

Investigação
em Educação
Matemática
2013

Raciocínio Matemático



sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática

Investigação em Educação

Matemática

2013

Raciocínio Matemático

Editores:

António Domingos

Isabel Vale

Manuel Joaquim Saraiva

Margarida Rodrigues

Maria Cecília Costa

Rosa Antónia Tomás Ferreira



Investigação em Educação Matemática 2013

Raciocínio Matemático

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

Editora: Leonor Santos

Editores convidados: António Domingos, Manuel Joaquim Saraiva, Rosa Antónia Tomás Ferreira

ISSN: 2182-0023

Corpo de revisores

Alexandra Gomes, Alexandra Pinheiro, Ana Barbosa, Ana Boavida, Ana Paula Aires, Ana Paula Canavarro, Ana Santiago, Angelina Monroy, António Domingos, Carlos Ribeiro, Cecília Monteiro, Célia Mestre, Conceição Costa, Corália Pimenta, Ema Mamede, Fernando Santos, Guida Dias, Helena Campos, Helena Henriques, Hélia Oliveira, Hélia Pinto, Isabel Vale, Joana Brocardo, Joana Mata-Pereira, João Pedro da Ponte, José Manuel Matos, Leonor Santos, Lina Fonseca, Lurdes Serrazina, Magda Nunes Pereira, Manuel Joaquim Saraiva, Margarida Rodrigues, Maria Cecília Costa, Maria Helena Martinho, Maria Teresa Astudillo, Marisa Quaresma, Miguel Silva, Nélia Amado, Patrícia Sampaio, Ricardo Poças, Ricardo Portugal, Rosa Antónia Tomás Ferreira, Rosário Monteiro, Susana Carreira, Teresa Pimentel.

Edição: Rodrigo Figueiredo

Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do programa Operacional Factores de Competividade - COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do projecto «PEST-OE/CED/UI2861/2011»



ÍNDICE

Apresentação	vii
APRESENTAÇÃO	8
Evocando Paulo Abrantes	14
O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO - EVOCANDO PAULO ABRANTES	15
Plenárias	32
MATHEMATICAL REASONING: CONJECTURING AND PROVING IN A DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT	33
O CONTRIBUTO DA VISUALIZAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO FUNCIONAL	51
Grupos de discussão	81
RACIOCÍNIO EM GEOMETRIA	82
O RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE SOBRE A NOÇÃO DE QUADRADO	87
PROPRIEDADES E RELAÇÕES ENTRE QUADRILÁTEROS: UM ESTUDO NO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE	107
RACIOCINAR EM GEOMETRIA: O PAPEL DAS TAREFAS	129
O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO NO TÓPICO TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS	146
A ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA PERSPETIVA DA PROFESSORA RITA	170
ARGUMENTAÇÃO COLABORATIVA DE ALUNOS DO 5º ANO DE ESCOLARIDADE	185
RACIOCINAR COM PADRÕES FIGURATIVOS	205
O PENSAMENTO VISUAL-ESPACIAL E OS PRIMEIROS NÍVEIS DE VAN HIELE	223
O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM FICHAS DE AVALIAÇÃO PARTILHADAS	225

RACIOCÍNIO EM NÚMEROS E ÁLGEBRA	231
PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM ALUNOS DO 9.º ANO: GENERALIZAÇÃO EM NÚMEROS REAIS E INEQUAÇÕES .	235
UM PERCURSO NA GENERALIZAÇÃO MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 4.º ANO	254
REPRESENTAÇÕES E RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NOS NÚMEROS RACIONAIS	277
UM MODELO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE PARÂMETROS EM FUNÇÕES UM ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO SECUNDÁRIO	297
O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS PRIMEIROS ANOS DO ENSINO BÁSICO	318
O RACIOCÍNIO MULTIPLICATIVO EM CRIANÇAS DO PRÉ-ESCOLAR	342
PROMOVER O RACIOCÍNIO DOS ALUNOS: PLANIFICAR, CONDUZIR E REFLETIR SOBRE O TRABALHO NA SALA DE AULA	358
CONHECIMENTO MOBILIZADO POR FUTUROS PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS EM SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM RACIOCÍNIO MULTIPLICATIVO	375
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E CONHECIMENTO DO PROFESSOR – UMA ABORDAGEM A PARTIR DA ANÁLISE DE RESOLUÇÕES DE ALUNOS	378
RACIOCÍNIO E DEMONSTRAÇÃO	381
AS INTELIGÊNCIAS MÚLTIPLAS NA AULA DE MATEMÁTICA.....	386
EL MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN DIRECTO APLICADO A UNA SITUACIÓN EXTRAMATEMÁTICA	405
CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA ENSINAR: A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA COM FRAÇÕES.....	420

O PAPEL DAS FUNÇÕES DA DEMONSTRAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DOS ESQUEMAS DEMONSTRATIVOS DOS ALUNOS	438
ENTRE EUCLIDES E A ACTUALIDADE: UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	457
A COMPLEXIDADE DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E A QUALIDADE DAS APRENDIZAGENS: A BIFURCAÇÃO PROCEPTUAL	475
A COORDENAÇÃO DE RACIOCÍNIOS EM ATIVIDADES DE TRIGONOMETRIA com ALUNOS DO 11º ANO	495
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM ESQUEMAS DE DEMONSTRAÇÃO MATRICIAIS	519

Apresentação

APRESENTAÇÃO

Ao longo dos tempos, a reflexão sobre o pensamento matemático e os diferentes modos de raciocínio tem ocupado um lugar de destaque quer no desenvolvimento da matemática quer da investigação em educação matemática. Ao raciocínio matemático estão associadas diversas formas de pensamento importantes para todos aqueles que fazem Matemática, tais como: prever resultados, essenciais para a formulação de conjecturas; questionar soluções, mesmo as corretas; procurar padrões; recorrer a representações alternativas; analisar e sintetizar. O desenvolvimento do raciocínio matemático ocupa um papel de relevo nos currículos da generalidade dos países.

Nos programas de matemática portugueses, tanto do ensino básico como do ensino secundário, e como algum reflexo dos resultados da investigação em educação matemática, é dada especial atenção ao raciocínio matemático, como capacidade transversal a qualquer tema ou tópico matemático. O desenvolvimento desta capacidade transversal é visto como essencial ao sucesso dos alunos não só na escola mas também-na sua vida futura.

As experiências de aprendizagem que são proporcionadas aos alunos, e que influenciam fortemente o que eles aprendem e a qualidade dessas aprendizagens, dependem não só das orientações curriculares mas também da visão da matemática escolar que predomina na sala de aula. Se a matemática é encarada como um conjunto de regras, impostas externamente para serem aplicadas de forma mecânica e sem necessidade de compreensão, aprender matemática reduz-se a ouvir a explicação ou exposição do professor e a imitar os seus processos de resolução de tarefas semelhantes, enfatizando o saber fazer e não perceber o que se faz. Por outro lado, se a matemática é vista como uma construção dinâmica de conhecimento, onde é necessário atribuir significado a fórmulas, símbolos, procedimentos e processos usados na resolução de tarefas de natureza diversificada, estabelecendo uma rede de

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

conceitos interligados, então aprender matemática envolve um leque variado de métodos como a formulação de conjecturas, a observação de regularidades, a procura de generalizações, a explicação e justificação de ideias matemáticas. Para além do saber fazer enfatiza-se a compreensão do que se faz e os motivos por que se faz.

As tarefas que são propostas em sala de aula bem como os recursos (em particular os recursos tecnológicos e os materiais manipuláveis) que são disponibilizados para apoiar a sua implementação influenciam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. A par do papel que as tarefas desempenham devemos ter em conta o contributo do professor na condução de toda a atividade matemática dos alunos resultante do seu envolvimento nas tarefas. A valorização de raciocínios incompletos ou mesmo imprevistos devem ser vistos como trampolins para uma discussão matemática rica. A comparação e contraste entre diferentes estratégias de resolução de uma mesma tarefa, a explicação e justificação das ideias ou processos usados por terceiros, etc. são exemplos dos aspetos complexos que o professor deve equacionar de modo a promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Mas, afinal, o que é o raciocínio matemático? Usa-se o termo *raciocínio* partindo do princípio que existe um entendimento comum sobre o seu significado – utilizando-se, também, o termo *pensamento* com o mesmo sentido. Os vários textos incluídos neste número da *Investigação em Educação Matemática* são um exemplo claro da multiplicidade de abordagens possíveis ao tema, da diversidade de termos que estão associados ao raciocínio (raciocínio geométrico, raciocínio algébrico, raciocínio espacial, raciocínio visual, raciocínio indutivo, raciocínio abduutivo, raciocínio dedutivo, intuição, demonstração, argumentação, etc.). Urge, por que se acredita que tal é uma questão teórica que pode ter implicações para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, procurar um maior entendimento sobre o que é o raciocínio matemático e como é que ele pode ser desenvolvido nos alunos. Estes textos foram sujeitos a um processo de revisão por pares e referem-se

às comunicações e pôsteres apresentados no Encontro de Investigação em Educação Matemática – EIEM2013 – realizado nas Penhas da Saúde, Covilhã, nos dias 18 e 19 de maio de 2013, subordinado ao tema *Raciocínio matemático*.

Nesta publicação existem cinco secções. A primeira secção é uma evocação a Paulo Abrantes, por ocasião do décimo aniversário do seu desaparecimento, à sua pessoa e, sobretudo, ao seu trabalho vasto e marcante em educação matemática no nosso país e além fronteiras. Destacando algumas ideias centrais de Paulo Abrantes sobre o raciocínio matemático, o seu significado e importância no desenvolvimento curricular, Leonor Santos desafia os participantes no EIEM2013 a perspetivar o futuro olhando o presente, detendo-se, entre outros aspetos, nas ações do professor de matemática que podem promover o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, no desenvolvimento de uma aprendizagem matemática com compreensão, e no lugar e papel do raciocínio matemático num currículo centrado na preparação de um cidadão responsável, crítico e participante.

Na segunda secção são apresentadas as conferências plenárias do Encontro. Maria Alessandra Mariotti, da Universidade de Siena, Itália, no artigo intitulado *Mathematical reasoning: Conjecturing and proving in a Dynamical Geometry Environment*, debruça-se sobre a complexidade do funcionamento dos ambientes de geometria dinâmica com o intuito de discutir as potencialidades didáticas das várias ferramentas que lhes estão associadas. À luz da Teoria de Mediação Semiótica, descreve como os significados emergem em diferentes processos exploratórios (modalidades de arrastamento com respeito à noção de conjectura geométrica) e como se relacionam com as premissas, as conclusões e as ligações condicionais entre estas. O segundo artigo é da autoria de Ana Barbosa, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, e tem como título *O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional*. Tendo como objetivo global a compreensão do modo como alunos do 6.º ano de escolaridade resolvem problemas envolvendo a generalização de padrões, em contextos visuais, a

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

autora foca-se nas estratégias de generalização privilegiadas por quatro alunos, no papel que a visualização tem no raciocínio funcional que evidenciam. Além disso, discute como alguns fatores poderão influenciar as opções dos alunos em termos de estratégias de generalização. As tarefas que envolvem a exploração de padrões em contextos visuais surgem como facilitadoras do aparecimento de estratégias de generalização variadas mas a compreensão, pelos alunos, das potencialidades e limitações de cada estratégia mostra-se essencial para o desenvolvimento de um raciocínio (funcional) mais flexível.

Cada uma das três secções seguintes é dedicada ao conjunto de comunicações que constitui cada grupo de discussão do EIEM2013. Estes grupos não foram constituídos à priori mas surgiram após a submissão de trabalhos para o EIEM2013 agregando os textos conforme as temáticas gerais que estes abordam. As comunicações do grupo de discussão 1 reúnem-se em torno da temática do *Raciocínio em Geometria*. Discutem-se tipos de raciocínio (indutivo, abdutivo e dedutivo) ancorados em situações de ensino-aprendizagem de tópicos de Geometria ou em contextos visuais, ao longo de todos os ciclos de escolaridade. Ao papel das tarefas de aprendizagem no desenvolvimento de processos variados de raciocínio (relacionados com a intuição, formulação e teste de conjecturas, explicação, justificação, prova) é dada especial atenção, bem como às características, potencialidades e limitações, dos ambientes de geometria dinâmica que contribuem para esse desenvolvimento.

No segundo grupo de discussão, dedicado ao tema *Raciocínio em Números e Álgebra*, é feita uma reflexão sobre aspetos teóricos, de aprendizagem e do ensino, focando a prática profissional do professor de Matemática e o desenvolvimento curricular. As experiências de ensino e aprendizagem referidas englobam alunos desde o pré-escolar ao ensino secundário e, ainda, alunos futuros professores de Matemática. São levantadas questões quanto às inteligências múltiplas postas em movimento na sala de aula e sobre o significado dos termos *raciocínio matemático* e *pensamento matemático*. Ao processo de generalização é dada bastante ênfase, bem como à sua relação

com as representações e os processos de significação. Discute-se também o processo de abstração e a sua relação com a generalização matemática, problematizando-se a passagem da aprendizagem da Aritmética para a Álgebra. A ligação entre comunicação e raciocínio é questionada, refletindo-se, ainda, sobre a coordenação do conceito de fração com o raciocínio multiplicativo, bem como o desenvolvimento do raciocínio do professor de Matemática a partir da discussão, interpretação e atribuição de significado a produções de alunos.

Finalmente, a quarta secção desta publicação é dedicada aos trabalhos recebidos que abordam a temática do *Raciocínio e Demonstração*, correspondendo ao grupo de discussão 3, que se organiza em torno da demonstração, do pensamento matemático avançado e do conhecimento matemático. Ao nível da demonstração são discutidas diversas dimensões que englobam problemas em contexto histórico, as diferentes funções da demonstração e a compreensão do método de demonstração direto. A aprendizagem dos conceitos matemáticos e a qualidade dessas mesmas aprendizagens são discutidas à luz das teorias do pensamento matemático avançado, procurando-se evidenciar os raciocínios dos alunos que lhe estão inerentes. O recurso a taxonomias revela-se uma ferramenta útil para categorizar os diferentes raciocínios e aferir a qualidade das aprendizagens. O conhecimento matemático é abordado a partir do paradigma das inteligências múltiplas e do conhecimento matemático que o professor mobiliza para desenvolver os processos de raciocínio dos alunos.

Para este número da *Investigação em Educação Matemática*, dedicado ao tema *Raciocínio matemático*, contribuíram muitos autores, a quem se agradece a colaboração prestada, o importante papel na discussão do tema e no avanço trazido ao conhecimento e investigação acumulados em Educação Matemática. Dos trabalhos discutidos, e aqui reunidos, emergem implicações várias para o ensino e a aprendizagem da matemática, bem como para a formação de professores e para o desenvolvimento curricular. Juntamente com essas implicações,

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

novas questões se levantam (e outras persistirão), abrindo caminho para investigações futuras.

António Domingos

Manuel Joaquim Saraiva

Rosa Antónia Tomás Ferreira

ENTRE EUCLIDES E A ACTUALIDADE: UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Ana Elisa Esteves Santiago

UIED – FCT Universidade Nova de Lisboa

elisa_santiago@hotmail.com

Maria Teresa González Astudillo

Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca

maite@usal.es

RESUMO

Os problemas de otimização são um tema importante tanto na matemática como no ensino da matemática.

Nesta comunicação apresentamos parte de uma investigação histórica acerca dos problemas de otimização em que começámos por analisar algumas obras históricas, passando depois aos programas oficiais portugueses e, por fim, alguns manuais escolares portugueses. Essa investigação teve como objetivo identificar as obras, programas e manuais que abordavam os problemas de otimização bem como caracterizar esses problemas e respetivas demonstrações ou resoluções.

A primeira referência que encontramos nos livros históricos foi na obra *Elementos* de Euclides no século IV. a. C., ou seja, antes de se usar a derivada. Assim, nesta comunicação iremos apresentar um problema de otimização presente na obra de Euclides e um problema idêntico, um caso particular, que atualmente se encontra nos manuais escolares do ensino secundário que, tal como na obra de Euclides, é resolvido sem o recurso à derivada. Vamos analisar cada um deles e verificar o tipo de raciocínio utilizado na sua demonstração ou resolução.

Palavras chave: Raciocínio dedutivo, raciocínio heurístico, problemas de otimização, manuais escolares, história do ensino da matemática.

Introdução

Desde que os problemas de otimização surgiram nos manuais escolares portugueses, estes são resolvidos, maioritariamente, através do cálculo da derivada de uma função. Mas, que tipo de problemas e como se resolviam antes de surgir a derivada? Será que a introdução do uso da calculadora gráfica no Ensino Secundário acarretou alguma alteração? Os manuais escolares atuais contemplam problemas de otimização idênticos aos das obras históricas? Existe alguma relação entre os raciocínios utilizados na resolução?

Tendo como base estas questões, elaborámos um estudo histórico acerca dos problemas de otimização. Verificámos quando surgiram na História da Matemática, quais os matemáticos que os estudaram e a forma como estes os resolviam antes e depois de surgir o conceito de derivada. Verificámos ainda quando foram inseridos nos programas oficiais e nos manuais escolares portugueses, que tipo de problemas eram apresentados e como se realizava a sua resolução.

Ao longo deste texto, entenda-se *problema de otimização* como um problema em que se pretende determinar a solução ótima. Apesar de haver muitos métodos para resolver estes problemas, vamos restringir-nos aqueles em que intervém duas variáveis relacionadas mediante uma conexão a partir da qual se obtém uma função de uma só variável, definida num intervalo do conjunto dos números reais.

Nesta comunicação iremos apresentar parte desta investigação. Analisaremos um problema de otimização de uma obra histórica, os *Elementos*, de Euclides, datada do século IV a.C., bem como a sua demonstração. Por fim analisamos um problema de otimização idêntico, de um manual escolar recente, *Infinito 10*, de Jorge e outros, datado de 1997, bem como a sua resolução, ambas sem recorrer ao cálculo da derivada. Para melhor compreender o contexto em que surgem os problemas de otimização nos manuais escolares, sem recurso à derivada, iremos fazer ainda uma breve análise do programa oficial.

Será possível identificar algumas semelhanças entre as duas formas de resolução? Utilizam o mesmo raciocínio?

Metodologia de Investigação

Tendo em consideração que esta investigação tem um carácter histórico e didático procuramos nas obras de Bisquera (1989), Berrio (1997), e Schubring (1987, 1989) a fundamentação para a metodologia de investigação histórica a utilizar.

Foram ainda importantes a obra de González (2002) que apresenta uma caracterização das representações dos pontos críticos presentes nos manuais escolares espanhóis e em livros

históricos e a obra de Sierra (2003) acerca da evolução do ensino da Análise Matemática e da Álgebra.

O livro de Boyer (1993), *História da Matemática*, foi um importante ponto de partida uma vez que aí pudemos encontrar informação acerca de quando surgiram os problemas de otimização, bem como referência aos matemáticos que os estudaram. De igual modo foi possível encontrar dados importantes não só acerca da evolução o Cálculo Diferencial como importantes referências bibliográficas que nos permitiram ir ao encontro dos clássicos da Matemática que abordam o tema.

Para complementar essa informação foram também fundamentais as obras de Struik (1989), Edwards (1979) e Boyer (1959), acerca da história da Matemática ou história do Cálculo.

Com base na informação que conseguimos recolher nos livros acima referidos, elaborámos um índice cronológico de autores que considerámos estarem relacionados com o estudo de problemas de otimização. A partir do índice cronológico, levamos a efeito uma pesquisa com o objectivo de identificar as obras existentes de cada um dos autores ou acerca dos mesmos. Após um primeiro exame a cada uma das obras, seleccionámos para análise detalhada dos problemas de otimização encontrados, uma ou duas dos respectivos autores de cada época. Passamos então à análise dos problemas de otimização presentes em cada uma das obras bem como das respectivas demonstrações/resoluções.

Passámos depois ao estudo dos programas oficiais. De entre as obras de que nos servimos para contextualizar a evolução dos sistemas educativos destacamos a *História do Ensino em Portugal* de Rómulo de Carvalho (Carvalho, 2001) e a obra *O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX)* de Maria Cândida Proença (Proença, 1998). Outra fonte, fundamental foi a legislação e programas publicados.

Para a análise didáctica tivemos por base as quatro fases de resolução de problemas propostas por George Polya (1995).

Um problema de otimização da obra de Euclides

A primeira obra histórica onde identificámos problemas de otimização foi na obra *Elementos*, de Euclides, datada do século IV a.C., ou seja, significativamente anterior ao cálculo diferencial.

Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) foi um dos primeiros géometras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos.

Existem poucas informações sobre a sua vida. Foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a. C. - 283 a. C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu".

Embora se tenham perdido mais de metade dos seus livros, ainda restaram, para felicidade dos séculos vindouros, os treze famosos livros que constituem os *Elementos*. Publicados por volta de 300 a. C., aí está contemplada a aritmética, a geometria e a álgebra (Boyer, 1993).

O trabalho de Euclides é muito vasto. Os seus trabalhos foram inicialmente traduzidos para árabe, depois para latim, e a partir destes dois idiomas para outras línguas europeias.

Embora alguns conceitos já fossem conhecidos anteriormente à sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho genial. Ao recolher tudo o que então se conhecia, sistematiza os dados da intuição e substitui imagens concretas por noções abstractas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo (Boyer, 1993).

O texto dos *Elementos*, de Euclides, está dividido em treze capítulos, chamados *Livros*. Em cada livro estão presentes pontos diferentes: definições, proposições, porismas, lemas, postulados e noções comuns (Heath, 1956). Os livros distinguem-se entre si pelo conteúdo. Assim, o livro primeiro, segundo, terceiro, quarto e sexto estudam a Geometria no Plano, o quinto está dedicado à teoria da proporção, o sétimo, oitavo e nono tratam da teoria de números, o décimo fala sobre os irracionais e o décimo primeiro, décimo segundo e décimo terceiro falam sobre a Geometria no Espaço (Heath, 1956).

É exatamente nos livros acerca de Geometria no Plano que vamos encontrar proposições que podem ser interpretadas como problemas de otimização.

As quatro primeiras surgem no livro III: proposição 7, proposição 8, proposição 15 e proposição 16 e estão relacionadas com o círculo. A quinta surge posteriormente no livro VI: proposição 27 relacionada com as proporções de figuras planas. As proposições de Euclides são de dois tipos: Ou são construções (dividir uma recta, construir um quadrado) ou são teoremas enunciados em forma condicional como é o caso das proposições relacionadas com problemas de otimização (Santiago, 2008). As demonstrações são feitas com base num raciocínio dedutivo.

Apresentamos a seguir o último problema de otimização que encontramos na obra de Euclides bem como a sua resolução.

Livro VI – Proposição 27 (enunciado = prótasis)

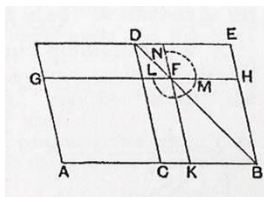
De todos os paralelogramos aplicados a uma mesma recta e com os defeitos¹⁵ de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita recta, e semelhantemente postas, o máximo é aquele que é aplicado à metade da mesma recta, e é semelhante à figura paralelograma que falta (Heath, 1956, Vol. II, p. 257).

Vejam os como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja AB uma recta bissectada por C. Apliquemos à recta AB o paralelogramo AD com o defeito da figura paralelogramo DB descrita sobre a metade de AB, seja ela CB;



¹⁵ O método de construção do paralelogramo cuja área seja equivalente à de uma recta com uma longitude dada, diz-se que se faz por justaposição (parabole ton chorion) diz-se que é por excesso (hipérbole) se a área é maior que a longitude da linha e por defeito (elleipsis) caso contrário. Estas denominações transportaram-se posteriormente às cônicas. Esta proposição, juntamente com a 28 e a 29 foi considerada como o equivalente geométrico da forma algébrica mais generalizada de equações quadráticas quando tem uma raiz real positiva. Constitui o fundamento do livro X e do estudo realizado por Apolônio das cônicas.

Determinação (diorismós)

Eu disse que, de todos os paralelogramos aplicados em AB e com os defeitos de figuras paralelogramas semelhantes e de forma semelhante situada em BD, AD é o maior.

Construção (kataskeue)

Apliquemos à recta AB o paralelogramo AF com a falta da figura paralelograma FB semelhante e situada de forma semelhante a DB;

Determinação (diorismós)

Eu disse que o paralelogramo AD era maior do que o paralelogramo AF.

Demonstração (apódeixis)

Seja primeiramente a base AK do paralelogramo AF maior do que a recta AC. Como o paralelogramo DB é semelhante ao paralelogramo FB, então eles têm a mesma diagonal. [VI.26]

Tracemos essa diagonal DB, produzindo a recta KF até ao ponto L. Como o paralelogramo CF é igual a FE, e FB é comum, então a totalidade de CH é igual à totalidade de KE. [I.43]

Mas CH é igual a CG, pois AC também é igual a CB. [I.36]

Então GC também é igual a EK.

Juntamos-lhe o paralelogramo CF;

Então o paralelogramo AF é igual ao gnômon LMN, e por isso o paralelogramo CE, isto é, o paralelogramo AD será maior do que o paralelogramo AF.

Em segundo lugar seja a base AK do paralelogramo AF menor do que a recta AC. Suposta a mesma construção, como os paralelogramos DH, DG são iguais, pois HM é igual a MG, então DH é maior do que LG.

Mas DH é igual a DK.

Logo DK é maior do que LG.

Conclusão (sympérasma)

Por isso juntando a uma e outra parte o mesmo paralelogramo AL, o paralelogramo DB, ou seja AD, é maior do que o paralelogramo AF. (Heath, 1956, Vol. II, p. 257).

Nesta demonstração são utilizados os seguintes resultados:

- Os paralelogramos que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais [I.36];
- Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si [I.43];
- Se de um paralelogramo for tirado outro paralelogramo semelhante ao total, e semelhantemente posto, e que tenha um ângulo comum ao mesmo total, o paralelogramo que for tirado, existirá ao redor da diagonal do paralelogramo total [VI.26].

Posteriormente esta proposição é utilizada para demonstrar o resultado seguinte:

Aplicar a uma linha recta dada um paralelogramo igual a um rectilíneo dado, e com o defeito de uma figura paralelograma semelhante à outra dada. Mas o

Raciocínio Matemático

rectilíneo dado, ao qual se quer que seja igual ao paralelogramo que se pede, não deve ser maior que o paralelogramo, que se aplica à metade da recta dada, sendo semelhantes entre si os defeitos, tanto do paralelogramo que se pede com o defeito da figura paralelograma semelhante à outra dada [VI. 28].

O primeiro aspeto que salta à vista é o facto de, tanto o enunciado como a demonstração apresentarem um texto extenso, não se utilizando qualquer símbolo que simplifique a escrita, tornado assim o problema de mais complexa compreensão. Por outro lado, a explicação dada ao longo da resolução também é muito mais minuciosa do que o que se apresenta atualmente, uma vez que a escrita matemática sofreu uma vasta alteração desde o tempo de Euclides até à aos nossos dias.

Relativamente às expressões utilizadas, Euclides designa por reta os segmentos de reta. O paralelogramo é designado apenas por dois vértices de uma diagonal e não pelos quatro vértices que o constituem, como se indica atualmente.

A demonstração é feita por comparação entre áreas de paralelogramos e fundamentando com base em proposições apresentadas e demonstradas anteriormente, utilizando um raciocínio dedutivo. É possível fragmentá-la em seis partes: O primeiro parágrafo, denominado *exposição* refere-se ao caso particular do desenho sobre o qual se vai fazer a demonstração, contrariamente ao enunciado que é completamente geral; o parágrafo a seguir, designado por *determinação* indica qual é o objetivo que se pretende alcançar em função da figura que se apresenta como exemplo para traçar a demonstração. Costuma-se iniciar com as palavras “digo que...”; depois completa-se a figura com os elementos necessários para desenvolver a demonstração, a esta parte denominamos *construção*; Surge no parágrafo seguinte, novamente, a determinação: depois, na parte mais extensa é apresentada a *demonstração*. Apesar de no raciocínio se fazer referência a uma figura, as proposições em que se baseia são gerais pelo que a validade do raciocínio é também geral; a demonstração termina apresentando a *conclusão*.

Esta proposição é, sem dúvida, muito importante pelo fato de ser geometricamente equivalente à solução algébrica da maioria das equações quadráticas com uma solução real e positiva.

Este problema, particularizado ao caso do retângulo, surge na maioria dos manuais escolares que abordam os problemas de otimização.

Os problemas de otimização nos programas oficiais portugueses

Após o estudo dos problemas de otimização nos livros históricos, passamos à análise dos programas oficiais de matemática. Com base na informação encontrada na obra de Carvalho (2001) e na obra de Aires (2006), localizamos os programas oficiais portugueses publicados desde o início do século XX até à atualidade. De seguida identificámos os que referiam o estudo de problemas de máximos e mínimos ou, mais concretamente, problemas de otimização.

A primeira referência que encontrámos foi no programa oficial datado de 1954 (Decreto nº 39807 do Diário de Governo nº 198 de 7 de Setembro de 1954) em que se refere o “*estudo das aplicações das derivadas*”, no 6º ano do ensino liceal, no capítulo dedicado à Álgebra. Nos programas posteriores também se contempla o estudo dos problemas de máximos e mínimos, seguido ao estudo das derivadas, ou seja, como uma aplicação destas.

No entanto, só depois da publicação da *Lei de Bases do Sistema Educativo*, a 14 de outubro de 1986 se refere, explicitamente, o estudo dos problemas de otimização. Com a Lei de Bases do Sistema Educativo os problemas de otimização deixaram de fazer parte de um único ano letivo, uma vez que o conceito de derivada passou a ser abordado no 11º e no 12º ano. Mais ainda, tendo em conta que no 10º ano se estudam vários tipos de funções, em particular a função quadrática, também neste ano surgem problemas de otimização. Assim, a partir da publicação da *Lei de Bases do Sistema Educativo*, os problemas de otimização passam a estar incluídos em todos os anos do Ensino Secundário, antes e depois de se abordar o conceito de derivada.

Todos os programas das reformas que se seguiram contemplam, nos três anos do ensino secundário, o estudo dos problemas de otimização. No 10º ano sem recurso à derivada e no 11º e 12º ano como aplicação desta.

A abordagem dos problemas de otimização num manual escolar português

Feita a análise dos programas oficiais, passamos à recolha e análise dos manuais escolares publicados para cada uma das reformas tendo localizado os primeiros problemas de otimização no manual, publicado em 1958, da autoria de Sebastião e Silva e de Silva Paulo para o 6º e 7º ano do ensino liceal.

Apesar de a Lei de Bases do Sistema Educativo, publicada a 14 de outubro de 1986, ser a reforma que traz mais alterações, relativamente aos problemas de otimização, tais alterações não são significativas nos manuais escolares analisados. Mesmo existindo já problemas de otimização nos manuais escolares do 10º ano, estes não apresentam qualquer tipo de resolução. Em contrapartida, o reajustamento de 1997 marca a diferença no tratamento dos problemas de otimização, quer no que diz respeito à quantidade, quer no que diz respeito à diversidade de problemas e resoluções. É precisamente esta reforma que introduz a utilização da calculadora gráfica no ensino secundário.

Este reajustamento apresenta como um dos temas transversais o raciocínio matemático. Silva (2001) refere que *“No ensino secundário, o estudante deverá ser solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas”* (p. 11).

No tópico relativo ao estudo de funções refere que:

Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar, por exemplo quando for conveniente decompor um polinómio em factores. O estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado. A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica (Silva, 2001, p. 28).

Também o NCTM (2007), refere que o raciocínio matemático deve ser desenvolvido dando oportunidades aos alunos de explorar, investigar, representar, conjecturar, explicar e justificar matematicamente. Os alunos desenvolvem o seu raciocínio matemático, em particular o raciocínio indutivo e dedutivo, através dos processos de identificação de regularidades, formulação e verificação de conjecturas, generalização, justificação de propriedades, elaboração de cadeias de raciocínio e argumentação em defesa de um processo de resolução e demonstração. O raciocínio e a demonstração permitem aos alunos organizar as suas observações e proceder a abstrações, tendo muitas vezes como ponto de partida um raciocínio informal.

Em relação ao problema que estamos a analisar verificamos que, antes da Lei de Bases do Sistema Educativo, este já surge nos manuais escolares, mas resolvido recorrendo ao cálculo da derivada da função, ou seja, como uma aplicação da derivada ao cálculo de máximos e mínimos de uma função. A partir daí surge também como problema concreto no estudo das funções quadráticas. Só na reformulação de 1997 encontramos, pela primeira vez, a resolução deste problema, num manual escolar do 10º ano, feita de formas diferentes: geometricamente, algebricamente e complementado com a calculadora gráfica.

Desta forma, a introdução do uso da calculadora gráfica na sala de aula foi um ponto importante para a evolução no estudo e na abordagem feita aos problemas de otimização abordados no Ensino Secundário em Portugal, influenciando assim a forma de raciocínio utilizada pelos alunos.

Vejamus um problema de otimização, baseado no problema de Euclides, que encontrámos num manual escolar recente, relativo à reformulação de 1997. Optámos por um manual do 10º ano, *Infinito 10*, da autoria de Jorge e outros pois é nestes que encontrámos a resolução de problemas de otimização sem que se faça uso da derivada. Vamos analisar o enunciado e a sua resolução.

Raciocínio Matemático

Este manual está dividido em dois volumes. O primeiro dedicado à Geometria no Plano e no Espaço e o segundo trata das Funções e Gráficos e da Estatística.

Os problemas de otimização estão no capítulo dedicado às funções e gráficos. Este capítulo contempla o estudo dos seguintes pontos:

Noção de função; gráfico e representação gráfica de uma função

Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos

Função afim. Resolução de problemas

Funções definidas por ramos. Aplicações

Função quadrática. Resolução de problemas

Funções polinomiais. Polinómios numa variável

Operações com funções. Função soma, função diferença e função produto.

Zeros de uma função polinomial.

Pela análise dos temas abordados pelo manual, nota-se uma preocupação em apresentar para cada tipo de função, problemas concretos e aplicações.

Os problemas de otimização surgem na parte dedicada às funções quadráticas e na parte dedicada às funções polinomiais, detetámos aqui 10 problemas de otimização. O primeiro problema de otimização presente neste manual é, curiosamente, intitulado de “O problema de Euclides”. Observemos o enunciado e a resolução apresentada.

O enunciado do problema é apresentado de uma forma genérica, sem referência ao valor do perímetro da figura. No entanto é sugerido ao aluno que explore o problema por via geométrica, algébrica ou recorrendo á calculadora gráfica, particularizando a rectângulos de perímetro igual a 40 cm.

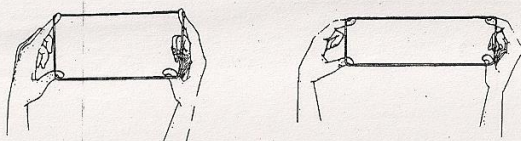
ATIVIDADE 9

Problema de Euclides –
Um velho problema de
otimização

Entre os problemas para os quais se procura uma solução considerada *ótima* destaca-se, pela sua simplicidade e riqueza, aquele que será, porventura, o mais antigo problema de otimização conhecido e se encontra tratado na obra de Euclides:

“De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima?”

Explore o problema considerando, por exemplo, os rectângulos de perímetro igual a 40 cm e tenha em conta que a solução pode ser encontrada por via geométrica, por via algébrica ou recorrendo à calculadora gráfica.



fio tem comprimento fixo.

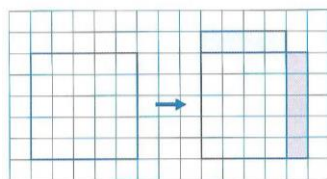
Figura 1 – Enunciado (Jorge e outros, 1997, vol. 2, p. 232)

Na página seguinte do manual surgem as diferentes abordagens. Vejamos

I. Geometricamente

A observação de diversos rectângulos, todos eles com o mesmo perímetro, sugere-nos que o quadrado é o que tem a maior área.

A demonstração geométrica é muito simples e sugestiva:



Partindo de um quadrado, constrói-se um rectângulo, que tem uma dimensão um pouco maior e a outra, outro tanto menor do que o lado do quadrado.

A barra roxa é maior que a barra azul, logo a área do quadrado inicial é maior do que a do rectângulo.

Figura 2 – Resolução geométrica (Jorge e outros, 1997, vol. 2, p. 233)

Este problema é semelhante ao problema do paralelogramo, que identificámos na obra *Elementos* de Euclides, particularizado a um retângulo. Apresenta, obviamente, um enunciado muito mais simples que o de Euclides e possui uma resolução interessante, visto ser feita de formas diferentes: geometricamente, algebricamente e complementada com a calculadora gráfica, permitindo aos alunos visualizar a diferença entre a área e o perímetro.

Raciocínio Matemático

É utilizado um raciocínio heurístico, uma vez que “não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, tendo como objectivo descobrir a solução do problema que se apresenta” (Polya, 1995).

A primeira resolução é feita com base num raciocínio geométrico. Utiliza papel quadriculado e, partindo de um quadrado de perímetro 20, são construídos rectângulos com o mesmo perímetro, verificando-se que a área destes é inferior à área do quadrado. O papel quadriculado tem aqui também um papel importante pois basta contar as quadrículas para ver qual a figura com maior área.

Na segunda resolução utiliza-se um raciocínio algébrico, parte-se de um quadrado de lado 10 e calcula-se a área de sucessivos rectângulos, com o mesmo perímetro, alterando o comprimento e a largura, verificando-se que estes têm uma área inferior á área do quadrado de lado 10.

Por fim, na resolução através da calculadora gráfica, consideram-se todos os retângulos cuja soma da medida do comprimento com a da largura é de 20 unidades. Considera-se que um dos lados mede x e, conseqüentemente, o outro mede $20 - x$; de seguida traça-se o gráfico da função que nos dá a área destes retângulos ($y = x(20 - x)$). Verifica-se então, graficamente, que a área máxima é do retângulo cujo comprimento e a largura coincidem.

Assim, este problema promove a verificação, por parte do aluno, de que é possível utilizar mais do que um tipo de raciocínio na resolução de problemas e salienta a importância do recuso à calculadora gráfica para confirmação das conclusões já apresentadas.

II. Algebricamente

Se considerarmos um quadrado com 10 cm de lado e diminuirmos sucessivamente uma unidade a um dos lados acrescentando-a ao outro, obtemos áreas progressivamente menores:

$$10 \times 10 = 100$$

$$11 \times 9 = 99 \dots\dots\dots (10 + 1)(10 - 1) = 99$$

$$12 \times 8 = 96 \dots\dots\dots (10 + 2)(10 - 2) = 96$$

$$13 \times 7 = 91 \dots\dots\dots (10 + 3)(10 - 3) = 91$$

$$14 \times 6 = 84 \dots\dots\dots (10 + 4)(10 - 4) = 84$$

$$15 \times 5 = 75 \dots\dots\dots (10 + 5)(10 - 5) = 75$$

Constata-se que " $10 + *$ " vezes " $10 - *$ " é menor que 10×10 e que, quanto maior for $*$, menor é o valor do produto.

O enunciado algébrico correspondente ao resultado estabelecido geometricamente por Euclides é, então, o seguinte:

Se $p + q$ for constante, então $p \times q$ é máximo quando $p = q$.

Todos os rectângulos acima considerados têm o mesmo perímetro (40 cm); o de maior área é precisamente o quadrado com 10 cm de lado.

Figura 3 – Resolução algébrica (Jorge e outros, 1997, vol. 2, p. 233)

Raciocínio Matemático

III. Recorrendo à calculadora gráfica

Consideremos ainda a família dos rectângulos cujo comprimento e largura somam 20 unidades.

Se considerarmos que a largura vale x , então o comprimento é igual a $20 - x$.

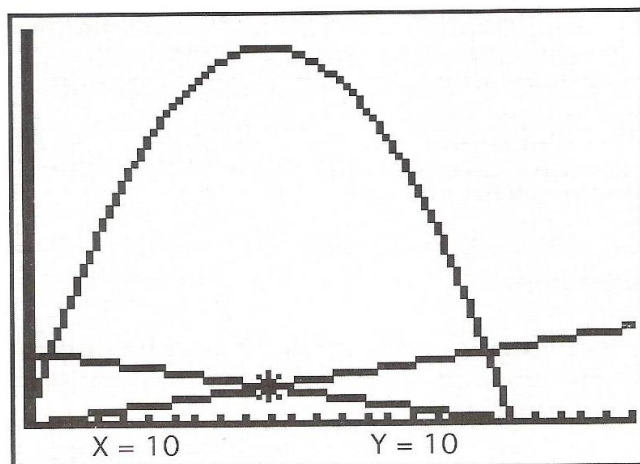
Introduzindo na calculadora as funções

$$y_1 = x$$

$$y_2 = 20 - x$$

$$y_3 = y_1 \times y_2$$

obtemos, depois de definir adequadamente o rectângulo de visualização os seguintes gráficos:



A linha curva – uma **parábola** – corresponde à representação gráfica da função definida por $y = x(20 - x)$ ou seja, a função que representa a área do rectângulo de largura x e comprimento $20 - x$.

A leitura das coordenadas do **vértice** da parábola – ponto correspondente ao valor máximo da função – conduz-nos a:

$x = 10$ e $y = 100$ (este último é o valor da área máxima).

Fig. 4 – Resolução recorrendo à calculadora gráfica (Jorge e outros, 1997, vol. 2, p. 234)

Conclusão

Observamos que a demonstração apresentada por Euclides é uma demonstração geométrica feita por construção, comparando áreas de figuras com o mesmo perímetro, verificando por fim qual a solução ótima, utilizando para tal um raciocínio dedutivo. Em contrapartida, a resolução apresentada no manual escolar não é feita de forma única, levando a que o aluno perceba que não há apenas um caminho na resolução dos problemas, esta pode ser feita por vários processos, uns mais intuitivos e outros mais formais, promovendo várias formas de chegar ao resultado, tal como é recomendado no programa oficial, com base num raciocínio heurístico.

Na resolução geométrica utiliza-se a noção da medida da área para comparar a área de retângulos com o mesmo perímetro. As resoluções que se seguem vão aumentando o grau de formalidade. A resolução algébrica é uma comprovação de casos particulares, não demonstra o caso geral. Por fim, na resolução com a calculadora gráfica surge uma função quadrática no estabelecimento do plano, facilitando a visualização da solução ótima. A partir daqui seria possível a resolução deste problema por via mais formal, determinando analiticamente o vértice da parábola.

Apesar de os autores apresentarem as três resoluções separadas, podemos verificar que, a resolução algébrica auxilia na escolha dos valores a utilizar na resolução algébrica e que esta nos auxilia na determinação das funções a utilizar na resolução através da calculadora gráfica.

Comparando a resolução geométrica apresentada por Euclides e a resolução geométrica apresentada no manual escolar verificamos que ambas são feitas por comparação de áreas, partindo da área do quadrado e verificando que os retângulos com o mesmo perímetro têm área inferior à do quadrado.

Observamos ainda que o manual vai ao encontro das recomendações propostas pelo programa oficial uma vez que, apresentando este tipo de resoluções, é *“dada ênfase à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos”*.

Na resolução deste problema a calculadora gráfica é utilizada para confirmação dos resultados a que se tinha chegado nas resoluções anteriores, no entanto, teria sido possível utilizá-la como meio de descoberta da solução do problema. Para tal bastaria que o aluno comesse por determinar a função que nos permite determinar a área do retângulo em função da medida dos lados e depois utilizar a calculadora gráfica para determinação da solução ótima.

Assim, os tempos trouxeram-nos simplicidade, quer na escrita, quer na resolução dos problemas. Passamos de um raciocínio dedutivo, unicamente geométrico para um raciocínio heurístico centrado em questões aritméticas e algébricas, sendo a calculadora gráfica uma mais valia na exploração dos problemas.

Bibliografia

- Aires, A. P. (2006). *O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares*. Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: CEAC.
- Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications, inc.
- Boyer, C. B. (1993). *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.
- Carvalho, R. (2001). *História do ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Edwards, C. H. Jr. (1979). *The historical development of calculus*. New York: Springer-Verlag.
- González Astudillo, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover.
- Jorge, A. M. B. e outros (1997). *Infinito 10, 10º Ano Vol. 2*. Porto: Areal Editores.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (Tradução portuguesa da edição original de 2000)
- Polya, G. (1995). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Proença, M. C. (1998). *O Sistema de ensino em Portugal (Séculos XIX-XX)*. Lisboa: Edições Colibri.
- Ruiz Berrio, J. (1997). El método histórico en la investigación histórico-educativa. In N. De Gabriel, & A. Viñao (Eds.), *La investigación histórico-educativa* (pp. 131-202). Barcelona: Ronsel.
- Santiago, A. E. (2008). *Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no ensino secundário português nos séculos XX e XXI*. Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

Ana Santiago, Maria Teresa Astudillo

- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics*, 7(3), 41-51.
- Schubring, G. (1989). *Categorías para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos*. Traduzido por A. Orellana e L. Rico.
- Sierra, M. (Coord.) (2003). *Evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra: de los libros de texto a las nuevas tecnologías*. Salamanca: Dpto Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).
- Silva, J. C e outros (2001). *Programa de Matemática A, 10º ano*. Lisboa: Departamento do ensino secundário do Ministério da Educação.
- Struik, D. (1989). *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.