

TENSION CHORD MODEL PARA CARGAS ALTERNADAS



Miguel Sérgio Lourenço

Eng.º Civil, JSJ, Lda
Prof. Adjunto Conv. IPS
Instituto Politécnico de
Setúbal, ESTBarreiro,
INCITE
mlourenco@jsj.pt
Portugal



Miguel Ferreira

Eng.º Civil
Grupo NOV, SA
Prof. Adjunto Conv. UC
Leiria
miguelpedrosaferreira@gmail.com



Cristina Oliveira

Professora Adjunta
Instituto Politécnico de
Setúbal, ESTBarreiro,
INCITE
cristina.oliveira@estbarreiro.ips.pt
Portugal



João Almeida

Eng.º Civil, JSJ, Lda
Prof. Associado
IST, CERIS
Lisboa
jalmeida@civil.ist.utl.pt

SUMÁRIO

O *Tension Chord Model* (TCM) é um modelo de análise para simular o comportamento de um elemento de betão armado, considerando, individualmente, as relações constitutivas de ensaios uniaxiais dos materiais aço e betão, e, com o comportamento conjunto simulado através de uma lei de aderência rígido-plástica simplificada.

Neste artigo, o TCM é estendido para situações de cargas alternadas e repetidas, apresentando-se comparações entre resultados experimentais e numéricos, de modo a contribuir para que sejam gradualmente utilizados modelos de comportamento fisicamente consistentes no estudo de elementos de betão armado.

Palavras-chave: Tension Chord Model, Acções cíclicas, Modelos de comportamento, Betão Estrutural

1. INTRODUÇÃO

O *Tension Chord Model* (TCM), proposto por Marti et al. 1988, é um modelo de análise que permite simular o comportamento de um elemento de betão armado. Utilizado muitas vezes para a análise do comportamento sob acções monotónicas, este modelo considera, individualmente, as relações constitutivas de ensaios uniaxiais dos materiais aço e betão, sendo o comportamento conjunto simulado através de uma lei de aderência rígido-plástica simplificada. Obtém-se, assim, uma relação constitutiva, esforço axial – extensão média, de um tirante, para forças aplicadas, deformações impostas extrínsecas ou intrínsecas (e.g.

retracção). Trata-se de um modelo físico que resulta numa equação diferencial simples e a que corresponde uma solução analítica.

Neste artigo pretende-se estender o conceito do TCM para situações de cargas alternadas e repetidas, com o objectivo de obter o comportamento de um elemento de betão armado para acções cíclicas apoiado em modelos de comportamento simples e fisicamente consistentes.

A ligação entre betão-aço é influenciada pela história de ciclos de carga-descarga, com alteração de rigidez e estado de deformação, conduzindo a problemas de interpretação de resultados e introduzindo sérias dificuldades na simulação numérica deste comportamento.

Numa primeira fase é abordado um tirante sob acções monotónicas, com um ciclo de carga e descarga, estabelecendo-se uma solução analítica para a resposta. Na fase seguinte, são tratadas as cargas cíclicas. A obtenção de uma solução analítica generalizada é inviabilizada devido ao comportamento não linear dos materiais, sendo, portanto, necessário recorrer a métodos numéricos para obter a resposta cíclica. Através de uma formulação que recorre a um elemento finito linear (1D) para simular o conjunto betão-aço-aderência, em conjunto com modelos reológicos criteriosamente associados em série ou em paralelo que traduzem o comportamento tensão-extensão, consegue-se simular eficazmente o comportamento global cíclico do tirante.

Em todo o processo, desde a formulação analítica para acções monotónicas, até à formulação numérica para as acções cíclicas, foram consideradas deformações impostas e não forças aplicadas, de modo a simular adequadamente os troços descendentes da resposta global, resultantes das relações constitutivas não lineares do betão.

Por fim, os resultados numéricos foram comparados com ensaios experimentais de modo a validar a formulação proposta.

2. COMPORTAMENTO PARA ACÇÕES ALTERNADAS MONOTÓNICAS

A aplicação do TCM, com recurso à simplificação da lei de aderência, que se admitiu rígido-plástica e assumindo que as relações constitutivas individuais dos materiais betão e aço permanecem lineares, permite uma definição analítica do comportamento de um tirante de betão estrutural. Efectivamente, estabelecendo-se as equações de equilíbrio e compatibilidade de um elemento infinitesimal, e considerando as relações constitutivas dos materiais, betão e aço, isoladamente, obtêm-se as condições apresentadas nas Eqs (1) e (2) para a variação das extensões no aço ε_s e no betão ε_c , onde τ_b representa a tensão de aderência, $\varnothing$ o diâmetro do varão, $\rho_s = A_s/A_c$ a taxa de armadura e E_s e E_c os módulos de elasticidade do aço e betão, respectivamente.

$$\frac{d\varepsilon_s}{dx} = \frac{4\tau_b}{\varnothing E_s}, \quad \frac{d\varepsilon_c}{dx} = \frac{4\tau_b}{\varnothing E_c} \rho_s \quad (1) \text{ e } (2)$$

A extensão deste conceito para uma situação em que existem acções alternadas foi abordada por alguns autores, e.g. Muttoni and Fernandez 2007, para determinar a abertura de fendas em pontes devido ao facto de a estrutura ter estado sujeita a uma acção superior à carga quase-permanente, e Koppitz et al. 2014, com o objectivo de obter um modelo

análítico geral para situações de carga-descarga e recarga. Também Lourenço 2010, utilizou os conceitos do *Tension Chord Model* para simular o comportamento cíclico de elementos de betão estrutural e aplicou aos Modelos de Campos de Tensões Adaptativos.

Para acções monotónicas alternadas num tirante de betão armado considerando o efeito de uma extensão de tracção aplicada e uma posterior descarga, assume-se que o comportamento do aço é elasto-plástico, com um eventual endurecimento pós-cedência, e que a descarga permanece linear com um declive igual ao seu módulo de elasticidade E_s . O betão apresenta uma relação constitutiva linear à tracção com declive igual ao seu módulo de elasticidade E_c , até atingir a sua resistência máxima à tracção, caindo para zero após atingir a extensão correspondente. No que respeita à aderência, esta usualmente toma um valor de $\tau_{b0} = 2f_{ct}$ para a fase de carga até o aço atingir a tensão de cedência, reduzindo para $\tau_{by} = f_{ct}$ após a plastificação das armaduras. Durante a descarga verifica-se uma degradação do mecanismo de aderência propondo-se um valor de $\tau_{bu} = \tau_{b0}/4 = f_{ct}/2$ (Laurencet 1999). Os comportamentos dos materiais aço e betão, bem como a lei da aderência encontram-se representados na Figura 1. Poderá ser considerado o efeito da capacidade do betão resistir a tensões de tracção após a abertura da fenda, usualmente simulado através de um processo de energia da fractura, sendo a capacidade resistente à tracção tanto menor quanto maior for a abertura de fendas (ver Figura 1d), onde w_c apresenta valores entre 0.15mm a 0.25mm (Muttoni and Fernandez 2007). Porém, este efeito foi desprezado nesta análise para possibilitar soluções analíticas simples. No entanto, a partir do momento em que as relações constitutivas não são lineares, não é possível encontrar uma solução analítica para todas as situações sendo, portanto, necessário recorrer a métodos numéricos para obter a solução do problema.

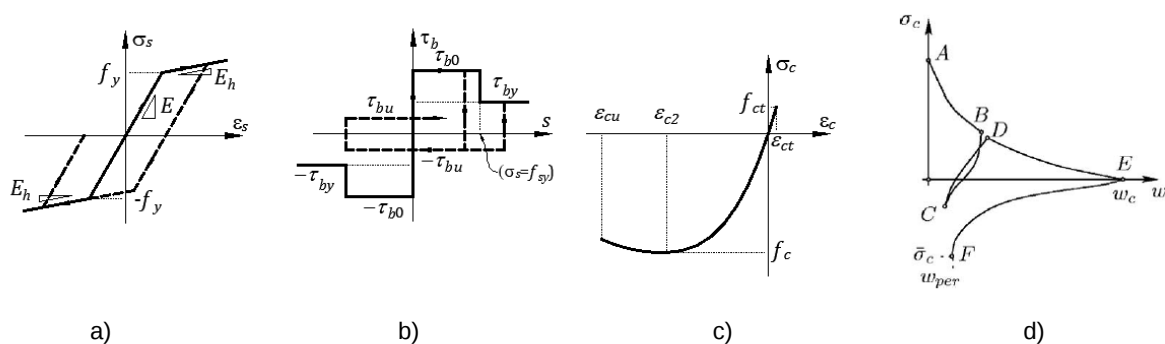


Figura 1. Relações constitutivas para a) aço; b) aderência; c) betão; d) Comportamento do betão à tracção (Muttoni and Fernandez 2007)

Verifica-se que, para o caso de deformações impostas extrínsecas e para acções monotónicas, o comportamento de um tirante de betão armado passa por uma fase progressiva de abertura de fendas até se atingir a situação de fendilhação estabilizada. A distância entre fendas s_r é definida como sendo o dobro da distância entre a secção onde a tensão no betão é nula (secção da fenda) e a secção em que o betão atinge a tensão resistente à tracção f_{ct} (note-se que $d\sigma_c/dx = 4\tau_b\rho_s/\varnothing$), resultando na Eq.(3) (ver Figura 2a).

$$s_r = \frac{f_{ct}\varnothing}{2\tau_b\rho_s} \quad (3)$$

Para a fase de carga, as inclinações dos campos de extensões no aço em cada troço (ver Figura 2b) e c) são dadas pelas Eqs (4) e (5). O dobro da distância entre o ponto de variação das tensões de aderência (por se ter atingido a cedência das armaduras) e o consequente ponto anguloso A no diagrama de extensões no aço, indicadas na Figura 2c), corresponde a s_y (distância CC' na Figura 2c) e é dada pela equação do segundo grau indicada na Eq. (6), sabendo que a extensão imposta extrínseca é dada por $\varepsilon_e = \delta_e/L$.

$$i_0 = -\frac{4\tau_{b0}}{\phi E_s}, \quad i_y = -\frac{4\tau_{by}}{\phi E_{sh}} \quad (4) \text{ e } (5)$$

$$\frac{(i_0 - i_y)}{4} s_y^2 - \frac{i_0}{2} s_r s_y + \varepsilon_{sy} s_r + \frac{i_0}{4} s_r^2 - \varepsilon_e s_r = 0 \quad (6)$$

Conhecendo a extensão na fenda ε_{sr} , utilizando as relações constitutivas do aço, obtém-se a correspondente tensão na secção da fenda σ_{sr} através das Eqs. (7) e (8) (onde $\Delta\varepsilon_e = \Delta\delta_e/L$ representa a variação de extensão de tracção imposta e $\Delta\varepsilon = f_{ct}/2\rho_s E_s$ é a translação do diagrama $\sigma_{sr}; \varepsilon_e$ entre o aço nu e considerando a resistência do betão entre fendas - *tension stiffening*).

$$\begin{aligned} \text{se } \Delta\varepsilon_e > 0 \wedge 0 \leq \varepsilon_e \leq \varepsilon_{ct} &\Rightarrow \varepsilon_{sr} = \varepsilon_e \\ \text{se } \Delta\varepsilon_e > 0 \wedge \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_e \leq \varepsilon_{sy} - \Delta\varepsilon &\Rightarrow \Delta\varepsilon_{sr} = \Delta\varepsilon_e \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{se } \Delta\varepsilon_e > 0 \wedge \varepsilon_{sy} - \Delta\varepsilon < \varepsilon_e \leq \varepsilon_{su} \Rightarrow \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sy} - i_y s_y / 2$$

$$\begin{aligned} \text{se } \varepsilon_{sr} \leq \varepsilon_{sy} &\Rightarrow \sigma_{sr} = E_s \varepsilon_{sr} \\ \text{se } \varepsilon_{sr} > \varepsilon_{sy} &\Rightarrow \sigma_{sr} = f_{sy} + (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sy}) E_{sh} \end{aligned} \quad (8)$$

Aquando da descarga e se esta ocorrer ainda no troço elástico, as tensões no aço na secção da fenda reduzem, invertendo o sentido das tensões de aderência (ver Figura 2a). O diagrama de extensões apresenta o andamento indicado na Figura 2b), sendo a inclinação do diagrama de extensões na vizinhança da fenda dado por i_u (Eq. (9) até atingir a recta das extensões que foi definida no instante da descarga (linha AC na Figura 2b). A distância s_u (entre B e B' na Figura 2b), pode ser determinada pela Eq. (10) sendo $\Delta\varepsilon_e = \varepsilon_{e,un} - \varepsilon_e$ a variação de extensão imposta na descarga desde o instante em que se inverteu o sentido da deformação, e a extensão na fenda ε_{sr} dada pela expressão indicada na Eq. (11). O diagrama $\sigma_{sr}; \varepsilon_e$ (ver Figura 3a) é dado assim por uma curva, passando a linear, com inclinação paralela à fase da carga, quando a distância s_u atinge a distância entre fendas s_r (ver diagrama inferior da Figura 2b). A tensão é dada pela Eq. (12) permitindo definir analiticamente a curva de descarga.

$$i_u = \frac{4\tau_{bu}}{\phi E_s} \quad (9)$$

$$s_u^2 = \frac{4\Delta\varepsilon_e s_r}{(i_0 - i_u)} \quad (10)$$

$$\text{se } \Delta\varepsilon_e < 0 \wedge \varepsilon_{sr,un} \leq \varepsilon_{sy} \Rightarrow \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr,un} + (i_0 - i_u) s_u / 2 \quad (11)$$

$$\sigma_{sr} = \sigma_{sr,un} + E_s(\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sr,un}) \quad (12)$$

Caso a descarga ocorra após a cedência das armaduras, o diagrama de extensões é ligeiramente mais complexo e é caracterizado por três etapas distintas. A inclinação das extensões na vizinhança da fenda é dada pela Eq. (13). A primeira etapa é definida pela transição da extensão $\varepsilon_{e,un}$ para uma extensão ε_{e1} , correspondente à situação em que a recta definida pela inclinação i_{uy} encontra a recta com inclinação i_y (diagrama imediatamente anterior à descarga). Nesta fase, a distância s_u é determinada pela Eq. (14) e a extensão na fenda ε_{sr} dada pela expressão indicada na Eq. (15).

$$i_{uy} = i_y - i_0 - i_u \quad (13)$$

$$s_u^2 = \frac{4\Delta\varepsilon_e s_r}{(i_y - i_{uy})} \leftarrow \varepsilon_e > \varepsilon_{sy} - \Delta\varepsilon \quad (14)$$

$$se \Delta\varepsilon_e < 0 \wedge \varepsilon_{sr,un} > \varepsilon_{sy} \Rightarrow \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr,un} + (i_y - i_{uy}) s_u/2 \quad (15)$$

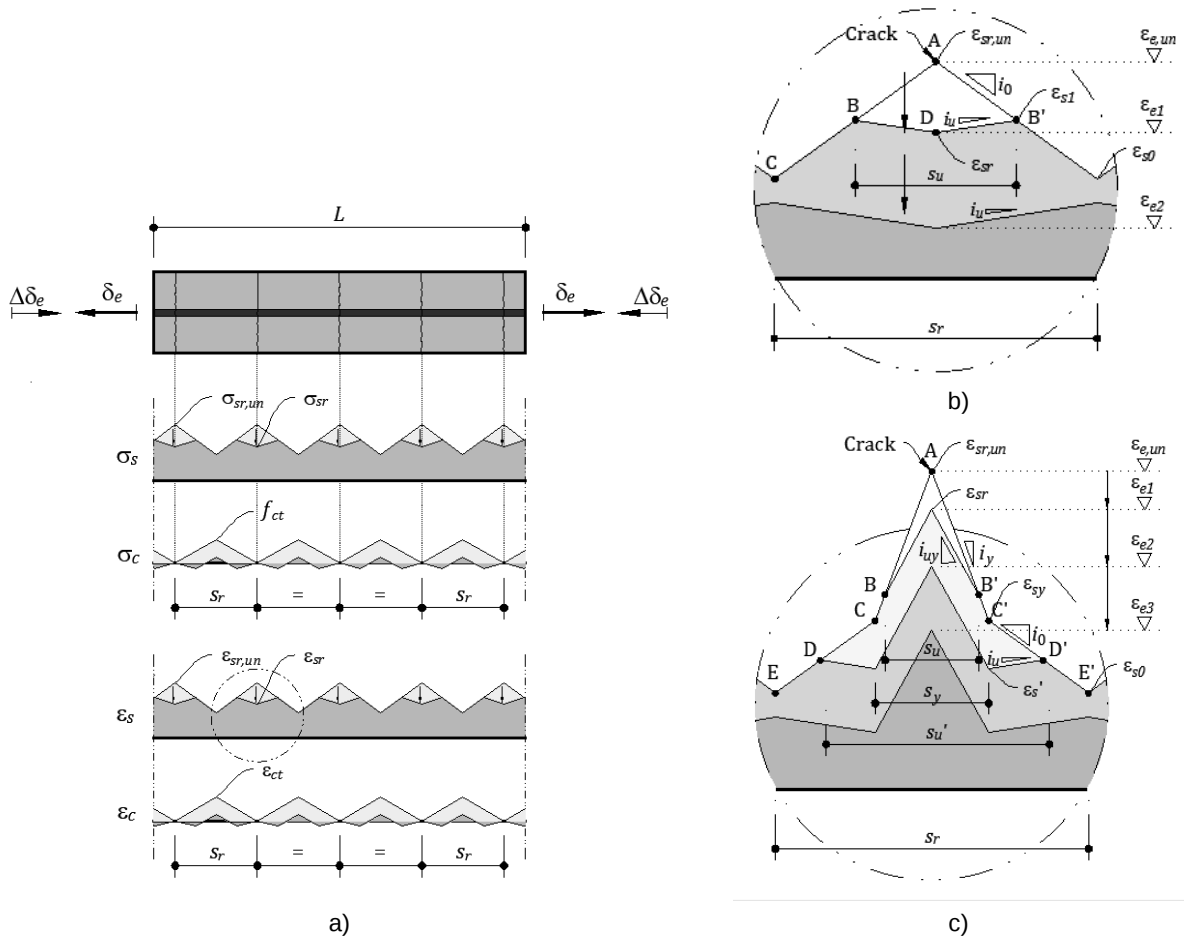


Figura 2. Processo de fendilhação na descarga de deformação extrínseca: a) vista global; b) descarga na fase elástica; c) descarga após a cedência de armaduras

A segunda etapa consiste na transição de C/C' para E/E', ocorrendo uma inversão do sentido da aderência, caracterizada pela inclinação i_u dada pela Eq. (9) até intersectar a

recta com inclinação i_0 . Neste caso, a distância s_u' é dada pela resolução do sistema de equações indicado nas Eqs. (16) a (18), conduzindo igualmente a uma equação com solução analítica. Por fim, a terceira etapa corresponde a uma relação linear e paralela ao patamar de carga (ver Figura 3b).

$$\varepsilon_s' = \varepsilon_{sr} - i_{uy} s_y / 2 \quad (16)$$

$$\frac{\varepsilon_{sr,un} - \varepsilon_{sr} + \varepsilon_{sy} - \varepsilon_s'}{2} s_y + \frac{\varepsilon_{sy} - \varepsilon_s'}{2} (s_u - s_y) = \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} s_r \quad (17)$$

$$\varepsilon_s' + i_u \frac{(s_u - s_y)}{2} = \varepsilon_{sy} + i_0 \frac{(s_u - s_y)}{2} \quad (18)$$

A aplicação das equações apresentadas anteriormente conduz aos diagramas apresentados na Figura 3 para as descargas nas fases elástica e plástica. Note-se que este aspecto pode ter especial interesse na avaliação de aberturas de fendas em estruturas que estiveram sujeitas a acções que conduziram a uma tensão σ_{max} , superior à tensão provocada pela acção quase permanente σ_{qp} , conduzindo a uma extensão ε_{qp} superior à calculada caso se tratasse de um 1º carregamento (ε'_{qp}).

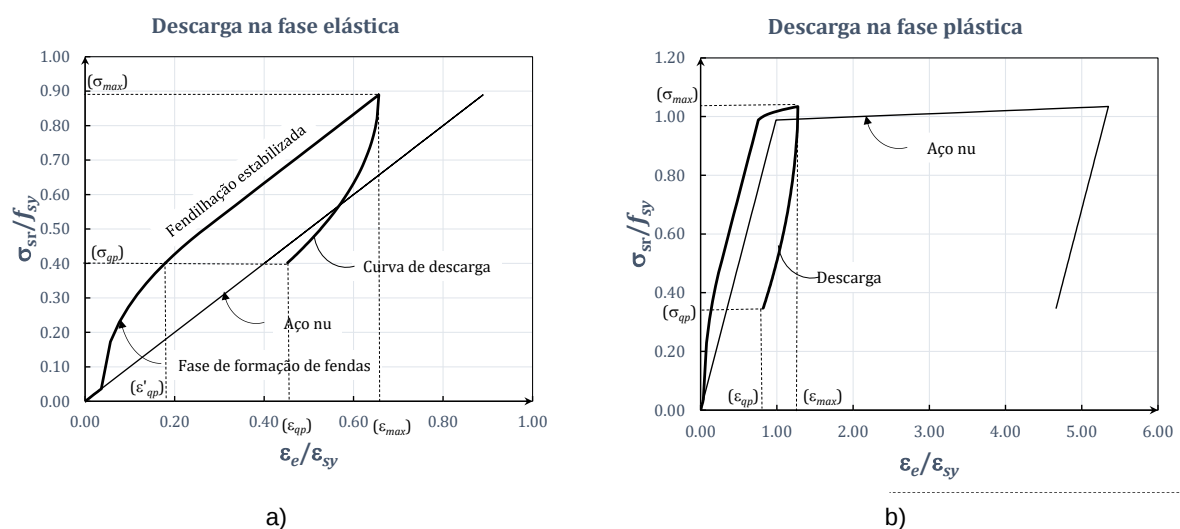


Figura 3. Relações tensão-deformação com: a) descarga na fase elástica; b) descarga na fase plástica

3. COMPORTAMENTO PARA ACÇÕES CÍCLICAS

3.1 Considerações Iniciais

A modelação analítica de curvas de carga e descarga repetidas, na maioria das situações, reveste-se de grandes dificuldades de implementação. As equações a adoptar dependem dos níveis de extensão ou de tensão, na carga ou na descarga, conduzindo à necessidade de existirem diversas equações, com o risco inerente de aumentar a probabilidade de erro e não abranger todos os casos particulares. Usualmente, utilizam-se expressões empíricas ou semi-empíricas obtidas em ensaios experimentais (CEB 1996 e Vecchio 1999).

Aqui, procurou-se desenvolver um modelo que utilizasse conceitos físicos simples e consistentes através de modelos reológicos, associando em série ou em paralelo diversos

componentes com um comportamento físico simples e perfeitamente definido, como desenvolvido por Ferreira 2021, para se obter uma aproximação a qualquer curva $\sigma; \varepsilon$ real, correspondendo a um modelo de engenharia elegante. Em complemento, o número de parâmetros a introduzir é muito reduzido para caracterizar qualquer curva numérica. A utilização deste tipo de modelos, além de simplificar, de forma decisiva, a modelação das curvas histeréticas, é de implementação numérica muito simples.

3.2 Componentes Reológicas

Para uma determinada extensão imposta extrínseca ε_e , a distribuição de tensões e extensões depende do tipo de associação das componentes. Para aproximar uma relação constitutiva não-linear genérica, basta efectuar a associação em paralelo de vários conjuntos de componentes com comportamento elasto-plástico perfeito (ver Figura 4a), resultando o comportamento não-linear da Figura 4c) para n associações. Neste sistema, para uma extensão imposta ε_e , cuja tensão nos componentes elásticos ainda não atingiram a correspondente tensão de cedência f_{yj} , a rigidez do sistema global é dada pela soma da rigidez dos componentes em paralelo. Assim que um dos conjuntos de componentes atinge a tensão de cedência, a sua rigidez é nula pois toda a extensão é absorvida pela componente rígido-plástica, restando apenas a rigidez dos restantes conjuntos que ainda não atingiram a tensão de cedência, conduzindo a uma redução da rigidez global do sistema.

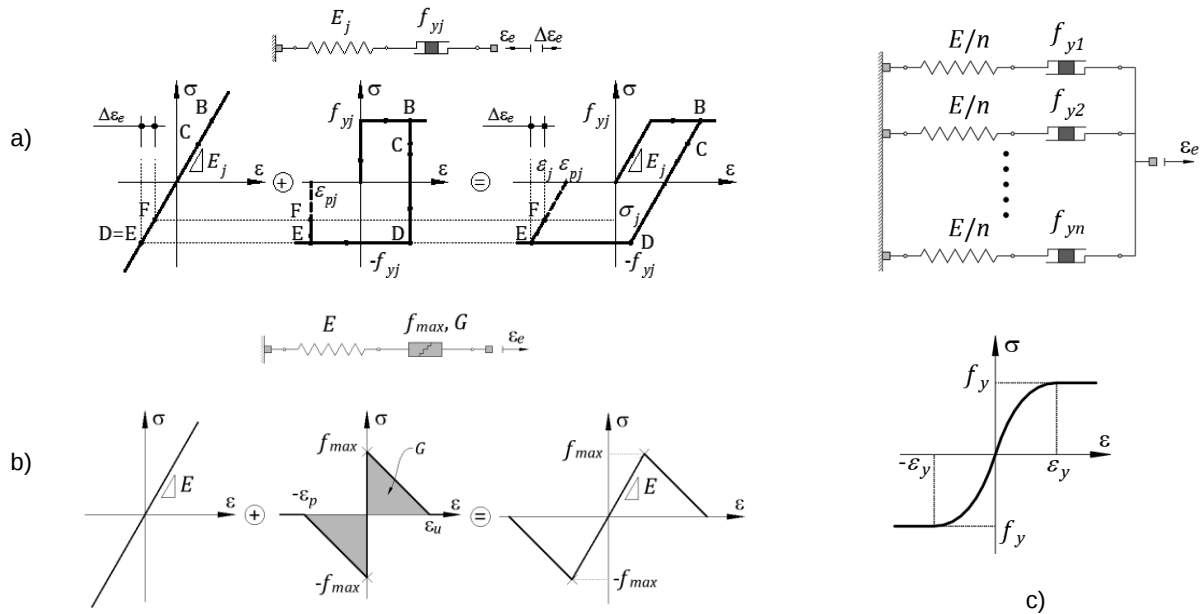


Figura 4. Associação de componentes para comportamentos: a) elásto-plástico; b) comportamento cíclico; c) elásto-plástico não linear; d) simulação de troços descendentes (adaptado de Ferreira 2021)

O módulo de elasticidade E_j e a tensão de cedência f_{yj} de cada componente j , elástico e plástico, respectivamente, tal como sugerido por Ferreira 2021, pode ser dado pelas Eqs. (19).

$$E_j = \frac{E}{n}; \quad f_{yj} = \frac{j^k}{\sum_j j^k} f_y \quad (19)$$

A simulação de um troço descendente numa relação constitutiva, pode ser definida através de uma energia de fractura, cujo componente reológico associado depende da tensão máxima, da extensão final e do comprimento desse elemento. A associação desse componente com uma mola, conforme ilustrado na Figura 4b) conduz ao comportamento indicado na mesma figura.

Adicionalmente, é necessário conhecer algumas variáveis de estado para simular o comportamento cíclico, nomeadamente o ponto de descarga de cada componente (ponto B na Figura 4a) ou, em alternativa, a extensão plástica ε_{pj} quando o componente é totalmente descarregado (equivale a $\sigma_j=0$ - ver Figura 4a). Na descarga, a passagem do ponto B para o ponto C na Figura 4a), conduz a um decréscimo da extensão no componente elástico, com consequente redução de tensão global. No que respeita à recarga, as extensões em cada componente e no sistema conjunto passam pelo ponto D, até atingir o ponto E na Figura 4a). A recarga corresponde a uma variação de extensão imposta positiva, passando do ponto E para o ponto F, com o funcionamento de cada componente idêntico à fase da descarga. Assim, a extensão plástica em cada componente pode ser relacionada com a extensão imposta ε_e e com a correspondente tensão σ_j através da Eq. (20).

$$\varepsilon_{pj} = \varepsilon_e - \frac{\sigma_j}{E_j} \quad (20)$$

3.3 Relações Constitutivas Cíclicas do Betão, Aço e Aderência

O betão apresenta um comportamento não linear à compressão com redução da tensão resistente após o pico da tensão máxima. Para a tracção, o comportamento é praticamente linear até atingir a tensão resistente à tracção, com um troço descendente, associado a uma energia da fractura. Os modelos reológicos para simularem o comportamento do betão à tracção e à compressão são apresentados na Figura 5 a) e b). Para a compressão, foram considerados $n=8$ conjuntos de ligações em série de uma componente elástica e uma componente rígido-plástica. Para simular o dano no betão após atingir a tensão máxima, foi incluída, em série, uma ligação em paralelo de um componente de energia da fractura com $\varepsilon_{cu} = 3.5\%$ limitando a tensão máxima a f_{cu} através do componente rígido-plástico.

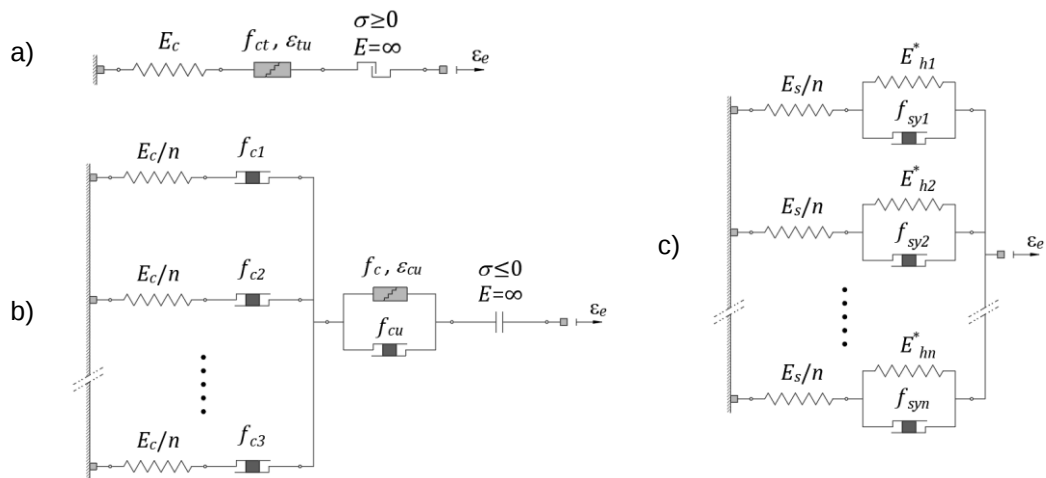


Figura 5. Modelos reológicos para a) betão à tracção; b) betão à compressão; c) aço

Relativamente ao aço, foi considerado um conjunto de $n=8$ associações em série de um componente elástico com um componente em paralelo de uma mola e um componente rígido-plástico, de modo a simular o endurecimento pós-cedência do aço. Os módulos de elasticidade e tensões de cedência descritos seguiram o definido na Eq. (19) e E_{sj}^* é calibrado de modo que cada componente tenha um módulo de endurecimento de $E_{hj} = E_h/n$, resultando $1/E_{hj}^* = 1/E_{hj} - 1/E_{sj}$.

A tensão σ_j em cada conjunto de componentes indicados na Figura 5 pode ser dada pela Eq. (21), sendo a tensão final dada pela soma das tensões em cada componente. O comportamento cíclico pode ser perfeitamente definido por estas associações de componentes, necessitando apenas de conhecer a variável de estado ε_p , sendo que a descarga e a recarga são caracterizadas por curvas com iguais declives e com a rigidez paralela à carga.

$$\sigma_j = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} E_j \cdot (\varepsilon_e - \varepsilon_{p,i-1}) \\ f_y + E_{hj} \cdot (\varepsilon_e - \varepsilon_y); \sigma = \sum_{j=1}^n \sigma_j \\ -f_y - E_{hj} \cdot (\varepsilon_e - \varepsilon_y) \end{array} \right. \quad (21)$$

O comportamento cíclico obtido numericamente para o betão e aço, com estes modelos reológicos, para ciclos de carga, descarga e recarga, pode ser observado na Figura 6.

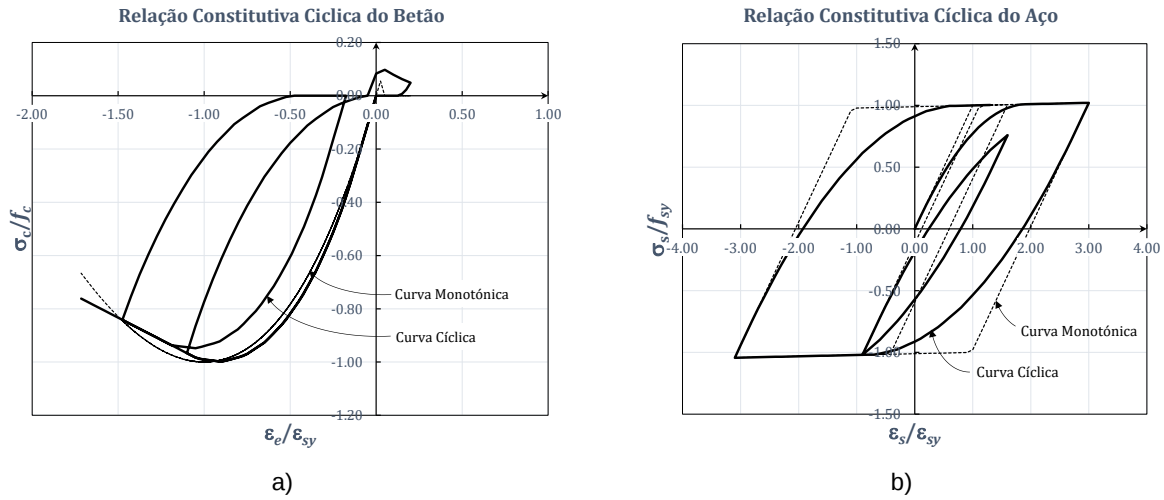


Figura 6. Aplicação de modelos reológicos para os comportamentos a) betão e b) aço

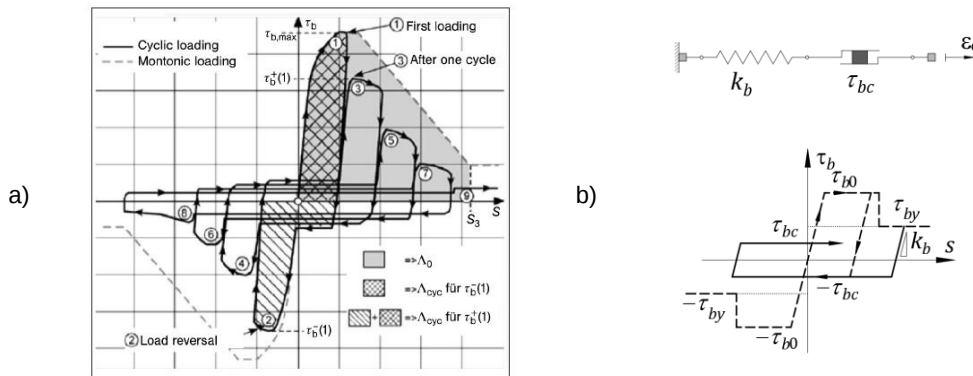


Figura 7. a) Comportamento cíclico da aderência como definido no MC 2010; b) modelo reológico para a consideração da aderência

No que respeita à aderência, verifica-se que a tensão tangencial resistente apresenta uma forte degradação após poucos ciclos de carga. Efectivamente, de acordo com o Model Code 2010 (ver Figura 7a) a tensão de aderência reduz para cerca de 1/8 da tensão de pico do primeiro carregamento, a que corresponde a uma tensão de aderência de cerca de $\tau_{bc} = f_{ct}/2$. Para efeitos de modelação numérica da aderência é também necessário considerar uma rigidez no diagrama tensão-escorregamento, que, de acordo com Ferreira 2021, deverá ser tomado como $k_b=200\text{MPa/mm}$ (Figura 7b).

3.4 Elemento Finito de Aço/Betão/Aderência

Para simular o comportamento de um elemento de betão armado sujeito a acções cíclicas, Ferreira 2021 propõe a formulação do problema baseado num elemento finito de barra 1D que contém o aço (s), o betão (c) e a aderência (b), contendo 4 graus de liberdade locais, conforme se ilustra na Figura 8. Assumindo que o aço e o betão têm um módulo de elasticidade e área de E_s e A_s , E_c e A_c , respectivamente, e que a aderência é simulada com uma rigidez inicial k_b , a matriz de rigidez elementar resulta na Eq. (22) sendo $\varnothing$ o diâmetro do varão e L_{el} o comprimento do elemento finito el .

$$k_{el} = \begin{pmatrix} \frac{E_s A_s}{L_{el}} + k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & -\frac{E_s A_s}{L_{el}} & -k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & 0 \\ -\frac{E_s A_s}{L_{el}} & \frac{E_s A_s}{L_{el}} + k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & 0 & -k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} \\ -k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & 0 & \frac{E_c A_c}{L_{el}} + k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & -\frac{E_c A_c}{L_{el}} \\ 0 & -k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & -\frac{E_c A_c}{L_{el}} & \frac{E_c A_c}{L_{el}} + k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

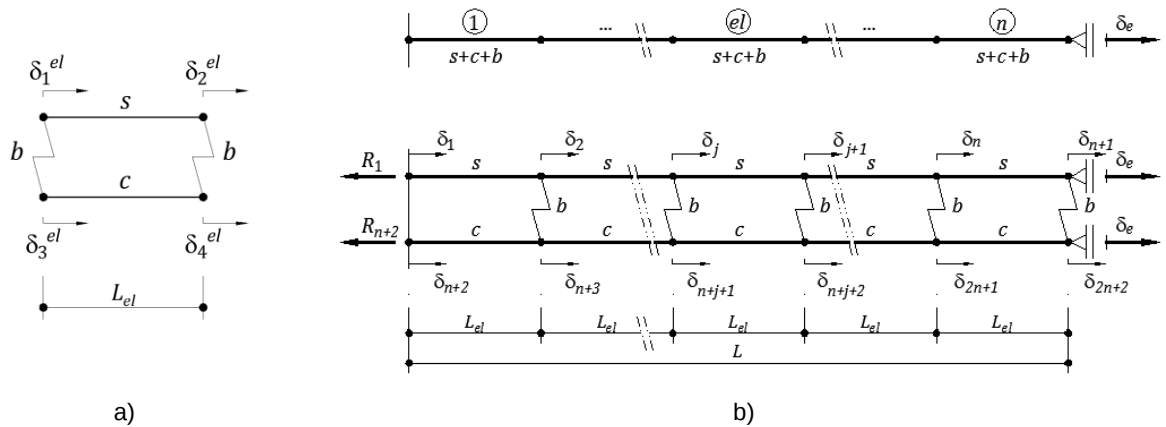


Figura 8. a) Elemento Finito de Aço/Betão/Aderência b) Elemento genérico com n elementos finitos de comprimento L_{el}

A matriz de rigidez global de um elemento genérico pode ser facilmente obtida relacionando os graus de liberdade locais com os graus de liberdade globais de um elemento finito, el , dividido em n elementos finitos de comprimento L_{el} sabendo que a incidência de cada grau de liberdade local é dada pelas Eqs. (23).

$$\delta_1^{el} = \delta_{el}, \delta_2^{el} = \delta_{el+1}, \delta_3^{el} = \delta_{n+1+el}, \delta_4^{el} = \delta_{n+2+el} \quad (23)$$

O sistema governativo é dado pela condensação da matriz de rigidez global K_g com uma matriz C que tem um valor unitário nos graus de liberdade restringidos e zero nos restantes. Os vectores δ e R correspondem aos deslocamentos dos nós e às reacções de apoio, respectivamente. Por fim, o vector δ_e refere-se aos deslocamentos impostos nos graus de liberdade correspondentes (ver Eq. (24)).

$$Kd = F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_g & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad (24)$$

3.5 Formulação do Problema

O sistema foi resolvido incrementalmente pelo método de Newton-Raphson modificado. Assim, a matriz de rigidez mantém-se constante durante o processo iterativo, reduzindo o esforço numérico do cálculo da matriz tangente, com o inconveniente de serem necessárias mais iterações para obter a convergência, mas com a vantagem de ser mais estável na passagem de patamares na curva da resposta. O processo incremental consiste na resolução do sistema apresentado nas Eq. (25) e (26), onde i representa as iterações para um determinado patamar de carga. O processo iterativo termina quando a norma do vector Δd é tão pequeno quanto se deseje ($\epsilon_\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ e $\epsilon_\sigma = 5 \times 10^{-3}$). Resolvendo o sistema de equações, são determinados os deslocamentos e reacções para a iteração $(i+1)$, calculando-se as correspondentes extensões no aço e no betão. Aplicando as relações constitutivas não lineares, determinam-se as tensões e as correspondentes forças no aço, betão e de aderência, o que permite montar o novo vector das forças interiores $F_{int}^{(i+1)}$ e retornar ao sistema de equações inicial, ver Eqs. (27) a (29).

$$K\Delta d^{(i+1)} = F_{ext} - F_{int}^{(i)} \quad (25)$$

$$d^{(i+1)} = d^{(i)} + \Delta d^{(i+1)} \rightarrow \epsilon_s^{(el)}, \epsilon_c^{(el)} \rightarrow \sigma_s^{(el)}, \sigma_c^{(el)}, \sigma_b^{(el)} \rightarrow N_s^{(el)}, N_c^{(el)}, F_b^{(el)} \rightarrow F_{int}^{(i+1)} \quad (26)$$

$$\epsilon_s^{(el)} = \frac{(\delta_{j+1} - \delta_j)}{L_j}, \epsilon_c^{(el)} = \frac{(\delta_{n+j+2} - \delta_{n+j+1})}{L_j}, s_1^{(el)} = \delta_{n+j+2} - \delta_{j+1}, s_2^{(el)} = \delta_{n+j+1} - \delta_j \quad (27)$$

$$\sigma_s^{(el)} = f(\epsilon_s^{(el)}), \sigma_c^{(el)} = f(\epsilon_c^{(el)}), \tau_{b1}^{(el)} = f(s_1^{(el)}), \tau_{b2}^{(el)} = f(s_2^{(el)}) \quad (28)$$

$$F_{int,s} = A_s \sigma_s^{(el)}, F_{int,c} = A_c \sigma_c^{(el)}, F_{int,b1} = \tau_{b1} \pi \phi L_j / 2, F_{int,b2} = \tau_{b2} \pi \phi L_j / 2 \quad (29)$$

A Figura 9 apresenta os resultados obtidos para a modelação numérica de um tirante de betão armado.

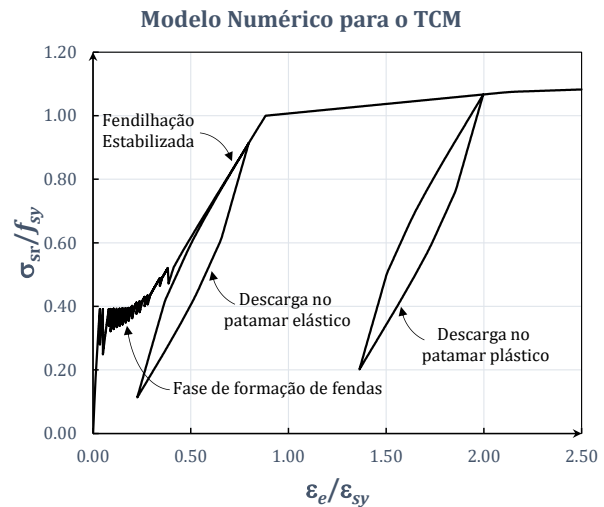


Figura 9. Aplicação do modelo numérico

4. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

4.1 Cargas Monotónicas

Os resultados numéricos foram comparados com ensaios experimentais de modo a validar a metodologia proposta. Foram, em particular, analisados os ensaios elaborados por Kenel and Marti 2002 e Kenel et al. 2005 de uma viga de betão armado com um troço em consola em cada extremidade e dois apoios intermédios, ambos com 1.2m de vão, sendo a carga aplicada nas extremidades da consola, conduzindo a uma situação de momento constante entre apoios e, consequentemente, a uma tracção constante na corda superior (Figura 10).

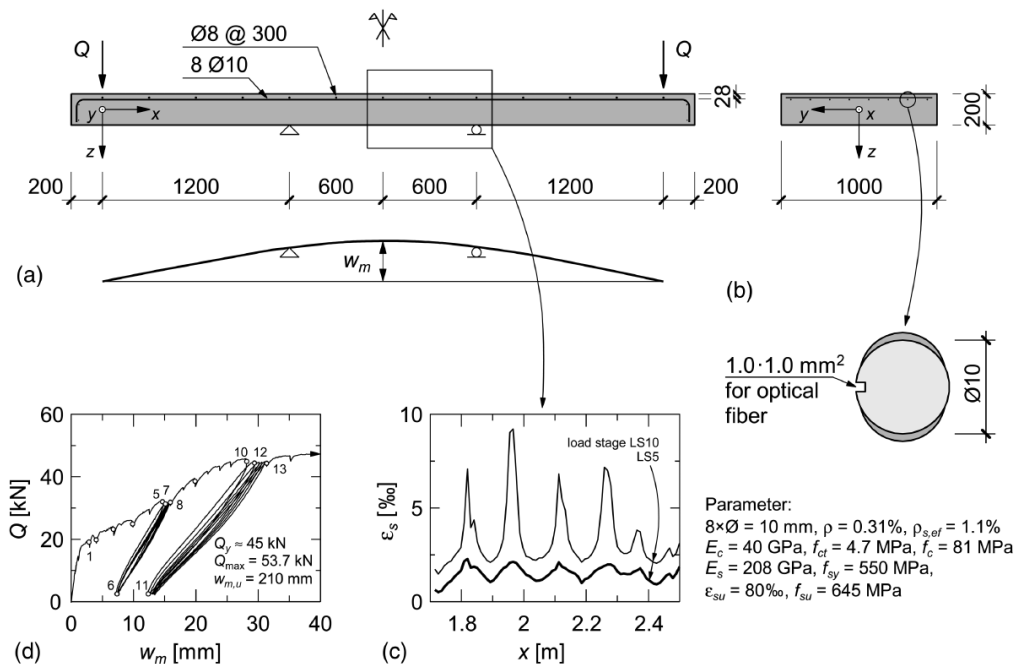


Figura 10. Ensaios realizados por Kenel and Marti 2002 e Kenel et al. 2005

Os resultados experimentais foram comparados com os obtidos numericamente em diversos patamares de carga, descarga e recarga (ver Figura 11): um primeiro ciclo a que corresponde um nível de carga de $Q=32\text{kN}$ (LS5), seguido de uma descarga para $Q=3\text{kN}$ (LS6) e uma posterior recarga $Q=32\text{kN}$ (LS7). No segundo ciclo, o início da descarga ocorre a $Q=44\text{kN}$ (LS10), próximo da carga de cedência $Q_y \approx 45\text{kN}$, até uma acção de $Q=3\text{kN}$ (LS11), retomando uma recarga até $Q=44\text{kN}$ (LS12) tendo-se obtido uma carga de rotura do provete a $Q_u=53.7\text{kN}$. Apenas são apresentados resultados experimentais de uma zona com 600mm de comprimento, com coordenadas de 1.8m a 2.4m, pelo que os resultados numéricos correspondem também a um troço de 600mm, embora tenha sido simulado numericamente o comprimento total do tirante com 1200mm. O tirante foi sub-dividido em 120 elementos finitos, tendo-se considerado as mesmas características mecânicas do aço e do betão que no ensaio que estão indicadas na Figura 10. Quanto à aderência considerou-se um valor de $\tau_{b0} = 2f_{ct}$ para o primeiro carregamento, que definiu o espaçamento entre fendas, seguindo-se um valor de $\tau_{bu} = f_{ct}$ para as descargas e recargas posteriores. Considerou-se uma variabilidade aleatória para a resistência à tracção do betão de 30%, i.e., $0.7f_{ct} \leq f_{ct} \leq 1.3f_{ct}$.

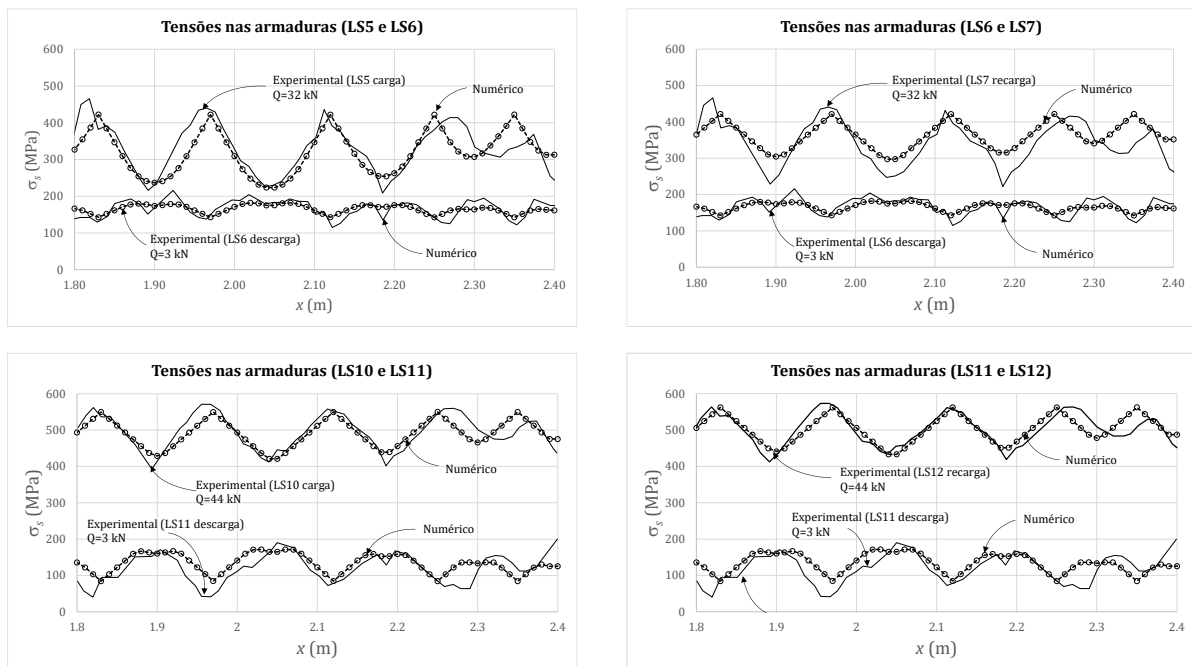


Figura 11. Comparação entre resultados experimentais e numéricos – várias situações de carga, descarga e recarga

Foram também comparados os resultados em termos globais de carga Q vs deslocamento w_m , obtidos experimentalmente Figura 10 d) com os numéricos (ver Figura 12). Conforme se pode observar, os resultados numéricos apresentam uma óptima concordância com os resultados experimentais, validando a metodologia proposta para simular um elemento de betão armado para acções monotónicas alternadas

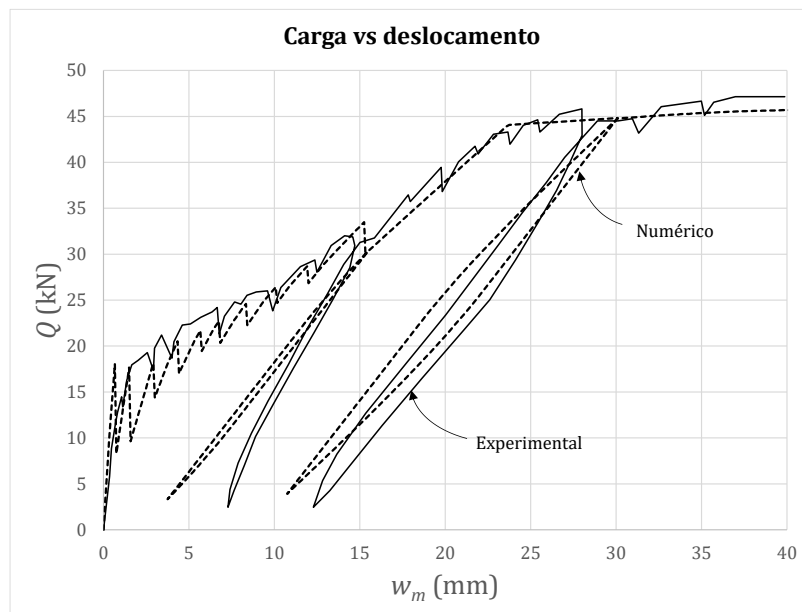


Figura 12. Comparação entre resultados experimentais e numéricos – carga vs deslocamento

Figura 14. Comparação entre resultados experimentais e numéricos para 2 ciclos distintos

5. CONCLUSÕES

No presente artigo apresentou-se uma metodologia que utiliza o conceito do *Tension Chord Model* (TCM) para simular o comportamento de elementos de betão armado sob acções alternadas e cíclicas. Inicialmente foram determinadas expressões analíticas para situações de carga e descarga, e, posteriormente, desenvolveu-se uma técnica numérica para generalizar o conceito para acções cíclicas. O processo numérico consistiu na subdivisão do elemento de betão armado em diversos subelementos finitos que simulam o aço, o betão e a aderência isoladamente. A metodologia proposta foi comparada com resultados experimentais para validação da técnica numérica proposta, tendo-se obtido resultados muito satisfatórios.

Esta ferramenta pode ser utilizada em todos os processos numéricos que pretendam incluir o comportamento não-linear cíclico do betão armado, quer sejam técnicas que utilizem macro-elementos (e.g. modelos de campos de tensões adaptativos propostos por Lourenço 2010 ou modelos de 3 campos proposto por Ferreira et al. 2022) ou que utilizem micro-elementos (e.g. o método dos elementos finitos não lineares proposto por Fernandez e Muttoni 2007, Mata-Falcon et al. 2018 e Ferreira 2021 ou modelos de elementos finitos baseados no teorema estático e análise limite proposto por Vestergaard et al. 2021).

Com esta formulação, cada componente apresenta um comportamento simples, com um significado físico claro. Esta abordagem apresenta enormes vantagens, pois a relação constitutiva passa a ser baseada em modelos físicos simples que, quando adequadamente associados, simulam eficazmente o comportamento global cíclico do material. Deste modo, considera-se que a utilização de modelos reológicos através da associação de componentes para simular o comportamento histerético dos materiais, com clara interpretação física dos parâmetros envolvidos, é um importante desenvolvimento para a compreensão do modelo físico. Este aspecto, em conjunto com a sua simplicidade, permite reduzir o erro e melhorar a interpretação dos resultados.

REFERÊNCIAS

- CEB Bull. 230 (1996): RC elements under cyclic loading. Comité Euro-International du Beton, Lausanne, April 1996
- Ferreira, M., Lourenço, M., Almeida, J., Providência, P. (2022): (3FME-SFM) Elemento Finito para Vigas de Betão Armado com Consideração do Respetivo Modelo de Campos de Tensões, Artigo submetido para JPÉE2022, Porto.
- Ferreira, M. (2021) – “Avaliação numérica de vigas de acoplamento sujeitas a acções cíclicas através de modelos de campos de tensões”, 2021, Tese de doutoramento, IST, Universidade de Lisboa.
- Kenel, A., and Marti, P. (2002). “Faseroptische Dehnungsmessungen an einbetonierten Bewehrungsstäben.” IBK-Rep. No. 271, ETH Zürich, Switzerland (in German).

- Kenel, A., Nellen, P., Frank, A., and Marti, P. (2005). "Reinforcing steel strains measured by Bragg grating sensors." *J. Mater. Civ. Eng.*, 10.1061/(ASCE)0899-1561(2005)17:4(423), 423–431.
- Koppitz R., Kenel A, Keller, T. (2014) : Tension Chord Model Modification for Uniaxial Unloading and Reloading in Elastic and Plastic States, *Journal of Structural Engineering*, 2014 140(10): 04014077
- Laurencet, P. _1999_. "Prestressing and minimal reinforcement for the control of the residual crack width." PhD. Thesis, IBAP, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland in French.
- Lourenço M. (2010): Modelos de Campos de Tensões Adaptativos, 2010, PhD Thesis, IST, Universidade Técnica de Lisboa.
- Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann W., Sigrist V. (1998): Tension Chord Model for Structural Concrete. *Structural Engineering International*, Science and Technology pp 287-298, April 1998
- Mata-Falcón, J., Tran, D.T., Kaufmann, W., Navrátil, J., (2018), Computer-aided stress field analysis of discontinuity concrete regions, *Proceedings of the Computational Modelling of Concrete and Concrete Structures Conference (EURO-C 2018)*, Bad Hofgastein, Austria, 26 February – 1 March 2018, pp. 641-650.
- Model Code 2010: fib 2013, Model Code for Concrete Structures 2010, Ernst & Sohn, Lausanne, Switzerland, 434 pp.
- Muttoni and Fernandez (2007): Concrete Cracking in Tension Members and Application to Deck Slabs of Bridges, *Journal of Bridge Engineering*, pp 646-653, ASCE September/October 2007.
- Vecchio, F. J., (1999) "Toward Cyclic Load Modeling of Reinforced Concrete", *ACI Structural Journal*, 96(2), 193-202
- Vestergaard D., Larsen K., Hoang L., Poulsen P., Feddersen B., 2021: Design-oriented elasto-plastic analysis of reinforced concrete structures with in-plane forces applying convex optimization. *Journal of the fib, Structural Concrete*, Vol. 22, December 2021, pp 3272-3287, Lausanne, Switzerland.