

DESENVOLVENDO O SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL: QUE DESAFIOS PARA O PROFESSOR?

Margarida Nunes Silva
Agrupamento de Escolas de Pinhal de Frades
margaridasilvaani@gmail.com

Ana Maria Boavida
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
ana.boavida@ese.ips.pt

Hélia Oliveira
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo: A construção do conceito de número racional, a partir da representação na forma de fração numa perspetiva do desenvolvimento de sentido do número, é uma novidade no currículo português trazendo ao professor do 1.º ciclo do ensino básico vários desafios. Uma das formas de lhes fazer face é selecionar tarefas matemáticas que incentivem os alunos a pensar conceptualmente e sequenciá-las tendo em conta um percurso de aprendizagem orientado por ideias poderosas, modelos adequados e estratégias de referência. Neste texto analisam-se as práticas de uma professora do 3.º ano associadas à realização de uma das tarefas da trajetória de aprendizagem planeada para ensinar números racionais. Esta análise permite sublinhar a importância de um conhecimento sólido da matemática a ensinar. Evidencia, também, que não basta o professor antecipar eventuais dificuldades dos alunos: é essencial ser capaz de lidar flexivelmente com acontecimentos inesperados que surgem durante o ensino e que, por irem em sentido contrário às suas expectativas, provocam situações de impasse e sentimentos de desilusão e frustração. Os conflitos experienciados pela professora serviram de motor para a levar a repensar o seu papel na orientação do discurso de forma a tornar a tarefa mais poderosa

Palavras-chave: Práticas profissionais; número racional; fração; tarefas matemáticas; trajetórias de aprendizagem.

Introdução

A introdução dos números racionais não negativos, representados sob a forma de fração, com significados que vão para além da fração¹ como operador, é uma novidade no atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) para o 1.º ciclo, introduzindo uma mudança curricular importante: a passagem do número natural ao racional através da sua representação na forma de fração. Concretamente, os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos de escolaridade através de uma abordagem intuitiva e partindo de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais. É nos 3.º e 4.º anos que o estudo destes números vai ser aprofundado, quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados da fração (parte-todo, razão, operador, quociente

¹ Por questões de simplificação de linguagem, a partir de agora a palavra “fração” deve ser entendida como representação de um número sob a forma de fração.

e medida), quer introduzindo números representados na forma decimal. Esta situação é uma alteração muito significativa para os professores do 1.º ciclo, uma vez que, anteriormente, a ampliação do conceito de número fazia-se através da representação decimal dos números racionais. Além disso, é-lhes pedido que trabalhem o conceito de fração tendo em conta os seus múltiplos significados. Simultaneamente, todo o trabalho deve ser orientado numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, o que leva a que a ênfase não possa ser colocada exclusivamente em procedimentos de cálculo.

Como dar sentido a uma representação que não “explicita” um número - como acontece no universo dos números naturais - mas uma relação entre dois números? Como pode um professor favorecer o alargamento da noção de número natural à de número racional através da sua representação sob a forma de fração? De que forma professores e alunos, podem fazer um percurso facilitador da aprendizagem destes “novos números” numa perspetiva de desenvolvimento do *sentido de número*?

Tendo por base estas questões, delineou-se uma investigação, em fase de desenvolvimento, cujo propósito é descrever e analisar as práticas de ação e reflexão de uma professora do 3.º ano de escolaridade, na preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem focada na construção do conceito de número racional a partir da sua representação sob a forma de fração, compreendendo desafios e dificuldades com que se vai confrontando. Este texto tem como objetivo analisar as práticas de Beatriz associadas à exploração da tarefa “A discussão do João e da Maria” que se enquadra numa trajetória de aprendizagem planeada em contexto de trabalho colaborativo.

Ensinar números racionais com problemas

Ensinar com problemas é uma abordagem de ensino que tem por pano de fundo a ideia de que a exploração e discussão de tarefas cognitivamente desafiadoras que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, é fundamental para que os alunos aprendam Matemática com compreensão (Lampert, 2001; Fi & Degner, 2012). Esta ideia está subjacente a muitas das atuais orientações curriculares e as suas potencialidades têm sido amplamente documentadas por diversos autores.

Sendo as tarefas e o modo como são exploradas na sala de aula, essenciais para o que os alunos aprendem de Matemática e como o aprendem (Stein *et al.* 2007), estas assumem uma relevância acrescida quando se trata de perspetivar o ensino de tópicos que levantam sérias dificuldades, como é o caso dos números racionais e, em particular, do conceito de fração: “Compreender os números racionais envolve a coordenação de múltiplas e diferentes ideias e interpretações que estão, no entanto, inter-relacionadas” (Lamon, 2007, p. 23). A aprendizagem destes números é mais complexa do que a dos inteiros (naturais e zero): os racionais são um conjunto denso e não discreto (Kilpatrick, 2001); representam-se de diferentes formas (fração, decimal e percentagem); são usados de diversos modos e com vários significados nem sempre matemáticos (por exemplo, a palavra fração como sinónima de pequena parte); o dia a dia fornece maior experiência com os números inteiros do que com os racionais; e há numerosas propriedades para os alunos aprenderem, incluindo o facto de dois números diferentes (o numerador e o denominador) comporem um único número (a fração) e estarem relacionados através da multiplicação e da divisão e não da adição.

Ter maturidade na compreensão dos números racionais é muito mais do que ser hábil a manipular símbolos: significa ser capaz de estabelecer conexões nas várias situações modeladas por esses símbolos.

Lidar com o caráter complexo e multifacetado do conceito de fração

A fração expressa uma relação entre quantidades, pelo que o conceito tem uma natureza relativa (Nunes & Bryant, 2006). Além disso, é um conceito multifacetado. Com efeito, como sublinha Lamon (2007, referindo Kieren) é importante que os alunos tenham uma experiência adequada com as múltiplas interpretações de fração, ou nas suas palavras, “personalidades dos números racionais” (p. 642) — parte-todo, razão, operador, quociente e medida — e que não as considerem como meros objetos de cálculo. Na sua perspetiva, a compreensão do conceito de fração vai-se construindo a partir do entendimento destas várias “personalidades” ou significados.

Este caráter multifacetado do conceito de fração complexifica o trabalho do professor implicando uma visão holística da construção de número racional. O conjunto das diversas “personalidades”, que se inter-relacionam, tornam um conceito simples num conceito complexo, transformando o todo em algo mais que a soma das suas partes. Charalambous e Pitta-Pantazi (2006) enfatizam que o desenvolvimento do conceito de fração a partir de um dos seus significados não garante a compreensão dos restantes comprometendo a compreensão global do conceito. Apoiando-se num modelo de Behr, os autores procuraram relacionar os diferentes significados da fração com os conceitos chave no trabalho com a fração: a noção de equivalência de frações, as operações com frações e a resolução de problemas (Fig. 1).



Figura 1: Modelo de Charalambous e Pitta-Pantazi (2006)

Os autores concluíram que o significado “parte-todo”, é considerado, juntamente com o processo de partição (partilha equitativa), essencial para o desenvolvimento da compreensão dos restantes quatro outros significados² assim como o mais relacionado com a resolução de problemas e a adição de frações (Fig. 1). O significado “razão” é o mais “natural” para promover a compreensão da equivalência de frações e os significados “operador” e “quociente” são os que mais contribuem para o entendimento da multiplicação de frações.

Em suma, o ensino dos números racionais e, em particular das frações, traz desafios acrescidos ao professor. Há que ter em conta os vários significados de fração, as diferentes representações dos números racionais e a forma como este trabalho pode ser desenvolvido. O dilema, para alunos e professores, é o de como estabelecer as conexões apropriadas para uma madura e flexível compreensão destes números.

Percorrer um caminho passando por pontos de referência

Embora as diferenças entre os números inteiros e os números racionais sejam fontes de dificuldades para os alunos, Moss e Case (1999) defendem que estes os aprendem também desde o início da sua escolaridade:

² Razão, operador, quociente e medida

Em qualquer dos casos, constroem esquemas numéricos quantitativos globais separadamente e, à medida que vão desenvolvendo um nível mais elevado de pensamento, vão coordenando gradualmente estes “esquemas” para obterem uma compreensão do núcleo, tanto no que se refere à forma como os números em questão estão estruturados, como à notação usada para os representar. (p. 124)

Este entendimento nuclear é estendido a números mais complexos e às formas de representação desses números até que a estrutura global de todo o campo é compreendida. Este processo de domínio progressivo de dois universos numéricos tem semelhanças com o que acontece quando as crianças aprendem duas línguas.

Também Nunes e Bryant (2006) sublinham que os alunos têm uma compreensão intuitiva da natureza relativa da fração a partir das experiências com a divisão, o que indicia que os programas curriculares que tenham como ponto de partida as intuições dos alunos acerca de situações de partilha equitativa e estabelecendo conexões com as “frações como números”³, podem ter um impacto positivo na aprendizagem.

Estas ideias parecem ser bastante convergentes com as perspetivas de Van Walle e Lovin (2006) que preconizam um caminho de aprendizagem ancorado na construção do *sentido de número fração* (“fraction number sense”, p. 262) que permite ir de uma abordagem mais intuitiva a uma formalidade progressivamente maior, usando diversos modelos como ferramentas para apoiar o pensamento dos alunos. Também Fosnot e Dolk (2002) se referem à construção do conceito de fração como uma “viagem” que os alunos fazem através de uma *paisagem de aprendizagem* (“landscape of learning”, p. 21) em que passam e voltam a passar por “pontos de referência” que se vão tornando marcos no seu próprio percurso de aprendizagem. Segundo estes autores, para que caminhem em direção ao horizonte da compreensão das frações, é importante que o professor selecione e sequencie criteriosamente problemas e que promova a discussão coletiva das suas resoluções de modo a que os alunos vão construindo, nomeadamente as seguintes *grandes ideias* (“big ideas”, p. 55):

- as frações são relações e são relações parte-todo;
- o todo importa porque as frações são relações;
- as partes fracionárias não têm de ser congruentes mas equivalentes;
- a fração é uma divisão e, portanto, está relacionada com a multiplicação;
- a divisão e a multiplicação de frações são relações de relações;
- os números decimais podem representar-se por frações cujo denominador é uma potência de 10 e as percentagens por frações cujo denominador é uma potência de 100 e, por isso, são relações fracionárias específicas;
- o que “unifica” números inteiros e decimais é a compreensão do valor de posição.

Assim, é importante que estas *grandes ideias* constituam linhas norteadoras da ação do professor, o que nem sempre é tarefa simples. Antes de mais porque muitos não têm uma compreensão profunda do conceito de fração nem tiveram uma formação adequada para ensinar bem este conceito (Clarke, Roche & Mitchel, 2008). Além disso, porque o trabalho de ensino envolve uma gestão complexa de relações com os alunos, os “mundos” de onde provêm, as suas experiências matemáticas anteriores e com o conteúdo matemático a ensinar (Lampert, 2001). Muitas vezes, entre as intenções do professor e as suas ações há distâncias consideráveis e amiúde surgem incompatibilidades incontornáveis. Os planos feitos para a situação de ensino, relacionam as ações com as intenções, mas esses planos não determinam o que um professor deve, ou não, fazer no decurso da aula. Frequentemente, descobrir o que

³ Fração enquanto representação de um número racional

manter e o que deixar para trás é uma escolha que faz no momento da própria aula, pelo que, amiúde, se move num “*universo sem precedentes*” (Lampert, 2001, p. 447).

Metodologia

O estudo que enquadra este texto é de cunho interpretativo no sentido em que o cerne é a compreensão do significado conferido pelos “atores” às suas ações (Erickson, 1986). Incluiu a realização de um projeto de colaboração que envolveu a investigadora, primeira autora deste texto, e Beatriz (pseudónimo), a professora do 3.º ano de escolaridade que, quando contactada para o projeto, de imediato se disponibilizou.

O projeto desenvolveu-se em torno de três eixos inter-relacionados: (a) preparação de uma sequência de tarefas orientada para a construção de “grandes ideias” (Fosnot & Dolk, 2002) associadas à aprendizagem dos “Números racionais não negativos”; (b) concretização pela professora da sequência de tarefas; e (c) reflexão antes, durante e após a sua realização.

Estas tarefas eram problemas de complexidade variável. Foram selecionadas partindo do estudo de documentos curriculares, da planificação de escola, de tarefas propostas a nível nacional (DGIDC), de materiais do Programa de Formação Contínua de Matemática da ESE de Setúbal e de outros documentos selecionados, bem como da análise das suas potencialidades para trabalhar o conceito de número racional. Foram preparadas 16 tarefas cujo encadeamento foi definido previamente e informado pelas “grandes ideias”. Previu-se, no entanto, que a sequência pudesse ser alterada quanto às próprias tarefas e/ou sua seriação, fruto da reflexão sobre os acontecimentos da aula, o que veio a acontecer. Foi, assim, delineada uma *trajetória de aprendizagem* (Simon, 1995) constituída por quatro fases principais: (i) Do trabalho intuitivo com a parte fracionária à simbologia da fração; (ii) Da simbologia da fração ao *sentido de número fração*; (iii) Do *sentido de número fração* à noção de equivalência de frações; (iv) Da noção de equivalência às múltiplas representações de número racional.

O projeto de colaboração decorreu de 29 de novembro de 2010 a 17 março de 2011 e no seu início foram negociados os papéis da investigadora e da professora que não se alteraram durante o seu desenvolvimento:

- responsabilidade mútua na preparação e elaboração da sequência de tarefas, assim como na identificação das “grandes ideias” que orientariam a trajetória de aprendizagem;
- responsabilidade da professora na concretização das aulas referentes ao plano de trabalho definido; nestas a investigadora assumiria o papel de observadora-participante, apoiando, eventualmente, a professora;
- responsabilidade mútua na reflexão, análise e eventual reformulação do plano inicial;
- em qualquer decisão relativa à atividade em sala de aula, a professora teria, sempre, a última palavra.

Os principais métodos de recolha de dados foram a observação participante, a entrevista e conversas informais. A observação participante esteve associada a cinco aulas, para familiarização com o contexto em que iria decorrer o estudo, e a catorze relativas à unidade “Números racionais não negativos”. Esteve, também, associada a doze sessões de trabalho, destinadas a partilhar ideias, refletir e avaliar a concretização da trajetória de aprendizagem. As conversas informais ocorreram imediatamente antes ou após as aulas referidas. As

entrevistas, realizadas à professora, foram semiestruturadas e ocorreram em dois momentos: uma no início do estudo e outra no final. Foram elaboradas notas de campo e os dados provenientes das aulas e das reuniões foram registados através de, respetivamente, gravações em vídeo e em áudio. O *corpus* foi objeto de análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas.

Apresenta-se, em seguida, o modo como a professora explorou a tarefa “A discussão do João e da Maria” e analisam-se as suas reflexões sobre a contribuição desta para a construção do conceito de número racional bem como sobre dificuldades e desafios experienciados.

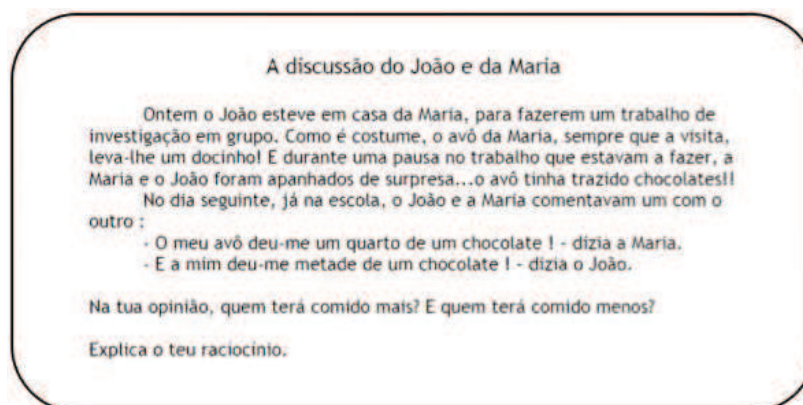


Figura 2: tarefa 7

A discussão do João e da Maria

Situando a tarefa

Esta tarefa surge na segunda parte da trajetória e é a sétima da sequência. Foi explorada após a intitulada “A visita de estudo e a distribuição de baguetes”, que envolve uma situação de partilha equitativa, e cuja discussão permitiu trabalhar as seguintes ideias: (i) as partes fracionárias são partes iguais da mesma figura ou porções iguais da unidade; (ii) as partes em que se divide a unidade têm nomes especiais e “dizem-nos” quantas são necessárias para fazer a unidade; (iii) quanto mais partes se usam para fazer uma unidade mais pequena é cada parte; (iv) o denominador da fração indica em quantas partes foi dividida a unidade, de forma a produzir a parte pretendida, logo o denominador é o divisor e o numerador indica a parte considerada pelo que é um multiplicador; (v) duas frações equivalentes são dois caminhos para descrever a mesma quantidade usando diferentes partes fracionárias.

Tendo por fio condutor estas ideias, o trabalho dos alunos em torno do problema das baguetes centrou-se na comparação de quantidades relativas à mesma unidade (a baguete) através dos significados de parte-todo e de quociente. Como a professora foi salientando, “podemos comparar, pois temos sempre baguetes iguais”.

Durante o projeto discutimos o interesse da tarefa “A discussão do João e da Maria” para trabalhar a natureza relativa da fração e a professora considerou que poderia proporcionar um debate favorável à clarificação e aprofundamento do conceito. Assim, considerou que seria interessante incluí-la na sequência.

Apresentando a tarefa

Beatriz é muito cuidadosa na escolha das tarefas, procurando encontrar contextos familiares aos alunos, o que revela não só sensibilidade matemática, como também um profundo conhecimento sobre os seus alunos, que oportunamente usa para ensinar Matemática:

Não é só colocar um problema que seja giro... é fundamental que esteja relacionado com o dia a dia da criança pois desperta-lhes mais o interesse e eles percebem o que é que lá está; é criar-lhes condições para que eles desenvolvam estratégias para resolver aquele determinado problema; (...) é conter determinados ingredientes...que fazem parte da suas histórias de vida, facultar-lhes meios para que o que lhes é pedido fazer mais sentido.⁴

Este cuidado revela-se, por exemplo, no enunciado da tarefa (Fig.2) que foi adaptado das Provas Nacionais de Aferição de 2001, do 6.º ano de escolaridade: “Sim, foi o avô que gosta muito de oferecer chocalatinhos à neta...foi ligado à realidade deles. Os próprios avós fazem-lhes esses maminhos”.

Como se pode constatar, a adaptação feita por Beatriz remetia para um contexto mais familiar aos seus alunos. A história coloca-os no centro de uma história que pode ser a história deles. Além disso, a questão colocada era mais aberta do que a das provas de aferição, o que permitiria encontrar várias soluções em função do tamanho do chocolate. Desta forma, a professora enriqueceu a tarefa criando condições mais favoráveis a uma discussão matematicamente rica.

Beatriz apresenta a tarefa à turma, começando por lhes “contar”, mais do que ler, a história que dá corpo ao problema. Ainda está a escrever no quadro o título da tarefa e já um aluno reage dizendo que é muito fácil. Beatriz lida com a intervenção salientando, implicitamente, a necessidade de reflexão: “Vocês (...) não se contentam com isso [tarefas muitas fáceis] (...) habituaram-me a mais... então tenho vindo a aumentar o grau de exigência (...). Talvez não seja assim tão fácil quanto parece”. Em seguida, diz aos alunos que, em pares, devem encontrar soluções para o problema.

Apoiando os alunos no seu trabalho

Os alunos começam a trabalhar verdadeiramente entusiasmados e Beatriz percorre as carteiras apoiando-os e respondendo a perguntas que, de início, se prendem sobretudo com a interpretação do problema. Ouve-os, responde às suas questões e vai valorizando as ideias a desenvolver ou dando uma pista para fazer um aluno pensar numa questão.

Núria, que não era ouvida pelo colega, aborda-a para lhe perguntar se os chocolates tinham de ser iguais. Beatriz responde que podem ser ou não pois “não sabemos qual era o tamanho dos chocolates que o avô deu” e acompanha-a ao seu lugar incentivando-a a debater com o seu colega a ideia e reforçando, juntos de ambos, ser bom pensarem na questão daquela maneira. Após o trabalho de pares passa à apresentação e discussão dos raciocínios e verifica que todos se centram na ideia de os chocolates serem iguais e, por isso, o João ter comido mais chocolate do que a Maria. Consenso na turma, e muito entusiasmo por parte dos alunos, orgulhosos da sua resolução. Na Beatriz noto a sua decepção: “Então Núria e a tua ideia?”.

Toca para o intervalo, os alunos saem e fazemos, como é usual, uma pequena reflexão partilhando ideias e sentimentos. Beatriz está desapontada com a tarefa e com a reação dos alunos, contrariamente ao que tinha acontecido em aulas anteriores em que manifestava abertamente o seu entusiasmo: “Eu queria que saíssem dali várias coisas e não saíam... só estavam concentrados na ideia de que os chocolates eram iguais e como tínhamos preparado a aula antecipadamente sabíamos que isso era apenas uma das hipóteses”.

Face à desilusão de Beatriz, disse-lhe parecer-me natural os alunos responderem comparando as frações relativas à mesma unidade, pois essas tinham sido as ideias trabalhadas nas tarefas anteriores. Este era o momento do impasse e até de uma mudança, de um alargar do próprio conceito de fração e, portanto, naturalmente um momento que poderia tornar-se mais difícil

⁴ Reflexão de Beatriz feita na sessão de trabalho 8 onde foi analisada a aula em que foi apresentada a tarefa. A quase totalidade dos extratos do discurso de Beatriz incluídos neste texto são provenientes desta sessão ou aula.

de gerir. E devolvi-lhe a questão: O que é que poderia fazer para chegar a trabalhar as ideias que estavam subjacentes à escolha desta tarefa?

Iniciada a aula, determinada e mais tranquila, escreve no quadro: “E se os chocolates forem de tamanhos diferentes?”. Propôs, então, aos alunos que voltassem a pensar na tarefa. Estes trabalharam cerca de quinze minutos e depois passou-se à fase da discussão. Neste âmbito, chama ao quadro o par Núria e André. Para sua surpresa, pois tinha-lhe parecido, pela anterior conversa com Núria, que esta aluna punha a hipótese de nem sempre o João comer mais chocolate do que a Maria, constata que, apesar de terem considerado chocolates de tamanhos diferentes, a conclusão a que antes tinham chegado se mantém (Fig. 3). É nesta altura que surge o episódio apresentado em seguida.



Figura 3: A resolução que Núria e André apresentaram

Episódio: Há uma maneira da Maria comer o mesmo chocolate que o João

P: Se os chocolates forem iguais quem é que come mais?

Vários alunos: O João.

P: Porquê?

A1: Porque a metade é maior do que um quarto.

(...)

P: E se houvesse dois chocolates mas fossem de tamanhos diferentes?



Fig. 4 – a resolução de Núria

Núria: Professora, se fossem dois chocolates há uma maneira da Maria comer o mesmo chocolate que o João. Se o chocolate do João fosse mais pequeno e ele comesse só metade, e se o chocolate da Maria fosse normal, grande (aponta para a figura 4 que foi desenhando no quadro).

P: Todos perceberam?

Algumas vozes: Não!

P: Não? Nem todos estão a olhar atentamente para a Núria. Vamos ouvir a Núria que é ela que está a explicar.

Núria: Se o chocolate do João fosse mais pequenino que o da Maria... se fosse um chocolate mais pequeno que o outro, se calhar até podiam comer a mesma coisa.

P: E por que é que isto pode acontecer? Por que é que ao ter um chocolate mais pequeno o João pode comer o mesmo que o quarto de chocolate da Maria?

A3: Se a metade é maior que um quarto...

P: Mas porque é que então podem comer a mesma quantidade? (...) Por que é que metade do chocolate do João pode representar a mesma quantidade que um quarto do chocolate da Maria?

Núria: Por que este que é mais pequeno e a quantidade que o João come do mais pequeno pode ser igual... pode ser igual à quantidade que a Maria come ... se o dela for o grande.

A6: Pois é professora, concordo!

A4: Se for assim, talvez eles comam a mesma quantidade.

P: Mas porquê? Por que é que pode ter comido o mesmo, ou até menos que a Maria? Como é que isso pode acontecer?

A1: Por que dividimos o chocolate do João em metades e o da Maria em quartos.

P: Então ter uma metade de um chocolate grande é o mesmo que ter metade de um chocolate pequeno?

A7: É mais pequena a parte do chocolate pequeno.

A1: Porque a minha unidade, o meu chocolate é mais pequeno.

P: O que podemos concluir? O que fez mudar as quantidades?

(Alguma indecisão)

P: Esta metade vale o mesmo que esta metade? *(aponta para um exemplo no quadro de duas metades de dois chocolates diferentes)*

Vários alunos: Não.

P: Porque é que não?

(Alguns murmúrios mas nenhuma voz se fez ouvir)

P: Então ter uma metade de um chocolate grande é o mesmo que ter metade de um chocolate pequeno?

Vários alunos: Não!

P: Então, o que é que podemos concluir?

A7: Porque um chocolate é maior e outro é mais pequeno...

P: Então, o que é que podemos concluir?

(Silêncio)

P: Vamos falar só da Maria está bem? *(Desenha dois chocolates um maior e outro mais pequeno e dividi-os em quatro partes)*. Um quarto do chocolate da Maria é igual a este bocado... *(aponta para o quarto do chocolate maior)*. Concordam que este quarto é maior do que o outro?

Vários alunos: Sim.

P: Porque é que um quarto de um chocolate pequenino e um quarto de um chocolate grande não é a mesma quantidade?

A3: O chocolate não é do mesmo tamanho.

A6: Um quarto de um chocolate pequeno é mais pequeno que um quarto de um chocolate grande.

(...)

Como este episódio revela, para Núria a questão da natureza relativa da fração foi uma intuição imediata. Para os colegas não, pois mantinham-se presos à ideia das partes tomando como ponto de referência a mesma unidade. A professora tentou acompanhar a ideia da aluna que claramente respondia às suas expectativas sem, contudo, deixar de “trazer consigo” os alunos que não viam ainda a possibilidade da mudança de unidade mesmo depois dessa hipótese ter sido considerada por todos.

Refletindo com Beatriz

No final da aula voltámos a conversar sobre as conclusões que se tinham tirado, sobre a reação dos alunos à nova situação colocada e os sentimentos e pensamentos de Beatriz. Estava notoriamente mais aliviada, embora cansada e um pouco insegura quanto a se todos teriam compreendido a ideia da natureza relativa da fração. Refere ter ficado com a sensação de alguns alunos continuarem a “olhar para uma metade como uma metade e para um quarto como um quarto” como um valor absoluto, como no caso dos números naturais. Diz “É preciso voltar aqui... mas de momento, senti-os cansados”. Recordámos, então, que estávamos no início do trabalho com o conceito de número racional, que esta era a primeira tarefa da segunda fase da trajetória e que havia outras pensadas para desenvolver esta grande ideia. Beatriz refere que a tarefa doze da trajetória permitiria “trabalhar esta ideia com unidades discretas” recorrendo a “modelos como rebuçados, berlindes ou lápis”, pelo que decide antecipá-la e apresentá-la “na próxima aula”.

A meio da unidade “Números racionais não negativos” reunimos novamente para refletir sobre o desenvolvimento da trajetória real, avaliar a continuidade do trabalho a realizar e delinear possíveis alterações ao trajeto planeado. Ao perguntar a Beatriz qual a tarefa que considerava ter sido crucial no percurso realizado até ao momento, foi perentória:

A discussão do João e da Maria”. Foi a que correu pior de todas! Pela minha atitude de ser muito dirigida e aquela coisa... de ter criado uma expectativa e não ter acontecido. Havia várias hipóteses e mesmo havendo uma luzinha por parte de uma aluna, não seguiram essa ideia. (...) Era maior [a sua expectativa]... Que chegassem mais longe. A grande maioria só se limitou a uma hipótese.

A professora apercebeu-se que apesar de ter preparado esta tarefa antecipando respostas possíveis, só compreendeu a sua dificuldade e, paradoxalmente, o seu poder, em plena realização do trabalho com os alunos: “Foi um erro meu...pensar que era mais fácil!” Considerou que o facto de terem realizado esta tarefa na sequência da das baguetes talvez tivesse induzido os alunos a considerarem os chocolates de tamanhos iguais: “Nas baguetes nós estávamos a trabalhar com a mesma unidade para que a distribuição fosse justa! Se a unidade não fosse do mesmo tamanho o que aconteceria?”.

Para Beatriz, o facto de os alunos não terem prontamente respondido ao problema, foi dececionante. No entanto, ao visualizar novamente a aula, toma consciência que a resposta dada era coerente com as grandes ideias trabalhadas, o que mostrava a compreensão que os alunos tinham, até ao momento, de fração e que lhes permitiu ter bases para discutir a ideia que se seguia: o todo importa, uma das grandes ideias referidas por Fosnot e Dolk (2002):

Esse era o objetivo final da tarefa, uma grande ideia, a parte de um todo... um todo que pode ser diferente... eu queria que eles assumissem logo desde o início. Isso é bom, é ótimo e eu não dei valor a isso que é uma conquista fantástica (...) não a via como uma tarefa muito ambiciosa. Estava a vê-la como (...) muito condicionada a uma determinada resposta e tudo o mais... se bem que as respostas poderiam ser diversas (...) Quando a

Núria me colocou a questão (...) [é que] eu fui vendo que os outros não a acompanhavam (...) Porque possivelmente não estava assim tão segura...

Beatriz só se apercebeu verdadeiramente da dificuldade da “grande ideia” para os alunos durante a aula. O momento de impasse vivido foi angustiante para a professora mas também foi a chave da compreensão que se foi desenvolvendo:

Eu depois até vi que ao levantar o véu eles começaram a responder muito bem, a considerar outras hipóteses de resolver o problema, agora porque é que eu não esperei? Não sei... a minha atitude como professora... Eu quero as coisas imediatas não gosto de esperar...

Beatriz é muito reflexiva, questionando-se interiormente sobre as suas ações numa perspetiva de autorregulação. Referindo-se à antecipação das dificuldades sentidas pelos alunos considerou bom antecipá-las mas natural não se poder saber “toda a viagem antes de ter viajado” uma ideia que evoca uma metáfora de Lampert (2001) que compara o trabalho de ensino “à navegação de um pesado barco num imenso e tumultuoso mar” (p. 446). Explica ainda:

Podemos antecipar muita coisa mas tudo não. Cada vez me apercebo mais que há caminhos que os alunos percorrem que nem sempre prevejo. Nesta tarefa, creio que por inconsciência, não antecipei certas coisas que levantaram, que tiveram influência noutras que daí advieram... com grande valor, não só para a noção de fração como do cálculo com frações.

Beatriz refere, também, o facto de o seu conhecimento sobre os números racionais se reportar essencialmente ao do seu tempo de aluna e da unidade “Números racionais não negativos” contemplar a construção do conceito de número racional a partir da noção de fração com uma abordagem diferente:

Eu já dei o ano passado estas noções de fração (metade, terça parte, quarta parte) mas não relacionei com os decimais (...) e tinha boas notas [a Matemática] mas nunca mais estudei frações e agora tudo isto é novo, e não é como quando eu estudava.

Enfatiza, ainda, a necessidade do professor aprofundar o conhecimento profissional ao longo do seu percurso e destaca que uma das vias possíveis é desenvolver um contínuo trabalho de colaboração.

A concluir

Na sequência planeada, a tarefa “A discussão do João e da Maria” requer uma mudança de perspetiva relativamente às tarefas anteriormente exploradas. A comparação de duas frações, referenciadas a uma mesma unidade, era já simples para os alunos. A discussão gerada em torno desta tarefa deixa de ser óbvia se se considerar a hipótese de “o todo não ser o mesmo”, de se estarem a comparar frações de quantidades diferentes. O conflito cognitivo gerado obriga a uma mudança na forma de pensamento relativamente aos problemas anteriores pois a mudança no tamanho do chocolate condiciona as quantidades consideradas. A ideia forte desta tarefa foi o trabalho com a natureza relativa da fração que Nunes e Bryant (2009) identificam como a principal dificuldade no entendimento do conceito de fração: “As frações causam dificuldades porque elas envolvem relações entre quantidades (...) [e] o ensino deve incluir um foco sobre as relações lógicas envolvidas neste conceito” (p. 1)

A professora considerou esta tarefa verdadeiramente desafiante para ela, pois descobriu, durante o trabalho com os alunos, potencialidades que não vislumbrara antes. Ao sentir as

suas dificuldades, numa situação que lhe pareceu à partida não levantar grandes questões, sentiu desilusão em termos emocionais assim como alguma insegurança. O conflito cognitivo gerado internamente - “como sair desta situação de impasse?”, uma vez que os alunos estão centrados na resposta óbvia e “não ouvem as vozes dissonantes de um ou dois colegas que apontam intuitivamente para outra solução”, provoca-lhe sentimentos de desalento e insatisfação mas, simultaneamente, serve de motor para uma mudança na sua própria atitude levando-a a repensar o seu papel na orientação da discussão. A tarefa desenvolvida revelou-se poderosa não por ter sido fácil para os alunos, mas por ter alguma complexidade e gerar neles “alguma incoerência face ao que tinham trabalhado antes”. Beatriz refere que as dificuldades experienciadas podem ser contornadas com um bom conhecimento dos conteúdos matemáticos a trabalhar e salienta a necessidade de reconstrução do seu próprio conceito.

Ao colocar a abordagem ao número racional a partir da construção do conceito de fração no 1.º ciclo, não é possível esquecer que é a primeira vez que estes professores se defrontam com este desafio. Precisamente num domínio tradicionalmente difícil para todos, alunos e professores, mas um domínio crucial, na aprendizagem dos números, do cálculo e da álgebra.

Referências

- Charalambos, C. & Demetra Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model of fractions: implications for teaching and research. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 233-240). Melbourne: PME.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.
- Fi, C. & Degner, K. (2012). Teaching through problem solving. *Mathematics Teacher*, 105(6), 455-458.
- Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). *Constructing Fractions, Decimals and Percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds) (2001). *Adding It Up: Helping Children Learning Mathematics*. Washington: National Academy Press.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Reston, VA: NCTM.
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME – DGIDC.
- Moss, J. & Case, R. (1999). Developing Children’s Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 122-147.
- Nunes, T. & Bryant, P. (2006). Fractions: difficult but crucial in mathematics learning. *Teaching and Learning Research Programme*, 13.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994b). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

- Stein, M. K., Smith, M. Henningsen, M. & Silver, E. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Reston, VA: NCTM.
- Van de Walle, J. & Lovin, L. (2006). *Teaching Student-Centered Mathematics Grades k-3*. Boston: Pearson.

