadas* mostrou-se uma tarefa com potencial para envolver os alunos na

discussão de conceitos e de estratégias próprias. A exploração da tarefa evidenciou ainda que o uso de procedimentos flexíveis / adaptativos não foi induzido pelo recurso usado, mesmo sendo este um dos aspetos que orientou o *design* de *Fazer Limonadas*.

Estes resultados sugerem que o segundo ciclo da experiência de ensino deverá explicitamente incluir a exploração de recursos focados no cálculo mental de maneira a usar e a encadear relações numéricas e propriedades das operações.

Referências

- Berk, D., Taber, S., Gorowara, C. & Poetzl, C. (2009). Developing Prospective Elementary Teachers' Flexibility in the domain of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 113-135.
- Brown, A (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141-178.
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. & Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Ed.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.
- Heinze, A., Star, J. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education, *ZDM Mathematics Education*, 41, 535-540.
- Kraemer, J. M., Brocardo, J., Mendes, F. & Delgado, C. (2014). *Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning*. (Paper presented in ECER, Porto, Portugal).
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Ed.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (versão portuguesa). Lisboa: APM.
- NCTM. (2010). *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics in Grades 6-8*. Reston, VA: NCTM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Post, T., Behr, M. & Lesh, R. (1988). Proportionality and the Development of Prealgebra Understandings. In J. Hiebert & M. Behr (Ed.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & NCTM.
- Shield, M. & Dole, S. (2002). Investigating textbook presentations of ratio and proportion. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch & M. Thomas (Ed.),

- Proceedings Mathematics in the South Pacific. The 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 608-615). Auckland: University of Auckland.
- Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University.
- Thompson, P. & Saldanha, L. (2003). Fractions and Multiplicative Reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Ed.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: NCTM.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 135-169). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & NCTM.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335–359.

Anexo

Nome: _____ Data: _____

Tarefa 5 – Fazer Limonadas¹

Quando o João e os amigos se juntam para brincar, a mãe dele faz limonada para todos, misturando concentrado de sumo de limão e água fresca.



Na sexta-feira, a mãe do João fez limonada e misturou 3 chávenas de concentrado de sumo de limão e 4 litros de água.

No sábado, na festa de anos do João, a mãe fez limonada e misturou 4 chávenas de concentrado de sumo de limão e 5 litros de água.

1. Alguns amigos do João disseram que a limonada de sexta-feira tinha um sabor a limão diferente da de sábado. Concordas com eles? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

2. Uns dias depois, a mãe do João pretendeu fazer limonada com o mesmo sabor a limão daquela que tinha feito no sábado, mas só tinha 1 chávena de concentrado de limão. Que quantidade de água devia ter utilizado? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

¹ Adaptado de Using Proportional Reasoning in Mathematics Assessment Project (2015). University of Nottingham & UCL Berkeley.

3. Quando foram à excursão, a mãe do João voltou a fazer limonada com o mesmo sabor da que tinha feito no sábado e, nesse momento, misturou 9 chávenas de concentrado de sumo de limão com água. És capaz de dizer quantos litros de água utilizou? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

4. Se a mãe do João utilizar 18 litros de água, quantas chávenas de concentrado de sumo de limão deve misturar para que a limonada tenha o mesmo sabor que a de sexta-feira? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

