Lista de Conteúdos disponível no site da Academia das Ciencias de Lisboa

Seminário de Jovens Cientistas

página: www.acad-ciencias.pt

O que raio são conjuntos?

Bruno Jacinto[1]

[1]*Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*

Artigo de opinião

Uma ideia intuitiva acerca de conjuntos é que estes são "sombras" de propriedades. Dada uma qualquer propriedade, há o conjunto das coisas que caem sob ela. Por exemplo, dada a propriedade ser um morador de Lisboa, há o conjunto de todos e só aqueles que moram em Lisboa.

Esta ideia intuitiva mostrou-se errada. O mais célebre contraexemplo é dado pelo *Paradoxo de Russell*[1]. Se todas as propriedades têm um conjunto como sua sombra, então a propriedade *não pertencer a si mesmo* tem ela mesma uma sombra – especificamente, o conjunto de todas e só aquelas coisas que não pertencem a si mesmas. Porém, não há tal conjunto. Afinal, se houvesse, este conjunto simultaneamente pertenceria e não pertenceria a si mesmo. O conjunto pertenceria a si mesmo na medida em que, se não pertencesse a si mesmo, então seria uma daquelas coisas que não pertencem a si mesmas, pelo que afinal pertenceria a si mesmo. O conjunto não pertenceria a si mesmo na medida em que, se pertencesse a si mesmo, então seria uma daquelas coisas que não pertencem a si mesmas, pelo que afinal não pertenceria a si mesmo.

A conceção de conjuntos como sombras de propriedades é comummente chamada de conceção *ingénua* de conjuntos. É assim chamada uma vez que, embora seja à partida intuitiva, é falsa. Aquela que é vista como a mais promissora alternativa à conceção *ingénua* é a conceção *iterativa* de conjuntos[2]. De acordo com esta última, conjuntos são formados em estádios. No primeiro estádio, encontram-se todos os objetos que não são conjuntos. No segundo estádio são formados todos os conjuntos que têm como elementos somente objetos do primeiro estádio. No terceiro estádio são formados todos os conjuntos que têm como elementos objetos (incluindo conjuntos) formados no primeiro ou no segundo estádios. E assim sucessivamente: em cada estádio, exceto no primeiro, são formados todos os conjuntos que têm como elementos objetos que se encontram nos estádios anteriores. Mais ainda, para qualquer estádio de formação há um estádio que se lhe segue imediatamente. Há também pelo menos um estádio "limite": um estádio que vem imediatamente a seguir a uma sequência infinita de estádios.

Uma importante virtude da conceção iterativa de conjunto é que esta oferece uma explicação para a inexistência do conjunto das coisas que não pertencem a si mesmas. Este conjunto não existe porque conjuntos são formados em estádios, e qualquer que seja o estádio em que um conjunto é (primeiramente) formado, todos os elementos desse conjunto são (primeiramente) formados em

[1]Russell, B. 1902. 'Letter to Frege'. Em Jean van Heijenoort (ed.), From Frege to Gödel, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967, 124–125.

[2]Veja-se, por exemplo, Boolos, G., 1989. 'Iteration again', Philosophical Topics, 17, 5–21.

estádios anteriores. Assim, o conjunto das coisas que não pertencem a si mesmas não pode existir. Afinal, se existisse ter-se-ia a si mesmo como elemento. Assim, teria como elemento um conjunto formado no mesmo estádio que ele mesmo – o que vai contra a conceção iterativa.

Pela mesma razão, não há um conjunto de todos os conjuntos. Afinal, se existisse, ter-se-ia a si mesmo como elemento. Assim, teria como elemento um conjunto formado no mesmo estádio que ele mesmo. A inexistência do conjunto de todos os conjuntos bloqueia o *paradoxo de Cantor* (Cantor, 1989), um outro importante paradoxo de teoria dos conjuntos.

A conceção iterativa legitima também alguns dos axiomas da teoria de conjuntos de facto vigente em matemática - a teoria Zermelo-Fraenkel (ZF). Por exemplo, diga-se que um conjunto é um *subconjunto* de outro se todos os elementos do primeiro pertencem também ao segundo. O *axioma das partes*, de acordo com o qual para todo o conjunto existe o conjunto dos seus subconjuntos, é uma consequência da conceção iterativa de conjunto. Pois suponha-se que um conjunto é (primeiramente) formado num dado estádio. Então, todos os seus elementos são (primeiramente) formados em estádios anteriores. Logo, todos os subconjuntos desse conjunto são formados no mesmo estádio em que o conjunto inicial é formado. Portanto, no estádio seguinte será formado, entre outros, o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto inicial.

Não é, ainda assim, claro que a conceção iterativa seja capaz de justificar todos os axiomas da teoria Zermelo-Fraenkel. Para dar somente um exemplo, não é claro que a conceção iterativa seja capaz de justificar o axioma da substituição, segundo o qual para toda a função definível na linguagem da teoria dos conjuntos, se há o conjunto dos seus argumentos, então há o conjunto dos seus valores.

Tão ou mais relevante é o facto de a conceção iterativa trazer consigo algum obscurantismo. Aqui estão algumas questões que esta naturalmente suscita: Se conjuntos são formados, quem os está a formar? E como são formados? Qual é a "cola" que os une? Formar conjuntos não demora *tempo*? Porque é que o "formador" de conjuntos não fica sem tempo para continuar a formação? E, para que um conjunto seja formado, é necessário que os seus elementos estejam suficientemente perto? Ou pode haver "ação à distância"?

De um certo ponto de vista, estas parecem ser questões absurdas. O problema é que aceitar a conceção iterativa parece ter como consequência a legitimidade destas questões. Assim, seria desejável ir para além das metáforas que subjazem à conceção iterativa. Tal permitiria obter uma melhor compreensão da noção de conjunto, e de que princípios são, afinal, verdadeiros ou não acerca destes.

Presentemente, a minha posição é que por detrás da conceção iterativa está a tese que ser um conjunto é ser um tipo especial de propriedade. Mais especificamente: para cada conjunto, há algumas coisas tais que o conjunto é, nada mais, nada menos, que a propriedade de ser uma daquelas coisas. O apelo a propriedades promete dar conta da ideia de que conjuntos são formados em estádios – não só há propriedades como há também propriedades de propriedades, propriedades de propriedades de propriedades, etc. Porém, uma formulação mais rigorosa desta tese, defesa, e sustentação de que esta subjaz à conceção iterativa terão de ficar para um outro fórum.

E para que é que isto serve? A montante, clarificar a noção de conjunto promete ter várias consequências de cariz teórico para questões em matemática, questões acerca da relação entre matemática e lógica, e até questões em psicologia acerca da nossa capacidade para apreender objetos matemáticos. A jusante, a procura por respostas a esta questão, ou a questões de natureza similar, potencia uma mente mais crítica e menos suscetível a vieses cognitivos. Se formos capazes de transmitir o nosso fascínio por estas questões, e mostrar como pensamos acerca delas, esta será uma forma indireta – mas talvez, a longo prazo, especialmente eficaz – de termos uma sociedade mais crítica e epistemicamente virtuosa. Assim: afinal, o que raio são conjuntos?