h

EDUCAÇÃO

ESCOLA SUPERIOR
POLITÉCNICO SETÚBAL

ANA RAQUEL
FAUSTINO PINTO

A APRENDIZAGEM DE NÚMEROS RACIONAIS ATRAVÉS DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES: UM ESTUDO NO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE

Relatório de Projeto de Investigação do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

ORIENTADORA
Professora Doutora Cristina Maria da Silva Morais

novembro de 2024

"*What died didn't stay dead*

You're alive in my head"

T.S.

AGRADECIMENTOS

Este relatório marca o fim de uma era, o fim do meu percurso académico realizado com muito esforço. Durante estes cinco anos na ESE de Setúbal conheci uma outra realidade de escola que, até então, desconhecia. Quem me conhece sabe o quanto eu queria entrar na ESE de Lisboa, porém há muito tempo que sei que foi o destino. A ESE é como uma casa, uma família. Claro que como em todas as famílias há pessoas das quais gostamos mais, em comparação a outras, e é a essas pessoas a quem eu quero agradecer.

Começo por agradecer à minha orientadora, Cristina Morais, por toda a disponibilidade durante as várias fases que envolveram este projeto, partilhas e motivação quando não sabia por que caminho seguir, no início deste projeto. Agradeço, ainda, por me fazer ver que este relatório deveria ser encarado como mais um trabalho, igual a tantos outros já realizados. Confesso que foi graças a isso que realizei este trabalho com menos stresse.

À professora Catarina Delgado, como é óbvio, que me aturou durante estes últimos três anos, e com a qual eu sei que posso sempre contar.

À professora Fátima Mendes, que me confortou quando a ansiedade e a paranoia deram conta de mim.

À professora Elisabete Gomes por todo o apoio.

Através do IPS conheci a minha Be, a minha querida educadora cooperante que tanto me ensinou e continua a ensinar. Obrigada a si e aos meninos da sala castanha, que vão agora para o 1.º Ciclo e que tanto me ensinaram, principalmente a perceber que caminho seguir profissionalmente. Obrigada!

Na ESE não conheci apenas professores. Por isso, aqui vai:

À Vânia, por ter sido tão minha amiga durante estes cinco anos. Devemos estar gratas (mesmo que cansadas) pelo esforço dedicado,

principalmente no mestrado. A nós, que conseguimos terminar os cinco anos sem entrar no hospício. A nós, que mesmo em mestrados diferentes terminamos, agora, o mestrado em “dobro”. Muito obrigada por me teres ajudado, aturado e por teres sido minha parceira nos trabalhos, mesmo sem o seres. Um beijo e um queijo.

À Ana Lúcia e à Joana, que quando entrei no mestrado passei a fazer parte de outro grupo, com o qual trabalhei e me diverti imenso. Que sejamos sempre unidas.

E por fim, está na hora de agradecer à minha verdadeira família:

Aos meus pais, pelo apoio, durante estes anos, principalmente à minha mãe.

À Guida e à Carmi, por perceberem o meu afastamento (durante muitos meses) e por me mostrarem que posso sempre contar com elas. Que continuemos a apoiar-nos em tudo. E mais uma vez a ti, minha querida Carmi, que passaste horas e horas a ler os meus trabalhos e que leste este trabalho do início ao fim.

RESUMO

O presente relatório de investigação apresenta um estudo realizado em contexto de 1.º Ciclo do Ensino Básico, numa turma de 4.º ano de escolaridade, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. O estudo tem como tema múltiplas representações de números racionais e pretende compreender de que forma é que os alunos utilizam e relacionam diferentes representações de número racional e qual o contributo dos modelos para essas transformações realizadas pelos alunos.

No que se refere à metodologia adotada, o estudo enquadra-se numa abordagem de caráter qualitativo, seguindo uma metodologia sobre a prática. Durante a investigação foram recolhidas notas de campo e realizados registos, em forma de vídeo, áudio e fotográfico, durante as fases de implementação, com o intuito de permitir, posteriormente, a análise dos resultados obtidos. Durante a intervenção pedagógica foram implementadas cinco tarefas matemáticas, desenvolvidas em aulas que se apoiavam na abordagem de ensino exploratório.

Através deste estudo foi possível inferir que o trabalho em torno de múltiplas representações que os números racionais podem assumir, apresenta benefícios para o processo de aprendizagem. Os alunos estabeleceram relações entre diferentes representações de número racional – simbólica-icónica, icónica-simbólica e entre representações simbólicas – para as quais a representação em percentagem assumiu particular importância. Para além disso, o recurso aos modelos evidenciou-se como essencial uma vez que permitiu que os alunos realizassem transformações entre diferentes representações de números racionais e que lhes atribuíssem significado, contribuindo assim para a compreensão de número racional.

Palavras-chave: números racionais, múltiplas representações, modelos, ensino exploratório

ABSTRACT

This research report presents a study carried out in the context of the 1st Cycle of Basic Education, in a 4th grade class, within the scope of the Master's Degree in Pre-School Education and Teaching of the 1st Cycle of Basic Education. The study has as its theme multiple representations of rational numbers and aims to understand how students use and relate different representations of rational numbers and what is the contribution of the models to these transformations carried out by the students.

Regarding the methodology adopted, the study is part of a qualitative approach, following a methodology based on practice. During the research, field notes were collected, and video, audio and photographic records were taken during the implementation phases, to allow, later, the analysis of the results obtained. From the results obtained, there was an evolution of the children's learning regarding the research problem and the defined objectives. During the pedagogical intervention, five mathematical tasks were implemented, developed in classes based on the exploratory teaching approach.

Through this study it is possible to infer that the work around multiple representations that rational numbers can assume has benefits for the learning process. The students' established relationships between different representations of rational number – symbolic-iconic, iconic-symbolic, and between symbolic representations – for which percentage representation was particularly important. In addition, the use of models proved to be essential as it supported students to perform transformations between different representations of rational numbers, and that would attribute meaning to them, thus contributing to the understanding of rational numbers.

Keywords: rational numbers, multiple representations, models, exploratory teaching

Índice

AGRADECIMENTOS III
RESUMO V
ABSTRACT VI
ÍNDICE DE FIGURAS IX
ÍNDICE DE TABELAS X
LISTA DE ABREVIATURAS XI
INTRODUÇÃO 1
1. Pertinência, motivação, questões e objetivos do estudo 1
2. Organização do relatório 5
CAPÍTULO I 7
ENQUADRAMENTO TEÓRICO 7
1. Ensinar e aprender números racionais 8
1.1. Importância da unidade de referência para a aprendizagem dos números racionais 10
1.2. Significados de número racional 11
2. Múltiplas representações no ensino e na aprendizagem dos números racionais 14
2.1. Como se representam os números racionais? ..... **Erro! Marcador não definido.**
2.1.1. Os modelos como suporte para a aprendizagem de número racional 21
3. O percurso de uma aula de Matemática: ensino exploratório 25
CAPÍTULO II 29
METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO 29
1. Opções metodológicas 30
1.1. Investigação qualitativa 31
1.2. Investigação sobre a prática 33
1.3. Ética com crianças 34
2. Recolha de Dados 35
2.1. Observação 36
2.2. Recolha documental 38
2.3. Análise de dados 39
CAPÍTULO III 43
INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA 43
1. Contexto educativo 43
2. Descrição da intervenção pedagógica 47
2.1. Opções tomadas que orientaram a intervenção 47

2.1.1. Modalidades de trabalho 47
2.1.2. Tarefa Diagnóstica 50
2.1.3. Calendarização das tarefas .....**Erro! Marcador não definido.**
2.1.1.1. Tarefas da Intervenção Pedagógica.....**Erro! Marcador não definido.**
CAPÍTULO IV.....60
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....60
1. Tarefa 1: "Pacote de leite" 60
2. Tarefa 2: "Download Stumble Guys" 68
3. Tarefa 3: "Explorando o modelo do azulejo".....73
4. Tarefa 4: "Vamos conhecer o *Decimat*".....79
5. Tarefa 5: "À descoberta da toalha" 86
CAPÍTULO V 96
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....96
1. Síntese do estudo.....96
1.1. Resposta às questões de investigação.....98
1.1.1. Qual a flexibilidade que os alunos apresentam no uso das diferentes representações de número racional?.....98
1.1.2. De que forma é que a utilização de modelos pode apoiar nas transformações de número racional? 102
1.2. Reflexão sobre o estudo 104
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 106
ANEXOS 114
Anexos A – Consentimento Informado.....115
Anexos B – Planta da sala.....118
Anexos C – Tarefa Diagnóstica 120
Anexos D – Planificação: Tarefa 1.....123
Anexos E– Planificação: Tarefa 2 129
Anexos F– Planificação: Tarefa 3 137
Anexos G– Planificação: Tarefa 4.....146
Anexos H– Planificação: Tarefa 5.....157

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 20
Figura 2 24
Figura 3 53
Figura 4 54
Figura 5 61
Figura 6 65
Figura 7 69
Figura 8 70
Figura 9 72
Figura 10 74
Figura 11 77
Figura 12 79
Figura 13 82
Figura 14 82
Figura 15 84
Figura 16 87
Figura 17 88
Figura 18 89
Figura 19 90
Figura 20 91

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.....13
Tabela 2.....41
Tabela 3.....49
Tabela 4.....51
Tabela 5.....55

LISTA DE ABREVIATURAS

UC – Unidade Curricular

CEB – Ciclo do Ensino Básico

AE – Aprendizagens Essenciais

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

PASEO – Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória

PEI – Projeto Educativo da Instituição

SPCE – Sociedade Portuguesa de Ciências da Comunicação

MEM – Movimento da Escola Moderna

PIT – Plano Individual de Trabalho

TEA – Tempo de Estudo Autónomo

INTRODUÇÃO

O presente relatório pretende apresentar um estudo realizado no âmbito da Unidade Curricular (UC) de Estágio IV do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) que, de acordo com as Aprendizagens Essenciais (AE), se enquadrada no tema *Números*. O projeto de investigação foi implementado em contexto de 1.º CEB, mais concretamente, numa turma de 4.º ano de escolaridade.

Assim, este capítulo pretende contextualizar a investigação realizada que apresenta como título "A aprendizagem de números racionais através de múltiplas representações: um estudo no 4.º ano de escolaridade" para além de justificar a pertinência do estudo, bem como a motivação que me levou a optar por este tópico. Posteriormente, será apresentada a questão-problema e os objetivos que orientarão o estudo e que pretendem dar resposta às questões. Por fim, será apresentada uma breve descrição da estrutura do relatório.

1. Pertinência, motivação, questões e objetivos do estudo

O interesse por estudar a aprendizagem dos números racionais surge da minha própria dificuldade, enquanto aluna, perante este conteúdo matemático. Este aspeto fez-me interrogar, enquanto futura profissional, sobre como poderia apoiar os alunos na aprendizagem do tópico das frações e decimais, considerado complexo por vários autores (Berh et al., 1983; Morais & Serrazina, 2018), através de tarefas desafiantes e do trabalho conjunto entre diferentes representações que os números racionais podem assumir.

No decorrer da minha formação académica, por opção, tive contacto com o tópico dos números racionais, tendo realizado alguns trabalhos sobre esta temática. No 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica, o meu grupo optou por realizar uma tarefa que contribuísse para o desenvolvimento do

sentido de número racional, envolvendo a representação sob a forma de fração, através de um jogo. Com a concretização deste trabalho percebi que a curiosidade em querer saber mais sobre este tópico se mostrou como evidente. Para além disso, também na licenciatura, depois de estagiar numa turma de 5.º ano e perceber as dificuldades que os alunos apresentavam perante este tópico quando explorado a partir de procedimentos, a curiosidade foi crescendo ainda mais perante os números racionais.

Considerando o currículo atual de Matemática até ao 12.º ano, percebe-se que existe um grande foco no tema *Números*. Como tal, se, num primeiro momento, não existir um percurso de aprendizagem dos números racionais através dos seus múltiplos significados e representações, os alunos vão evidenciar dificuldades no domínio deste conteúdo, dado que não se encontra, completamente, desenvolvido. Assim, surge outra das minhas motivações, o gosto pela área da Matemática, levando-me a refletir: "Porque não fazer com que os alunos se interessem, desde cedo, pela área da Matemática?". Muitas vezes os alunos preferem outras áreas do currículo à da Matemática uma vez que não atribuem qualquer significado a esta área, possivelmente, pelo facto de os professores optarem por estratégias pedagógicas que contrariam os conhecimentos prévios dos alunos, assentando a sua prática em regras e procedimentos.

O 1.º CEB apresenta-se como uma das etapas mais importante no percurso de escolaridade dos alunos, no qual se constroem as bases do conhecimento. Durante estes quatro primeiros anos de escolaridade obrigatória, os alunos começam a estabelecer aprendizagens, de acordo com as experiências educativas que lhes são proporcionadas (Leal et al., 2010).

Diversos estudos identificam os números racionais como sendo um dos tópicos mais complexos de lecionar, no 1.º CEB (NCTM, 2008; Cardoso & Mamede, 2017; Morais & Serrazina, 2017; Morais & Serrazina, 2018). Um dos subtópicos a ser lecionado no 4.º ano de escolaridade é, precisamente, o

trabalho em torno de diferentes representações simbólicas de número racional, no qual, os alunos devem "usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%, 0,01, $\frac{1}{100}$ e 1%" (Canavarro et al., 2021, p. 24). Como tal, a aprendizagem dos números racionais não deve ser trabalhada de forma isolada, isto é, não deve haver um trabalho isolado no que concerne às diferentes representações de número racional, mas sim, um trabalho de conexão entre diferentes representações (Morais & Serrazina, 2017; Duncan et al., 2010).

De acordo com Brocardo (2010), é importante que os professores compreendam que "fracções, decimais e percentagens são representações de números que só ganham sentido quando percebemos como são utilizadas em diferentes contextos" (p.17). Assim, para além de um trabalho que envolve diferentes representações, deve haver um trabalho partindo dos diferentes significados que os números racionais podem assumir, para que a compreensão de número racional se desenvolva partindo de diversas experiências (Behr et al., 1983). Desta forma, importa salientar que no processo de aprendizagem dos números racionais os alunos realizam transformações, ou seja, realizam mudança entre diferentes representações (ex.: $\frac{1}{2}$=0,5).

Portanto, para tentar colmatar as dificuldades que pudessem existir neste conteúdo, optei por delinear um percurso que integrasse e interligasse o trabalho com diferentes representações de número racional. Como tal, optei por recorrer à metodologia de ensino exploratório uma vez que coloca os alunos no centro do processo de aprendizagem. A comunicação matemática assume grande importância durante a intervenção pedagógica sendo que, tal como afirmam Canavarro et al. (2021), deve ser algo essencial numa aula de Matemática na qual se deve "proporcionar oportunidade[s] e tempo para que

os alunos pensem, partilhem e discutam entre si as produções matemáticas que realizam durante a exploração de uma tarefa, e para que sistematizem coletivamente as aprendizagens matemáticas que emergem" (p. 6).

Desta forma, esta metodologia surgiu como uma prática a recorrer durante a implementação do projeto, visto que é capaz de despertar motivação nos alunos levando-os a aprender os conteúdos programados através da discussão entre pares (Boavida et al., 2008). É importante realçar que o ensino e a escola necessitam de professores preparados para a atualidade, capazes de criarem ambientes propícios à aprendizagem e de integrarem todos os alunos, partindo dos seus interesses.

Destaca-se, ainda, que a turma onde foi implementado o projeto de investigação concretizou os seus dois primeiros anos de escolaridade obrigatória (1.º e 2.º ano) durante o tempo de pandemia COVID-19. Desta forma, é possível que muitas destas crianças tenham passado a maior parte do seu tempo diante de recursos tecnológicos tendo acesso direto a tudo o que os rodeava. Por este motivo, evidenciou-se como importante a inclusão de tarefas de caráter prático que partissem das suas motivações e que possibilitassem a troca de ideias entre pares, levando-os à construção de conhecimentos.

Por conseguinte, a disposição dos alunos no que diz respeito à Matemática irá depender das estratégias utilizadas pelo professor e, é neste sentido, que este deve perceber que a utilização de materiais didáticos e de abordagens que se afastem de uma prática baseada em procedimentos poderá contribuir para um aumento das aprendizagens significativas dos alunos (NCTM, 2008). Como refere NCTM (2008), "os alunos terão mais sucesso com um programa de Matemática escolar que incentive o seu desejo natural de compreender aquilo que lhes é pedido para aprender" (p. 22).

Nesta lógica, tendo em consideração tudo o que foi sendo evidenciado, anteriormente, assim como a minha plena noção da importância de

estratégicas pedagógicas diferenciadas elaboradas pelo professor, com o objetivo de integrar todos os alunos e tornar a aprendizagem mais rica e completa, optei por realizar um percurso de 5 tarefas para explorar o tópico dos números racionais.

O propósito da implementação deste projeto era realizar um percurso de trabalho com os números racionais integrando diferentes representações que estes números podem assumir. Para além disso, pretendi recorrer a modelos, como representações icónicas, para ajudar os alunos na construção de conhecimentos associados a esta temática.

Assim, no âmbito da implementação do projeto de investigação, e consequente intervenção pedagógica, defini os seguintes objetivos: (i) compreender de que forma é que os alunos utilizam e relacionam diferentes representações de número racional e (ii) compreender qual o contributo dos modelos para essas transformações realizadas pelos alunos.

Para concretizar, então, estes objetivos de estudo, procurei dar resposta às seguintes questões de investigação:

- **i.** Qual a flexibilidade que os alunos apresentam no uso das diferentes representações de número racional?
  - **a.** Que transformações de números racionais realizam os alunos?
  - **b.** Que ideias apresentam os alunos perante essas transformações?
- **ii.** De que forma é que a utilização de modelos pode apoiar nas transformações de número racional?

2. Organização do relatório

Este relatório encontra-se organizado em cinco capítulos. A presente introdução pretendeu justificar a pertinência do estudo, bem como a motivação que me levou a escolher este tema. Neste capítulo foram, ainda,

identificadas as questões, os objetivos de investigação deste estudo. Apresento, agora, a organização do relatório.

O primeiro capítulo diz respeito ao enquadramento teórico, o qual se encontra subdividido em três subtópicos, considerados como pertinentes face à temática em estudo:

i. Ensinar e aprender números racionais;
ii. Múltiplas representações no ensino e na aprendizagem dos números racionais;
iii. O percurso de uma aula de Matemática: ensino exploratório.

No segundo capítulo, pretende apresentar-se as opções metodológicas utilizadas no decorrer desta investigação.

O terceiro capítulo apresenta o contexto em que foi realizado o projeto de intervenção da mesma maneira que descreve o percurso de intervenção. Inicialmente existe uma breve descrição de como foram implementadas todas as tarefas, que seguiram a mesma estrutura de aula e, de seguida, uma breve descrição do que era pretendido com as tarefas e o tipo de relações entre diferentes representações de número racional estabelecidas pelos alunos. Neste capítulo são referidas as planificações realizadas durante a intervenção pedagógica associada a este projeto e implementadas em contexto de 4.º ano, que constam em anexo.

Já no quarto capítulo são analisados e interpretados os dados recolhidos a partir da técnica selecionada e mencionada anteriormente no capítulo da metodologia.

Por fim, o quinto capítulo, apresenta as considerações finais, que estão divididas em três subtópicos. Primeiramente, é realizada uma síntese do estudo, de seguida, apresenta-se a resposta às questões de investigação e, finalmente, é realizada uma reflexão global sobre o contributo do estudo para a construção do meu perfil profissional docente.

CAPÍTULO I
ENQUADRAMENTO TEÓRICO

O presente capítulo enquadra, de forma pormenorizada, a investigação realizada em contexto de estágio, sendo que se encontra fundamentado com literatura de referência. Considerando os objetivos que pretendem apoiar este projeto de investigação: (i) compreender de que forma é que os alunos utilizam e relacionam diferentes representações de número racional e (ii) compreender qual o contributo dos modelos para essas transformações realizadas pelos alunos; este capítulo encontra-se subdividido em três subcapítulos:

- Ensinar e aprender números racionais;
- Múltiplas representações no ensino e na aprendizagem dos números racionais;
- O percurso de uma aula de Matemática: ensino exploratório.

Os números racionais, como referem Barnett-Clarke et al. (2010) apresentam-se como um tópico essencial para a aprendizagem da Matemática. Os autores definem os números racionais como sendo um número que pode ser representado por um quociente ou indicar uma divisão entre dois números em que a é dividido por b e b não pode ser 0[1] (Barnett-Clarke et al., 2010).

De acordo com Behr et al. (1983; citado por Guerreiro & Serrazina, 2015), "os números racionais são das ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante a escolaridade obrigatória" (p. 91). As dificuldades associadas ao ensino e aprendizagem deste tópico encontram-se documentada na literatura, sendo alvo de estudo há vários anos

[1] O termo número racional, referido no corpo do presente relatório, é usado para indicar um elemento do conjunto dos números racionais não negativos.

(Behr et al., 1983; NCTM, 2008; Barnett-Clarke et al., 2010; Cardoso & Mamede, 2017; Morais & Serrazina, 2017; Morais & Serrazina, 2018; Mamede et al., 2021).

1. Ensinar e aprender números racionais

A compreensão de número racional, tal como documentada na literatura, apresenta-se como um desafio para os alunos. Neste sentido, torna-se essencial que o professor promova uma aprendizagem destes números o mais intuitiva possível. Como tal, Monteiro e Pinto (2005), referem que, inicialmente, deve existir um percurso informal para a aprendizagem deste tópico e só posteriormente, depois de um vasto trabalho, se desenvolva um trabalho mais formal, ou seja, a generalização de regras e o trabalho em torno dos símbolos e dos algoritmos (Behr et al., 1983). Monteiro e Pinto (2005) salientam, também, que "o facto de os alunos saberem operar com símbolos, não significa" (p. 89) a compreensão sobre os conceitos trabalhados, podendo haver uma mecanização apoiada numa memorização de regras sem compreensão (Tian & Siegler, 2017).

Para desenvolver o sentido de número racional é necessário que, em primeiro lugar, os alunos evidenciem um bom sentido de número natural (Brocardo et al., 2005). Como tal, o sentido do número assume-se como a compreensão que cada pessoa apresenta dos números e das operações e das estratégias que apresenta para lidar com esses números (McIntosh et al., 1992), desenvolvendo-se à medida que o indivíduo é exposto a diversas situações (Brocardo, 2010). A gradual compreensão de número racional e o trabalho com diferentes representações que este pode assumir mostra-se como um marco importante no sentido de número racional (McIntosh et al., 1992).

Tian e Siegler (2017) explicitam a dificuldade apresentada por alunos, e até mesmo adultos, perante a compreensão de número racional. Os autores, no seu estudo, referem que vários investigadores apontam que numerais

decimais[2] são mais fáceis de ensinar do que frações[3], sendo que esta representação carece de uma maior complexidade e que o trabalho com os primeiros pode reduzir as dificuldades relacionadas aos segundos. Embora alguns alunos consigam, de facto, compreender o trabalho em torno dos números racionais e utilizar os conceitos associados com compreensão, nota-se uma clara dificuldade relativamente à compreensão de fração (Tian & Siegler, 2017). Esta dificuldade aparenta persistir entre "os alunos do ensino superior e até mesmo em especialistas da área da matemática" (Tian & Siegler, 2017, p. 355), na medida em que existe a priorização do conhecimento de regras e não da compreensão (NCTM, 2008).

Moss e Case (1999) revelam, também, que a dificuldade no tópico dos números racionais parece estender-se aos anos que se seguem ao 1.º CEB. Tal como presente no estudo dos mesmos autores, no geral, parece existir um ensino focado nos procedimentos, com um claro impacto no processo de ensino e aprendizagem associado aos números racionais (Moss & Case, 1999), aludindo para a ideia de que a dificuldade associada à compreensão destes números pode estar relacionada com os seguintes aspetos:

(i) existe uma dedicação em demasia, no que diz respeito aos procedimentos e à manipulação de números racionais, sendo que o currículo e os próprios professores se centram nas regras ao invés de priorizarem as relações e os seus significados;

(ii) existe uma priorização do ensino e não da aprendizagem, não havendo consideração pelas intervenções "espontâneas das crianças para dar sentido aos números racionais" (p. 123), isto é, não parece ser adotada uma abordagem construtivista

[2] A expressão numeral decimal é utilizada para designar uma representação de número racional positivo, representado de acordo com o sistema de numeração decimal.

[3] O termo fração é utilizado, ao longo do relatório, para designar um número racional não negativo representado sob a forma de fração.

incluindo os alunos no centro da aprendizagem (NCTM, 2008);

(iii) a utilização das mesmas representações que são usadas anteriormente no ensino dos números inteiros como, por exemplo, a utilização do Material Multibásico (MAB), podem ser um entrave à compreensão de número racional;

(iv) a ideia de que as representações de número racional são facilmente compreensíveis, apesar da sua complexidade, podendo ser "dad[as] no início de uma aula" (Moss & Case, 1999, p. 123).

Também Monteiro e Pinto (2005) destacam a complexidade presente no tópico dos números racionais apresentando três justificações para tal problema: "[(i)] os diferentes significados das frações; [(ii)] a conceptualização da unidade; e [(iii)] o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos" (p. 89). De facto, o processo de ensino e aprendizagem a partir de regras, que até poderão parecer simples, pode evidenciar-se complexo quando os alunos não apresentam uma base conceptual sustentada sobre os números racionais (Brocardo, 2010).

Na aprendizagem dos números racionais, considera-se fulcral o trabalho em torno da unidade (Monteiro & Pinto, 2005). Vários estudos (Monteiro & Pinto, 2005; Fosnot & Dolk, 2002) apresentam que a conceptualização da unidade assume grande importância no ensino e na aprendizagem dos números racionais.

1.1. Importância da unidade de referência para a aprendizagem dos números racionais

A conceptualização da unidade, isto é, a interpretação da unidade de referência (*unitizing*) é considerada por Barnett-Clarke et al. (2010) como algo complexo, mas que se evidencia fulcral na compreensão de número racional. Este conceito de *unitizing* engloba, ainda, a noção de decompor

(*reunitizing* – quando os alunos conseguem compreender que 75% pode ser visto como $\frac{3}{4}$ da unidade ou como 50%+25%) e de recompor (*reversing* – quando é dada uma parte e se pede para, a partir dela, se descobrir o todo), sendo que deve existir, caso necessário, flexibilidade para decompor e recompor a unidade de referência (Baturo, 2004), de acordo com o contexto que é apresentado.

Monteiro e Pinto (2005) expõem a importância da conceptualização da unidade partindo de uma questão: "A Joana gastou $\frac{1}{3}$ da sua mesada em idas ao cinema e a Marta gastou $\frac{1}{2}$ da sua mesada em idas ao cinema, quem gastou mais?" (p. 94). Muitos alunos evidenciam dificuldades na resolução de problemas onde estão perante unidades diferentes ou desconhecidas (Monteiro & Pinto, 2005; Barnett-Clarke et al. (2010); Silva et al., 2012). Possivelmente, alunos que estão expostos a um ensino centrado em procedimentos, sem espaço para a compreensão dos conceitos, irão comparar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ sem que haja preocupação pela unidade de referência (Monteiro & Pinto, 2005).

A título de exemplo, numa tarefa em que era pedido que os alunos comparassem afirmações como: "Comi um quarto de chocolate que o avô me deu" e "Eu comi metade de um chocolate que o avô me deu", Silva et al. (2012) referem que os alunos tendem a considerar a mesma unidade quando esta não lhes é referida. Através das diferentes interpretações que este tipo de tarefas permite, é possível desenvolver o conceito de número racional.

1.2. Significados de número racional

A complexidade presente no tópico dos números racionais está associada ao facto dos números racionais poderem apresentar diversos significados, podendo assumir diferentes representações (Behr et al., 1983; Duncan et al., 2010; Guerreiro, 2018).

Behr et al. (1983) vão ao encontro desta ideia e salientam que a compreensão destes conceitos só acontece quando as representações são trabalhadas em conjunto e os significados de número racional se interrelacionam. Não obstante, os mesmos autores, expõem que o percurso dos números racionais deve começar partindo do significado da relação parte-todo e que a aprendizagem deste tópico, a partir deste significado de número racional, se apresenta como significativa (Barnett-Clarke et al., 2010), sendo a base para a aprendizagem dos restantes significados. Assim, Behr et al. (1983) reconhecem cinco significados de número racional, sendo eles:

(i) **relação parte-todo:** relação entre uma quantidade (unidade), contínua ou discreta, que será dividida em partes, exatamente, iguais (Behr et al., 1983) (ex.: compreender $\frac{1}{4}$ como uma parte de uma tira de papel dobrada em quatro partes iguais) (Barnett-Clarke et al., 2010);

(ii) **razão:** relação entre duas (ou mais) quantidades da mesma unidade (Barnett-Clarke et al., 2010) (ex.: numa turma de 24 alunos em que 8 são rapazes e 16 são raparigas a razão é de um rapaz para duas raparigas) (Monteiro & Pinto, 2005);

(iii) **operador:** o número racional transforma uma quantidade (discreta ou contínua) noutra quantidade, sendo que o "próprio número é o operador e a operação implícita é a multiplicação" (Barnett-Clarke et al., 2010, p. 27) (ex.: numa turma de 24 alunos, apenas $\frac{1}{4}$ dos alunos pratica desporto);

(iv) **quociente:** quando existe uma relação entre duas quantidades inteiras. A fração representa o quociente entre dois números (Barnett-Clarke et al., 2010), isto é, o numerador representa o número de objetos a ser partilhado e o denominador o número de recetores dessa mesma partilha equitativa (ex.: ao dividir-se três

chocolates por 5 crianças, cada criança ficará com 3/5 de chocolate) (Monteiro & Pinto, 2005);

(v) **medida:** quando se compara uma grandeza com outra, tomada como unidade, ou seja, um número racional com significado de medida "descreve a quantidade de algo em relação ao tamanho de uma unidade" (Barnett-Clarke et al., 2010, p. 21) (ex.: um dos alunos correu $\frac{2}{4}$ da corrida, considerando a distância do ponto de partida até à meta como unidade de medida).

Na perspetiva de Kieren (1988), apresentada por Monteiro e Pinto (2005), para uma aprendizagem significativa dos números racionais, deve ser proporcionado um leque de experiências no qual se explorem os diferentes significados de número racional.

De acordo com as orientações de Matemática em vigor para o 1.º CEB' (Canavarro et al., 2021), no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, devem ser explorados vários sentidos, ou seja, vários significados de número racional. Como tal, optei por elaborar uma tabela que resume o mencionado por Canavarro et al., (2021).

Tabela 1

Significados de número racional a trabalhar no 1.º CEB de acordo com as AE

Ano de escolaridade	Significados a trabalhar	Objetivo de aprendizagem
2.º	Parte-todo	Reconhecer a fração como possibilidade de representar uma quantidade não inteira relativa a uma relação parte-todo, sendo o todo uma unidade contínua, e explicar o significado do numerador e do

		denominador, no contexto da resolução de problemas.
3.º	Parte-todo Quociente	Reconhecer a fração como representação de uma relação parte-todo e de quociente, sendo o todo uma unidade discreta, e explicar o significado do numerador e do denominador em contexto da resolução de problemas.

No ensino dos números racionais, revela-se como importante que o professor disponha de um conhecimento aprofundado de forma a planificar experiências que permitam a aprendizagem dos alunos (Barnett-Clarke et al., 2010) e de forma a conseguir representar uma mesma ideia sob a forma de múltiplas representações (Boavida et al., 2008). Este aspeto mostra-se como essencial uma vez que, possivelmente, nem todos os alunos conseguem construir a compreensão de número racional ao trabalhar com a mesma representação. Indo ao encontro da perspetiva apresentada por Ponte e Serrazina (2000) e Tian e Siegler (2017), para que os números racionais possam ser compreendidos é necessário um processo de ensino e aprendizagem que proporcione o contacto com as múltiplas representações que os números racionais podem apresentar.

2. Múltiplas representações no ensino e na aprendizagem dos números racionais

Desenvolver ideias matemáticas e ser capaz de trabalhar flexivelmente sobre elas requer um trabalho significativo perante diferentes representações (Tripathi, 2008). Portanto, quando existe compreensão matemática, possivelmente, significa que os alunos são capazes de recorrer a representações matemáticas, estabelecendo conexões entre representações (Ventura, 2013). De facto, estas desempenham um papel preponderante na

medida em que, aprender a usar diferentes representações para um mesmo conceito facilitará o processo de aprendizagem do que está a ser explorado, no sentido em que os alunos começam a fazer corresponder as representações simbólicas a outras representações (NCTM, 2008). Recorrendo a uma analogia, Tripathi (2008) clarifica a ideia de que "utilizar (…) diferentes representações é como examinar o conceito através de uma variedade de lentes, sendo que cada lente fornece uma perspetiva diferente que torna a imagem (conceito) mais rica e profunda" (p. 438).

Desde há muitos anos que o currículo de Matemática prioriza algumas representações para a construção de conceitos pois, o trabalho com diferentes representações torna-se necessário não só para a construção e compreensão de conceitos matemáticos como, também, se evidencia como uma forma de apoiar a comunicação matemática das ideias subjacentes ao que se pretende comunicar (Ponte & Serrazina, 2000). Esta capacidade matemática é atualmente reconhecida por Canavarro et al. (2021), estando presente no documento oficial das AE de Matemática para o 1.º CEB. Desta forma, uma das capacidades presente, neste documento, que deverá ser desenvolvida ao longo dos anos é "a capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática, e como possibilidade de apropriação da informação veiculada nos diversos meios de comunicação, nomeadamente digitais, onde surge em formatos em constante evolução" (Canavarro et al., 2021, p. 3).

Tal como referido em Principles and Standarts of School Mathematics (2008), a compreensão de conceitos matemáticos desenvolve-se de forma gradual à medida que os alunos são expostos às diferentes representações que um mesmo conceito pode apresentar (NCTM, 2008). Para a compreensão de um novo conceito torna-se essencial não apenas compreender o seu conteúdo, como também as múltiplas relações que se estabelecem entre este conceito e outros conteúdos (Tripathi, 2008). As diferentes representações podem, e

devem, ser trabalhadas em conjunto (Boavida et al., 2008) para uma melhor compreensão do conceito, visto que cada representação salienta aspetos e características diferentes (Tripathi, 2008).

Tripathi (2008) alude para a ideia de que "uma representação pode incluir componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, contextuais, pictóricos ou simbólicos que descrevam aspetos do conceito" (p. 438) a trabalhar. Também Bruner (1999; citado por Ponte e Serrazina, 2000) refere três categorias de representação: (i) representações simbólicas – como os algarismos e os sinais das operações; (ii) representações icónicas – como figuras e gráficos; e (iii) representações ativas – como é o caso de ações e gestos realizados sobre determinados "objetos usados ou não deliberadamente como material didático" (p. 40). Estas representações vão ao encontro das mencionadas por Tripathi (2008). Ponte e Serrazina (2000), acrescentam ainda a linguagem oral e escrita como uma representação relevante no 1.º Ciclo. Assim, as diferentes representações poderão desempenhar um papel poderoso, isto é, são adequadas e eficazes na construção de ideias matemáticas (Ponte & Serrazina, 2000).

Boavida et al. (2008) expõem que nem todos os alunos se encontram aptos para trabalhar com a mesma representação e, por esse mesmo motivo, o professor deve possibilitar o contacto e desenvolver o trabalho de um conceito a partir de diferentes representações. Os alunos poderão, depois, optar por trabalhar com as representações com as quais se sentem mais confortáveis (Ponte & Serrazina, 2000), no momento de resolução de um problema ou exploração de uma tarefa pois, "quanto mais diversificadas as representações a que os alunos têm oportunidade de ligar novos conceitos ou procedimentos, mais provável é que possam recorrer a conhecimentos anteriores que constituam âncoras para as novas ideias" (p. 74) havendo construção de conhecimento, idealmente, como um todo.

A utilização das diferentes representações e a flexibilidade com que os alunos as usam são, também, documentadas na literatura como um aspeto determinante para a construção de significados em Matemática, nomeadamente, na construção do sentido de número racional (Brocardo, 2010; Ponte & Serrazina, 2000; Guerreiro & Serrazina, 2015).

Tal como já foi mencionado, a aprendizagem do tópico dos números racionais é evidenciada na literatura como complexa, sendo um tópico em que, por vezes, os alunos apresentam dificuldades. A sua complexidade está associada às múltiplas representações que este conceito envolve e aos seus múltiplos significados. Para que o conceito de número racional seja compreendido, na sua globalidade, os alunos devem compreender que um número racional pode ser representado de diferentes formas, nomeadamente na sua representação simbólica e icónica, representações estas que serão focadas durante a intervenção pedagógica.

Portanto, o ensino deve privilegiar um trabalho adequado perante diferentes representações (linguagem oral, ativas, icónicas e simbólicas) que o número racional pode assumir, auxiliando os alunos a estabelecer conexões entre as representações (Lembke & Reys, 1994), ou seja, os alunos devem ser capazes de realizar transformações entre representações, o que evidenciará a compreensão do conceito. A utilização de diferentes representações de números racionais evidencia-se central na compreensão de número racional, sendo importante que os alunos vão mobilizando diferentes representações (Ponte & Serrazina, 2000; Ponte & Serrazina, 2009), sejam elas simbólicas ou icónicas, e que se vão tornando fluentes na utilização de diferentes representações para um mesmo número, de acordo com a situação.

Vários estudos (Behr et al., 1983; Cardoso & Mamede, 2017) evidenciam que a aprendizagem do conceito de número racional só está completa quando os alunos conseguem trabalhar com diferentes representações de número racional, isto é, quando conseguem explicar as suas

ideias matemáticas através de diferentes formas de representação, tais como as enunciadas por Ponte e Serrazina (2000).

Barnett-Clarke et al. (2010) referem que os alunos devem desenvolver, de forma gradual, a compreensão das conexões entre frações e numerais decimais. Lanchance e Confrey (2002) corroboram esta ideia, acrescentando a percentagem, referindo que o trabalho envolvendo conexões entre diferentes representações deve ser desenvolvido partindo de um conjunto vasto de experiências. Porém, os mesmos autores mencionam que esta conexão é trabalhada numa fase tardia, posterior ao trabalho de forma individual. Nas orientações curriculares nacionais de matemática, Canavarro et al. (2021) referem que devem ser estabelecidas conexões entre diferentes representações de números racionais.

Moss e Case (1999) desenvolveram um projeto de investigação centrado no processo de aprendizagem dos números racionais, no qual foi trabalhada, numa primeira instância, a percentagem e, só depois, a partir das aprendizagens intuitivas dos alunos, seguiram com a aprendizagem das representações em fração e em numeral decimal. Neste estudo, os autores constataram que a aprendizagem dos números racionais partindo da percentagem pode ser vantajoso. O trabalho com esta representação apresenta semelhanças em relação ao trabalho com os números naturais e, é nesse sentido, e também por ser uma representação com a qual os alunos parecem estar familiarizados, que "esta abordagem (…) traz muitas vantagens para os alunos mais novos, embora (…) seja diferente daquela a [que] (…) são normalmente convidados a seguir" (Moss & Case, 1999, p. 335).

Na mesma perspetiva, Guerreiro e Serrazina (2015), em Portugal, realizaram um estudo que apresenta pontos comuns com o de Moss e Case (1999). Nesse estudo, as autoras começam por aplicar uma tarefa de diagnóstico, numa turma de 3.º ano de escolaridade, com o intuito de perceber de que forma é que a percentagem "se oferecia [como uma representação]

familiar e potente" (Guerreiro & Serrazina, 2015, p. 7). Os alunos revelaram um entendimento assente em experiências do dia a dia, em que 100% correspondia a algo completo. Os resultados da tarefa apontam para a ideia expressa em Principles and Standards for School Mathematics (2008), relativamente à compreensão de conceitos matemáticos que deverá ser construída partindo de situações concretas e de experiências anteriores (NCTM, 2008; Guerreiro & Serrazina, 2015).

No seu estudo, Guerreiro e Serrazina (2015) referem que a representação de número racional em percentagem poderá apresentar potencialidades no desenvolvimento do trabalho com os números racionais, no sentido em que parece apresentar uma "mensagem visual muito forte" (p. 12). Assim, partindo desta abordagem poderá, facilmente, evitar-se uma compreensão incorreta do tópico e melhorar a compreensão das diferentes representações (Guerreiro & Serrazina, 2015), bem como, a flexibilidade em torno destas.

As representações icónicas assumem um papel de destaque neste relatório uma vez que ajudam a dar sentido às representações simbólicas (Lima et al., 2012; citado por Ventura, 2013) e a conceitos matemáticos mais complexos (Amado, 2010). Desta forma, diversos autores expõem a importância da utilização de representações icónicas para apoiar a aprendizagem dos números racionais (Barnett-Clarke et al., 2010; Monteiro & Pinto, 2005; Morais & Serrazina, 2018).

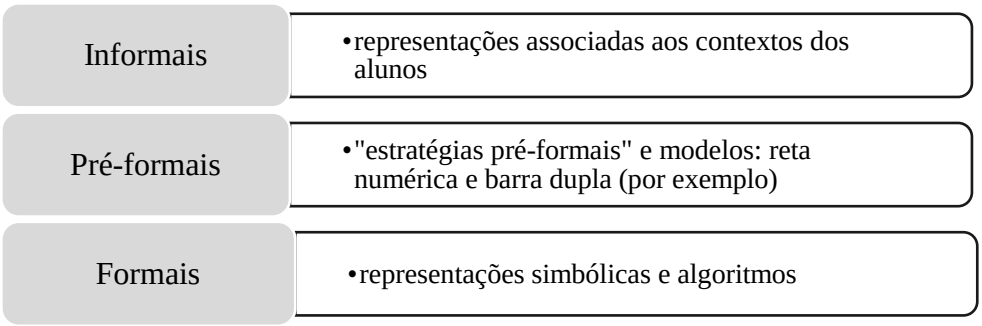
De acordo com o Rational Number Project, realizado no âmbito de um projeto cooperativo de investigação e desenvolvimento de várias instituições universitárias, desde 1979 a 2002, existem estudos na área da psicologia que mostram que "os materiais manipul[áveis] são apenas um componente no desenvolvimento de sistemas de representação e que outros modos de representação também desempenham um papel na aquisição e utilização de conceitos" (Behr et al. 1983, p. 101).

Nesta perspetiva, Behr et al. (1983) apontam que não existe uma representação que seja considerada como a melhor para trabalhar o conceito de número racional e os seus significados, constatando que diferentes materiais e modelos poderão ser relevantes para trabalhar estes conceitos, sendo que cada um poderá ser mais eficaz dependendo da fase de desenvolvimento em que os alunos se encontram na aprendizagem de número racional. Neste sentido "a dobragem de papel [por exemplo] pode ser excelente para representar [uma fração através da] relação parte-todo, frações equivalentes [e] (…) para representar a adição de frações" (Behr et al., 1983, pp. 101-102). Goldin e Kaput (1996; citado por Guerreiro & Serrazina, 2015) partilham da mesma perspetiva expondo que "o poder de uma representação está diretamente relacionado com a sua versatilidade" (p. 3), ou seja, uma mesma representação para além de poder ser utilizada perante diferentes contextos permite que se estabeleçam relações entre diferentes representações (Behr et al., 1983). Neste sentido, torna-se necessário que os alunos desenvolvam um bom "reportório de representações [com as quais] se sintam confiantes a trabalhar" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 45).

O Modelo do Iceberg, desenvolvido por Webb et al. (2008) classifica as representações em três categorias. Para uma compreensão mais clara destas três fases optou-se por realizar o seguinte esquema (Cf. Figura 1):

Figura 1

Percurso da utilização de representações: fases defendidas por Webb et al. (2008)



Neste modelo, o topo do iceberg representa as operações formais com os símbolos e procedimentos, enquanto o volume do iceberg, designado por "capacidade flutuante" representa o percurso que deve ser realizado até que os alunos consigam, de facto, apresentar um nível conceptual desenvolvido para que possam ser trabalhadas as operações formais. Este volume corresponde à combinação de representações informais e pré-formais (Webb et al., 2008). Estes autores referem, ainda, que é necessário que o trabalho seja desenvolvido de forma gradual, partindo de representações informais (como moedas, maçã dividida de forma equitativa) para que, posteriormente, possam ser exploradas representações pré-formais (reta numérica, barra dupla, *Decimat,* entre outros), ou seja, estratégias e modelos que se evidenciam eficazes na construção de conceitos matemáticos.

Anteriormente, neste subcapítulo, foram referidas as representações descritas por Bruner (1999) e Ponte e Serrazina (2000). No entanto, deve esclarecer-se que, apesar de ambos os autores apresentarem classificações diferentes para o conceito de representação, estas não devem dissociar-se sendo que podemos categorizar as representações de Bruner (1999) e de Ponte e Serrazina (2000) nas classificações estabelecidas por Webb et al. (2008).

Desta forma, no presente relatório, evidencia-se como pertinente clarificar os modelos como uma representação icónica, visto terem assumido um papel de destaque, durante a intervenção pedagógica associada ao projeto de investigação.

2.1. Os modelos como suporte para a aprendizagem de número racional

Na perspetiva de Behr et al. (1992; citado por Ventura, 2013) o conhecimento que os alunos apresentam quando chegam ao 1.º ciclo, designado de conhecimento informal, revela-se como importante na construção de vários conceitos matemáticos. Com efeito, os modelos desempenham um papel importante, principalmente, no percurso de ensino e

aprendizagem dos números racionais (Van Galen et al., 2008) "uma vez que (…) [se apresentam como] facilitadores da aprendizagem" (Behr et al., 1981; citado por Ventura, 2013, p. 67).

Carreira (1993) esclarece que um modelo matemático é aquele no qual são utilizados conceitos matemáticos, para representar um contexto, ou seja, é essencial que, a partir desse modelo, exista "a passagem do mundo real para o mundo abstracto dos conceitos e estruturas matemáticas" (p. 50). Assim, torna-se crucial que os alunos saibam trabalhar com as diferentes representações em uníssono, sejam elas, icónicas, simbólicas, verbais ou ativas (Brunner, 1999; Ponte & Serrazina, 2000).

Neste sentido, Van den Heuvel-Panhuizen (2003) indica que, os modelos devem ter duas características essenciais, de forma a contribuir para o processo de aprendizagem. Se por um lado, devem partir de contextos realistas e do conhecimento informal dos alunos, por outro lado, devem ser suficientemente flexíveis para permitir que os alunos passem, posteriormente, para representações formais. Num dos seus estudos Streefland (1985; citado por Van den Heuvel-Panhuizen, 2003) esclareceu que os modelos "podem cumprir a função de ponte entre o nível informal e o formal: passando de um 'modelo de' para um 'modelo para'" (p. 14). Assim, a "mudança de um *modelo de* para um *modelo para* corresponde a uma alteração na forma de pensar do aluno, (…) [ou seja, de acordo com a] situação do contexto modelizado para um enfoque nas relações matemáticas" (Gravemeijer, 2005, pp. 98-99).

Fosnot e Dolk (2002) apresentam os modelos como representações icónicas que devem ser apresentadas aos alunos no seu processo de ensino e aprendizagem. A partir de um processo de modelação (Guerreiro & Serrazina, 2017), os alunos descobrem que a Matemática não é apenas "um sistema fechado de conteúdos a transmitir ou mesmo a descobrir" (Fosnot & Dolk, 2002, p. 73) e, a partir destes modelos que lhes são proporcionados, conferem

significado às ideias matemáticas que estão a ser trabalhadas (Behr et al., 1983; NCTM, 2008; Bernett-Clarke et al., 2010)

Neste sentido, importa esclarecer que, durante a intervenção pedagógica associada ao presente relatório de investigação, será dado destaque a três modelos: o modelo retangular, o modelo 10x10 e o *Decimat*.

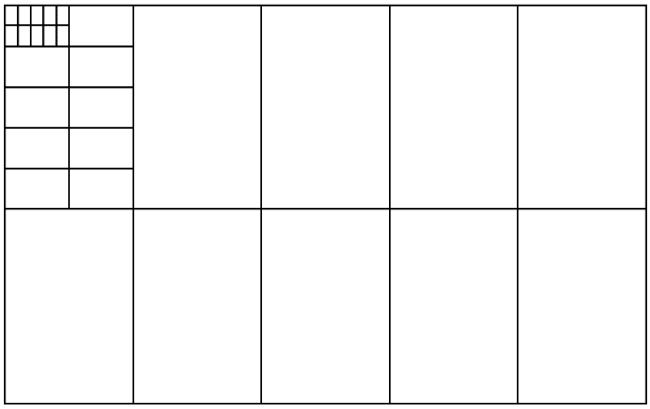
Ao longo deste relatório a menção ao modelo retangular utilizado durante a intervenção pedagógica aproxima-se do modelo de barra dupla, uma vez que o início do modelo retangular, mais à esquerda, é entendido como sendo 0% e a extremidade mais à direita é entendida como 100%, na sua relação com a unidade considerada em cada contexto. Com efeito, Van Galen et al. (2008) referem que a barra dupla se evidencia como um modelo importante para a construção de número racional, uma vez que, este modelo, devido à escala dupla que apresenta, fornece uma imagem precisa das relações que se podem estabelecer entre as unidades a explorar. Nomeadamente para a aprendizagem do conceito de percentagem, este modelo (barra dupla) assume grande importância (Van Galen et al., 2008) na medida em que permite relacionar a imagem visual do que lhes é apresentado à percentagem, como por exemplo, estar metade da barra pintada.

O modelo 10x10 apresenta-se como um potencial modelo no trabalho em torno da representação em numeral decimal, porém, este apresenta a desvantagem de apenas se conseguir representar unidades, décimas e centésimas, sendo que as milésimas não são visíveis de imediato.

Por outro lado, o *Decimat* (Cf. Figura 2), desenvolvido originalmente na Nova Zelândia, é um "modelo proporcional para representar o tamanho das frações decimais e torna explícita a 'dezena' do nosso sistema de valores posicionais de base dez (ou seja, [que] dez centésimas fazem uma décima)" (Roche, 2010, p. 5).

Figura 2

Modelo Decimat dividido em décima, centésima e milésima



Este modelo apresenta-se como um retângulo largo que se encontra dividido em 10 partes exatamente iguais – sendo que cada uma dessas partes corresponde a uma décima. Uma dessas décimas está dividida em 10 partes exatamente iguais – criando as centésimas. No mesmo sentido, uma dessas centésimas está repartida em 10 partes iguais, constituindo as milésimas. Assim, este modelo permite que o aluno disponha de uma visão global sobre o sistema posicional de base dez (Roche, 2010). Portanto, a partir deste modelo torna-se compreensível, para o aluno, quando lhe é pedido para analisar afirmações como: será que 0,135 é maior do que 0,49?; uma vez que é possível visualizar a quantidade representada. Através deste modelo, também, é possível que os alunos "possam imaginar outras divisões, criando dezenas de milésimas e mais" (Roche, 2010, p. 6).

Para uma boa compreensão conceptual dos conceitos a trabalhar Lesh (1979; citado por Prediger, 2013) salienta a importância do trabalho a desenvolver perante diferentes representações. Na perspetiva de Prediger (2013), a adequação das representações nos contextos em que são apresentados evidencia-se como fulcral. Como tal, os modelos permitem que os alunos, através deste tipo de representação icónica, avancem

conceptualmente à medida que os exploram e que promovem um trabalho em conexão com diferentes representações.

3. O percurso de uma aula de Matemática: ensino exploratório

A exploração de uma tarefa, em contexto escolar, pode ser influenciada por diversos fatores, estando um desses fatores relacionado com a forma que o professor propõe a tarefa à turma (Pires, 2011).

Neste sentido, uma das formas de auxiliar os alunos nas dificuldades que possam existir "é selecionar tarefas matemáticas que incentivem os alunos a pensar conceptualmente e sequenciá-las tendo em conta um percurso de aprendizagem orientado por ideias poderosas, modelos adequados e estratégias de referência" (Silva et al., 2012, p. 201). Também, Wood (1999; citado por Guerreiro & Serrazina, 2017) alude para a ideia de que as tarefas que vão sendo propostas em aula deverão ser como forma de proporcionar aos alunos momentos de aprendizagem e que os contextos onde ocorrem deverão, também, permitir que os alunos "participem, examinem, critiquem, e validem o seu conhecimento matemático através de um discurso pensado" (Wood, 1999; citado por Guerreiro & serrazina, 2017, p. 185). Guerreiro e Serrazina (2015) vão, também, ao encontro da perspetiva apresentada por Wood (1999) e expõem que as dinâmicas de trabalho em sala de aula deverão ser pensadas, sendo que cabe ao professor mediar todo o processo de ensino e aprendizagem "promov[endo] a comunicação na sala de aula e a negociação de significados, numa construção compartilhada das aprendizagens" (p. 2). Stein et al. (2008), igualmente, expõem que "as discussões matemáticas são uma parte essencial das visões atuais de um ensino eficaz da matemática" (p. 315) sendo essencial esta prática nas aulas de Matemática.

Esta prática, de um ensino da Matemática voltado para a discussão coletiva, está a ser adotada por todo o mundo com o intuito de dar sentido ao currículo de Matemática (Stein et al., 2008). Stein et al. (2008) referem que o

papel do professor durante as aulas de Matemática tem vindo a mudar “de ‘distribuidor de conhecimentos’ e árbitro da ‘correção’ matemática para um engenheiro de ambientes de aprendizagem em que os alunos se debatem ativamente com problemas matemáticos” (p. 315) e constroem o conhecimento partindo dessa discussão coletiva em torno das suas produções.

As tarefas que serão apresentadas adiante neste relatório de investigação foram realizadas tendo como referência o ensino exploratório da Matemática, sendo relevante enquadrá-lo.

De acordo com Canavarro (2011), o ensino exploratório da Matemática não concede aos alunos o poder de aprenderem sozinhos, mas sim que os alunos aprendam a partir da exploração de tarefas potentes, ou seja, tarefas eficazes, adequadas e acessíveis, e da discussão coletiva, que acontece num momento posterior à sua exploração.

Nesta perspetiva, uma aula de ensino exploratório deve ser, antes de tudo, extremamente bem planeada pelo professor no sentido em que as tarefas necessitam de ser bem escolhidas e estruturadas de forma a potenciar a discussão e a aprendizagem (Canavarro, 2011).

A prática de ensino exploratório requer do professor uma atenção redobrada durante a planificação das tarefas que pretende explorar com os alunos pois, como afirmam Canavarro et al. (2012) esta prática "exige do professor muito mais do que a identificação e seleção das tarefas para a sala de aula" (p. 256), isto é, trata-se de planear todo o percurso da aula, desde o momento da escolha das tarefas até ao momento de discussão e sistematização dos conceitos abordados (Canavarro, 2011). Portanto, o professor deve proporcionar aos alunos momentos de aula "que lhes permitam raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas" (Canavarro et al., 2012).

Um dos principais desafios que os professores de Matemática enfrentam perante o novo currículo de Matemática (Canavarro et al., 2021) corresponde, exatamente, ao de organizar discussões coletivas partindo "[d]as respostas [,bem como do raciocínio] dos alunos às tarefas de ensino de forma a promover a aprendizagem matemática de toda a turma" (Stein et al., 2008, p. 314)

Stein et al. (2008), apoiados em estudos de diferentes autores, remetem para a ideia de que as discussões que acontecem nos momentos posteriores à exploração de uma tarefa apoiam a aprendizagem da Matemática, constituindo-se como uma prática imprescindível, uma vez que ajuda os alunos a estruturarem o seu pensamento matemático "tornando público o pensamento dos alunos" (p. 315). Estas discussões ajudam, também, a que o pensamento e as ideias dos alunos possam ser orientadas construindo ideias "matematicamente sólidas" (p. 315).

Estes autores, destacam, ainda, que uma aula de ensino exploratório está organizada em três fases:

(i) ***Fase de lançamento:*** esta fase corresponde à apresentação da tarefa, que se espera que os alunos explorem, sendo que o professor disponibiliza, aos alunos, as ferramentas necessárias para a sua resolução.

(ii) ***Fase de exploração***: tal como o nome indica, durante esta fase, os alunos exploram a tarefa, apresentada na etapa anterior, discutindo-a, normalmente, em pares ou pequenos grupos. Durante esta fase os alunos são encorajados a resolver a tarefa como lhes parece melhor e é-lhes indicado que devem preparar-se para apresentar a sua estratégia de resolução à turma.

(iii) ***Fase de discussão e sistematização:*** a aula termina com um debate, no qual, o professor escolhe estratégias para serem

> discutidas em grande grupo, não sendo explícito que essas estratégias estejam corretas pois, muitas vezes, as estratégias incorretas poderão ser estratégias "esclarecedora[s] e enriquecedora[s], quer para os alunos que erraram, quer para os que resolveram bem" (Canavarro, 2011, p. 115).

Numa prática de ensino exploratório, mais especificamente, na fase de discussão e sistematização o professor dispõe de um papel fulcral na orientação da discussão, sendo que faz parte do seu objetivo que os alunos contruam as suas ideias matemáticas que vão surgindo durante a discussão (Canavarro, 2011). Durante esta fase poderão ser estabelecidas conexões com outros problemas ou estratégias de resolução, seguidas anteriormente.

CAPÍTULO II

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Este capítulo apresenta as opções metodológicas seguidas neste projeto de investigação. Para além disso, pretende-se descrever todos os passos levados a cabo na investigação, bem como apresentar e descrever as técnicas de recolha e de análise de dados utilizadas.

Tal como tem vindo a ser referido ao longo do presente relatório, o projeto de investigação que aqui se encontra a ser apresentado tem como objetivos: (i) compreender de que forma é que os alunos utilizam e relacionam diferentes representações de número racional e (ii) compreender qual o contributo dos modelos para essas transformações realizadas pelos alunos.

Alarcão (2001) e Ponte (2002) expõem que a elaboração de questões de investigação se revela como um ponto central para um trabalho de investigação podendo estas sofrer alterações até ao fim da investigação, sendo importante que essas alterações "v[ão] no sentido de uma maior precisão e delimitação" (Ponte, 2005, p. 13), mas nunca descurando da ideia inicial.

Neste sentido, foram elaboradas as seguintes questões de investigação, às quais pretendo dar resposta:

i. Qual a flexibilidade que os alunos apresentam no uso das diferentes representações de número racional?
    a. Que transformações de números racionais realizam os alunos?
    b. Que ideias apresentam os alunos perante essas transformações?
ii. De que forma é que a utilização de modelos pode apoiar as transformações de número racional?

Após a definição clara e objetiva das questões e dos objetivos que orientam o presente projeto de investigação, foram tomadas opções metodológicas, que serão apresentadas de seguida, bem como as técnicas de recolha e de análise de dados face ao tema em tudo. Para além disso, existirá, ainda um subcapítulo dedicado a questões de ética subjacentes a um trabalho de investigação envolvendo crianças.

1. Opções metodológicas

Coutinho (2011) descreve a investigação como uma atividade do foro cognitivo consistindo "num processo sistemático, flexível e objectivo de indagação" (p. 7) permitindo contribuir para compreender e aprofundar determinados conhecimentos científicos. Na perspetiva de Beillerot (2001; citado por Ponte, 2002), para que um trabalho seja considerado uma investigação este tem de compreender três características essenciais: (i) deve possibilitar a construção de novos conhecimentos no campo de investigação, (ii) deve seguir uma "metodologia rigorosa, e (iii) [deve] ser pública" (Ponte, 2002, p. 4). Assim, o presente estudo é considerado uma investigação na medida em que procura alargar o meu conhecimento relativamente ao trabalho com números racionais, seguindo um planeamento preciso ao longo das sessões. Uma investigação terá, assim, de produzir novos conhecimentos para quem a investiga, podendo já ter sido estudado por outros investigadores (Ponte, 2002).

Esta investigação enquadra-se, maioritariamente, numa investigação de caráter qualitativo (Bogdan & Biklen, 1994), ou seja, assenta num paradigma interpretativo, pois apresenta a "preocupação em compreender o mundo social a partir da experiência subjetiva" (Afonso, 2014, p. 34) sendo, ainda, considerada uma investigação sobre a prática (Ponte, 2002).

1.1. Investigação qualitativa

A investigação de paradigma qualitativo, apresentada por Bogdan & Biklen (1994), apresenta cinco características fundamentais que a definem:

(i) a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador deve apresentar-se como o instrumento principal de recolha de dados;
(ii) é descritiva;
(iii) os dados recolhidos durante o processo poderão ser mais valorizados do que os resultados finais;
(iv) os dados são analisados de forma indutiva;
(v) o significado é de importância vital.

Numa investigação qualitativa considera-se como fonte de dados o ambiente natural onde ocorre a investigação, sendo que se constitui como essencial que seja o próprio investigador do estudo a realizar pesquisa de campo e que este seja considerado "o instrumento principal" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 47). Portanto, pode dizer-se que existe um paralelismo entre o referido e o presente estudo, visto que a intervenção pedagógica associada ao projeto de investigação foi desenvolvida em contexto educativo, mais especificamente em contexto de estágio, no qual se pretendeu investigar a problemática em estudo.

Como refere Afonso (2014) "a educação é um sector específico da atividade humana". Uma vez que o presente estudo, será realizado com crianças, no qual o intuito é estudar os conhecimentos destas face a um tema, constitui-se como essencial que a investigação seja realizada num ambiente natural, dado que "o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48).

A investigação realizada apresenta um caráter descritivo uma vez que procura dar especial importância à descrição do processo para procurar estudar o tema em causa e de modo a ser possível responder às questões elaboradas. É de salientar que, para o presente estudo, a recolha e a análise dos dados evidenciou-se como uma preocupação, tendo estes sido recolhidos e analisados de forma cuidada. Com efeito, Bogdan & Biklen (1994) referem que "a palavra escrita assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registo dos dados como para a disseminação dos resultados" (p. 49). A característica aqui descrita deverá ser "minucios[a]" (p. 49) de forma a não alterar os dados recolhidos. Por esse motivo, evidencia-se como importante que o investigador descreva tudo o que observa, de forma precisa e detalhada, sem realizar inferências (Bogdan & Biklen, 1994).

Esta característica pode relacionar-se com o facto de o foco ser no processo da investigação em estudo e não propriamente nos resultados obtidos (Bogdan & Biklen, 1994), sendo esta outra das características de uma investigação qualitativa. Numa investigação de caráter qualitativo evidencia-se como essencial o caminho realizado durante a investigação, isto é, valoriza-se o processo de intervenção. Bell (1997), partilha da mesma perspetiva referindo que "os investigadores que adoptam uma abordagem qualitativa estão mais interessados em compreender as perceções individuais do mundo [isto é] procuram compreensão em vez de análise estatística" (p. 21). Por outras palavras, isto não quer dizer que apenas se evidenciem como relevantes os dados do processo e que os resultados finais não apresentem qualquer valor, mas, sendo que a investigação pretende estudar o processo de ensino e aprendizagem dos alunos face a um problema, não nos podemos centrar apenas em recolher os dados finais, sendo que esses dados não evidenciam a forma como os alunos interpretam os conceitos. Uma vez que a intervenção pedagógica associada ao presente estudo foi desenvolvida com base em tarefas seguindo uma abordagem de ensino exploratório da

Matemática (Canavarro, 2011), não pode ser, apenas, analisado o produto final, mas sim o processo dos alunos ao longo das diversas sessões nas quais decorreu a intervenção.

Para além disso, numa investigação de natureza qualitativa, os dados tendem a ser analisados de forma indutiva. Por outras palavras, os investigadores "não recolhem os dados com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50), mas sim, com o intuito de apoiar a investigação. Ou seja, "o processo de análise dos dados é como um funil (…) utilizando parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes" (p. 50) e, portanto, as técnicas e os instrumentos referidos adiante não são o estudo, mas sim um auxílio ao estudo, na medida em que sempre que necessário, o investigador poderá voltar a analisar esses dados.

Por fim, a última característica que permite caracterizar uma investigação qualitativa diz respeito ao significado ser de importância vital, isto é, os significados e interpretações que os intervenientes apresentam durante o estudo. Assim, sendo que um dos objetivos do meu estudo é, exatamente, perceber as ideias que estão subjacentes às transformações que os alunos realizam perante as representações, evidencia-se como relevante o significado que os alunos atribuem ao que lhes é questionado.

1.2. Investigação sobre a prática

Tal como referido no início do capítulo, este estudo recorre a uma metodologia de investigação qualitativa, tratando-se de uma investigação sobre a prática. Ponte (2002) refere "que todo o bom professor tem de ser também um investigador, desenvolvendo uma investigação em íntima relação com a sua função de professor" (p. 2). De facto, para uma boa prática, um professor deve estar em constante investigação e reflexão face à sua própria prática para conseguir adequar as suas intervenções ao grupo de crianças que constituem a sua turma. Assim, a atividade de investigação constitui uma

prática essencial à profissionalização de um professor, na qual, "a base natural para essa actuação tanto na sala de aula como na escola, é a atividade investigativa, no sentido de actividade inquiridora, questionante e fundamentada" (Ponte, 2002, p. 2).

Stenhouse (1975; citado por Alarcão, 2001) acrescenta, ainda, que uma investigação sobre a própria prática deve, também, ser crítica, no sentido em que o professor deve estar em constante reflexão e dispor de um olhar crítico sobre a sua própria prática.

O método de investigação sobre a prática pode, de facto, contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores na medida em que estes se debruçam sobre a sua prática a fim de refletir sobre esta constituindo-se como "uma condição necessária a uma prática profissional de qualidade" (Ponte, 2002, p. 9). Para além disso, uma investigação sobre a prática permite, ainda, contribuir para a prática de outros profissionais, visto que dispõe um caráter público (Ponte, 2002).

1.3. Ética com crianças

Relativamente à ética com crianças é necessário esclarecer o porquê de optar por incluir um subcapítulo dedicado a este tópico. Considerando que a intervenção pedagógica associada ao presente projeto de investigação decorreu numa turma de 4.º ano, no qual, os principais intervenientes foram os 24 alunos da turma considerei que seria necessário ter em conta a opinião dos intervenientes (Fernandes, 2016). Assim, Libório (2018) salienta que,

> ao participar, contribuindo com as suas opiniões, as crianças partilham de algum modo das decisões da sua própria vida e da sociedade a que pertencem, mas é também uma forma de partilha de poder nas instituições que se intitulam de democráticas. (p.15)

De forma a proteger os dados recolhidos e salvaguardar quaisquer adversidades que pudessem existir, foi enviado um consentimento (Cf. Anexo A) para que os Encarregados de Educação pudessem assinar indicando se o seu educando poderia ou não participar no projeto de investigação.

Tal como mencionado pela Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE, 2016), para além de a Educação ser englobada na área das Ciências Sociais e Humanas, revela-se, ainda, uma maior preocupação pela intervenção pedagógica deste relatório ter sido realizada com crianças. Portanto, "a relação com os participantes da investigação (…) deverá ser pautada pelo princípio fundamental de respeito por cada Pessoa, enquanto ser humano único (…)" (p. 7).

Assim, houve necessidade de questionar as crianças se gostariam de participar no presente projeto de investigação, explicando tudo o que iria acontecer no decorrer das sessões, bem como a forma como iriam ser recolhidos os dados, garantido confidencialidade e anonimato (SPCE, 2014; Fernandes, 2016). Nesta perspetiva, a SPCE (2014) salienta que todos os participantes que façam parte do projeto dispõem do direito de serem devidamente informados, no que à sua participação diz respeito. Igualmente, clarificou-se que os registos fotográficos, vídeo e áudio serviriam, apenas, para que me fosse permitido, posteriormente, tratar os dados de uma maneira mais enriquecedora. Desta forma, deve destacar-se que os nomes dos alunos serão alterados, identificados com nomes fictícios, garantindo a confidencialidade e a privacidade de cada criança.

2. Recolha de Dados

Este subcapítulo apresenta as técnicas e os instrumentos de recolha de dados selecionados com base nos objetivos de investigação, referidos no início deste capítulo, que me permitiram retirar conclusões e responder às questões-problema, também enunciadas no início deste capítulo. Almeida e

Pinto (1990) definem as técnicas utilizadas durante a investigação como "um conjunto de procedimentos bem definidos e transmissíveis, destinados a produzir certos resultados na recolha e tratamento da informação" (p. 102). Para além disto, Bell (1997) salienta que, numa investigação, as técnicas e os instrumentos de recolha de dados a usar dependem "da natureza do estudo e do tipo de informação que se pretenda obter" (p. 20). Assim, as técnicas que considerei como sendo as mais indicadas, e, de acordo com as questões e os objetivos de investigação definidos, foram as seguintes: observação participante e recolha documental.

2.1. Observação

Durante o percurso de intervenção associado ao presente relatório uma das técnicas que se evidenciou como essencial foi, de facto, a técnica de observação. Afonso (2014), refere que a observação se constitui como uma técnica "particularmente útil e fidedigna, na medida em que a informação obtida não se encontra condicionada pelas opiniões e pontos de vista dos sujeitos, como acontece nas entrevistas e nos questionários" (p. 98). Não obstante, a observação é caracterizada por Ketele (1980; citado por Ketele & Roegiers, 1993) que salienta que "observar é um processo que inclui a atenção voluntária e a inteligência, orientado por um objetivo final ou organizador e dirigido a um objeto para recolher informações sobre ele" (p. 23)

Neste sentido, a observação é realizada com o objetivo de procurar descrever a ação dos participantes que, posteriormente, será objeto de análise favorecendo uma abordagem indutiva. Remetendo para uma das cinco características de Bogdan e Biklen (1994), mencionadas anteriormente, o objetivo não é confirmar ou testar hipóteses, mas, sim, procurar dados que, depois, permitam, efetivamente, responder às questões-problema (Matos, 2015).

Na investigação, o papel que o investigador apresenta pode considerar-se como participante ou não-participante. Correia (2009) expõe

que a observação participante deve ser "dinâmica e envolvente", na qual, o investigador participa ativamente na dinâmica da turma. Neste sentido, assumi uma posição de observadora participante, uma vez que assumi a responsabilidade das aulas em que decorreu a intervenção, ou seja, assumi um duplo papel de investigadora e professora. Assim, a observação participante proporciona "um contacto pessoal e estreito com o fenómeno a ser investigado, sem exercer influência sobre ele" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 12). Por isso, durante as aulas de intervenção circulei pela sala de forma a acompanhar os trabalhos dos alunos e poder recolher dados, mas sem interferir com o trabalho desenvolvido. Porém, esta distância nem sempre foi possível pois os alunos manifestaram dificuldades que tinham de ser esclarecidas.

Para além de haver distinção entre observação participante e não-participante, Afonso (2014) faz, inclusive, distinção entre dois tipos de observação participante: observação estruturada e observação não estruturada. Enquanto a observação estruturada requer a utilização de instrumentos pré-elaborados (como grelhas de observação), a observação não-estruturada carece de instrumentos de planeamento estratégico cuidadosamente elaborados (Afonso, 2014, p. 99).

Desta forma, a observação realizada durante a intervenção pedagógica caracteriza-se como uma observação não-estruturada devido aos instrumentos que apoiam esta técnica não serem estruturados, isto é, não foram utilizadas quaisquer tabelas, grelhas, ou outros instrumentos, preparados com antecedência, que me permitissem aferir algo definido previamente (Afonso, 2014; Bogdan & Biklen, 1994). Desta forma, optei por não ter instrumentos estruturados, durante a recolha de dados, sendo que, devido ao duplo papel de investigadora e professora-estagiária tornar-se-ia difícil o seu preenchimento.

Remetendo para a presente investigação, foram utilizados os seguintes instrumentos: registo fotográfico, registo áudio, registo vídeo, notas de campo

e diário de bordo. Portanto, a partir desta técnica e dos instrumentos que a auxiliam foram retiradas conclusões face ao tema em estudo.

Afonso (2014) descreve o diário de bordo como um instrumento utilizado na prática de um investigador e que dispõe de um caráter reflexivo e descritivo sobre a prática, mais concretamente, "no que respeita ao enquadramento teórico e à condução da estratégia de investigação" (p. 99). Para além deste instrumento, as notas de campo são o "relato daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha de dados de um estudo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Desta forma, as notas de campo e o diário de bordo são registos escritos que permitem uma reflexão cuidada do processo e de reflexão sobre a prática (Matos, 2015).

Importa salientar que o registo áudio se evidenciou como um excelente instrumento para apoiar a técnica de observação no sentido em que, como os alunos estavam distribuídos por grupos, sem recorrer a este instrumento seria muito difícil conseguir retirar conclusões em todos os grupos. Desta maneira, a utilização de gravadores, permitiu-me gravar as discussões entre os grupos de trabalho para além de conseguir retirar inúmeras conclusões para o meu trabalho, o que não aconteceria se, efetivamente, apenas escrevesse aquilo que ia ouvindo. Para além disso, a gravação vídeo e fotográfico auxiliaram na análise de dados, uma vez que complementam o que está a ser mencionado pelos alunos.

2.2. Recolha documental

Para além da técnica de observação utilizei, ainda, a técnica de recolha documental que diz respeito aos documentos recolhidos e que serão, posteriormente, analisados. Afonso (2014) refere que os documentos podem ser de três tipos: oficiais, públicos e privados. No que concerne a presente investigação, apenas recorri aos documentos oficiais e privados, sendo que os primeiros dizem respeito a documentos publicados e que se "constituem [como] um registo da atividade quotidiana da administração educacional"

(Afonso, 2014, p. 94), como por exemplo: as AE; o PASEO; entre outros. Por outro lado, os documentos privados, os quais o mesmo autor especifica referindo-os como pessoais referem-se às "planificações de aulas de professores, [os] cadernos diários e [os] trabalhos escolares" (p. 97). Portanto, no presente relatório, os documentos pessoais que aqui serão analisados são as produções dos alunos, isto é, os registos das estratégias de resolução dos problemas propostos.

Com a análise das produções dos alunos pretende-se retirar conclusões que, juntamente com os instrumentos que apoiam a técnica de observação me permitirão retirar conclusões e responder às questões-problema. Assim, a recolha documental "servirá para complementar a informação obtida por outros métodos" (Bell, 1997, p. 101).

Portanto, o investigador deve ter a capacidade de selecionar e interpretar as produções dos alunos de forma a retirar as conclusões necessárias para a sua investigação o que acontece diariamente na prática de um docente em que observa, seleciona e analisa o que pretende.

3. Análise de dados

Este subcapítulo visa apresentar as técnicas de análise de dados que serão utilizadas para analisar e interpretar os dados obtidos durante a intervenção pedagógica, a partir das técnicas e dos instrumentos mencionados anteriormente. É de salientar que, para o presente estudo, foram recolhidos e analisados dados do grupo turma, que foram recolhidos durante os momentos de lançamento da tarefa, resolução em pequenos grupos e de discussão coletiva.

Bell (1997) expõe que o investigador deve saber aquilo que pretende estudar com o intuito de procurar ser o mais objetivo possível, tendo em conta as questões e os objetivos de investigação que orientam o projeto. Nesta perspetiva, Amado (2014) refere que "não basta recolher dados, é preciso

saber analisá-los e interpretá-los (não sendo possível fazer uma coisa sem a outra)" (p. 229) e, por isso, a análise dos dados deve ser sistemática, isto é, o investigador deverá criar categorias de dados com o objetivo de o ajudar a analisá-los para que, mais tarde, os possa interpretar (Bell, 1997).

Desta forma, de acordo com Carmo e Ferreira (1998), pretende-se, com a análise de dados, "selecionar, tratar e interpretar informação bruta existente em suportes estáveis (scipto, áudio, vídeo e informo) com vista a dela extrair algum sentido" (p. 59).

Tal como existem técnicas de recolha de dados, para a análise dos dados existem, também, técnicas de análise. Neste sentido, para o presente estudo foi utilizada uma técnica de análise de conteúdo, analisando dados como: transcrições de áudio realizadas ao longo das cinco semanas de implementação do projeto de investigação e as produções dos alunos. Barelson (1952; citado por Amado et al., 2014) define análise de conteúdo como uma "técnica de pesquisa documental que procura 'arrumar' num conjunto de categorias de significação o 'conteúdo manifesto' dos mais diversos tipos de comunicações" (pp. 302-303). Bardin (1977), inclusive, expõe que a análise de conteúdo procura perceber o significado que os participantes do estudo atribuem ao tema em estudo, querendo assim dizer que "a análise de conteúdo é uma busca de outras realidades *através* das mensagens" (p. 45). O mesmo autor refere, também, que a análise categorial temática se constitui como uma das técnicas de análise de conteúdo. Porém, Vilelas (2009) menciona que antes de uma análise cuidada dos dados é importante que o investigador tenha um conhecimento aprofundado daquilo que estuda pois, só assim, conseguirá categorizar e analisar os dados recolhidos.

Para analisar os dados recolhidos foram definidas categorias de análise tendo em vista os objetivos definidos. As categorias de análise, deste estudo, surgiram, num primeiro momento, do enquadramento teórico e foram

aprimoradas após uma análise preliminar dos dados. Como tal, foram definidas as seguintes categorias de análise: (i) relações estabelecidas entre diferentes representações; (ii) utilização de modelos para a compreensão de número racional; e (iii) conceptualização da unidade

De forma a sistematizar as técnicas de recolha e análise de dados, e de acordo com o que se pretende investigar, apresento a seguinte tabela (Cf. Tabela 2).

Tabela 2

Técnicas de análise e recolha de dados

Técnicas de recolha	**Instrumentos de recolha**	**Fontes**	**Técnica de análise**
Observação participante	- notas de campo; - diário de bordo; - registo vídeo; - registo áudio; - registo fotográfico.	- conversas com os alunos; - discussão das tarefas;	Análise de conteúdo
Recolha documental	- Produções dos alunos (resolução de problemas matemáticos); - Documentos oficiais (AE, PASEO, PEI, entre outros).	- alunos da turma; - Projeto da Turma; - PASEO - AE	

Para a análise de conteúdo foram transcritos os registos áudio de acordo com o que se pretendia analisar e que me permitisse dar resposta à questão-problema. Para além disso, foram, também, tidas em consideração as

notas de campo retiradas durante a intervenção, bem como os registos fotográficos e vídeo que, em conjunto, me permitiram retirar conclusões. Deve destacar-se que, relativamente aos registos áudio, não foram analisados na íntegra, mas sim em conformidade com as categorias definidas previamente.

CAPÍTULO III

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

O presente capítulo apresenta, brevemente, a descrição e caracterização do contexto educativo onde decorreu a intervenção pedagógica. Para além disso, este capítulo pretende, ainda, apresentar a descrição da intervenção pedagógica

1. Contexto educativo[4]

A intervenção pedagógica associada ao projeto de investigação foi desenvolvida com uma turma de 4.º ano do 1.º CEB, numa instituição de cariz privado, localizada no concelho do Seixal. A instituição, onde decorreu a investigação, foi inaugurada a 1 de setembro de 2004 e encontra-se bem localizada, relativamente à proximidade a diferentes tipos de serviços. Neste momento, dá resposta à Educação de Infância – contando com as valências de Creche (incluindo berçário) e Jardim de Infância – e ao 1.º CEB.

A instituição onde decorreu a intervenção pedagógica encontra-se dividida em dois pisos. O piso principal, por onde as crianças dão entrada na instituição, corresponde à Educação de Infância. É constituído por três salas de Creche, sendo uma delas uma sala de berçário, e quatro salas de Jardim de Infância. No piso superior encontram-se seis salas destinadas ao 1.º CEB, sendo que existe uma sala para cada ano. Não obstante, atualmente, o 2.º e o 4.º anos dispõem de 2 salas, cada ano.

Relativamente ao percurso profissional da professora cooperante, esta já dispõe de 22 anos de serviço, sendo que todo o seu percurso profissional foi realizado na presente instituição. Através de um dos instrumentos que

[4] Parte desta secção foi realizada, com o par de estágio, no âmbito da unidade curricular Seminário de Investigação e Práticas Pedagógicas.

permite apoiar a técnica de observação (notas de campo), numa conversa informal, a professora cooperante referiu que valoriza a formação contínua de um professor realizando diversas formações ao longo do ano. Para além disso, ainda integra grupos cooperativos do Movimento da Escola Moderna (MEM), com o intuito de expor a sua prática e de refletir sobre esta, a partir de partilhas de outros professores. Apesar de já acompanhar a turma desde o primeiro ano, a professora cooperante sente, por vezes, necessidade de discutir alguns conteúdos e estratégias com docentes, de modo a haver progressão na sua prática e consequentemente na aprendizagem dos seus alunos.

Como refere Oliveira-Formosinho (2003) "o modelo curricular é um importante andaime para apoiar o professor na procura de um quotidiano com intencionalidade educacional onde as crianças se [possam] envolv[er]" (p. 7). Assim, na instituição onde foi aplicada a intervenção, os profissionais de educação trabalham segundo a metodologia do MEM tendo a instituição, como principal missão, tal como referido no Projeto Educativo[5],

> proporcionar aos (…) alunos um ensino de excelência, um espaço de afetividade, apoiado por um ambiente familiar, de segurança e confiança [para além de] estimular a criatividade de cada criança, o prazer da descoberta, o espírito crítico e a sua capacidade de intervenção face a novos desafios. (p. 15)

No que diz respeito à turma em questão, esta é constituída por 24 alunos, 12 do sexo feminino e 12 do sexo masculino, os quais apresentam idades compreendidas entre os 9 e os 10 anos. Através de instrumentos que apoiam a técnica de observação e a recolha documental (notas de campo e Plano Curricular de Turma, respetivamente), é possível afirmar que a turma evidencia alguma heterogeneidade, ao nível das aprendizagens e ritmo de

[5] Documento disponibilizado pela instituição.

trabalho apresentando, ainda, diferentes níveis de maturidade. Trata-se de um grupo de crianças que pode ser caracterizado como agitado, falador e irrequieto. As crianças desta turma podem, também, ser caracterizadas por apresentarem um grande gosto pela aprendizagem, no sentido em que participam, com vontade, nas propostas, trazem partilhas de casa e sugerem atividades. Não obstante, alguns alunos revelam dificuldades ao nível da concentração, organização e ao nível da aprendizagem, necessitando de estratégias de diferenciação pedagógica no processo de ensino e aprendizagem. A partir de uma das técnicas de recolha de dados, Plano Curricular de Turma, disponibilizado pela professora cooperante, dois dos alunos beneficiam de medidas universais de suporte e apoio à aprendizagem (Decreto-Lei n.º 54/2018). No que diz respeito aos aspetos relacionais, a turma assume-se como um grupo coeso e, no geral, existe um bom nível de relacionamento entre todos os elementos da turma.

A sala da turma (cf. Anexo B) dispõe de 24 mesas com respetivas cadeiras, organizadas em grupos de quatro. A sala apresenta, ainda, uma mesa hexagonal que serve para a concretização de trabalhos de grupo ou até mesmo para os momentos de trabalho em parceria[6]. É de salientar que a disposição das mesas da sala é modificada consoante o trabalho a ser concretizado.

Relativamente à área da Matemática, de acordo com uma das técnicas de observação (registo áudio), numa conversa informal com a professora cooperante, de um modo geral, os alunos apresentam algumas dificuldades, mais concretamente no que diz respeito à resolução de problemas. A professora tem o cuidado de, no lançamento da tarefa, garantir que todos os alunos percebem o enunciado dando-lhes tempo para a resolverem, diferindo na modalidade de trabalho (individual, a pares ou em grupo).

[6] Este trabalho em parceria desenvolve-se durante os momentos de Tempo de Estudo Autónomo (TEA) e pode ser desenvolvido com colegas, com a professora titular ou até mesmo com as estagiárias.

Sobre o tópico Frações e Decimais, numa conversa informal com a professora cooperante, percebi que os alunos começaram o seu percurso formal, no que diz respeito aos números racionais, no 2.º ano, indo ao encontro das AE, partindo de problemas de partilha equitativa. Posteriormente, foram explorados problemas envolvendo os significados de relação parte-todo e operador não tendo havido, ainda, oportunidade de explorar o significado de medida e quociente. Para além disto, a professora titular, numa conversa informal, refere que "nem todos os alunos têm noção de que uma fração pode representar um valor maior que um", isto é, que uma fração pode representar mais que uma unidade. No que concerne à ideia de fração equivalente, a turma já tem vindo a explorar este conceito, mas "é um trabalho que deve ser realizado até ao final do ano" (conversa informal com a professora cooperante). A representação decimal de número racional foi abordada no presente ano, e o trabalho em torno desta representação tem assentado na sua relação com a representação em fração. A relação entre representações tem, apenas, vindo a ser trabalhada com as frações e com os numerais decimais, não existindo, ainda, qualquer contacto formal com a percentagem.

Um dos objetivos do presente projeto de investigação é compreender de que forma é que os alunos utilizam as diferentes representações de número racional e, desta forma, revela-se como importante mencionar que, relativamente às representações icónicas, os alunos já trabalharam com o modelo circular, com a reta numérica e com o modelo retangular, modelos que surgiram sempre associados à representação em fração. No que concerne aos numerais decimais, para além dos modelos mencionados anteriormente, foi também utilizado o MAB.

2. Descrição da intervenção pedagógica

Neste subcapítulo serão apresentadas as opções tomadas que orientaram a intervenção pedagógica associada a este projeto de investigação, bem como descrito o modo como foram exploradas as tarefas propostas no decorrer da presente investigação. Serão ainda identificados os objetivos de aprendizagem que se pretendiam desenvolver com cada tarefa proposta, as dificuldades esperadas, possíveis ações do professor para ultrapassar essas dificuldades e, por fim, algumas questões orientadoras.

2.1. Opções tomadas que orientaram a intervenção

Durante a intervenção pedagógica deste projeto foram realizadas cinco tarefas, as quais pretenderam que os alunos desenvolvessem um trabalho flexível em torno das diferentes representações que os números racionais podem assumir.

2.1.1. Modalidades de trabalho

As cinco tarefas propostas seguiram a metodologia de ensino exploratório da Matemática, sendo que três foram realizadas em grupos de quatro elementos e as restantes duas a pares. As tarefas foram desenvolvidas envolvendo diferentes representações, diferentes modelos e incidindo em particular nos significados de parte-todo e medida. A constituição dos grupos e dos pares foi definida por mim previamente, todas as semanas, variando os elementos pelos grupos de trabalho. Esta constituição teve como base os conhecimentos de cada criança, sendo que, inicialmente, o critério para a formação dos grupos era que estes fossem heterogéneos relativamente ao seu desempenho na área da Matemática. Porém, devido às relações que existiam entre pares, foi necessário fazer ajustes na sua constituição. À medida que as tarefas foram sendo realizadas fui percebendo que, em todos os grupos, havia crianças mais participativas do que outras o que me levou a optar por constituir pares de forma a garantir que todos se envolvessem e que o trabalho

realizado fosse, efetivamente, um trabalho de grupo. Para além disso, considerou-se esta modalidade de trabalho, por considerar ser necessário dar tempo e oportunidade aos alunos para explorarem as tarefas por si para que, posteriormente, em grande grupo, existisse uma discussão coletiva que tinha como finalidade a construção de conhecimentos realizada pelos próprios alunos.

Neste sentido, Santos (2018), aponta que o trabalho de grupo, quando aplicado de forma eficaz, pode revelar-se como uma estratégia potenciadora de aprendizagem, mostrando uma maior evolução ao nível das aprendizagens efetuadas relativamente aos realizados de forma individual, no sentido em que, em conjunto debatem ideias. Como tal, as tarefas foram implementadas de forma exploratória, promovendo a discussão coletiva em sala de aula, que se constitui "uma base importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático" (Ponte et al., 2020, p. 11).

É importante referir que todas as tarefas desenvolvidas foram divididas em duas sessões (Cf. Tabela 3): às segundas-feiras, depois da hora de almoço, eram realizadas as duas primeiras etapas de uma aula em ensino exploratório mencionadas por Stein et al. (2008), apresentação e exploração da tarefa; e, à terça-feira, pela manhã, era realizada a fase da discussão e sistematização. A decisão de realizar as etapas em dias diferentes prende-se com o facto de possibilitar a análise das produções dos alunos com um maior pormenor e a seleção dos grupos que iriam apresentar, permitindo-me elaborar possíveis questões para colocar no momento de discussão coletiva.

Tabela 3

Organização das aulas por momentos distintos

		Duração (aproximada)
Segunda-feira	1.ª fase - apresentação da tarefa à turma	10min.
	2.ª fase – exploração da tarefas	30-45min.
Terça-Feira	3.ª fase – discussão e sistematização das aprendizagens realizadas	45-60min.

Descrevendo a prática das aulas, num primeiro momento, começava por relembrar os alunos do que tínhamos feito na sessão anterior, com o intuito de revermos as aprendizagens efetuadas, bem como relembrá-los da dinâmica da aula. No momento de apresentação da tarefa, esta era lida em grande grupo, por um dos alunos. A tarefa era lida duas vezes, seguindo as indicações da professora titular, visto que a generalidade dos alunos apresentava alguma dificuldade na interpretação de problemas. Depois de lida a tarefa, retiravam-se eventuais dúvidas e era pedido aos alunos para que explicassem, por palavras suas, o que lhes era pedido no enunciado. Este momento foi essencial para perceber se os alunos tinham, efetivamente, compreendido o que lhes era pedido.

Neste momento era, ainda, relembrado que tinham de preparar uma pequena apresentação para o momento de discussão. Na primeira tarefa expliquei como iam estar organizadas as nossas aulas, mas nas restantes tarefas tentei sempre que fossem os alunos a explicar a organização da aula e tudo o que deveriam fazer. Ao longo das tarefas, tal como esperado, foi-se verificando uma maior autonomia à medida que se apropriavam desta metodologia de trabalho. Neste momento inicial era, também, referido que iria ser distribuído um enunciado por grupo e uma folha A3, onde iriam resolver a tarefa e que, caso necessário, poderiam ir buscar mais folhas.

Ao longo da exploração da tarefa, ia circulando pelos diferentes grupos de trabalho, evitando interferir no trabalho dos alunos, conferindo-lhes autonomia de forma a permitir-me compreender as estratégias escolhidas. Os alunos iam colocando dúvidas e estas eram sempre devolvidas com questões, pois o intuito era que fossem os próprios a chegar a conclusões, estivessem estas corretas ou não.

Por fim, o momento de exploração, tal como já foi referido, era sempre realizado à terça-feira pela manhã, não só por questões de tempo, visto que realizar todas as etapas num só dia seria algo demorado o que poderia levar com que os alunos dispersassem mais facilmente, mas também porque me permitia analisar as produções dos alunos e poder selecionar as que deveriam ser alvo de discussão. Durante as intervenções não foram apenas selecionadas estratégias corretas, visto que o professor, tal como em todos os outros momentos, deve ser mediador das aprendizagens dos alunos e, por esta razão, deve considerar e valorizar todas as intervenções, bem como estratégias incorretas. Desta maneira, estejam elas matematicamente corretas ou não, o professor deve promover a discussão em grupo e, de forma discreta corrigi-las através de "linguagem matematicamente apropriada" (Canavarro, 2011, p. 9).

Tanto no momento de discussão como depois, foram sistematizadas as aprendizagens realizadas quer no trabalho em grupo, quer durante a discussão. Este momento, tal como refere Canavarro (2011) é uma prática "difícil de concretizar, mas muito compensatória em termos de dinâmica coletiva que proporciona na turma e das próprias aprendizagens matemáticas que permite aos alunos" (p. 13).

2.1.2. Tarefa Diagnóstica

A primeira etapa de intervenção do projeto de investigação foi a proposta de uma tarefa diagnóstica. Assim, de forma a desenvolver um trabalho em articulação com o que já tinha sido realizado pela professora

cooperante, optou-se por propor à turma uma tarefa diagnóstica (Cf. Anexo C) com o intuito de perceber os conhecimentos dos alunos para conseguir identificar conceitos que deveriam ser explorados, posteriormente, nas tarefas que seriam propostas.

Desta forma, optei por elaborar uma tabela (Cf. Tabela 4) com os objetivos de aprendizagem, de acordo com as AE (Canavarro et al., 2021), que pretendia explorar face a cada questão da tarefa diagnóstica.

Tabela 4

Objetivos de aprendizagem associados a cada questão da tarefa diagnóstica

Ano	Temas e tópicos	Objetivos (Aprendizagens Essenciais)	Questão
2.º	**Números:** Frações	Reconhecer a fração como possibilidade de representar uma quantidade não inteira relativa a uma relação parte-todo, sendo o todo uma unidade contínua, e explicar o significado do numerador e do denominador, no contexto da resolução de problemas	1.1.; 1.2.; 2.
		Representar uma fração de diversas formas, transitando de forma fluente entre as diferentes representações.	3.; 4.
3.º	**Números:** Frações	Representar uma fração de diversas formas, transitando de forma fluente entre as diferentes representações.	3.; 4.; 6.
4.º	**Números:** Frações e decimais	Comparar e ordenar frações com o mesmo numerador, em contextos diversos, recorrendo a representações múltiplas.	7.
		Reconhecer o numeral decimal como possibilidade de representar uma quantidade	5.

	não inteira, e associar $\frac{1}{10}$ igual a 0,1 no contexto de situações reais.	
	Ler, representar, comparar e ordenar decimais, em contextos variados.	3.
	Usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%.	3.; 4.

A tarefa foi proposta à turma como sendo uma tarefa a realizar em Tempo de Estudo Autónomo (TEA), tempo este que permitia que os alunos escolhessem quando a queriam realizar[7]. Quando proposto, foi mencionado à turma que esta tarefa deveria ser realizada de forma individual, bem como lhes foi pedido que, caso não soubessem a resposta, não se sentissem obrigados a responder para que, com a ajuda deles, percebesse que tipo de problemas poderíamos resolver, mais tarde.

Durante os momentos de realização da tarefa, à medida que apoiava no TEA fui circulando para perceber o que os alunos estavam a fazer, retirando notas de campo.

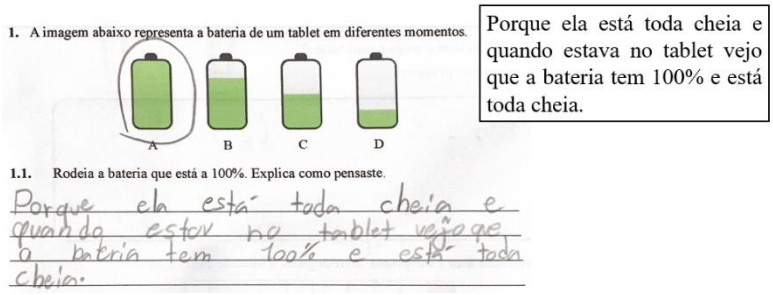
Tal como referido anteriormente, com a realização desta tarefa pretendia perceber as fragilidades apresentadas pelos alunos no que concerne o tópico dos números racionais, bem como as relações que eles já eram capazes de estabelecer. Sendo que os alunos ainda não tinham explorado, num percurso formal de aprendizagem, uma das representações simbólicas de número racional, a percentagem, esta tarefa pretendia, também, compreender de que forma é que os alunos relacionavam esta representação com possíveis situações do quotidiano.

[7] O dia da realização da tarefa ficou ao critério dos alunos, sendo que lhes fora mencionado que a tinham de realizar entre 8 a 10 de abril.

Saliento que esta tarefa não será analisada neste relatório, porém, destaco uma resposta de um dos alunos, perante uma das questões que explorava a representação de número racional em percentagem (Cf. Figura 3).

Figura 3

Resposta de um dos alunos à 1.ª questão da tarefa diagnóstica



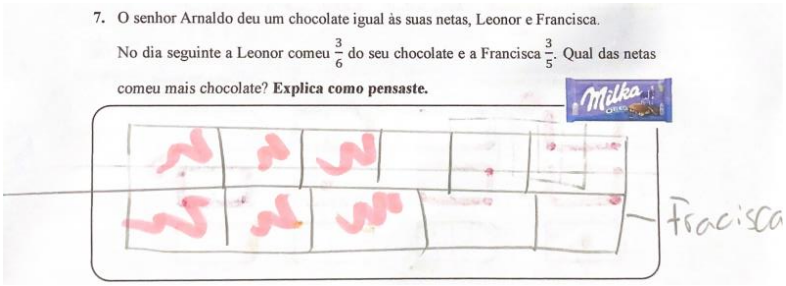
De um modo geral, todos os alunos conseguiram identificar 100% como o todo de algo, possivelmente por ser uma representação com a qual já estão familiarizados no seu quotidiano.

Foi, também, possível identificar que os alunos reconhecem 50% como metade de algo e 25% como metade de 50%, mas nem todos foram capazes de identificar que 25% corresponde a $\frac{1}{4}$ da unidade.

Na tarefa diagnóstica foi possível perceber as relações que os alunos estabelecem, nomeadamente na utilização de representações icónicas. Quase todos os alunos foram capazes de estabelecer relações entre representações, icónica-simbólica e simbólica-icónica. Para além de transformações que ocorreram entre diferentes representações, esta tarefa permitiu perceber que, muitos alunos utilizam representações icónicas, na resolução de problemas, para os ajudar a retirar conclusões e a mostrar como pensaram, como se pode observar na figura abaixo (Cf. Figura 4), na qual a aluna, perante a mesma unidade a divide em diferentes partes.

Figura 4

Resposta de um dos alunos à 7.ª questão do teste diagnóstico



Com a tarefa percebi que, relativamente à fração, havia alunos a recorrerem a regras quando, perante uma mesma unidade, se questionava quem tinha comido mais chocolate (por ex.: perante $\frac{3}{6}$ e $\frac{3}{5}$ os alunos comparam apenas os denominadores por serem frações com numerador igual). Porém, quando pedido para identificarem a imagem correspondente a $\frac{1}{4}$, perante 5 figuras, em que 3 delas representavam $\frac{1}{4}$, nenhum aluno foi capaz de o fazer, revelando que o sentido de número racional ainda está em construção. No que diz respeito à representação decimal, os alunos evidenciam, ainda, não compreender o sistema de numeração decimal – quando o usam para tentar interpretar numerais decimais – uma vez que associaram 1,5 a 0,15 ou 1,5 a $\frac{1}{5}$, mostrando, neste último exemplo, que não atribuem significado a estas representações.

2.1.3. Tarefas de intervenção pedagógica

Para uma melhor compreensão das etapas do projeto, foi elaborada uma tabela (Cf. Tabela 5) que pretende apresentar, de forma pormenorizada, o decorrer da intervenção pedagógica.

Tabela 5

Calendarização do percurso de intervenção

Sessões	Data da sessão	Número da Tarefa	Designação da Tarefa	Representações simbólicas a explorar	Modelo
1.ª	8 a 10 de abril	___	Tarefa diagnóstica	Percentagem Numeral decimal Fração	_____
2.ª	15 e 16 de abril	1	Pacote de leite	Percentagem	Modelo retangular
3.ª	29 e 30 de abril	2	Download Stumble Guys	Percentagem Numeral decimal Fração	Modelo retangular
4.ª	6 e 7 de maio	3	Explorando o modelo do azulejo	Percentagem Numeral decimal Fração	Modelo 10x10
5.ª	13 e 14 de maio	4	Vamos conhecer o *Decimat*	Percentagem Numeral decimal Fração	*Decimat*
6.ª	20 e 21 de maio	5	À descoberta da toalha	Percentagem Numeral decimal Fração	*Decimat* Modelo 10x10 Modelo retangular

Importa salientar que, o que aparece a sombreado a azul, na tabela, diz respeito às tarefas propostas, as quais serão analisadas no capítulo da análise de dados.

Após a realização da tarefa diagnóstica percebi que caminho deveria traçar para um trabalho envolvendo as diferentes representações dos números racionais. Nesse sentido, optei por começar o trabalho neste tópico partindo de uma das representações simbólicas de número racional – a percentagem – o que de acordo com Moss e Case (1999) e Guerreiro e Serrazina (2015), apresenta ser vantajoso, na aprendizagem dos números racionais.

Desta forma, na Tarefa 1, cuja planificação se encontra em anexo (Cf. Anexo D), tive como principal objetivo trabalhar em torno da percentagem introduzindo o modelo de o modelo retangular associado ao contexto do problema, o pacote de leite. Nesta tarefa pretendi que surgissem as representações 50%, 75% e 10% pelo seu potencial enquanto representações de referência (Guerreiro & Serrazina, 2015). O objetivo com esta tarefa era, também, que os alunos percebessem que a percentagem pode ser representada sob a forma de numeral decimal e fração.

Nesta primeira tarefa, os alunos, de um modo geral, recorreram tanto a representações simbólicas como a representações icónicas como forma de registo, permitindo-lhes transmitir as suas ideias. É, também, percetível que os alunos identificam 100% como sendo a unidade de referência e 50% como metade dessa unidade, estabelecendo, em alguns casos, relações entre outras representações simbólicas (fração e numeral decimal).

O meu papel durante esta tarefa foi determinante para as tarefas seguintes, principalmente no momento de discussão e sistematização, ao qual os alunos ainda não estavam habituados, tendo de ser eu a provocar os alunos, mantendo o momento de discussão, através do questionamento sobre as estratégias de resolução que estavam a ser apresentadas. Para além da discussão coletiva, uma questão que foi muito trabalhada desde o início, mas em especial, nesta primeira tarefa, foi a questão da organização e disposição dos cartazes, determinante para os alunos perceberem que os registos devem ser o mais pormenorizados possível e que, tudo aquilo que eles pensavam deveriam escrevê-lo e registá-lo. Após a primeira tarefa houve necessidade de se construir um cartaz com as regras para um bom trabalho em grupo.

Na tarefa seguinte, cuja planificação se encontra, em anexo (Cf. Anexo E), para além da percentagem surgem, também, outras representações simbólicas do número racional, sendo elas a fração e o numeral decimal, num

contexto muito familiar aos alunos, a barra de estado de um jogo, que permite, novamente, explorar o modelo retangular.

Esta tarefa tinha como principal objetivo que os alunos, num primeiro momento, reconstruíssem a unidade, a partir da parte dada. Num segundo momento, depois de descoberto o valor relativo a 100%, ou seja, o tempo de *download* do jogo, conseguissem indicar o tempo relativo a cada representação apresentada, na forma de fração, numeral decimal e percentagem, bem como compreender que um mesmo número racional pode ser representado de diferentes formas.

Contrariamente à tarefa anterior, esta tarefa pedia explicitamente que os alunos utilizassem o modelo introduzido na sessão anterior. De modo global, os alunos conseguiram compreender a utilização do modelo, ou seja, conseguiram utilizá-lo para dar sentido ao que estavam a realizar. No momento de exploração, nem todos os grupos conseguiram indicar, no modelo, todas as representações pedidas, tendo sido trabalhada esta identificação no momento de discussão coletiva.

Na tarefa 3, depois de os alunos terem trabalhado formalmente a percentagem e de considerar que podia avançar, mais objetivamente, para o numeral decimal, surge o modelo 10x10 que, neste caso, surgia associado a um azulejo partindo de um contexto familiar. A planificação desta tarefa encontra-se em anexo (Cf. Anexo F).

A questão 3 foi elaborada a partir de registos da sessão anterior, realizados no momento de exploração, enquanto um dos grupos trocava ideias sobre a tarefa.

Desta forma, a tarefa 3 pretendia trabalhar não só com diferentes representações dos números racionais, mas dar destaque ao modelo 10x10 (representação icónica) para apoiar a compreensão de numeral decimal (representação simbólica), para além de promover a sua utilização para justificar a equivalência e a grandeza dos números representados por 0,50 e 0,5 e 0,8 e 0,69, respetivamente.

Durante esta tarefa, os alunos estabeleceram novamente relações entre representações simbólicas e entre representações simbólicas e o modelo. Quando pedido para representar a área a sombreado, nem todos os alunos conseguiram representar frações equivalentes, possivelmente porque, como a unidade estava dividida em 100 partes iguais, a sua perceção não era imediata. No entanto, as frações equivalentes foram surgindo no momento de discussão.

Na tarefa 3 começaram a surgir os conceitos de décima, centésima e milésima. Nesta tarefa o intuito não era trabalhar a milésima, mas foi algo que surgiu e, nesse sentido, a tarefa que se seguiu tinha como objetivo continuar a aprofundar o trabalho em torno das diferentes representações simbólicas de número racional.

Novamente, para que a tarefa se aproximasse do contexto dos alunos, sendo que a festa de finalistas se aproximava, foi elaborada a tarefa que se segue, cuja planificação se encontra em anexo (Cf. Anexo G).

Durante esta tarefa surge um novo modelo, o *Decimat*, que pretendia tornar o trabalho com o numeral decimal envolvendo milésimas mais intuitivo. O modelo do *Decimat* foi apresentado como uma toalha, dividida em 10 partes iguais, em que, uma dessas partes de encontrava dividida em 10 e, igualmente, uma dessas partes se encontrava, também, dividida em 10 partes exatamente iguais.

De um modo geral, os alunos compreenderam o trabalho a partir deste modelo, mostrando compreender a estrutura do sistema de numeração decimal, neste caso, da representação em numeral decimal. Porém, o que gerou uma maior dificuldade foi os alunos compreenderem que uma milésima sob a forma de percentagem se representa como 0,1%, por implicar um grande desenvolvimento conceptual.

A última tarefa – planificação em anexo (Cf. Anexo H) – foi elaborada a partir da tarefa anterior, existindo uma continuação do seu contexto, e tinha como objetivo principal que os alunos representassem as partes da toalha que lhes eram pedidas. Antes de o poderem realizar, os alunos tinham de perceber

que não lhes era dada a unidade completa, mas sim parte dela, sendo que tinham de a conceptualizar.

Esta tarefa permitiu que os alunos escolhessem a estratégia mais adequada de forma que lhes permitisse resolver o problema. Destaco que foi mencionado aos alunos que, tal como eles já sabiam, caso necessitassem de algum modelo ou do pedaço de papel que representavam $\frac{4}{5}$ da toalha, estes iriam estar disponíveis na área da Matemática.

De um modo geral, os alunos utilizaram diferentes modelos para indicar as diferentes representações pedidas, ou seja, consoante a representação icónica a representar, optaram por selecionar diferentes modelos. Uma dificuldade sentida foi exatamente na conceptualização da unidade de referência, sendo que houve grupos que, depois de esclarecido o que era para fazer e de os próprios alunos terem resumido o proposto, não completaram a unidade, assumindo a parte de toalha disponibilizada como o todo.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este capítulo visa analisar e interpretar os dados recolhidos ao longo da intervenção pedagógica, através dos métodos e técnicas de recolha de dados mencionados no capítulo II. Os dados aqui apresentados serão analisados tarefa a tarefa, seguindo a ordem com que foram realizadas, tendo em consideração os objetivos do presente estudo que pretende compreender de que forma é que os alunos utilizam e relacionam diferentes representações de número racional e compreender qual o contributo dos modelos para essas transformações realizadas pelos alunos, elaborados para auxiliar a resposta às questões de investigação:

iii. Qual a flexibilidade que os alunos apresentam no uso das diferentes representações de número racional?

- **a.** Que transformações de números racionais realizam os alunos?
- **b.** Que ideias apresentam os alunos perante essas transformações?

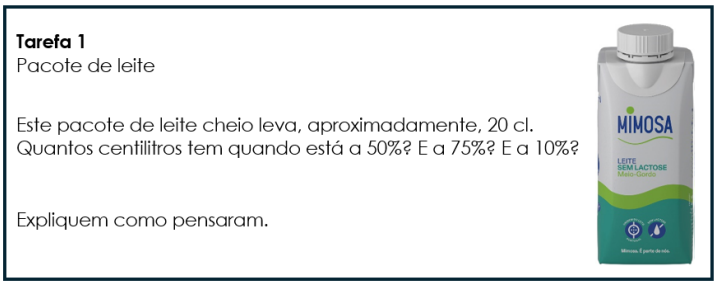
iv. De que forma é que a utilização de modelos pode apoiar nas transformações de número racional?

1. Tarefa 1: "Pacote de leite"

Como foi referido no capítulo anterior, a primeira tarefa (Cf. Figura 5) apresentada aos alunos tinha como intuito explorar a representação sob a forma de percentagem, enquanto representação de números racionais (Moss & Case, 1999; Guerreiro & Serrazina, 2015).

Figura 5

Tarefa 1: Pacote de leite



Nota: Tarefa adaptada de Guerreiro e Serrazina (2015)

No momento de lançamento da tarefa os alunos não mostraram dificuldade em compreender o enunciado, possivelmente por este ser simples e por facilmente conseguirem associar 20 cl a 100%, sendo uma descoberta importante para a resolução do problema.

Note-se o seguinte episódio, no qual uma das alunas, Olívia auxilia a colega Vitória na interpretação do enunciado:

> **Olívia:** Imagina, o pacote agora tem 20 centilitros. Está a 100%. Agora imagina que ele está a 50% temos de ver a metade. Imagina, para tu saberes quantos centilitros está quando….
> **Vitória:** Qual é que é a metade de 20, 10. Então 50% é 10 cl.
> **(…)**
> **Vitória:** Quando está a 20 [cl] está a 100%. E quando está a 50% tem 10 [cl].
>
> (grupo 3, 15 de abril, 15h06min)

Neste episódio é percetível que as alunas reconhecem o todo, ou seja, a unidade (20 cl) referindo que corresponde a 100%. A partir deste episódio percebe-se que a percentagem se apresenta como uma representação poderosa, no trabalho com os racionais, pois não só identificam 100% como o todo como 50% como a sua metade. Estes alunos, que ainda não tinham tido um contacto formal com esta representação, conseguiram utilizá-la para dar sentido à forma como queriam registar as suas conclusões, apresentando alguma facilidade na resolução do problema.

Ainda neste grupo, durante o momento de exploração, o grupo de Olívia e Vitória continua a discussão para conseguirem descobrir quantos centilitros tem o pacote de leite se tiver 75%:

> **Lucas:** É 25[cl].
> **Vitória:** Não pode ser 25 [cl] porque 100% é 20 [cl].
> **(…)**
> V**itória:** Se 10 cl é igual a 50% então se calhar 15 cl vai ser igual a 75%.
> **Olívia:** Mas como?
> **Vitória:** Porque vai 25[%]. Olha de 50[%] para 100[%] vão 10 centilitros e 25[%] é metade então tem de ir metade.
> **Francisca:** Ahh já percebi, Vitória. Porque isto é igual às baterias. Se dividirmos em 4 partes como nos 50[%] é 10, então metade de 50[%] é que é 25[%], é 5, e 75[%] é 25[%] mais 50[%], que é 10 mais 5 que dá 15.
>
> (grupo 3, 15 de abril, 15h07min)

No excerto anterior é possível perceber-se a relação que os alunos estabelecem entre 75% e 50%. Assim, utilizam a representação que conhecem (50% = 10cl) para os ajudar a descobrir 75%, olhando para esta representação como 50% + 25%, estabelecendo, ainda, a respetiva ligação aos centilitros contidos no pacote. É, também, possível afirmar que os alunos reconhecem, uma vez mais, a unidade de referência, percebendo que 20 cl, corresponde a 100%, isto é, ao pacote cheio. É importante referir que o grupo consegue estabelecer rapidamente uma relação entre o problema e uma representação icónica com a qual já estavam familiarizados, as baterias. Desta forma, compreenderam que, se dividissem 20 cl em quatro partes iguais conseguiriam descobrir quantos centilitros teria o pacote de leite aos 75%. Porém, apesar de não ser evidente que o grupo estabelece relações entre diferentes representações simbólicas que os números racionais podem assumir, implicitamente, parece existir uma noção de quartos, uma vez que ao dividir 20 cl em quatro partes iguais, estão a descobrir a quantos centilitros corresponde $\frac{1}{4}$, sendo que 75% corresponde a $3\times\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

Por outro lado, o grupo identificado por mim como grupo 4, no momento de exploração, procurou utilizar a representação sob a forma de fração, bem como o numeral decimal para apoiar a resolução do problema, tal como se pode verificar a seguir.

Simão: 75% é 15 [cl].
Helena: 15 [cl] é quanto de 100? Um quinto, um sexto ou quê?
Rodrigo: 15 não é um sexto.
Helena: 15 mais 15 trinta. Mais 15, 45, mais 15, 60 mais 15, 75.

(grupo 4, 15 de abril, 16h00min)

O grupo, possivelmente por a fração ser uma representação que fora tão trabalhada, tentou, num primeiro momento, relacionar a quantidade de leite do pacote (15 cl) com a representação em fração. Porém, através da fração o grupo não conseguiu identificar a que parte corresponderia 15 centilitros, deixando esta estratégia de lado. Helena parece não compreender por que razão o Simão afirma que são 15 centilitros, pois acaba por confundir os valores relativos a centilitros e a percentagem. Num primeiro momento tenta obter 75 (que corresponde à percentagem) a partir de 15 (que corresponde a cl), tentando perceber quantas vezes tem de o repetir para identificar a que fração corresponde.

O grupo continua a discussão para tentar chegar a 75%.

Leonor: O pacote cheio até aqui é 100[%] que é igual a 20 cl. 50% é 10 cl.
Leonor: Nós queremos saber quantos centilitros é 75%. Nós sabemos… espera. De 100% nós tiramos quanto para ficar 75[%]?
Helena: Ah espera, tiramos 25.
Leonor: Ah não, então isto não pode dar… ah espera … pode, é 15.
Simão: 15 cl é igual a 75% porque olha, se nós ao 100[%] tiramos 25% para termos 75%, temos 15 cl porque para o 50[%] tiramos mais 25[%]. Então tiramos 5[cl] para os 75[%], e mais 5[cl], para os 50[%].

(grupo 4, 15 de abril, 16h00min)

Tal como aconteceu no grupo anterior, estabelecem relação entre os 75% e os 50%, representação esta que que lhes é familiar. Os alunos parecem

utilizar uma estratégia diferente do grupo anterior, relacionando os 25% como metade de 50% e subtraindo 25% (5cl) a 100% (20cl).

O grupo anterior recorre a 50% para obter 75% através da decomposição – 50%+25%=75%, logo 10cl+5cl=15cl –, mas neste grupo, partindo do facto de saberem que 50%+25%=75%, chegaram à conclusão que cada 25% corresponde a 5cl, partindo de 100% (20cl) para confirmar as conclusões, retirando 25% (20cl-5cl=15cl) até obterem 50% (10cl).

Ainda neste grupo, os alunos parecem querer relacionar as representações que já conhecem ao contexto que lhes é dado, apesar de não haver qualquer indicação no enunciado para tal.

> **Helena:** Agora falta os 10%.
> **Simão:** Então agora os 10[%] é zero vírgula cinco 5[cl]. Não! É zero virgula quatro, é zero virgula quatro.
> **(…)**
> **Helena:** Não é isso que queres dizer. 100 a dividir por dez é igual a 10, não é zero vírgula quatro.
> **Simão:** Mas zero vírgula quatro é como… ah já percebi, é igual a zero virgula dez.
> **Leonor:** Epah [*sic*], Simão mas zero vírgula dez o quê?
> **Simão:** Porque nós só temos um pacote de leite, vocês nunca me percebem. Nós estamos a dividir o pacote de leite 10 partes. E 1 dividido em 10 partes dá zero vírgula dez.
> **Helena:** Ah, já sei. Então para descobrirmos … oh então é fácil. É só dividirmos também os 20cl em 10 partes.
> **(…)**
> **Rodrigo:** Isso é pensares qual é o número que dez vezes dá 20.
> **Helena:** Epah é dois atão [*sic*]. Porque dois vezes 10 dá 20. (referindo-se a 10 vezes o dois, neste caso).
>
> (grupo 4, 15 de abril, 16h02min)

A representação em numeral decimal parece fazer sentido para este grupo na medida em que conseguiram associar o todo a 1 e dividi-lo em dez partes iguais, reconhecendo cada uma dessas partes como 0,10. Novamente, os alunos parecem associar a percentagem a outra das representações que já fora trabalhada, o numeral decimal. Porém, apesar de identificarem o pacote de leite como a unidade, quando dividem essa unidade em 10 partes iguais,

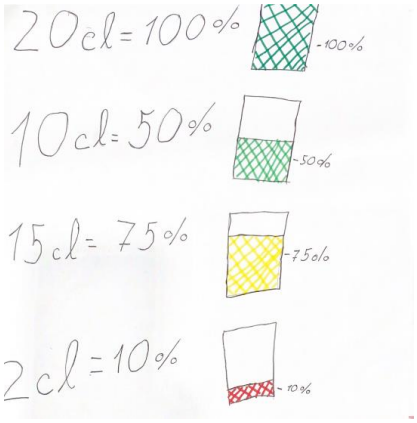
referem-se a cada uma das partes obtidas como "zero vírgula dez" (0,10), por lhes ser mais intuitivo, possivelmente, devido a pensarem na unidade como sendo constituída por 100 partes ou, ainda, pelo hábito de verem esta representação associada a dinheiro.

Depois de encontrar uma estratégia que lhes permitisse descobrir quantos centilitros tinha o pacote de leite a 10% (dividir os 20cl em 10 partes iguais), o grupo estabelece uma relação multiplicativa entre as partes em que o pacote se encontra dividido e uma dessas partes (10×2=20cl, logo 10%=2cl).

Este grupo optou por, tal como praticamente todos os outros grupos, recorrer a representações icónicas (Cf. Figura 6) para registar a sua estratégia de resolução.

Figura 6

Cartaz para a discussão da tarefa 1 elaborado pelo grupo 4



A estratégia de resolução do grupo é realizada de forma mais rigorosa do que propriamente o registo elaborado no cartaz, que perde um pouco de rigor.

Já durante o momento de discussão coletiva, e como forma de perceber qual o motivo de ter levado o grupo a marcar 10% na representação icónica elaborada por eles e de que forma o fizeram, questionei-os.

Prof. Estagiária: … como é que pensaram para marcar os 10%?

Rodrigo: porque nós estávamos sempre a fazer metades, a dividir por dois, porque nós dividimos por dois para termos os 50% e depois por 2 para termos os 25[%] e queríamos tentar chegar aos 10, mas se dividíssemos por 2 outra vez ia ser 12 e meio e então nós pusemos um bocadinho para baixo porque é quase lá perto.

(discussão coletiva, 16 de abril, 10h14min)

As representações icónicas parecem evidenciar-se como poderosas para ajudar a complementar o raciocínio. Para identificar as representações que lhes eram pedidas, os alunos começam por registar os 100% para poderem registar, depois, os 50%. Perceberam que, com mais metade, iriam obter 75%, ou seja, começaram a ir calculando as metades e, no fim, obtendo os 12,5%, traçaram os 10% com menor rigor, ainda que de forma sustentada.

O grupo 6, também, para identificar os 10% do pacote de leite, optou por dividi-lo em 10 partes, tal como se pode verificar no seguinte diálogo.

Prof. estagiária: … vocês disseram que se dividissem os 20cl em 10 partes, cada parte corresponderia a 2 cl. Será que vocês, com essa estratégia conseguiriam descobrir tudo o que eu vos pedia no enunciado?
A turma: Não.
Xavier: Não porque…não dá para dividir, quer dizer se calhar dá, mas…
Joaquim: Fazíamos um pacote de leite dividido em 20 partes e depois havia a metade e depois havia os três quartos e depois havia uma décima.
Prof. Estagiária: Havia o quê Joaquim?
Joaquim: Uma décima.

(discussão coletiva, 16 de abril, 10h30min)

Na tentativa de lhes apresentar outra estratégia, os alunos depararam-se com um problema, quando questionados se ao descobrirem em primeiro lugar a quantos centilitros corresponderia 10% do pacote, se conseguiriam descobrir as outras representações que lhes eram pedidas. Notou-se alguma hesitação por parte da turma, pois nenhum dos grupos tinha recorrido a esta estratégia. Porém, durante a discussão coletiva, um dos alunos conseguiu, ainda, chegar à conclusão pretendida e perceber que iriam obter uma décima.

Ao contrário do que acontece durante a exploração, em que um dos grupos ao dividir a unidade em 10 partes iguais obtém 0,10, Joaquim parece já apresentar um conhecimento mais sólido, identificando uma das partes do pacote dividido em 10 como uma décima.

A discussão continuou, visto que os alunos ainda não tinham conseguido responder à questão colocada.

Prof. Estagiária: Então e quanto é que é uma décima?
A turma: 2 centilitros.

(…)

Prof. Estagiária: E sete?
A turma: 14 [cl]
Prof. Estagiária: Então e 75%?

(…)

Xavier: Só se fosse metade de dois, mas assim dá 1.
Prof. Estagiária: E 1 centilitro corresponde a quantos porcento?
Xavier: A 1%.
Joaquim: A 10[%]?
Xavier: A 5%.
Prof. Estagiária: Porquê Xavier?
Xavier: Porque a metade de 10% é 5% e 10[%] é 2cl então 5[%] é 1[cl].
Prof. Estagiária: Então quantos centilitros de leite teríamos aos 75%?

(alguns segundos depois)

Helena: 15 centilitros.
Prof. Estagiária: Porquê?
Helena: Porque eles há pouco já tinham dito que 70% são 14 cl e se acabámos de descobrir que 5% é 1 é só juntar 14 mais 1 que é igual a 15.

(discussão coletiva, 16 de abril, 10h30min)

Durante os momentos de discussão tentou-se sempre procurar descobrir novas estratégias partindo das descobertas dos alunos. Uma das estratégias descobertas durante este momento foi como poderiam recorrer a 10% como valor de referência para obter os restantes. Os alunos descobriram que, para obter cada uma das dez partes, apenas teriam de adicionar mais 10% à parte anterior, ou seja, mais 2cl.

Desta forma, com a análise das produções dos alunos e dos instrumentos que permitem apoiar a técnica de observação (gravação áudio), e perante todo o trabalho desenvolvido com a turma durante a intervenção, permite-me aferir que praticamente todos os alunos mostraram facilidade em estabelecer relações entre diferentes representações. Em praticamente todos os grupos, a representação icónica, que se apresenta como próxima do modelo retangular (pacote de leite), evidencia-se como relevante na medida em que permite aos alunos o estabelecimento de relações entre a representação simbólica e a representação icónica, auxiliando-os no pensamento matemático.

Os alunos poderão, também, ter apresentado facilidade nesta tarefa, uma vez que eram representações facilmente associadas à noção de todo, metade e quarto, já trabalhadas anteriormente, e apenas 10% se apresentava como um maior desafio, mas que, durante a discussão coletiva foi possível a construção de aprendizagens conjuntas a partir das minhas questões intencionais e das questões dos elementos da turma.

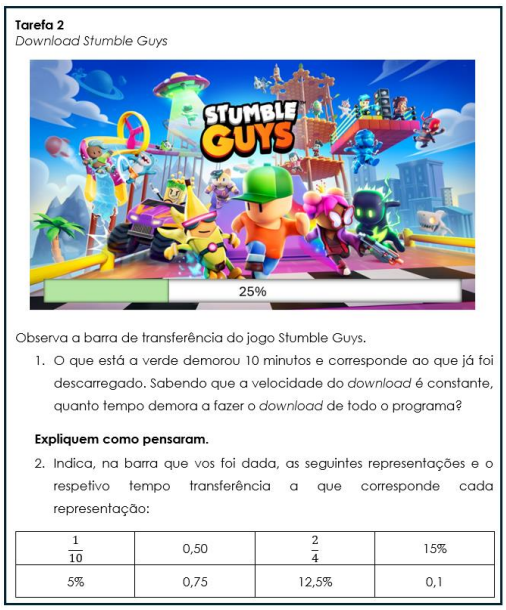
No geral, para a resolução deste problema, os grupos utilizaram a representação sob a forma de percentagem para mostrarem como pensaram, relacionando-a com representações icónicas que ajudaram a estruturar e a organizar o pensamento. A representação sob a forma de fração assume-se, também, como uma representação potente na medida em que vários grupos a relacionam com ambas as representações referidas anteriormente, possivelmente por ter sido uma representação que tem vindo a ser trabalhada.

2. Tarefa 2: “Download Stumble Guys”

A segunda tarefa (Cf. Figura 7) apresentada aos alunos, pretendia, uma vez mais, continuar a explorar a representação de número racional sob a forma de percentagem, bem como outras representações que já tinham sido anteriormente exploradas.

Figura 7

Tarefa 2: Download Stumble Guys



Tarefa 2

Download Stumble Guys

Observa a barra de transferência do jogo Stumble Guys.

1. O que está a verde demorou 10 minutos e corresponde ao que já foi descarregado. Sabendo que a velocidade do *download* é constante, quanto tempo demora a fazer o *download* de todo o programa?

Expliquem como pensaram.

2. Indica, na barra que vos foi dada, as seguintes representações e o respetivo tempo transferência a que corresponde cada representação:

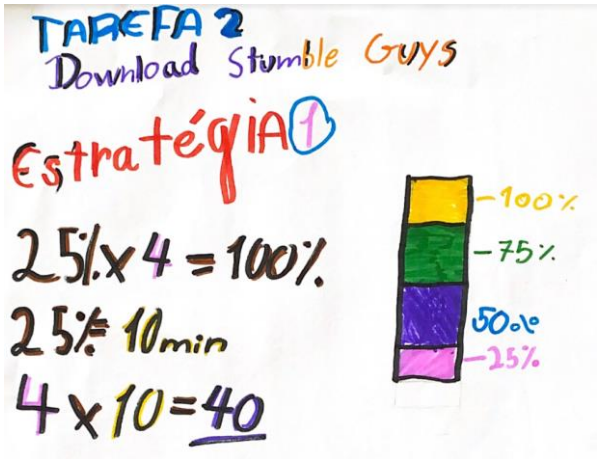
$\frac{1}{10}$	0,50	$\frac{2}{4}$	15%
5%	0,75	12,5%	0,1

Mais uma vez, no momento de lançamento da tarefa, os alunos não mostraram dificuldade em compreender o enunciado, novamente por lhes ser um contexto familiar, o *download* de um jogo, e por a representação que lhes era dada ser uma representação de referência (25%). Porém, nesta tarefa os alunos teriam de utilizar o modelo para identificarem as representações que lhes eram pedidas. O modelo apresentado aproxima-se de um modelo de barra dupla, uma vez que existe uma relação entre a percentagem e o tempo de *download* do jogo.

Relativamente a esta tarefa, todos os grupos mostraram facilidade em conceptualizar a unidade, tal como lhes era pedido. O cartaz do grupo 5 (Cf. Figura 8) mostra que o grupo recorre a uma estratégia multiplicativa para descobrir quanto tempo demorava o jogo a fazer o *download*, sendo que sabiam que 10 minutos de *download* correspondia a 25%.

Figura 8

Estratégia do grupo 5 à questão 1 da tarefa 2



O grupo parece fazer a relação entre o todo (100%) e a quarta parte (25%), multiplicando 4×10min para descobrirem o tempo de download. Através da visualização do cartaz, percebe-se que os alunos recorrem a um registo icónico para mostrar como pensaram.

Ainda na fase de exploração, mas já na questão dois, os grupos pareceram estabelecer relações entre diferentes representações, tanto entre representações simbólicas quanto entre representações simbólicas e icónicas, tal como evidente o excerto seguinte.

> **Xavier:** … Agora é 50%, eu acho que é um meio.
> **Emília:** Eu também acho que é um meio, porque supostamente uma barra é 100%.
> **Xavier:** Eu também acho, aqui seria 1, então aqui é metade que é 50, um meio.
> **Xavier:** Emília, onde é que achas que é dois quartos?
> **Isabela:** É metade porque se dividirmos em 4 partes, dois quartos é metade é a mesma coisa que um meio, porque cada parte é 25% e 25 mais 25 é 50% que é metade.
>
> (grupo 3, 29 de abril, 15h17min)

Através do excerto anterior pode perceber-se que, os alunos têm noção de que 50%, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma parte do todo, ou seja, metade da unidade, referindo que a barra corresponde a 1 unidade, isto é, a 100%.

Os alunos deste grupo, debateram-se relativamente à identificação de 12,5% na barra, tal como se pode verificar abaixo.

> **Xavier:** Inês, onde é que achas que é os doze porcento e meio?
> **Isabela:** Deixa ver.
> **Xavier:** Olha por acaso esta também não sei, Joaquim podes ajudar, esta também não sei.
> **Joaquim:** Então onde é que é os 10%?
> **Xavier:** Aqui.
> **Joaquim:** Então é só veres os 10% e os 15% e fazes um meio deste bocado.
>
> (grupo 3, 29 de abril, 15h18min)

Os alunos parecem compreender que o conceito $\frac{1}{2}$ refere-se a metade de algo e não apenas como metade de 100%, trabalhando flexivelmente em torno desta representação. É de realçar, ainda, que, vários alunos, leem 12,5% como "12 porcento e meio" revelando compreender que são 12 unidades mais meia unidade.

Outro grupo, ainda na fase de exploração, debateu onde deveriam colocar 12,5%.

> **Olívia:** Raquel, precisamos de ajuda.
> **Vitória:** Nós aqui, ´tás [*sic*] a ver, nós colocámos os 12 vírgula 5 porcento aqui (depois da posição de 100%). Está certo, não está?
> **Prof. Estagiária:** Porque é que colocaram aí? Expliquem lá.
> **Olívia:** Então, porque este número é maior. (apontando para 12,5%)
> **Prof. Estagiária:** Maior do que o quê?
> **Olívia:** Do que 100%.
> **Vitória:** Porque este, se nós tirarmos a vírgula, fica 125% e é maior do que 100%.
>
> (grupo 2, 29 de abril, 15h23min)

As alunas, num primeiro momento, acabam por colocar a representação fora da barra, evidenciando que não apresentam consciência do significado do uso da vírgula. Mais tarde, voltei ao grupo.

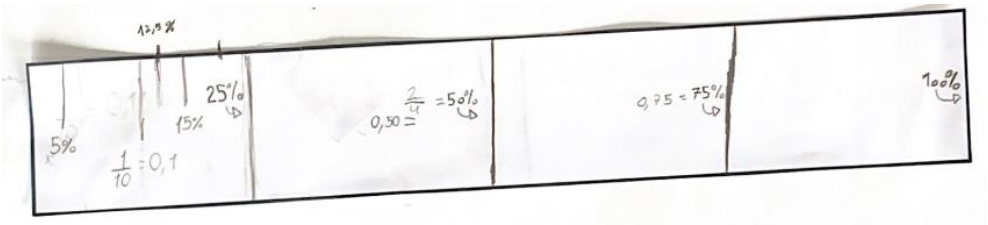
> **Vitória:** Raquel, afinal estava mal o que eu disse.
> **Prof. Estagiária:** Porquê? O que te fez mudar de ideias?
> **Vitória:** 12 vírgula 5 por cento é metade de 25%. Atão [*sic*], não pode estar aqui (apontando para onde tinha colocado a marca), tem de estar aqui porque é metade de 25[%].

(grupo 2, 29 de abril, 15h30min)

A figura que se segue mostra a marcação das representações, do grupo 2, na barra (Cf. Figura 9):

Figura 9

Marcação, do grupo 2, na barra, das representações pedidas na tarefa



As alunas explicaram que, para descobrir o local onde deveriam representar os 12,5% recorreram a uma estratégia de decomposição, já trabalhada em anos anteriores, decompondo o número (25%) consoante lhes dava mais jeito (24+1=25), uma vez que sabiam que 12 é metade de 24 e reconheciam 0,5 como metade de 1.

Durante o momento de discussão coletiva, ainda que a representação 5% possa não estar exatamente no local, o grupo 2 explica, o porquê de terem colocado os 5% onde colocaram.

> **Olívia:** Como nós já sabíamos que eram 40 minutos, nós dividimos a nossa barra em 4. E este era 25[%] era 10 minutos. Depois como era para vermos os 5 porcento, nós sabemos que aqui é 25 e então pensámos que seria aqui mais no início porque aqui a metade é os 12

> vírgula 5 porcento. Nós pensámos em um décimo, que é mais ou menos aqui e depois os 5[%] é metade, que é mais ou menos aqui.
>
> (discussão coletiva, 30 de abril, 14h52min)

Depois de conseguirem identificar 12,5%, tornou-se mais fácil, para o grupo, representar 5%, na barra. Assim, é percetível, através do excerto que 5% é entendido como metade de $\frac{1}{10}$, que, embora encontrando-se na representação em fração, os alunos leem como 10%, referindo, ainda, 0,1 como igual a $\frac{1}{10}$, tal como mostra a Figura 12.

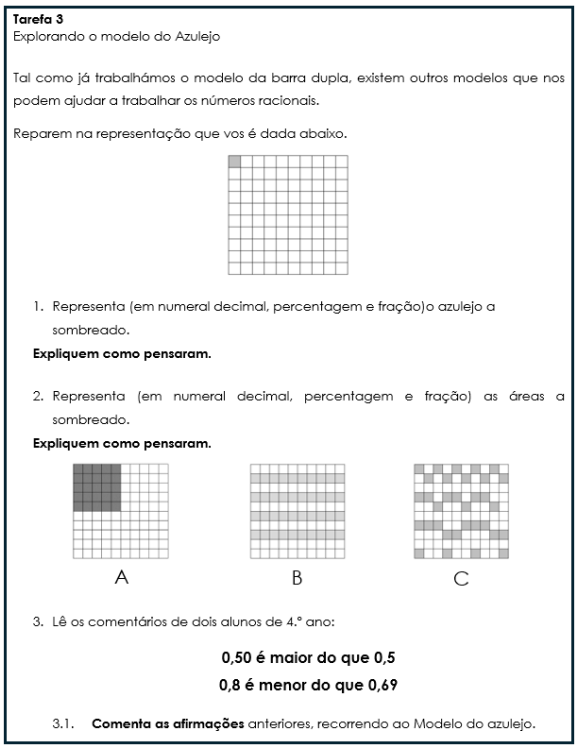
Durante a realização de toda a tarefa os alunos foram estabelecendo relações entre representações, mostrando e justificando o raciocínio. Os alunos pareceram ter maior facilidade em relacionar representações de referência como $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, como seria de esperar. No entanto, também foram capazes de olhar para 12,5% como metade de 25%, identificando a sua posição na barra.

3. Tarefa 3: "Explorando o modelo do azulejo"

Na terceira tarefa (Cf. Figura 10) apresentada aos alunos, para além de se pretender a continuação do trabalho perante as diferentes representações de número racional, pretendia desenvolver-se a compreensão do valor posicional dos algarismos na parte não inteira de um numeral decimal.

Figura 10

Tarefa 3: Explorando o modelo do azulejo



Tarefa 3
Explorando o modelo do Azulejo

Tal como já trabalhámos o modelo da barra dupla, existem outros modelos que nos podem ajudar a trabalhar os números racionais.

Reparem na representação que vos é dada abaixo.

1. Representa (em numeral decimal, percentagem e fração)o azulejo a sombreado.

Expliquem como pensaram.

2. Representa (em numeral decimal, percentagem e fração) as áreas a sombreado.

Expliquem como pensaram.

A B C

3. Lê os comentários de dois alunos de 4.º ano:

0,50 é maior do que 0,5

0,8 é menor do que 0,69

3.1. **Comenta as afirmações** anteriores, recorrendo ao Modelo do azulejo.

Rapidamente os alunos começaram a estabelecer relações, enquanto exploravam a tarefa.

Guilherme: Aqui é um de cem.

(…)

Emília: Então, está um quadradinho pintado, não é. E se está um pintado…

Guilherme: É um centésimo…

Emília: É um de cem. Uma centésima.

(…)

Emília: Então isso é igual a 1 porcento.

Guilherme: Falta o numeral decimal. Eu acho que é zero vírgula um.

Emília: Não, Guilherme. Só tem um quadrado pintado, em cem. Tem 3 algarismos, vês. Então, tem de ser zero zero vírgula um (00,1).

(6 de maio, 14h50min)

Rapidamente os alunos conseguem perceber que, como apenas um dos quadrados está pintado e a unidade está dividida em 100 partes iguais, o

quadradinho a sombreado representa uma centésima. A mesma coisa acontece com a percentagem que de imediato identificam como 1%. Novamente, tal como aconteceu nas tarefas anteriores, a percentagem parece ser uma representação intuitiva para vários alunos. Porém, tal como outros alunos, o Guilherme e a Emília tiveram dificuldade em perceber como representar uma centésima em numeral decimal. Numa tentativa de representar essa parte em numeral decimal, aparentemente, a aluna parece inverter esses algarismos (00,1) procurando estabelecer uma relação entre o facto de o quadradinho a sombreado ser uma parte em 100, número que apresenta três algarismos.

Como os alunos tinham opiniões diferentes de como representar o quadradinho em numeral decimal, pediram ajuda.

> **Prof. Estagiária:** Então vamos verificar a ideia do Gabriel. Este quadrado todo corresponde a quanto?
> **Guilherme:** É uma unidade, porque é só um quadrado.
> **Prof. Estagiária:** Então vamos pensar que temos 10 quadrados pintados. Ajudem-me lá a contar. Zero vírgula um, zero vírgula dois, zero vírgula…
> **Emília:** … Três.
>
> **(…)**
>
> **Guilherme:** Zero vírgula nove … (enquanto apontava para o 9.º quadradinho)
> **Prof. Estagiária:** E agora?
> **Guilherme:** Um.
> **Prof. Estagiária:** Então, mas tu disseste que 1 era o quadrado grande e agora estás a dizer que 10 quadradinhos, em cem, faz uma unidade.
> **Emília:** Ah, eu já sei. Tem de ter aí um zero (apontando para a posição das décimas e centésimas no sistema decimal) porque se nós tivéssemos 10 pintados ficava zero vírgula dez. Porque isso faz uma barra e nós temos 10 barras. E se tivéssemos 10 quadrados que é uma barra é que era zero vírgula um, porque é uma barra em dez.
>
> (6 de maio, 14h52min)

Os alunos que, inicialmente, não conseguiram representar uma centésima, com a ajuda do modelo 10x10 tornou-se mais visível o porquê de não poderem representar uma centésima como sendo 0,1. Visto que já tinham identificado o quadrado maior como uma unidade, ao adicionarem 0,1 dez

vezes, verificaram que, se efetivamente cada quadradinho se representasse como 0,1, 10 quadradinhos (1 barra ou coluna) deveria corresponder à unidade. As conclusões obtidas através do modelo provocaram um conflito no raciocínio dos alunos, sendo que eles afirmavam, sem dúvidas, que a unidade era o quadrado grande e que a unidade é que estava dividida em 100.

Ainda no momento de exploração, mas já noutro par, aconteceu uma situação idêntica à do par anterior, sendo que a Diana mostrou alguma dificuldade em compreender como se representava o quadradinho, em numeral decimal.

> **Diana:** Número decimal não sei.
> **Xavier:** Imagina que isto em número decimal é 10. Se isto tudo fosse 10 (referindo-se a quantas partes o quadrado estaria dividido) era zero vírgula um. Mas está dividido em cem e como o cem tem mais um zero que o 10 temos de acrescentar mais outro zero. É zero vírgula zero um.

(6 de maio, 14h48min)

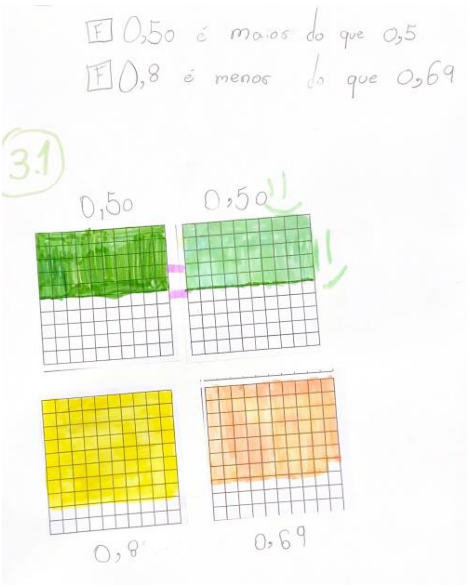
O aluno parece tentar encontrar uma forma diferente para a unidade estar dividida (10 partes) de forma a ajudar a Diana a perceber o sistema de numeração decimal, bem como deveriam representar o quadradinho. Desta forma, o Xavier justifica que, caso a unidade estivesse dividida em 10 partes deveriam representar uma dessas partes como 0,1. Porém, como está dividida em 100, o aluno recorre ao conhecimento que apresenta dos números inteiros afirmando que se em 10 partes se representava como 0,1 em 100 partes teriam de acrescentar um zero. No entanto, o aluno parece ter um conhecimento mais aprofundado, ainda que frágil, do sistema de numeração decimal, ao contrário de Emília que apresentou o mesmo raciocínio, mas identificou que o quadradinho deveria ser representado como 00,1.

Mais uma vez, o modelo parece ajudar os alunos a explicar o raciocínio, não só nesta questão, mas, principalmente na questão 3, em que era pedido para compararem as afirmações “0,50 é maior do que 0,5” e “0,8

é menor do que 0,69" (Cf. Figura 11). A primeira afirmação foi elaborada a partir de um comentário de um aluno da turma, durante a exploração da tarefa 2.

Figura 11

Estratégia de resolução do Simão e da Lara à questão 3 da tarefa 3



Tal como é visível, o auxílio do modelo e o trabalho a pares fez com que Simão justificasse a afirmação que lhe era dada e percebesse que 0,5 é a mesma coisa que 0,50. Durante o momento de discussão e através do registo áudio, foi ainda possível compreender o porquê de no registo aparecer sobre cada modelo 10x10 a representação 0,50.

> **Helena:** Zero vírgula 50 é maior do que zero vírgula 5.
> **Simão:** É falso, é igual. Porque zero vírgula 5 é metade de um e zero vírgula 50 é metade de cem.

(7 de maio, 9h55min)

Apesar de os alunos terem recorrido à unidade dividida em 100 partes para mostrar que 0,5 é igual a 0,50, conseguiram justificar o porquê de representarem o mesmo, pois depende em quantas partes está dividida a unidade. Na segunda afirmação houve uma contradição.

Álvaro: Nós pensámos que a segunda afirmação é verdadeira porque se nós tirarmos os zeros, como toda a gente sabe, o número é menor e então 8 é menor do que 69.
Olívia: O que eu e o Rodrigo fizemos foi, nós temos aqui 10 [quadradinhos], mas se tirarmos as divisórias ficamos com barras. Uma, duas…. Então e pintámos 8 que é como se fossem oitenta. Porque percebemos que, com esta estratégia que o 0,5 era igual a 0,50.
Prof. Estagiária: Então, isso quer dizer o quê? Se 0,50 é igual a 0,5, ou seja, se vocês representaram da mesma maneira, no azulejo, quer dizer que ambas as unidades estão divididas nas mesmas partes?
Xavier: Não, uma em 100 e outra em 10.

(7 de maio, 9h57min)

Os alunos do grupo de Álvaro revelam não conhecer o valor posicional de cada algarismo, como evidente na afirmação do aluno, comparando estes números (0,8 e 0,69) como números inteiros sem atribuírem significado à vírgula decimal. Assim, os alunos mostram que não parecem associar, inicialmente, o número à sua representação icónica, isto é, não revelam uma noção do número representado pelos numerais. Apesar de o modelo 10x10 que lhes foi apresentado estar dividido em 100 partes, era importante que eles percebessem que podiam transformar de forma flexível, a unidade que lhes era dada, conforme necessitassem, tal como referido na afirmação de Olívia. Assim, o modelo evidenciou-se importante para que os alunos conseguissem registar as suas conclusões, havendo, também, alunos que pensaram no quadrado como estando dividido em 10 partes iguais (10 barras).

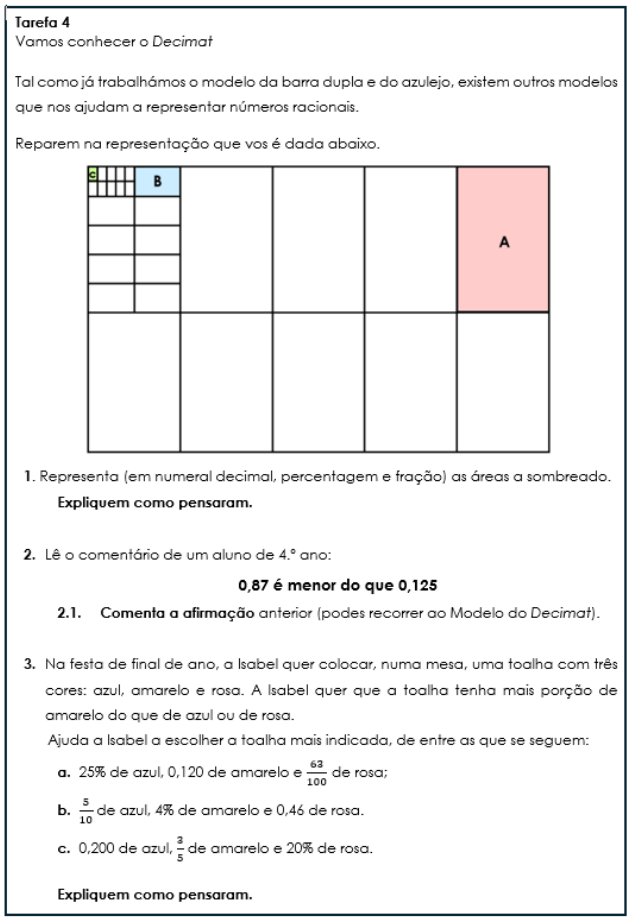
Uma vez mais, os alunos conseguiram estabelecer relações entre as representações simbólicas de número racional, justificando como pensaram. Nesta tarefa, foi mais evidente o potencial do modelo, quando os alunos se depararam com a necessidade de representar uma centésima sob a forma de numeral decimal, utilizando o modelo para explicarem como deveriam representar. A sua utilização foi também imprescindível para que os alunos compreendessem o porquê de 0,5 ser igual a 0,50.

4. Tarefa 4: "Vamos conhecer o *Decimat*"

A quarta tarefa (Cf. Figura 12) apresentada pretendia explorar o modelo do *Decimat* de forma a trabalhar as ordens da parte não inteira de numerais decimais até às milésimas. Novamente, a tarefa tinha como intuito trabalhar diferentes representações de número racional.

Figura 12

Tarefa 4: Vamos conhecer o Decimat



Tarefa 4
Vamos conhecer o *Decimat*

Tal como já trabalhámos o modelo da barra dupla e do azulejo, existem outros modelos que nos ajudam a representar números racionais.

Reparem na representação que vos é dada abaixo.

1. Representa (em numeral decimal, percentagem e fração) as áreas a sombreado.
Expliquem como pensaram.

2. Lê o comentário de um aluno de 4.º ano:

0,87 é menor do que 0,125

2.1. Comenta a afirmação anterior (podes recorrer ao Modelo do *Decimat*).

3. Na festa de final de ano, a Isabel quer colocar, numa mesa, uma toalha com três cores: azul, amarelo e rosa. A Isabel quer que a toalha tenha mais porção de amarelo do que de azul ou de rosa.
Ajuda a Isabel a escolher a toalha mais indicada, de entre as que se seguem:

a. 25% de azul, 0,120 de amarelo e $\frac{63}{100}$ de rosa;

b. $\frac{5}{10}$ de azul, 4% de amarelo e 0,46 de rosa.

c. 0,200 de azul, $\frac{3}{5}$ de amarelo e 20% de rosa.

Expliquem como pensaram.

O modelo utilizado veio ajudar os alunos a compreender, de forma mais clara, o sistema de numeração decimal, bem como representar uma milésima em percentagem, o que é algo bastante complexo e gerou uma grande discussão em torno desta representação.

Sendo que a tarefa 4 pretendia explorar, além da décima e da centésima, a milésima, fez-me sentido começar por questionar os alunos de forma que compreendessem como do *Decimat* se encontra dividido, ou seja, qual a relação entre cada parte e o que representa relativamente ao todo.

Durante a fase de exploração, os alunos recorreram aos modelos, revelando, uma vez mais, o seu potencial para apoiar o raciocínio e ajudar os alunos nessa explicação.

O grupo 6 estava a discutir como representar, na questão 1, os retângulos A, B e C. O diálogo que se segue deu-se depois de um dos elementos do grupo não ter conseguido seguir o raciocínio dos colegas.

> **Artur:** Então, estás a ver, conta lá quantos retângulos A temos.
> **Emília:** Zero vírgula um, (…), zero vírgula nove, este aqui também conta? (referindo-se à décima que está dividida)
> **Artur:** Sim, porque esses todos juntos fazem um A.
> **Emília:** Ok. Zero vírgula nove, um.
> **Artur:** Então, agora é a mesma coisa, mas vês. Estes retângulos estão mais pequenos, nós temos um A que são as décimas, dividido em 10. Então, temos de dividir a décima em 10.
> **Emília:** Sim, eu sei que o B é uma centésima.
>
> **(…)**
>
> **Artur:** Então e agora como é que é o C?
> **Emília:** Ah, já sei. É uma milésima. Porque num A vai ter 10 [retângulos] B, e em cada B vai ter 10 [retângulos] C. Então temos de fazer a mesma coisa. O C é uma centésima dividida em 10.

(grupo 6, 12 de maio, 15h07min)

A aluna aponta para o retângulo A, reconhecendo-o como 1 décima (0,1) e seguindo a mesma lógica conta quantas décimas tem a unidade. Emília mostra, ainda, alguma hesitação relativamente à décima que se encontra dividida, não a tendo adicionado logo às restantes contadas. Com a explicação do Artur, apoiada no modelo, a representação de milésimas torna-se mais clara para a Emília, isto é, reconhece que ao dividir uma centésima em 10 partes iguais obtém uma milésima.

Porém, apesar de para o grupo ser fácil representar uma milésima em numeral decimal, revelou-se mais desafiador representá-la sob a forma de percentagem.

> **Artur:** Então é 1%.
> **Prof. Estagiária:** Qual? O [retângulo] B ou o [retângulo] C?
> **Artur:** O B.
> **Duarte:** O C. O C é um 1.
> **Artur:** Porque o C é um décimo disto. (apontando para o retângulo que representava as centésimas)
> **Prof. Estagiária:** Se nós dividirmos a unidade toda em B, quantos retângulos temos?
> **Duarte:** 1 %.
> **Prof. Estagiária:** Então e vocês disseram que o C era o B dividido em 10.
> **Artur:** Ah já sei 0,1%.

(grupo 6, 12 de maio, 15h13min)

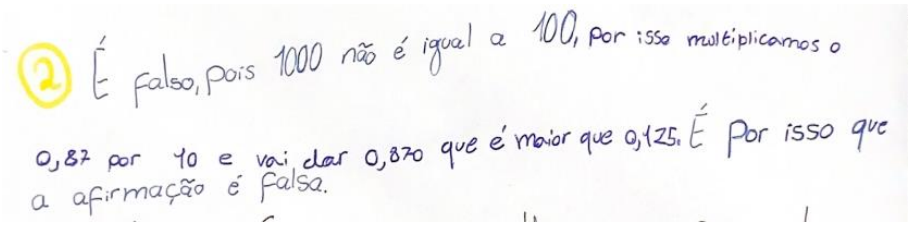
Os alunos revelam dificuldade em representar uma milésima sob a forma de percentagem, não conseguindo de imediato compreender que o raciocínio é idêntico ao raciocínio para obter uma décima, isto é, dividir 1 (1%) em 10 partes iguais. Artur parece chegar a essa conclusão, porém, o grupo acaba por representar 0,001%, ou seja, representam da mesma forma, uma milésima, tanto em percentagem como em numeral decimal. Tal aconteceu, possivelmente, por surgir uma representação em percentagem com parte inteira e não inteira e, talvez, até ao momento, apenas se tenham sempre deparado com percentagens constituídas apenas por uma parte inteira. O aluno, apesar de ter chegado a essa conclusão não conseguiu explicar aos colegas o porquê de se representar uma milésima sob a forma de percentagem como 0,1%.

Nas questões seguintes, os alunos continuaram a utilizar o modelo para justificar a veracidade da afirmação "0,87 é menor do que 0,125", mesmo que a ele tenham recorrido, sem realizar qualquer registo. O grupo 6 (Cf. Figura 13) justifica a afirmação como falsa recorrendo a uma relação multiplicativa, tal como o grupo anterior, mas mostrando a relação

multiplicativa que existe entre a centésima e a milésima, mostrando, ainda, reconhecer que para obter uma milésima se divide a centésima em 10 partes.

Figura 13

Estratégia de resolução do grupo 6 à questão 2 da tarefa 4

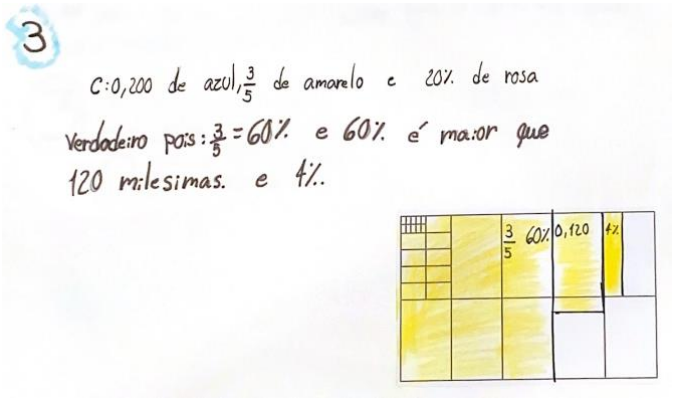


O grupo 6, ao referir que "0,87 por 10 vai dar 0,870" possivelmente, pensou em 0,87 como 87 para poder multiplicar por 10 para obter 0,870 com o intuito de comparar este número a 0,125. O grupo procura comparar os dois números pensando, para isso, na parte que representam numa unidade, representando em milésimas cada um dos números. Possivelmente o grupo reconhece que 1 centésima são 10 milésimas e, por isso, 87 centésimas são 87x10 milésimas (representando-o de forma incorreta).

Já na questão 3 os alunos continuam a estabelecer relações entre diferentes representações. A figura que se segue (Cf. Figura 14) mostra a estratégia de resolução do grupo 2 relativamente a esta questão, em que era pedido que os alunos selecionassem a toalha com maior porção de amarelo.

Figura 14

Estratégia de resolução do grupo 2 à questão 3 da tarefa 4

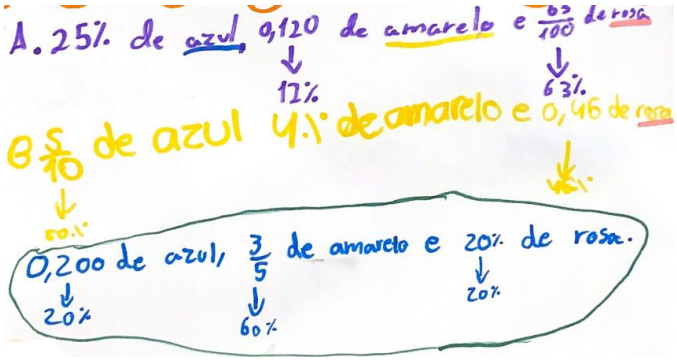


O grupo 2 opta por transformar a fração $\frac{3}{5}$ para uma representação que se mostra ser-lhes mais intuitiva visto que a unidade completa representa 100%. O grupo não partilha a forma como pensou, mas, possivelmente os alunos reconheceram a fração $\frac{3}{5}$ como uma fração equivalente a $\frac{6}{10}$ ou poderão ter visto a unidade como estando dividida em quintos (5 colunas), associando cada quinto a 20%. Através da imagem anterior é, também, possível perceber que os alunos optaram por justificar a resposta através do modelo e marcar a quantidade de amarelo de cada toalha, conseguindo estabelecer relações entre diferentes representações simbólicas e entre a representação icónica que, neste caso, é o modelo do *Decimat*. Pela análise da figura os alunos identificam corretamente 0,120 pintando a representação de tal forma, possivelmente por compreenderem que o retângulo maior correspondia a 0,100 e para obterem 0,120 teriam de pintar mais dois retângulos iguais aos que aparecem divididos, ou seja, teriam de pintar mais duas centésimas ou 20 milésimas. O mesmo pode ter acontecido para representar 4%, acabando por representar incorretamente (pintaram 5%). Por outro lado, o grupo 3 não sentiu necessidade de recorrer ao modelo uma vez que optou por transformar todas as representações para percentagem.

Por outro lado, o grupo 3 não sentiu necessidade de recorrer ao modelo uma vez que optou por transformar todas as representações para percentagem, como se pode verificar através da Figura 15.

Figura 15

Estratégia de resolução do grupo 3 à questão 3 da tarefa 4



Para conseguirem identificar a toalha com maior porção de amarelo o grupo 3, tal como outros grupos, optaram por transformar as representações que se encontravam sob a forma de fração e de numeral decimal para percentagem, de forma a facilitar a comparação das toalhas para conseguirem identificar a toalha com as indicações pedidas. Uma vez mais, a representação sob a forma de percentagem parece evidenciar-se como poderosa uma vez que se apresenta como intuitiva, sendo que os alunos reconhecem a unidade como 100%, conseguindo, com facilidade, transformar representações em fração e numeral decimal para percentagem. Para além disso, a relação entre representações que existiu, desde a 1.ª tarefa, parece ter ajudado os alunos a resolver o problema, visto que os próprios alunos começam a mostrar alguma flexibilidade entre diferentes representações de números racionais.

Durante a discussão coletiva, discutiu-se a forma de representar uma milésima sob a forma de percentagem.

> **Prof. Estagiária:** Então, eu continuo com uma questão. Como é que eu posso representar uma milésima em percentagem?
> **Duarte:** Zero vírgula zero zero um porcento.
> **Prof. Estagiária:** Será? Todos concordam?
> **Alguns elementos da turma:** Sim!
> **Álvaro:** Não, nós não pensámos assim.
> **Prof. Estagiária:** Então como é que pensaram Álvaro?

Álvaro: Então, a gente pôs zero vírgula cinco porcento, porque se uma centésima é um porcento o retângulo C é mais pequeno.
Prof. Estagiária: Ok, é verdade é mais pequeno, mas 0,5 é o quê?
Helena: É metade.
Prof. Estagiária: Metade do quê.
Helena: Metade de qualquer coisa.
Júlia: Aqui é do C porque estamos a falar do um porcento.

(discussão coletiva, 13 de maio, 9h58min)

Através do excerto anterior é percetível que os alunos são capazes de reconhecer 0,5 como metade de algo e não apenas como metade da unidade. Porém, uma vez que reconhecem 1% como sendo uma centésima, os alunos acabam por representar o retângulo C, que é mais pequeno, como 0,5%, sendo a forma encontrada para representar uma percentagem menor que 1.

Artur: Mas isso não é metade.
Prof. Estagiária: Não é metade? Tens a certeza?
Artur: Sim, porque para ser metade tinha de 'tar [*sic*] 5 pintados e só está um.
Prof. Estagiária: Acham que o Artur tem razão? Para termos 0,5% temos de ter 5 pintados?
Álvaro: Ah sim, porque é metade.
Prof. Estagiária: Então como é que vamos representar? Está um pintado em quantos?
Lucas: 10.
Olívia: É um [retângulo] B dividido em 10.
Prof. Estagiária: É um retângulo B dividido em 10! Então se é um retângulo B dividido em 10 partes e o [retângulo] B em percentagem representa… representa o quê?
Francisca: 1%.
Prof. Estagiária: Se um B representa 1% e vocês dizem que o C é um B dividido em 10, como é que vamos representar em percentagem?
Artur: Zero vírgula 1 porcento.
Prof. Estagiária: Porquê? Sabes Artur?
Artur: Porque … eu acho que é porque é igual ao 1 quando se divide em 10. Fica zero vírgula um.
Álvaro: Ah, eu já sei. Sim, é isso que o Artur disse porque isto fica décima do porcento. Porque também temos de dividir o [retângulo] B em 10 para dar o [retângulo] C.

(discussão coletiva, 13 de maio, 10h05min)

Apesar de inicialmente os alunos não terem conseguido representar uma milésima como 0,1%, o momento de discussão coletiva foi crucial na medida em que conseguiram reconceptualizar a unidade, isto é, pensar na centésima como a unidade que se encontra dividida em 10 partes iguais (milésimas). Artur, que anteriormente já tinha referido como representar corretamente o retângulo C sob a forma de percentagem, agora conseguiu justificar o porquê do seu raciocínio. Apesar dos alunos poderem ser capazes de identificar esta relação com as questões que lhes iam sendo colocadas, o modelo, uma vez mais, auxiliou-os durante o processo para conseguirem chegar às conclusões pretendidas.

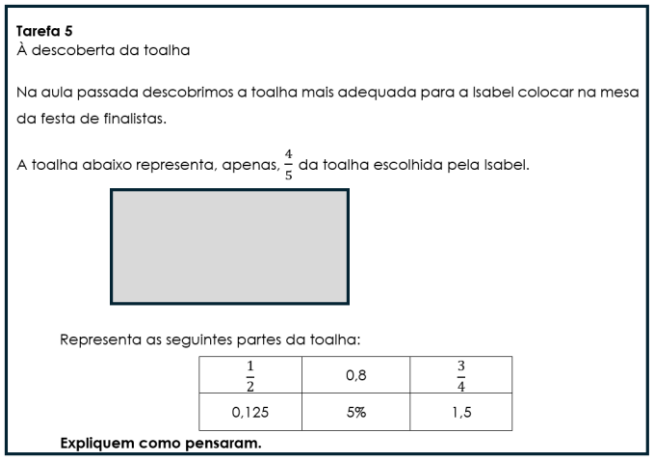
Também, com esta tarefa, pôde verificar-se que os alunos estabelecem relações, de forma flexível, entre diferentes representações de número racional. O modelo do *Decimat* (representação icónica) permitiu, ainda, verificar que os alunos, para além de estabelecerem relações entre as representações simbólicas de número racional, são também capazes de estabelecer relações entre representações icónicas-simbólicas, relativamente à questão 1, e relações entre representações simbólicas-icónicas, relativamente à questão 3 para justificar e mostrar o seu raciocínio.

5. Tarefa 5: "À descoberta da toalha"

A última tarefa (Cf. Figura 16) apresentada aos alunos pretendia que os alunos, sem qualquer indicação, utilizassem a estratégia que considerassem mais adequada, recorrendo a modelos explorados nas outras sessões ou a outras representações icónicas que lhes fizessem sentido. Porém, uma vez que lhes era apresentada a toalha sob a forma de modelo retangular e como lhes era pedido que representassem outras partes da toalha, os alunos iriam, à partida, centrar-se no modelo retangular.

Figura 16

Tarefa 5: À descoberta da toalha



Tarefa 5
À descoberta da toalha

Na aula passada descobrimos a toalha mais adequada para a Isabel colocar na mesa da festa de finalistas.

A toalha abaixo representa, apenas, $\frac{4}{5}$ da toalha escolhida pela Isabel.

Representa as seguintes partes da toalha:

$\frac{1}{2}$	0,8	$\frac{3}{4}$
0,125	5%	1,5

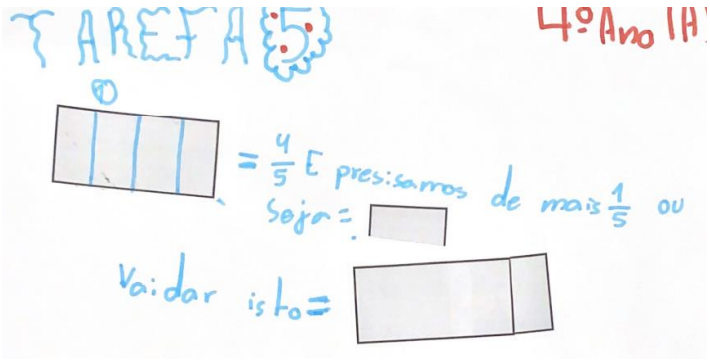
Expliquem como pensaram.

Apesar de as outras também o serem, a tarefa 5, na minha perspetiva, foi a mais complexa, pois nem todos os alunos conseguiram compreender, inicialmente, que tinham de conceptualizar a unidade uma vez que a toalha se encontrava incompleta.

Como no enunciado lhes era apresentado $\frac{4}{5}$ da toalha, alguns alunos optaram por conceptualizar a unidade sem recorrer a modelo outro modelo. Xavier e Diana optaram por recorrer a esta estratégia (Cf. Figura 17) que pareceu ser mais intuitiva, uma vez que já lhes era dada uma parte da toalha (modelo retangular).

Figura 17

Estratégia de Diana e Xavier para conceptualizar a unidade na Tarefa 5



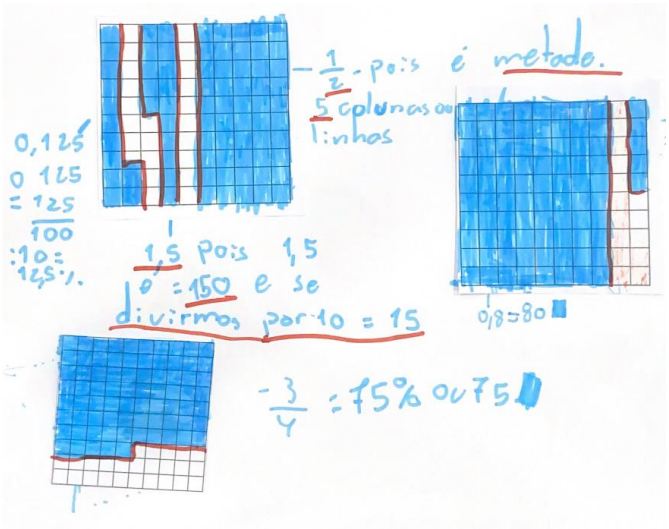
A imagem vem completar o raciocínio dos alunos, registado por um dos instrumentos que permite apoiar a técnica de observação, o registo áudio.

> **Xavier:** Então, Diana, quanto é que falta para termos a toalha completa?
> **Diana:** A toalha tem de estar a 100% e para ficar assim tem de 'tar [*sic*] $\frac{5}{5}$, por isso falta 1.
> **Xavier:** Não é bem 1 é $\frac{1}{5}$, mas sim.
>
> (20 de maio, 11h12min)

Os alunos conseguem conceptualizar a unidade identificando que como já tinham $\frac{4}{5}$ da toalha, esta tinha de estar dividida em 5 partes iguais e que os $\frac{5}{5}$ correspondiam a 100% da toalha, ou seja, à unidade. Assim, os alunos começaram por dividir a toalha que já lhes era dada em 4 partes iguais, percebendo que ainda faltava acrescentar $\frac{1}{5}$ para esta estar completa. No entanto, apesar de Xavier e Diana terem optado por recorrer a esta estratégia para completar a toalha, recorreram ao modelo 10x10 (Cf. Figura 18) para identificarem as representações pedidas.

Figura 18

Estratégia de resolução de Xavier e Diana na tarefa 5



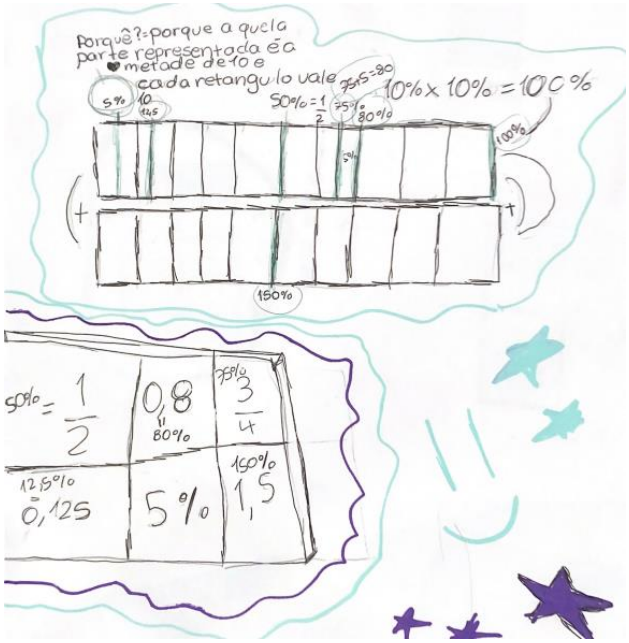
Na figura anterior (Cf. Figura 18), percebe-se que os alunos optam por transformar as representações que surgem sob a forma de fração e numeral decimal para percentagem, por lhes ser mais fácil de identificar e representar qualquer representação em percentagem através do modelo. Algo que deve ser destacado é a representação de 0,125 da toalha, representação transformada pelos alunos para percentagem (12,5%). Para representarem 12,5% na toalha os alunos optaram por pintar uma barra, dois quadradinhos mais meio quadradinho, uma vez que compreendem que se a unidade toda corresponde a 100%, um quadradinho corresponde a 1%. Na sessão anterior, tínhamos descoberto que só poderíamos representar milésimas no modelo 10x10 se cada quadradinho (centésima) estivesse dividido em 10 partes iguais. Para representar 12,5%, os alunos, aplicaram o conhecimento adquirido em sessões anteriores, isto é, identificaram, desde início, 0,125 como 12,5% uma vez que se tornava mais intuitivo a sua representação no modelo 10x10. Para além disso, torna-se essencial ressaltar que o trabalho, na sessão anterior, perante a representação de uma milésima sob a forma de percentagem, permitiu, possivelmente, que os alunos representassem, neste

momento 125 milésimas como 12,5%. Para além disso, os alunos também mostram não transformar $\frac{1}{2}$ para percentagem, possivelmente por já ser uma representação de referência, reconhecendo-a como metade de algo.

Porém, nem todos os grupos optaram pela estratégia de completar a toalha. Sendo que os alunos tinham à disposição os modelos explorados nas sessões anteriores, Diogo e Vitória optaram por recorrer ao modelo retangular, mas acabaram por ser os próprios a representá-lo, tal como mostra a figura abaixo (Cf. Figura 19)

Figura 19

Estratégia de resolução de Diogo e Vitória na tarefa 5



Diogo e Vitória acabam por transformar todas as representações simbólicas que lhes eram dadas para percentagem, uma vez que reconheciam a barra como 100%, tornando mais intuitiva a representação das diferentes representações, identificando, por exemplo: 50%=$\frac{1}{2}$; 0,8=80%; 12,5%=0,125. Os alunos acabam por dividir a unidade (100%) em 10 partes iguais compreendendo que cada uma dessas partes corresponde a 10%. A partir

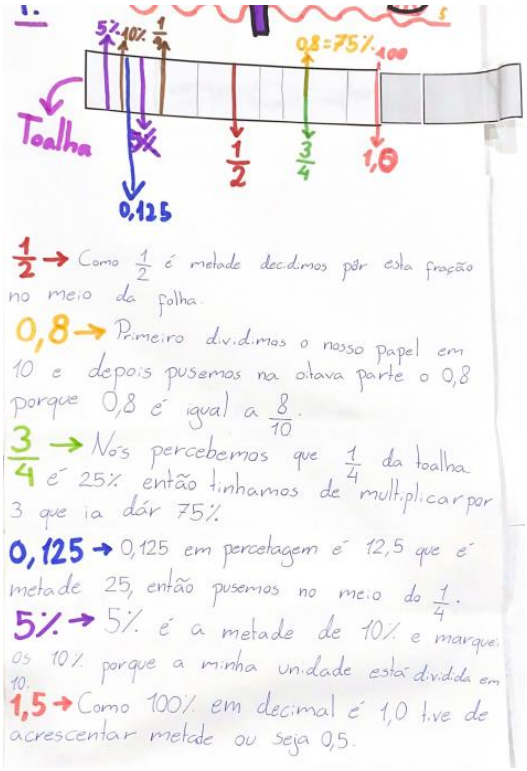
desta estratégia tornou-se mais fácil para os alunos identificarem representações como 12,5% e 5%, uma vez que conseguem conceptualizar a unidade sempre que necessário. Tal como aconteceu no grupo anterior, Diogo e Vitória parecem mostrar compreensão na transformação de milésimas para percentagem (0,125=12,5%).

Novamente, a percentagem parece assumir-se como uma representação mais intuitiva para os alunos, pois mesmo que estes reconheçam e identifiquem a representação sob a forma de fração e de numeral decimal, preferem trabalhar com a percentagem, talvez por se tratar de uma representação cuja parte inteira se aproxima da representação dos números naturais.

Outro exemplo relativo à flexibilidade no uso de diferentes representações é a estratégia de resolução de Olívia e Júlia (Cf. Figura 20).

Figura 20

Estratégia de resolução da Olívia e da Júlia na tarefa 5



As duas alunas optaram por recorrer ao modelo retangular indicando, de imediato, que a toalha completa correspondia a 100%, logo, a uma unidade. Como se pode perceber através da observação da figura 26, para explicarem como marcaram cada representação, as alunas estabelecem várias relações entre diferentes representações simbólicas que os números racionais podem assumir. Por exemplo, para marcarem 125 milésimas, as alunas, começam, inicialmente, por transformar a representação para percentagem reconhecendo-a como metade de 25%, logo, metade de $\frac{1}{4}$. Apesar de as alunas conseguirem identificar, de forma sustentada, o local de 0,8 e $\frac{3}{4}$, e apesar de as reconhecerem como representações diferentes, acabam por colocá-las na mesma posição.

Durante a fase de discussão, os alunos puderam, também, explorar outras estratégias de resolução realizadas pelos colegas participando ativamente. No geral, os alunos foram capazes de conceptualizar unidade identificando a parte em falta, completando-a. Porém, alguns grupos apesar de o enunciado referir que a toalha apresentada mostrava apenas $\frac{4}{5}$ da toalha, identificaram essa toalha como 100%, dividindo-a em 5 partes em vez de completarem com a parte em falta, tal como mostra o seguinte diálogo.

> **Prof. Estagiária:** O Guilherme e a Emília dividiram a toalha em 5.
> **Álvaro:** Eles dividiram em 5 porque aqui está um 5 não um quatro. (apontando para o denominador de $\frac{4}{5}$)
> **Helena:** Não, mas eles deviam ter dividido em 4 e acrescentavam mais um bocadinho que faltava que era um quinto.
> **Francisco:** Pois, porque a toalha não estava completa. Aí só estava quatro quintos e para chegar aos 100% tem de ficar cinco quintos.
>
> (discussão coletiva, 21 de maio, 9h54min)

Nos registos desta tarefa, verificaram-se várias estratégias de resolução e diversos raciocínios para identificar as representações pedidas. A representação em que os alunos revelaram mais dificuldade em indicar foi

1,5. Ainda neste par, Guilherme e Emília optaram por utilizar o modelo 10x10.

> **Guilherme:** 1,5 nós aqui pintámos 1 [centésima] e metade.
>
> **(…)**
>
> **Simão:** Eu não concordo com o 1,5, porque eu acho que o 1 significa a unidade inteira e o vírgula 5 é a metade. Porque isso não é 1 porcento vírgula 5. É a unidade inteira mais metade.
> **Xavier:** Eu não concordo porque como nós pensámos um vírgula cinco é igual a 150% e se dividimos 150 por 10 vai ser 15 por isso vai ser 15 quadrados.
> **Olívia:** Eu acho que não é assim, Xavier. Eu concordo com o Simão e vou explicar como pensámos. 100% em decimal é como? É 1,0. Se 1,0 é 100 como é que 1,5 vai ser um quadrado e meio? Não pode ser. Tem de ser uma unidade mais metade de outra unidade.
>
> (discussão coletiva, 21 de maio, 9h59min)

Guilherme e Emília identificaram 1,5 como 0,15, tal como Xavier e Diana. A conceptualização da unidade foi algo que foi muito discutido pois os alunos mostravam dificuldade em olhar para as representações que representassem mais do que uma unidade como uma unidade mais uma parte de uma segunda unidade. Nesta última tarefa, esta representação foi alvo de reflexão. No excerto anterior verifica-se que Xavier e o seu par inicialmente reconhecem 1,5 como 150%, no entanto, acabam por não compreender que 150% corresponde a uma unidade inteira mais metade dessa unidade. Ao contrário do grupo de Xavier, Simão e o seu par identificaram 1,5 como sendo uma unidade mais metade da unidade. Igualmente, Olívia e Júlia apresentaram o mesmo raciocínio identificando, ainda, 1 unidade como 100%.

> **Prof. Estagiária:** Eu também tenho uma questão. O 0,8 podemos representá-lo de outra maneira. Que vocês aí têm. Diz lá Emília.
> **Emília:** 80%
> **Prof. Estagiária:** 80% sim, mas vocês têm outra toalha que representa o mesmo que 0,8. Artur.
> **Artur:** Quatro quintos.
> **Prof. Estagiária:** Porquê?

Xavier: Porque se nós dividirmos 10 em 5 dá 20 [%] e 20 [%] vezes 4 dá 80 [%].
Prof. Estagiária: Certo, mas nós podemos transformar esta fração, 4/5, para nos facilitar.
Leonor: Podemos transformar 4 vezes 2 e 5 vezes 2 que é igual a 8 sobre 10 que é igual a zero vírgula 8.
Prof. Estagiária: Porque é que é mais fácil partirmos dos oito décimos, neste modelo?
Xavier: Porque aí tem 100 quadrados. E supostamente a conclusão que chegámos era 80 e, então, se fosse a verdadeira fração seria 80 sobre 100 e 8 décimas é equivalente a 80 centésimas porque se dividirmos por 10 é uma fração equivalente.

(discussão coletiva, 21 de maio, 10h05min)

Os alunos já tinham conhecimento de frações equivalentes, mas durante a intervenção não foi algo que fosse explorado, ou seja, não identificámos, por exemplo, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ como frações equivalentes, mas os alunos reconheciam as frações como representando a mesma parte da unidade sem precisarem de lhe atribuir um nome. No caso do excerto anterior, os alunos vão transformando as representações consoante a sua necessidade. Tal como explorado nas tarefas anteriores, Xavier identifica $\frac{8}{10}$ (0,8) e $\frac{8}{100}$ (0,80) como representações equivalentes, referindo que o que as distingue é em quantas partes a unidade se encontra dividida, uma em 10 e a outra em 100, respetivamente.

A discussão em torno da representação 1,5 continua quando Joaquim e Rita apresentam o seu cartaz, utilizando o modelo do *Decimat* para justificar como pensaram.

Joaquim: 1,5. Nós pensámos em … nós pintámos 10 milésimas e depois mais 5 milésimas. Mas, eu voltei a pensar e não acho que isto esteja correto. Eu acho que afinal 1,5 é isto tudo mais a metade disto. (referindo-se a uma décima e meia)
Artur: Vocês ouviram que um vírgula cinco é uma unidade mais metade?
Joaquim: Foi o que eu acabei de dizer.
Artur: E um retângulo desses é o quê?
Joaquim: Um retângulo destes é uma décima.

Artur: Então e se vocês pintarem um retângulo desses mais metade vai dar zero vírgula um cinco.
Joaquim: Então eu fazia o quê?
Álvaro: Vê, se tu tapares o 5 e a vírgula tens 1. Uma unidade. Já percebeste?
Joaquim: Podíamos pegar num *Decimat*, pintar todo e depois pegar noutro e cortar a metade.

(discussão coletiva, 21 de maio, 10h12min)

Joaquim e Rita optaram por utilizar o *Decimat* para justificar como pensaram para identificar cada representação. No entanto, os alunos, inicialmente, não foram capazes de identificar corretamente 1,5. Novamente percebe-se que os alunos já são capazes de identificar, rapidamente, a unidade como 100%, seja no modelo 10x10, no modelo retangular ou no modelo do *Decimat*, percebendo que 1,5 corresponde a uma unidade mais metade dessa unidade, neste caso, um *Decimat* mais metade do segundo.

Nesta última tarefa notou-se mais dificuldade na sua execução, uma vez que alguns alunos evidenciaram dificuldade em conceptualizar a unidade. No entanto, os momentos de discussão, tanto a par como em coletivo mostram-se vantajosos, visto que eu praticamente não necessitava de colocar questões, pois eram os próprios alunos a levantá-las. Ao justificarem como pensavam, muitas vezes os alunos percebiam que o raciocínio não estava correto, alterando as suas conclusões.

Durante esta tarefa houve uma grande diversidade de estratégias sendo utilizados todos os modelos explorados durante as cinco semanas de intervenção. Cada modelo utilizado apresentava as suas vantagens e levava os alunos a justificarem o seu raciocínio de forma diferente. Com esta última tarefa, foi percetível, uma vez mais, as relações que os alunos iam estabelecendo à medida que as iam identificando nos modelos, recorrendo a relações entre representações simbólicas e entre representações simbólicas e representações icónicas, os modelos.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este último capítulo do relatório de investigação pretende apresentar uma breve síntese do estudo realizado. Para além disso, o grande propósito deste capítulo remete para as questões de investigação, enunciadas ao longo deste relatório e retomadas abaixo, às quais se pretende dar resposta através da análise realizada no capítulo anterior, articulando com autores de referência.

1. Síntese do estudo

A escolha do tema deste projeto partiu da minha fragilidade, enquanto aluna, no tópico dos números racionais e perante a resposta da escola face a essa fragilidade. Por esse motivo, considerando a complexidade do tópico, houve especial preocupação durante o processo de intervenção, no sentido de apoiar os alunos e de proporcionar um percurso de aprendizagem partindo de várias experiências (Behr et al., 1983¸ Morais & Serrazina, 2017) tornando-o mais significativo e intuitivo. Portanto, optei por explorar as tarefas com os alunos partindo da metodologia do ensino exploratório, colocando-os no centro da sua aprendizagem (Stein et al., 2008). Por ser um tema complexo, nasceu também a vontade de querer saber mais sobre este procurando, desta forma, traçar um caminho vantajoso no tópico dos números racionais, começando por dar mais destaque à representação sob a forma de percentagem, tal como defendem Moss e Case (1999) e Guerreiro e Serrazina (2015), mas sempre em conexão com diferentes representações que o número racional pode assumir, uma vez que, tal como evidenciado em literatura de referência (Behr et al., 1983; Webb et al., 2008; Bernett-Clarke et al., 2010), se constitui como essencial para a construção do sentido de número racional.

Para além da minha anterior fragilidade neste tópico, no último ano da licenciatura, pude realizar um trabalho sobre o sentido de número racional, construindo um jogo para a aprendizagem de frações equivalentes e foi, a partir desse momento, que escolhi o tema do meu relatório. Inicialmente, pretendia perceber de que forma o jogo poderia ser uma boa estratégia para explorar o tópico dos números racionais. No entanto, após algumas sugestões da minha professora orientadora fui investigar sobre o tema que hoje se apresenta como o tema do meu relatório: múltiplas representações de números racionais.

Esta investigação tem como objetivos gerais compreender de que forma é que os alunos utilizam e relacionam diferentes representações de número racional e compreender qual o contributo dos modelos para essas transformações realizadas pelos alunos. Estes objetivos foram elaborados para me ajudar a responder às questões de investigação:

v. Qual a flexibilidade que os alunos apresentam no uso das diferentes representações de número racional?

- **a.** Que transformações de números racionais realizam os alunos?
- **b.** Que ideias apresentam os alunos perante essas transformações?

vi. De que forma é que a utilização de modelos pode apoiar nas transformações de número racional?

A investigação que aqui apresento foi realizado numa turma de 4.º ano de escolaridade, durante as 10 semanas de estágio realizado no âmbito da UC de Estágio IV, numa instituição de cariz privado, localizada no distrito de Setúbal. O estudo seguiu uma abordagem qualitativa que procurou descrever, analisar e interpretar, de forma rigorosa, os resultados desta investigação (Bogdan & Biklen, 1994). Para além disso, este estudo apresenta-se, também,

como uma investigação sobre a própria prática uma vez que pretende contribuir para a minha prática enquanto futura docente (Ponte, 2005).

Assim, foram implementadas cinco tarefas matemáticas que permitiram que os alunos explorassem diferentes representações de números racionais, bem como estabelecessem, de forma flexível, relações entre essas representações. As tarefas propostas aos alunos foram realizadas quer em grupos quer a pares sendo que a principal fonte de dados foi um dos instrumentos que permite apoiar a técnica de observação, mais concretamente, a gravação áudio. Os registo fotográfico e vídeo permitiram, também, apoiar a análise dos dados. Outra técnica de recolha de dados utilizada foi a recolha documental, sendo que foram recolhidos todos os registos elaborados pelos alunos, que se mostraram como essenciais para a análise de dados.

1.1. Resposta às questões de investigação

A investigação realizada ao longo das várias semanas de intervenção pedagógica permitiu-me responder às questões de investigação, evidenciando relações que os alunos estabelecem perante diferentes representações de número racional.

1.1.1. Qual a flexibilidade que os alunos apresentam no uso das diferentes representações de número racional?

No momento inicial do projeto de intervenção, os alunos ainda não tinham explorado, de forma formal, a percentagem. Até então, a representação em fração tinha vindo a ser explorada desde cedo (2.º ano), tal como sustentam as AE (Canavarro et al., 2021). Já a representação em numeral decimal apenas começou a ser explorada no ano em que realizei este estudo (4.º ano) e, por esse motivo, durante toda a intervenção foi evidente que os alunos não apresentavam uma compreensão devidamente sustentada desta representação. A percentagem, representação explorada na 1.ª tarefa

proposta, permitiu inter-relacionar os conhecimentos que os alunos já apresentavam, relativos a outras representações, com a representação em numeral decimal.

Após a análise das cinco tarefas propostas, com base em todos os instrumentos que permitem apoiar a técnica de observação e de recolha documental, foi possível perceber que os alunos privilegiam a representação simbólica sob a forma de percentagem, introduzida formalmente na 1.ª tarefa de intervenção.

Neste estudo, identificou-se que a representação em percentagem parece ser intuitiva para os alunos, provavelmente por apresentar semelhanças ao trabalho com os números naturais, indo ao encontro do que referido é por Guerreiro (2018) e por apresentar, tal como referem Guerreiro e Serrazina (2015) uma "mensagem visual muito forte" (p. 12). Na 1.ª tarefa foi também possível perceber que 5 dos 6 grupos recorrem a representações icónicas, que se apresentam como próximas do modelo retangular (pacote de leite) e que, para além disso, se mostraram imprescindíveis para auxiliar os alunos no registo das suas conclusões. Tal como referido no capítulo do enquadramento teórico, os modelos podem ser assumidos como uma ferramenta que permite apoiar a passagem do nível informal para o formal, passando de *modelos de*, como no caso da 1.ª tarefa, no qual a figura do pacote de leite se apresenta próxima do modelo retangular, para *modelos para* (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), como, por exemplo, o modelo 10x10 e o *Decimat*, usados pelos alunos nas tarefas 3 e 4, respetivamente, como forma de apoiar as suas justificações.

Durante a análise, foi evidente que os alunos apresentaram maior fragilidade em transformar representações simbólicas sob a forma de percentagem ou fração, bem como representações icónicas, para uma representação em numeral decimal, mostrando, inicialmente, que ainda não conseguiam identificar o valor posicional assumido por algarismos quando

colocados em ordens na parte não inteira do numeral, algo que foi sendo trabalhado com auxílio dos modelos. Num dos episódios da segunda tarefa, Olívia e Vitória expõem a fragilidade a atribuir significado ao uso da vírgula quando pedido para identificar, no modelo retangular, 12,5%. As alunas, após uma troca de ideias, optam por colocar a representação fora da barra referindo que se retirassem a vírgula ficavam com 125% e 125 é maior que 100. No entanto, após perceberem que 12% é metade de 24, as alunas começaram a olhar para representação como 12%=$\frac{24}{2}$ então 12,5%= $\frac{24}{2} + \frac{1}{2}$ compreendendo que a vírgula significava que tinham metade de uma unidade, neste caso de 1%.

Em todas as tarefas propostas, os alunos mostraram utilizar diferentes representações de número racional de forma flexível, justificando o seu raciocínio. Na primeira tarefa, os alunos sentiram necessidade de representar 50%, 75% e 10% através de representações icónicas com o intuito de registar as conclusões e de forma a apoiar o raciocínio, mostrando compreender que 50% é metade do pacote e 75% é metade desse pacote (50%) mais metade dessa metade (25%).

A utilização e o conhecimento que os alunos já apresentavam sobre representações como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, 0,50, $\frac{1}{10}$,0,10, $\frac{3}{4}$, 0,75, por exemplo, foram essenciais para que estabelecessem relações com as diferentes representações que eram pedidas nas tarefas. Novamente, tal como defende o estudo de Moss e Case (1999), a representação sob a forma de percentagem evidenciou-se como uma representação eficaz, na medida em que os alunos recorriam a esta representação para estabelecer relações como 25% é $\frac{1}{4}$ da unidade e 12,5% é metade de 25%, logo $\frac{1}{8}$ da unidade. A relação entre as diferentes transformações que iam sendo realizadas, no decorrer da intervenção, evidenciaram como destaca McIntosh et al. (1992) uma progressiva compreensão do conceito de número racional. Importa, ainda, salientar a

importância do papel da unidade de referência necessária para a construção de relações entre representações.

Assim, através das ideias que os alunos iam revelando apresentar sobre os números racionais, e através das discussões coletivas proporcionadas, foi possível verificar que os alunos evidenciaram uma grande flexibilidade em torno das diferentes representações, uma vez que recorriam à transformação que se mostrava como mais adequada, para eles, consoante a situação mostrando progressão no sentido de número racional (McIntosh et al., 1992). Mais uma vez, a percentagem revelou-se como uma representação poderosa permitindo estabelecer relações entre as representações já exploradas. Por exemplo, o trabalho em torno desta representação interligado com representações icónicas permitiu que os alunos utilizassem o conhecimento que já apresentavam da decomposição com números inteiros, estabelecendo sempre uma relação entre as representações sob a forma de fração e numeral decimal com a nova representação explorada. Tal como analisado na tarefa 5, no momento de discussão coletiva, Emília e Guilherme referem ter representado 150% como um quadradinho mais metade, porém, Olívia explica que 150%=1+0,5, uma vez que 100% corresponde a uma unidade e 50% a metade dessa unidade (0,5). Uma vez mais, os alunos utilizam a representação que lhes é mais conveniente (Tripathi, 2008) evidenciando compreensão pelo que estão a explorar (McIntosh et al., 1992).

Considerando que o objetivo era compreender de que forma é que os alunos utilizavam diferentes representações de número racional, este estudo evidencia que a articulação entre diferentes representações de número racional, mostra-se, tal como Lembke e Reys (1994) referem, como essencial para a aprendizagem deste tópico, havendo compreensão pelo que está a ser trabalhado e não apenas mecanização de conceitos e regras (Behr et al., 1983; Tian & Siegler, 2017).

1.1.2. De que forma é que a utilização de modelos pode apoiar nas transformações de número racional?

Ao longo da realização das tarefas que foram sendo propostas, os modelos foram-se evidenciando como um bom suporte para a compreensão de número racional, especialmente para as transformações que os alunos foram realizando. Esta questão aparece em estreita relação com as questões anteriores, uma vez os alunos recorreram aos modelos para justificarem as suas conclusões.

Na primeira tarefa, sem que lhes fosse pedido qualquer representação icónica, 5 dos 6 grupos optaram por registar as suas conclusões através de uma representação que se assemelhava ao modelo retangular. Assim, os alunos ao elaborarem representações icónicas estavam, tal como referem Ponte & Serrazina (2000) a mostrar que compreendiam as representações que estavam a ser trabalhadas. A partir desta representação informal construída pelos alunos, houve necessidade de explorar o modelo retangular, uma vez que era idêntico à representação elaborada por eles. Este modelo foi essencial para o trabalho com a percentagem, uma vez que estes se mostraram como os primeiros contactos formais com esta representação. Assim, a mobilização da barra permitiu que os alunos estabelecessem relações como $\frac{1}{10}$ é uma parte da barra dividida em 10 partes, logo 5% corresponde a metade da distância entre 0 e $\frac{1}{10}$, permitindo, também, com que os alunos olhassem para $\frac{1}{2}$ como metade de algo que depende da unidade considerada (Silva et al., 2012).

Tal como defende Roche (2008), posso salientar que os modelos se evidenciaram como essenciais para a compreensão do conceito de número racional, principalmente para apoiar os alunos a desenvolver a compreensão do valor posicional decimal. A título de exemplo destaca-se a representação de um quadradinho, no modelo 10x10, em numeral decimal apresentada anteriormente no capítulo de análise de dados. Este modelo permitiu apoiar a

compreensão de Emília e Guilherme perante o valor posicional dos algarismos à direita da vírgula, levando-os a compreender que um quadradinho correspondia a uma centésima (um em 100) e, como tal, teriam de representar 0,01 em numeral decimal e não 0,1 ou 00,1, tal como referido pelos alunos. As evidências deste estudo mostram que, tal como Van den Heuvel-Panhuizen (2003) refere, que os modelos auxiliam os alunos no pensamento matemático promovendo a visualização de conexões matemáticas.

Behr et al. (1983) aludem para o facto de não haver uma representação considerada como a melhor para se trabalhar um mesmo conceito. Desta forma, para além de o numeral decimal ter sido trabalhado em conexão com diferentes de representações, o modelo 10x10 e o *Decimat*, em especial, mostraram-se como essenciais para a compreensão desta representação simbólica. Os modelos evidenciaram-se como imprescindíveis, uma vez que permitiram que os alunos estabelecessem relações entre a representação simbólica e a representação icónica (Gravemeijer, 2004), auxiliando-os no pensamento matemático. Destaca-se, como exemplo disso, a tarefa 3 quando pedido para verificarem a veracidade da afirmação "0,8 é menor do que 0,69". Álvaro releva que não atribui significado ao número de ordens da parte não inteira do numeral decimal referindo que se tapassem a vírgula, 69 seria maior do que oito, logo a afirmação seria verdadeira. Com o auxílio do modelo, foi possível que os alunos compreendessem a associação entre a parte da unidade representada por cada um dos algarismos na parte não inteira, à direita da vírgula, reconhecendo 0,8 como como 8 barras do modelo, logo 80 quadradinhos (80%).

O modelo 10x10 e o *Decimat* foram escolhidos para promover a compreensão do número racional na sua representação em numeral decimal. O *Decimat* permitiu apoiar a compreensão de número racional quando pedido para representar 1 milésima sob a forma de percentagem. Todos os alunos

reconheciam o retângulo C como uma milésima, porém foram várias as sugestões dadas pelos alunos para a representarem sob a forma de percentagem, como: 0,001% ou 0,5%. No momento de discussão coletiva, e com o apoio do modelo, os alunos chegaram à conclusão de que 1 milésima se representava como 0,1%, uma vez que estavam a dividir essa parte em 10 partes iguais. Neste sentido, durante o trabalho com os números racionais, devem ser explorados diferentes modelos, consoante a finalidade pretendida, como referido por Tripathi (2008). Como tal, e indo ao encontro do mencionado por vários autores (Ponte & Serrazina, 2000; Van Galen et al., 2008; Bernett-Clarke et al., 2010; Morais & Serrazina, 2018), a utilização de modelos permitiu apoiar o processo de aprendizagem dos alunos, existindo evolução no desenvolvimento da compreensão deste tópico.

1.2. Reflexão sobre o estudo

Como já referi anteriormente no corpo deste relatório, este estudo resulta da minha anterior dificuldade perante o tópico dos números racionais e da minha vontade de fazer com que este tópico fosse explorado através de diferentes representações.

Este relatório marca mais uma etapa concluída, mas com muito esforço, depois de um ano atribulado a nível académico, mas também a nível pessoal.

Posso afirmar que o trabalho suportado por múltiplas representações que os números racionais podem assumir mostra-se como vantajoso no processo de aprendizagem dos alunos, pelo menos, no que diz respeito aos alunos desta turma. Para além disto, a proposta de intervenção apresentada aos alunos, seguiu um percurso constituído por cinco tarefas. A realização destas tarefas seguiu a metodologia de ensino exploratório (Stein et al., 2008), colocando os alunos no centro do processo de aprendizagem, uma vez que se envolviam nas diferentes fases. Esta metodologia fez com que os alunos se interessassem pelo trabalho que estavam a desenvolver, mostrando-se,

também, como benéfica para o processo de ensino e aprendizagem. Este aspeto é, certamente, algo que levo para a minha prática futura. Através de um tópico evidenciado como complexo, da discussão coletiva e do ritmo de aprendizagem individual de cada criança, foi possível a construção do conceito de número racional através de várias experiências. Algo que sempre defendi foi que as respostas não devem ser dadas aos alunos, mas sim devolvidas na forma de questões para que estes possam retirar as suas próprias conclusões, levando o tempo que for preciso. Como tal, posso afirmar que esta prática será uma prática a recorrer nas aulas de matemática, fazendo com que os alunos se envolvam no seu processo de aprendizagem tornando-se os principais intervenientes.

Confesso que o momento de implementação do projeto não foi fácil. Principalmente quando, no final da exploração das tarefas, analisava as estratégias dos alunos e pensava que eram completamente diferentes do que havia antecipado. Ter duas pessoas a olhar para mim enquanto implementava a minha prática e o estar constantemente a pensar "será que estou a fazer bem?", não ajudou. Este momento não foi fácil, tendo-o ultrapassado com muito esforço e vontade da minha parte. A juntar a tudo o que se passava, a minha ansiedade e insegurança de não conseguir ser uma boa profissional, fizeram com que eu não fosse a pessoa que sou, mas a pessoa que os outros esperavam que fosse.

Com ajuda da minha professora orientadora, este processo tornou-se mais simples do que esperava. É claro que é sempre difícil fazer um relatório como este, mas com esforço e dedicação penso que tenha conseguido. Com este estudo espero contribuir para a prática profissional de outros docentes e alunos, tal como contribuiu para a minha, pois possibilitou-me aprender mais sobre a minha prática profissional, refletindo, consequentemente, sobre as minhas opções enquanto professora.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Afonso, N. (2014). *Investigação Naturalista em Educação – um guia prático e crítico.* (1.ª ed.). Fundação Manuel Leão.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação?. *Cadernos de Formação de Professores*, (1), 21-30. https://www.researchgate.net/publication/259574910_Professor-investigador_Que_sentido_Que_formacao_Em_Campos_BP_org_Formacao_Profissional_de_Professores_no_Ensino_SuperiorCadernos_de_Formacao_de_Professores_Porto_Portro_Editora_21-30_2001

Almeida, J., & Pinto, J. (1990). *A investigação nas Ciências Sociais*. Presença.

Amado, N., Carreira , S., Nobre, S., & Ponte, J. P. (2010). Representações na resolução de um problema de palavras numérico algébrico: Uma análise sobre o desenvolvimento informal de métodos formais. [ATAS XXI SIEM]. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Orgs.), *Seminário de Investigação em Educação Matemática, Aveiro*. https://www.researchgate.net/publication/261758956_Representacoes_na_resolucao_de_um_problema_de_palavras_numericoalgebrico_Uma_analise_sobre_o_desenvolvimento_informal_de_metodos_formais

Amado, J. (2014). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação*. (2.ª ed.) Imprensa da Universidade de Coimbra. https://ucdigitalis.uc.pt/pombalina/download/wqfDk8Kjw4XDg8ONw47CosKRXWxpaG7CmMKRwprClmbCkmhtZQ==/manual_de_investiga_o_qualitativa_em_educa_o.pdf

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. (1.ª ed.). Edições 70.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the*

psychology of mathematics education, 2, 95-102. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/proceedings/PME28/RR/RR170_Baturo.pdf

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). Academic Press. https://www.researchgate.net/publication/258510439

Bell, J. (1997). *Como Realizar um Projecto de Investigação: Um guia para a pesquisa em ciências sociais e da educação*. (1.ª ed.). Gradiva.

Bernett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2013). *Developing essential understanding of rational numbers for teatching mathematics in grades 3/5* (3.ª ed.). National Council of Teatchers of Mathematics.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no ensino básico*. (1.ª ed.). Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. http://hdl.handle.net/10400.26/5566

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto Editora.

Brocardo, J., Nogueira, A., Carvalho, A., Mendes, A., Leandro, A., Delgado, Palma, C., Ramos, C., Patrício, C., Gaspar, D., Ferreira, E., C., Mendes, F., Figueiras, G., Nascimento, F., Amaral, H., Sousa, H., Gonçalves, H., Rocha, I., Castro, J., Serrazina, L., Sobreiro, L., Cruz, M., Rodrigues, M., Pratas, M., Almeida, P., & Kraemer, J. (2005). *Desenvolvendo o Sentido do Número: perspectivas e exigências curriculares* (1.ª ed.). Associação de Professores de Matemática.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática*, *109*, 15-23. http://hdl.handle.net/10400.26/5693

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17. http://hdl.handle.net/10174/4265

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Dantos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: 4.º ano*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_4.o_ano.pdf

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012, janeiro). *Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia*. [Comunicação]. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Orgs.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*, Portalegre. http://hdl.handle.net/10451/7041

Cardoso, P., & Mamede, E. (2017). Dificuldades em ensinar frações no 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Educação e Matemática,* (142), 1-5. https://hdl.handle.net/1822/52502

Carmo, H., & Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Investigação: Guia para Auto-Aprendizagem*. (1.ª ed.). Universidade Aberta.

Carreira, S. (1993). Construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo Trigonometria. *Quadrante, 2*(1), 49-62. https://doi.org/10.48489/quadrante.22631

Correia, M. (2009). A observação participante enquanto técnica de investigação. *Pensar Enfermagem*, *13*(2), 30-36. http://hdl.handle.net/10400.26/23968

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática*. (1.ª ed.). Almedina.

Duncan, N., Geer, C., Huinker, D., Leutzinger, L., Rathmell, E. & Thompson, C. (2010). *Navigating through Number and Operations in Grades 3-5*. (2.ª ed.). National Council of Teachers of Mathematics.

Fernandes, N. (2016). Ética na pesquisa com crianças: ausências e desafios. *Revista Brasileira de Educação, 21*(66), 759-779.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at Work: Constructing Fractions, Decimals and Percents*. NH: Heinemann.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-119). Associação de Professores de Matemática.

Guerreiro, H. G., & Serrazina, L. (2015, outubro, 24-25). *A construção do conceito de número racional através de múltiplas representações* [Sessão de conferência]. Encontro de Investigação em Educação Matemática, Bragrança. https://www.researchgate.net/publication/284028330

Guerreiro, H. G. R. M. (2018*). A aprendizagem comparticipada dos números racionais através da percentagem* [Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/37283/1/ulsd732766_td_Helena_Guerreiro.pdf

Ketele, Jean-Marie, & Roegiers, X. (1993). *Metodologia da Recolha de Dados*. Instituto Piaget.

Lanchance, A., & Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*(4), 503-5026. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00087-1

Leal, S.; Machado, O.; Monteiro, M., & Rebelo F. (2010). Promover a aprendizagem, transformar o ensino: o contributo do projecto

investigação para um currículo relevante. *Revista Interacções, 6*(15), 115-140. https://doi.org/10.25755/int.428

Lembke, L. O., & Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school: taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(3), 237-259. https://doi.org/10.2307/749337

Libório, O. (2018). O que vamos fazer hoje? A voz das crianças no planeamento. *Cadernos de Educação de Infância*, 114, 6-18.

Mamede, E., Pinto, H., & Monteiro C. (2021). *Contributos para o desenvolvimento do sentido de número racional* (1.ª ed.). Associação de Professores de Matemática.

Matos, J. F. (8 de março de 2015). *Observação na Investigação em Educação*. https://www.youtube.com/watch?v=-QnsBkbzb0A

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8. https://flm-journal.org/Articles/94F594EF72C03412F1760031075F2.pdf

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-107. https://doi.org/10.48489/quadrante.22785

Morais, C. & Serrazina, L. (2017). Decimal Numbers: A Potential Bridge between Rational Numbers Representations. *Journal of Mathematics Educatiol, 10*(1), 48-60. https://doi.org/10.26711/007577152790004

Morais, C. & Serrazina, M. (2018). Extensões de Conhecimentos na Construção da Compreensão de Numeral Decimal. *Bolema, 32*(61), 631-652. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a16

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122-147.

https://siegler.tc.columbia.edu/wp-content/uploads/2019/12/4027Reading-Moss-Case1999.pdf

NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. (2.ª ed.). Associação de Professores de Matemática.

Pires, M. V. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: práticas de uma professora de Matemática. *Quadrante, 20*(1), 31-53. https://doi.org/10.48489/quadrante.22860

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). APM. https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7493006/mod_resource/content/1/Investigar_a_prática.pdf

Ponte, J. P., & Serrazina, M. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo*. (1.ª ed.). Universidade Aberta.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2009). O novo programa de matemática: uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática,* 105, 2-6.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Associação de Professores de Matemática,* 156, 7-11. http://hdl.handle.net/10451/44393

Prediger, S. (2013). *Focussing structural relations in the bar board: A design research study for fostering all students' conceptual understanding of fractions* [Proceedings]. 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Antalya. https://wwwold.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/14-CERME_Prediger-Fraction_Design-Research.pdf

Roche, A. (2010). Decimats: Helping students to make sense of decimal place value. *Australian Primary Mathematics Classroom, 15*(2), 4-11. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ891799.pdf

Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE). (2014). *Instrumento de Regulação Ético-Deontológica: Carta Ética*. SPCE. https://www.spce.org.pt/PDF/CARTAETICA.pdf

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Th inking and Learning, 10*(4), 313–340. http://dx.doi.org/10.3102/978-0-935302-43-1_29

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 614-620. https://doi.org/10.1177/0022219416662032

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445. https://elizabethsahady.weebly.com/uploads/5/1/3/0/5130940/dev._understanding_of_math_representations.pdf

Van den Heuvel-Panhuizen, M.V.D. (2003). The Didactical use of models in realistic mathematics education: na exemple from a longitudinal trajectory on percentagem. *Educational Studies in Mathematics, 54,* 9-35. http://dx.doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages and proportions: a learning -teaching trajectory for grade 4, 5 and 6* (1.ª ed.). Sense Publishers.

Ventura, H. (2013). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência no 2.º Ciclo do Ensino Básico* [Dissertação de Doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. ulsd067673_td_Helia_Ventura.pdf

Vilelas, J. (2009). *Investigação: O Processo de Construção do Conhecimento*. (1.ª ed.). Edições Sílabo.

Webb. D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113. http://dx.doi.org/10.5951/MTMS.14.2.0110

ANEXOS

Anexos A – Consentimento Informado

Pedido de Autorização

Exmo./a. Sr./Sra.
Encarregado/a de Educação

Eu, Ana Raquel Pinto, estudante do 2.º ano do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.° Ciclo do Ensino Básico, no Instituto Politécnico de Setúbal, e estagiária na turma A do 4.° ano do Colégio O Cantinho dos Amigos, irei realizar um projeto de investigação, no âmbito da Unidade Curricular Investigação e Prática Pedagógica. Para a realização desta investigação, no âmbito da área da Matemática, venho por este meio solicitar a participação do seu educando.

A realização desta investigação não resultará em qualquer prejuízo para os alunos nem para o cumprimento do programa, mas o interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respetivos encarregados de educação (preenchendo e assinando a ficha anexa), são condições essenciais para que se efetive a sua participação neste projeto. A participação neste projeto envolverá: (i) a recolha das resoluções/produções escritas de tarefas realizadas no âmbito do projeto; (ii) o registo, através de fotografias, de alguns momentos de aula, (iii) a gravação áudio das aulas em que propuser as tarefas.

Os dados recolhidos serão usados, exclusivamente, para o objetivo deste projeto, pelo que asseguro que a informação recolhida permanecerá totalmente confidencial. A imagem do seu educando será sempre preservada e o nome dos alunos e identificação da escola não serão divulgados. O material áudio recolhido será apenas usado para fins de investigação e será armazenado em local seguro.

Antecipadamente, grata pela colaboração.

Autorização

Eu, _____, autorizo/não
(nome do Encarregado de Educação)
autorizo, que o meu educando _____
(nome do educando)
, participe nas atividades propostas no âmbito do projeto de investigação de Ana Raquel Pinto, tendo tomado conhecimento dos seus pressupostos e implicações, nomeadamente a gravação áudio das aulas e o registo fotográfico, através do documento anexado a este pedido de autorização (disponibilizado através da Teams).

Assinatura:

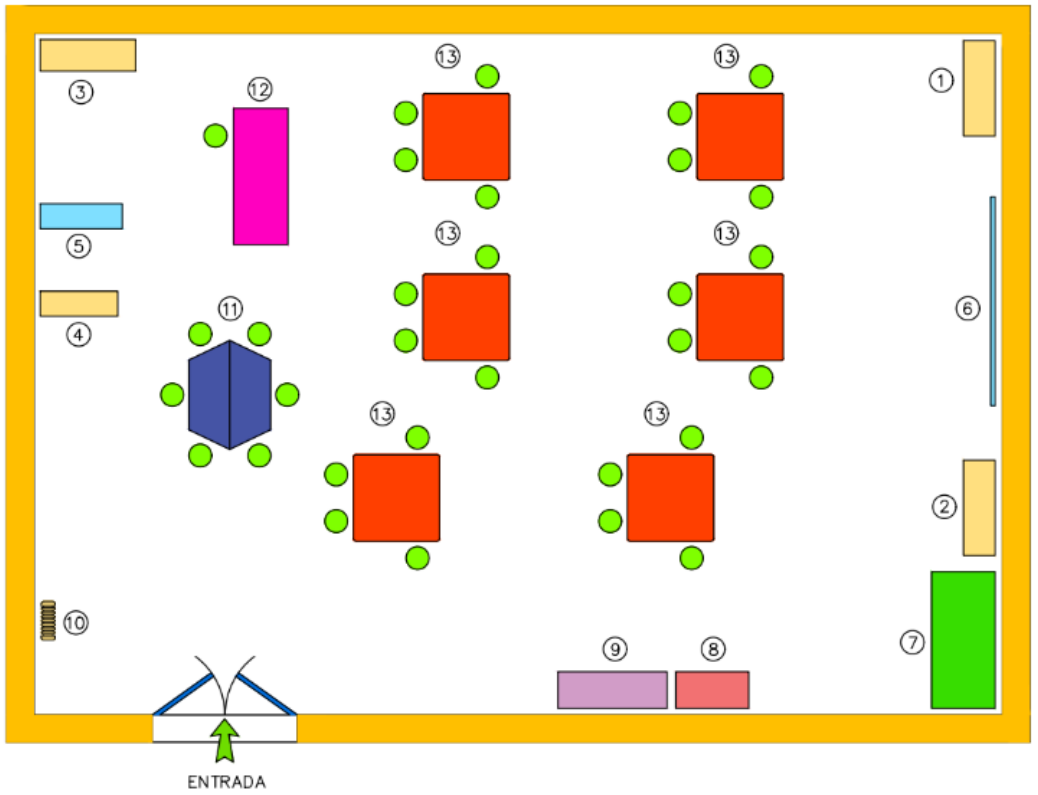
_____

Setúbal, _____ de _____ de 2024

Anexos B – Planta da sala

LEGENDA	
REF.	DESCRIÇÃO
1	CANTINHO DA LEITURA
2	CANTINHO DA LEITURA
3	CANTINHO DA LEITURA
4	CANTINHO DA LEITURA
5	ESTANTE/CANTINHO DA LEITURA
6	QUADRO INTERATIVO
7	BANCADA DE MATERIAIS DE EXPRESSÃO PLÁSTICA
8	MÓVEL DE ARRUMAÇÃO
9	MÓVEL DE ARRUMAÇÃO ACESSÍVEL AOS ALUNOS
10	AQUECEDOR
11	MESA PARA TRABALHOS E PARCERIAS
12	MESA DA PROFESSORA COOPERANTE
13	MESA DE TRABALHOS

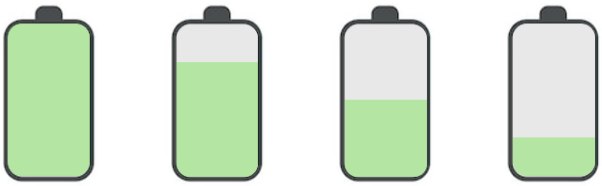
Sala
PLANTA



Anexos C – Tarefa Diagnóstica

Nome:_____ **Data**:_____

1. A imagem abaixo representa a bateria de um tablet em diferentes momentos.



A B C D

1.1. Rodeia a bateria que está a 100%. Explica como pensaste.

_____

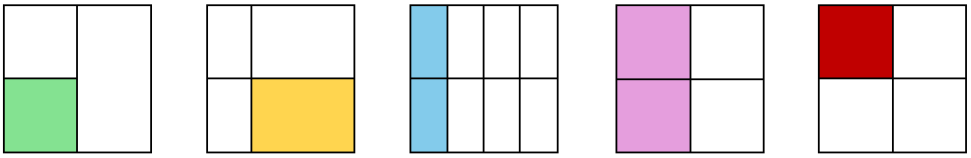
_____

_____

_____

1.2. Qual é o estado da bateria B? Explica como pensaste.

2. Rodeia a figura cuja parte pintada corresponde a $\frac{1}{4}$.

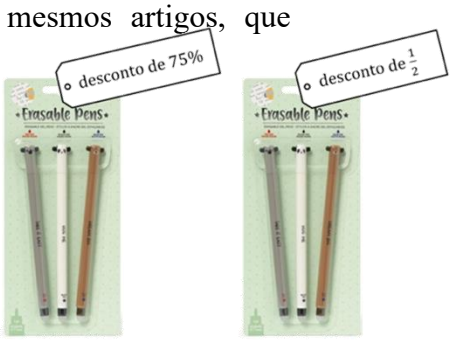


3. Pinta, com a mesma cor, as etiquetas com representações iguais.

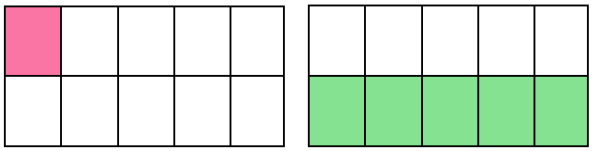
Atenção que nem todas as etiquetas têm outra com uma representação igual

50%	20%	$\frac{1}{4}$	75%
0,15	$\frac{1}{5}$	0,25	$\frac{1}{2}$
25%	$\frac{3}{4}$	1,5	0,20

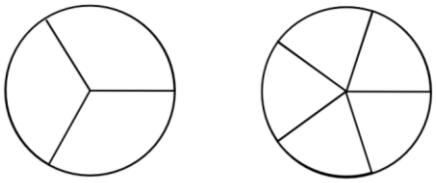
4. Em duas lojas diferentes foram colocados os mesmos artigos, que custavam exatamente o mesmo preço, em saldos. Cada loja colocou a promoção que achou adequada.

Em qual das lojas o artigo é mais barato? **Explica como pensaste.**

Loja A Loja B

5. Representa a área a sombreada, no retângulos, a baixo de cada figura.



6. Pinta as figuras de acordo com as indicações.



$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$

7. O senhor Arnaldo deu um chocolate igual às suas netas, Leonor e Francisca.

No dia seguinte a Leonor comeu $\frac{3}{6}$ do seu chocolate e a Francisca $\frac{3}{5}$. Qual das netas comeu mais chocolate? **Explica como pensaste.**

Anexos D – Planificação: Tarefa 1

Área Curricular – Matemática

Tarefa: Tarefa "Pacote de leite" (percentagem)

Aprendizagens Essenciais

a. *Números* – Frações de decimais – relação entre representações

"Usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%"

Objetivos de aprendizagem

1. Compreender a noção de percentagem (utilização de modelos).
2. Perceber que a percentagem pode ser representada em forma de numeral decimal e sob a forma de fração.

Conteúdos de ensino/aprendizagem:

- Percentagem;
- Fração;
- Decimal;
- Modelo (Barra de percentagens).

Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória

C – Raciocínio e Resolução de Problemas; **E** – Relacionamento interpessoal

Recursos necessários

- Tarefa em papel.
- Folhas A3;
- Canetas de feltro;
- Quadro interativo.

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

- *Apresentação da tarefa*

Na semana anterior foi referido, aos alunos, que as estagiárias iriam precisar da ajuda deles para realizar um trabalho para, mais tarde, sermos professoras. Os alunos, entusiasmados, aceitaram ajudar-nos. Assim, será dada continuação ao projeto de investigação começado na semana anterior (teste diagnóstico) e será proposta aos alunos

uma tarefa de números racionais (percentagem) que seguirá a metodologia do ensino exploratório: “Lembram-se da tarefa que completaram na semana passada?”; “Lembram-se de eu vos dizer que essa tarefa servia para eu perceber que tarefas podia trazer para nos trabalharmos e aprendermos mais?”; “Então vamos lá relembrar alguns conteúdos que estavam na tarefa”; “Recordam-se das baterias? Então o que quer dizer quando dizemos que a bateria está a 100%? Então e se estiver a 50%? E 25%?”. Posteriormente, será apresentada a tarefa aos alunos. A tarefa será lida em grande grupo e serão retiradas eventuais dúvidas iniciais. Neste momento, será mencionado aos alunos que depois da realização da tarefa terão de apresentar a resolução e as estratégias que utilizaram para depois discutirmos, em turma. Assim, ser-lhes-á dito que terão de preparar uma pequena apresentação. Um dos alunos que apresente, nessa semana, a tarefa irá distribuir, a cada grupo, duas folhas A3.

- *Exploração da tarefa*

Durante o momento de exploração da tarefa os alunos estarão divididos por grupos de 4, ou seja, 6 grupos de 4 (grupos elaborados previamente, bem como a disposição das mesas da sala). Em grupo, os alunos terão de resolver a tarefa, isto é, terão de utilizar a(s) estratégia(s) que para eles é /são a(s) mais eficaz(es). Neste momento, ser-lhes-á relembrado que terão de preparar uma pequena apresentação para discutirmos em turma. A(s) estratégia(s) de resolução será/serão dispostas numa folha A3 e escritas com canetas de feltro para que, no momento de discussão e sistematização, possam apresentar aos colegas. Neste momento a estagiária estará a apoiar os grupos e a questioná-los de forma que possa perceber o raciocínio dos alunos. Depois de os alunos terminarem as tarefas, a estagiária terá de digitalizar (com o auxílio do telemóvel) as estratégias de resolução que irá selecionar para serem discutidas em turma e que serão depois projetadas no quadro interativo.

- *Discussão e Sistematização*

Durante a discussão e sistematização, os grupos escolhidos irão apresentar a resolução do problema e a estagiária terá de promover a comunicação matemática, mais concretamente a discussão coletiva, a fim de construir conhecimentos e aprendizagens com os alunos. É de salientar que não serão apenas selecionadas as estratégias corretas, visto que uma estratégia errada pode promover a discussão em grupo. Por fim, serão sistematizadas as aprendizagens realizadas e retiradas da discussão coletiva, bem como

do trabalho em grupos. Neste momento será elaborada e relembrada a barra de percentagens e elaborado um cartaz para colocar na sala.

Dificuldades previstas e modos de as ultrapassar

Os alunos:

- Não conseguir chegar aos 10%

Estratégia para ultrapassar a dificuldade: os alunos que conseguirem chegar aos 10% irão apresentar a sua estratégia de resolução e em turma encontraremos uma regra geral. Caso não aconteça a estagiária irá instigar algumas questões intencionais para que os alunos consigam lá chegar.

A estagiária:

- Gestão do tempo;
- Gestão da turma e recolha de dados;
- Escolha de estratégias que poderão não ser as mais desafiantes para a discussão coletiva.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens

- Lembram-se da tarefa que completaram na semana passada?
- Lembram-se de eu vos dizer que essa tarefa servia para eu perceber que tarefas podia trazer para nos trabalharmos e aprendermos mais?
- Então vamos lá relembrar alguns conteúdos que estavam na tarefa
- Recordam-se das baterias? Então o que quer dizer quando dizemos que a bateria está a 100%? Então e se estiver a 50%? E 25%?
- Porque é que optaram por esta estratégia?
- Será que existe uma estratégia mais rápida para resolvermos o nosso problema?
- Porque será que a estratégia do grupo X não foi a mais adequada?
- O que são 100%? E 50%?
- Como é que podem descobrir os 75%?
- Será que podem pensar nos 10% de outra forma?

Possíveis Estratégias de resolução

Possíveis estratégias de resolução - feitas pelos alunos

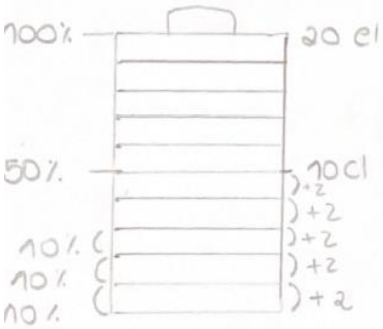
Estratégia 1

Percentagem	25%	50%	75%	100%
quantidade de leite (cl)	5	10	15	20

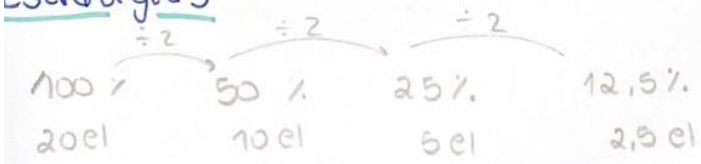
Percentagem	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
quantidade de leite (cl)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

75% = 15

Estratégia 2



Estratégia 3



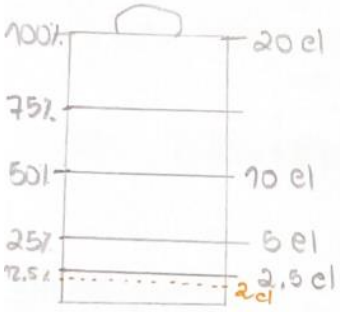
75% = 50% + 25% = 10 cl + 5 cl = 15 cl

75% = 15 cl

Estratégia 4

- 50 % é 10 cl porque 50% é metade de 100% logo, metade de 20 cl são 10 cl.
- 10 % são 2 cl porque 10 % é $\frac{1}{10}$ de 100 % .

Estratégia 5



Anexos E– Planificação: Tarefa 2

Área Curricular – Matemática

Tarefa: Tarefa "*Download Stumble Guys*" (percentagem, numeral decimal e fração)

Aprendizagens Essenciais

b. *Números* – Frações e decimais – relação entre representações

"Usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%"

c. *Capacidades Matemáticas* – Comunicação matemática – expressão de ideias

"Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito"

d. *Capacidades Matemáticas* – Comunicação matemática – discussão de ideias

"Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos"

Objetivos de aprendizagem

3. Compreender a noção de percentagem (utilização de modelos).
4. Perceber que a percentagem pode ser representada em forma de numeral decimal e sob a forma de fração.
5. Trabalhar com as diferentes representações de número racional, em simultâneo.
6. Associar as representações a uma grandeza (tempo)

Conteúdos de ensino/aprendizagem:

- Percentagem;
- Fração;
- Decimal;
- Modelo (Barra de percentagens).

Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória

C – Raciocínio e Resolução de Problemas; **E** – Relacionamento interpessoal

Recursos necessários

- Tarefa em papel;
- Modelo (Barra dupla)

- Folhas A3;
- Canetas de feltro;
- Quadro interativo.

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

- *Apresentação da tarefa*

Esta tarefa faz parte do projeto de investigação (Raquel). Na semana anterior a estagiária começou o seu projeto de investigação com uma tarefa, no qual pretendeu trabalhar uma das representações simbólicas de número racional (percentagem), representação esta que ainda não tinha sido trabalhada de formalmente. Assim, será dada continuação ao projeto de investigação já começado e será proposta aos alunos uma tarefa de números racionais (percentagem, numeral decimal e fração) que seguirá, novamente, a metodologia do ensino exploratório: "Lembram-se da tarefa que realizámos na semana passada?"; "Vocês disseram que a tarefa era muito fácil e então eu fiz outra".

Posteriormente, será apresentada a tarefa aos alunos. A tarefa será lida em grande grupo e serão retiradas eventuais dúvidas iniciais. Neste momento, será relembrado que depois da realização da tarefa os alunos terão de apresentar a resolução e as estratégias que utilizaram para, depois, discutirmos, em turma. Assim, ser-lhes-á, também, relembrado, que terão de preparar uma pequena apresentação. Os alunos responsáveis pela tarefa, nessa semana, irão distribuir, a cada grupo, uma folha e o modelo da barra dupla, sendo mencionado à turma que poderão usar para explicarem o seu raciocínio. Para além disso será ainda referido que será apenas distribuída uma folha e um modelo a cada grupo, mas que, caso necessário, poderão ir buscar mais (que se encontrarão na mesa hexagonal).

- *Exploração da tarefa*

Durante o momento de exploração da tarefa os alunos estarão divididos por grupos de 4, ou seja, 6 grupos de 4 (elaborados previamente, bem como a disposição das mesas da sala). Em grupo, os alunos terão de resolver a tarefa, isto é, terão de utilizar a(s) estratégia(s) que para eles é/são a(s) mais eficaz(es). Neste momento, ser-lhes-á relembrado que terão de preparar uma pequena apresentação para discutirmos em turma. A(s) estratégia(s) de resolução será/serão registadas numa folha e escritas com canetas de feltro para que, no momento de discussão e sistematização, possam apresentar aos colegas. Neste momento a estagiária estará a apoiar os grupos e a questioná-los de forma

que possa perceber o seu raciocínio. Depois de os alunos terminarem a tarefa, a estagiária terá de digitalizar (com o auxílio do telemóvel) as estratégias de resolução que irá selecionar para serem discutidas em turma e que serão depois projetadas no quadro interativo.

- *Discussão e Sistematização*

Durante a discussão e sistematização, os grupos escolhidos irão apresentar a resolução do problema e a estagiária terá de promover a comunicação matemática, mais concretamente a discussão coletiva, a fim de construir aprendizagens com os alunos. É de salientar que não serão apenas selecionadas as estratégias corretas, visto que uma estratégia errada pode promover a discussão em grupo e o desenvolvimento de aprendizagens a partir do erro. Por fim, serão sistematizadas as aprendizagens realizadas quer no trabalho de grupo, quer na discussão coletiva. Neste momento será elaborada e relembrada a barra de percentagens e elaborado um cartaz para colocar na sala.

Dificuldades previstas e modos de as ultrapassar

Os alunos:

- Não conseguir chegar aos 12,5%

Estratégia para ultrapassar a dificuldade: os alunos que conseguirem chegar aos 12,5% irão apresentar a sua estratégia de resolução e em turma encontraremos uma regra geral. Caso não aconteça a estagiária irá formular algumas questões intencionais para que os alunos consigam lá chegar tais como: "O que é que significava quando o pacote de leite estava a 50%?; Então e a 25%? E reparem, o que é que vocês estão a fazer?"

- Associar o 0,1 a $\frac{1}{10}$

Estratégia para ultrapassar a dificuldade: os alunos que conseguirem associar irão apresentar a sua estratégia de resolução bem como explicar a relação entre representações e em turma encontraremos uma regra geral. Caso não aconteça a estagiária irá formular algumas questões intencionais para que os alunos consigam perceber, tais como: "Vamos lá ver, se eu tiver uma reta numérica que está dividida em 10 partes iguais (desenhar no quadro interativo para que os alunos possam visualizar) onde é que está representado $\frac{1}{10}$. E onde está representado 0,1? Quem é que consegue explicar?".

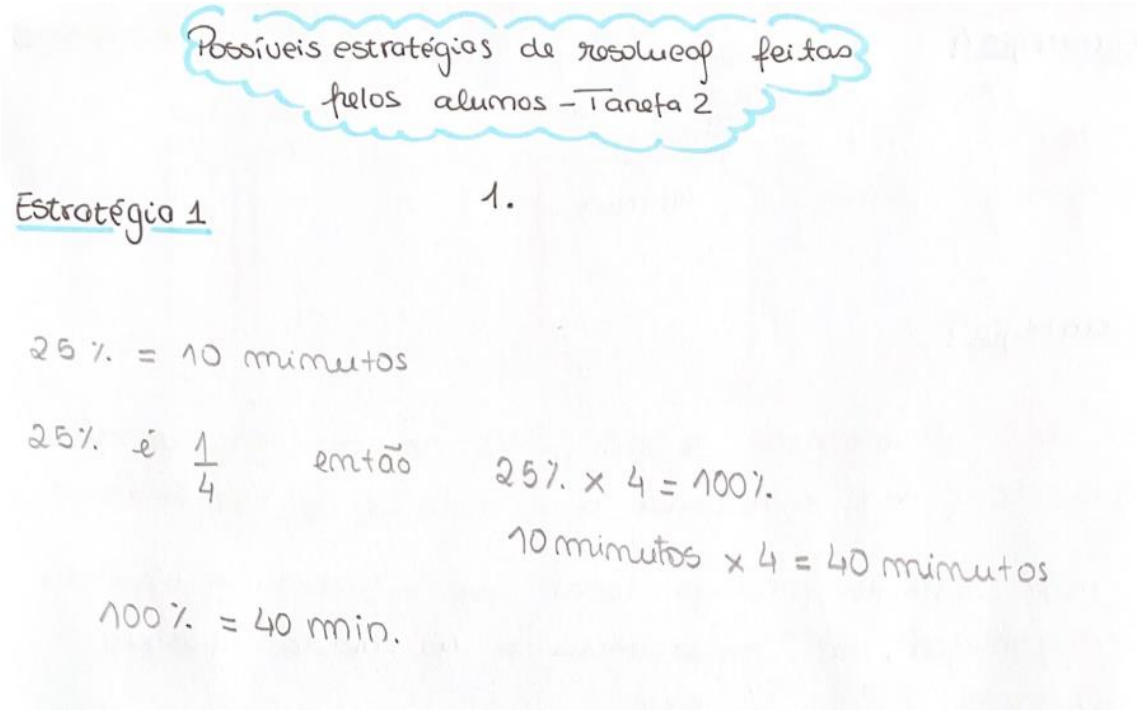
A estagiária:

- Gestão do tempo;
- Gestão da turma e recolha de dados;
- Escolha de estratégias que poderão não ser as mais desafiantes para a discussão coletiva.

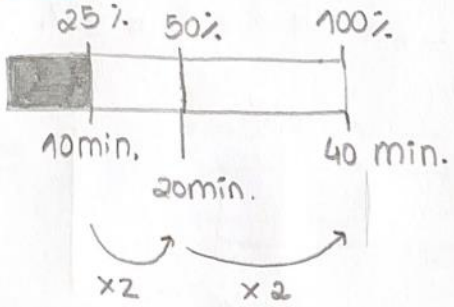
Questões a colocar para apoiar as aprendizagens

- Lembram-se da tarefa que realizámos na semana passada?
- Recordam-se das baterias e da tarefa do pacote de leite? Então o que quer dizer quando dizemos que a bateria está a 100%? Então e se estiver a 50%? E 25%? Mas no pacote de leite era um pouco diferente pois nós tínhamos de associar a representação à quantidade de leite a que correspondia. Será que aqui podemos pensar na tarefa do pacote de leite? Será que esta é idêntica?
- Porque é que optaram por esta estratégia?
- Que estratégias é que explorámos a semana passada?
- Será que existe uma estratégia mais rápida para resolvermos o nosso problema?
- Porque será que a estratégia do grupo X não foi a mais adequada?

Possíveis Estratégias de resolução



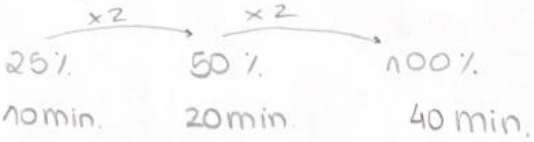
Estratégia 2



Estratégia 3

Percentagem (%)	25%.	50%.	75%.	100%.
tempo (min.)	10	20	30	40

Estratégia 4



Estratégia 5

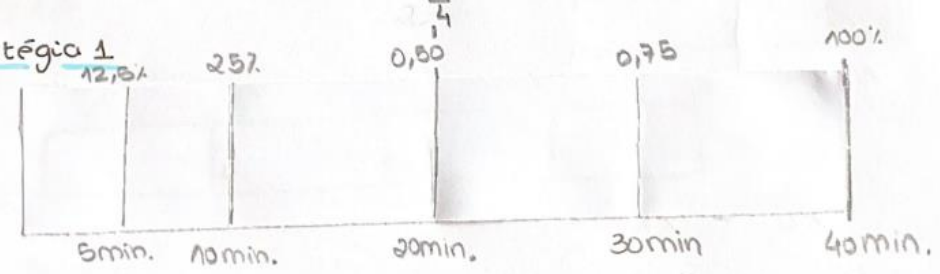
• 25%. é metade de 50%., logo se 25%. corresponde a 10 minutos, 50%. corresponde a 20 minutos de transferência.

• 100%, isto é, o tempo total que o fluograma demora a descarregar, vai corresponder a 40 minutos porque 100% é o dobro de 50%.

2.

$\frac{2}{4}$ → porque é $= \frac{1}{2} = 50\% = 0{,}50$

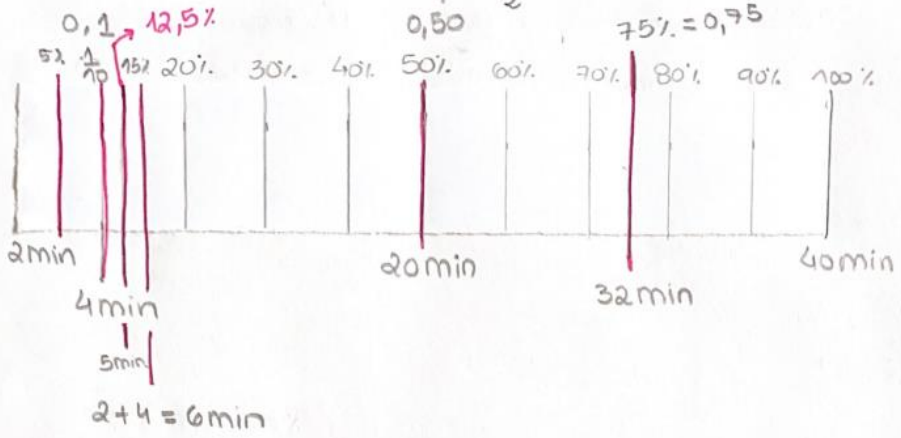
Estratégia 1



os alunos poderão recorrer às dobragens (na tira) para marcarem as representações: 0,50 ; $\frac{2}{4}$; 75% ; 12,5%.

Estratégia 2

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$



2 + 4 = 6min

os alunos poderão recorrer à dobragem da barra em duas partes iguais de forma obterem os 50%

Estratégia 3

• os alunos poderão passar as diferentes representações simbólicas que lhes são dadas apenas para uma.

exemplo:

$\frac{1}{10} \rightarrow 10\%$.

$0,50 \rightarrow 50\%$.

$\frac{2}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 50\%$.

$0,75 \rightarrow 75\%$.

$0,1 \rightarrow 10\%$.

} depois de passarem todas para a mesma representação simbólica, os alunos poderão recorrer a uma das estratégias anteriores.

Estratégia 4

÷2 ÷2 ÷2

100 % → 50% → 25% → 12,5%

• 40 min. → 20min. → 10min. → 5 min.

• se 100% são 40 min. então $\frac{1}{10}$ serão 4 min.

$$\begin{array}{r|l} 40' & 10 \\ -40 & \hline 0 & 4 \end{array}$$

• se 10% ($\frac{1}{10}$) são 4 min. então 5% são 2 min. porque 5 é metade de 10.

• $0,75 \rightarrow 75\%$ ou $\frac{3}{4}$ e, por isso: $\frac{1}{4}$ ou 25% = 10 min.

10 min × 3 = 30 min

↓

75%

• se 10% ($\frac{1}{10}$) corresponde a 4 min de transferência e 5% a 2 min., então, 15% vai corresponder a 10% + 5% = 4 + 2 = 6 min.

Anexos F– Planificação: Tarefa 3

Área Curricular – Matemática

Tarefa: "Explorando o modelo do azulejo" (percentagem, numeral decimal e fração)

Aprendizagens Essenciais

e. *Números* – Frações e decimais – relação entre representações

"Usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%"

f. *Capacidades Matemáticas* – Comunicação matemática – expressão de ideias

"Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito"

g. *Capacidades Matemáticas* – Comunicação matemática – discussão de ideias

"Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos"

Objetivos de aprendizagem

7. Compreender a noção de decimal (utilização de modelos).

8. Perceber que o numeral decimal pode ser representado em forma de percentagem e sob a forma de fração.

9. Trabalhar com as diferentes representações de número racional, em simultâneo.

Conteúdos de ensino/aprendizagem:

- Percentagem;
- Fração;
- Decimal;
- Modelo (Azulejo).

Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória

C – Raciocínio e Resolução de Problemas; **E** – Relacionamento interpessoal

Recursos necessários

- Tarefa em papel;
- Modelo (Azulejo)
- Folhas A3;
- Canetas de feltro;
- Quadro interativo.

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

- *Apresentação da tarefa*

Durante as semanas anteriores, os alunos têm vindo a desenvolver a noção de percentagem, bem como o trabalho com as diferentes representações, através de diversas estratégias, sendo uma delas a Barra de percentagem. A tarefa que será apresentada de seguida pretende incidir no desenvolvimento noção de numeral decimal, recorrendo a um modelo, o Modelo do Azulejo. Com esta tarefa pretende-se, novamente, que os alunos trabalhem com todas as representações simbólicas de número racional. Assim, será proposta aos alunos uma tarefa de números racionais (percentagem, numeral decimal e fração) que seguirá, novamente, a metodologia do ensino exploratório: "Nós, até aqui, temos vindo a explorar a percentagem, o numeral decimal e a fração. Então e o que é que temos andado a ver mais?"; "Que estratégias é que temos vindo a trabalhar?"; "O que é que nós concluímos na última aula?".

Posteriormente, será apresentada a tarefa aos alunos. A tarefa será lida em grande grupo e serão retiradas eventuais dúvidas iniciais. Neste momento, será relembrado que depois da realização da tarefa os alunos terão de apresentar a resolução e as estratégias que utilizaram para, depois, discutirmos, em turma. Assim, ser-lhes-á, também, relembrado, que terão de preparar uma pequena apresentação. Os alunos responsáveis pela tarefa, nessa semana, irão distribuir, a cada grupo, uma folha e o modelo do azulejo, sendo mencionado à turma que o poderão usar para explicarem o seu raciocínio. Para além disso será ainda referido que será apenas distribuída uma folha e um modelo a cada grupo, mas que, caso necessário, poderão ir buscar mais (que se encontrarão na mesa hexagonal).

- *Exploração da tarefa*

Durante o momento de exploração da tarefa os alunos estarão divididos em pares, ou seja, 12 pares (elaborados previamente, bem como a disposição das mesas da sala). Em grupo, os alunos terão de resolver a tarefa, isto é, terão de utilizar a(s) estratégia(s) que para eles é/são a(s) mais eficaz(es). Neste momento ser-lhes-á relembrado das regras para trabalhar em grupo para além de lhes ser ainda relembrado em quantas partes estará dividida a nossa aula e que, depois de concluírem a tarefa, terão de preparar uma pequena apresentação para discutirmos em turma. A(s) estratégia(s) de resolução será/serão registadas numa folha e escritas com canetas de feltro para que, no momento de discussão e sistematização, possam apresentar aos colegas. Neste momento a estagiária estará a

apoiar os grupos e a questioná-los de forma que possa perceber o seu raciocínio. Depois de os alunos terminarem a tarefa, a estagiária terá de digitalizar (com o auxílio do telemóvel) as estratégias de resolução que irá selecionar para serem discutidas em turma e que serão depois projetadas no quadro interativo.

- *Discussão e Sistematização*

Durante a discussão e sistematização, os grupos escolhidos irão apresentar a resolução do problema e a estagiária terá de promover a comunicação matemática, mais concretamente a discussão coletiva, a fim de construir aprendizagens com os alunos. É de salientar que não serão apenas selecionadas as estratégias corretas, visto que uma estratégia errada pode promover a discussão em grupo e o desenvolvimento de aprendizagens a partir do erro. Por fim, serão sistematizadas as aprendizagens realizadas quer no trabalho de grupo, quer na discussão coletiva. Neste momento serão relembradas as conclusões retiradas a partir do modelo do azulejo (ex.: que um quadradinho corresponde a 1 centésima – 0,01 = 1% = $\frac{1}{100}$; uma barra corresponde a 1 décima – 0,1 = 10% = $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; 1 quadrado que tem 100 quadradinhos corresponde a uma unidade – 100% = $\frac{100}{100} = \frac{10}{10} = 1$) e será elaborado um cartaz para colocar na sala.

Dificuldades previstas e modos de as ultrapassar

Os alunos:

- Dificuldade em perceber que 0,5 é igual a 0,50

Estratégia para ultrapassar a dificuldade: os alunos perceberem esta relação irão explicar aos restantes o porquê. Para isso poderão recorrer ao modelo do Azulejo. Caso não aconteça a estagiária irá formular algumas questões intencionais para que os alunos consigam lá chegar tais como: "Vocês dizem que 0,50 não é igual a 50%. Então até onde é que temos de pintar para termos representado 0,50, neste modelo?"; "Agora que já temos 0,50 pintados onde é que vai estar os 0,5? (serão priorizados os alunos que respondem que só irão estar pintados 5 quadradinhos - 0,05). Porquê?"; "Vamos lá pensar, se eu tenho 0,50 tenho de pintar quantos quadradinhos? Certo temos de pintar $\frac{1}{2}$ mas isso corresponde a quantos quadradinhos? Quantos quadradinhos tem o nosso azulejo?"

A estagiária:

- Gestão do tempo;
- Gestão da turma e recolha de dados;
- Escolha de estratégias que poderão não ser as mais desafiantes para a discussão coletiva.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens

- Nós, até aqui, temos vindo a explorar a percentagem, o numeral decimal e a fração. Então e o que é que temos andado a ver mais?
- Que estratégias é que temos vindo a trabalhar?
- O que é que nós concluímos na última aula?
- Vocês dizem que 0,50 é igual a 50%. Então até onde é que temos de pintar para termos representado 0,50, neste modelo?"
- Agora que já temos 0,50 pintados onde é que vai estar os 0,5? Porquê?
- Vamos lá pensar, se eu tenho 0,50 tenho de pintar quantos quadradinhos? Certo temos de pintar $\frac{1}{2}$ mas isso corresponde a quantos quadradinhos?
- Quantos quadradinhos tem o nosso azulejo?
- Se eu pintar uma barra pinto quantos quadradinhos?
- Se quisermos representar sob a forma de fração como é que podemos representar?
- Então a barra corresponde a $\frac{1}{10}$, mas e se eu não quiser representar a barra sob a forma de fração, mas sim os 10 quadradinhos que estão pintados em relação ao nosso todo?

Possíveis Estratégias de resolução

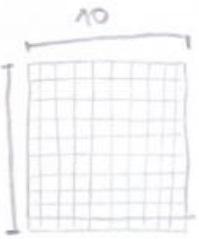
Estratégias de resolução - Tarefa 3

①

Estratégia 1

Um ■ é igual a 0,01 centésimas que é o mesmo que 1 % e que $\frac{1}{100}$.

Como o azulejo tem 100 ■ porque e 10 × 10 = 100 quadradinhos = 100 %.



Estratégia 2

Um ■ é igual a 0,1 décimas porque existem 100 ■ e então como está 1 pintado é igual a 0,1 que é a mesma coisa que 1 %. e $\frac{1}{100}$

②

A. $\frac{25}{100}$ = 25 % = 0,25 (porque estão pintados 25 quadradinhos da figura que tem 100)

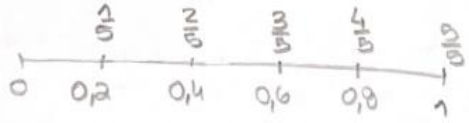
A. $\frac{1}{4}$ = 25 % = 0,25 (porque está pintada um quarto da figura, porque é como se a figura estivesse dividida em 4 partes exatamente iguais e pintassemos uma dessas partes)

B. $\frac{40}{100} = 40\% = 0,40$

Porque na figura B estão pintados 40 ■ em 100 que formam a unidade.

B. $\frac{2}{5} = 40\% = 0,4$

Porque na figura B estão pintados 0,4 decimos da figura total. Se nós pensarmos como na reta numérica



e então como o que está pintado é igual a 40% = 0,4 então estão pintados $\frac{2}{5}$

C. $0,33 = \frac{33}{100} = 33\%$

Porque estão pintados 33 ■ no quadrado grande que tem 100 ■ e como os 100 ■ correspondem ao todo (à unidade) então estes 100 ■ correspondem a 100%. e por isso como só estão pintados 33 ■ é igual a 33%.

③

Estratégia 1

0,50 é maior que 0,5

é verdade porque 50 é maior que 5 e porque se tivermos pintado no azulejo 0,50 pintamos 50 ■, mas se pintarmos 0,5 só pintamos 5 ■

Estratégia 2

0,50 é maior que 0,5

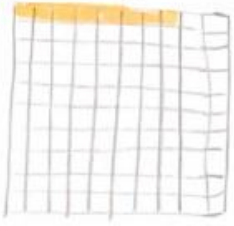
é mentira porque 0,5 = 0,50 porque no azulejo cada quadrado corresponde a $\frac{1}{100}$ = 10 % = 0,01, mas 1 barra, que tem 10 quadrados, corresponde a $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ = 10 % = 0,1 e como 1 barra = 0,1 decimas então 0,5 decimas são 5 barras mas corresponde a 50 ■

Estratégia 1

0,8 é menor que 0,69

é verdade porque 8 é menor que 69.

0,8



0,69

Estratégia 2

0,8 é menor que 0,69

É mentira porque 0,8 = 0,80 porque no azulejo cada quadrado corresponde a $\frac{1}{100} = 1\%$ e 1 barra, que tem 10 quadrados, corresponde a $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 10\% = 0,1$ e como 1 barra é igual a 0,1 decimas 0,8 são 8 barras = 80 ▬ = 80%. 0,69 corresponde a termos quase 7 barras pintadas porque temos 6 barras totalmente pintadas mais 9 centésimas e por isso $0,69 < 0,8$.

Anexos G– Planificação: Tarefa 4

Área Curricular – Matemática

Tarefa: "Vamos conhecer o *Decimat*" (percentagem, numeral decimal e fração)

Aprendizagens Essenciais

h. *Números* – Frações e decimais – relação entre representações

"Usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%"

i. *Capacidades Matemáticas* – Comunicação matemática – expressão de ideias

"Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito"

j. *Capacidades Matemáticas* – Comunicação matemática – discussão de ideias

"Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos"

Objetivos de aprendizagem

10. Compreender a noção de decimal (utilização de modelos).

11. Perceber que o numeral decimal pode ser representado em forma de percentagem e sob a forma de fração.

12. Trabalhar com as diferentes representações de número racional, em simultâneo.

Conteúdos de ensino/aprendizagem:

- Percentagem;
- Fração;
- Decimal;
- Modelo (*Decimat*).

Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória

C – Raciocínio e Resolução de Problemas; **E** – Relacionamento interpessoal

Recursos necessários

- Tarefa em papel;
- Modelo (*Decimat*)
- Folhas A3;
- Canetas de feltro;
- Quadro interativo.

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

- *Apresentação da tarefa*

Durante as semanas anteriores, os alunos têm vindo a desenvolver a noção de percentagem, de numeral decimal e de fração, bem como o trabalho com as diferentes representações, através de diversas estratégias, sendo uma delas o modelo Barra de percentagem e o modelo do azulejo. Na semana anterior os alunos exploraram o modelo do azulejo e retiraram algumas conclusões como: "1 quadradinho corresponde a uma centésima (0,01) porque o quadrado todo é 100% e tem 100 quadradinhos então 1 quadradinho é 1%", bem como frações equivalentes no qual perceberam que $\frac{1}{4}$ e $\frac{25}{100}$ correspondem à mesma quantidade, mas que a unidade está dividida em partes diferentes.

A tarefa que será apresentada de seguida pretende continuar a desenvolver a noção de numeral decimal, recorrendo a um modelo, o *Decimat*. Com esta tarefa pretende-se, novamente, que os alunos trabalhem com todas as representações simbólicas de número racional. Assim, será proposta aos alunos uma tarefa de números racionais (percentagem, numeral decimal e fração) que seguirá, novamente, a metodologia do ensino exploratório: "Nós, a semana passada trabalhámos um modelo. Alguém se lembra como é que se chamava?"; "E conclusões é que retirámos desse modelo?"; "Um quadradinho correspondia ao quê"; "E uma barra?"; "E o quadrado todo?"; "Olhem, eu na aula passada esqueci-me de vos perguntar uma coisa. Eu consigo representar milésimas no modelo do azulejo?"

Posteriormente, será apresentada a tarefa aos alunos. A tarefa será lida em grande grupo e serão retiradas eventuais dúvidas iniciais. Neste momento, será relembrado que depois da realização da tarefa os alunos terão de apresentar a resolução e as estratégias que utilizaram para, depois, discutirmos, em turma. Assim, ser-lhes-á, também, relembrado, que terão de preparar uma pequena apresentação. Os alunos responsáveis pela tarefa, nessa semana, irão distribuir, a cada grupo, uma folha e o modelo do *Decimat*, sendo mencionado à turma que o poderão usar para explicarem o seu raciocínio. Para além disso será ainda referido que será apenas distribuída uma folha e um modelo a cada grupo, mas que, caso necessário, poderão ir buscar mais (que se encontrarão na mesa hexagonal).

- *Exploração da tarefa*

Durante o momento de exploração da tarefa os alunos estarão divididos em grupos (6 grupos de 4, elaborados previamente, bem como a disposição das mesas da sala). Em

grupo, os alunos terão de resolver a tarefa, isto é, terão de utilizar a(s) estratégia(s) que para eles é/são a(s) mais eficaz(es). Neste momento ser-lhes-á relembrado das regras para trabalhar em grupo para além de lhes ser ainda relembrado em quantas partes estará dividida a nossa aula e que, depois de concluírem a tarefa, terão de preparar uma pequena apresentação para discutirmos em turma. A(s) estratégia(s) de resolução será/serão registadas numa folha e escritas com canetas de feltro para que, no momento de discussão e sistematização, possam apresentar aos colegas. Neste momento a estagiária estará a apoiar os grupos e a questioná-los de forma que possa perceber o seu raciocínio. Depois de os alunos terminarem a tarefa, a estagiária terá de digitalizar (com o auxílio do telemóvel) as estratégias de resolução que irá selecionar para serem discutidas em turma e que serão depois projetadas no quadro interativo.

- *Discussão e Sistematização*

Durante a discussão e sistematização, os grupos escolhidos irão apresentar a resolução do problema e a estagiária terá de promover a comunicação matemática, mais concretamente a discussão coletiva, a fim de construir aprendizagens com os alunos. É de salientar que não serão apenas selecionadas as estratégias corretas, visto que uma estratégia errada pode promover a discussão em grupo e o desenvolvimento de aprendizagens a partir do erro. Por fim, serão sistematizadas as aprendizagens realizadas quer no trabalho de grupo, quer na discussão coletiva. Neste momento serão relembradas as conclusões retiradas a partir do modelo do *Decimat* (ex.: o retângulo C corresponde a 1 milésima – 0,001 = 0,1% = $\frac{1}{1000}$; o retângulo B corresponde a 1 centésima – 0,01 = 1% = $\frac{1}{100}$; o retângulo A corresponde a 1 décima – 0,1 = 10% = $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; o retângulo todo, que se pode representar por 10 décimas, 100 centésimas ou 1000 milésimas corresponde a uma unidade – 100% = $\frac{1000}{1000} = \frac{100}{100} = \frac{10}{10} = 1$) e será elaborado um cartaz para colocar na sala.

Dificuldades previstas e modos de as ultrapassar

Os alunos:

- Dificuldade em perceber que 0,87 é menor do que 0,125:

Estratégia para ultrapassar a dificuldade: os alunos que perceberem esta relação irão explicar aos restantes o porquê. Para isso poderão recorrer ao modelo do *Decimat*.

Caso não aconteça a estagiária irá formular algumas questões intencionais para que os alunos consigam lá chegar tais como: "Vão lá buscar dois *Decimat*. Agora quero que me representem 0,87 e 0,125?"; "Quantas decimas vamos pintar no primeiro Decimat (que corresponde a 0,87)? E quantas centésimas? E quantas milésimas"; "Agora quero que façam o mesmo no segundo *Decimat* (que corresponde a 0,125). Comparem lá os dois *Decimat's*. Então, qual deles é que tem uma maior parte pintada?

A estagiária:

- Gestão do tempo;

Estratégia para ultrapassar a dificuldade: colocar um temporizador e referir aos alunos que têm apenas aquele tempo para terminar a tarefa.

- Gestão da turma e recolha de dados;
- Escolha de estratégias que poderão não ser as mais desafiantes para a discussão coletiva.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens

- Nós, a semana passada trabalhámos um modelo. Alguém se lembra como é que se chamava?;
- E conclusões é que retirámos desse modelo?;
- Um quadradinho correspondia ao quê?;
- E uma barra?;
- E o quadrado todo?;
- Olhem, eu na aula passada esqueci-me de vos perguntar uma coisa. Eu consigo representar milésimas no modelo do azulejo? Porquê?
- Vocês dizem que 0,87 é maior que 0,125. Então até onde é que temos de pintar para termos representado 0,87, neste modelo?"
- Agora que já pintámos 0,87 conseguimos pintar 0,125 neste *Decimat* ou temos de ir buscar outro? Porquê?
- Para pintarmos 0,125 temos de pintar o quê?
- Nós já vimos que podemos dividir o nosso retângulo em decimas, centésimas e milésimas. Para pintarmos 0,125 o que será necessário fazermos?
- E quantos retângulos dos mais pequenos vamos pintar?
- Então quantas decimas acabámos de pintar? E quantas centésimas? E quantas milésimas?

- Então e no 0,87 quantas decimas pintámos?
- Então se nós já concluímos que as decimas são maiores que as centésimas e as milésimas, a afirmação será verdadeira ou falsa? Porquê?

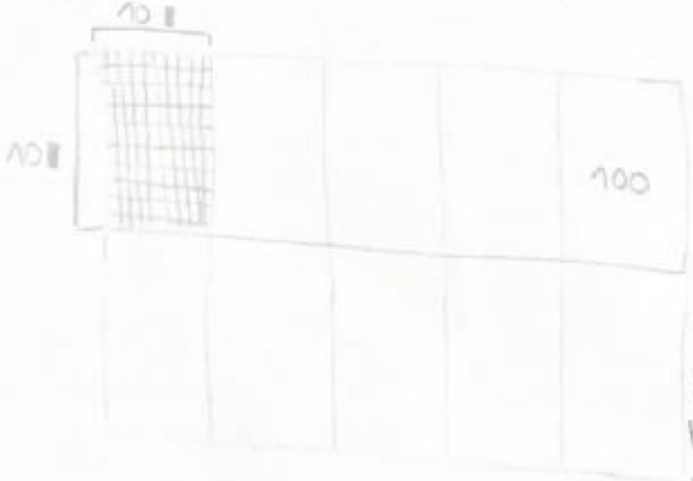
Possíveis Estratégias de resolução

Estratégias de resolução - Tarefa 4

Questão 1

Estratégia 1

A figura do Decimat está dividida em retângulos. Cada retângulo A corresponde a 0,1 décimo. Depois o B vai ser uma centésimo porque se dividirmos todos os retângulos A por 10 vamos ter 10×10 que é igual a 100 e então o B é 1 centésimo (0,01). O mesmo acontece para o retângulo C, se nós dividirmos a figura em retângulos C vai ser:



Em cada retângulo A existem 100 C, ou seja, em cada décimo existem 100 milésimas e como há 10 A, isto é, há 10 décimas, 10×100 = 1000 milésimas que existem em toda a figura.

$A = 0,1 = 10\% = \frac{1}{10}$

$B = 0,01 = 1\% = \frac{1}{100}$

$C = 0,001 = 0,1\% = \frac{1}{1000}$

Estratégia 2

A = $\frac{1}{9}$ porque a figura está dividida em 9 ▮ A

B = $\frac{1}{9}$ porque existem 9 ▮ B e só um é que está pintado.

C = $\frac{1}{10}$ porque existem 10 ▮ C e só um está pintado

Questão 2

Estratégia 1

0,87 é menor do que 0,125

É verdade porque se tirarmos o 0 e a vírgula o 87 é menor do que o 125.

Estratégia 2

É mentira porque se 0,5 é igual a 0,50, então 0,87 é igual a 0,870, apesar de a unidade estar dividida em partes diferentes. Então 0,870 > 0,125 porque 870 > 125.

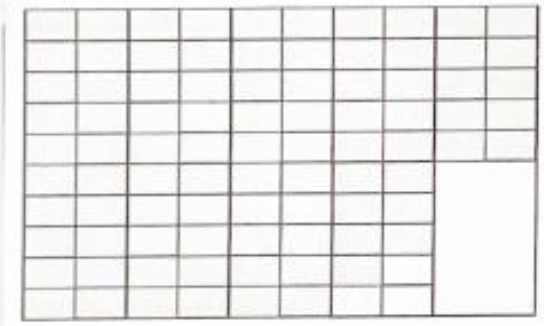
Estratégia 3

O decimal se dividirmos as em ▮ A ele tem 10 e cada um corresponde a 1 décima.

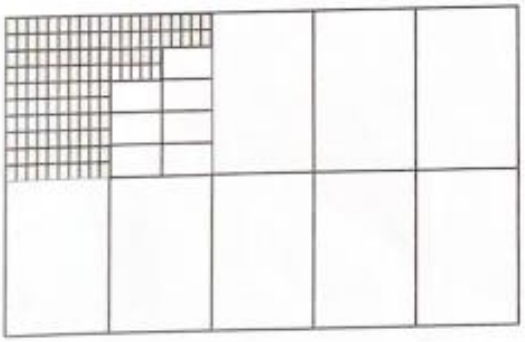
no 0,87 pintam-se 8 retângulos A mas no 0,125 só se pinta 1, então a afirmação é falsa.

Estratégia 4

os alunos utilizam Decimais para representar 0,87 e 0,125



0,87 = a 8 décimas inteiras mais 7 centésimas



0,125 = a 1 décimo a mais mais 2 centésimas e mais 5 milésimas

Então a afirmação é falsa

Questão 3

Estratégia 1

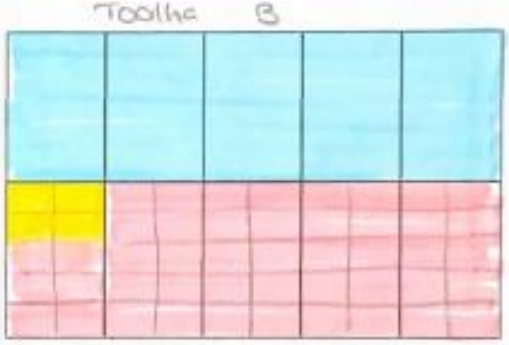
25% de azul = 0,25

0,120 amarelo = 0,12

$\frac{63}{100}$ rosa = 0,63

Toalha A

Toalha B

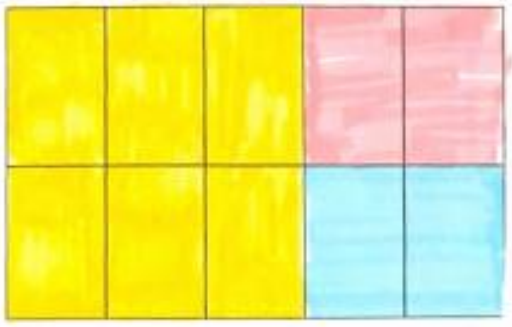


$\frac{5}{20}$ azul

4% de amarelo = 0,04

0,46 de rosa

Toalha C



0,200 de azul = 0,2

$\frac{3}{5}$ amarelo

20% rosa = 0,2

Estratégia 2

Cor / Toalhas	Azul	Amarelo	Rosa
A	25% = 0,25	0,120 = 0,12	$\frac{63}{100}$ = 0,63
B	$\frac{5}{10}$ = 0,50	4% = 0,04	0,46
C	0,200 = 0,20	$\frac{3}{5}$ = 0,60	20% = 0,20

Os alunos passam todas as representações para centésimos.

A toalha C é a que tem uma maior parcela de amarelo

Anexos H– Planificação: Tarefa 5

Área Curricular – Matemática

Tarefa: "à descoberta da toalha" (percentagem, numeral decimal e fração)

Aprendizagens Essenciais

k. *Números* – Frações e decimais – relação entre representações

"Usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%"

l. *Capacidades Matemáticas* – Comunicação matemática – expressão de ideias

"Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito"

m. *Capacidades Matemáticas* – Comunicação matemática – discussão de ideias

"Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos"

Objetivos de aprendizagem

13. Compreender a noção de decimal (utilização de modelos).

14. Perceber que o numeral decimal pode ser representado em forma de percentagem e sob a forma de fração.

15. Trabalhar com as diferentes representações de número racional, em simultâneo.

Conteúdos de ensino/aprendizagem:

- Percentagem;
- Fração;
- Decimal;
- Modelo (*Decimat,* Modelo do azulejo, Modelo da barra de percentagens).

Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória

C – Raciocínio e Resolução de Problemas; **E** – Relacionamento interpessoal

Recursos necessários

- Tarefa em papel;
- Modelos (todos os trabalhados até agora)
- Folhas A3;
- Canetas de feltro;
- Quadro interativo.

Desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem

- *Apresentação da tarefa*

Durante as semanas anteriores, os alunos têm vindo a desenvolver a noção de percentagem, de numeral decimal e de fração, bem como o trabalho com as diferentes representações, através de diversas estratégias e recorrendo a modelos que ajudam a perceber o trabalho em torno dos números racionais: modelo Barra de percentagem; o modelo do azulejo; e o modelo do *Decimat*. Durante a semana anterior os alunos exploraram o modelo do *Decimat* e retiraram algumas conclusões como: "o retângulo mais pequeno corresponde a uma milésima (0,001) porque o retângulo grande é o todo e porque existem 10 retângulos A, que cada um corresponde a 1 decima, os retângulos B, no qual 10 retângulos B fazem 1 A, ou seja, fazem 1 decima e, por isso, um retângulo B corresponde a uma centésima porque é uma décima que está dividida em 10 e o mesmo acontece para o retângulo C, que corresponde a um retângulo B (uma centésima) dividida em 10 partes iguais e, por isso, um retângulo C corresponde a uma milésima. Para além destas conclusões os alunos realizaram ainda associações entre os números representados sob a forma de fração, em numeral decimal e em percentagem.

A tarefa que será apresentada de seguida pretende continuar a desenvolver a noção de numeral decimal, percentagem e fração. Com esta tarefa pretende-se, novamente, que os alunos trabalhem com todas as representações simbólicas de número racional. Assim, será proposta aos alunos uma tarefa de números racionais (percentagem, numeral decimal e fração) que seguirá, novamente, a metodologia do ensino exploratório: "Nós, a semana passada trabalhámos um modelo. Alguém se lembra como é que se chamava?"; "E conclusões é que retirámos desse modelo?"; "O retângulo A correspondia ao quê?"; "E se dividirmos o A em 10 o que é que obtemos?"; "E se fizermos o mesmo ao B"; "Antes de começarmos a próxima tarefa tenho uma questão para vocês. Se eu tiver este número (escrevo no quadro – 0,1208) o oito corresponde ao quê? Corresponde às milésimas? Então como é que obtemos este oito? Então, mas afinal a nossa unidade não vai apenas até às milésimas?; O que é que está aqui a acontecer?"

Posteriormente, será apresentada a tarefa aos alunos. A tarefa será lida em grande grupo e serão retiradas eventuais dúvidas iniciais. Neste momento, será relembrado que depois da realização da tarefa os alunos terão de apresentar a resolução e as estratégias que utilizaram para, depois, discutirmos, em turma. Assim, ser-lhes-á, também, relembrado, que terão de preparar uma pequena apresentação. Os alunos responsáveis pela tarefa, nessa semana, irão distribuir, a cada grupo, uma folha e será mencionado à

turma que, caso eles pretendam utilizar algum dos modelos que temos vindo a estudar para explicarem o seu raciocínio, estes irão estar dispostos na bancada para que eles, à medida que necessitem possam ir buscá-los e utilizá-los para explicarem o seu raciocínio. Para além disso, será ainda referido que, apenas, será distribuída uma folha a cada grupo, mas que, caso necessário, poderão ir buscar mais (que se encontrarão na mesa hexagonal).

- *Exploração da tarefa*

Durante o momento de exploração da tarefa os alunos estarão organizados em pares (12 pares de 2, elaborados previamente, bem como a disposição das mesas da sala). Em grupo, os alunos terão de resolver a tarefa, isto é, terão de utilizar a(s) estratégia(s) que para eles é/são a(s) mais eficaz(es). Neste momento ser-lhes-á relembrado das regras para trabalhar em grupo para além de lhes ser ainda relembrado em quantas partes estará dividida a nossa aula e que, depois de concluírem a tarefa, terão de preparar uma pequena apresentação para discutirmos em turma. A(s) estratégia(s) de resolução será/serão registadas numa folha e escritas com canetas de feltro para que, no momento de discussão e sistematização, possam apresentar aos colegas. Neste momento a estagiária estará a apoiar os grupos e a questioná-los de forma que possa perceber o seu raciocínio. Depois de os alunos terminarem a tarefa, a estagiária terá de digitalizar (com o auxílio do telemóvel) as estratégias de resolução que irá selecionar para serem discutidas em turma e que serão depois projetadas no quadro interativo.

- *Discussão e Sistematização*

Durante a discussão e sistematização, os grupos escolhidos irão apresentar a resolução do problema e a estagiária terá de promover a comunicação matemática, mais concretamente a discussão coletiva, a fim de construir aprendizagens com os alunos. É de salientar que não serão apenas selecionadas as estratégias corretas, visto que uma estratégia errada pode promover a discussão em grupo e o desenvolvimento de aprendizagens a partir do erro. Por fim, serão sistematizadas as aprendizagens realizadas quer no trabalho de grupo, quer na discussão coletiva. Neste momento serão relembradas as conclusões retiradas a partir das estratégias utilizadas pelos alunos.

Dificuldades previstas e modos de as ultrapassar

Os alunos:

- Representar 1,5, visto que representa mais do que a unidade:

Estratégia para ultrapassar a dificuldade: os alunos que perceberem esta relação irão explicar aos restantes o porquê. Caso não aconteça a estagiária irá formular algumas questões intencionais para que os alunos consigam lá chegar tais como: "O que é 100%?"; "Como é que vocês representam 100%"; "Então, 1,5 corresponde ao quê?"

A estagiária:

- Gestão do tempo;

Estratégia para ultrapassar a dificuldade: colocar um temporizador e referir aos alunos que têm apenas aquele tempo para terminar a tarefa.

- Gestão da turma e recolha de dados;
- Escolha de estratégias que poderão não ser as mais desafiantes para a discussão coletiva.

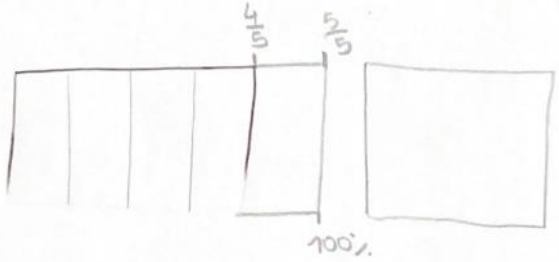
Questões a colocar para apoiar as aprendizagens

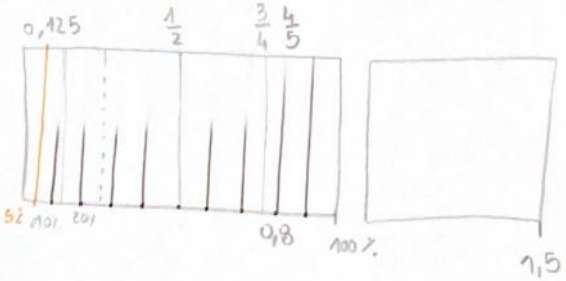
- A toalha aqui representada corresponde à toalha toda?;
- Então corresponde ao quê?;
- E se quisermos representar em percentagem. Quanto é?;
- Então se este bocadinho corresponde a $\frac{4}{5}$/80%, qual é a parte que falta à toalha?;
- E como é vocês vão representar?;
- Vocês optaram por ir buscar o modelo da barra. Mas no enunciado diz que a toalha está incompleta. A barra corresponde ao quê?;
- Então mas vocês querem os 100%? O que é que podem fazer?;

Possíveis Estratégias de resolução

Estratégia 1

Os alunos poderão aproveitar o enunciado para realizarem o que lhes é pedido.



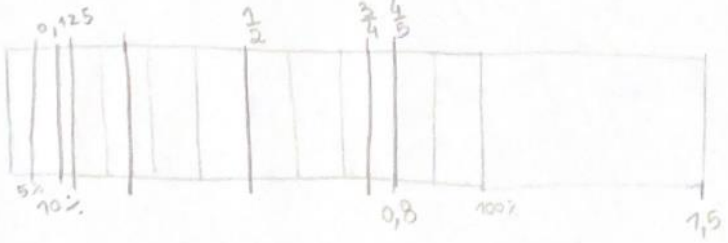


Os alunos vão ter ao seu dispor tiras idênticas à do enunciado caso queiram e para representar 1,5 poderão voltar a desenhar a tira, traçar o meio e contá-la nesse mesmo sítio.

Os traços a preto marcam a unidade dividida em 10.

Estratégia 2

Os alunos poderão recorrer ao modelo de barra dupla, disponível.



Os alunos assumem a barra cheia a unidade toda e terão de recortar o que já têm e o que terão de acrescentar.

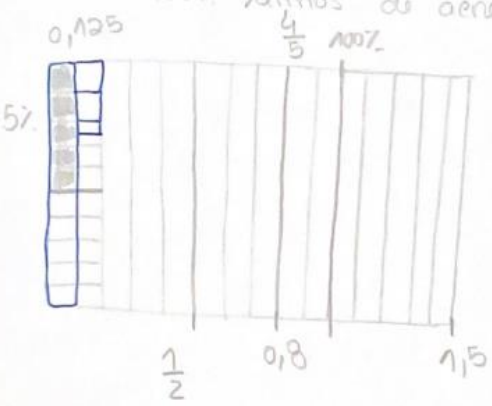
Estratégia 3

• Os alunos poderão recorrer ao modelo do azulejo recortado - o.

$\frac{4}{5}$ da toalha

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; os alunos irão marcar 8 barras (de 10) no modelo.

• Para estar 100% temos de apresentar mais duas barras (0,2).



Estratégia 4

• Os alunos poderão utilizar o modelo do Decimat.

Estratégia 5

• os alunos irão passar todas as representações que lhes são dadas para percentagem.

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 80\%$.

$\frac{1}{2} = 50\%$

$\frac{3}{4} = 75\%$

$0,125 = 12,5\%$

5%.

$1,5 = 150\%$.

• Depois de todas as representações estarem em % os alunos poderão recorrer a qualquer uma das estratégias anteriores.

(poderá ser feito o mesmo no que diz respeito à fração e ao numeral decimal)