

# TECNOLOGIAS E PENSAMENTO ALGÉBRICO: CONHECIMENTO E PRÁTICA DE DUAS PROFESSORAS DE MATEMÁTICA

José Duarte

*Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal*  
*Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa*  
jose.duarte@ese.ips.pt

Joana Brocardo

*Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal*  
*Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa*  
joana.brocardo@ese.ips.pt

João Pedro da Ponte

*Instituto de Educação, Universidade de Lisboa*  
jpponte@ie.ul.pt

## Resumo

Este estudo analisa a evolução de duas professoras que integram uma equipa colaborativa durante um ano lectivo que realizou um trabalho de discussão e concepção de tarefas sobre pensamento algébrico, com utilização da tecnologia e reflectiu sobre a sua implementação em turmas do 7.º ano. As duas professoras com práticas anteriores diferentes ao nível da integração da tecnologia, apropriam-se progressivamente do papel da folha de cálculo como apoio ao processo de generalização e modelação e salientam a importância das múltiplas representações para a compreensão das tarefas e o desenvolvimento do pensamento algébrico. O contexto de trabalho colaborativo apoiou o processo de elaboração e experimentação de tarefas abertas mais exigentes, deu confiança às professoras para arriscarem mais na sua prática e revelou-se como um importante contributo para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional.

**Palavras-chave:** Conhecimento profissional, Pensamento algébrico, Tecnologias, Prática profissional.

## Introdução

O novo papel do professor sugere o seu envolvimento em processos de desenvolvimento profissional onde assuma um papel activo na negociação de objectivos e processos de formação (Sowder, 2007) e em que a sua prática seja simultaneamente

lugar de aplicação do que aprendeu e também ponto de partida de análise e reflexão (Llinares & Krainer, 2006; Mewborn, 2003). Os contextos colaborativos são favoráveis ao desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores, entendido como um conhecimento prático, orientado para a acção e que cresce com a experiência (Elbaz, 1983). A reflexão e a colaboração constituem actividades que podem ajudar a evidenciar aspectos do conhecimento profissional dos professores (Llinares & Krainer, 2006; Rutheven & Goodchild, 2008). Pelo seu lado, as tecnologias, que têm potencial para vir a mudar a natureza das salas de aula, nomeadamente pelas analogias, exemplos, explicações e representações que permitem, parecem poder vir a ter um papel crítico no conhecimento profissional dos professores, porque “podem ajudar a tornar o assunto da disciplina mais acessível para o aprendiz” (Mishra & Koehler, 2006, p. 1023).

No contexto curricular português destaca-se a introdução de um novo programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) que propõe mudanças significativas em relação às orientações oficiais anteriores. Uma delas diz respeito ao tema Álgebra, considerando-se que é importante promover a aprendizagem das ideias algébricas logo desde o 1.º ciclo. Assume-se assim a perspectiva que o pensamento algébrico alarga o conceito tradicional de Álgebra, para incluir processos que emergem de tópicos da Matemática elementar, nomeadamente da generalização de relações da Aritmética e que se podem representar através de formas alternativas à notação algébrica simbólica, nomeadamente a linguagem natural, as tabelas e os gráficos (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007; NCTM, 2007).

Este estudo tem por base o trabalho colaborativo realizado pelo primeiro autor com duas professoras de Matemática, focado na compreensão dos aspectos do conhecimento profissional que dão corpo à sua acção na preparação das aulas, na elaboração de tarefas e na sua condução e exploração em sala de aula. Procura-se igualmente compreender os aspectos que as professoras valorizam no currículo oficial e as opções que tomam quando conduzem o ensino introdutório da Álgebra, nomeadamente no que diz respeito à utilização da tecnologia. Este artigo centra-se na análise do modo como as duas professoras integram o uso da tecnologia na sua prática lectiva e aprofunda a evolução da sua visão sobre as potencialidades do uso da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico.

## **As tecnologias e o desenvolvimento do pensamento algébrico**

As explorações que as ferramentas computacionais permitem, a par das discussões que o professor conduz, encorajam a reflexão e as explicações dos alunos e parecem contribuir para a aprendizagem da Álgebra, nomeadamente dos processos de modelação e de apropriação do sentido de símbolo (Tabach, Arcavi & Hershkowitz, 2008). A tecnologia tem vindo a desenvolver duas características: a dinamicidade, que permite identificar a invariância, usando a variação proporcionada pelo *software* para ver o que muda e o que permanece constante; e a interactividade, que permite dar um retorno às acções do utilizador, fazê-lo pensar e reflectir sobre as consequências dessas acções (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006).

Estas características estão presentes na folha de cálculo, ferramenta que Tabach, Hershkowitz, Arcavi e Dreyfus (2008) consideram com potencialidades para a aprendizagem da álgebra escolar. De facto, a folha de cálculo: (i) pode ser usada para organizar e analisar dados e criar sequências de números; (ii) permite explorar o significado de tendências nos dados e usar diferentes representações para as mostrar; (iii) serve como intermediária entre o sistema simbólico algébrico e o sistema de notação verbal informal. No mesmo sentido, Haspekian (2003) reconhece a folha de cálculo como uma boa ferramenta de mediação semiótica, intermediária entre a Aritmética e a Álgebra e permitindo a progressão dos alunos a partir dos seus métodos intuitivos aritméticos para outros algébricos.

Esta ferramenta tecnológica, ajuda na observação de relações entre quantidades, permite múltiplas representações de funções, reduzindo a carga cognitiva de interacção com aspectos do simbolismo matemático, e valoriza a aprendizagem de exemplos que articulam várias representações como os gráficos e as tabelas (Yerushalmy & Chazan, 2003), permitindo perspectivar uma nova forma de integrar a Álgebra no currículo: “As recentes abordagens apoiadas tecnologicamente à Álgebra introdutória escolar, muitas vezes enfatizam o uso de múltiplas representações de funções e deste modo parecem articular um papel curricular diferente para as funções na Álgebra escolar” (Yerushalmy & Chazan, 2003, p. 729).

Um estudo de Bills, Wilson e Ainley (2005), sobre a concepção de tarefas com base na folha de cálculo com o objectivo de desenvolver a competência algébrica,

nomeadamente o conceito de variável, em alunos de 11 e 12 anos, sugere: o equilíbrio entre os diferentes tipos de actividade algébrica, previstos por Kieran (2007a); a familiaridade e fluência com as estruturas da aritmética, de modo a expressarem a generalização; o aproveitamento da notação da folha de cálculo que permite dar ao aluno um retorno imediato das suas acções, sendo a referência da célula entendida, quer como ‘célula’ variável, quer como ‘coluna’ variável (Haspekian, 2003); e o sentido e significado da tarefa para o aluno, ao longo do trabalho que desenvolve na sala de aula. Este autor considera que, ao contrário do trabalho com papel e lápis, a folha de cálculo “acrescenta uma organização algébrica a uma resolução aritmética (...) [e] o método [de tentativa e erro] (acessível mesmo quando os alunos usualmente encontram dificuldades) favorece, pela organização da folha em si mesma, a transição para a Álgebra” (p. 5).

Desde o final da década de 80 vem sendo dada grande atenção às múltiplas representações no ensino da Álgebra. O uso de uma ou outra representação tem a ver com a concepção das tarefas, uma vez que cada uma delas acentua e valoriza diferentes aspectos (Friedlander & Tabach, 2001; Morgan, Mariotti & Maffei, 2009). As tabelas e os gráficos são as representações que mais significado trazem ao trabalho com a tecnologia para desenvolver o pensamento algébrico. Embora a prova da equivalência de expressões algébricas exija a simbologia e o trabalho algébrico, a representação em tabela dos dados numéricos que resultam da substituição de valores nas expressões, constituem um bom ponto de partida, permitindo que os alunos tenham “uma experiência com variáveis como números que vão mudando, e com os valores das expressões mudando como resultado (...) A tabela funciona como uma ponte entre a Aritmética, onde os números são específicos, e a Álgebra” (Brown & Mehilos, 2010, p. 536), onde as variáveis expressam relações gerais. No entanto, parecem ser as múltiplas representações disponibilizadas pela folha de cálculo, em particular a facilidade de estabelecer relações entre as representações numérica e gráfica, que podem ajudar os alunos “a dar sentido aos modelos algébricos dos fenómenos físicos” (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006, p. 252). A investigação conduzida em ambientes tecnológicos, chama a atenção para a importância da qualidade das tarefas e das discussões em sala de aula, em que o professor procura que os conceitos venham ao de cima, na actividade

transformacional, mas assinala também a necessidade de manter em paralelo o trabalho com as técnicas algébricas de papel e lápis (Kieran, 2007).

## **Metodologia**

Para compreender o conhecimento profissional que assiste o professor no desenvolvimento curricular e na prática lectiva, no domínio do pensamento algébrico, com recurso à tecnologia, optou-se por uma metodologia de natureza interpretativa, numa investigação de tipo qualitativo, na modalidade de estudo de caso. A opção por um estudo qualitativo e interpretativo decorre do interesse em dar atenção às especificidades do “significado e da acção na vida social que tem lugar em situações concretas da interacção face a face que se desenvolvem num contexto social mais alargado” (Erickson, 1986, p. 156). A interpretação e a construção dos significados não correspondem ao ponto de vista do investigador sobre a realidade observada, mas são uma construção que resulta da intersubjectividade presente na relação entre o investigador e os sujeitos, tendo por base as observações, a reflexão e outros dados. Os resultados são apresentados sob a forma de narrativas descritivas ilustradas com citações dos informantes. A preocupação central está nos significados que as pessoas atribuem às suas experiências e à forma como as interpretam, realizada através de uma análise de dados indutiva, em que as abstracções, conceitos ou teorias surgem ‘de baixo para cima’ (Merriam, 1988; Bogdan & Biklen, 1994). Stake (2007) reconhece que os investigadores qualitativos, de modo a conseguirem uma melhor compreensão sobre as situações, captam a realidade “em episódios chave ou testemunhos e representam os acontecimentos com a sua própria interpretação directa e histórias” (p. 55).

A opção pela modalidade de estudo de caso foi determinada tendo em atenção as quatro características identificadas por Merriam (1988) como propriedades essenciais de um estudo de caso qualitativo: ser particularístico, descritivo, heurístico e indutivo. Uma vez que se pretende descrever o conhecimento particular de duas professoras, integrando transcrições e interpretações que tragam compreensão sobre o objecto do estudo, através de relações e padrões que emergem indutivamente da análise de dados, realizaram-se dois estudos de caso instrumentais.

Para apropriação dos significados das acções e opções das professoras, o primeiro autor deste artigo integrou um contexto de trabalho colaborativo com duas professoras de Matemática que leccionam o 7.º ano. Nas dez sessões de trabalho (S0 a S9) gravadas ao longo de um ano lectivo, a equipa discutiu e elaborou tarefas sobre pensamento algébrico, com uso das tecnologias e reflectiu sobre cinco aulas observadas e videogravadas, de cada professora, a partir do vídeo e de um guião. As sessões presenciais, a par da comunicação síncrona e assíncrona desenvolvida na plataforma de gestão de aprendizagem (LMS) *Moodle*, a distância, constituíram as fontes principais de recolha de dados. A observação das aulas constituiu fonte de dados secundária, mediada pela discussão e reflexão na equipa.

Inicialmente foi discutido com as professoras um plano de trabalho que estabelecia o protocolo da colaboração, nomeadamente os compromissos ao nível do trabalho para desenvolver o pensamento algébrico e usar a tecnologia em sala de aula. Foram ainda realizadas duas entrevistas semi-estruturadas (E1 e E2), uma no início, sobre o percurso escolar e profissional das professoras, de diagnóstico e expectativas sobre o trabalho em torno do pensamento algébrico e as tecnologias e outra no final, procurando fazer um balanço do trabalho colaborativo realizado.

Nas sessões presenciais, discutiram-se as grandes ideias sobre o pensamento algébrico, com origem na análise de tarefas já usadas pelas professoras, em tarefas que se adaptaram de textos de investigação ou em problemas que as professoras adaptavam e algebrizavam, a partir dos seus manuais escolares. A reflexão sobre a prática na sala de aula incidia no processo de implementação das tarefas, nomeadamente sobre os processos de apresentação e condução da tarefa, sobre a comunicação, as formas de organização do trabalho e o papel da tecnologia.

A plataforma *Moodle* constituiu simultaneamente um repositório de tarefas, de documentos de orientação curricular e de investigação e um espaço de interacção entre os membros da equipa, onde se dava continuidade às sessões presenciais e se preparava a sessão seguinte. Utilizaram-se três *chats* (Ch) que decorreram entre as quatro primeiras sessões e dez fóruns, organizados mensalmente, que serviam para informações, comentários e envio de propostas de trabalho do investigador e das professoras.

## **Duas professoras, duas práticas de uso da tecnologia**

Ana e Beatriz, as professoras que integraram a equipa colaborativa, leccionam o 7.º ano de escolaridade. Uma vez que não são professoras experimentadoras do novo Programa de Matemática, seguem o Programa de 1991. Ana, com 54 anos, tem 28 anos de serviço, possui uma licenciatura em Matemática e um Mestrado em Informática e Educação e lecciona numa Escola Básica 2,3, onde é professora há 24 anos. Beatriz, com 31 anos, tem 9 anos de serviço, é licenciada em Matemática e lecciona numa Escola Básica do 2,3, onde está há 3 anos, tendo já percorrido 8 escolas e leccionado disciplinas de Informática durante um ano e Educação Moral e Religiosa Católica, durante 2 anos.

### **Visão sobre o uso da tecnologia e metodologias de utilização**

Tanto Ana como Beatriz têm uma fácil relação com o computador e integram-no facilmente no trabalho com os alunos. Consideram mesmo que a tecnologia é um recurso que deve estar naturalmente presente nas suas salas de aula e que aumenta e diversifica a oferta de oportunidades para aprender.

Ana vê o computador integrado de forma natural, no trabalho curricular, devido à sua experiência anterior no domínio da comunicação e da gestão da sala de aula, cujas raízes estão no seu estágio, o que lhe permitiu centrar-se nos novos desafios e tarefas a desenvolver com a tecnologia:

As coisas que eu fazia no estágio (...) a maneira de organizar a aula, a maneira de organizar a discussão com os elementos dos grupos dos alunos ou individualmente, senti que quando eu comecei a usar o computador ... eu já trabalhava, o que eu senti naquela altura foi que ... a maneira como eu trabalhava em sala de aula era sem computador, mas era já uma maneira de trabalhar que me permitiu não ter receio de utilizar o computador (...) Também vi isso quando estudei um bocadinho mais a fundo, quando fiz a tese de mestrado (...) eu não tive que me preocupar muito com a mudança da minha aula e então eu naquela altura preocupei-me com as tarefas com aquele novo instrumento, porque a maneira como eu trabalhava já era potenciadora de utilizar diversos ... qualquer instrumento. (Ana\_E1)

Para Beatriz, parece ser natural integrar a tecnologia no ensino, porque partilha uma certa crença de ser um meio auxiliar, mas não está completamente certa do que promove em termos de aprendizagem da Matemática, embora sugira o seu uso continuado:

Eu faço isto de uma forma natural porque eu gosto muito da tecnologia e quando posso, tento relacionar (...) Ainda estava tudo no início e eu já tentava fazer tudo o que podia com a tecnologia (...) Agora, relacionado com a Matemática, em termos de pedagogia, em termos de meios pedagógicos, eu acho que ajuda muito. (Beatriz\_S2)

Ana e Beatriz salientam aspectos diferentes para justificar a integração do computador na aula. Beatriz, embora identifique diferentes finalidades, salienta a motivação dos alunos, quando se pretende introduzir, esclarecer ou consolidar conteúdos: “Eu vejo agora usando as tecnologias que eles ficam mais motivados, mais atentos e mais concentrados naquilo que se está a fazer” (Beatriz\_E1). Pelo contrário, a ideia de motivação, é rejeitada por Ana, termo que diz já ter retirado do seu vocabulário. Reconhece que é essencial sair da rotina e ganhar o entusiasmo e envolvimento dos alunos, mas que isso se consegue pelos desafios que faz:

Eu não levo o computador para motivar os meninos para a Matemática. Eu levo o computador com uma actividade específica para trabalhar. A motivação vem se a actividade na verdade tem interesse, se a actividade é boa (...) Mas a verdade é que se a aula não for bem preparada, se a tarefa não for bem organizada, não é o computador já que os prende ali porque isto já começa a ser corriqueiro. (Ana\_E1)

O modo de integrar a tecnologia na aula está muito relacionado com a forma como cada uma das professoras vê a organização do contexto de aprendizagem e a comunicação. Tanto uma como outra recorrem ao uso do quadro interactivo como ferramenta de apoio ao ensino. Ana tem vindo a trabalhar, mais recentemente, com o quadro interactivo e acredita que esta ferramenta, ao permitir o acesso a objectos matemáticos e a pequenos programas interactivos, pode incentivar a comunicação na sala de aula. Reconhece que este recurso tem potencialidades, principalmente a nível do ‘histórico’, pois permite-lhe guardar a informação anterior:

Tenho utilizado muitas vezes ... a escrever tudo ali ... e a guardar ... Sabes o que é que eu sinto também nesse aspecto é porque a gente apaga o quadro não é?! E depois de repente há lá uma coisinha atrás que era tão bom que a gente pudesse ver e ali não ... a gente vai lá. (Ana\_S8)

O quadro interactivo ocupa um lugar de maior destaque nas aulas de Beatriz. Serve normalmente, para apresentar assuntos nas aulas, apoiar a sua exposição e explicação e tornou-se uma ferramenta natural do seu trabalho, a que recorre em conjunto com algum programa específico como um AGD ou a Escola Virtual, servindo-se de ficheiros que criou ou de recursos que o quadro disponibiliza:

Recorrendo ao quadro interactivo facilita que toda a turma, todo o grupo esteja a ver a mesma coisa, o mesmo gráfico, estão todos centrados na mesma coisa, portanto facilita a sistematização lá está e ao consolidar daquilo que eles já tinham pensado antes. (Beatriz\_S6)

É assim que este recurso apoia um estilo de ensino centrado na apresentação e explicação de conteúdos pela professora Beatriz.

Como Ana se sente à vontade com o trabalho de grupo, metodologia que usa há muitos anos na sua prática, os computadores portáteis integraram-se aí de modo natural: “Eu gosto muito de trabalhar assim, porque juntei dois em um. Eu vim regressar à minha maneira de trabalhar antes, sobre a construção de um conceito em que agora eu estou no século XXI... com aquilo que agora trabalhamos” (Ana\_S6). Beatriz já usava os computadores portáteis, mas fazia-o de forma esporádica, sobretudo porque reconhecia ter dificuldades na gestão do trabalho de grupo, situação relativamente à qual foi evoluindo, mas que reconhece ter ainda um longo caminho a percorrer:

Acho que em termos de aula, tenho que evoluir muito no desenvolver o trabalho de grupo com eles, trabalhar em grupo, agora no final deste ano fazer um balanço e tentar fazer propostas para o próximo ano ... para mim própria. (Beatriz\_S9)

Ao longo do ano, Ana mantém a sua forma de usar computadores, combinando o uso dos computadores portáteis e do quadro interactivo. No entanto, Beatriz vai alterando progressivamente o modo de ver e trabalhar com a tecnologia. A experiência na equipa

mostra-lhe outras possibilidades de integrar a tecnologia, mais centradas no trabalho em pequeno grupo dos alunos, com computadores portáteis, de que se tem vindo a apropriar:

Isso talvez seja o ponto essencial (...) Quando eu digo que tenho de estruturar a minha capacidade de deixar os alunos trabalhar em grupo e ajeitar as aulas para isso, conduzir as aulas para tal, acho que isso é a parte fundamental. É onde nós podemos tirar mais-valias ainda ... (...) da tecnologia. (Beatriz\_E2)

No final do ano Beatriz reconhece que existem diferenças significativas, em termos de aprendizagem dos alunos, entre usar a folha de cálculo com os computadores portáteis, em pequeno grupo ou usar o quadro interactivo em discussão com toda a turma. Identifica que, no primeiro caso, perde mais tempo com o trabalho de pequeno grupo, mas ganha ao nível da motivação, envolvimento e desenvolvimento do pensamento algébrico:

Ao trabalhar com a folha de cálculo directamente vamos demorar mais tempo na realização da tarefa, não quer dizer que seja mais vantajoso, ou menos vantajoso, (...) os alunos aí estão mais envolvidos, no entanto (...) gera-se mais confusão obviamente porque temos que esclarecer as dúvidas a nível técnico, da sintaxe da própria folha de cálculo ... ou dos computadores (...) Em termos de pensamento algébrico são eles que sozinhos, portanto em grupo, discutem a forma como hão-de lá chegar, portanto, desenvolve melhor o pensamento ... o raciocínio algébrico. E também acho que é mais motivador. (Beatriz\_S6)

### **A tecnologia para desenvolver o pensamento algébrico**

**A generalização.** Ana e Beatriz, embora com um bom conhecimento sobre as tecnologias têm um conhecimento limitado do que é o pensamento algébrico. O trabalho da equipa permitiu ir aprofundando o entendimento de como este pode ser desenvolvido com os alunos, tirando partido das potencialidades da tecnologia. Logo na 2.<sup>a</sup> sessão da equipa, Ana reconhece que o processo de cópia em coluna, na folha de cálculo, expõe os valores numéricos, pondo a descoberto as relações e mostrando regularidades:

Começámos por não ter expressão com variável, mas depois com o *copy* e tudo o mais, eles se calhar ainda não têm essa noção, mas verificam que

acontece sempre ... aquele conjunto grande, todo. E se a gente fizesse só um, não tinham essa noção. (Ana\_S2)

Esta potencialidade da folha de cálculo para generalizar a partir de um conjunto de dados numéricos em tabela, permite perceber a expressão algébrica que gera esse conjunto de dados:

Quando eu verifico que todas as entradas - saídas, afinal de contas, têm uma regularidade, eu posso caracterizá-las por uma expressão em que então aí já tem a variável que é para cada um daqueles casos em especial. E quando eu escrevo isto eu não estou a precisar de nenhum caso em especial já (...) Na verdade, a expressão com variável é aquela que me dá a relação toda (...) sem eu necessitar de nenhuma especificidade para um caso ... (...) É como se já tivessem saído todos e agora ponho aqui todos à minha frente e agora vou caracterizar como é que foram aquelas saídas daquela máquina ... (Ana\_S2)

Este mesmo aspecto é igualmente salientado por Beatriz, na mesma sessão de trabalho, ao referir que a análise da tabela funciona como um caminho para a generalização: "Não consegues generalizar, se fores só alterando aqui numa linha [caso a caso] (...) perdemos completamente a noção ..." (Beatriz\_S2).

No contexto da análise de textos que relatam a exploração de tarefas por alunos e nas primeiras experiências que realizou, Beatriz, logo na 1ª sessão da equipa, identifica a potencialidade da passagem da generalização local para a expressão geral de uma sequência e da importância da natureza das questões a colocar:

Eu pedia aqui ... nesta ficha até ... construir os pares ... e o que é que eles foram fazer?! ... Em vez de fazerem através da coluna A [sequência dos números naturais], escreveram a fórmula ... [na coluna B], puseram um 2 na primeira linha e depois +2 (...) Eu aqui dizia que era a partir da coluna A ... portanto e depois fazia ... estava certo se eu não dissesse nada (...) Faziam no Excel e depois registavam aqui [na ficha] também ... a fórmula. (Beatriz\_S1)

Este aspecto volta a ser realçado por Beatriz na 2ª sessão: "Como é que eu obtenho os números pares? Qual é a máquina? Como é que eu posso obter o 2, o 4, o 6, o 8, a partir dos naturais?" (Beatriz\_S2).

Na evolução dos seus alunos relativamente à generalização, Ana reconhece, tal como Beatriz, as potencialidades da folha de cálculo e a importância de colocar questões adequadas. Acrescenta ainda a importância de relacionar a interpretação em linguagem natural com a representação em tabela, na folha de cálculo:

E a partir daqui foi surgindo, portanto, eu fui fazendo a sequência e no fim escrevi mesmo Posição (entre parêntesis) e lá em cima, 2 vezes posição, mais um ... e aos poucos foi surgindo. Quando daqui surgiu o n, transitámos da posição para o n e depois foi só escrever. Aquilo agora tenho de pegar naquilo para trabalhar, não é?! Mas foi muito ... senti que a turma percebeu muito bem que aquele n variava, porque eles têm a noção da posição que varia. E nunca tinha sentido que ficasse tão bem interiorizado que aquilo variaria, assim desta maneira. (Ana\_S1)

**As representações múltiplas.** A tarefa das carteiras, na 3ª sessão, contextualiza uma primeira discussão sobre o modo como as múltiplas representações, favorecidas pelo uso da folha de cálculo, alicerçam ideias importantes do pensamento algébrico:

**O dinheiro do Miguel e do Rodrigo**

O Miguel tem 8€ na sua mão e o resto do seu dinheiro na carteira.

O Rodrigo tem exactamente 3 vezes mais dinheiro do que o Miguel tem na sua carteira.

O que se pode dizer da quantidade de dinheiro que o Miguel e o Rodrigo têm?




Figura 1. Tarefa – O dinheiro do Miguel e do Rodrigo

Beatriz hesita usar, para além da representação em tabela, a representação gráfica e reflecte sobre a importância de relacionar as duas representações:

Estava a pensar, não sei se é bom se é mau, depois de construirmos a tabela pedir a construção do gráfico e depois fazer as questões quando é que o Miguel tem mais quantia do que o Rodrigo e fazer uma análise da tabela e gráfico em paralelo?! (...) E depois pedir, *Então escreve uma expressão que relacione ambas as quantias* e obtínhamos aí uma equação ... e eles viam graficamente ... (Beatriz\_S3)

Ana considera que, usar a representação gráfica e numérica, em simultâneo, e traduzir uma na outra, constitui um desafio que vai além do programa.

Com a evolução do trabalho da equipa, Ana e Beatriz vão identificando mais-valias para a aprendizagem, que decorrem do uso das diferentes representações que a folha de cálculo disponibiliza. Ana, na 4ª sessão, refere que as diferentes representações a que recorre (numéricas, geométricas, gráficas, simbólicas algébricas ou mesmo a linguagem natural), a par daquelas que os alunos usam na abordagem dos problemas, vêm ao encontro dos diversos estilos de aprendizagem, permitindo que cada um ‘agarre’ melhor umas que outras, trazendo-lhes uma compreensão mais global: “É realmente o que eu sinto, também. Esta diversidade ...” (Ana\_S4).

Beatriz também salienta que o uso das diferentes representações da folha de cálculo, facilita uma apropriação dos conceitos, de modo natural, porque os representa de variadas formas, articuladas entre si: “Porque nós num problema conseguimos relacionar tabelas, relacionar gráficos, chegar às expressões... A articulação dos conteúdos é feita de uma forma natural” (Beatriz\_S6). Ana partilha também desta ideia e salienta que a familiarização progressiva com um conceito está associada à experiência que os alunos têm tido com as diferentes representações, desde as tabelas numéricas, aos gráficos, até chegar às expressões algébricas. Resume esta ideia numa expressão que usa com alguma frequência (*elas já falam convosco*): “Vocês, quando olham para aquelas expressões, elas já falam convosco... já vos dizem coisas, não é?!” (Ana\_S6).

O uso em simultâneo das duas representações, gráfica e em tabela, é para Ana uma mais-valia para estabelecer conexões e melhorar a compreensão dos alunos: “Isto é outra coisa que eu optei por fazer que é... que era para ter as duas coisas ao mesmo tempo. Assim, eu projectei ao mesmo tempo... que era para ver o gráfico ao mesmo tempo da tabela” (Ana\_S9). Beatriz reforça e clarifica esta ideia ao reconhecer o contributo específico de cada uma das representações e, no final do trabalho colaborativo, vai mais longe ao admitir que este trabalho a leva a repensar a matemática que ensina e a forma de o fazer no futuro:

São três modos de organização de dados que estiveram sempre constantes no nosso trabalho. E acho que isso foi muito pertinente e para os alunos torna-se ainda mais pertinente e tem uma razão de ser cada representação. Porque eles não viam a representação isolada, eles tinham que recorrer a uma e a outra para conseguirem interpretar os seus dados

(...) Acho que aqui é o mais evidente e aquilo que se realça mais (...) Se calhar são alunos que são capazes de chegar ao 9.º ano e já não ter dúvidas (...) Isto agora só com a prática e o ir experimentando ao longo dos anos é que nós vamos verificando realmente... (Beatriz\_E2)

## **Conclusão**

No desenvolvimento do trabalho colaborativo, as professoras contactam com o processo de generalização a partir do que lêem em episódios de investigação sobre regularidades e do que discutem na equipa, quando procuram passar da análise dos casos específicos para o estabelecimento de uma lei geral. Apropriam-se progressivamente do papel da tecnologia, nomeadamente da folha de cálculo para generalizar, ao gerar grandes quantidades de dados numéricos em tabela, cuja análise revela relações subjacentes, contribuindo para clarificar o conceito de variável e desenvolver o pensamento algébrico, na linha do que referem vários autores (Haspekian, 2003; Tabach, Arcavi & Hershkowitz, 2008).

O uso de várias representações em simultâneo, nomeadamente a representação gráfica e a numérica em tabela, constituem para as duas professoras um desafio que vão integrando na sua prática. Fazem-no de forma mais deliberada quando reconhecem na tecnologia uma mais-valia no trabalho com regularidades e funções, por permitir visualizar cada uma delas em diferentes ‘janelas’ interdependentes, observar e reflectir sobre as implicações das mudanças de uma na outra, características referidas por Kaput (1989) e Yerushalmy e Chazan (2003). As professoras reconhecem a contribuição específica e diferente de cada uma das representações, que pode ir ao encontro da diversidade dos alunos presente na aula e contribuir para melhorar a aprendizagem, tendo em conta a natureza da tarefa e das questões colocadas, como referem Friedlander e Tabach (2001) e Morgan, Mariotti e Maffei (2009).

As professoras encaram com à vontade e integram a tecnologia nas suas aulas, mas os processos de trabalho e as formas de organização dos alunos variam consideravelmente. A evolução observada no modo como vêm e usam a tecnologia para desenvolver o pensamento algébrico dos seus alunos está intimamente ligada com a equipa colaborativa e com o contexto de trabalho criado, com o objectivo de elaborar e experimentar com os alunos tarefas sobre pensamento algébrico, usando a tecnologia,

que se evidencia assim como muito promissor em termos de desenvolvimento profissional.

## Referências

- Bills, L., Wilson, K., & Ainley, J. (2005). Making links between arithmetic and algebraic thinking. *Research in Mathematics Education*, 7(1), 67-81.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. New York: Nichols.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.
- Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 237-273). Roterdham: Sense.
- Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.
- Haspekian, M. (2003). Between arithmetic and algebra: A space for the spreadsheet? Contribution to an instrumental approach. In *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Pisa, Italy, Universita di Pisa, Thematic Working Group 9. Acedido em 26 de Maio, 2010, de <http://www.dm.unipi.it/~didatica/CERME3/proceedings/>.
- Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol Systems of algebra. In C. Kieran & S. Wagner (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Hillsdale: Erlbaum.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school trough college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.
- Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 429-459). Rotherdam: Sense.
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Acedido em 15 de Outubro, 2008, de [http://sitio.dgicd.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa\\_Matematica.pdf](http://sitio.dgicd.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa_Matematica.pdf).
- Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 45-52). Reston: NCTM.
- Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.

- Morgan, C., Mariotti, M. A., & Maffei, L. (2009). Representation in computational environments: Epistemological and social distance. *International Journal for Computers in Mathematics Learning*, 14(3), 241-263.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 561-588). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. I, pp. 157-223). Greenwich: Information Age.
- Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Tabach, M., Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Dreyfus, T. (2008). Computerized environments in mathematics classrooms. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 784-805). New York: Routledge.
- Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2003). Flux in school algebra: Curricular change, graphing technology, and research on student learning and teacher knowledge. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 725-755). Dordrecht: Kluwer.