



Rute Isabel Augusto
Santana

**Resolver tarefas de multiplicação e
divisão. Um estudo com alunos de
3.º ano.**

Relatório da componente de investigação do
relatório de estágio sobre a prática de ensino
supervisionada do Mestrado em Educação Pré-
Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Setúbal, dezembro de 2017

Versão definitiva



Rute Isabel Augusto
Santana
n.º 150140011

**Resolver tarefas de multiplicação e
divisão. Um estudo com alunos de
3.º ano.**

Relatório da componente de investigação do
relatório de estágio sobre a prática de ensino
supervisionada do Mestrado em Educação Pré-
Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria de Fátima
Pista Calado Mendes

Setúbal, dezembro, 2017

Versão definitiva

Resumo

O presente estudo integra a área da Matemática e tem como principal objetivo compreender como é que os alunos de 3.º ano resolvem tarefas de multiplicação e divisão. Como tal, este estudo pretende identificar quais as estratégias que os alunos utilizam e quais as dificuldades existentes quando resolvem tarefas que envolvem estas duas operações.

A fundamentação teórica apresenta e discute tópicos essenciais para o estudo, nomeadamente: a aprendizagem das operações multiplicação e divisão; a relação entre estas operações; as características das tarefas na aprendizagem da multiplicação e divisão; as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão; as dificuldades na aprendizagem da multiplicação e divisão; a aprendizagem da multiplicação e divisão nas orientações curriculares; e, por fim, o papel do professor na aprendizagem destas operações.

Enquadra-se numa investigação de carácter qualitativo de natureza interpretativa. Todos os 20 alunos da turma participaram na intervenção realizada em sala de aula, porém, apenas três foram selecionados para que fosse realizada uma análise mais profunda das resoluções das tarefas propostas. Contudo, foram analisados os diálogos realizados por toda a turma na resolução das cadeias numéricas, que complementam a sequência de tarefas proposta. A proposta pedagógica elaborada, constituída por seis problemas e três cadeias numéricas, foi desenvolvida ao longo de cinco semanas. No decorrer deste período foi efetuada a recolha dos dados necessários para a investigação, maioritariamente através da observação participante e da recolha documental.

As conclusões sobre as estratégias utilizadas pelos alunos quando resolvem problemas de multiplicação e divisão demonstram que: os alunos recorrem ao uso quase exclusivo de estratégias multiplicativas, evidenciando que já começam a conseguir compreender a relação entre multiplicação e divisão; nas primeiras tarefas de multiplicação também recorrem a estratégias aditivas; a estratégia mais usada pelos alunos é multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência.

Palavras-Chave: Aprendizagem da multiplicação; aprendizagem da divisão; estratégias dos alunos; tarefas matemáticas; trajetórias de aprendizagem; relacionar a divisão com a multiplicação.

Abstract

The present study integrates the area of mathematics and its main objective is to understand how the 3rd year students solve multiplication and division tasks. More specifically, it aims to develop mental calculation strategies in solving multiplication and division tasks. As such, this study intends to identify what strategies students use and what difficulties they have when solving tasks involving these two operations

The theoretical foundation presents topics essential for the study, namely: the learning of multiplication and division operations; the relation between multiplication and division; the characteristics of tasks in learning multiplication and division; the strategies used by students in solving multiplication and division tasks; difficulties in learning multiplication and division; the learning of multiplication and division in curricular guidelines; and, finally, the teacher's role in learning multiplication and division.

This study is part of a qualitative research of an interpretative nature. All 20 students in the class participated in the classroom intervention, however, only three were selected for a more in-depth analysis of their resolutions. However, the three number chains that complemented the task sequence implemented, involving the whole class, were analyzed.

The elaborated pedagogical proposal, consisting of six problems and three numerical chains, was developed over five weeks. During this period, I collected the necessary data for the investigation, mainly through observation and documentary collection.

The conclusions about the strategies used by students when solving problems of multiplication and division show that: students resort to the almost exclusive use of multiplicative strategies, showing that they are already beginning to understand the relation between multiplication and division; in the first multiplication tasks they also resort to additive strategies; the strategy most often used by students is to multiply successively from a reference product.

Keywords: Multiplication learning; division learning; student strategies; mathematical tasks; learning trajectories; relate division to multiplication.

Agradecimentos

Concluído este projeto de investigação, quero agradecer a todos os que me apoiaram e auxiliaram durante o meu percurso académico e a terminar este relatório final.

À minha orientadora, Professora Doutora Fátima Mendes, pela presença e pelo apoio prestado ao longo deste trabalho, pelas sugestões, pelas críticas e pela motivação que me ajudaram a terminar todo este processo.

À professora cooperante Cristina Silva, por todo o apoio e dedicação ao longo do estágio, pelos conselhos, pela disponibilidade e pela entrega da sua turma permitindo a realização deste estudo.

Aos alunos do 3.º ano pelo carinho e a ajuda nos momentos das minhas intervenções.

À Raquel e à Catarina por todo o apoio que me deram ao longo de todo o meu percurso escolar, quer na Licenciatura quer no Mestrado, pela paciência, pelas palavras de encorajamento, pelo carinho, pelas conversas de diferentes aspetos do trabalho e não só e por não me deixarem desistir.

Ao meu namorado, João Castanheira, por todas as *pequenas grandes coisas*.

À minha família pelo apoio incondicional e pela paciência ao longo destes anos. Em especial à minha irmã pela paciência e ajuda ao longo do meu percurso.

A todos, muito obrigada!

Índice Geral

Capítulo 1- 1Introdução.....	1
1.1. Motivações e pertinência do estudo.....	1
1.2. Objetivos e questões de estudo.....	3
1.3. Organização do relatório.....	4
Capítulo 2 - Quadro Teórico de Referência.....	7
2.1. A aprendizagem das operações multiplicação e divisão.....	7
2.1.1. A aprendizagem da multiplicação.....	7
2.1.2. A aprendizagem da divisão.....	11
2.1.3. A relação entre multiplicação e divisão.....	14
2.1.4. Caraterísticas das tarefas na aprendizagem da multiplicação e divisão.....	16
2.1.5. Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão.....	21
2.1.5.1. Estratégias de multiplicação.....	24
2.1.5.2. Estratégias de divisão.....	25
2.1.5.3. Estratégias de multiplicação e divisão.....	26
2.1.6. Dificuldades na aprendizagem da multiplicação e divisão.....	32
2.1.7. A aprendizagem da multiplicação e divisão nas orientações curriculares....	33
2.1.8. O papel do professor na aprendizagem da multiplicação e divisão.....	36
Capítulo 3 - Metodologia de Investigação.....	39
3.1. Opções metodológicas.....	39
3.1.1. Investigação sobre a prática.....	39
3.1.2. Investigação qualitativa.....	41
3.1.3. Estudo de casos.....	42
3.2. Contexto e participantes.....	43
3.2.1. Caraterização do contexto.....	43
3.2.2. Caraterização da turma.....	44
3.2.3. Caraterização dos alunos-caso.....	44
3.2.3.1. Tomás.....	45
3.2.3.2. Ilian.....	45
3.2.2.3. Pedro.....	46
3.3. Recolha e análise de dados.....	46
3.3.1. Técnicas de recolha de dados.....	46
3.3.1.1. Observação participante.....	47

3.3.1.2. Recolha documental	48
3.3.1.3. Entrevistas clínicas	48
3.3.2. Processo de recolha de dados	49
3.3.3. Processo de análise de dados	50
Capítulo 4 - Proposta pedagógica	53
4.1. Sequência de tarefas proposta	53
4.1.2. Tarefa 3 – Máquina de bebidas 2	56
4.1.3. Tarefa 4 – Máquina de bebidas 3	57
4.1.4. Tarefa 6 - As miniaturas 1	58
4.1.5. Tarefa 7 – As miniaturas 2	59
4.1.6. Tarefa 9 – As miniaturas 3	59
4.1.7. Tarefa 2 – Cadeia numérica 1 / Tarefa 5 – Cadeia numérica 2 / Tarefa 8 – Cadeia numérica 3	60
4.2. A preparação da exploração das tarefas	61
4.3. A exploração das tarefas em sala de aula	62
4.3.1. Exploração dos problemas	63
4.3.1.1. Apresentação do problema	63
4.3.1.2. Resolução do problema	64
4.3.1.3. Apresentação e discussão das estratégias	65
4.3.1.4. Exploração das cadeias numéricas	66
Capítulo 5 - Análise dos dados	69
5.1. As estratégias utilizadas pelos alunos-caso	69
5.1.1. As resoluções de Tomás	69
5.1.1.1. T1 – Máquina de bebidas 1	69
5.1.1.2. Tarefa 3 – Máquina de bebidas 2	71
5.1.1.3. T4 – Máquina de bebidas 3	73
5.1.1.4. T6 – As miniaturas 1	74
5.1.1.5. T7 – As miniaturas 2	75
5.1.1.6. T9 – As miniaturas 3	77
5.1.1.7. Síntese das estratégias utilizadas por Tomás	79
5.1.2. As resoluções de Ilian	80
5.1.2.1. T1 – Máquina de bebidas 1	80
5.1.2.2. T3 – Máquina de bebidas 2	81
5.1.2.3. T4 – Máquina de bebidas 3	84
5.1.2.4. T6 – As miniaturas 1	85

5.1.2.5. T7 – As miniaturas 2	87
5.1.2.6. T9 – As miniaturas 3	88
5.1.2.7. Síntese das estratégias utilizadas por Ilian	88
5.1.3. As resoluções de Pedro	90
5.1.3.1. T1 – Máquina de bebidas 1	90
5.1.3.2. T3 – Máquina de bebidas 2	91
5.1.3.3. T4 – Máquina de bebidas 3	93
5.1.3.4. T6 – As miniaturas 1	94
5.1.3.5. T7 – As miniaturas 2	95
5.1.3.6. T9 – As miniaturas 3	96
5.1.3.7. Síntese das estratégias utilizadas por Pedro	98
5.2. As cadeias numéricas	100
5.2.1. T2 – Cadeia numérica 1	100
5.2.2. T5 – Cadeia numérica 2	105
5.2.3. T8 – Cadeia numérica 3	109
5.2.4. Síntese das estratégias de resolução das cadeias 2, 5 e 8	112
Capítulo 6 - Conclusões	114
6.1. Síntese do estudo	114
6.2. Conclusões do estudo	115
6.3. Reflexão Final	119
Referências Bibliográficas	122
Anexos	127
Apêndices	132

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Categorização de procedimentos e procedimentos específicos de Mendes (2012)	27
Tabela 2 - Análise comparativa das categorizações das estratégias usadas por alunos na resolução de problemas de multiplicação	30
Tabela 3 - Análise comparativa das categorizações das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão	31
Tabela 4 - Estratégias e Procedimentos de Cálculo.....	52
Tabela 5 - Identificação das tarefas e datas em que foram realizadas.....	55
Tabela 6 - Possíveis estratégias pensadas para a tarefa 1 - Máquina de bebidas 1	62
Tabela 7 - Síntese das estratégias utilizadas por Tomás.....	79
Tabela 8 - Síntese das estratégias utilizadas por Ilian	89
Tabela 9 - Síntese das estratégias utilizadas por Pedro	99
Tabela 10 - Tarefa 2, Cadeia numérica 1.....	100
Tabela 11- Tarefa 5, Cadeia numérica 2.....	106
Tabela 12 - Tarefa 8, Cadeia numérica 3.....	109
Tabela 13 - Síntese das estratégias utilizadas pelos alunos-caso nas tarefas de multiplicação	115
Tabela 14 - Síntese das estratégias utilizadas pelos alunos caso nas tarefas de divisão.....	117

Índice de Figuras

Figura 1 - Registo fotográfico da realização da cadeia numérica 2.....	67
Figura 3 - Resolução de Tomás da tarefa Máquina de bebidas 2	71

Figura 2 - Resolução de Tomás da tarefa Máquina de bebidas 1	69
Figura 4 - Resolução de Tomás da tarefa Máquina de bebidas 3	73
Figura 5 - Resolução de Tomás da tarefa As miniaturas 1	74
Figura 6 - Resolução de Tomás da tarefa As miniaturas 2	76
Figura 7 - Resolução de Tomás da tarefa As miniaturas 3	77
Figura 8 - Resolução de Ilian da tarefa Máquina de bebidas 1	80
Figura 9 - Resolução de Ilian da tarefa Máquina de bebidas 2	82
Figura 10 - Resolução de Ilian da tarefa Máquina de bebidas 3.....	84
Figura 11 - Resolução de Ilian da tarefa As miniaturas 1	86
Figura 12 - Resolução de Ilian da tarefa As miniaturas 2	87
Figura 13 - Resolução de Pedro da tarefa Máquina de bebidas 1.....	90
Figura 14 - Resolução de Pedro da tarefa Máquina de bebidas 2.....	91
Figura 15 - Resolução de Pedro da tarefa Máquina de bebidas 3.....	93
Figura 16 - Resolução de Pedro da tarefa As miniaturas 1	94
Figura 17 - Resolução de Pedro da tarefa As miniaturas 2	95
Figura 18 - Resolução de Pedro da tarefa As miniaturas 3	97
Figura 19- Cálculo 1, Cadeia numérica 1	101

Capítulo 1

Introdução

Este primeiro capítulo integra as motivações e a pertinência do estudo realizado em contexto de Estágio. Também contempla os objetivos e as questões que nortearam a investigação realizada. Termina com uma secção em que explico o modo como este trabalho se encontra organizado.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

O estudo realizado centra-se na área da Matemática, sendo esta uma área do saber que gera uma enorme controvérsia relativamente à sua importância, tornando-se fundamental implementar novas estratégias e metodologias, de modo a fazer repensar o seu papel na sociedade e, particularmente, face ao interesse dos alunos. Compreender e conhecer a Matemática são marcos essenciais para tornar o ser humano capaz de resolver determinadas situações que apelam aos saberes matemáticos do dia-a-dia. O NCTM (2008) preconiza que “a necessidade de compreender e de ser capaz de usar a matemática na vida quotidiana, e no local de trabalho, nunca foi tão premente” (p. 4). No caso particular deste estudo, serão abordadas as operações multiplicação e divisão na aprendizagem da matemática.

Enquanto futura professora do 1.º Ciclo do Ensino Básico é crucial o desenvolvimento de competências relacionadas com a minha profissão e na área da Matemática. Como tal, é fundamental que consiga construir, apresentar e orientar processos que envolvam o raciocínio matemático dos alunos e, por outro lado, que permitam aos alunos a construção do seu próprio conhecimento. Importa referir que, a

nível pessoal, esta área liga-se a algumas dificuldades que possuo, o que me fez optar por querer investir e melhorar o meu conhecimento matemático e, conseqüentemente, a minha prática em sala de aula relacionada com esta disciplina. Porém, a seleção do tema deste projeto teve também em consideração as dificuldades sentidas na Matemática pelos alunos da turma onde intervim, observadas por mim e explicitadas através de conversas informais com a professora cooperante. A par das dificuldades manifestadas pelos alunos foi também fonte de motivação a relevância dada pela professora cooperante à área da Matemática. De um modo mais específico direcionei-me para a resolução de tarefas de multiplicação e divisão. Estas foram pensadas de acordo com os alunos da turma e com o intuito de serem encaradas como problemas, levando os alunos a desenvolver o raciocínio e o cálculo mental associado a estas operações aritméticas.

Evidencio que, num primeiro momento, o tema iria apenas envolver a multiplicação, porém, tendo em conta os conteúdos que teria de lecionar durante o estágio e as orientações curriculares associadas à aprendizagem destas operações, optei por relacionar a multiplicação e a divisão. Esta relação parece acarretar bastantes dificuldades para os alunos, talvez originadas pela sua pouca compreensão, nesta altura, sobre algumas ideias matemáticas essenciais, porque fazer não significa compreender.

Muitas vezes a Matemática é trabalhada em sala de aula centrada apenas no uso do manual, descurando um pouco a importância de os alunos refletirem sobre o que estão a pôr em prática, não desenvolvendo assim o cálculo mental. Destaco as palavras de Freire (1998)

Não temo dizer que inexistente validade no ensino em que não resulta um aprendizado em que o aprendiz não se tornou capaz de recriar ou de refazer o ensinado. (...) nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado (...). Percebe-se, assim, que faz parte da tarefa docente não apenas ensinar conteúdos, mas também ensinar a pensar certo. (p.26)

Como tal, e sendo apologista de uma aprendizagem construtivista, onde é o aluno que possui o papel principal face à construção e exploração do seu próprio conhecimento mediante a orientação adequada do professor, considero que os professores deveriam adaptar os métodos e os instrumentos usam em sala de aula, de modo a incentivar os alunos não só a aprender, mas a pensarem e a desenvolverem o seu raciocínio. De acordo

com o NCTM (2008), “os alunos que memorizam factos ou procedimentos sem os compreenderem têm, muitas vezes, dúvidas sobre quando e como usar aquilo que aprenderam e essa aprendizagem revela-se frequentemente, bastante frágil” (p. 21). Por este motivo, optei por propor aos alunos um conjunto de tarefas que eram completadas com uma discussão coletiva no final de cada uma.

O modo como os alunos aprendem Matemática encontra-se evidenciado num dos princípios defendidos pelo NCTM (2013), o princípio da aprendizagem, onde é valorizada a ideia de que os alunos devem aprender com compreensão, implicando a construção de novos conhecimentos, considerando algumas experiências e conhecimentos adquiridos previamente.

Assim, optei por organizar uma sequência de tarefas com o intuito de desenvolver o cálculo mental associado à multiplicação e divisão. De acordo com Buys (2008), o cálculo mental caracteriza-se por ser um “movimento rápido e flexível no mundo dos números” (p. 122). No atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB, 2013) encontra-se especificada a importância de desenvolver nos alunos “o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental escrito” (p. 13). É também mencionado que para permitir que este objetivo seja cumprido é fundamental proporcionar aos alunos inúmeras situações que lhes permitam o desenvolvimento do cálculo mental, bem como a inserção na aula de rotinas de cálculo mental, auxiliando os alunos a desenvolver estratégias de cálculo flexíveis, utilizando as propriedades das operações (PMEB, 2013).

1.2. Objetivos e questões de estudo

Tendo em conta as motivações para a realização deste projeto e a sua pertinência, referidas anteriormente, foram delineados alguns objetivos e questões que me orientaram ao longo do trabalho desenvolvido.

Os objetivos que orientam a minha investigação são os seguintes:

- Compreender o modo como os alunos do 3.º ano de escolaridade resolvem tarefas que envolvem as operações multiplicação e divisão;
- Compreender o modo como os alunos relacionam as operações multiplicação e divisão.

Decorrente dos objetivos identificados formulei as seguintes questões:

- Como é que os alunos de 3.º ano resolvem tarefas de multiplicação?
- Como é que os alunos do 3.º ano resolvem tarefas de divisão e, em particular, usam a multiplicação na sua resolução?

De acordo com os objetivos e as questões de estudo estabelecidas, elaborei uma sequência composta por nove tarefas de multiplicação e divisão, das quais seis são problemas e três são cadeias numéricas, que foram exploradas com os alunos ao longo do tempo em que decorreu o estágio.

1.3. Organização do relatório

Este relatório é composto por seis capítulos. O primeiro corresponde ao capítulo em questão, onde explico o tema que está a ser trabalhado, bem como as motivações e a pertinência do estudo. Por fim, identifico os objetivos e as questões orientadoras.

No segundo capítulo elaboro uma revisão da literatura do respetivo tema que orienta o estudo, dividindo-a em cinco partes. Num primeiro momento foco-me na aprendizagem das operações multiplicação e divisão, tendo como base as perspetivas dos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) e em alguns autores, como Fosnot e Dolk (2001). Seguidamente, menciono as características das tarefas que podem promover a aprendizagem da multiplicação e divisão. Posteriormente, dedico uma parte desta revisão às estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão, ponto fulcral para o desenvolvimento deste trabalho. De seguida, enuncio algumas dificuldades que podem existir na aprendizagem da multiplicação e divisão. Depois realço a aprendizagem da multiplicação e divisão nas orientações curriculares e, num último momento, discuto sobre o papel do professor na aprendizagem da multiplicação e divisão.

No terceiro capítulo descrevo e fundamento as opções metodológicas subjacentes a esta investigação, começando por caracterizar a investigação sobre a prática e a razão por este estudo se inserir numa abordagem qualitativa de natureza interpretativa e de seguir a modalidade de estudo de caso. Seguidamente, elaboro uma breve caracterização sobre o contexto e a turma e descrevo o modo como selecionei os três alunos-caso. Por

fim, apresento as técnicas de recolha de dados utilizadas para conceber esta investigação, bem como menciono e descrevo os processos de recolha e de análise dos dados.

No quarto capítulo procedo à descrição e justificação da proposta pedagógica que suporta esta investigação. Como tal, enuncio os objetivos e conteúdos correspondentes a cada tarefa, justifico os números que foram utilizados nas tarefas e descrevo o modo como antecipei a exploração das tarefas. Por fim, evidencio a exploração dos problemas, ou seja, o modo como foram apresentados, o momento dedicado à resolução dos problemas e a forma como foram apresentadas e discutidas as estratégias. Posteriormente, relato o modo como as cadeias numéricas foram exploradas na sala de aula.

O quinto capítulo contempla a análise dos dados sendo o meu foco principal as produções dos três alunos selecionados. Procedo à análise das resoluções dos alunos, realizo uma síntese das estratégias utilizadas pelos mesmos, complementando com excertos das entrevistas clínicas e, por vezes, de situações em sala de aula. Analiso também as suas dificuldades na resolução dos problemas. Por fim, apresento no final deste capítulo uma análise do modo como os alunos pensaram para responder aos diferentes cálculos propostos no âmbito das cadeias numéricas sugeridas.

O sexto e último capítulo é iniciado com uma síntese de todo o estudo realizado. Posteriormente, apresento e discuto as conclusões do estudo, tentando responder às questões orientadoras que foram estabelecidas numa fase inicial e, por fim, procedo a uma reflexão final acerca de todo o processo de investigação.

Capítulo 2

Quadro Teórico de Referência

O presente capítulo integra um aprofundamento teórico sobre o tema que orienta esta investigação: resolver tarefas de multiplicação e divisão. Um estudo com alunos de 3.º ano.

Ao longo deste capítulo abordo aspetos relacionados com a aprendizagem da multiplicação, a aprendizagem da divisão e a relação entre as duas operações. Posteriormente, apresento e discuto características das tarefas que promovem a aprendizagem da multiplicação e divisão, fazendo referência ao que se entende por tarefa. Seguidamente apresento e discuto as categorizações das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão, tendo como principais referências os autores Mendes (2012/2013) e Mulligan e Mitchelmore (1997). Numa última secção, analiso as referências à aprendizagem da multiplicação e divisão nas orientações curriculares e são mencionadas algumas dificuldades dos alunos na aprendizagem da multiplicação e divisão. Termino discutindo o papel do professor na aprendizagem das operações aritméticas referidas.

2.1. A aprendizagem das operações multiplicação e divisão

2.1.1. A aprendizagem da multiplicação

A aprendizagem dos números e, conseqüentemente das operações aritméticas, é uma das temáticas mais importantes na área da Matemática. Ao longo do ensino,

os alunos deverão adquirir um conhecimento vasto dos números: o que são; de que forma são representados através de objetos, numerais ou retas numéricas; como se relacionam uns com os outros; como estão profundamente integrados em sistemas com

determinadas estruturas e propriedades; e como devem ser utilizados para resolverem problemas. (NCTM, 2007, p. 34)

Frequentemente diversos alunos não compreendem verdadeiramente os processos envolvidos nos cálculos que efetuam, resolvendo-os de forma mecânica, que não desenvolvem o raciocínio matemático. Segundo Zunino (1995), é fundamental que os alunos tentem efetuar os cálculos de diversas formas, sendo importante permitir-lhes que escrevam os cálculos que efetivamente fazem “e que quase nunca coincidem com o procedimento convencional” (p. 69). Refere ainda que estes “aprendiam muito mais a respeito das operações e das suas propriedades, sobre as estratégias que eles mesmos e os outros utilizam frente a diversas situações” (ibidem) e poderiam assim envolver-se com a matemática contrariamente a reduzirem na aplicação de procedimentos que não conseguem compreender.

No mesmo sentido, Brocardo, Serrazina e Rocha (2008), referem que “deve ser dada liberdade aos alunos para inventarem as suas próprias estratégias e procedimentos e discutida a sua eficiência e nível de generalidade” (p. 15). Além disso, Bass (2003), citado pelas autoras anteriores, refere que os algoritmos não devem ser considerados como inibidores do desenvolvimento das capacidades de cálculo, uma vez que, “quando trabalhados de modo adequado eles constituem uma parcela importante da capacidade de calcular fluentemente” (p. 105).

Focando-me no ensino e na aprendizagem da multiplicação, são inúmeros os investigadores que se têm direcionado para esta temática, como Treffers e Buys (2005) e Fosnot e Dolk (2001), que referem que os alunos desenvolvem a ideia de multiplicação através de determinadas experiências que vivenciam, em que vão atribuindo sentido ao que veem e fazem. Fosnot e Dolk (2001) mencionam que o modo como os alunos multiplicam, o modelo que usam para organizar os dados e como calculam se encontram relacionados com a ideia que têm sobre a multiplicação.

A operação multiplicação surge associada a diferentes contextos de resolução de problemas. Estes relacionam-se com dois sentidos relacionados com esta operação: sentido aditivo (ou adição repetida) e sentido combinatório (produto cartesiano). Segundo Boavida, Delgado, Mendes, Brocardo e Duarte (2016), o sentido aditivo “está associado a uma situação de conjuntos com o mesmo cardinal e pretende-se saber quantos elementos tem o conjunto formado pela reunião de todos” e o sentido combinatório “está associado

ao modo como se podem combinar os elementos de dois (ou mais) conjuntos A e B, o que corresponde a calcular o produto cartesiano de A por B” (p. 51).

Numa fase inicial, quando os alunos resolvem problemas de multiplicação, recorrem a estratégias aditivas, ideia subjacente nas investigações de autores como Greer (1992), Ponte e Serrazina (2000) e Brocardo, Serrazina e Rocha (2008). Ou seja, quando a estratégia de resolução se encontra associada à adição sucessiva “os alunos têm a tendência de juntar várias vezes a mesma quantidade” (Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008, p. 160). No entanto, Piaget (1987) evidencia diversas dissemelhanças entre a adição e a multiplicação, nomeadamente, o número de níveis de abstração e o número de relações de inclusão que a criança efetua simultaneamente. É fundamental destacar que, segundo este autor, a multiplicação não é somente uma forma mais rápida de efetuar adições sucessivas, mas trata-se de uma operação mais complexa (ibidem). Seguindo a mesma linha de pensamento, Ponte e Serrazina (2000), afirmam que “a multiplicação está relacionada com a adição, mas no raciocínio multiplicativo existem outros aspetos e relações que vão sendo trabalhados ao longo de toda a escolaridade” (p. 151).

Segundo Mendes (2012), inicialmente os alunos constroem ideias associadas à multiplicação, como a adição sucessiva de parcelas iguais. A autora refere que, ao longo do tempo, à medida que as suas ideias evoluem, relativamente à multiplicação, passam a recorrer a outras representações. Efetivamente, na resolução de problemas de multiplicação “os contextos ligados à disposição retangular e a crescente grandeza dos números envolvidos nos cálculos contribuem para o uso de procedimentos multiplicativos” (p. 502).

Mendes, Brocardo e Oliveira (2011), referem que os modelos associados à multiplicação, usados pelos alunos na exploração das tarefas, estão em estreita relação com os modelos e procedimentos utilizados para adicionar. De acordo com as mesmas autoras:

- “Uma decomposição dos termos usados na adição sucessiva de uma mesma quantidade permite passar de um modelo linear para um modelo bidimensional – o modelo retangular;
- O modelo linear, que suporta a adição sucessiva por “saltos”, transforma-se num modelo de proporção como a reta dupla ou as tabelas de proporção”. (p. 3)

Na aprendizagem da multiplicação deve ser privilegiado o uso do modelo retangular, porque é este que “ajuda a construir e consolidar o uso das propriedades distributiva e associativa e permite igualmente perceber a propriedade comutativa” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 3).

A utilização do modelo retangular na aprendizagem da multiplicação é defendida por diversos autores (Barmby, Bilsborough, Harries & Higgins, 2009; Battista, Clements, Arnoff & Borrow, 1998), que consideram que esta é uma das representações mais potentes que suporta a evolução do raciocínio multiplicativo (Barmby et al., 2009).

Relativamente ao modelo retangular, Fosnot e Dolk (2001), consideram que a sua utilização em determinadas situações facilita a passagem do processo de cálculo por contagem para o cálculo por estruturação. A evolução da multiplicação por estruturação para a multiplicação formal dá-se consoante o desenvolvimento do aluno, a sua capacidade de raciocinar face às relações numéricas e às propriedades provenientes dos modelos utilizados.

Há muito mais na compreensão da multiplicação (...) do que calcular quantidades. A criança deve aprender um conjunto inteiramente novo de sentidos de número e um novo conjunto de variáveis todos relacionados com a multiplicação. (Nunes et al., 1997, p. 142)

À semelhança do que acontece com outras operações, a aprendizagem da multiplicação desenvolve-se através de três níveis distintos: cálculo por contagem, cálculo estruturado e cálculo formal (Treffers e Buys, citado por Brocardo, Serrazina e Rocha, 2008):

- O *cálculo por contagem* (adicionar para multiplicar) corresponde ao primeiro nível da multiplicação, em que os alunos utilizam estratégias e procedimentos que contêm a repetição formal de adições. Neste nível, não é assim explícita a utilização da multiplicação como operação.

- O *cálculo estruturado* é o segundo nível de cálculo, em que os alunos já conseguem estabelecer uma relação entre uma mesma quantidade que se repete um determinado número de vezes, ou seja, estrutura-se para multiplicar. Os procedimentos de cálculo encontram-se associados aos modelos e contextos subjacentes.

- O *cálculo formal* corresponde ao terceiro nível da multiplicação, em que os alunos efetuam o cálculo do produto entre dois números, já conseguindo estabelecer diferentes relações numéricas, entre a multiplicação e outras operações, a propriedades adequadas da multiplicação e a produtos já conhecidos (Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008).

Segundo Mendes, Brocardo e Oliveira (2011), no 3.º ano de escolaridade são marcos essenciais da aprendizagem da multiplicação

a consolidação do entendimento da um grupo como uma unidade; a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; a propriedade comutativa; os padrões de valor de posição associados à multiplicação por 10; a propriedade associativa da multiplicação; a compreensão da relação inversa entre a multiplicação e a divisão e a compreensão do sentido proporcional da multiplicação. (p. 3)

Na perspetiva de Fosnot e Dolk (2001), a aprendizagem da multiplicação deve ser fundamentada nas “grandes ideias” relacionadas com a multiplicação.

2.1.2. A aprendizagem da divisão

A operação divisão necessita ser bem compreendida pelos alunos para conseguir ser bem utilizada, sendo importante perceber a sua relação com as outras operações. Brocardo, Serrazina e Rocha (2008), referem que “a aprendizagem da divisão deve ser feita em estreita relação com a aprendizagem da multiplicação.” (p.183). Mencionam ainda que diversos autores defendem que a resolução de problemas de divisão poderá ser efetuada através da utilização e conhecimentos relativos à multiplicação.

Segundo Mendes (2013), “a aprendizagem da divisão é, muitas vezes, confundida com a mecanização das regras associadas ao algoritmo, não deixando espaço, na sala de aula, para o desenvolvimento de um trabalho com os alunos em torno da compreensão desta operação” (p. 6). Esta afirmação permite perceber que a aprendizagem da divisão ultrapassa o uso do algoritmo tradicional, sendo fundamental reconhecer esta operação em diferentes situações, conseguir compreender e usar a relação entre a divisão e a multiplicação e desenvolver uma teia de relações numéricas que permitam uma flexibilidade de cálculo, tendo implícitas as propriedades destas operações.

Mendes (2013) perspectiva um déficit no desenvolvimento de trabalho produzido pelos alunos para compreender a operação de divisão. Esta mesma ideia é mencionada por Brocardo, Serrazina e Rocha (2008), quando explicitam que “tradicionalmente, tende-se a desvalorizar o conhecimento informal dos alunos e o seu papel no desenvolvimento do pensamento matemático” (p. 185). Também Ferreira (2005), citada pelas autoras Brocardo, Serrazina e Rocha (2008), refere que “uma excessiva valorização de processos formais, sem que ao aluno seja dado tempo para utilizar processos informais, em nada favorece o desenvolvimento do sentido da divisão e de capacidades de raciocínio em matemática” (p. 185). A mesma autora, salienta a importância da partilha de processos de resolução entre os alunos uma vez que, deste modo, tendem a apropriar-se das ideias e procedimentos uns dos outros, quando veem neles significado e quando estes os auxiliam numa progressão para um nível de cálculo superior.

Tal como na aprendizagem da multiplicação, Fosnot e Dolk (2001) também fazem referência às “grandes ideias” para a aprendizagem da divisão, uma vez que estas se encontram intimamente ligadas com as estruturas matemáticas e originam a alteração no pensamento de quem aprende, na perspectiva, na lógica e nas relações matemáticas que elas estabelecem. Como tal, numa tentativa de responder às questões “como é que as crianças conseguem desenvolver estratégias (de divisão) mais eficientes? Que “grandes ideias” devem primeiro construir? Como podemos facilitar e assegurar este desenvolvimento?” (Fosnot & Dolk, 2001, p. 52), os autores defendem que é importante a compreensão das relações parte/todo na estrutura da multiplicação, de modo a originar a progressão das estratégias de divisão.

É fundamental destacar que a operação divisão, no contexto de resolução de problemas, se encontra associada a dois sentidos diferentes, sendo estes o de medida e o de partilha. Estamos perante uma situação de divisão como medida quando “temos uma certa quantidade de elementos (objetos) que vai ser organizada em grupos com um certo cardinal. O que se pretende saber é o número de grupos necessários para organizar a quantidade inicial” (Boavida et al., 2016, p. 52). Segundo as mesmas autoras, estamos perante uma situação de divisão no sentido de partilha “quando se trata de repartir um conjunto de elementos por um certo número de conjuntos (a partição). O que se quer saber é o número de elementos que fica em cada conjunto” (p. 54).

Por norma, os professores iniciam o estudo da divisão através do sentido de partilha, devido à sua relação com situações reais e próximas dos alunos. Contudo, neste

tipo de resolução, os alunos recorrem, normalmente, à distribuição um a um, o que se revela ineficaz para grandes números (Boavida et al., 2008). Segundo Fosnot e Dolk (2001) existem dificuldades neste sentido da divisão, relacionadas com a utilização de procedimentos informais, devido à necessidade de os alunos compreenderem a relação parte-todo, tendo de considerar em simultâneo o número de grupos, o número em cada grupo e o todo.

Por outro lado, a resolução de problemas de divisão com sentido de medida favorece, de modo mais natural, a utilização da adição, da subtração e da multiplicação (Brocardo et al., 2008). Referem também que a aprendizagem das operações, nomeadamente da divisão, só desenvolve o raciocínio matemático dos alunos, se tiver em conta a lógica de desenvolvimento dos números e das operações, o que leva à divergência da aprendizagem rotineira dos algoritmos tradicionais quando desprovidos de sentido.

Como tal, tanto os investigadores mencionados anteriormente como Rocha, Rodrigues e Menino (2007), referem que a distinção entre os contextos de medida e partilha não é fácil, o que se repercute no modo dissemelhante como os alunos resolvem estes dois tipos de situações. A existência de uma influência inicial face às características específicas de cada contexto, dificulta a compreensão de que ambos são situações de divisão. Segundo Mendes (2013), tendo como referência os investigadores Fosnot e Dolk (2001),

a maior dificuldade na compreensão das situações de partilha está relacionada com a compreensão da correspondência um a um que lhes está associada. De facto, neste tipo de situações os alunos têm de considerar, em simultâneo, o número de grupos, o número em cada grupo e o todo, ou seja, está em causa uma ideia-chave que é a compreensão da relação parte/todo. (p. 8)

Como tal, é evidente que devem ser colocados aos alunos estes dois tipos de problemas, ressaltando a utilização do modelo retangular. Este, segundo Brocardo, Serrazina e Rocha (2008) parece atenuar as diferenças entre os problemas de medida e os problemas de partilha, “uma vez que a sua simetria tende a desvanecer a distinção entre os dois tipos de problemas e a mostrar a divisão como operação inversa da multiplicação” (p. 184).

No que respeita à divisão não exata, a existência de resto diferente de zero é uma dificuldade acrescida no estudo desta operação. Tendo como referência a perspectiva das autoras Brocardo, Serrazina e Rocha (2008), por norma a criança tende a associar o cálculo a um resultado único, que é normalmente a resposta ao problema. No entanto, na divisão não exata, deparamo-nos com um quociente e um resto, e se, “em alguns problemas, o resto não é importante, na maioria deles é essencial para dar uma resposta correta” (p.188).

Nesta linha de pensamento, Fosnot e Dolk (2001), consideram fundamental os alunos terem contacto com inúmeras situações que sejam significativas, em que o contexto afeta o resto de um modo diferente, identificando três tipos de situações: arredondamento para cima, para baixo e equitativo. No mesmo sentido, Rocha, Rodrigues e Menino (2007), também reforçam a ideia de que a existência de resto diferente de zero acarreta uma maior dificuldade no estudo da divisão, considerando essencial que os alunos sejam confrontados, desde cedo, com situações em que a divisão não é exata.

2.1.3. A relação entre multiplicação e divisão

Apesar de as operações multiplicação e divisão serem consideradas simples de um ponto de vista matemático, envolvem um desenvolvimento e uma compreensão do raciocínio multiplicativo, que exige aos alunos uma transformação no seu pensamento. Considerando este ponto de vista, Carvalho e Gonçalves (2003), depreendem que estas duas operações se revestem de uma enorme complexidade a nível cognitivo, “quando são encaradas em termos de modelação de situações e não apenas do ponto de vista do cálculo, dado que envolvem novos significados para os números e novos tipos de relações entre eles que devem ser exploradas” (p. 24).

Investigadores como Fosnot e Dolk (2001) e Mendes (2013), consideram indispensável a exploração da relação entre a multiplicação e a divisão, uma vez que conduz à evolução das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, principalmente nos de divisão. Isto porque, estes últimos são considerados mais complexos para os alunos, quando ainda não conseguem perceber as relações existentes entre estas duas operações.

Fosnot e Dolk (2001), acentuam esta ideia quando referem que as situações multiplicativas podem ser resolvidas, recorrendo tanto à divisão como à multiplicação e

que a construção do raciocínio multiplicativo irá proporcionar aos alunos uma ferramenta poderosa, que estes podem utilizar no desenvolvimento de estratégias associadas a estas duas operações e, deste modo, compreender as relações parte/todo.

O *National Council of Teachers of Mathematic*, numa das suas normas relativas ao tema Números e Operações do 3.º ao 5.º ano, menciona a importância do entendimento sobre os significados das operações e sobre a forma como se relacionam umas com as outras, referindo especificamente “identificar e usar as relações entre as operações, tais como a divisão como inversa da multiplicação, para resolver problemas” (NCTM, 2007, p. 148).

Considerando as necessidades e exigências do mundo atual, Mendes (2013), acentua a perspectiva de Verschaffel, Greer e Torbeyns (2006), mencionando que é necessário

investir na sala de aula, ao nível da multiplicação e da divisão, em propostas que promovam o uso de procedimentos holísticos, de decomposição não apenas decimal, e de tentativa e erro. Para que isso seja possível, deve haver uma menor ênfase no trabalho com os algoritmos e um maior realce para o trabalho associado às propriedades das operações e ao uso de procedimentos de cálculo flexíveis. (p. 12)

Subjacente ao desenvolvimento do raciocínio multiplicativo Carvalho e Gonçalves (2003) referem que, desde muito cedo, antes da aprendizagem formal, as crianças são confrontadas, no seu dia-a-dia, com inúmeras situações de multiplicação e divisão, as quais resolvem da forma que para elas revela fazer sentido. Deste modo, as autoras pretendem ressaltar a ideia que é fundamental que os alunos, na sala de aula, tenham oportunidade de resolver uma enorme diversidade de problemas, “que embora mobilizem a mesma operação tenham uma estrutura diferente e envolvam novos sentidos de número” (p. 24).

Mendes (2013), referindo Treffers e Buys (2008), considera importante que a divisão seja abordada tendo em conta a sua relação com a multiplicação, ou seja, a divisão poderá surgir informalmente como inversa desta operação. Fazendo também referência a Greer (2012), explicita que a relação inversa entre a multiplicação e a divisão influencia

de modo significativo o cálculo eficiente e flexível e a compreensão conceptual dos alunos.

Importa ainda destacar o modelo retangular como um impulsionador na aprendizagem da divisão e da multiplicação, sendo considerado por diversos autores (Barmby, Bilsborough, Harries & Higgins, 2009; Battista, Clements, Arnoff & Borrow, 1998), tal como referido anteriormente, como uma das representações mais potentes, que sustenta o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo.

Na mesma perspetiva, Jacob e Mulligan (2014) consideram que a utilização do modelo retangular é muito importante, no que concerne à sua característica de permitir a visualização simultânea das três quantidades envolvidas nas situações de multiplicação e divisão com números inteiros: o todo, o número de grupos iguais e a quantidade em cada grupo. Consideram que este modelo pode ser utilizado para auxiliar não apenas a estruturação e compreensão da multiplicação, mas também da divisão, por parte dos alunos. Especificamente, este modelo auxilia na compreensão e coordenação das quantidades envolvidas, na compreensão da relação entre a multiplicação e a divisão e na compreensão destas operações numa variedade de situações e representações.

2.1.4. Características das tarefas na aprendizagem da multiplicação e divisão

A seleção/construção de tarefas e a sua exploração em sala de aula são fundamentais para a aprendizagem dos alunos, uma vez que o tipo de tarefas propostas irá influenciar o modo como os alunos aprendem a pensar matematicamente. Segundo Stein, Remillard e Smith (2007), “as tarefas matemáticas, nas quais os alunos se envolvem, determinam o que eles aprendem em matemática e como o aprendem” (p. 346).

Apesar de se usarem diferentes termos para designar tarefas, as autoras Stein e Smith (1998), definem tarefa como “um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular” (p. 268). Interligadas à ideia de tarefa, surgem a seleção e a construção da mesma, uma vez que esta “precisa de ser o veículo” através do qual o professor irá explorar a matemática com os alunos (Mendes, Oliveira & Brocardo, 2007, p. 2). Perceciona-se que uma tarefa constitui um ponto de partida para a atividade matemática, em que o professor pretende que os alunos se envolvam.

Ao considerar as tarefas como um contexto para a aprendizagem, estas podem conter exigências cognitivas diferentes, tendo em conta o tipo e o nível de pensamento que suscitam: memorização, procedimentos sem e com conexões, e fazer matemática (Stein et al., 2007). Discriminando cada uma delas, a memorização permite aos alunos a execução de um procedimento automatizado, de modo rotineiro, representando um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem. Os procedimentos com conexões centram-se na aprendizagem de processos e de representações e têm como intuito promover a compreensão de ideias e conceitos matemáticos. As tarefas de fazer matemática, “não evidenciam qualquer caminho e impõem a compreensão de conceitos matemáticos, de processos e de relações” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2007, p. 3).

Ao realizar tarefas em sala de aula o professor deve considerar dois níveis cognitivos dissemelhantes, sendo estes: baixo e elevado. É fundamental ter em conta o objetivo de uma tarefa, quando se propõe a realização da mesma aos alunos, isto porque, caso o objetivo passe pela “memorização de formas equivalentes de quantidades fracionárias específicas” (Stein & Smith, 1998, p. 269) estamos perante uma abordagem da tarefa de baixo nível. Contrariamente, se o objetivo se centrar na utilização de “procedimentos, mas de forma a desenvolver conexões com os significados matemáticos” a abordagem da tarefa encontra-se num nível cognitivo elevado (Stein & Smith, 1998, p. 269).

Mendes, Brocardo e Oliveira (2007), com base na perspetiva de Reys (1994), referem que as tarefas, tendo em conta uma perspetiva de desenvolvimento de número, devem caracterizar-se por:

- (i) encorajar os alunos a pensar sobre o que vão fazer e a partilhá-lo com os colegas;
- (ii) promover a criatividade, a investigação e o uso de estratégias diversificadas;
- (iii) auxiliá-los a decidir o tipo de cálculo apropriado a cada situação;
- (iv) ajudá-los a compreender as regularidades da Matemática e as relações entre esta e o mundo real e
- (v) contribuir para uma visão dinâmica e desafiante da Matemática através da descoberta de relações”. (p. 3)

Tendo em conta a exploração do contexto adequado das tarefas e a sua relação com a multiplicação e a divisão, deverão emergir aspetos essenciais destas operações, permitindo a utilização de modelos e uma primeira abordagem às propriedades das operações em questão. Os contextos das tarefas deverão também incluir situações

próximas do cotidiano dos alunos, ou que façam sentido para eles, assim como de imagens ilustrativas dessas situações e que se encontrem associadas a modelos que os auxiliem a desenvolver o pensamento e a utilizarem determinadas estratégias. A seleção de tarefas, deverá assim, segundo Fosnot e Dolk (2001), integrar três componentes: permitir o uso de modelos; fazer sentido para os alunos; criar surpresa e suscitar questões.

Clarificando a ideia dos autores em questão, ao propor tarefas de multiplicação e de divisão, é fundamental que o professor considere três aspectos distintos, relativamente ao contexto das mesmas:

- As situações associadas aos contextos: ao fazer a seleção das tarefas o professor deve ter em conta tudo o que sabe sobre os seus alunos, de modo a proporcionar-lhes momentos desafiantes. Fosnot e Dolk (2001) defendem que o professor deve ter em conta duas características “fazer sentido” para os alunos e criar surpresa/suscitar questões. Ambrose et al. (2003), também considera que os contextos das tarefas determinam e influenciam os procedimentos e estratégias que os alunos utilizam e inventariam durante a resolução de problemas;

- Os modelos subjacentes aos contextos: Fosnot e Dolk (2001) evidenciam a importância de os contextos das tarefas permitirem o uso de modelos. Consideram que, o professor, ao selecionar as tarefas deve pensar nos modelos que os alunos podem pensar e utilizar para as resolverem. No entanto, os autores também referem que, numa fase inicial, os alunos poderão não se apoiar nesses modelos, isto porque, é à medida que o professor vai mostrando aos alunos a utilidade desses modelos, que estes o reconhecem como tal e começam a utiliza-lo para representar o seu raciocínio;

- Os números envolvidos: os números que constam nas tarefas selecionadas pelo professor devem tratar-se de referências para os alunos, deixando-os confortáveis para trabalhá-los e ajudando-os a tomar decisões relativas à resolução da tarefa. Estes devem ser selecionados “considerando dois aspetos: (i) a sua progressão em termos da sua ordem de grandeza e (ii) as relações numéricas que poderiam ser estabelecidas entre eles” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013, p. 142). Como tal, as tarefas devem integrar, de modo progressivo, números cada vez maiores e números de referência.

Stein e Smith (1998) referem que as tarefas podem incluir a resolução de problemas relacionados entre si, ou centrarem-se num longo trabalho relativamente a um problema complexo. Como tal, no processo de ensino e aprendizagem, “devem ser

incluídas tarefas de natureza diferente: nem só problemas e investigações, nem só exercícios” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 10). Nesta perspectiva, é importante ter em conta que cada tarefa desenvolve as suas aprendizagens, sendo crucial o professor selecionar a que melhor se adequa, tendo em conta os objetivos que preestabeleceu.

Importa então perceber o que se entende por problema. Assim, é fundamental referir que uma tarefa é considerada um problema quando sugere aos alunos um desafio e proporciona o gosto pela descoberta (Ponte, 2005). Nesta mesma linha de pensamento, o NCTM (2008), preconiza que se está perante a resolução de um problema quando este “implica o envolvimento numa tarefa, cujo método não é conhecido antecipadamente” (p. 57). Palhares (2004), refere que um problema “é uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução, sendo a resolução de problemas o conjunto de ações tomadas para resolver essa situação” (p. 12).

A questão principal que permite a distinção entre um problema e um exercício “é saber se o aluno dispõe ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema” (Ponte, 2005, p. 14). Neste sentido, quando os alunos não conseguem chegar ao resultado de um problema, necessitam de rever todo o seu conhecimento até ao momento, de modo a tentarem encontrar a solução para o problema e “através deste processo desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos” (NCTM, 2007, p. 57).

Os problemas são grandes potenciadores de aprendizagem, podendo “inspirar a exploração de ideias matemáticas importantes, fomentar a perseverança e realçar a necessidade de se compreender e usar diversas estratégias, propriedades matemáticas e relações” (NCTM, 2007, p. 212). Esta ideia é defendida também por Boavida et al. (2008), referindo que “os bons problemas são aqueles que desafiam os alunos a desenvolver e aplicar estratégias, que são um meio para introduzir novos conceitos e que oferecem um contexto para usar e desenvolver diferentes capacidades” (p. 26).

Pólya (1945) propôs a organização do processo da resolução de problemas em quatro etapas cruciais, que os alunos devem seguir: compreender o problema; construir uma estratégia de resolução; desenvolver a estratégia de resolução; rever a resolução do problema. A passagem do aluno pelas três primeiras etapas irá permitir-lhe ter uma probabilidade de sucesso maior na resolução do problema. Por sua vez, a quarta e última

etapa irá auxiliar o aluno a consolidar o seu conhecimento e a perceber se a resolução a que chegou faz sentido e é correta do ponto de vista do problema proposto.

Ao longo do ensino da resolução de problemas, é importante que o professor tenha à sua disposição um vasto leque de problemas, que correspondam a uma tipologia diversa. Existem “várias tipologias de classificação de problemas matemáticos que diferem segundo os autores” (Vale & Pimentel, 2004, citado por Boavida et al., p. 17). A classificação que Boavida et al. (2008) propõe, encontra-se adaptada para o 1.º ciclo e distingue três tipos de problemas:

- Problemas de cálculo: podem-se distinguir entre problemas de um passo e problemas de mais passos, levando o aluno a tomar decisões sobre que operações utilizar. “os alunos leem o problema, avaliam o que é conhecido e o que é pedido e, finalmente, efetuam uma ou mais operações que considera apropriadas usando os dados do enunciado” (idem, p. 17).

- Problemas de processo: requerem da parte do aluno uma maior atenção para a compreensão dos mesmos, podendo existir a necessidade de utilizar diferentes estratégias de resolução. “O seu sucesso reside, muitas vezes, na capacidade que cada um tem de compreender e identificar a estrutura matemática do problema” (idem, p. 19).

- Problemas abertos: podem ter mais do que uma estratégia de resolução e mais do que uma resposta correta. “Para os alunos resolverem, os alunos têm de fazer explorações para descobrir regularidades e formular conjeturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão” (idem, p. 20).

Na aprendizagem da multiplicação e da divisão “os alunos precisam de resolver uma grande variedade de problemas muito antes da aprendizagem formal [destas operações]” (Carvalho & Gonçalves, 2003, p. 23). O planejar uma sequência de tarefas, irá proporcionar ao professor a possibilidade de selecionar uma variedade de tarefas de multiplicação e de divisão, levando os alunos a desenvolver “o sentido de operação”, ou seja, “uma grande flexibilidade com os números, operações e suas relações, que só acontece com muito trabalho e com recurso a uma variedade de situações de aprendizagem que intencionalmente estabeleçam estas conexões” (idem, p. 24). Além disso, as sequências de tarefas permitem que

as crianças tenham a oportunidade de resolver uma grande variedade de problemas que apresentem diferentes tipos de situações e que conduzam a uma formalização [destas operações], em vez de praticarem um número restrito de situações sem significado que muitas vezes, não são mais que a aplicação de um algoritmo aprendido muito precocemente e sem qualquer sentido. (Carvalho & Gonçalves, 2003, p. 24)

Deste modo, para que a aprendizagem da multiplicação e divisão seja significativa, possibilitando aos alunos o desenvolvimento progressivo de ideias e conexões matemáticas, o professor deve pensar em sequências de tarefas, isto é, idealizar um plano de ensino. Uma vez que este plano não é estático nem inalterável, as alterações do mesmo serão feitas mediante “a aprendizagem de cada aluno, as ideias ou dúvidas que vão surgindo” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 2). Através das sequências de tarefas selecionadas pelo professor, os alunos irão aprender e consolidar os conteúdos programáticos pretendidos. Segundo Ponte (2005), “a tarefa pode ser enunciada explicitamente logo no início do trabalho ou ir sendo constituída de modo implícito à medida que este vai decorrendo. É formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno” (p. 12).

No estudo realizado, propus uma sequência de tarefas que inclui dois tipos de tarefas diferentes: problemas e cadeias numéricas. Estas, em contexto matemático, têm como intuito o desenvolvimento de cálculo mental eficiente, realçando procedimentos associados a propriedades dos números e das operações, neste caso particular, da multiplicação e divisão. Segundo Fosnot e Dolk (2001), a estrutura da cadeia, com propostas sequenciais e encadeadas, influencia os procedimentos dos alunos, uma vez que um certo cálculo se baseia noutro realizado na (s) linha (s) anterior (es). As cadeias numéricas são uma boa opção para desenvolver o cálculo mental e o sentido de número, devendo ser propostas aos alunos, no início de cada aula, de modo sistemático e intencional.

2.1.5. Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão

É importante começar por definir o que são estratégias. Segundo Ponte e Serrazina (2000) são um modo de abordagem que o indivíduo usa para solucionar uma ou várias questões, tendo em conta que umas são mais vantajosas que outras em determinados

contextos. Hartnett (2007), referido por Mendes (2012), refere que para as estratégias de cálculo mental é necessário que exista mais do que apenas uma memorização de um conjunto de procedimentos, distinguindo este tipo de cálculo dos algoritmos. Mendes (2012), tendo por base as ideias de Threlfall (2002), refere que uma estratégia de cálculo mental “a usar num determinado problema não é selecionada de entre outras, mas ‘emerge’ perante aquele contexto particular, apesar de ser influenciada, naturalmente, por experiências anteriores do aluno” (p. 119). Ao longo deste estudo irei basear-me na definição de estratégia referida por Ponte e Serrazina (2000).

As estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos podem ser diversificados, tendo em conta as ideias que estes têm sobre as operações multiplicação e divisão. Na aprendizagem destas operações pretende-se que os alunos progridam nas estratégias que utilizam, abandonando estratégias com menos potencialidades e adotando estratégias mais eficazes. Mendes, Brocardo e Oliveira (2011) referem que, no desenvolver deste processo, existem duas vertentes distintas de aprendizagem: o ensino de estratégias ou a construção de estratégias pelos alunos. Mencionam que não é suposto os alunos conhecerem as diversas estratégias existentes e as aplicarem, mas sim que as descubram durante a resolução de tarefas. Ou seja, “o importante é que a criança possa recorrer aos seus próprios métodos, às suas estratégias de resolução” (Carvalho & Gonçalves, 2003, p. 25).

Com base nas ideias anteriores, os alunos devem ser incentivados a partilharem as suas estratégias, progredindo em termos de comunicação matemática e raciocínio, de modo a aprenderem uns com os outros e a diversificarem as suas estratégias. Como tal, o desenvolvimento do cálculo mental deve ser sistemático e intencional, partindo do professor a responsabilidade de proporcionar aos alunos o contacto com diferentes tarefas e graus de dificuldade, ao mesmo tempo que os tenta motivar. Irá assim estimular o cálculo mental e, conseqüentemente, desenvolver o sentido de número, ligação que Harnett (2007) defende, ao afirmar que a utilização de estratégias de cálculo mental de um modo flexível, requer um bom sentido de número e que o desenvolvimento destas estratégias, possibilita uma oportunidade para os alunos trabalharem com números de modo flexível e, por sua vez, melhorarem o seu sentido de número.

Assim, o professor deverá colocar-se no papel dos alunos da turma com quem trabalha e

prever modos de resolução com graus de sofisticação diversos, de acordo com diferentes níveis de aprendizagem e maneiras de raciocinar distintas. Esta antecipação ajudá-lo-á, na sala de aula a reconhecer e a compreender as estratégias usadas e a perceber quais as que se relacionam com os seus objetivos de ensino, ou seja, com ideias matemáticas que pretende que os alunos aprendam. (Mendes, Brocardo & Oliveira, p. 14)

Importa então destacar o que se entende por cálculo mental, pelo que destaco Buys (2008) que define a aritmética mental como o “cálculo flexível e habilidoso baseado no conhecimento sobre as relações numéricas e as características dos números” (p. 121). O autor considera que o cálculo mental envolve as seguintes características: operar com os números e não com os dígitos; utilizar propriedades das operações, relações numéricas e combinações entre elas; ser suportado por um bom conhecimento sobre os números e os factos numéricos elementares e ser possível recorrer a registos intermédios em papel, apesar de se realizar, sobretudo mentalmente (Buys, 2008).

Próximo da definição de cálculo mental referida pelo autor supramencionado encontra-se a definição inserida no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007:

O cálculo mental caracteriza-se por: (i) trabalhar com números e não com algarismos, (ii) usar as propriedades das operações e as relações entre números; (iii) implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numéricos elementares; e (iv) permitir o uso de registos intermédios de acordo com a situação”. (ME, 2007, p. 10)

No atual Programa de Matemática do Ensino Básico (2013) é mencionado que é essencial que os alunos

adquiram durante estes anos fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos, próprios do sistema decimal, associados a estas operações. Note-se que esta fluência não pode ser conseguida sem uma sólida proficiência no cálculo mental. (p. 6)

Considerando as diversas investigações relativas a estratégias de cálculo relacionadas com as operações de multiplicação e divisão com números multidígitos, a maioria incide na descrição das estratégias informais utilizadas pelos alunos para resolver problemas (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003; Baek, 2006; Heirdsfield, Cooper,

Mulligan & Irons, 1999). Também existem estudos que descrevem as estratégias usadas pelos alunos, mas que se podem aplicar às quatro operações (Hartnett, 2007). Seguidamente apresento algumas categorizações de estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e divisão com números multidígitos.

2.1.5.1. Estratégias de multiplicação

No estudo de Baek (2006), onde são descritas as estratégias construídas pelos alunos quando resolvem problemas de multiplicação, a autora identifica as seguintes categorias: modelação direta, adição repetida, uso de dobros, estratégias de partição de números e estratégias de compensação.

Segundo Baek (2006) as estratégias de modelação direta são utilizadas pelos alunos quando estes modelam grupos através de material manipulável ou mesmo desenhos. As estratégias de partição de números permitem aos alunos multiplicar mais facilmente, podendo esta ser realizada apenas no multiplicador, só no multiplicando ou em ambos, através de duas formas: usando números não múltiplos ou múltiplos de dez. O uso de partições de um número, irá permitir aos alunos um conhecimento aprofundado sobre o sistema de numeração decimal, permitindo-lhes resolver diversos problemas de multiplicação. Segundo a autora, nas estratégias de compensação os números são ajustados tendo em conta as suas características e este ajuste pode ocorrer no multiplicador, no multiplicando ou em ambos os números.

A autora considera as estratégias de modelação direta e de adição repetida como “estratégias concretas”, nomeando todas as restantes como “estratégias abstratas”, inventadas pelos alunos através da sua compreensão em relação às propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração. Segundo Baek (2006),

[...] as crianças desenvolvem a compreensão informal sobre as propriedades associativa e distributiva e são capazes de contruir estratégias ricas matematicamente. As crianças são capazes de construir estratégias flexíveis e eficientes em termos de cálculo, baseadas nas características dos fatores dos problemas. (p. 246)

Bastante semelhante à categorização de Baek (2006), é o estudo realizado pelos investigadores Ambrose et al. (2003) que abrange as seguintes categorias de estratégias:

modelação direta, uso de adições e de dobros e algoritmos inventados usando o número dez. Porém, cada categoria mencionada abrange tipos de estratégias mais específicos:

- Uso de adição e de dobros: adição de dobros; uso completo de dobros; construção a partir de outros fatores.

- Algoritmos inventados usando o dez: partição do multiplicador em dezenas e unidades; partição do multiplicador e do multiplicando.

Caracterizando apenas as estratégias de Ambrose et al (2003) que diferem das definidas por Baek (2006), uma estratégia de uso complexo de dobros centra-se em compor o multiplicador a partir de dobros sucessivos do multiplicando, usando, de um modo implícito, as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição (idem). Uma estratégia de construção a partir de outros fatores remete-nos para a (de)composição do multiplicador para obter produtos mais fáceis de calcular (idem).

2.1.5.2. Estratégias de divisão

Fosnot e Dolk (2001), referem como um objetivo de aprendizagem o desenvolvimento de estratégias de divisão mais eficientes, no entanto, julgam impossível o objetivo de ter todos os alunos a utilizar a mesma estratégia, obtendo o mesmo conhecimento, ao mesmo tempo. Afirmam que, a verdadeira aprendizagem é desenvolvida através de diversos caminhos durante os quais os alunos precisam de construir várias “grandes ideias” (p. 69).

Mendes (2013) evidencia a investigação realizada por Ambrose et al (2003), com alunos dos oito aos onze anos, na qual caracterizam os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de divisão de partilha e de medida. Ambrose et al (2003), citados por Mendes (2013), referem as seguintes categorias de procedimentos: trabalhar com um grupo de cada vez; não decompor o dividendo; decompor o dividendo; procedimentos de construção.

A primeira categoria, trabalhar com um grupo de cada vez, está relacionada com a utilização de subtrações sucessivas do número mais pequeno (divisor) a partir do número maior, “à adição sucessiva do número mais pequeno até perfazer o número maior (ou ficar próximo) e ao procedimento distributivo” (Ambrose et al (2003) citados por Mendes, 2013, p. 10).

A segunda categoria, não decompor o dividendo, centra-se em procedimentos mais abstratos e avançados relativamente aos anteriores. Não envolvem a decomposição do dividendo, mas sim, a subtração recorrendo à estrutura decimal e ao uso de múltiplos de dez (Mendes, 2013).

A terceira categoria, decompor o dividendo, refere-se à utilização de procedimentos que recorram à decomposição do dividendo (por exemplo em centenas, dezenas e unidades) e a divisões parciais (Mendes, 2013).

A última categoria, procedimentos de construção, inclui procedimentos utilizados em problemas de divisão por medida e por partilha. Por exemplo, um aluno resolveu $544 \div 17$, partindo do $170 (10 \times 17)$, adicionando sucessivamente 170 até ser exequível, até chegar ao número mais próximo de 544 (o número 510). Adicionou 34 (2×17) para chegar ao 544. Assim, o quociente 32 foi obtido adicionando $10+10+10+2$ (Mendes, 2012).

2.1.5.3. Estratégias de multiplicação e divisão

Alguns investigadores centraram-se em estratégias de cálculo mental que surgem através da resolução de problemas de multiplicação e divisão. Heirdsfield et al. (1999) desenvolveram um estudo, no qual a análise das estratégias utilizadas pelos alunos, quer nos problemas de multiplicação que nos de divisão, permitiu a seguinte organização: estratégias de contagem, uso de factos básicos, decomposição de números segundo o valor de posição e cálculo da direita para a esquerda, decomposição de números segundo o valor de posição e cálculo da esquerda para a direita e estratégias holísticas.

Mendes (2012), apresenta um conjunto de procedimentos associados à resolução de tarefas de multiplicação e divisão, tendo por base o estudo que realizou numa turma de 3.º ano, como se pode observar na **tabela 1**.

Tabela 1 - Categorização de procedimentos e procedimentos específicos de Mendes (2012)

Categorias de procedimentos	Procedimentos específicos
Procedimentos de contagem	Contar por saltos
Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
Procedimentos subtrativos	Adicionar em coluna
	Subtrair sucessivamente
Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
Multiplicar em coluna	

Neste sentido, importa distinguir estratégia de procedimento de cálculo. Segundo Mendes, Brocardo e Oliveira (2011, p. 8), “os procedimentos dos alunos são a forma como manipulam os números” e as estratégias “determinam a estrutura matemática destas manipulações”. Como tal, “estratégia diz respeito à modelação; os procedimentos dizem respeito às operações de cálculo” (ibidem). Assim, entende-se que as categorias de procedimentos que constam na primeira coluna da tabela 1, como sendo estratégias e os procedimentos específicos, evidenciados na segunda coluna da mesma tabela, como sendo os procedimentos de cálculo.

- *Estratégias de contagem*: normalmente, são as primeiras utilizadas pelos alunos para resolver tarefas de multiplicação, em que estes efetuam contagens sem recorrer a operações aritméticas. Esta estratégia, apresenta como procedimento específico **contar por saltos**, em que os alunos partem de um número e, a partir do mesmo, efetuam saltos do mesmo valor. Por exemplo, de 2 em 2 (2,4,6,8,10...) e assim sucessivamente (Mendes, 2012).

- *Estratégias aditivas*: os alunos utilizam a adição como procedimento de cálculo, podendo optar por três procedimentos específicos: **adicionar sucessivamente**, em que é adicionado sucessivamente um mesmo número. O registo dos cálculos é apresentado horizontalmente, “sob a forma de uma adição de parcelas iguais” (idem, p. 243). Por exemplo, calcular $4+4+4+4=16$; **adicionar dois a dois**, correspondendo à adição de parcelas iguais, mas agrupadas duas a duas. Os alunos utilizam este procedimento de cálculo por ser mais rápido, e, na maioria das vezes, apresentam-no através de um esquema em árvore (Mendes, 2012); e **adicionar em coluna**, sendo semelhante com o procedimento anterior, no entanto, a disposição dos algarismos é efetuada na vertical.

- *Estratégias subtrativas*: nestas encontram-se inseridos como procedimentos específicos **subtrair sucessivamente**, onde são efetuadas subtrações sucessivas, “partindo do aditivo e subtraindo repetidamente um mesmo número, o subtrativo” (Mendes, 2012, p. 246). A mesma autora refere que, enquanto o aditivo se altera nos cálculos, o subtrativo mantém-se. Os cálculos são apresentados tanto verticalmente como horizontalmente.

- *Estratégias multiplicativas*: nesta fase os alunos já possuem conhecimentos relativos à multiplicação, sendo os procedimentos específicos de cálculo utilizados bastante diversificados, como podemos observar na segunda coluna da tabela 1. **Usar produtos conhecidos**, em que os alunos utilizam produtos ou factos que conhecem para efetuar os cálculos, ou seja, as tabuadas que já trabalharam. (Mendes, 2012); **usar relações de dobro**, onde os alunos utilizam o dobro de um número na realização de um cálculo multiplicativo; **usar múltiplos de 5 e de 10**, consiste no uso explícito dos múltiplos de 5 e de 10 no cálculo dos produtos (idem); **usar uma decomposição não decimal de um dos fatores**, onde os alunos utilizam uma “decomposição não decimal de um dos fatores do produto, transformando-o em produtos parciais, e tem subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição” (Mendes, 2012, p. 249). Esta decomposição corresponde, maioritariamente, à substituição de um número por uma adição de duas parcelas iguais ou de parcelas que possam facilitar, de algum modo, o cálculo que é necessário efetuar (idem); **usar a decomposição decimal de um dos fatores**, procedimento que consiste “no uso de produtos parciais, baseados na decomposição decimal, para calcular um produto” (idem, p. 250). Através da decomposição decimal, “separando centenas, dezenas e unidades, no caso dos números naturais, e décimas e centésimas no caso de números na representação decimal” (ibidem) surgem os produtos parciais de um dos fatores do produto; **ajustar e compensar**, em que os números são ajustados e compensados tendo em conta as suas características, com o intuito de facilitar a realização dos cálculos. Posteriormente, “é feita a compensação necessária através de uma subtração” (idem, p. 252); **usar relações de dobro e de metade**, consiste na realização, por parte dos alunos, de relações de dobro e de metade entre fatores de um mesmo produto, por exemplo, “para realizar o cálculo 25×8 usando este procedimento, pensa-se que efetuar este produto é equivalente a efetuar 50×4 , uma vez que 50 é o dobro de 25 e quatro é metade de 8” (ibidem); **multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência**, quando os alunos já possuem conhecimentos da tabuada, ou seja, já a construíram, podem multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência.

Por exemplo, para efetuarem o cálculo 13×2 , os alunos começam por calcular 10×2 , porque é o produto que conhecem. Calculando posteriormente 11×2 , 12×2 e 13×2 ; e, por fim, *multiplicar em coluna*, que corresponde à realização de cálculos na forma vertical e atendendo à decomposição decimal dos números envolvidos. Trabalha-se com números e não com dígitos, ao contrário do que acontece no cálculo algorítmico (Mendes, 2012).

Tendo em consideração a relevância do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, Hartnett (2007) centra-se numa categorização única para as quatro operações aritméticas, propondo cinco categorias principais de estratégias de cálculo mental: contar para a frente e para trás, ajustar e compensar, usar dobros e/ou metades, usar partições de números e usar o valor de posição. Cada uma destas categorias apresenta também as respetivas subcategorias, tendo em conta as diferentes operações aritméticas, sendo que a autora estabelece relações, sempre que possível, com categorias de estratégias definidas por outros autores.

Por fim, saliento que no desenvolvimento desta investigação, irei centrar-me no estudo realizado por Mendes (2012) e na tabela que apresenta para as estratégias de multiplicação e divisão. Esta categorização é o ponto de partida para a análise das estratégias usadas pelos alunos, da turma do 3.º ano onde realizei o estudo.

De modo a resumir as categorizações dos autores supramencionados, contrui duas tabelas comparativas, uma relativamente às estratégias de multiplicação (**tabela 2**) e outra sobre as estratégias de divisão (**tabela 3**).

Tabela 2 - Análise comparativa das categorizações das estratégias usadas por alunos na resolução de problemas de multiplicação

Autores	Baek (2006)	Ambrose, Baek e Carpenter (2003)		Hartnett (2007)	Mendes (2012)	
Categorias	Modelação direta	Modelação direta		Contar para a frente e para trás	Procedimentos de contagem	Contar por saltos
	Adição repetida Uso de dobros	Uso de adições e de dobros	Adição de dobros Uso complexo de dobros Construção a partir de outros fatores	Usar dobros e/ou metades	Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente Adicionar dois a dois Adicionar em coluna
					Procedimentos subtrativos	Subtrair sucessivamente
	Compensação			Ajustar e compensar	Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos Usar relações de dobro Usar múltiplos de 5 e de 10 Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores Usar a decomposição decimal de um dos fatores Ajustar e compensar Usar relações de dobro e de metade Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência Multiplicar em coluna
	Partição de números	Algoritmos inventados usando o dez	Partição do multiplicador em dezenas e unidades Partição do multiplicador e do multiplicando	Usar partições de números Usar o valor de posição		

Tabela 3 - Análise comparativa das categorizações das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão

Autores	Ambrose, Baek e Carpenter (2003)	Hartnett (2007)	Mendes (2012)	
Categorias	Trabalhar com um grupo de cada vez	Contar para a frente e para trás	Procedimentos de contagem	Contar por saltos
	Não decompor o dividendo	Usar dobros e/ou metades	Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente Adicionar dois a dois Adicionar em coluna
			Procedimentos subtrativos	Subtrair sucessivamente
	Estratégias de construção	Usar o valor de posição Ajustar e compensar	Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos Usar relações de dobro Usar múltiplos de 5 e de 10 Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores Usar a decomposição decimal de um dos fatores Ajustar e compensar Usar relações de dobro e de metade Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência Multiplicar em coluna

2.1.6. Dificuldades na aprendizagem da multiplicação e divisão

Mendes (2012) evidencia alguns tipos de dificuldades que podem ser experienciadas pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão, estando estas associadas ao contexto das tarefas propostas, aos números incluídos nas tarefas, à realização dos registos escritos e à compreensão dos raciocínios dos colegas.

As dificuldades associadas aos contextos de tarefas são, por exemplo, “a compreensão semântica, a visualização espacial, o lidar com várias características ao mesmo tempo” (Mendes, 2012, p. 504). Ou seja, os alunos poderão ter dificuldades ao interpretar e compreender os enunciados, o que pode provir “essencialmente das competências manifestadas na Língua Portuguesa” (Costa & Fonseca, 2009, p. 7), o que não está diretamente relacionado com competências ao nível da matemática. Estas dificuldades evidenciam-se maioritariamente na primeira e última parte da resolução do problema, isto porque, estas envolvem “a compreensão e interpretação de enunciados e a justificação e explicação dos raciocínios efetuados, sejam oral ou escrita” (Sousa, 2015, p. 34). As tarefas que são acompanhadas de imagens poderão também criar dificuldades, considerando que os alunos poderão não as conseguir visualizar corretamente.

Relativamente aos números incluídos nas tarefas, Mendes (2012) refere que a utilização de números grandes poderá trazer dificuldades para a resolução de problemas, aferindo que “os números utilizados nas tarefas podem, também, criar dificuldades ligadas à grandeza dos números” (p. 504). Menciona também que o facto de se realizarem tarefas em contexto de problema e tarefas em contexto de cadeia numérica, poderá ser uma dificuldade para os alunos, uma vez que o modo de trabalhar os números e as suas propriedades difere.

Para além do referido, os alunos poderão ter dificuldades no momento em que necessitam de escolher/utilizar estratégias para solucionar o problema, uma vez que estas representam os seus raciocínios. Poderão ainda evidenciar-se “dificuldades ao nível dos conteúdos matemáticos implícitos no problema que podem estar relacionadas com a capacidade para usar conhecimentos adquiridos” (Sousa, 2015, p. 34).

Tendo em conta as dificuldades em interpretar os raciocínios dos colegas, Mendes (2012), interpretando as ideias de Smith (2003), refere que “para compreender e

comunicar em Matemática, os alunos precisam de estabelecer pontes entre as suas representações idiossincráticas e as representações matemáticas convencionais. É precisamente no estabelecimento destas pontes que alguns alunos revelam certas dificuldades” (p. 505).

O NCTM (2008) menciona que “o insucesso dos alunos, aquando da resolução de problemas, não se deve à falta de conhecimentos matemáticos, mas antes à deficiente utilização dos mesmos” (p. 8). Importa ainda referir que a motivação, ou a sua falta, também origina a existência de dificuldades, que se possam manifestar por parte dos alunos, durante a resolução de problemas, uma vez que “é importante que o aluno tenha vontade de resolver o problema” (Pólya, 2003, citado por Sousa, 2015, p. 35).

2.1.7. A aprendizagem da multiplicação e divisão nas orientações curriculares

No domínio Números e Operações, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013 (PMEB), não referindo de modo evidente o desenvolvimento do sentido de número, refere que é fundamental que os alunos do 1.º ciclo do ensino básico “adquiram durante estes anos fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos, próprios do sistema decimal, associados a estas operações. Note-se que esta fluência não pode ser conseguida sem uma sólida proficiência no cálculo mental” (ME, 2013, p. 6). Salienta ainda que “os professores são, pois, fortemente encorajados a trabalhar com os seus alunos (...) propondo atividades que consideram convenientes e apropriadas a esse efeito” (p. 6). Este documento evidencia também a preocupação de que os alunos utilizem os algoritmos para trabalhar com as operações aritméticas.

Contrariamente, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, o NCTM (2007), ao nível da aprendizagem dos números e das operações infere que, ao longo da escolaridade, os alunos deverão

compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos; compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si; calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis. (p. 34)

Estes são objetivos que deverão acompanhar os alunos ao longo da sua escolaridade, podendo destacar-se a flexibilidade de cálculo que é necessário

desenvolver, de modo progressivo, em torno de todo o trabalho com os números, o que integra uma característica fundamental do sentido do número.

No mesmo sentido, Mendes (2013) evidencia a preocupação que existe atualmente, em desenvolver o sentido de número dos alunos, destacando o documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar, onde é mencionado que “a compreensão dos números e das operações, o desenvolvimento do sentido de número e a aquisição da destreza no cálculo aritmético constituem o cerne da Educação Matemática para os primeiros anos do ensino básico” (NCTM, 2007, p. 34).

O PMCM (2013) e o NCTM (2007) divergem no que diz respeito ao cálculo mental. O NCTM (2007) estabelece uma relação entre o sentido de número e o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, enquanto que, o PMCM (2013), faz referência à fluência de cálculo, mencionando que esta deve ser desenvolvida através de “atividades que os professores consideram convenientes e apropriadas” (p. 6) mas não refere explicitamente o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, nem o sentido de número.

Preconiza-se que no processo de ensino e de aprendizagem dos números e das operações, o principal objetivo centra-se na compreensão geral dos números, das operações e das respetivas relações. Além disso, segundo o NCTM (2007), para que esse objetivo seja alcançado é fundamental que os alunos sejam estimulados a revelarem os seus conhecimentos matemáticos e a aprofundarem-nos. Um dos modos para conseguir colocar em prática o que foi frisado, passa pela resolução de problemas significativos e contextualizados, assim como pela criação de momentos de discussão de possíveis estratégias (NCTM, 2007).

Relativamente à resolução de problemas, este é um tema que patenteia um grande destaque no anterior Programa de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino básico (ME, 2007). O PMEB (2013) menciona como objetivos para o 1.º ciclo, que os alunos consigam ler e interpretar os enunciados, mobilizar os conhecimentos de factos, estabeleçam conhecimentos e relações, selecionem e apliquem adequadamente regras e procedimentos e, por fim, consigam rever e interpretar os resultados finais. Destacando o tema da resolução de problemas, Boavida et al. (2008), afirmam que este tem vindo a ser reconhecido “como uma atividade revelante no currículo da Matemática escolar desde a publicação de Agenda for action (NCTM, 1980) até aos dias de hoje” (p. 13).

A nível nacional, a aprendizagem dos números e operações tem sido alvo de diferentes reflexões sendo que a aprendizagem centrada na memorização de algoritmos e na sua utilização tem sido contraposta à ideia de que os alunos precisam de aprender matemática com compreensão. Neste sentido, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) defendem que “todos os alunos devem adquirir uma compreensão global do número e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e operações” (p. 46).

Deste modo, compreender uma operação não se resume a saber fazer o algoritmo, pelo contrário, compreender uma operação passa por saber aplicá-la em situações do dia-a-dia e resolvê-la significativamente. Nesta perspetiva, Ponte e Serrazina (2000) preconizam que o ensino dos números e das operações deve ocorrer de um modo significativo, para que os alunos compreendam as suas propriedades e não decorem apenas técnicas e procedimentos de cálculo.

Referindo-se às operações de multiplicação e divisão, a explicitação da relação existente entre estas duas operações e o seu uso em situações de cálculo, é também abordada na maioria dos documentos de índole curricular, quando se reportam à aprendizagem destas operações. O NCTM (2007), do pré-escolar ao 2.º ano, explicita que os alunos “deverão compreender as situações que impliquem a multiplicação e a divisão, tais como o agrupamento idêntico de objetos e a partilha” (p. 90). O mesmo documento, do 3.º ao 5.º ano, preconiza que os alunos deverão

compreender os diversos significados da multiplicação e da divisão;
compreender os efeitos de multiplicar e dividir números inteiros;
identificar e usar, na resolução de problemas, as relações entre as operações, tais como a divisão ser o inverso da multiplicação;
compreender e usar as propriedades das operações. (idem, p. 172)

O antigo Programa de Matemática, de 2007, estabelece como objetivo específico a resolução de problemas através da relação entre a multiplicação e a divisão e a compreensão dos sentidos destas duas operações, não descurando da compreensão e realização de algoritmos. O atual Programa de Matemática, de 2013, destaca a aprendizagem dos sentidos das operações de multiplicação e divisão, a utilização do cálculo mental, resolução de problemas e, como nos documentos referidos anteriormente, a aprendizagem do algoritmo da multiplicação e da divisão.

Por fim, no trabalho realizado em torno dos números e das operações, nos primeiros anos de escolaridade, também são valorizados os algoritmos das quatro operações elementares, sobretudo no PMEB (2013). No entanto, alguns documentos de orientação curricular (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; NCTM, 2007) e investigadores sobre o ensino dos números e das operações (Brocardo & Serrazina, 2008; Ponte & Serrazina, 2000) referem que, mais do que ensinar os algoritmos, o trabalho em torno dos números e operações deve estar relacionado com o desenvolvimento do sentido de número sendo crucial, nos primeiros anos o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental.

2.1.8. O papel do professor na aprendizagem da multiplicação e divisão

Os professores terão que mudar o seu papel, de professores que dão orientações e explicações para o de professores que ajudam os alunos a “reinventar” a matemática.

(Gravemeijer, citado in Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008, p. 155)

A aprendizagem da matemática “depende fundamentalmente do que se sucede na sala de aula quando professores e alunos interagem com base no currículo” (NCTM, 2014, p. 8), podendo esta ser definida como “um processo no qual cada aluno constrói o seu próprio conhecimento matemático a partir de experiências pessoais, a par do retorno que recebe dos seus pares, de professores e de outros adultos” (idem, p. 9).

As aulas de matemática deverão centrar-se no envolvimento dos alunos na resolução e na discussão de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas. Como tal, os professores “planificam as aulas de modo a desencadear interações entre os alunos e a promover o discurso, tendo por objetivo ajudá-los a dar sentido aos conceitos e procedimentos matemáticos” (NCTM, 2014, p. 11).

Assim, o professor tem um papel fundamental na seleção de problemas e de tarefas matemáticas que propõe à turma, porque

ao analisar e adaptar um determinado problema, ao antecipar as ideias matemáticas que dele possam emergir e as próprias questões dos alunos, os professores podem decidir se determinados problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objetivos propostos. Existem inúmeros problemas interessantes e divertidos,

mas que poderão não conduzir ao desenvolvimento das noções matemáticas que são importantes para uma turma, num determinado momento. (NCTM, 2007, p. 58)

Além disso, os professores eficazes percebem como é que os contextos, as culturas, as condições e a linguagem

podem ser utilizados na elaboração de tarefas matemáticas que apelem ao conhecimento e às experiências anteriores dos alunos ou que proporcionem uma experiência comum aos alunos, a partir da qual o seu trabalho nas tarefas se desenvolva. Como consequência do esforço dos professores para incorporarem estes elementos nas tarefas, o envolvimento dos alunos nas respetivas resoluções está mais fortemente ligado com o seu sentido de identidade, levando a um aumento do empenho e da motivação para a matemática. (NCTM, 2014, p. 17)

Por outro lado, o professor tem também um papel fundamental no ensino de estratégias que conduzam à resolução de problemas. É importante que possibilite aos alunos a construção das suas próprias estratégias de resolução. Na mesma linha de pensamento, Boavida et al. (2008), afirmam que o professor pode propor aos alunos “várias tarefas que favoreçam o aparecimento dessas estratégias. A sua posterior identificação e sistematização irão dotá-los de um repertório de estratégias que lhes permitirá resolver vários problemas diferentes ou o mesmo problema de modos diferentes” (pp. 25-26).

Assim, pode evidenciar-se que a resolução de uma grande variedade de problemas por parte do aluno, que o possibilite recorrer a diversas estratégias é fundamental, porque, “a familiaridade com o uso de estratégias irá permitir ao aluno passar gradualmente de uma situação fechada para outra mais aberta sem se sentir perdido” (Boavida et al., 2008, p. 23). O professor tem assim um papel essencial em incentivar os alunos a chegarem às suas próprias estratégias de resolução de problemas, para que, posteriormente, numa discussão coletiva, se sintam responsáveis pela sua própria resolução, aumentando a sua motivação e capacidade de exporem os seus raciocínios matemáticos (Smole & Diniz, 2001). De acordo com estes autores,

para que os alunos sejam capazes de apresentar as diferentes maneiras que utilizam para resolver problemas, cabe ao professor

propiciar um espaço de discussão no qual eles pensem sobre os problemas que irão resolver, elaborem uma estratégia e façam registro da solução encontrada ou dos recursos que utilizam para chegar ao resultado. (idem, p. 125)

Segundo Fosnot e Dolk (2001), e como já foi referido nesta investigação, ao propor tarefas de multiplicação e de divisão, é fundamental salientar que o professor tem o papel de considerar relativamente ao contexto das tarefas, as situações associadas, os modelos subjacentes e os números envolvidos.

Para que o professor consiga propor tarefas ricas do ponto de vista matemático e significativas para os alunos, deve possuir um conhecimento aprofundado sobre as aptidões, os interesses e as experiências dos mesmos, bem como sobre as várias formas de como estes aprendem matemática (NCTM, 2007). As tarefas devem estimular os alunos a estabelecerem conexões e a promover a comunicação matemática. Tal como afirmam Boavida et al. (2008),

o professor que proporciona aos alunos tarefas desafiantes e apropriadas ao seu conhecimento, está a proporcionar o estabelecimento de conexões em vários tópicos dentro e fora da Matemática e a estimular a argumentação e a comunicação recorrendo a diferentes representações. Em suma, está a contribuir para o desenvolvimento do pensamento independente e crítico, tão essencial a várias facetas da vida. (p. 33)

Concluindo e tendo como referência Mendes, Brocardo e Oliveira (2011), existe uma evolução no ensino, onde os alunos passam a ser o centro da ação educativa, tornando-se responsáveis pelo aprofundamento do seu conhecimento e sendo possuidores de um papel ativo na construção do saber. Esta alteração no ensino traduz-se numa alteração no papel do professor, devendo este planear as tarefas que propõe tendo em conta que o ritmo não é igual para todos os alunos e, por isso, deve pensar em estratégias de modo que todos progridam na sua aprendizagem.

Capítulo 3

Metodologia de Investigação

O presente capítulo apresenta e fundamenta as principais escolhas realizadas ao nível metodológico. Assim, caracterizam-se as opções metodológicas: investigação sobre a própria prática, investigação qualitativa e estudo de casos. Seguidamente, é feita uma contextualização do estudo, caracterizando a escola, a turma e os alunos-caso. Por fim, são explicitados os métodos e o processo de recolha e análise de dados utilizados no estudo em questão.

3.1. Opções metodológicas

3.1.1. Investigação sobre a prática

Esta secção contempla e justifica as opções metodológicas subjacentes ao “procedimento de recolha de dados e de documentação de experiências e o modo como se analisam e interpretam os acontecimentos” (Ponte, 2002, p. 5). O estudo desenvolvido tem como principais objetivos analisar e compreender o modo como os alunos do 3.º ano de escolaridade resolvem tarefas que envolvem as operações multiplicação e divisão e compreender o modo como os alunos relacionam as operações multiplicação e divisão.

A metodologia de um projeto de investigação deverá dar resposta a uma questão problema em estudo, com o intuito de compreender, de modo aprofundado, o conteúdo que está a ser investigado. Por outro lado, pretende auxiliar o professor a lidar com os problemas da sua prática, com os quais se depara constantemente, ou seja, “torna-se necessária a exploração constante da prática e a sua permanente avaliação e reformulação” (Ponte, 2002, p. 2), de modo a corresponder às expectativas dos alunos e levá-los a obter os resultados desejados.

Nesta perspetiva, “a abordagem adotada e os métodos de recolha de informação selecionados dependerão da natureza do estudo e do tipo de informação que se pretende

obter” (Bell, 1993, p. 20), ou seja, a metodologia deve ser adequada e coerente tendo em conta os objetivos delineados para a investigação, na medida em que “para merecer a qualidade de investigação, um trabalho terá de envolver alguma forma de rigor. Isto é, tem de assumir uma natureza minimamente metódica e sistemática, permitindo, deste modo, a sua possível reprodução” (Ponte, 2002, p. 4).

Tendo em conta que este projeto de investigação se centra na compreensão de um fenómeno de natureza educativa que, segundo Ponte (2002), estabelece como um dos objetivos “procurar compreender a natureza dos problemas que afetam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior de uma estratégia de ação” (p. 7/8), considero que este estudo tem características de investigação sobre a prática, definida pelo mesmo autor como “um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente” (idem, p. 3).

Considero a investigação sobre a prática adequada ao estudo em questão, na medida em que pretendi investigar e compreender um problema associado à prática educativa do professor, neste caso, durante a minha prática enquanto professora estagiária, integrando uma turma de 3.º ano de escolaridade.

Saliento ainda as palavras de Ponte (2002) relativamente à importância de refletir, que “implica uma consideração cuidadosa e ativa daquilo em que se acredita ou se pratica, à luz dos motivos que os justificam e das consequências que daí resultam” (p. 8).

O meu papel enquanto professora estagiária irá envolver-me de modo aprofundado com esta investigação, melhorando os meus conhecimentos, “desenvolvendo uma investigação em íntima relação com a função de professor” (Ponte, 2002, p. 2) e percecionando a importância de refletir e adequar a prática através de estratégias que motivem os alunos e os auxiliem nas suas aprendizagens. Saliento as palavras de Alarcão (2001) que infere

realmente não posso conceber um professor que não se questione sobre as razões subjacentes às suas decisões educativas, que não se questione perante o insucesso de alguns alunos, que não faça dos seus planos de aula meras hipóteses de trabalho a confirmar ou infirmar no laboratório que é a sala de aula, que não leia criticamente os manuais ou as propostas didáticas que lhe são feitas, que não se

questione sobre as funções da escola e sobre se elas estão a ser realizadas. (p. 5)

Por último, evidencio ainda que a investigação sobre a prática é adequada ao tema em questão, uma vez que esta tem um papel questionador e problematizante, sendo um processo que não pretende dar resposta a um problema, mas sim interpretar o que os resultados nos sugerem, nomeadamente “novas formas de olhar o contexto e o problema e/ou possibilidades de mudanças na prática” (Ponte, 2002, p. 8). Assim, depreendo que o estudo em questão se trata efetivamente de uma investigação sobre a prática, embora se centre nas aprendizagens dos alunos, porque tem como objetivo compreender melhor um fenómeno educativo em concreto, tentando também melhorar a minha prática pedagógica.

3.1.2. Investigação qualitativa

A investigação em estudo encontra-se enquadrada numa metodologia de natureza qualitativa, de caráter interpretativo e descritivo, tendo em conta que será fundamental analisar, interpretar e tirar conclusões durante o estudo. Caracteriza-se como qualitativa, uma vez que esta encara como fonte principal dos dados o ambiente natural onde o investigador é o instrumento principal, onde pretendo analisar os alunos no seu ambiente em sala de aula e desempenhar um papel ativo em todo o processo, que me possibilite compreender os acontecimentos a partir de uma perspetiva interna. Segundo o que foi referido, Bogdan e Biklen (1984) afirmam que “nos métodos qualitativos o investigador deve estar completamente envolvido no campo de ação dos investigados, uma vez que, na sua ausência, este método de investigação baseia-se principalmente em conversas, ouvir e permitir a expressão livre dos participantes” (p. 3).

Na mesma linha de pensamento, Bogdan e Biklen (1994) referem que uma abordagem deste tipo é composta por cinco particularidades:

a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; os dados que o investigador recolhe são essencialmente de caráter descritivo; os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente os resultados; a análise dos dados é feita de forma indutiva; o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. (p. 2)

O estudo em questão envolve as cinco características mencionadas porque os dados recolhidos irão provir das aulas implementadas por mim no papel de estagiária e serei responsável por organizar e recolher todos os dados possíveis, através das técnicas mencionada anteriormente. A maior parte dos dados serão recolhidos através de registos áudio e entrevistas clínicas. Irei centrar-me em delinear todas as etapas para introduzir os problemas em sala de aula, iniciando pela construção de uma sequência de tarefas, um estudo aprofundado das possíveis estratégias dos alunos e da preparação das discussões em sala de aula, isto porque, para obter resultados ricos para análise, estes terão de provir de um processo consistente e bem pensado. Para analisar os dados irei centrar-me na investigação que foi feita previamente e focar-me nos autores descritos na fundamentação teórica elaborada para esta investigação. Por fim, irei tentar perceber se a minha intervenção foi significativa para os alunos e se, de algum modo, os ajudou a nível do raciocínio matemático.

Saliento que um estudo desta natureza implica a procura de respostas e uma análise intensa relativamente a atitudes, motivações e comportamento dos alunos perante o processo de resolução das tarefas de multiplicação e divisão, no contexto de sala de aula. Assim, para que os resultados obtidos sejam fiáveis, é essencial a existência de uma participação ativa na recolha e registo de dados, tendo sempre em evidência as características dos alunos envolvidos. Isto porque, segundo Merriam (1998) “nas metodologias qualitativas os intervenientes da investigação não são reduzidos a variáveis isoladas, mas vistos como parte de um todo no seu contexto natural” (p. 68).

Por fim, saliento que a adequação da abordagem qualitativa à investigação encontra-se também envolvida no enfoque da compreensão de uma característica no contexto educativo, que envolve principalmente uma recolha direta de dados, em que estes terão de apresentar um forte carácter descritivo e interpretativo e incluem “notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48).

3.1.3. Estudo de casos

Esta investigação qualitativa envolve não só a turma, mas, também, o estudo de casos, consistindo estes na “observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 89). Na mesma perspetiva, Coutinho (2011) menciona que o estudo de caso é “um

plano de investigação que envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade definida: “caso”” (p. 293). Estes casos são examinados “em detalhe, em profundidade, reconhecendo-se a sua complexidade e recorrendo-se para isso a todos os métodos que se revelem apropriados” (ibidem).

Os estudos de caso “são uma estratégia adotada quando se procuram o “como” e o “porquê”, quando o investigador tem pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o objetivo se relaciona com fenómenos em contexto da vida real” (Yin, 1989, p. 13).

Na mesma linha de pensamento, tendo em conta os estudos de caso como uma abordagem qualitativa, estes

possuem características próprias e constituem a estratégia preferida quando se opta por responder a questões em que o investigador não pode exercer controlo sobre os acontecimentos e o estudo focaliza-se na investigação de um fenómeno atual no seu próprio contexto.
(Carmo e Ferreira, 2008, referido em Sobral, 2015, pp. 40-41)

Coutinho (2011) explicita que o estudo de caso recorre a diversas técnicas de investigação qualitativa, como modo de obtenção das diversas perspetivas dos participantes e de diferentes visões do mesmo fenómeno, permitindo uma triangulação dos dados na fase da sua análise. A autora baseia-se em vários autores (Yin, 1994; Gomez et al., 1996; Ponte, 1994; e Punch, 1998), afirmando que um estudo de caso é uma investigação empírica (Yin, 1994), que se baseia no raciocínio indutivo (Gomez et al., 1996), que depende fortemente do trabalho de campo (Ponte, 1994), que não é experimental e que se baseia em fontes de dados múltiplas e diversas (Yin, 1994).

Deste modo, pretendo assim analisar as estratégias de resolução de problemas de multiplicação e divisão de modo mais detalhado, de três alunos pertencentes à mesma.

3.2. Contexto e participantes

3.2.1. Caraterização do contexto

A Escola onde realizei o meu projeto de investigação, é constituída por onze salas de 1.º Ciclo, quatro salas de ensino Pré-escolar, o refeitório, o polivalente e a biblioteca escolar. Trata-se de uma instituição de ensino público, pertencente ao concelho de Sesimbra, situada na Quinta do Conde.

O edifício atual da escola existe desde o ano de 2003, situado numa zona onde a população residente é oriunda de variadíssimas regiões do país, das ex-colónias e de países de emigração. É uma escola ampla, com diversas salas, de dimensões generosas, possuindo no seu interior uma divisão para o espaço das artes e outra divisão para guardar os materiais. A escola possui também diversos espaços exteriores.

3.2.2. Caraterização da turma

A turma na qual realizei a investigação em questão, pertence ao 3.º ano de escolaridade e é composta por vinte alunos, sendo sete do sexo feminino e treze do sexo masculino, com idades compreendidas entre os oito e os dez anos. Dois alunos encontram-se sinalizados com necessidades educativas especiais e um aluno tem apoio educativo. A sala de aula encontra-se organizada de modo tradicional, com as secretárias viradas para o quadro e para a mesa da professora.

Através de conversas informais com a professora cooperante, percecionei que era uma turma bastante complicada e agitada, no sentido em que existiam muitas conversas paralelas e conflitos entre os alunos e era necessário “pulso firme”.

Relativamente às áreas curriculares, os alunos têm melhores notas à área de Estudo do Meio. Durante o tempo em que acompanhei a turma, denotei que as notas subiram e que conseguiram melhorar tanto na área do Português, como na área da Matemática. Nesta turma, existem ritmos de aprendizagem bastante distintos e, por isso, alguns alunos são capazes de resolver determinados problemas apresentando menos dificuldades do que outros. No entanto, de um modo geral, os alunos são comunicativos, participativos, curiosos e, de certo modo, com vontade de aprender.

3.2.3. Caraterização dos alunos-caso

Todo os alunos realizaram a sequência de tarefas propostas em sala de aula, no entanto, optei por selecionar três alunos para proceder a uma análise mais detalhada das suas estratégias de resolução das tarefas propostas.

No momento de seleção dos alunos, considerei como aspetos relevantes o seu nível e ritmo de aprendizagem, a sua motivação, o seu modo de comunicar como pensaram e as respostas às tarefas propostas, optando por alunos que utilizassem diferentes estratégias para resolver um mesmo problema e que se evidenciassem bons

informantes do ponto de vista da investigação. É importante mencionar que diversos alunos não conseguiram resolver todos os exercícios da sequência de tarefas propostas, o que influenciou bastante a seleção efetuada. Como tal, selecionei os seguintes alunos: o Tomás, o Ilian e o Pedro.

3.2.3.1. Tomás

O Tomás tem nove anos de idade. É um menino alegre, mas um pouco reservado. Revela interesse em sala de aula, quando se sente motivado. Por vezes, também se distrai bastante com o colega da frente, no entanto, a sua colega de mesa ajuda-o durante as aulas, para que este esteja atento e consiga superar algumas dificuldades.

Possui algumas dificuldades de aprendizagem em todas as áreas curriculares, tendo baixado as suas notas relativamente ao ano anterior, o que poderá tê-lo desmotivado um pouco. No entanto, durante a resolução das tarefas propostas, conseguiu participar de modo empenhado e tentou sempre resolver os problemas que propus, encontrando diferentes estratégias.

3.2.3.2. Ilian

O Ilian tem nove anos de idade. É um menino reservado, bastante concentrado, organizado e empenhado em sala de aula. É interessado na escola e não conversa muito com os colegas. Apresentando um bom ritmo de aprendizagem e de trabalho em sala de aula, tendo sempre boas notas.

É um bom colega, ajudando sempre os seus colegas, quando estes o abordam ou quando se apercebe que os mesmos se encontram com dificuldades. Na exploração das tarefas propostas, participou de modo ativo, procurando resolver sempre os problemas e tentando utilizar diversas estratégias como resposta. Demonstrava sempre vontade em alcançar o que era proposto, no entanto, quando não conseguia concluir o seu raciocínio em algum problema ficava triste consigo mesmo, não lidando bem com o facto de errar ou de não compreender algo que era trabalhado.

3.2.2.3. Pedro

O Pedro tem nove anos de idade. É um menino bastante sociável, alegre, curioso e muito interessado na escola. Gosta de questionar sobre tudo o que não compreende, com o intuito de procurar novos conhecimentos e gosta de partilhar curiosidades com a turma. No entanto, é um aluno que se distrai com muita facilidade, devido à constante conversa existente com os colegas da turma.

É um menino bastante participativo, que realiza todas as tarefas propostas em sala de aula, não apresentando muitas dificuldades e terminando sempre o seu trabalho primeiro que os restantes colegas. Evidenciou estar motivado na realização da sequência de tarefas, tendo uma participação bastante ativa e conseguindo realizar todas as tarefas atempadamente.

3.3. Recolha e análise de dados

3.3.1. Técnicas de recolha de dados

Numa investigação desta índole é fundamental refletir sobre as técnicas de recolha de informação que se adequam ao que é necessário saber, sendo essencial recorrer a um leque alargado de fontes de informação. Como tal, é importante que seja feita uma reflexão estruturada sobre os melhores métodos para recolha de dados, de acordo com os objetivos estabelecidos e o contexto onde incide a investigação.

Tendo em conta a importância da recolha de informação, uma vez que será a sua análise que sustenta e fundamenta as conclusões relativas à investigação que desenvolvi, usei várias técnicas e procedimentos. Esta permitiu-me obter a informação necessária para o estudo e uma melhor interação com o “objeto” em estudo.

Segundo Ponte (2002) é “importante que os dados sejam recolhidos, sempre da mesma forma, com procedimentos claros e bem definidos, de modo a possibilitar a sua posterior interpretação” (p. 15). Como tal, as técnicas estabelecidas de recolha de dados são a observação participante, complementada com o registo de vídeo-gravações e de fotografias, a recolha documental e as entrevistas clínicas.

3.3.1.1. Observação participante

Relativamente à observação direta e participante esta define-se como uma “técnica de recolha de dados particularmente útil e fidedigna, na medida em que a informação obtida não se encontra condicionada pelas opiniões e pontos de vista dos sujeitos, como acontece nas entrevistas e nos questionários” (Afonso, 2005, p. 91). O estudo desenvolvido apoia-se na observação não-estruturada que, segundo Cozby (1989) citado por (Afonso, 2005),

é conduzida quando o investigador quer descrever e compreender o modo como as pessoas vivem, trabalham e se relacionam num determinado contexto social, [implicando] que o investigador se insira na situação (...) e observe o próprio contexto, os padrões das relações entre as pessoas, o modo como reagem aos eventos que ocorrem. (p. 92)

De acordo com a metodologia de investigação sobre a prática que este projeto acarreta, face à minha intervenção pedagógica, esta define um papel de “investigador de campo”, uma vez que “ser-se investigador significa interiorizar-se o objetivo da investigação, à medida que se recolhem os dados no contexto” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 128). Como tal, é possível considerar a observação que realizei como observação participante, tendo como vantagem a recolha de informação através de uma fonte direta, como já mencionado, mas também, “durante a observação, o investigador do estudo de caso qualitativo mantém um bom registo dos acontecimentos para providenciar uma descrição relativamente incontestável para análise posterior e para o relatório final” (Stake, 2012, p. 78).

Nesta observação participante destaco a importância das notas de campo, que se cingem ao “relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha, refletindo sobre os dados” Bogdan & Biklen (1994, p. 150). Como tal, considero um instrumento a ser frequentemente utilizado isto porque, segundo os mesmos autores, quanto mais detalhadas, precisas e extensivas, mais bem-sucedidos serão os resultados da análise pretendida. Embora as tenha elaborado e a elas tenha recorrido durante a análise dos dados, não estão evidentes no capítulo da análise.

Durante a observação participante tive oportunidade de realizar vídeo-gravações e fotografias, uma vez que estas são um recurso a partir do qual pude obter informações

reais e pormenorizadas. Por exemplo, nas vídeo-gravações obtive material que me permitiu analisar e refletir de um modo mais pormenorizado sobre a informação que retirei do contexto e rever o que os sujeitos implícitos dialogaram ou realizaram, em determinada altura, sempre que necessitei. As videogravações e as fotografias que completam a observação, mostram os diferentes momentos de resolução das tarefas.

3.3.1.2. Recolha documental

Considero que este tipo de recolha de dados é essencial numa investigação como a que realizei, trazendo contribuições importantes para o estudo do tema em questão, sendo que o investigador deve ter em atenção três aspetos essenciais: a escolha dos documentos, o acesso a estes e a sua análise.

Nesta perspetiva, saliento as palavras de Stake (2012) quando refere que “recolher dados através do estudo de documentos segue a mesma linha de pensamento que observar e entrevistar” (p. 84), ou seja, deve também partir dos objetivos da investigação. Neste caso as produções dos alunos foram objeto de uma análise aprofundada.

Neste sentido, destaco que as produções dos alunos, nomeadamente as resoluções das tarefas propostas e outro tipo de material que estes desenvolveram são instrumentos essenciais de recolha de dados, porque nos dão dados concretos sobre o conhecimento do aluno e permitem-nos analisar as estratégias que usou na resolução das tarefas.

3.3.1.3. Entrevistas clínicas

As entrevistas clínicas têm como objetivo “recolher informação sobre factos” (Afonso, 2005, p. 99), não utilizando “nenhum questionário ou guião” (Vilelas, 2009, p. 281). Neste tipo de entrevista, a pessoa entrevistada possui “uma grande margem de liberdade e de iniciativa no que respeita inclusivamente ao tipo de assuntos focados em cada sessão” (Almeida, 1990, p. 109). Como tal, é fundamental incentivar o entrevistado a dialogar, de modo “a obter um panorama dos problemas mais salientes, dos mecanismos lógicos e mentais do respondente, dos temas que para eles são importantes” (Vilelas, 2009, p. 281).

É importante reconhecer as potencialidades das entrevistas clínicas, evidenciando que as mesmas podem ser utilizadas para envolver os alunos na resolução de uma tarefa, percecionando o que ele pensa ou faz. Assim, o professor (no papel de investigador) tem

acesso ao modo como o aluno pensa, os conhecimentos que este utiliza para suportar a sua resolução da tarefa e a forma como os utiliza e relaciona.

Como tal, considerei pertinente a utilização das entrevistas clínicas para o estudo em questão, porque me possibilitaram perceber de um modo mais detalhado a forma de pensar de três alunos, podendo perceber melhor as estratégias que utilizaram e o modo como pensaram, tendo em conta o objetivo de cada tarefa. São assim um enriquecimento para este estudo, que me permitirá analisar e obter resultados da análise das resoluções destes alunos.

As técnicas de recolha de dados referidos encontram-se enquadradas no tema e nos objetivos do estudo em questão. Uma vez que este se centra nas questões- problema “como é que os alunos de 3.º ano resolvem tarefas de multiplicação?” e “como é que os alunos do 3.º ano resolvem tarefas de divisão e, em particular, usam a multiplicação na sua resolução?” considero que a observação participante (que abrange as notas de campo e as fotografias e vídeo-gravações), a recolha documental e a entrevistas clínicas são os métodos adequados para recolher dados. E também para, posteriormente, na fase de uma análise detalhada do que foi recolhido, nos apresentar informação credível e imprescindível para potencializar a construção de um conhecimento válido sobre o tema em estudo.

3.3.2. Processo de recolha de dados

O processo de recolha de dados para a investigação em questão, ocorreu durante o estágio que realizei na turma de 3.º ano, ao longo de onze semanas, entre o mês de março e o mês de maio. A primeira semana foi destinada à observação do ambiente em sala de aula, da turma e do modo como a professora cooperante lecionava as suas aulas, sendo que as seguintes semanas foram de intervenção.

Num primeiro momento, estabeleci com a professora orientadora quais seriam as tarefas que iriam integrar a sequência de tarefas para trabalhar com a turma. Apenas comecei a minha intervenção para esta investigação quando esta primeira fase estava bem definida. Assim, foram exploradas oito tarefas em sala de aula, em dias diferentes, tentando recolher sempre os dados necessários para prosseguir com a investigação.

Cada vez que fazia uma intervenção, gravava e fotografava as intervenções dos alunos na exploração das tarefas e o modo como orientava a discussão das estratégias propostas pelos mesmos. No final de cada intervenção, procedia ao registo de algumas notas de campo sobre o modo como tinha decorrido, sobre alguma evolução, sobre a participação dos alunos, sobre o meu papel durante a intervenção, entre outros aspetos que considere relevantes. Como tal, posso afirmar que durante a recolha de dados, desempenhei um papel de observadora participante, tirei apontamentos sempre que pertinente, realizei as gravações e recolhi os registos escritos dos alunos, de modo a proceder à sua posterior análise. Além disso, ao mesmo tempo, desempenhei o papel de professora responsável pela turma. Considero que este duplo papel é difícil de desempenhar, uma vez que temos de ter em conta os alunos e a organização da sala de aula, perspetivando um momento positivo e enriquecedor para o desenvolvimento das suas aprendizagens, bem como certificarmo-nos que conseguimos registar todos os aspetos importantes que ressaltam desses mesmos momentos e nos auxiliam a desenvolver um estudo com base em registos fidedignos.

Importa ainda referir que as entrevistas clínicas foram realizadas numa salinha com cada aluno, de forma individual. Porém, devido a questões logísticas só tive a possibilidade de estar com esses três alunos para realizar as mesmas no final da implementação das tarefas. Assim, evidencio que em alguns casos as entrevistas foram realizadas provavelmente muito tempo após a resolução das tarefas. Por isso alguns alunos tiveram dificuldades em recordar as estratégias utilizadas.

3.3.3. Processo de análise de dados

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados consiste num processo “de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou” (p. 205).

O autor Bardin (1994) fala-nos sobre análise de conteúdo, uma técnica de análise de dados qualitativos, definida como um conjunto de técnicas de análise de comunicações entre indivíduos, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição de conteúdo das mensagens, indicadores que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de receção/produção. O mesmo autor defende que a análise de

conteúdo das mensagens deveria ser aplicável a todos os modos de comunicar, possuindo duas funções que podem, ou não, dissociar-se quando colocadas em prática. A primeira remete-nos para a função heurística, nomeadamente, a análise de conteúdo opulenta a tentativa exploratória e amplia a propensão à descoberta. A segunda refere-se à administração da prova, onde hipóteses, sobre a forma de questões ou de afirmações provisórias servem de diretrizes, recorrendo ao método de análise de uma confirmação ou de uma informação (Bardin, 1994).

O processo de análise de dados decorreu em duas fases. Numa primeira fase, comecei por analisar as produções dos alunos, resultantes da realização das tarefas que estavam a ser implementadas em sala de aula, com o intuito de perceber quais as estratégias utilizadas, com base nas discussões efetuadas para cada problema e nas produções dos alunos. Através desta análise, obtive uma visão geral de como se encontrava a turma, perante a resolução das tarefas, possibilitando-me, caso necessário, adaptar a sequência de tarefas, tendo em conta as dificuldades e conquistas dos alunos, no entanto, isso não foi necessário.

Num segundo momento, após todas as tarefas serem resolvidas pelos alunos, transcrevi as entrevistas clínicas e os episódios de discussão das tarefas, com o intuito de realizar uma análise pormenorizada das estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos, na resolução das tarefas de multiplicação e divisão, bem como as suas dificuldades.

Para me auxiliar na análise e classificação das produções os alunos, comecei por realizar uma tabela (**tabela 4**) que me permitisse organizar, interpretar e conceder significado às estratégias e procedimentos de cálculo que estes utilizaram para resolver as tarefas de multiplicação e divisão, que lhes foram propostas. Foi contruída tendo por base as ideias mencionadas na fundamentação teórica deste projeto, principalmente de Mendes (2013), fundamentada no estudo que realizou.

Tabela 4 - Estratégias e Procedimentos de Cálculo

Multiplicação e Divisão	
Estratégias	Procedimentos de cálculo
Contagem	Contar por saltos
Aditivas	Adicionar sucessivamente com suporte na reta numérica Adicionar sucessivamente sem suporte na reta numérica
Subtrativas	Subtrair sucessivamente com suporte na reta numérica Subtrair sucessivamente sem suporte na reta numérica
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos Usar múltiplos de 5 e de 10 Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores Ajustar e compensar, utilizando números de referência Usar relações de dobre e de metade Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência Algoritmo da multiplicação/divisão

Assim, à medida que analisei as produções dos alunos, interpretei as suas estratégias, tendo em conta as que utilizam mais vezes e em que contexto as utilizam. É fundamental ter em conta que os resultados surgidos no processo de análise do estudo em questão, dizem respeito ao contexto particular daquela turma e daqueles alunos, porque “os resultados da investigação são válidos naquele contexto e permitem compreender ou explicar apenas o que acontece naquele lugar e naquele tempo” (Máximo-Esteves, 2008, p. 104).

O capítulo da análise de dados encontra-se organizado em duas secções. Numa primeira parte analiso e interpreto as estratégias utilizadas pelos alunos caso, para resolver as tarefas de multiplicação e divisão. Numa segunda e última parte descrevo e analiso os contributos dos alunos nas três cadeias numéricas que foram implementadas em sala de aula. Nesta última parte considero o contributo de todos os alunos, uma vez que as cadeias numéricas foram realizadas em grupo-turma.

Capítulo 4

Proposta pedagógica

O presente capítulo apresenta e fundamenta a sequência de tarefas proposta ao nível da intervenção pedagógica, descrevendo, para cada tarefa, as suas principais características, os seus objetivos e conteúdos tendo por base o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico de 2013 (ME, 2013). Tendo em conta que o estudo é centrado nas estratégias usadas pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão, efetuou uma descrição detalhada do modo como as tarefas foram exploradas em sala de aula, quer dos problemas, quer das cadeias numéricas implementadas na turma do 3.º ano.

4.1. Sequência de tarefas proposta

As tarefas propostas ao nível da intervenção pedagógica foram pensadas e selecionadas em conjunto com a professora supervisora deste estudo, tendo por referência o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) e as orientações curriculares sobre a aprendizagem da multiplicação e divisão do NCTM (2008). Saliento que nas aulas em que eram exploradas tarefas, os alunos não só as tentavam resolver individualmente, como era fomentada uma discussão com toda a turma, para que todos pudessem apresentar as suas estratégias de resolução e discuti-las com os colegas. Foram também exploradas três cadeias numéricas, com o intuito de desenvolver o cálculo mental e os conceitos e procedimentos que estavam a ser trabalhados. Estas foram realizadas de modo intercalado.

No total, a proposta pedagógica é composta por uma sequência de nove tarefas: problemas de multiplicação, problemas de divisão e cadeias numéricas. Estas são diversificadas, tendo em conta os números envolvidos e os vários sentidos das operações

referidas. Saliento que a sequência de tarefas escolhida inclui problemas com números naturais, pretendendo que os alunos estabeleçam relações entre a multiplicação e a divisão em situações de cálculo. Pretendi ainda, que os alunos percecionassem as potencialidades destas operações evoluindo, se possível, nas suas aprendizagens e na compreensão do sentido de número. Segundo Geer (2012), citado por Mendes (2013) “a relação inversa entre a multiplicação e a divisão tem implicações importantes no cálculo eficiente e flexível e na avaliação da compreensão conceptual dos alunos” (p. 9).

É importante salientar que os números que são propostos nesta sequência de tarefas, foram escolhidos tendo em conta o desenvolvimento cognitivo dos alunos da turma do 3.º ano para resolver problemas de multiplicação e divisão. Como tal, foi fundamental selecionar uma sequência de tarefas em que, à medida que avançamos, o grau de dificuldade e a grandeza dos números vai aumentando, contribuindo para a progressão das aprendizagens dos alunos. Saliento ainda o cuidado em selecionar/criar tarefas que fizessem referência a aspetos do dia-a-dia dos alunos, para que estes conseguissem estabelecer uma relação e percecionar o que era pretendido em cada tarefa.

É fundamental que os professores selecionem e contruam tarefas que “promovam nos alunos o desenvolvimento dos conceitos e dos processos de uma forma que simultaneamente estimule a capacidade de resolver problemas e de raciocinar e comunicar matematicamente” (Ferreira, 2012, p. 27). Como tal, ao selecionar, adaptar e criar tarefas, o professor deverá ter em atenção o conteúdo matemático, os alunos e as suas formas de aprendizagem (NCTM, 2007).

A seguinte tabela (**tabela 5**) identifica as tarefas que foram selecionadas, a data em que foram implementadas em sala de aula com a turma do 3.º ano e apresenta uma duração aproximada de cada uma.

Tabela 5 - Identificação das tarefas e datas em que foram realizadas

Tarefas	Data	Duração
Tarefa 1 - Máquina de Bebidas 1	02/05/2017	1h e 40 min
Tarefa 2 – Cadeia Numérica 1	03/05/2017	30 min
Tarefa 3 – Máquina de Bebidas 2 Tarefa 4 – Máquina de Bebidas 3	09/05/2017	2h e 30 min
Tarefa 5 – Cadeia Numérica 2	10/05/2017	30 min
Tarefa 6 – As Miniaturas 1	15/05/2017	1h e 40 min
Tarefa 7 – As Miniaturas 2	16/05/2017	1 h e 40 min
Tarefa 8 – Cadeia Numérica 3	22/05/2017	30 min
Tarefa 9 – As Miniaturas 3	23/05/2017	1 h e 40 min

4.1.1. Tarefa 1 – Máquina de bebidas 1

A primeira tarefa (anexo 1) foi construída em conjunto com a professora orientadora e permitiu-me analisar como os alunos se encontravam na resolução de problemas e como reagiram perante a discussão coletiva, tendo em conta que se tratava de uma experiência nova para os mesmos.

Os principais objetivos da tarefa são: resolver problemas que envolvem o sentido aditivo da multiplicação; desenvolver estratégias de cálculo mental, usando as propriedades das operações; usar múltiplos de 12 e de 9.

Tendo por base as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013), a resolução da tarefa está associada aos seguintes objetivos:

- ⇒ Reconhecer que o produto de um número por 10, 100, 1000. Etc. se obtém acrescentando à representação decimal desse número o correspondente número de zeros [NO3 – 7.3.];
- ⇒ Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4.];
- ⇒ Efetuar a multiplicação de um número de um algarismo por um número de dois algarismos, decompondo o segundo em dezenas e unidades e utilizando a propriedade distributiva [NO3 – 7.5.].

Recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), esta tarefa apresenta os seguintes conteúdos:

- ⇒ Múltiplo de um número;
- ⇒ Cálculo mental: produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos;
- ⇒ Problemas até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.

Os números utilizados nesta primeira tarefa apresentam uma grandeza menor, quando comparados com os das tarefas seguintes e tanto o número 12 como o número 9 permitiram aos alunos pensar em números de referência para os apoiar no seu raciocínio, como por exemplo, o número 10.

4.1.2. Tarefa 3 – Máquina de bebidas 2

A tarefa *Máquina de bebidas 2* (anexo 2) foi adaptada de Mendes (2013). Apresenta como principais objetivos: relacionar a multiplicação com a divisão por medida; recorrer a outras operações para resolver problemas de divisão, em especial à multiplicação; relacionar problemas entre si, mesmo partindo de contextos diferentes.

Tendo por base as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013), menciono os seguintes objetivos para a tarefa em questão:

- ⇒ Efetuar divisões inteiras identificando o quociente e o resto quando o divisor e o quociente são números naturais inferiores a 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas.
- ⇒ Utilizar corretamente as expressões <<divisor de>> e <<divisível por>> e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa) [NO3 – 9.4.].
- ⇒ Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento [NO3 – 10.1.].

Recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), esta tarefa tem subjacente os seguintes conteúdos:

- ⇒ Divisão inteira por métodos informais;

⇒ Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.

4.1.3. Tarefa 4 – Máquina de bebidas 3

A tarefa *Máquina de bebidas 3* (anexo 3) foi adaptada de Mendes (2013) e encontra-se relacionada com a tarefa anterior. Estabelece como principais objetivos: relacionar a multiplicação com a divisão por partilha; relacionar problemas entre si, mesmo partindo de contextos diferentes; recorrer a outras operações para resolver problemas de divisão, em especial à multiplicação.

Tendo por base as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013), menciono os seguintes objetivos para a tarefa em questão:

- ⇒ Efetuar divisões inteiras identificando o quociente e o resto quando o divisor e o quociente são números naturais inferiores a 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas;
- ⇒ Utilizar corretamente as expressões <<divisor de>> e <<divisível por>> e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa) [NO3 – 9.4.];
- ⇒ Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4.].

Recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), esta tarefa apresenta os seguintes conteúdos:

- ⇒ Divisão inteira por métodos informais;
- ⇒ Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.

Nas tarefas 3 e 4 está subjacente operação de divisão com o sentido de medida e de partilha. No entanto, os números utilizados são exatamente os mesmos, com o intuito de analisar se os alunos as resolvem de formas distintas, ou se percecionam a relação existente entre estas e vão relembrar o raciocínio utilizado para resolver a tarefa 3 e aplicá-lo na tarefa 4. Os números escolhidos para estas duas tarefas são números maiores do que os da tarefa 1, permitindo aos alunos efetuar os cálculos utilizando a decomposição do

dividendo, recorrendo à estrutura decimal e a múltiplos de dez. Apesar de os números serem maiores, poderão também utilizar contagens progressivas e regressivas de dez em dez.

4.1.4. Tarefa 6 - As miniaturas 1

A tarefa *As miniaturas 1* (anexo 4) foi criada em conjunto com a professora orientadora e apresenta como principais objetivos: resolver problemas que envolvem o sentido aditivo da multiplicação; relacionar a multiplicação com a divisão; desenvolver estratégias de cálculo mental, usando as propriedades das operações; usar múltiplos de 12 e de 9.

Tendo por base as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013), menciono os seguintes objetivos para a tarefa em questão:

- ⇒ Reconhecer que o produto de um número por 10, 100, 1000. Etc. se obtém acrescentando à representação decimal desse número o correspondente número de zeros [NO3 – 7.3.];
- ⇒ Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4.];

Recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), esta tarefa apresenta os seguintes conteúdos:

- ⇒ Múltiplo de um número;
- ⇒ Cálculo mental: produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos;
- ⇒ Problemas até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.

Os números disponibilizados neste problema permitiam aos alunos relacionar o 15 com o 30, ou seja, estabelecer uma relação entre metade e dobro, o que lhes poderia facilitar os cálculos. Os alunos poderiam adicionar o multiplicando, neste caso o 15, primeiramente decomposto e poderiam utilizar números de referência, neste caso o 10, próximo de 8 e compensar. Os números escolhidos foram aumentando gradualmente, no entanto, tendo em conta que nem todos os alunos apresentam o mesmo nível cognitivo, foi necessário ter sempre em conta as possíveis estratégias que estes poderiam utilizar, mais e menos eficientes.

4.1.5. Tarefa 7 – As miniaturas 2

A tarefa *As miniaturas 2* (anexo 5) foi criada em conjunto com a professora orientadora e apresenta como principais objetivos: relacionar a multiplicação com a divisão por medida; trabalhar a divisão tendo em conta que esta tem o sentido inverso da multiplicação; relacionar problemas entre si, mesmo partindo de contextos diferentes; recorrer a outras operações para resolver problemas de divisão, em especial à multiplicação.

Tendo por base as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013), menciono os seguintes objetivos para a tarefa em questão:

- ⇒ Efetuar divisões inteiras identificando o quociente e o resto quando o divisor e o quociente são números naturais inferiores a 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas.
- ⇒ Utilizar corretamente as expressões <<divisor de>> e <<divisível por>> e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa) [NO3 – 9.4.].
- ⇒ Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4.].

Recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), esta tarefa apresenta os seguintes conteúdos:

- ⇒ Divisão inteira por métodos informais;
- ⇒ Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.

4.1.6. Tarefa 9 – As miniaturas 3

A tarefa *As miniaturas 3* (anexo 6) foi adaptada de Mendes (2013) e estabelece como principais objetivos: relacionar a multiplicação com a divisão por partilha; trabalhar a divisão tendo em conta que esta tem o sentido inverso da multiplicação; relacionar problemas entre si, mesmo partindo de contextos diferentes; recorrer a outras operações para resolver problemas de divisão, em especial à multiplicação.

Tendo por base as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013), menciono os seguintes objetivos para a tarefa em questão:

- ⇒ Efetuar divisões inteiras identificando o quociente e o resto quando o divisor e o quociente são números naturais inferiores a 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas.
- ⇒ Utilizar corretamente as expressões <<divisor de>> e <<divisível por>> e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa) [NO3 – 9.4.].
- ⇒ Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4.].

Recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), esta tarefa apresenta os seguintes conteúdos:

- ⇒ Divisão inteira por métodos informais;
- ⇒ Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.

Tendo em conta que este seria o último problema a ser realizado, terminando a sequência de tarefas proposta, foi escolhido um problema com um nível de complexidade maior, exigindo uma maior concentração e raciocínio por parte dos alunos, foram utilizados números maiores do que os das tarefas anteriores. Os alunos poderiam, mais uma vez, utilizar o número 10 como referência e optar por, por exemplo, calcular utilizando múltiplos de 10 e a adição, ou utilizar multiplicações sucessivas do número mais pequeno, a partir do número 10.

4.1.7. Tarefa 2 – Cadeia numérica 1 / Tarefa 5 – Cadeia numérica 2 / Tarefa 8 – Cadeia numérica 3

Estas tarefas (anexo 7) fazem parte da sequência proposta e introduzem cadeias numéricas, com o intuito de auxiliar os alunos a desenvolver o cálculo mental e o seu sentido de número. Ambas foram criadas em conjunto com a professora orientadora e apresentam como principais objetivos: relacionar a multiplicação com a divisão; efetuar os cálculos de divisão recorrendo à multiplicação e suas propriedades.

Tendo por base as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (2013), menciono os seguintes objetivos para a tarefa em questão:

- ⇒ Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4.];
- ⇒ Utilizar corretamente as expressões <<divisor de>> e <<divisível por>> e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa) [NO3 – 9.4.].

Recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), esta tarefa apresenta os seguintes conteúdos:

- ⇒ Cálculo mental: produto por 10,100,1000, etc.; produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos;
- ⇒ Cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10.
- ⇒ Divisor de um número, número divisível por outro, relação entre múltiplo e divisor.

Nestas três tarefas, era fundamental que os alunos conseguissem estabelecer conexões entre a multiplicação e a divisão e relacionar os resultados de cada alínea, para cada cadeia numérica, sendo essencial o conhecimento das tabuadas. Poderiam também utilizar relações de dobro e de metade ou utilizar decomposições.

4.2. A preparação da exploração das tarefas

Após ser elaborada a sequência de tarefas é fundamental que o professor se prepare para as explorar e discutir em sala de aula com os alunos. Segundo Mendes, Brocardo e Oliveira (2011), o professor deve preparar dois momentos importantes: “prever como poderá organizar a aula e colocar em ação essa previsão, ao explorar a tarefa na aula” (p. 13). Como tal, o professor deverá preparar a sua aula, pensando previamente no que os alunos conseguirão fazer para resolver os problemas e eventuais dúvidas que poderão emergir.

Nesta linha de pensamento, após efetuada a seleção das tarefas, comecei por antecipar possíveis estratégias que os alunos poderiam utilizar, criando uma tabela para cada tarefa. Seguidamente, apresento como exemplo a tabela com as possíveis estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para resolverem a Tarefa 1 – Máquina de bebidas 1. As tabelas associadas às restantes tarefas da sequência, relativamente às possíveis resoluções dos alunos, encontram-se em apêndice.

Tabela 6 - Possíveis estratégias pensadas para a tarefa 1 - Máquina de bebidas 1

<p>Estratégia 1: adicionar o número de garrafas em cada fila</p> <p>12+12+12+12+12+12+12+12+12</p> <p>24+24+24+24+12</p> <p>48+48+12</p> <p>96+12=108</p>	<p>Estratégia 2: representar verticalmente a adição sucessiva do número de garrafas em cada fila</p> $\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ + 12 \\ \hline 108 \end{array}$
<p>Estratégia 3: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular através do algoritmo da multiplicação</p> $\begin{array}{r} 12 \\ \times 9 \\ \hline 108 \end{array}$ <p>2×9=18 1×9=9 9+1=10</p>	<p>Estratégia 4: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular decompondo o 12, número de garrafas em cada fila</p> <p>9×10=90</p> <p>9×2=18 18= 10+8</p> <p>90+10=100</p> <p>100+8= 108</p>
<p>Estratégia 5: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular utilizando o modelo retangular</p> $\begin{array}{ c c } \hline & 9 \\ \hline 10 & 90 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline \end{array}$ <p>12×9=10×9+2×9=108</p>	<p>Estratégia 6: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular utilizando relações de dobro e de metade, fazendo</p> <p>6×9=54 9+9+9+9+9+9=54</p> <p>54×2= 108 5×2=10 / 4×2=8</p>
<p>Estratégia 7: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Utilizar números de referência, neste caso o 10, próximo de 9, e compensar</p> <p>10×12=120</p> <p>120-12=108</p>	<p>Estratégia 8: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calculando adicionando repetidamente 12, fazendo</p> <p>12+12=24, 24+12=36, 36+12=48,</p> <p>48+12=60, 60+12=72, 72+12=84,</p> <p>84+12=96, 96+12=108</p>
<p>Estratégia 9: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular o número 12 através da metade. 12=6+6 9×12=9×6+9×6=54+54=108</p>	

4.3. A exploração das tarefas em sala de aula

A sequência de tarefas apresentada anteriormente foi explorada em sala de aula, no entanto, os problemas foram explorados de uma forma e as cadeias numéricas de outro modo. As cadeias numéricas consistiram num momento com a participação de toda a turma, exigindo apenas o raciocínio matemático (cálculo mental) e a concentração. Por outro lado, a exploração dos problemas organiza-se em três momentos: a apresentação, a resolução e a apresentação e discussão das estratégias utilizadas. Deste modo os alunos

tiveram oportunidade de “partilhar e ouvir as ideias dos colegas para que entendessem o que era pedido e para se sentirem desafiados a realizar o problema” (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012, referido por Sousa, 2015, p. 129). Considero ter sido uma fase fundamental, que permitiu aos alunos pensar nas suas estratégias de modo individual e tentar resolver cada problema. Além disso, foram criados momentos que lhes permitiram partilhar aprendizagens e discutir estratégias, evoluindo ao nível do pensamento matemático.

É fundamental referir que, dos três momentos evidenciados para a exploração dos problemas, o momento da resolução do problema foi feito de modo individual, por cada aluno, sem a minha intervenção direta, de forma a que o meu apoio não alterasse, naquele momento específico, o seu modo de pensar. Este meu modo de pensar relaciona-se com o objetivo principal deste estudo que se centra na análise das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e divisão. Seguidamente enuncio e descrevo cada momento realizado ao longo da exploração dos problemas propostos.

4.3.1. Exploração dos problemas

4.3.1.1. Apresentação do problema

Para cada problema realizado, comecei por distribuir a folha do enunciado a cada aluno, dando algum tempo para que estes escrevessem o nome e a data e olhassem para o enunciado, realizando uma primeira leitura autónoma. Seguidamente, era pedido a um aluno que lesse o problema em voz alta. Posteriormente, colocava questões como, por exemplo, “então o que nos diz o problema?”, “e o que nos pede o problema?” de modo que os alunos conseguissem, em conjunto, perceberem o que falava cada problema e o que era pretendido. Através destes passos, tentava que todos percebessem os problemas antes de os tentarem resolver e, no fim, esclarecia dúvidas que ainda pudessem existir, ou até mesmo, explicava novamente o enunciado do problema, para algum aluno que ainda tivesse muitas dúvidas.

Após esclarecidas as dúvidas, expliquei aos alunos que o que era pretendido era que encontrassem alguma estratégia para chegar ao resultado, mas que na sua folha, deveria estar explícito o modo como pensaram, para que eu conseguisse perceber o processo que utilizaram até chegar ao resultado. Salientei que o mais importante não era o resultado, mas o modo como chegaram até ele. Por fim, mencionei que teriam de usar

apenas lápis de carvão e que poderiam utilizar toda a folha do enunciado e, caso precisassem, poderiam escrever na parte de trás da folha, desde que colocassem lá a forma ou as formas como pensaram na resolução de cada problema.

Seguidamente, apresento um episódio relativo à resolução da primeira tarefa, com o intuito de ilustrar o que foi mencionado. Esta tarefa, sendo a primeira, foi mais simples, não causando muitas dúvidas na interpretação do enunciado, nem tendo sido necessário explicar novamente o que era pretendido.

(A folha de enunciado é entregue e é dado tempo aos alunos para lerem em silêncio.)

Diogo: Já sei a resposta! Eu já sei!

Estagiária: Já sabes? Mas o mais importante que a resposta é mostrares-me como pensaste para chegar até ela.

Estagiária: Beatriz podes ler o enunciado em voz alta? (Beatriz lê o enunciado)

Estagiária: Então do que nos fala este problema?

Rodrigo: Há doze garrafas de água em cada fila.

Estagiária: Dão-nos mais alguma informação?

Pedro: Há nove filas.

Estagiária: E dizem-nos mais alguma coisa?

Tomás: Não.

Estagiária: Então e o que é que o problema nos pede?

Ilian: Quantas garrafas há.

Estagiária: Expliquem-me então o que é que precisamos de saber.

Tomás: Precisamos de saber quantas garrafas tem ao todo a máquina de garrafas de água.

Estagiária: Alguém tem dúvidas? (...) então agora eu vou dar-vos algum tempo para pensar e passarem o vosso raciocínio para o papel. Mas como já referi o que me interessa é eu conseguir saber como vocês chegaram ao resultado e não o resultado em si. Podem começar, mas em silêncio.

Exploração da tarefa 1 – Máquina de bebidas 1, 02/05/2017

4.3.1.2. Resolução do problema

Neste momento, é dado espaço e tempo aos alunos para resolverem o problema de modo autónomo e individual. Tendo em conta a finalidade do estudo em questão, é-lhes pedido para não conversarem e não partilharem ideias, nem mostrarem as suas estratégias aos colegas, salientando que cada um faz da forma que consegue. Durante o tempo destinado à resolução dos problemas, ia circulando pela sala, de modo a tirar alguma dúvida e a observar as estratégias que iam surgindo. Assim, conseguia perceber quem tinha dificuldades, quais eram estas e, por outro lado, quem conseguia resolver de modo fluente. Este momento era essencial para realizar uma análise rápida, de quais as

estratégias mais utilizadas, quais as diferentes e conseguir escolher três alunos, por cada problema, para apresentarem as suas estratégias e a ordem pela qual os alunos escolhidos as apresentavam.

Durante estes momentos, tentava perceber algumas estratégias dos alunos e tentava sempre ajudar os que estavam com muitas dificuldades, lembrando o problema e colocando questões para que estes pensassem novamente num raciocínio, tentando nunca interferir com as estratégias que estavam a desenvolver, para que não as alterassem.

4.3.1.3. Apresentação e discussão das estratégias

Os três alunos selecionados começavam por para o quadro as estratégias, tendo como principal objetivo que fossem estratégias distintas, que potenciassem o desenvolvimento cognitivo e despertassem o interesse de todos os alunos, mostrando-lhes outras possibilidades.

Foi então pedido aos alunos, que foram selecionados para cada tarefa, que passassem no quadro e apresentassem as suas estratégias à restante turma. Como tal, à medida que cada aluno partilhava as suas estratégias, explicando por palavras suas o modo como pensou, questionava os alunos se tinham alguma dúvida relativamente ao que o colega explicou e, caso existissem, pedia-lhe que explicasse novamente, auxiliando-o caso fosse necessário. Findada esta primeira parte, passávamos à fase de discussão.

Para iniciar o momento da discussão, questionava a turma sobre quem tinha estratégias iguais ou semelhantes às que estavam no quadro. Seguidamente, colocava questões indutoras, como por exemplo, “qual das estratégias acham mais adequada e eficaz para resolver este problema?”, “qual utilizariam? porquê?”, de modo a, em turma, chegarem a um consenso sobre a mais fácil de utilizar e a mais adequada para o problema em questão. No entanto, nem todos participavam voluntariamente pelo que, para colmatar esta situação, colocava questões direcionadas a alguns alunos, de modo a incentivá-los a participarem na discussão e a desenvolverem a sua comunicação matemática.

Por fim, após se ter chegado a um consenso relativamente às estratégias, eram esclarecidas eventuais dúvidas que pudessem ainda prevalecer. É importante referir que a folha do enunciado era recolhida porque, apesar de muita insistência, alguns alunos alteravam as suas estratégias ou, os que não tinham conseguido realizar, copiavam uma estratégia do quadro. Esta foi a solução encontrada para não interferir com o objetivo da

investigação em questão. No final, era colado um enunciado no caderno e feito o registro da estratégia mais adequada, discutida anteriormente em grande grupo, para resolver o problema.

Para evidenciar o momento da apresentação e discussão das estratégias, transcrevo um excerto referente à tarefa 1.

Estagiária: Qual das estratégias acham que é mais eficaz?

Beatriz: a do Ilian porque eu fiz como ele, mas tinha uma dúvida e ver a dele ajudou-me.

Estagiária: Lara, porque é que achas que a do Ilian é a mais completa?

Lara: Porque explica melhor.

Pedro: Porque consigo saber melhor o resultado. Consigo saber com mais certeza.

Estagiária: Porquê?

Pedro: Porque é mais fácil.

Estagiária: Mais fácil porquê? Qual é a diferença entre a estratégia do Ilian e a da Beatriz?

Pedro: Porque a da Beatriz tem muitos mais e a do Ilian não.

Erik: Também acho que é a do Ilian, é mais fácil e tem menos números.

Estagiária: Se tivéssemos de resolver outro problema semelhante, qual das estratégias acham que deveríamos utilizar.

(Alguns alunos mencionaram a da Beatriz, enquanto outros referiram a do Ilian)

Exploração da tarefa 1 – Máquina de bebidas 1, 02/05/2017

4.1.3.4. Exploração das cadeias numéricas

No caso das cadeias numéricas, estas eram exploradas de modo diferente, sendo desenvolvidas com o grupo-turma. Num momento inicial, expliquei aos alunos que iria colocar cálculos no quadro e que estes teriam que pensar mentalmente na sua resposta e perceber se existia alguma relação com os cálculos anteriores. É importante referir que lhes pedi para, ao pensarem na resposta, terem em conta o que trabalhámos nas tarefas anteriores e nas estratégias analisadas.

Seguidamente, colocava o primeiro cartão no quadro, esperava um momento e começava a dar a palavra aos diversos alunos que colocavam o dedo no ar, registando no quadro as várias estratégias mencionadas. Colocava o segundo cartão e repetia o mesmo processo, e assim sucessivamente, até chegar ao último cartão. Durante este processo, reforçava a ideia de olharem para os cálculos anteriores da cadeia numérica para tentarem estabelecer uma relação. Na maior parte das vezes os alunos conseguiram relacionar o

cálculo pedido com os outros já efetuados. É possível evidenciar na **figura 1** o modo como eram introduzidas as cadeias numéricas e eram efetuados os registos no quadro.

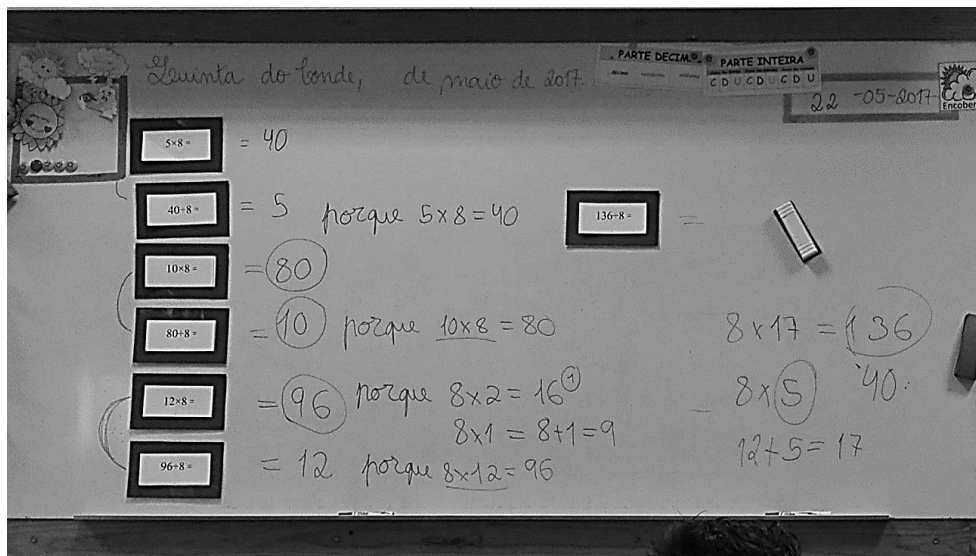


Figura 1 - Registo fotográfico da realização da cadeia numérica 2

Capítulo 5

Análise dos dados

Este capítulo inclui a análise de dados recolhidos no âmbito do projeto de investigação que realizei. Considerando os objetivos subjacentes ao estudo, neste capítulo procedo à análise das produções dos três alunos-caso selecionados, de modo a perceber como é que estes resolvem problemas de multiplicação e divisão e como é que relacionam estas duas operações. Por fim, analiso as três cadeias numéricas implementadas em sala de aula, centrando-me nas intervenções dos alunos e das estratégias que utilizam.

5.1. As estratégias utilizadas pelos alunos-caso

5.1.1. As resoluções de Tomás

5.1.1.1. T1 – Máquina de bebidas 1

Na tarefa 1 era necessário saber quantas garrafas de água leva a máquina de bebidas da escola da Maria, sabendo que esta tem nove filas, com capacidade para doze garrafas em cada uma. Tomás resolve esta tarefa do seguinte modo (**figura 2**):

Handwritten mathematical work showing two methods to solve $12 \times 9 = 108$.

Method 1 (Number line):

$$12 \times 9 = 108 \text{ ou}$$
$$12 \quad 24 \quad 36 \quad 48 \quad 60 \quad 72 \quad 84 \quad 96 \quad 108$$

Method 2 (Repeated addition):

$$\text{Ou } 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 108$$

Figura 2 - Resolução de Tomás da tarefa Máquina de bebidas 1

A resolução de Tomás revela que este parece ter começado por escrever a expressão $12 \times 9 = 108$. Embora não evidencie que usou o algoritmo, refere-o oralmente, quando o interpelo. Posteriormente, recorre a uma estratégia de saltos sucessivos. Quando o questiono sobre o modo como efetuou os cálculos, menciona que contou pelos dedos até chegar ao total. Ou seja, parece realizar os cálculos corretamente, tendo em conta o número de filas (9) e o número que é necessário adicionar (12).

Por fim, apresenta na sua folha de registo uma adição sucessiva de 9 parcelas iguais a 12. Qualquer uma das três representações que utiliza para resolver esta tarefa apresentam um resultado correto, embora tanto no primeiro caso como no último não explicita como efetuou os cálculos. Durante o processo de resolução do problema, referi diversas vezes que era fundamental os alunos apresentarem uma resposta completa para cada tarefa, no entanto, Tomás não o efetuou.

Durante a realização da entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Tomás afirmou:

Tomás: Fui somando $12+12+12\dots$ até somar 9 vezes, que deu 108.

Estagiária: Porquê 9 vezes?

Tomás: Porque a máquina tem nove filas.

Estagiária: Então quantas garrafas de água leva a máquina?

Tomás: Leva 108 garrafas de água.

Entrevista a Tomás sobre a tarefa 1

Na sua explicação, do modo como resolveu a tarefa 1, Tomás inicia o seu discurso fazendo referência à resolução por saltos sucessivos, apontando com o dedo para a sua folha. Não menciona ter utilizado o algoritmo, não explicando porque realizou o primeiro cálculo que podemos observar na sua folha de registo (figura 2). A sua explicação mostra também que o aluno compreendeu o enunciado da tarefa e o significado dos números envolvidos, conseguindo trabalhar com os mesmos.

No momento de discussão coletiva realizado em sala de aula, após os alunos terminarem de resolver a tarefa, um dos três alunos escolhidos para ir ao quadro apresentar a sua estratégia resolve o problema do mesmo modo que Tomás. Através do seguinte excerto da discussão é perceptível que o aluno identifica a resolução de Beatriz como sendo igual à sua.

Estagiária: Quem é que utilizou a mesma resolução que a Beatriz?

(cinco alunos colocaram o dedo no ar, incluído Tomás)

Estagiária: Após observarmos estas três estratégias, qual acham que era mais adequada para resolver este problema, sabendo que ambas estão corretas?

Rodrigo: Eu fiz como a *Bea*, mas acho que a do Ilian é melhor.

Estagiária: Porque é melhor?

Rodrigo: Porque é mais fácil. Chegamos mais rápido ao resultado.

Estagiária: Tomás, concordas com o que o Rodrigo disse?

Tomás: Não sei.

Estagiária: Não sabes? Se tivesses de revolver este problema novamente ou um semelhante, como fazias?

Tomás: Talvez fazia como o Ilian.

Momento de discussão coletiva, tarefa 1, 02/05/2017

Durante a discussão, o aluno é levado a refletir sobre a sua estratégia e as que foram apresentadas. Parece que este identifica uma resolução semelhante à sua, mas refere que, se fizesse outra vez faria diferente, optando pela estratégia multiplicativa de Ilian, que recorre a uma decomposição não decimal de um dos fatores, multiplicando 2×9 que dá 18 e, efetuando seguidamente 10×9 e obtendo 90. Por fim soma $90 + 18$ e obtém o total de 108.

5.1.1.2. T3 – Máquina de bebidas 2

A tarefa 3 envolve uma máquina de garrafas de água, que tem capacidade para levar 248 garrafas. Sabendo que, no supermercado, as embalagens trazem 8 garrafas de água, pretendia-se saber quantas embalagens eram precisas para encher a máquina. Sendo este um problema de divisão por medida, Tomás resolve esta tarefa do seguinte modo (**figura 3**):

Handwritten mathematical work showing the solution to the 'Máquina de bebidas 2' problem. The work is divided into two sections by a horizontal line. The top section shows multiplication: $8 \times 10 = 80$, $8 \times 10 = 80$, and $8 \times 10 = 80$. An arrow points to a vertical multiplication: $\begin{array}{r} 80 \\ \times 3 \\ \hline 240 \end{array}$. The bottom section shows addition: $0 + 1 = 1$, $10 \times 3 = 30$, $30 + 1 = 31$, and $240 + 8 = 248$.

Figura 3 - Resolução de Tomás da tarefa Máquina de bebidas 2

A análise da resolução de Tomás mostra que este recorre a uma estratégia de multiplicação. O aluno parece utilizar como procedimento de cálculo a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência. Ou seja, utiliza o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 248, número total de garrafas de água que a máquina leva. Realiza a operação 8×10 três vezes, efetuando depois 3×80 . Como se aproxima do número 248 calcula 8×1 para perfazer o total de garrafas de água.

Os restantes cálculos presentes na sua folha de registo, mostram que Tomás identifica corretamente que são necessárias 31 embalagens de 8 garrafas de água para um total de 248, embora tenha usado o 8 como multiplicador. Aparentemente trocou os fatores para utilizar para facilmente os múltiplos de 10.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Tomás explica:

Tomás: Fiz 8×10 , três vezes e deu 80. As três vezes deu 240. Depois fiz 8×1 que dá 8. Depois somei os três 10, fiz 10×3 que dá 30. Depois fiz $30 + 1$ que dá 31.

Estagiária: Então de quantas embalagens precisa a Raquel para encher a máquina?

Tomás: A Raquel precisa de 31 embalagens.

Entrevista a Tomás sobre a tarefa 3

Embora lhe tenha sido solicitado, tal como na tarefa anterior, Tomás não escreve a resposta ao problema. Ainda assim, tanto os cálculos que efetua como a análise da sua entrevista revelam que o aluno compreende e resolve corretamente o problema em questão. Tomás, durante a entrevista, explicita os cálculos realizados de forma clara e mostra que se lembra do modo como resolveu a tarefa, no entanto, o seu discurso oral é muito próximo do seu registo escrito.

É importante mencionar que a estratégia utilizada por Tomás nesta tarefa é bastante semelhante àquela que foi considerada a mais apropriada na tarefa anterior, o que revela que a discussão coletiva referente à mesma parece ter ajudado o aluno no seu raciocínio matemático. Tomás utiliza como resolução da tarefa 3 (figura 2), uma estratégia semelhante à que foi considerada como mais adequada pela turma para resolver a primeira tarefa.

5.1.1.3. T4 – Máquina de bebidas 3

Este problema contém as mesmas quantidades numéricas que o problema anterior, difere apenas no contexto, sendo um problema de divisão por partilha. Envolve uma máquina de bebidas que no total leva 248 garrafas, existindo 8 tipos diferentes de sumo: maçã, pera, pêssigo, uva, laranja, ananás, mirtilo e manga, havendo a mesma quantidade de garrafas de cada um. Pretende-se saber quantas garrafas de sumo de cada sabor leva a máquina e Tomás resolve o problema do seguinte modo (**figura 4**):

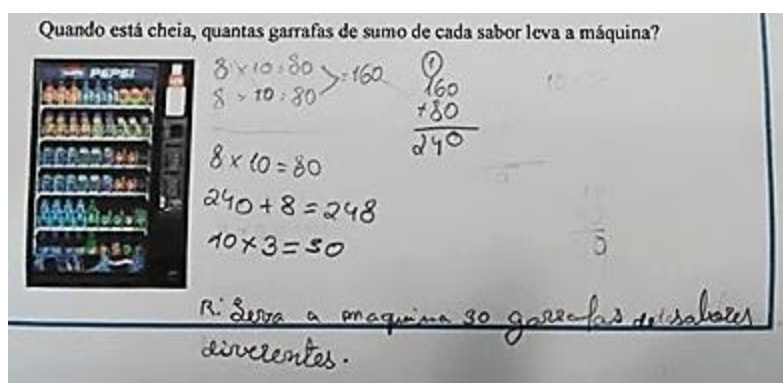


Figura 4 - Resolução de Tomás da tarefa Máquina de bebidas 3

A análise da resolução de Tomás mostra que este recorre a uma estratégia de multiplicação, semelhante à estratégia que utilizou para resolver a tarefa 3. Saliento que sugeri aos alunos para pensarem na tarefa anterior, tendo em conta que são dois problemas bastante semelhantes. Mais uma vez o aluno parece utilizar o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 248, número total de garrafas de água que a máquina leva. Realiza a operação 8×10 três vezes, efetuando depois 3×80 , chegando a 240. Como o total é de 248, soma $240 + 8$. No entanto, parece que Tomás não regista todos os cálculos que efetua e apresenta uma resposta errada ao problema.

Durante a entrevista, Tomás explica como resolveu o problema e parece reparar que a sua resposta está errada:

Estagiária: Como resolveste?

Tomás: Fiz 8×10 que dá 80, duas vezes, que dá 240. Depois fiz mais uma vez 8×10 que dá 80 e somei $240 + 8$, que deu 248. Depois fiz 10×3 que deu 30.

Estagiária: Então achas que a máquina leva quantas garrafas de sabores diferentes?

Tomás: Leva a máquina 30 garrafas de sabores diferentes. (*lê o que escreveu*)

Estagiária: Encontras alguma relação entre esta tarefa e a anterior?
(mostrando os dois enunciados)

Tomás: Os números são os mesmos, fiz da mesma maneira. Ah, mas eu aqui enganei-me...

Estagiária: Então e o que te faltou para estar correta?

Tomás: Eu fiz 10×3 porque multipliquei três vezes pelo 10. Na outra tarefa tenho 8×1 e aqui não pus.

Estagiária: Como fizeste nesta tarefa? (mostro ao aluno a sua resolução da tarefa 3)

Tomás: hmmm...somei $240+8$.

Estagiária: Então que número utilizaste?

Tomás: O oito. Ah, 8×1 . Aqui eu não somei $30+1$, por isso deu mal.

Entrevista a Tomás sobre a tarefa 4

No momento em que o aluno explica como resolveu a tarefa repara que tem a sua resposta incorreta e apercebe-se onde errou no seu raciocínio. Por sugestão minha, Tomás observa as suas resoluções das tarefas T3 e T4 e consegue perceber que ambas envolvem os mesmos números e que utilizou a mesma estratégia. Este facto auxilia-o a perceber o seu erro e o que deve fazer para chegar a um resultado correto.

5.1.1.4. T6 – As miniaturas 1

Na tarefa “As miniaturas 1” era necessário saber com quantas miniaturas de animais ficou a Maria, uma vez que lhe ofereceram 8 caixas de miniaturas, cada uma com 15. Tomás resolve o problema do seguinte modo (**figura 5**):

Handwritten student work for the problem "As miniaturas 1". The student starts with $8:15=?$ and shows several incorrect calculations: $8 \times 3 = 24$, $8 \times 3 = 24$, $8 \times 3 = 24$, and $3 + 3 = 6$. A large bracket groups these. To the right, there is a division problem $8:15=8$ with a long division setup showing $15 \overline{) 8}$ and $7 \overline{) 8}$ with a remainder of 7. Further right is a multiplication problem $24 \times 3 =$ with a long multiplication setup showing $\begin{array}{r} 24 \\ \times 3 \\ \hline 72 \end{array}$. Below this is another multiplication problem $15 \times 8 =$ with a long multiplication setup showing $\begin{array}{r} 15 \\ \times 8 \\ \hline 120 \end{array}$. At the bottom, the student writes "R: Ficou a maria com 120 miniaturas."

Figura 5 - Resolução de Tomás da tarefa As miniaturas 1

A análise da resolução de Tomás evidencia que este, num primeiro momento, interpreta incorretamente o problema como sendo de divisão, tentando depois utilizar o algoritmo, também de modo incorreto. Seguidamente, parece interpretar corretamente o

problema como sendo de multiplicação, realizando o algoritmo através do cálculo 15×8 que dá 120, representado no canto inferior direito da sua folha de registo (figura 5) e, após saber o resultado correto, apresenta uma resolução alternativa. Assim, efetua sucessivamente o cálculo 8×3 , chegando ao total de 78. Porém, sem apresentar nenhum cálculo auxiliar adiciona $78 + 42$, chegando ao total de 120. Aparentemente fez um conjunto de cálculos sem significado no contexto do problema, para chegar ao resultado que já conhece. Saliento que, na aula, quando o interpelo sobre a sua resolução, Tomás explica que realizou primeiro o algoritmo da multiplicação.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Tomás explica:

Tomás: 8×3 dá 24 mais 8×3 dá 24...e fiz três vezes.

Estagiária: E deu-te quanto essas três vezes?

Tomás: 78. E depois fiz $3 + 3$ que dá 6 e depois somei isto tudo.

Estagiária: E deu-te quanto?

Tomás: 120.

Estagiária: Mas através desta tua estratégia tu já sabias o resultado final?

Tomás: Sim. Primeiro fiz 15×8 que deu os 120.

Estagiária: Então primeiro utilizaste que estratégia?

Tomás: O algoritmo.

Entrevista a Tomás sobre a tarefa 6

Na entrevista Tomás começa a sua explicação seguindo a aparente ordem pela qual aparecem os cálculos na sua folha de registo. Aparentemente foi descrevendo os vários registos, apresentando alguma hesitação e algumas dúvidas na sua explicação. Comparativamente com as tarefas anteriores, Tomás tenta utilizar o mesmo processo de resolução, porém, neste problema parece ter a necessidade de utilizar primeiro o algoritmo para conseguir saber o resultado.

5.1.1.5. T7 – As miniaturas 2

A Tarefa “as miniaturas 2” diz-nos que a Teresa tem 126 miniaturas e quer arrumá-las em caixas onde apenas cabem 6, tendo como objetivo saber quantas caixas vão ser precisas. Para tentar chegar ao resultado, Tomás opta pela seguinte estratégia (figura 6):

$126 \div 6 = ?$
 $6 \times 10 = 60$
 $6 \times 10 = 60$
 $60 + 60 = 120$
 $6 \times 1 = 6$
 $120 + 6 = 126$
 $10 + 10 + 1 = 21$

Figura 6 - Resolução de Tomás da tarefa As miniaturas 2

A resolução de Tomás mostra que, à semelhança das tarefas anteriores, recorre novamente à multiplicação e multiplica sucessivamente a partir de um produto de referência, neste caso, o 6×10 . Ao analisar o seu procedimento de cálculo, verificamos que multiplica 6×10 duas vezes, obtendo o total de 120. Posteriormente, multiplica 6×1 , de modo a chegar ao número 126, que representa o número total de miniaturas que a Teresa possui. Por fim, adiciona $10 + 10 + 1$ para obter o resultado, embora não tenha escrito a resposta ao problema.

Durante a entrevista, Tomás explica:

Tomás: Fiz 6×10 que dá 60, duas vezes. Depois fiz $60 + 60$, que foi os resultados e deu 120. Depois fiz 6×1 que dá 6. Depois fiz 120, que foi o resultado mais 6...126. Depois fiz, para dar o resultado, $10 + 10 + 1$, que deu 21.

Estagiária: Então de quantas caixas vai precisar?

Tomás: Vai precisar de 21 caixas.

Entrevista a Tomás sobre a tarefa 7

Na entrevista, mais uma vez, Tomás explicita os cálculos que utilizou na sua folha de registo. Porém, através da explicação dada na entrevista, consegue-se perceber que este sabe que a Teresa irá precisar de 21 caixas. Durante este momento, consegui perceber que o aluno apresentava mais convicção e assertividade ao explicar esta estratégia, pelo que o questioneei:

Estagiária: Achaste este problema mais fácil ou mais difícil que os anteriores?

Tomás: Mais fácil.

Estagiária: E sabes-me dizer porquê?

Tomás: Não sei...talvez por causa dos números. Foi mais fácil chegar ao resultado.

Estagiária: Obrigada Tomás.

Entrevista a Tomás sobre a tarefa 7

Nesta entrevista o aluno revela lembrar-se mais facilmente do processo de resolução que utilizou, apesar de já ter passado algum tempo desde que resolveu a tarefa em questão. Considera ter sido um problema mais fácil de resolver e justifica essa facilidade com as características dos números envolvidos no problema.

5.1.1.6. T9 – As miniaturas 3

Neste problema a turma foi dividida em dois grupos, para uma visita de estudo ao jardim zoológico: o grupo do Guilherme com 8 alunos e o grupo do Francisco com 7 alunos. No final da visita foram distribuídas ao grupo do Guilherme 256 miniaturas e ao grupo do Francisco 224. Para saber se esta partilha de miniaturas pelos grupos foi justa, Tomás resolveu o problema do seguinte modo (**figura 7**):

Handwritten work on a whiteboard showing the solution to the 'As miniaturas 3' problem. The student calculates the number of miniatures per student for each group and compares the results.

Guilherme $80 + 80 + 80 = 240$ $240 + 8 + 8 = 256$

$8 \times 10 = 80$

$8 \times 10 = 80$

$8 \times 10 = 80$

R. Foram utilizadas

Francisco $70 + 70 + 70 = 210$ $210 + 7 + 7 = 224$

$7 \times 10 = 70$

$7 \times 10 = 70$

R. Foram utilizadas 34 miniaturas.

Figura 7 - Resolução de Tomás da tarefa As miniaturas 3

A análise da sua resolução evidencia que Tomás usa uma estratégia semelhante à utilizada nos problemas anteriores. Usa como procedimento de cálculo a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência.

No caso do Guilherme utiliza o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 256, número total de miniaturas. Realiza a operação 8×10 três

vezes, efetuando depois $80+80+80$ e obtendo 240. Para perfazer o total de miniaturas de cada aluno soma $240+8+8$. Parece que o aluno se perde um pouco no seu raciocínio, não apresentando uma resposta para este grupo.

No caso do Francisco utiliza também o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 224. Realiza a operação 7×10 duas vezes, no entanto efetua depois $70+70+70$ e obtém 210. De modo a perfazer o total de miniaturas de cada aluno soma $210+7+7$. O aluno parece perder-se no raciocínio, apresentando uma resposta errada.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Tomás explica:

Tomás: Para o Guilherme fiz 8×10 , 3 vezes, que deu 80. Depois foi somar $80+80+80$ que deu 240. Depois fiz $240+8+8$ que deu 256.

Estagiária: Então e qual é a resposta? Quantas miniaturas foram distribuídas por cada aluno do grupo do Guilherme?

Tomás: Foram utilizadas 250...ai...dá 30.

Estagiária: 30? Então quanto é que tu já tens quando multiplicas 8×10 três vezes?

Tomás: 240.

Estagiária: Falta-te quanto para chegares ao 256?

Tomás: 16.

Estagiária: Então pensa como fizeste nos problemas anteriores. Qual é o número na tabuada do 8 que dá 16?

Tomás: 8×2 dá 16.

Estagiária: Então o que tens de fazer agora?

Tomás: Somar $10+10+10+2$, que dá 32. Cada aluno ficou com 32 miniaturas.

Estagiária: Então e agora no grupo do Francisco?

Tomás: No Francisco fiz 7×10 duas vezes. Que dá 70. Depois fiz $70+70+70$, porque faltava um 7×10 aqui (apontando). E deu 210. Depois fiz $210+7+7$, que dá 224.

Estagiária: Então fizeste quantas vezes o $7+7$?

Tomás: Duas vezes.

Estagiária: Então?

Tomás: 7×2 que dá 14. Então agora tenho de somar $10+10+10+2$, que deu 32.

Estagiária: Achas que é justa a partilha de miniaturas?

Tomás: Sim. Porque os alunos têm a mesma quantidade de miniaturas.

Entrevista a Tomás sobre a tarefa 9

Como já tinha passado algum tempo desde a resolução desta tarefa, o aluno parece ter alguma dificuldade na interpretação dos seus registos. Contudo, à medida que o vou questionando, Tomás vai sendo capaz de explicitar o modo como resolveu o problema. Podemos observar quer na sua folha de registo (**figura 7**) quer no decorrer da entrevista, que quando chega aos cálculos finais para tentar obter um resultado apresenta algumas

dificuldades, tanto no grupo do Francisco como no grupo do Guilherme. Como tal, tentei ajudá-lo a interpretar os seus registos e a concluir o seu raciocínio, colocando-lhe questões que o fizessem pensar de um modo semelhante ao processo que efetuou nas tarefas anteriores. Tomás consegue desenvolver o seu raciocínio e responder-me corretamente ao que lhe pergunto.

Sobre a questão que é colocada relativamente à justificação, após o aluno estar certo de quantas miniaturas foram distribuídas pelos membros de cada grupo, responde corretamente, afirmando que a partilha é justa, porque os alunos têm a mesma quantidade de miniaturas. Assim, posso referir que o aluno tenta responder ao problema, no entanto, parece ter algumas dificuldades em completar o seu raciocínio.

5.1.1.7. Síntese das estratégias utilizadas por Tomás

A tabela seguinte apresenta, de um modo sucinto, as estratégias utilizadas por Tomás na resolução das tarefas propostas, de multiplicação e divisão:

Tabela 7 - Síntese das estratégias utilizadas por Tomás

Tarefa	Operação e sentido	Estratégias utilizadas
T1	Multiplicação – sentido aditivo	Estratégia multiplicativa: algoritmo da multiplicação; Estratégia aditiva: adição sucessiva sem suporte na reta numérica. (resolve corretamente)
T3	Divisão por medida	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve corretamente)
T4	Divisão por partilha	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve incorretamente)
T6	Multiplicação – sentido aditivo	Estratégias multiplicativas: algoritmo da multiplicação; multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve corretamente)
T7	Divisão por medida	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve corretamente)
T9	Divisão por partilha	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve incorretamente)

A análise da tabela das produções do aluno e das explicações dadas pelo mesmo nas entrevistas clínicas, mostram que, com exceção da tarefa 1(anexo 1), Tomás recorre a estratégias multiplicativas, destacando-se a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência. É possível verificar que o aluno, em algumas tarefas, comete alguns erros ao utilizar esta estratégia, no entanto, usa-a quase sempre para resolver as tarefas propostas.

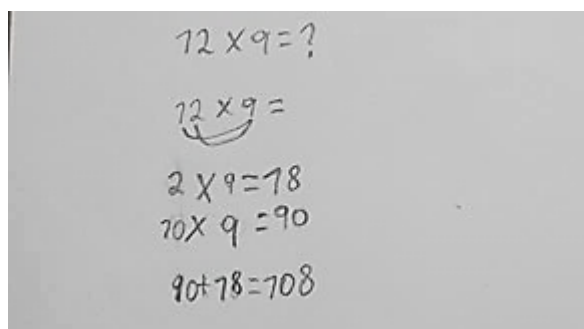
Importa referir que, na discussão coletiva associada à resolução da primeira tarefa, a estratégia de multiplicação a partir de um produto de referência foi considerada a mais adequada naquele caso. A partir daí, Tomás usa preferencialmente essa estratégia, o que evidencia que ele compreende e esteve atento a este momento, permitindo-lhe progredir no seu raciocínio matemático e dar um “salto” rápido da utilização de estratégias aditivas para a utilização de estratégias multiplicativas.

Contudo, embora utilize a mesma estratégia, o aluno ainda apresenta algumas dificuldades na sua utilização. Tal pode ser evidenciado nas tarefas 4, 6 e 9. No entanto, nas restantes tarefas utiliza eficazmente a mesma estratégia, chegando ao resultado correto. Assim, o aluno parece evidenciar compreender o raciocínio subjacente, no entanto, não o domina completamente, o que o leva a cometer alguns erros.

5.1.2. As resoluções de Ilian

5.1.2.1. T1 – Máquina de bebidas 1

Na tarefa “Máquina de bebidas 1” é preciso identificar quantas garrafas de água leva a máquina de bebidas da escola da Maria, sabendo que esta tem nove filas, com capacidade para doze garrafas em cada uma. Ilian resolve este problema do seguinte modo (figura 8):



Handwritten mathematical solution for the problem $72 \times 9 = ?$. The student uses the distributive property to break down the multiplication:

$$72 \times 9 = ?$$
$$72 \times 9 =$$
$$2 \times 9 = 18$$
$$70 \times 9 = 90$$
$$90 + 18 = 108$$

Figura 8 - Resolução de Ilian da tarefa Máquina de bebidas 1

A resolução de Ilian revela que este parece recorrer a uma estratégia multiplicativa, representando o cálculo inicial por 12×9 , embora devesse ser 9×12 . O aluno aparenta utilizar uma decomposição decimal de um dos fatores, neste caso, o número 12. Começa por ligar através de traços o 9 ao 2 e o 9 ao 1, como podemos ver no início da sua folha de registo (figura 7). Seguidamente multiplica 2×9 e obtém 18. Multiplica 10×9 e obtém 90. Finalmente soma $90 + 18$ e obtém o total de 108. Apesar de ter sido solicitado a toda a turma para escrever a resposta ao problema, Ilian não apresenta a sua.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Ilian explica:

Ilian: Então como era 12×9 eu utilizei o 12 e fiz 2×9 que deu 18 e 10×9 que deu 90. E depois somei $90 + 18$ que deu 108.

Estagiária: Consegues explicar-me melhor o que fizeste ao número 12?

Ilian: Eu separei as unidades das dezenas. Depois multipliquei pelo 9 e deu-me o resultado.

Estagiária: Porque utilizaste o número 9?

Ilian: Porque o 12 é o número de garrafas e o 9 o número de filas.

Estagiária: Então quantas garrafas de água leva a máquina?

Ilian: Leva 108 garrafas de água.

Estagiária: E porque não deste uma resposta ao teu problema?

Ilian: Ai, pois, esqueci-me!

Entrevista a Ilian sobre a tarefa 1

A entrevista foi efetuada algum tempo após a resolução da tarefa, no entanto, Ilian depois de realizar uma leitura do enunciado e observar a sua folha de registo lembra-se da sua resolução e explica corretamente o seu raciocínio e os cálculos que efetuou e o seu raciocínio. O aluno revela conhecer os dados do enunciado e sabe o significado dos números com os quais está a operar. Apesar de, na sua folha, não ter apresentado resposta ao problema, afirmando que se esqueceu, quando questionado sobre quantas garrafas de água leva a máquina, o aluno responde corretamente.

5.1.2.2. T3 – Máquina de bebidas 2

A tarefa 3 envolve uma máquina de garrafas de água, que tem capacidade para levar 248 garrafas. Sabendo que, no supermercado, as embalagens trazem 8 garrafas de água, pretendia-se saber quantas embalagens eram precisas para encher a máquina. Sendo este um problema de divisão por medida, Ilian resolve-o do seguinte modo (**figura 9**):

$$\begin{aligned} & \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{8} = 8 \times 8 = 64 \\ & 64 + \textcircled{8} + \textcircled{8} = 80 \\ & 80 + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{8} = 112 \\ & 80 + 32 = 112 \\ & 112 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 152 \\ & 152 \times 5 = 760 \end{aligned}$$

Figura 9 - Resolução de Ilian da tarefa Máquina de bebidas 2

Para resolver a seguinte tarefa, Ilian parece recorrer a uma estratégia de adição sucessiva sem suporte na reta numérica. O aluno começa por adicionar $8+8+8+8+8+8+8+8$ e relaciona esta adição com a multiplicação 8×8 obtendo 64. Ao 64 adiciona $8+8$ e obtém 80. Ao 80 adiciona $8+8+8+8$ obtendo 112. Depois parece simplificar este último cálculo referido e regista a igualdade $80+32=112$. Seguidamente ao 112 adiciona $8+8+8+8+8$ e obtém 152. Por fim regista a igualdade $152 \times 5 = 760$ não se percebendo como efetuou os cálculos. Pode-se observar na sua folha de registo que Ilian faz um círculo à volta dos primeiros números 8 que utiliza, provavelmente para o auxiliar na contagem. Ainda assim, o seu registo evidencia que parece confuso nos cálculos que apresenta e, apesar de solicitado, não apresenta resposta ao problema.

Durante a entrevista, após questionado sobre a sua resolução, Ilian explica:

Ilian: Primeiro somei $8+8+8+8+8+8+8+8$, que é o mesmo que 8×8 e deu 64. Depois continuei a adicionar o número 8, mais duas vezes que deu 80 e mais 4 vezes que deu 112. Depois adicionei mais cinco vezes e deu 152. Depois multipliquei 152 por 5 e deu 760.

Estagiária: Porque é que multiplicaste 152 por 5?

Ilian: Não me lembro bem. Eu queria chegar mais rápido aos 248 e em vez de adicionar mais cinco vezes o número 8 multipliquei 152 por 5. Mas...não podia ser assim.

Estagiária: O número que obteste, 760, ultrapassa o número total de garrafas de água que a máquina leva, os 248.

Ilian: Eu não terminei de resolver...porque fiquei confuso. Agora teria de ir tirando números ao 760 até chegar aos 248.

Estagiária: E conseguias chegar ao resultado assim?

Ilian: Não sei bem. Talvez me ia baralhar.

Estagiária: Repara, tu adicionaste várias vezes o número 8 até obteres o 152, mas ainda te falta para chegares ao 248, número total de garrafas de água. O que poderias fazer?

Ilian: Talvez continuar a adicionar 8?...e ir somando até chegar a esse número.

Estagiária: Muito bem. Então e como chegavas ao resultado? Ou seja, como sabias de quantas embalagens de 8 garrafas de água do supermercado iriam ser precisas para encher a máquina?

Ilian: Continuando a contar os 8, como estava a fazer aqui ao rodear (*apontando*).

Entrevista a Ilian sobre a tarefa 3

Analisando a transcrição da entrevista clínica, percebe-se que Ilian possui algumas dúvidas relativamente ao seu raciocínio, não tendo terminado a tarefa. Como passou algum tempo desde a resolução da mesma até ao dia da entrevista, não se recorda bem do modo como pensou. Contudo, durante a sua explicação o aluno percebe que o número que encontrou ultrapassa o número total pretendido. Parece que ao ter multiplicado 152×5 ficou confuso, o que o impediu de continuar a sua resolução. No entanto, após lhe ter colocado algumas questões, Ilian consegue perceber como deveria ter continuado a resolver o problema, referindo que para chegar ao resultado tinha de continuar a contar quantas vezes aparecia o número 8, que ia somando, até perfazer o número total de garrafas de água que a máquina leva. O aluno não consegue terminar o problema e, por isso, não apresenta uma resposta como solicitado.

Durante o momento de discussão em sala de aula, a estratégia de Ilian foi uma das escolhidas por mim, após o momento de monitorização, para ser apresentada no quadro. Posteriormente à explicação do aluno, relativamente à estratégia que utilizou, ocorre um momento de discussão coletiva:

Estagiária: Quem é que não percebeu a estratégia de Ilian?

(Alguns alunos disseram que não e Ilian explica novamente)

Estagiária: Quem é que utilizou a mesma estratégia para resolver a tarefa?

(*Quatro alunos colocaram o dedo no ar*)

Estagiária: Das três estratégias apresentadas, qual é que vocês acham que mais se adequa para resolvermos uma próxima tarefa?

Erik: A da Beatriz, porque eu fiz como ela e é mais fácil.

Carolina: A do Ilian porque tem menos cálculos e não precisamos de contar pelos dedos.

Laissa: Eu acho a da Beatriz, é mais fácil.

Estagiária: Então eu pergunto-vos, a Beatriz utilizou a adição para resolver o cálculo $12 \times 9 = 108$, mas se fosse um número maior? Por exemplo o 25? Íamos fazer 25 vezes $12 + 12 + 12 + 12 \dots$. Seria fácil?

Pedro: A do Ilian já dava para utilizarmos com outros números. Se fizéssemos como a Beatriz podíamos enganar.

Erik: Eu enganei-me a contar, se calhar se fizesse como o Ilian fazia bem. Mas eu não percebi muito bem ainda como ele fez.

Estagiária: Ilian podes explicar novamente?

Momento de discussão coletiva, tarefa 3, 09/05/2017

É notório que o excerto anterior evidencia que quatro alunos para além de Ilian utilizaram a mesma estratégia. Apesar de os restantes alunos terem algumas dificuldades em interpretar o modo como Ilian resolveu a tarefa, estes perceberam a diferença entre a estratégia aditiva da Beatriz e a estratégia do Ilian e concluírem, com o meu auxílio, que a do Ilian é a mais adequada, embora todas as estratégias apresentadas no quadro estejam corretas.

5.1.2.3. T4 – Máquina de bebidas 3

Este problema contém as mesmas quantidades numéricas que o problema anterior, difere apenas no contexto, sendo um problema de divisão por partilha. Envolve uma máquina de bebidas que no total leva 248 garrafas, existindo 8 tipos diferentes de sumo: maçã, pera, pêsego, uva, laranja, ananás, mirtilo e manga, havendo a mesma quantidade de garrafas de cada um. Pretende-se saber quantas garrafas de sumo de cada sabor leva a máquina e Ilian resolve o problema do seguinte modo (**figura 10**):

Handwritten work showing the solution to $248 \div 8 = ?$ using a trial-and-error multiplication strategy:

$$248 : 8 = ?$$

$$70 \times 8 = 80$$

$$8 \times 20 = 80 + 80 = 160$$

$$8 \times 30 = 80 + 80 + 80 = 240$$

$$8 \times 1 = 8$$

$$240 + 8 = 248$$

$$30 + 1 = 31$$

$$248 : 8 = 31$$

Figura 10 - Resolução de Ilian da tarefa Máquina de bebidas 3

O aluno reconhece que é um problema de divisão e escreve $248 \div 8 = ?$. Para resolver o cálculo $248 \div 8$ o aluno parece recorrer a uma estratégia de multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência. Primeiro efetua 10×8 obtendo 80 e posteriormente multiplica logo 8×20 , parecendo justificar que 8×20 é igual a $80 + 80$, obtendo 160. Seguidamente efetua 8×30 , justificando que 8×30 é igual a $80 + 80 + 80$, atingindo os 240. Como ainda lhe falta 8, multiplica 8×1 e soma $240 + 8$, obtendo o número total de garrafas. Por fim adiciona $30 + 1$ e obtém 31. Na sua folha de registo escreve a igualdade $248 \div 8 = 31$, no entanto, não apresenta uma resposta concreta ao problema, como solicitado.

Durante a entrevista, após questionado sobre a sua resolução, Ilian explica:

Ilian: Para saber a resposta eu tinha de fazer $248 \div 8$, então fiz 8×10 que dá 80. Como ainda preciso de mais fiz 8×20 que dá 160. Porque $80 + 80$ dá 160. Depois fiz 8×30 que deu 240, porque $80 + 80 + 80$ dá 240. Como ainda precisava de 8 para fazer os 248, fiz 8×1 que deu 8. Para confirmar somei $240 + 8$ que deu 248. Como último número que usei para calcular foi o 31 e usei o 1, fiz $30 + 1$ e deu 31.

Estagiária: Porque é que somaste o $30 + 1$? Explica-me melhor.

Ilian: Porque o resultado é os números que usei na tabuada do 8. E $80 + 80 + 80$ é o mesmo que 8×30 . Mas ainda me falta 8 então tenho de fazer 8×1 .

Estagiária: Então são quantas garrafas de cada sabor?

Ilian: Dá 31 cada sabor.

Estagiária: encontras alguma relação entre esta tarefa e a anterior? (*mostrando os dois enunciados*)

Ilian: Não tinha visto, mas tem os mesmos números. Mas fiz diferente.

Entrevista a Ilian sobre a tarefa 4

Através da entrevista é perceptível que Ilian ainda se recorda do modo como resolve a tarefa. Consegue compreender como chega ao resultado final e parece ter estabelecido, neste caso, uma relação entre a multiplicação e divisão, uma vez que reconhece o problema como sendo de divisão e tenta chegar ao resultado através de um raciocínio multiplicativo. Apesar de não ter apresentado uma resposta ao problema, na sua folha de registo, quando questionado oralmente responde corretamente. Podemos identificar que Ilian só se apercebeu da relação entre esta tarefa e a anterior quando comparou os dois enunciados, tendo referido que os números eram os mesmos embora tenha utilizado estratégias diferentes. Ou seja, é notório que no momento em que estava a resolver esta tarefa não se lembrou do que tinha feito na anterior e tentou obter o resultado através de outro raciocínio, baseado numa estratégia multiplicativa.

5.1.2.4. T6 – As miniaturas 1

Na tarefa “As miniaturas 1” era necessário saber com quantas miniaturas de animais ficou a Maria, sendo que lhe ofereceram 8 caixas de miniaturas, cada uma com 15. Ilian resolve o problema do seguinte modo (**figura 11**):

$8 \times 15 = ?$
 $8 \times 10 = 80$
 $8 \times 5 = 40$
 $80 + 40 =$
 $0 + 0 = 0$
 $8 + 4 = 12$
 $12 + 100 = 120$

Figura 11 - Resolução de Ilian da tarefa As miniaturas 1

A resolução de Ilian revela que este parece recorrer a uma estratégia multiplicativa. O aluno aparenta utilizar uma decomposição decimal de um dos fatores, neste caso, o número 15. Começa por multiplicar 8×10 obtendo 80. Seguidamente multiplica 8×5 e obtém 40. Ilian aparenta adicionar dígito a dígito embora depois tenha adicionado 100 ao 12. Apesar de ter sido solicitado a toda a turma para escrever a resposta ao seu problema, Ilian não apresenta a sua.

Durante a entrevista, após questionado sobre a sua resolução, Ilian explica:

Ilian: Para saber quanto era 8×15 , fui pela decomposição do 15, como a professora nos ensinou. Primeiro fiz 8×10 que deu 80 e depois fiz 8×5 que deu 40. Depois para saber quanto dava somei unidades com unidades e dezenas com dezenas. Então $0 + 0$ dá 0 e $3 + 4$ dá 12 e $12 + 100$ dá 120.

Estagiária: Costumas utilizar muito este método da decomposição?

Ilian: Sim, é mais fácil e dá certo.

Estagiária: Então e qual seria a resposta?

Ilian: A Maria tinha ficado com 120 miniaturas.

Estagiária: Obrigada Ilian.

Entrevista a Ilian sobre a tarefa 6

Apesar de Ilian não escrever a resposta ao problema como solicitado, consegue produzi-la oralmente e de modo correto, após questionado. A sua explicação está de acordo com os passos presentes na folha de registo, tendo sido sucinto e explícito, o que evidencia que ainda tinha presente a forma como resolveu o problema. Também menciona que costuma utilizar este método de decomposição quando necessário, tendo aprendido nas aulas com a sua professora. Embora aparente adicionar dígitos tem alguma noção que adiciona dezenas, pois a seguir efetua $12 + 100$.

5.1.2.5. T7 – As miniaturas 2

A tarefa em questão diz-nos que a Teresa tem 126 miniaturas e quer arrumá-las em caixas onde apenas cabem 6, tendo como objetivo saber quantas caixas vão ser precisas. Para tentar chegar ao resultado, Ilian opta pela seguinte estratégia (figura 12):

$$\begin{array}{l} 6 \times 10 = 60 \\ 60 \times 2 = 120 \\ 120 + 6 = 126 \\ 10 + 2 + 6 = 18 \\ \hline 18 + 10 = 28 \end{array}$$

Figura 12 - Resolução de Ilian da tarefa As miniaturas 2

A resolução de Ilian evidencia que este parece recorrer a uma estratégia de multiplicação. O aluno parece utilizar como procedimento de cálculo a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência, 6×10 , embora devesse ser 10×6 . Começa por utilizar o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 126, número total de miniaturas da Teresa. Realiza o cálculo 6×10 obtendo 60. Posteriormente efetua 60×2 e adiciona o produto obtido 120 a 6, obtendo 126, o valor total de miniaturas. Por fim, parece somar os números $10 + 2 + 6$ obtendo 18 e efetua $18 + 10$ chegando ao 28. Apesar de solicitado não apresenta resposta ao problema e ao analisar os cálculos que apresenta na sua folha de registo, Ilian não encontra a resposta correta para este.

Durante a entrevista, após questionado sobre a sua resolução, Ilian explica:

Ilian: Então eu tenho de dividir 126 por 6. Por isso fiz 6×10 e deu 60. Depois fiz 60×2 que deu 120. Como me faltava 6 para chegar aos 126 fiz $120 + 6$. Depois somei $10 + 2 + 6$ que deu 18. E depois somei $18 + 10$ e deu 28.

Estagiária: Então qual é que achas que é o resultado? Explica-me porque somas-te $10 + 2 + 6$.

Ilian: É 28. Porque foi os números que usei para chegar ao 126.

Estagiária: Mas tu fizeste multiplicações e adições. Já utilizaste uma estratégia semelhante numa tarefa anterior, pensa lá bem o que não estará bem.

Ilian: pois... não sei bem.

Estagiária: multiplicaste 6×10 e depois multiplicaste o resultado por 2. Poderias simplificar, pensa lá bem.

Ilian: fazer 6×10 outra vez que dava os 120.

Estagiária: E aqui fizeste $120+6$. Então e qual é o número na tabuada do 6 cujo produto é 6?

Ilian: 6×1 dá 6.

Estagiária: Agora que já tens todos os teus cálculos associados à operação de multiplicação já podes somar os números que utilizaste para multiplicar por 6.

Ilian: Ah...então $10+10+1$...dá 21?

Estagiária: Muito bem!

Entrevista a Ilian sobre a tarefa 7

A análise da entrevista mostra que Ilian considera a sua resolução correta e acredita que o resultado é 28, apesar de não se recordar totalmente do modo como resolveu o problema. Após a colocação de algumas questões e de o auxiliar no desenvolvimento do raciocínio, o aluno consegue chegar ao resultado correto e referir oralmente a resposta ao problema. Contudo, denoto que durante o momento da entrevista ainda se encontrava confuso quanto à veracidade do seu raciocínio. É de mencionar que o aluno evidencia perceber que este problema é de divisão.

5.1.2.6. T9 – As miniaturas 3

Neste problema uma turma foi dividida em dois grupos, para uma visita de estudo ao jardim zoológico: o grupo do Guilherme com 8 alunos e o grupo do Francisco com 7 alunos. No final da visita foram distribuídas ao grupo do Guilherme 256 miniaturas e ao grupo do Francisco 224. Tratava-se de perceber se a partilha tinha sido justa.

Ilian não conseguiu resolver o problema. Quando questionado em sala de aula o aluno refere que era difícil e precisava de mais tempo para encontrar uma resolução. É importante referir que a maioria dos alunos da turma não conseguiu resolver o problema. No dia em que realizei esta última intervenção, a meio da mesma, juntaram-se aos alunos da turma mais 17 alunos de outras duas turmas que tinham sido distribuídas, fator que desestabilizou a turma e comprometeu a resolução desta última tarefa da sequência proposta.

5.1.2.7. Síntese das estratégias utilizadas por Ilian

A tabela seguinte apresenta, de um modo sucinto, as estratégias utilizadas por Ilian na resolução das tarefas propostas, de multiplicação e divisão:

Tabela 8 - Síntese das estratégias utilizadas por Ilian

Tarefa	Operação e sentido	Estratégias utilizadas
T1	Multiplicação – sentido aditivo	Estratégia multiplicativa: usar uma decomposição decimal de um dos fatores. (resolve corretamente)
T3	Divisão por medida	Estratégia aditiva: adição sucessiva sem suporte na reta numérica (resolve incorretamente).
T4	Divisão por partilha	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve corretamente)
T6	Multiplicação – sentido aditivo	Estratégia multiplicativa: usar uma decomposição decimal de um dos fatores. (resolve corretamente)
T7	Divisão por medida	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve incorretamente).
T9	Divisão por partilha	Não resolveu

A análise da tabela, das produções do aluno e das explicações dadas pelo mesmo nas entrevistas clínicas, evidenciam que Ilian utiliza maioritariamente estratégias multiplicativas. Nas tarefas 1 e 6 recorre à decomposição decimal de um dos fatores. Já nas tarefas 4 e 7 recorre à multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência. Porém, na tarefa 3 recorre a uma estratégia aditiva, utilizando uma adição sucessiva sem suporte na reta numérica. No entanto, não conseguiu utilizar nenhuma das estratégias anteriores para resolver a tarefa 9.

Procedendo a um balanço das estratégias utilizadas por Ilian, podemos verificar que apenas respondeu corretamente às tarefas 1, 4 e 6. Relativamente às tarefas 3 e 7 apresenta uma resposta incorreta e a tarefa 9 não foi resolvida. Ao analisar as suas produções é perceptível que o aluno, em algumas tarefas, consegue desenvolver a sua estratégia e responder corretamente. Por outro lado, em outras tarefas, o aluno tenta utilizar a mesma estratégia, mas resolve de modo incorreto. Assim, podemos analisar que Ilian parece ainda não dominar as estratégias que utiliza originando, por vezes, resoluções incorretas.

Além das dificuldades manifestadas na resolução das tarefas de divisão por medida, Ilian revela também dificuldades em explicar como as resolveu.

5.1.3. As resoluções de Pedro

5.1.3.1. T1 – Máquina de bebidas 1

Na tarefa “máquina de bebidas 1” era pretendido saber quantas garrafas de água leva a máquina de bebidas da escola da Maria, sabendo que esta tem nove filas, com capacidade para doze garrafas em cada uma. Pedro resolve a tarefa 1 do seguinte modo (figura 13):

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top, there is a sequence of numbers: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108. Above each number from 12 onwards, there is a small bracket with '+12' written above it, indicating a series of additions. Below the sequence, the equation $12 \times 9 = 108$ is written. Further down, there is another equation: $(9 \times 10 = 90) + (9 \times 2 = 18) = 90 + 18 = 108$.

Figura 13 - Resolução de Pedro da tarefa Máquina de bebidas 1

A resolução de Pedro revela que este parece ter começado por recorrer a uma estratégia de saltos sucessivos. Apresenta os cálculos corretamente, tendo em conta o número de filas (9) e o número que é necessário adicionar (12). Depois regista a igualdade $12 \times 9 = 108$ associando o problema à operação multiplicação. Seguidamente, parece tentar encontrar outro modo de resolver o problema, utilizando a decomposição decimal de um dos fatores, neste caso, o 12. Faz 9×10 e obtém 90 e 9×2 e obtém 18. Por fim soma $90 + 18$ e chega a um total de 108 garrafas de água. Embora tenha usado registos incorretos (adiciona igualdades) realiza um raciocínio correto.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Pedro explica:

Pedro: Então comecei pelo 0 e fui adicionando o 12 nove vezes, até chegar ao resultado.

Estagiária: o que representa o 9?

Pedro: Então, o número de filas que a máquina tem.

Estagiária: Sim. Então e já sabes o resultado?

Pedro: Sei, ao todo são 108 garrafas de água.

Estagiária: E estes cálculos que tens aqui?

Pedro: É outra forma de chegar ao resultado. Fiz 9×10 que deu 90 e depois fiz 9×2 que deu 18. Somei $90 + 18$ e deu os 108.

Estagiária: Porque multiplicas o 9 pelo 10 e pelo 2?

Pedro: Porque são 12 garrafas em cada fila. E se fizer pela decomposição fica 10 dezenas e 2 unidades. Depois multipliquei pelo 9 porque são o número de filas.

Estagiária: Muito bem Pedro.

Entrevista a Pedro sobre a tarefa 1

A análise da entrevista evidencia que Pedro tem presente o modo como resolveu o problema, tendo dado as suas respostas de modo claro e coerente. Apesar de lhe ter sido solicitada a resposta ao problema, o aluno não a escreve na sua folha de registo, no entanto, dá a resposta correta quando questionado. É possível que o aluno tenha chegado à primeira estratégia de modo bastante rápido, pelo que teve tempo para pensar e apresentar outra estratégia.

5.1.3.2. T3 – Máquina de bebidas 2

A tarefa 3 envolve uma máquina de garrafas de água, que tem capacidade para levar 248 garrafas. Sabendo que, no supermercado, as embalagens trazem 8 garrafas de água, pretendia-se saber quantas embalagens eram precisas para encher a máquina. Sendo este um problema de divisão por medida, Pedro resolve esta tarefa do seguinte modo (**figura 14**):

$8 \times 10 = 80$
 $8 \times 10 = 80$
 $8 \times 10 = 80$
 $8 \times 7 = 8$
 $10 \times 3 = 30$
 $30 + 7 = 37$
 $240 + 8 = 248$
R: São precisas 37 embalagens.

Figura 14 - Resolução de Pedro da tarefa Máquina de bebidas 2

A análise da resolução de Pedro evidencia que este recorre a uma estratégia de multiplicação. O aluno parece utilizar como procedimento de cálculo a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência. Ou seja, utiliza o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 248, número total de garrafas de água que a máquina leva. Realiza o cálculo 8×10 três vezes, efetuando depois 3×80 . Como se aproxima do número 248 calcula 8×1 para perfazer o total de garrafas de água. Por fim, talvez de modo a confirmar o seu resultado, efetua 10×3 que é igual a 30 e $30 + 1$, obtendo 31. Na sua folha de registo, apresenta a resposta correta ao problema, considerando que são precisas 31 embalagens.

Durante o momento de discussão em grande grupo, a estratégia de Pedro é uma das escolhidas por mim para ser apresentada. O aluno explica a sua estratégia e, seguidamente, questiono a turma “Toda a gente percebeu o modo como o Pedro resolveu a tarefa?” e a maior parte dos alunos responde que não. O aluno explica novamente e à pergunta “quem recorreu à mesma resolução que Pedro?” apenas dois alunos levantam o braço. Por fim, a turma chega à conclusão que, numa próxima tarefa semelhante, esta estratégia é a mais adequada. Em modo conclusivo, explico novamente a estratégia do aluno, de forma a garantir que todos percebem o raciocínio implícito.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Pedro explica:

Pedro: Eu multipliquei três vezes 8×10 , que deu 80 cada. Depois fiz 80×3 que deu 240. Faltavam 8 para chegar a 248, por isso fiz 8×1 que deu 8. Depois fiz 10×3 que deu 30 e $30 + 1$ que deu 31.

Estagiária: Porque fizeste 10×3 ?

Pedro: Então porque utilizei aqui (*apontando*) três vezes o 10 e $10 + 10 + 10$ dá 30 e depois somei o 1 que usei aqui (*apontando*).

Estagiária: Então qual é a resposta Pedro?

Pedro: São precisas 31 embalagens de garrafas de água.

Entrevista a Pedro sobre a tarefa 3

Apesar de ter passado algum tempo após a resolução do problema, o aluno lembra-se dos cálculos que efetuou e explica de forma sucinta e correta todo o seu raciocínio. Durante a entrevista Pedro apresenta uma postura descontraída e confiante relativamente ao modo como pensou.

5.1.3.3. T4 – Máquina de bebidas 3

Este problema contém as mesmas quantidades numéricas que o problema anterior, difere apenas no contexto, sendo um problema de divisão por partilha. Envolve uma máquina de bebidas que no total leva 248 garrafas, existindo 8 tipos diferentes de sumo: maçã, pera, pêssigo, uva, laranja, ananás, mirtilo e manga, havendo a mesma quantidade de garrafas de cada um. Pretende-se saber quantas garrafas de sumo de cada sabor leva a máquina e Pedro resolve o problema do seguinte modo (**figura 15**):

Handwritten work showing the solution to the problem:

$$\begin{array}{l} 8 \times 10 = 80 \\ 8 \times 10 = 80 \\ 8 \times 10 = 80 \\ 8 \times 7 = 7 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 160 \\ 240 \\ 248 \end{array}$$
$$10 \times 3 = 30 \quad 30 + 1 = 31$$

R: A máquina leva 31 garrafas de cada ramo.

Figura 15 - Resolução de Pedro da tarefa Máquina de bebidas 3

Ao analisar a folha de registo de Pedro, perceciono que este utiliza uma estratégia semelhante à utilizada no problema anterior. Recorre à multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência, neste caso o 8×10 . O aluno efetua o cálculo 8×10 três vezes, obtendo 80 e multiplica 8×1 que é igual a 8. Parece que soma $80 + 80$ dando 160, depois soma mais 80, obtendo 240. Ao 240 soma 8, atingindo o total de 248. Talvez num modo de confirmação, multiplica 10×3 e obtém 30 e, por fim, soma $30 + 1$, chegando a um total de 31. Como solicitado, Pedro apresenta na sua folha a resposta ao problema, estando esta correta.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Pedro explica:

Pedro: Fiz 8×10 dá 80, mais 8×10 que dá 80, mais 8×10 que dá 80. Depois somei $80 + 80 + 80$ e deu 240. Fiz 8×1 que dá 8 e depois somei o 8 aos 240 e fiquei com os 248. Depois fiz 3×10 que deu 30 e somei mais 1, que deu 31.

Estagiária: Então qual foi o resultado que obteste?

Pedro: 31.

Estagiária: Qual é então a resposta ao problema?

Pedro: A máquina leva 31 garrafas de cada sabor.

Estagiária: Olhando para esta tarefa e para a anterior, consegues estabelecer alguma relação entre as duas?

Pedro: Se calhar.... Ah, porque têm os mesmos números e por isso consegui resolver da mesma maneira. Falam as duas em máquinas.

Estagiária: As tarefas são de multiplicação ou divisão?

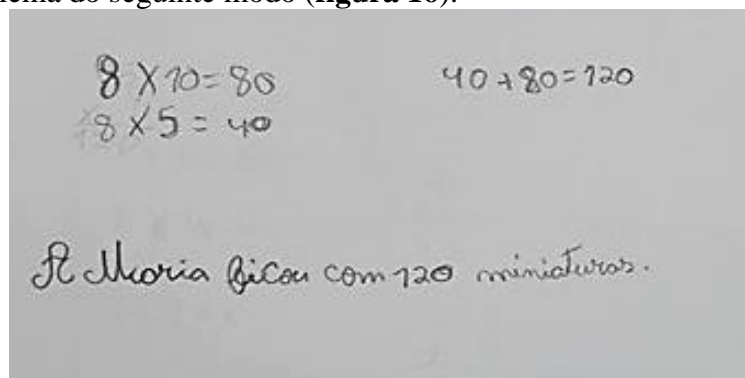
Pedro: Então...são de divisão. Nesta tinha de fazer $248 \div 8$. E nesta tinha de fazer...também $248 \div 8$.

Entrevista a Pedro sobre a tarefa 4

Tal como na tarefa anterior, Pedro explica o seu raciocínio de modo claro. A análise da sua produção escrita e da sua entrevista evidenciam que o aluno identifica corretamente o resultado e apresenta a sua resposta. Ao colocar-lhe os dois enunciados ao lado um do outro, Pedro apercebe-se que utilizou a mesma estratégia porque as tarefas são constituídas pelos mesmos números e que envolvem uma máquina de bebidas, diferindo apenas na situação apresentada. É de notar que Pedro identifica os dois problemas como sendo de divisão.

5.1.3.4. T6 – As miniaturas 1

Na tarefa “as miniaturas 1” é preciso saber com quantas miniaturas de animais ficou a Maria, sendo que lhe ofereceram 8 caixas de miniaturas, cada uma com 15. Pedro resolve o problema do seguinte modo (**figura 16**):



$8 \times 10 = 80$ $40 + 80 = 120$
 $8 \times 5 = 40$

A Maria ficou com 120 miniaturas.

Figura 16 - Resolução de Pedro da tarefa As miniaturas 1

A resolução de Pedro mostra que este parece recorrer a uma estratégia multiplicativa. O aluno aparenta utilizar uma decomposição decimal de um dos fatores, neste caso, o número 15. Começa por multiplicar 8×10 e obtém 80. Seguidamente multiplica 8×5 e obtém 40. Finalmente adiciona $40 + 80$ e obtém o total de 120. Como solicitado, Pedro apresenta a sua resposta na folha de registo e esta está correta.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Pedro explica:

Pedro: Fiz 8×10 que deu 80 e 8×5 que deu 40. Depois somei $80 + 40$ que deu os 120.

Estagiária: Consegues-me explicar porque utilizas esses números nas multiplicações?

Pedro: Então o 8 porque diz aqui (apontando) que lhe ofereceram 8 caixas de miniaturas. E o 15 decompus em unidades e dezenas e ficou 10 e 5. Aqui também diz “cada uma com 15 miniaturas”.

Estagiária: Então qual é a resposta correta?

Pedro: A Maria ficou com 120 miniaturas.

Entrevista a Pedro sobre a tarefa 6

Passou algum tempo desde que Pedro resolveu esta tarefa, no entanto, conseguiu explicar rapidamente o seu raciocínio após fazer uma leitura do enunciado e olhar para a sua folha de registo. Justifica corretamente o seu raciocínio e quer oralmente quer por escrito identifica a resposta correta ao problema. Durante o momento de resolução da tarefa em sala de aula, o aluno resolve esta tarefa de modo bastante rápido, terminando primeiro que os restantes alunos. Quando o interpelo e observo o seu registo, menciona que foi uma tarefa fácil de resolver.

5.1.3.5. T7 – As miniaturas 2

A tarefa em questão diz-nos que a Teresa tem 126 miniaturas e quer arrumá-las em caixas onde apenas cabem 6, tendo como objetivo saber quantas caixas vão ser precisas. Para tentar chegar ao resultado, Pedro opta pela seguinte estratégia (**figura 17**):

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. On the left, there are three multiplication equations: $6 \times 10 = 60$, $6 \times 10 = 60$, and $6 \times 1 = 6$. To the right of these, there are two addition problems. The first is $\begin{array}{r} 60 \\ + 60 \\ \hline 120 \end{array}$ followed by the equation $120 + 6 = 126$. The second is $\begin{array}{r} 10 \\ + 10 \\ \hline 20 \\ + 1 \\ \hline 21 \end{array}$. At the bottom, the student has written the answer: "R: ~10 Preciso de 21 caixas."

Figura 17 - Resolução de Pedro da tarefa As miniaturas 2

A resolução de Pedro revela que este recorre a uma estratégia de multiplicação. O aluno parece utilizar como procedimento de cálculo a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência. Ou seja, utiliza o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 126, número total de miniaturas da Teresa. Realiza o

cálculo 6×10 duas vezes, efetuando depois $60+60$. Como se aproxima do número 126 calcula 6×1 para perfazer o total de miniaturas. Por fim, talvez de modo a confirmar o seu resultado, efetua $10+10$ e $20+1$, obtendo 21. Na sua folha de registo, apresenta a resposta correta ao problema, considerando que são precisas 21 caixas.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Pedro explica:

Pedro: Fiz 6×10 que dá 60, duas vezes. Depois fiz $60+60$, que dá 120. Depois fiz $120+6$ que deu 126 e vi que faltavam 6, por isso fiz 6×1 . Depois fiz $10+10$ que dá 20 e $20+1$ daqui (apontando) que dá 21.

Estagiária: Então de quantas caixas vai precisar?

Pedro: Vai precisar de 21 caixas.

Entrevista a Pedro sobre a tarefa 7

Pedro, durante a sua explicação, menciona passo a passo todos os cálculos que efetua na sua folha de registo, explicando o seu raciocínio de um modo claro e referindo que tinha sido uma das tarefas mais fáceis de resolver até ao momento.

5.1.3.6. T9 – As miniaturas 3

Neste problema a turma foi dividida em dois grupos, para uma visita de estudo ao jardim zoológico: o grupo do Guilherme com 8 alunos e o grupo do Francisco com 7 alunos. No final da visita foram distribuídas ao grupo do Guilherme 256 miniaturas e ao grupo do Francisco 224. Para saber se esta partilha de miniaturas pelos grupos foi justa, Pedro resolveu o problema do seguinte modo (**figura 18**):

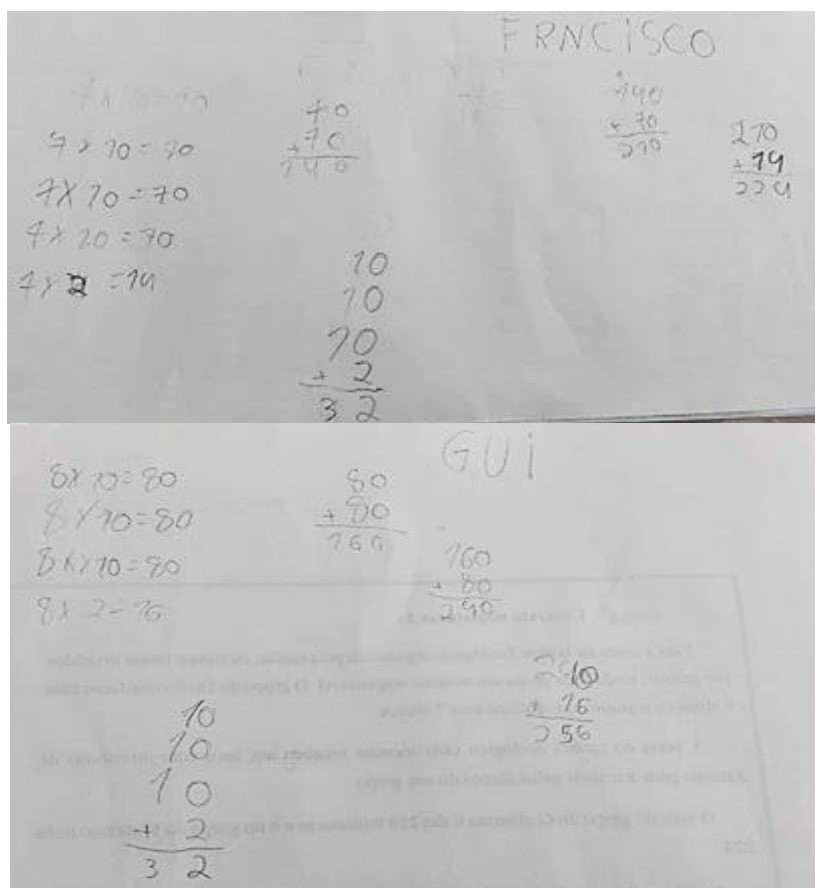


Figura 18 - Resolução de Pedro da tarefa As miniaturas 3

A análise da resolução de Pedro mostra que este utiliza a mesma estratégia que na tarefa anterior. Assim, o aluno parece utilizar como procedimento de cálculo a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência.

No caso do Francisco utiliza o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 224. Realiza o cálculo 7×10 duas vezes. Posteriormente, efetua $70 + 70$ e obtém 140 e depois soma $140 + 70$ e obtém 210. De modo a perfazer o total de miniaturas de cada aluno multiplica 7×2 e obtém 14 e, para confirmar o seu resultado, adiciona $210 + 14$, atingindo os 224. Por fim, adiciona $10 + 10 + 10 + 2$ e obtém o total de 32.

No caso do Guilherme utiliza também o 10 como múltiplo, efetuando produtos parciais de modo a aproximar-se do 256, número total de miniaturas. Realiza o cálculo 8×10 duas vezes e soma $80 + 80$ que dá 160. Posteriormente efetua novamente 8×10 e soma $160 + 80$, chegando a 240. Para perfazer o total de miniaturas de cada aluno multiplica 8×2 e obtém 16 e adiciona $240 + 16$, chegando ao número total de miniaturas referido no enunciado da tarefa. Por fim, soma $10 + 10 + 10 + 2$ e obtém 32.

Apesar de o aluno realizar os cálculos corretamente, não apresenta resposta ao problema como solicitado, o que não permite compreender se o aluno acha justa ou não esta partilha de miniaturas de animais.

Durante a entrevista, quando questionado sobre a sua resolução, Pedro explica:

Pedro: Comecei pelo Francisco. Fiz $7 \times 10 = 70$ e mais uma vez $7 \times 10 = 70$. Depois somei $70 + 70$ e deu 140, por isso multipliquei mais uma vez $7 \times 10 = 70$. Depois juntei esses 70 aos 140 que já tinha e deu 210. Para chegar aos 224 faltava-me 14 e para confirmar somei $210 + 14$ que deu 224. Na tabuada do 7, 7×2 dá 14. Depois somei $10 + 10 + 10 + 2$ e deu 32.

Estagiária: Porque é que adicionaste $10 + 10 + 10 + 2$? Como sabias que esses números te levariam ao resultado?

Pedro: Então, porque eu utilizei a tabuada do 7 e estes foram os números que utilizei para multiplicar pelo 7...para conseguir chegar ao 224 e não passar.

Estagiária: Então e quantas miniaturas foram distribuídas por cada aluno do grupo do Francisco?

Pedro: Está aqui (*apontando*), foram 32 para cada um.

Estagiária: Então e o grupo do Guilherme?

Pedro: Fiz igual, mas com o número 8. Multipliquei $8 \times 2 = 80$ duas vezes e depois somei $80 + 80$ e cheguei ao 160. Fiz mais uma vez $8 \times 10 = 80$ e depois somei $160 + 80$ e deu 240. Depois vi que ainda me faltavam 16 para chegar aos 256 e que se somasse $240 + 16$ dava os 256. Por isso fiz 8×2 que deu os 16. Para chegar ao resultado fiz $10 + 10 + 10 + 2$ e deu 32.

Estagiária: Como é que pensaste para saber que te faltavam 16 para chegares ao total de 156?

Pedro: Oh, foi fácil, $240 + 10$ dá 250 e se somar mais 6 dá os 256.

Estagiária: Então e cada aluno do grupo do Guilherme ficou com quantas miniaturas?

Pedro: Com 32 também.

Estagiária: Mas não escreveste resposta ao problema. O que é que nos era pedido?

Pedro: Achas que é justa esta partilha das miniaturas de animais? (*leu a ultima parte do enunciado*).

Estagiária: Consegues responder?

Pedro: É justa, porque os resultados foram iguais e cada um tinha 32.

Entrevista a Pedro sobre a tarefa 9

Apesar de não ter apresentado na folha de registo a resposta ao problema, Pedro consegue explicitá-la oralmente, de modo correto e justificado. No decorrer da entrevista o aluno não parece apresentar dificuldades em interpretar os seus registos, mostrando um raciocínio coerente e respondendo de modo correto às perguntas que foram efetuadas.

5.1.3.7. Síntese das estratégias utilizadas por Pedro

A tabela seguinte apresenta, de um modo sucinto, as estratégias utilizadas por Pedro na resolução das tarefas propostas, de multiplicação e divisão:

Tabela 9 - Síntese das estratégias utilizadas por Pedro

Tarefa	Operação e sentido	Estratégias utilizadas
T1	Multiplicação – sentido aditivo	Estratégia aditiva: adição sucessiva sem suporte na reta numérica. Estratégia multiplicativa: usar uma decomposição decimal de um dos fatores. (resolve corretamente)
T3	Divisão por medida	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve corretamente)
T4	Divisão por partilha	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve corretamente)
T6	Multiplicação – sentido aditivo	Estratégia multiplicativa: usar uma decomposição decimal de um dos fatores. (resolve corretamente)
T7	Divisão por medida	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve corretamente)
T9	Divisão por partilha	Estratégia multiplicativa: multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. (resolve corretamente)

A análise da tabela, das produções do aluno e das explicações dadas nas entrevistas clínicas, evidencia que este apenas recorre a uma estratégia aditiva na tarefa 1. Nas restantes tarefas da sequência Pedro utiliza estratégias multiplicativas. Na tarefa 1 e na tarefa 7 recorre à decomposição decimal de um dos fatores e nas outras utiliza a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência, sendo que esta última prevalece. É possível verificar que o aluno apresenta sempre o processo e o resultado corretos, o que parece revelar que domina esta estratégia.

Importa referir que Pedro resolvia rapidamente as tarefas apresentadas. As suas resoluções fizeram parte das resoluções apresentadas no quadro durante os momentos de

discussão coletiva e eram escolhidas, no final, pelos restantes alunos da turma como as mais adequadas para utilizar numa próxima tarefa. Nestes momentos, os alunos afirmavam que estas eram mais fáceis e tinham menos cálculos.

Pedro resolve as tarefas sem evidenciar dificuldades, porém, na última tarefa, no momento em sala de aula, pede o meu auxílio referindo que era complicada. Após explicar-lhe novamente o enunciado e tentar ajudá-lo sem interferir na sua possível estratégia, este consegue começar a resolver o problema.

5.2. As cadeias numéricas

5.2.1. T2 – Cadeia numérica 1

Tabela 10 - Tarefa 2, Cadeia numérica 1

	Cadeia 1
Cálculo 1	4×6
Cálculo 2	$24 \div 4$
Cálculo 3	$24 \div 6$
Cálculo 4	8×6
Cálculo 5	$48 \div 6$
Cálculo 6	$48 \div 8$
Cálculo 7	$48 \div 4$

Após iniciar a exploração da sequência de tarefas em sala de aula, através de um problema, introduzi a primeira cadeia numérica. Depois de mencionar aos alunos o que iríamos trabalhar e qual o papel que iriam ter, como foi explicitado na secção da proposta pedagógica que suportou a investigação em questão, realizei a seguinte cadeia numérica:

Após existir um ambiente que considero propício à aprendizagem, começo por afixar o primeiro cartão no quadro, que contém o **cálculo 1** (4×6), dando algum tempo aos alunos para pensarem. Pouco tempo depois começam a surgir alguns dedos no ar e dou a palavra a Rodrigo:

Rodrigo: Dá 24.

Estagiária: Diz-me como pensaste?

Rodrigo: $6+6+6+6 = 24$. $6+6$ dá 12. $6+6$ dá 12. E $12+12$ dá 24.

Estagiária: Sim, adicionaste o número 6 quatro vezes.

Ocorrida esta primeira intervenção, em que Rodrigo explica que utilizou uma estratégia aditiva, os alunos continuavam envolvidos e com vontade de participar pelo que questionei “quem pensou de outro modo?”. Nesta altura, havendo muitos dedos no ar, dei a palavra a Pedro:

Pedro: Dá 24.

Estagiária: Como é que fizeste?

Pedro: Então 4×5 dá 20 e $20 + 4$ dá 24.

Pedro usa uma estratégia multiplicativa, recorrendo a um produto de referência, 4×5 , a que adiciona 4. Alguns alunos baixaram o braço e deduzi que tivessem pensado na mesma estratégia, no entanto Ilian continuava com o seu dedo no ar, pelo que também lhe dei a palavra.

Estagiária: Então e tu Ilian como é que pensaste?

Ilian: Dá 24. Porque 2×12 dá 24.

Estagiária: Explica-me a relação de 2×12 com o cálculo 4×6 .

Ilian: Porque 2 é metade de 4 e 12 é o dobro de 6.

Estagiária: Sim, estabeleceste uma relação entre o dobro e a metade.

Ilian relaciona o produto proposto com outro, 2×12 , usando uma estratégia de dobro e metade. Após questionar os alunos sobre outro raciocínio que não tivesse sido exposto, mais nenhum aluno se manifestou. A figura seguinte mostra os registos efetuados a propósito do cálculo 4×6 (**figura 19**).

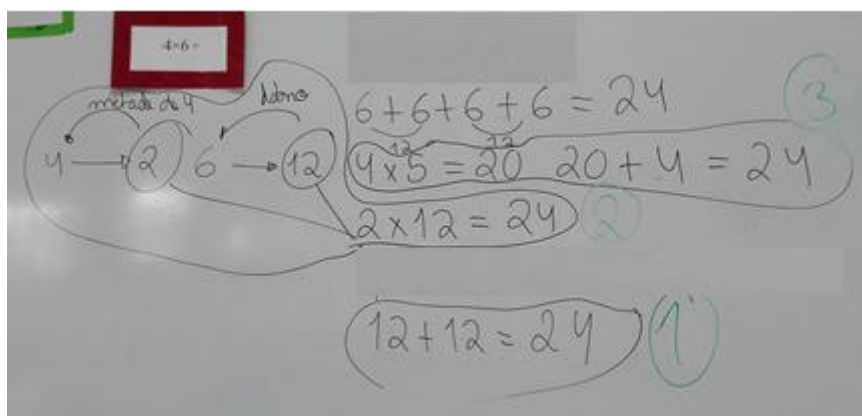


Figura 19- Cálculo 1, Cadeia numérica 1

Passo então a propor o **cálculo 2** ($24 \div 4$), afixando o segundo cartão no quadro. Neste momento peço aos alunos para analisarem este cartão tendo em conta o primeiro, tentando que estes estabelecessem uma relação entre os cálculos e, mais facilmente,

chegassem ao resultado. Começam então a surgir alguns dedos no ar e obtenho os seguintes modos de pensar:

Estagiária: Como pensaste Rodrigo?

Rodrigo: É seis.

Estagiária: Mas diz-me como pensaste?

Rodrigo: Porque, não sei bem...porque $6+6+6+6$ dá 24.

Estagiária: Pedro e tu? (*Pedro também se encontrava de braço no ar*).

Pedro: Dá seis. Porque $6 \times 4 = 24$, assim como no primeiro cartão $4 \times 6 = 24$. Foi só ir ver atrás.

Estagiária: Muito bem Pedro!

Enquanto Rodrigo associa o cálculo a uma afição repetida, sem conseguir fundamentar essa ligação, Pedro estabelece a relação entre a divisão proposta e a multiplicação. Rodrigo tem algumas dificuldades em relacionar o cálculo com o anterior. No entanto, Pedro consegue estabelecer a relação entre a multiplicação e a divisão $24 \div 4$. Esta interpretação é também fundamentada através da resposta de Pedro “Foi só ir ver atrás”. Explico novamente o raciocínio de Pedro, para que todos os alunos da turma percebam e tentem relacionar os próximos cálculos da cadeia.

Também no **cálculo 3 ($24 \div 6$)**, após afixá-lo no quadro, surgem alguns braços no ar. Começo por dar a palavra à Layssa:

Estagiária: Diz-me como pensaste.

Layssa: Então eu acho que dá 6. Porque 6×4 dá 24, então é 6.

Estagiária: Conseguiste relacionar com algum cálculo anterior?

Layssa: Então no cálculo anterior fizemos 4×6 que também dava 24.

Estagiária: Então mas como chegaste ao número 4?

Layssa: Fui ver na tabuada do 6 qual era o número que multiplicado por esse que dava o 24.

Pedro: Também podemos relacionar com o primeiro cartão que tem $4 \times 6 = 24$, que é a resposta.

Estagiária: Muito bem meninos!

A aluna Layssa consegue relacionar este cálculo com o cálculo 2, percebendo que ao multiplicar 4×6 e 6×4 obtém o mesmo resultado. No então, também se justifica referindo que pensou qual o número que multiplicado por 6 irá dar 24, dizendo a tabuada para si.

Por outro lado, Pedro vai mais longe e estabelece também a relação entre os cartões 2 e 3 com o cartão 1, quando menciona que o cartão 1 contém a resposta para as restantes alíneas. Porque nos diz que $4 \times 6 = 24$, o que é trabalhado nos dois cálculos seguintes. Os restantes alunos da turma parecem ter compreendido os raciocínios estabelecidos pelos colegas.

O **cálculo 4 (8×6)** foi proposto de modo a tentar que os alunos, após estabelecerem relações entre os cálculos anteriores, percecionando a relação entre a multiplicação e a divisão, pudessem, também, relacionar dobros com metades. Após colocar o cartão no quadro, esperei até começarem a surgir os primeiros dedos no ar.

Estagiária: Erik, explica-me como pensaste?

Erik: Dá 48.

Estagiária: E como chegaste a esse resultado?

Erik: Então, pensei na tabuada e fui multiplicando.

Estagiária: Não consegues relacionar com nenhum cálculo anterior? Algo que aches parecido?

Erik: Sim, com o primeiro cartão! Porque se $4 \times 6 = 24$, posso pensar a partir daí, é mais fácil!

O aluno conseguiu chegar ao resultado, no entanto, não conseguiu estabelecer a relação com as alíneas anteriores, apenas utilizá-las como auxiliares para os seus cálculos até chegar ao resultado de $8 \times 6 = 48$. Contudo parece usar uma estratégia de multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Porém, Tomás consegue chegar ao resultado e estabelecer uma relação com os cálculos anteriores:

Tomás: Dá 48.

Estagiária: Explica-me como pensaste.

Tomás: No primeiro cartão fizemos $4 \times 6 = 24$. E agora estamos a usar o 8. E 8 é o dobro de 4. Então se no primeiro cartão deu 24 agora vai ter de dar o dobro, que é 48. Ou $24 + 24 = 48$.

Estagiária: Isso mesmo Tomás! Utilizaste a relação de dobro, verificando que 4 é o dobro de 8.

Ao contrário de Erik, o aluno Tomás estabelece uma relação entre o cálculo 4 e o cálculo 1. Para chegar ao resultado, apercebe-se que existe uma relação de dobro, entre o 4 e o 8 e, posteriormente, entre os resultados 24 e 48. Alguns alunos ficaram entusiasmados, exclamando, “pois, é!”, “é verdade!” entre outras reações que os levaram a outros modos de raciocinar.

Para resolver o **cálculo 5** ($48 \div 6$) os alunos recorrem facilmente aos cálculos já utilizados anteriormente. Começo por dar a palavra a Beatriz que infere:

Beatriz: Dá 8. Porque como fizemos antes, se agora multiplicarmos o 6 pelo 8 vamos ter o 48, então 8 é o resultado. É só irmos à tabuada!

Estagiária: Muito bem Beatriz. Diz Carolina.

Carolina: No cartão atrás temos ao contrário, 8×6 e também dá 48.

Beatriz e Carolina estabelecem relações já analisadas anteriormente. Beatriz estabelece uma relação idêntica à de Layssa para o cálculo 3, resolvendo o cálculo de divisão através da multiplicação. Por outro lado, Carolina verifica que o cartão 4 nos dá o resultado para este cálculo.

Após perceberem que toda a turma estava a compreender o que estava a ser trabalhado, passei para o **cálculo 6** ($48 \div 8$) e automaticamente Rodrigo respondeu-me:

Rodrigo: Se $48 \div 6$ dá 8, $48 \div 8$ dá 6.

Estagiária: Então mas como chegaste a essa conclusão Rodrigo?

Rodrigo: Porque no antes fizemos 6×8 e dava 48. Neste se fizermos 8×6 também dá 48. Por isso é 6.

Estagiária: Sim, está correto.

Com a realização deste cálculo consegui perceber que alguns alunos já tinham automatizado o processo usado anteriormente, conseguindo chegar ao resultado da divisão através da multiplicação. Rodrigo consegue aplicar o que foi feito nos cálculos anteriores para este cálculo, pensando que ao multiplicar 6×8 e 8×6 vai obter o mesmo resultado, 48, usando ainda que informalmente a propriedade comutativa da multiplicação.

Por último, afixo no quadro o cartão com o **cálculo 7** ($48 \div 4$) pensando que iria suscitar mais dúvidas. Porém, começam a surgir braços no ar para partilharem os seus raciocínios. Antes de pedir a um aluno para participar pedi para relacionarem com os cartões anteriores e pensarem no processo que temos utilizado para chegar aos resultados. Peço então a Mariana que explique o modo como pensou.

Mariana: Então eu fui ver qual era o número na tabuada do 4 que dá 12.

Estagiária: E conseguiste descobrir?

Mariana: 4×10 , acho eu.

Estagiária: 4×10 é 40. Qual é o número que temos aqui? (*apontando para o cálculo*).

Mariana: 48.

Estagiária: Então não podemos multiplicar o 4 pelo 10 porque vai dar 40. Por que número temos de multiplicar?

Pedro: Por 12, para dar 48.

Estagiária: Sim, é isso mesmo! 12 é o número que multiplicado por 4 é igual a 48. Ou seja, $48 \div 4$ é igual a 12.

Mariana consegue recorrer ao processo utilizado anteriormente, no entanto apresenta dificuldades na tabuada, nomeadamente em saber qual é o número que multiplicado por 4 é igual a 48. No entanto, Pedro sem dificuldades completa o raciocínio da colega, referido que o 4 tem de ser multiplicado por 12 para dar os 48. Completando e justificando a sua resposta ao referir “ou seja, $48 \div 4$ é igual a 12”.

É importante mencionar que à medida que os alunos iam explicando o modo como pensavam, eu registava no quadro as várias estratégias mencionadas, tal como se observa na figura 19. Antes de mudar para outro cálculo, sempre que existisse mais que uma estratégia usada, questionava os alunos qual a mais adequada e eficaz. A escolha nem sempre foi unânime, porque nem todos os alunos optavam pela mesma estratégia, mas, em conjunto com a turma, chegávamos sempre a um consenso. No cartão com o cálculo 1, como foram diversas as estratégias mencionadas, comecei por ordenar as estratégias, desde a que os alunos achavam mais rápida e eficaz para a menos rápida e eficaz.

5.2.2. T5 – Cadeia numérica 2

Depois de resolver duas tarefas T3 – Máquina de bebidas 2 e T4 – Máquina de bebidas 3, optei por introduzir a segunda cadeia numérica, de modo que os alunos relacionassem explicitamente a multiplicação e a divisão e desenvolvessem o cálculo mental. A tabela seguinte (tabela 11) apresenta os cálculos que a constituem:

Tabela 11- Tarefa 5, Cadeia numérica 2

	Cadeia 2
Cálculo 1	5×8
Cálculo 2	$40 \div 8$
Cálculo 3	10×8
Cálculo 4	$80 \div 8$
Cálculo 5	12×8
Cálculo 6	$96 \div 8$
Cálculo 7	$136 \div 8$

Tal como na primeira cadeia numérica, começo por colocar no quadro o cartão com o **cálculo 1 (5×8)**. Rapidamente surgem diversas respostas como “dá 40”, “ 5×8 é 40”, pronunciando-se quase toda a turma. Registei a resposta e relembrei uma regra básica da sala de aula “primeiro que tudo antes de falarmos temos de colocar o dedo no ar”. Porém, não aprofundei este primeiro cálculo, visto envolver a tabuada do 5, que os alunos já automatizaram uma vez que o 5 é um número de referência.

Passo então a revelar o cartão com o **cálculo 2 ($40 \div 8$)** no quadro referindo “não quero respostas quero primeiro o dedo no ar”. Começo então por dar a palavra a Ilian que afirma:

Ilian: É 5.

Estagiária: Porquê 5, explica-me como pensaste?

Ilian: porque 5×8 dá 40. Também tive uma ajudinha da conta anterior.

Os restantes braços que estavam no ar baixaram e quando questionei os alunos se mais alguém queria dizer algo, referiram que não. Ilian utiliza o processo que foi frequente na cadeia numérica 1, possivelmente já automatizado, relacionando este cálculo com o cálculo 1, o que é perceptível quando afirma “Também tive uma ajudinha da conta anterior”.

Após registar no quadro o que Ilian disse, passo então para o **cálculo 3 (10×8)**. Para este cálculo é apresentado apenas uma resposta pelos diversos alunos da turma. Pergunto a Lara que me diz “é 80”. Mais ninguém tem propostas para apresentar, ouvindo-se alguns alunos a emitirem a mesma resposta oralmente, ou referindo “está é fácil!”, “eu também sabia!”. Perceciono então que para a maioria dos alunos este é um

cálculo que deve estar memorizado de forma automática e possivelmente associado a 8×10 .

Ao propor o **cálculo 4 ($80 \div 8$)** reparo que os dedos no ar aumentaram ainda mais, começando por dar a palavra a Tomás:

Tomás: 10.

Estagiária: Porquê?

Tomás: Porque o número da tabuada que dá ...porque na tabuada do 8, 10×8 dá 80.

Tomás consegue fazer a ligação com o cálculo anterior e resolver o cálculo de divisão através de uma multiplicação. Assim, verifica qual o número que multiplicado por 8 é igual a 80, de modo a obter o resultado. Antes de avançar para o cálculo seguinte coloco uma pergunta geral à turma “O que é que nós estamos então a relacionar aqui?”, Pedro afirma “as contas”, sendo que o questiono “quais contas Pedro?” e alguns alunos em coro, inclusive Pedro respondem-me “de multiplicar e dividir”.

Passo então a afixar o **cálculo 5 (12×8)** no quadro. Peço então a Beatriz para explicar o modo como pensou:

Beatriz: 96.

Estagiária: Porquê? Como pensaste para chegar até ao 96?

Beatriz: Fiz 8×2 que dá 16. 8×1 é 8, com um 9.

Estagiária: Mais alguém tem outra estratégia?

Ninguém conseguiu transmitir outro modo de pensar. Beatriz resolve o cálculo através do algoritmo da multiplicação, efetuando mentalmente a multiplicação de um número com um algarismo, neste caso o 8, por um número de dois algarismos, neste caso o 12.

Afixando o **cálculo 6 ($96 \div 8$)** no quadro Diogo responde-me sem grande dificuldade:

Diogo: É 12.

Estagiária: Porquê Diogo?

Diogo: Porque na tabuada...porque 8×12 dá 96.

Estagiária: Já resolvemos esta multiplicação? (sublinhando o 12×8).

Diogo: Já, na conta acima.

O cálculo apresentado engloba um processo que os alunos têm vindo a observar ao longo da primeira cadeia numérica realizada e da cadeia em questão, pelo que Diogo respondeu prontamente afirmando que era 12. Para chegar ao resultado relacionou este cálculo com o cálculo anterior (12×8). Este processo, ao que parece, já se encontra automatizado pelos alunos, pelo que os restantes confirmaram o que foi dito por Diogo e baixaram os braços.

Coloco o cartão referente ao **cálculo 7 ($136 \div 8$)** no quadro e reparo que os alunos demoram algum tempo a colocar o braço no ar. Incentivo então os mesmos a tentarem pensar em como chegar ao resultado e um aluno diz “não é assim tão fácil”. Até então só Diogo tem o dedo no ar, dou mais tempo para pensarem, o que não surte efeito. Como tal, dou a palavra a Diogo:

Estagiária: Diz Diogo.

Diogo: 96.

Estagiária: 96? Porquê?

Diogo: Porque $8 \div 96$ dá 136. Ah, não...

Estagiária: Ao dividires 96 irá dar-te 136, um número maior?

Beatriz também não consegue chegar ao resultado quando propõe:

Beatriz: 8×96 ?

Estagiária: Se multiplicarmos 8 vezes o número 96 será que dá apenas 136?

De modo a ajudar digo aos alunos que estão a focar-se em números de quantidades elevadas e peço para pensarem naquilo que temos estado a fazer e tentarem chegar a um resultado a partir dos cálculos anteriores.

O aluno Toy refere “ 8×12 ?” e eu volto a perguntar “Qual é o número que multiplicado por 8 é igual a 136?” e Pedro responde “é de certeza mais de 10”. Dou novamente algum tempo aos alunos para pensarem. Beatriz tenta novamente responder:

Beatriz: 8×17 dá 136.

Estagiária: Porquê?

A aluna não consegue completar o raciocínio, apesar da minha insistência. Digo então à turma para olhar para a cadeia numérica e observar que 12×8 é igual a 96. Se subtrairmos 96 ao 136, número inserido no cálculo em questão, obtemos 40. Seguidamente questiono qual é o número que na tabuada do 8 dá 40 e Beatriz responde-me “ $8 \times 5 = 40$ ”. Por fim, expliquei-lhes que se somar ao número 12 o 5, irei então obter os

17. Após a explicação percebi que alguns alunos ainda ficaram com dúvidas pelo que expliquei novamente e mais detalhadamente.

Num primeiro momento, Diogo e Beatriz tentam dar uma resposta ao cálculo, mas não alcançam o resultado correto. Diogo diz que $136 \div 8 = 96$, justificando que $8 \div 96$ dá 136. O aluno não consegue explicar e desenvolver o seu raciocínio, percebendo posteriormente que não poderia ser. Por outro lado, Beatriz tenta utilizar a multiplicação referindo 8×96 e intervenho para que perceba que não está correto e que daria um número superior.

Passadas as dificuldades dos alunos e o meu auxílio, Beatriz intervém novamente com um novo raciocínio, referindo que 8×17 dá 136. No entanto, a aluna não consegue explicar como chegou ao resultado, não tendo a certeza de estar correta. Como tal, após alguns momentos dados aos alunos para pensarem e diversas intervenções, reparo que a turma está com muitas dificuldades e tento que a mesma me acompanhe num raciocínio, relacionado com a restante cadeia numérica. Depois de explicar um modo de chegar ao resultado do cálculo em questão, perceciono que nem toda a turma compreende, pelo que volto novamente a explicar, para que todos consigam perceber e refletir sobre o que foi feito e consigam, numa outra cadeia semelhante, chegar com facilidade ao resultado.

5.2.3. T8 – Cadeia numérica 3

Antes de explorar a última tarefa, T9 – Contexto miniaturas 3, que apresenta um grau de complexidade maior, introduzi uma última cadeia numérica. A tabela seguinte (tabela 12) apresenta os cálculos que a constituem:

Tabela 12 - Tarefa 8, Cadeia numérica 3

	Cadeia 3
Cálculo 1	10×6
Cálculo 2	12×6
Cálculo 3	$72 \div 6$
Cálculo 4	$78 \div 6$
Cálculo 5	$84 \div 6$

Já familiarizados com o modo como eram trabalhadas as cadeias numéricas em sala de aula, esperei que os alunos ficassem em silêncio e coloquei o cartão correspondente ao **cálculo 1 (10×6)** no quadro. Quase que em coro, a maioria dos alunos

da turma respondeu-me logo que o resultado era 60. Procedi ao registo no quadro e considerei que este cálculo era do conhecimento de todos os alunos, já estando automatizado.

Afixei então o cartão correspondente ao **cálculo 2 (12×6)** no quadro e começaram rapidamente a surgir os primeiros braços no ar, surgindo duas estratégias diferentes para a sua resolução, salientando que tentei envolver os alunos que menos participavam a pensarem numa resolução para o cálculo:

Erik: Então 10×6 é 60... 11×6 é 66 e 12×6 é 72. Fui juntando sempre mais 6.

Juan: É 72. 6×2 é doze. 6×1 é 6, com o 1 que vai 7. Fica 72.

Erik resolve o cálculo recorrendo à tabuada, e a produtos sucessivos a partir de 10×6 . Contudo o aluno pensou na tabuada a partir de 10×6 com o auxílio da contagem pelos dedos.

Por outro lado, Juan resolve o cálculo através do algoritmo da multiplicação efetuando mentalmente a multiplicação de um número com um algarismo, neste caso o 6, por um número de dois algarismos, o 12. Começa por calcular usando o dígito das unidades e retém o número de dezenas obtidas, adicionando-o ao dígito das dezenas.

Passando para o **cálculo 3 ($72 \div 6$)**, ao afixar o cartão no quadro vários alunos levantaram os braços e resolvi dar a palavra a uma aluna que não costumava intervir com frequência:

Lara: É 12. Porque se formos ver no antes 12×6 é 72.

Estagiária: Então o que é que fizeste?

Lara: Fui à tabuada do 6 ver qual era o que dava 72, mas tive uma ajudinha do que fizemos antes para chegar lá mais depressa.

Pedro: Era fácil, já fizemos muitos assim.

Lara utilizou um processo que tem vindo a ser efetuado pelos alunos desde a primeira cadeia numérica, ou seja, resolveu o cálculo de divisão através da multiplicação. Procurou qual era o número que multiplicado por 6 iria dar 72 para conseguir chegar até ao resultado. A aluna conseguiu também estabelecer uma relação entre este cálculo e o anterior, referindo que o cálculo anterior a auxiliou a obter o resultado mais facilmente.

Porém Pedro ainda menciona outra possível estratégia:

Pedro: Dá 12. Eu decompus o 72 em 60+12. Fiz 6×10 dá 60 e 6×2 que dá 12. Depois somei $10+2$ e deu os 12.

O aluno utiliza um processo de decomposição decimal de um dos fatores, neste caso, o número 72. Embora não seja de modo direto, parece estabelecer relação com o cálculo 10×6 .

Ao afixar o **cálculo 4 ($78 \div 6$)** no quadro os alunos usaram três estratégias diferentes para o efetuar:

Ilian: É 13. O 78 é igual a $72+6$. Porque no anterior já sabia que 12×6 é 72, então se juntar mais 6, é 13 que dá 78.

Tomás: Eu fiz $78 = 60+18$. Eu já sei que 6×10 dá 60. Depois fiz 6×3 que dá 18. E somei $10+3$ que deu 13.

Estagiária: Sim, utilizaste a decomposição do número 78.

Erik: Eu já sei que 6×10 dá 60 e depois fui contando e quando cheguei ao 6×13 parei porque já estava nos 78.

Ilian resolveu o cálculo relacionando com os cálculos anteriores. O aluno já sabia que só precisava de juntar mais 6 ao 72, que na tabuada do 6 equivalia a 13×6 , o que lhe permitiu resolver rapidamente. Como tal, evidencia-se que estabeleceu uma ligação com os cálculos anteriores.

Tomás, à semelhança de Pedro no cálculo anterior, também chegou até ao resultado através da decomposição não decimal de um dos fatores, neste caso, o número 78. Embora use uma estratégia multiplicativa, não estabelece uma relação direta com os cálculos anteriores.

Erik utilizou como processo para resolver o cálculo a contagem pelos dedos, o que revela que o aluno ainda não se sente à vontade com as tabuadas. Apesar de chegar ao resultado correto, utiliza um raciocínio um pouco demorado e ineficaz para trabalhar com números superiores, não estabelecendo uma relação com os cálculos anteriores.

Por fim, após serem esclarecidas todas as dúvidas, afixei o cartão com o **cálculo 5 ($84 \div 6$)** e dei algum tempo aos alunos para pensarem. No entanto, Pedro intervém referindo:

Pedro: Ah essa é fácil! Já sei que 84 é os $78+6$, por isso tem de ser 14×6 que dá 84. É 14.

Estagiária: Sim Pedro. Mais alguém pensou de outro modo?

Layssa: Podemos fazer como o Pedro fez em cima. O 84 é $80+4$. 8×10 dá 80 e 4×1 dá 4, então fica $10+4$ que dá 14.

Estagiária: Não é bem assim Layssa, nós estamos a trabalhar com o número 6, logo se quisermos utilizar a multiplicação para resolver este cálculo temos de utilizar a tabuada do 6.

Juan: então $84 \text{ é } 60+24$. $6 \times 10 \text{ dá } 60$. $6 \times 4 \text{ dá } 24$. $10+4 \text{ dá } 14$.

Pedro resolveu o cálculo através do realizado anteriormente, relacionando com a tabuada do 6. Por outro lado, Layssa tenta resolver o cálculo através da decomposição decimal de um dos fatores, como Pedro fez anteriormente. No entanto, em vez de se reger pela tabuada do 6, número envolvido no cálculo, utiliza a tabuada do 8 e do 4, o que não se pode aplicar.

Juan auxilia a Layssa e resolve o cálculo do mesmo modo, utilizando a decomposição não decimal de um dos fatores, neste caso, o 84. Porém não efetua nenhuma relação com os cálculos anteriores da cadeia numérica.

5.2.4. Síntese das estratégias de resolução das cadeias 2, 5 e 8

A análise realizada às intervenções dos alunos revela que estes utilizam diferentes estratégias para a resolução dos cálculos apresentados nas três cadeias numéricas e que nem sempre conseguem relacionar os cálculos propostos com outros já realizados anteriormente. De modo sintetizado, na resolução dos cálculos os alunos usam as seguintes estratégias:

- Utilizar produtos de referência na tabuada, por exemplo, para resolver o cálculo 4×6 , começaram por pensar em 4×5 ;
- Usar relações de dobro e de metade;
- Utilizar do algoritmo da multiplicação, efetuando mentalmente a multiplicação de um número com um algarismo por um número de dois algarismos;
- Utilizar a decomposição decimal e não decimal de um dos fatores;
- Utilizar multiplicação para resolver cálculos de divisão, através da tabuada.

É possível verificar que a estratégia mais utilizada pelos alunos ao longo das três cadeias numéricas é a utilização da multiplicação para resolver cálculos de divisão, através da tabuada, tal como era sugerido pela própria construção dos cálculos que constituíam cada cadeia numérica. A partir da cadeia numérica 2 observa-se que começam a existir novas estratégias por parte dos alunos, como a utilização do algoritmo da multiplicação e da decomposição decimal, ou não, de um dos fatores. Esta última é bastante utilizada na cadeia numérica 3, provavelmente pela ordem de grandeza dos

números. Como tal, é possível afirmar que os alunos conseguiram estabelecer uma relação entre a multiplicação e a divisão, interligando os cálculos de cada cadeia e desenvolver o seu raciocínio ao encontrar novas estratégias. Contudo há ainda alunos que não conseguem relacionar a divisão com a multiplicação, manifestando dificuldades nos cálculos que envolvem a divisão, sobretudo quando envolvem números maiores.

A análise das intervenções dos alunos evidencia que os alunos-caso também se envolveram nas discussões coletivas que ocorreram a propósito da resolução de cada cadeia numérica, contribuindo de modo positivo para o desenvolvimento do raciocínio de toda a turma, conseguindo estabelecer relações e interligar os diferentes cálculos de cada cadeia. Poderemos assim conjecturar que ao intercalar as cadeias numéricas com os problemas de multiplicação e divisão, os alunos e, em particular, os alunos-caso parecem ter desenvolvido o seu raciocínio, em particular, no que respeita à compreensão da relação entre a multiplicação e divisão, bem como parecem ter melhor percebido processos de cálculo envolvidos nas diferentes resoluções.

Capítulo 6

Conclusões

Num primeiro momento, o capítulo em questão engloba uma síntese do estudo realizado. Posteriormente, são apresentadas as conclusões do estudo, elaboradas de modo a tentar dar resposta às questões orientadoras desta investigação. Por fim, apresento uma reflexão sobre todo o trabalho desenvolvido.

6.1. Síntese do estudo

A realização deste projeto de investigação teve como intuito compreender e caracterizar o modo como os alunos do 3.º ano de escolaridade resolvem tarefas que envolvem as operações multiplicação e divisão e compreender a forma como estes relacionam as operações multiplicação e divisão. Como tal, a investigação ocorreu em contexto de estágio através da implementação de uma sequência de tarefas, construída previamente e constituída por dois problemas de multiplicação, três de divisão e três cadeias numéricas.

Após estabelecer os objetivos do estudo, formulei duas questões fundamentais para a investigação:

- Como é que os alunos de 3.º ano resolvem tarefas de multiplicação?
- Como é que os alunos do 3.º ano resolvem tarefas de divisão e, em particular, usam a multiplicação na sua resolução?

Relativamente à metodologia adotada esta centra-se numa investigação sobre a prática, envolvendo uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa, levando-me a realizar três estudos de caso. Através da observação participante, da recolha documental e da realização de entrevistas clínicas, procedi à recolha de dados essenciais que analisei

e, posteriormente, me permitiram obter as conclusões do estudo. Assim, posso aferir que a análise dos dados recolhidos, interligado com os estudos de vários autores, possibilitou a resposta às questões orientadoras.

As secções seguidamente apresentadas, contêm as conclusões do estudo realizado, organizadas tendo por base as questões de investigação.

6.2. Conclusões do estudo

As conclusões incidem maioritariamente na resposta às questões orientadoras, considerando a análise dos dados e a sua relação com o que afirmam outros autores que investigaram sobre as mesmas temáticas.

Como é que os alunos de 3.º ano resolvem tarefas de multiplicação?

A tabela seguinte resume as estratégias usadas pelos três alunos na resolução das duas tarefas de multiplicação propostas, que integram a sequência contemplada neste estudo.

Tabela 13 - Síntese das estratégias utilizadas pelos alunos-caso nas tarefas de multiplicação

Tarefas	Estratégias		
	Tomás	Ilian	Pedro
T1	Algoritmo da multiplicação. Adicionar sucessivamente sem suporte na reta numérica. Resolve corretamente.	Usar a decomposição decimal de um dos fatores. Resolve corretamente.	Adicionar sucessivamente sem suporte na reta numérica. Usar a decomposição decimal de um dos fatores. Resolve corretamente.
T6	Algoritmo da multiplicação; Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.	Usar a decomposição decimal de um dos fatores. Resolve corretamente.	Usar a decomposição decimal de um dos fatores. Resolve corretamente.

A análise da tabela mostra que os alunos usam uma diversidade de estratégias na resolução das tarefas. A tabela evidencia ainda que os alunos recorrem ao uso quase

exclusivo de estratégias multiplicativas para resolver as tarefas propostas. Estas variam entre a decomposição decimal de um dos fatores e a multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência. É de referir que Tomás é o único aluno que recorre ao uso do algoritmo da multiplicação, embora utilize também outras estratégias de resolução num mesmo problema. Tal como referem Fosnot e Dolk (2001) as estratégias utilizadas estão relacionadas com a ideia que os alunos têm sobre a multiplicação, sendo que estes alunos parecem ter ainda, ideias diferentes sobre esta operação. Ainda assim, o uso frequente de estratégias de multiplicação poderá estar relacionado com o investimento que foi feito associado à aprendizagem desta operação. É importante mencionar que os três alunos resolvem corretamente ambas as tarefas.

Tomás e Pedro utilizam não só estratégias multiplicativas, mas também, aditivas. A multiplicação está relacionada com a adição (Ponte e Serrazina, 2000) e, nesta relação, verifica-se que inicialmente os alunos começam por contruir ideias associadas à multiplicação através da utilização da adição sucessiva de parcelas (Mendes, 2012). Provavelmente estes alunos ainda não estão muito confiantes no uso de estratégias multiplicativas e usam, também estratégias aditivas. Tomás usa primeiro o algoritmo e depois uma estratégia aditiva. Pedro, pelo contrário, começa por utilizar a adição e em seguida recorre à multiplicação.

Na tarefa 6 os alunos recorrem apenas a estratégias multiplicativas, abandonando o uso das estratégias aditivas para resolver a segunda tarefa de multiplicação proposta, o que poderá evidenciar que estes compreenderam melhor os processos envolvidos nos cálculos que efetuaram, inventando as suas próprias estratégias multiplicativas e resolvendo corretamente o problema. Esta possível evolução nas estratégias encontra-se relacionada com o que Mendes (2013) refere no seu estudo, em que explica que, ao longo do tempo, à medida que as ideias dos alunos vão evoluindo, relativamente à multiplicação, estes passam a recorrer a outras estratégias progressivamente mais eficientes. Efetivamente, quando resolvem a tarefa 6 os alunos já tinham realizado outros problemas e, aparentemente, aprofundaram o seu conhecimento associado à multiplicação.

Como é que os alunos do 3.º ano resolvem tarefas de divisão e, em particular, usam a multiplicação na sua resolução?

A tabela seguinte sintetiza as estratégias utilizadas pelos alunos-caso para resolverem as tarefas de divisão.

Tabela 14 - Síntese das estratégias utilizadas pelos alunos caso nas tarefas de divisão

Tarefas	Estratégias		
	Tomás	Ilian	Pedro
T3	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.	Adicionar sucessivamente sem suporte na reta numérica. Resolve incorretamente.	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.
T4	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve incorretamente.	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.
T7	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.
T9	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve incorretamente.	Não resolveu.	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Resolve corretamente.

A tabela evidencia que na maioria das tarefas de divisão os três alunos recorrem a estratégias multiplicativas. Na tarefa 3, Tomás e Pedro utilizam uma estratégia de multiplicação, enquanto que Ilian recorre a uma estratégia aditiva. Por outro lado, nas tarefas 4 e 7 os três alunos recorreram a estratégias multiplicativas. Por fim, na tarefa 9, Tomás e Pedro recorrem novamente a estratégias multiplicativas, no entanto, Ilian não consegue resolver a tarefa. Apenas Ilian utiliza uma estratégia aditiva para resolver uma

tarefa de divisão, neste caso, a tarefa 3. Contudo, nas seguintes tarefas este já utiliza estratégias multiplicativas.

A análise da tabela evidencia que a estratégia mais usada pelos alunos é multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Esta preferência, poderá estar associada ao uso de produtos da tabuada.

A preferência dos alunos pela utilização de estratégias multiplicativas, para resolver as tarefas de divisão propostas, evidencia que estes já começam a conseguir compreender e a serem capazes de usar a relação entre multiplicação e divisão. Efetivamente, a resolução de problemas de divisão pode ser feita através da utilização de conhecimentos referentes à multiplicação (Brocardo, Serrazina e Rocha, 2008). É importante também salientar que a compreensão das relações parte/todo na estrutura da multiplicação, irá conduzir a uma progressão das estratégias de divisão (Fosnot e Dolk, 2001).

O facto de os alunos utilizarem maioritariamente estratégias multiplicativas na resolução de problemas de divisão poderá também estar relacionado com a realização intercalada das cadeias numéricas, em que explicitamente se fazia apelo a essa relação. Nestas, os alunos conseguiram, quase sempre, estabelecer relações entre multiplicação e divisão, interligando os vários cálculos de cada cadeia. É possível verificar que a estratégia mais utilizada pelos alunos na resolução dos cálculos das três cadeias numéricas é a utilização da multiplicação para resolver cálculos de divisão, através da tabuada, tal como era sugerido pela própria construção dos cálculos que constituíam cada cadeia numérica. Os alunos foram recorrendo a novas estratégias, o que poderá significar que foram desenvolvendo o seu raciocínio e a compreensão da relação entre estas duas operações.

Por fim, é importante mencionar os vários momentos de discussão coletiva, realizados após os alunos procederem à resolução das tarefas propostas. Este parece terem sido significativos para o desenvolvimento das estratégias dos alunos, contribuindo, provavelmente, para a passagem de estratégias aditivas para estratégias multiplicativas. Estes são momentos fundamentais para a partilha de conhecimentos, onde os alunos podem “pôr em confronto as suas estratégias, conjeturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador” (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006, 41).

Destaco as discussões que foram efetuadas após a resolução dos problemas de multiplicação e divisão em que, em conjunto com a turma, selecionávamos a estratégia mais adequada. Foi possível verificar que estes momentos foram enriquecedores significativos e levaram diversos alunos a pensarem nas estratégias consideradas mais adequadas, estratégias multiplicativas, e a pensarem e resolverem os problemas seguintes indo por esse caminho.

Staples e Colonis (2007) referem que os momentos destinados às discussões coletivas vão para além da partilha de ideias pelos alunos, construindo respostas e apoiando-se no pensamento dos colegas, ou seja, “tomam em consideração as ideias dos outros e trabalham explicitamente com essas ideias de forma a conseguir ir mais longe. Esta abordagem leva os alunos a desenvolver novos entendimentos em Matemática” (p. 258).

A exploração das cadeias numéricas também foi realizada em momentos de discussão coletiva, nos quais diversos alunos foram mencionando as suas estratégias para cada cálculo da cadeia numérica. Também neste caso os alunos se pronunciaram sobre a que consideravam mais adequada, consistindo este um momento de sistematização das principais ideias e de reflexão relativamente ao trabalho realizado. Penso que proporcionei momentos enriquecedores, que promoveram a aprendizagem da Matemática com compreensão (NCTM, 2008), isto porque permitiram aos alunos expressarem o modo como pensaram e ouvirem as estratégias dos outros colegas, através de uma linguagem que, por vezes, é mais perceptível do que a utilizada pelo professor.

A análise das duas tabelas anteriores, que sintetiza as estratégias dos alunos-caso e a análise realizada anteriormente, revela que, desde o início da intervenção, Tomás, Pedro e Ilian alteraram as estratégias utilizadas e, nos momentos de discussão coletiva, evidenciaram interesse e vontade em comunicar e partilhar as suas estratégias e os seus modos de pensar.

6.3. Reflexão Final

A presente reflexão tem como intuito realizar um balanço relativamente a todo o processo da investigação realizada. Assim, irei iniciar este momento incidindo na importância de um professor refletir sobre a sua prática e o modo como esse aspeto se repercutiu na minha prática. Por outro lado, também irei mencionar os pontos positivos

que existiram ao longo da conceção do estudo, mas também, as dificuldades ao longo do seu desenvolvimento.

Tendo por base as palavras de Ponte (2005) sobre a importância de refletir, mencionando que implica “uma consideração cuidadosa e ativa daquilo em que se acredita ou se pratica, à luz dos motivos que os justificam e das consequências que daí resultam” (p. 8), tentei delinear, num primeiro momento, os aspetos essenciais para conseguir concretizar esta investigação e obter o máximo de conteúdo para enriquecer a análise efetuada. Creio que o facto de me ter cingido a uma área do saber e a um conteúdo onde os alunos desta turma sentiam mais dificuldades, me permitiu delinear uma sequência de tarefas que foram desafiantes para a turma e a direcionaram para um contexto de aula diferente.

Ao aprofundar o meu conhecimento sobre o tema, desenvolvendo esta investigação em íntima relação com a função de professor, comecei a prever e a antecipar todos os momentos, com o intuito de conseguir dar resposta a todas as dúvidas e percecionei a importância de refletir sobre o modo como intervimos e a importância de ir adequando a prática às necessidades e interesses dos alunos. Inúmeras vezes questioneei e refleti sobre o meu papel em sala de aula, tendo em conta que todas as decisões tomadas influenciam a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

Porém, a este processo investigativo também se encontram inerentes algumas dificuldades que foram surgindo. A sua implementação constituiu um desafio, sobretudo no domínio dos conteúdos e na utilização da linguagem matemática correta. Assim, revelo que esta investigação teve como pontos positivos as leituras efetuadas para desenvolver o conhecimento adquirido e a antecipação de tudo o que iria ser implementado em sala de aula.

Centrando-me nos aspetos desafiantes durante a concretização desta investigação começo por mencionar a recolha de dados, isto porque, tendo em conta a minha inexperiência, nem sempre foi fácil fazer o registo fotográfico do que estava a ocorrer. Porém, após as primeiras intervenções conseguir colmatar alguns erros, como por exemplo, gravar alguns alunos mais de perto porque a sua voz era muito baixa e nos primeiros vídeos não se percebia, ou ter em atenção o espaço de memória do telemóvel para que este não parasse de gravar enquanto as intervenções ocorriam.

Por outro lado, a análise de dados também foi um processo complexo, no qual foi necessário uma boa gestão e organização de todos os dados recolhidos para ser mais fácil de analisar. Comecei por fazer tabelas, para conseguir organizar os dados essenciais e começar a perceber, ao longo das intervenções, o que estava a ocorrer. Porém, foi uma tarefa difícil interligar a análise com a revisão da literatura e construir uma tabela para analisar as possíveis estratégias dos alunos com base nos estudos dos autores citados. Por vezes, analisar ao ínfimo pormenor e perceber qual a estratégia que os alunos utilizaram foi complicado, mas penso que foi um aspeto bem conseguido, que me proporcionou alterações positivas.

Falando sobre a gestão de tempo, este foi um aspeto bastante desafiante, conseguir enquadrar as avaliações existentes e os conteúdos que a professora cooperante precisava de lecionar e as intervenções da minha colega de estágio. Porém, consegui realizar todas as intervenções que foram pensadas. No entanto, penso que a parte das entrevistas clínicas não correu tão bem, isto porque, devido a questões logísticas, algumas foram feitas passado algum tempo, o que teve como consequência os alunos não se lembrarem do modo como resolveram algumas tarefas. Numa próxima investigação seria um dos pontos a melhorar.

Assim, tendo em conta as dificuldades e os desafios mencionados e os aspetos positivos ressaltados, considero que foi um processo bastante enriquecedor, englobando inúmeras aprendizagens positivas para o meu percurso. Foi fundamental a possibilidade de refletir sobre as minhas aprendizagens e capacidades, obtendo uma visão diferente face a alguns aspetos da prática docente.

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: um guia prático e crítico*. Porto: Edições ASA.
- Alarcão, I. (2001). *Professor-investigador: Que sentido? Que formação?* *Cadernos de Formação de Professores*, pp. 21-30. Porto: Porto Editora.
- Almeida, J. (1990). *A investigação nas ciências sociais*. Lisboa: Presença.
- Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). *Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms*. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Baek, J. M. (2006). *Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication*. *Teaching Children Mathematics*, 12(5), 242-247.
- Bardin, I. (1994) *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições Setenta.
- Bass, H. (2003). *Computational fluency, algorithms, and mathematical proficiency: One mathematician's perspective*. *Teaching Children Mathematics*, 9(6), 322-327.
- Bell, J. (1993). *Como Realizar um Projecto de Investigação*. Lisboa: Gradiva.
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico - Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - Direcção-Geral da Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J., & Duarte, J. (2016). *Matemática para Professores do Ensino Primário*. Luanda: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J.-M. (2003). *Algoritmos e Sentido do Número*. *Educação e Matemática n.º75*, pp. 11-15.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). *O Sentido do Número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Buys, K. (2008). *Mental arithmetic*. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers

Carvalho, A., & Gonçalves, H. (Novembro/Dezembro de 2003). Multiplicação e Divisão: conceitos em construção.. *Educação e Matemática nº 75*, pp. 23-25.

Costa, A. M., & Fonseca, L. (2009). *Os números na interface da Língua Portuguesa e da Matemática*. SPIEM: Actas do XIXEIM, pp. 1-11.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teorias e prática*. Coimbra: Almedina.

Educação, M. d. (2007). *Programa e Metas Curriculares para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ferreira, N. (2002). *Caracterização do sentido do número: estudos de caso com alunos do 8.º ano de escolaridade*. (Tese de mestrado não publicada). Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work: constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann.

Freire, P. (1998). *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Greer, B. (1992). *Multiplication and division as models of situations*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Hartnett, J. (2007). *Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue*. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*. Proceedings of the thirtieth annual

conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30). I, pp. 345-352. Hobart: MERGA.

Heirdsfield, A., Cooper, T. J., Mulligan, J., & Irons, C. J. (1999). *Children's mental multiplication and division strategies*. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference, (pp. 89-96). Haifa, Israel.

Mendes, F. (2012). *A Aprendizagem da Multiplicação numa Perspetiva de Desenvolvimento do Sentido de Número: um estudo com alunos do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Mendes, F. (2013). *A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos*. Da investigação às práticas, 3 (2), 5-30.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2011). *A multiplicação: construir oportunidades para a sua aprendizagem* in M. Isoda & R. Olfos. Valparaíso, Chile.

Merriam, S. (1988). *Qualitative research and case study applications in education*. Second Edition. California: Jossey-Bass Publishers.

Ministério da Educação. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (1997). *Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division*. Journal for Research in Mathematics Education, 28, (3), 309-330.

NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2014). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: APM.

Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Piaget, J. (1987). *Possibility and Necessity*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2002). *Investigar a nossa própria prática*. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática no 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. Em G. (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Reys, B. (1994). *Promoting number sense in the middle grades*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1(2), 114-120.

Rocha, I., Rodrigues, M. & Menino, H. (2007) – *A divisão no contexto do sentido do número*. In *Desenvolvendo o sentido do número. Perspetivas e exigências curriculares*, volume II. (pp. 19-22). Lisboa: APM

Sobral, S. (2015). *Geometria e Arte: Um estudo com alunos do 2.º ano de escolaridade*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

Sousa, C. (2015). *Aprender a resolver problemas: um estudo com alunos do 2.º ano de escolaridade*. Relatório de Mestrado, Escola Superior de Educação - Instituto Politécnico de Setúbal.

Smith, S. (2003). Representation in school mathematics: Children' s representations of problems. In J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Schifter (Edits.), *Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 263-303). Reston, VA: NCTM.

Smole, K., & Diniz, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas - Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Stake, R. (2012). *A Arte de Investigação com Estudos de Caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). *Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.

Stein, M., Remillard, J. T., & Smith, M. (2007). *How curriculum influences student learning*. Em F. L. (ed), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Treffers, A., & Buys, K. (2005). Grade 2 (and 3) – *Calculation up to 100*. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics*, (pp. 61-88). Freudenthal Institute, Utrecht University & National Institute for Curriculum Development. The Netherlands: Sense Publishers.

Vilelas, J. (2009). *Investigação: O processo de construção do conhecimento*. Lisboa: Edições Sílabo.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park. Califórnia: Sage.

Zunino, D. (1996). *A Matemática na escola: aqui e agora*. Porto Alegre: Artmed.

Anexos

Anexo 1 – Enunciado da tarefa 1: Máquina de Bebidas 1.

⇒ Tarefa 1: Máquina de Bebidas 1

A escola da Maria tem uma máquina de garrafas de água e ela reparou que cada fila tem capacidade para levar 12 garrafas e na máquina existem ao todo nove filas.

Quantas garrafas de água levará a máquina?



Anexo 2 – Enunciado da tarefa 3: Máquina de Bebidas 2.

⇒ Tarefa 3: Máquina de bebidas 2

A Raquel viu uma senhora encher uma máquina de venda de garrafas de água e resolveu conversar com ela. Ficou a saber que a máquina leva 248 garrafas.

A Raquel sabe que, no supermercado, as embalagens trazem 8 garrafas de água. Então interrogou-se sobre quantas embalagens precisaria para encher a máquina. Queres ajudar a Raquel?



Anexo 3 – Enunciado da tarefa 4: Máquina de Bebidas 3.

⇒ **Tarefa 4: Máquina de bebidas 3**

A Raquel descobriu que há outra máquina de venda de sumos que também leva 248 garrafas. Nesta máquina há 8 tipos diferentes de sumo; maçã, pera, pêsego, uva, laranja, ananás, mirtilo e manga, havendo a mesma quantidade de garrafas de cada um.

Quando está cheia, quantas garrafas de sumo de cada sabor leva a máquina?



Anexo 4 – Enunciado da tarefa 6: As Miniaturas 1.

⇒ **Tarefa 6: As Miniaturas 1**

A Maria faz coleção de miniaturas de animais. Quando fez anos ofereceram-lhe 8 caixas de miniaturas, cada uma com 15 miniaturas.

Com quantas miniaturas ficou a Maria?



Anexo 5 – Enunciado da tarefa 7: As Miniaturas 2.

⇒ **Tarefa 7: As Miniaturas 2**

A Teresa também faz coleção de miniaturas de animais e tem 126 miniaturas. Quer arrumá-las em caixas, onde cabem em cada apenas 6 miniaturas.

De quantas caixas vai precisar?



Anexo 6 – Enunciado da tarefa 9: As Miniaturas 3.

⇒ **Tarefa 9: As miniaturas 3**

Para a visita ao Jardim Zoológico, organizada pela escola, os alunos foram divididos por grupos, tendo cada grupo um monitor responsável. O grupo do Guilherme ficou com 8 alunos e o grupo do Francisco com 7 alunos.

À porta do jardim zoológico cada monitor recebeu um saco com miniaturas de animais para distribuir pelos alunos do seu grupo.

O saco do grupo do Guilherme tinha 256 miniaturas e o do grupo do Francisco tinha 224.

No intervalo para o lanche cada monitor distribuiu, igualmente, as miniaturas do seu saco pelos alunos do respetivo grupo.

Achas que é justa esta partilha das miniaturas de animais?



Anexo 7 – Tarefa 2: Cadeia numérica 1/ Tarefa 5: Cadeia numérica 2 / Tarefa 8: Cadeia numérica 3.

Tarefa 2: Cadeia Numérica 1

$$4 \times 6 =$$

$$24 \div 4 =$$

$$24 \div 6 =$$

$$8 \times 6 =$$

$$48 \div 6 =$$

$$48 \div 8 =$$

$$48 \div 4 =$$

Tarefa 5: Cadeia Numérica 2

$$5 \times 8 =$$

$$40 \div 8 =$$

$$10 \times 8 =$$

$$80 \div 8 =$$

$$12 \times 8 =$$

$$96 \div 8 =$$

$$136 \div 8 =$$

Tarefa 8: Cadeia Numérica 3

$$10 \times 6 =$$

$$12 \times 6 =$$

$$72 \div 6 =$$

$$78 \div 6 =$$

$$84 \div 6 =$$

Apêndices

Apêndice 1 – Tabela de possíveis estratégias da tarefa 2 – Cadeia numérica 1.

<p>Estratégia 1: relacionar a divisão com a multiplicação, através do conhecimento das tabuadas.</p> $4 \times 6 = 24$ $24 \div 4 = 6$ porque $6 \times 4 = 24$ $24 \div 6 = 4$ $8 \times 6 = 48$ $48 \div 6 = 8$ porque $6 \times 8 = 48$ $48 \div 8 = 6$ porque $8 \times 6 = 48$ $48 \div 4 = 12$ porque $4 \times 12 = 48$	<p>Estratégia 2: utilizar relações de dobro e metade de um número.</p> <p>24 é o dobro de 12 4 é o dobro de 2 6 é o dobro de 3</p>
<p>Estratégia 3: utilizando o modelo retangular ao longo da cadeia numérica, por exemplo</p> $24 \div 4 = 6$	

4

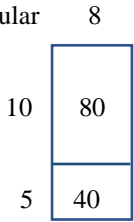
$24 = 20 + 4$
$4 \times 5 = 20$
$4 \times 1 = 4$

$5 + 1 = 6$

Apêndice 3 – Tabela de possíveis estratégias da tarefa 5 – Cadeia numérica 2.

<p>Estratégia 1: relacionar a divisão com a multiplicação, através do conhecimento das tabuadas.</p> <p>$5 \times 8 = 40$ $40 \div 8 = 5$ porque $8 \times 5 = 40$ $10 \times 8 = 80$ $80 \div 8 = 10$ porque $10 \times 8 = 80$ $12 \times 8 = 96$ $96 \div 8 = 12$ porque $12 \times 8 = 96$ $136 \div 8 = 17$ porque $8 \times 17 = 136$</p>	<p>Estratégia 2: utilizando o modelo retangular ao longo da cadeia numérica, por exemplo $40 \div 8 = 5$</p> <div style="text-align: center;"><p>8</p><table border="1" style="margin: auto;"><tr><td style="padding: 5px;">$40 = 24 + 16$</td><td rowspan="2" style="padding: 5px; vertical-align: middle;">$3 + 2 = 5$</td></tr><tr><td style="padding: 5px;">$8 \times 3 = 24$</td></tr><tr><td style="padding: 5px;">$8 \times 2 = 16$</td><td></td></tr></table></div>	$40 = 24 + 16$	$3 + 2 = 5$	$8 \times 3 = 24$	$8 \times 2 = 16$	
$40 = 24 + 16$	$3 + 2 = 5$					
$8 \times 3 = 24$						
$8 \times 2 = 16$						

Apêndice 4 – Tabela de possíveis estratégias da tarefa 6 – As Miniaturas 1.

<p>Estratégia 1: adicionar o número de miniaturas de cada caixa.</p> $15+15+15+15+15+15+15+15$ $30+30+30+30$ $60+60= \mathbf{120}$	<p>Estratégia 2: representar verticalmente a adição sucessiva do número de miniaturas de cada caixa.</p> $\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ + 15 \\ \hline 120 \end{array}$
<p>Estratégia 3: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular através do algoritmo da multiplicação</p> $\begin{array}{r} 15 \\ \times 8 \\ \hline 120 \end{array}$ <p>$8 \times 5 = 40$ $8 \times 1 = 8$ $8 + 4 = 12$</p>	<p>Estratégia 4: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular decompondo o 15, número de miniaturas de cada caixa</p> $8 \times 10 = 80$ $8 \times 5 = 40$ $80 + 40 = \mathbf{120}$
<p>Estratégia 5: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular utilizando o modelo retangular</p>  <p>$8 \times 15 = 8 \times 10 + 8 \times 5 = \mathbf{120}$</p>	<p>Estratégia 6: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular através da adição do multiplicando, primeiramente decomposto.</p> $10+10+10+10+10+10+10+10=80$ $5+5+5+5+5+5+5+5=40 \quad 40=20+20$ $80+20=100$ $100+20=\mathbf{120}$
<p>Estratégia 7: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Utilizar números de referência, neste caso o 10, próximo de 8, e compensar</p> $10 \times 15 = 150$ $150 - 15 = \mathbf{120}$	<p>Estratégia 8: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calculando adicionando repetidamente 15, fazendo</p> $15+15=30, 30+15=45, 45+15=60,$ $60+15=75, 75+15=90, 90+15=105,$ $105+15=\mathbf{120}$
<p>Estratégia 9: identificar a situação como sendo multiplicativa e os valores a utilizar. Calcular o número 15 pensado na metade de um número. $15=8+8-1$ $8 \times 15 = 8 \times 8 + 8 \times 8 = 64 + 64 = 128$ $128 - 8 = \mathbf{120}$</p>	

Apêndice 5 – Tabela de possíveis estratégias da tarefa 7 – As Miniaturas 2.

<p>Estratégia 1: calcular utilizando subtrações sucessivas do número mais pequeno (divisor) a partir do número maior. $126 \div 6 = 21$</p> <p>$126 - 6 = 120$ $120 - 6 = 114$ $114 - 6 = 108$ <u>21x</u></p> <p>...</p> <p>$12 - 6 = 6$ $6 - 6 = 0$</p>	<p>Estratégia 2: calcular utilizando adições sucessivas do número mais pequeno até fazer o número maior. $126 \div 6 = 21$</p> <p>$6 + 6 = 12$ $12 + 6 = 18$ <u>21x</u> $18 + 6 = 24$</p> <p>...</p> <p>$108 + 6 = 114$ $114 + 6 = 126$</p>		
<p>Estratégia 3: calcular utilizando a decomposição do dividendo, recorrendo à estrutura decimal e a múltiplos de dez. $126 = 120 + 6$ $120 = 60 + 60$ $10 \times 6 = 60$ $10 \times 6 = 60$ $6 \times 1 = 6$</p> <p>$10 + 10 + 1 = 21$</p>	<p>Estratégia 4: calcular utilizando múltiplos de dez. $10 \times 6 = 60$ $20 \times 6 = 120$ $6 \times 1 = 6$</p> <p>$20 + 1 = 21$</p>		
<p>Estratégia 5: calcular através do modelo retangular.</p> <div style="text-align: center;"> 6 <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$126 = 30 + 96$ $6 \times 5 = 30$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$6 \times 16 = 96$</td> </tr> </table> </div> <p>$5 + 16 = 21$</p>		$126 = 30 + 96$ $6 \times 5 = 30$	$6 \times 16 = 96$
$126 = 30 + 96$ $6 \times 5 = 30$			
$6 \times 16 = 96$			

Apêndice 6 – Tabela de possíveis estratégias da tarefa 8 – Cadeia numérica 3.

Estratégia 1: relacionar a divisão com a multiplicação, através do conhecimento das tabuadas.

$$10 \times 6 = 60$$

$$12 \times 6 = 72$$

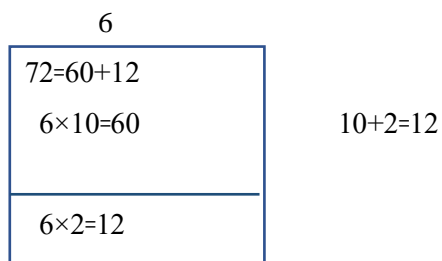
$$72 \div 6 = 12 \quad \text{porque } 12 \times 6 = 72$$

$$78 \div 6 = 13 \quad \text{porque } 13 \times 6 = 78 \text{ ou } 78 = 72 + 6$$

$$84 \div 6 = 14 \quad \text{porque } 14 \times 6 = 84$$

Estratégia 2: utilizando o modelo retangular ao longo da cadeia numérica, por exemplo

$$72 \div 6 = 12$$



Apêndice 7 – Tabela de possíveis estratégias da tarefa 9 – As Miniaturas 3.

<p>Estratégia 1: utilizar multiplicações sucessivas do número mais pequeno, a partir do número 10.</p> <p>Guilherme $256 \div 8 = 32$</p> <p>$10 \times 8 = 80$ $11 \times 8 = 88$ $12 \times 8 = 96$... $31 \times 8 = 248$ $32 \times 8 = 256$</p> <p>Francisco $224 \div 7 = 32$</p> <p>$10 \times 7 = 70$ $11 \times 7 = 77$ $12 \times 7 = 84$... $31 \times 7 = 217$ $32 \times 7 = 224$</p>	<p>Estratégia 2: utilização do modelo retangular.</p> <p>Guilherme $256 \div 8 = 32$</p> <p>$32 = 10 + 2 + 20$</p> <p style="text-align: center;">8</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p>$10 \times 8 = 80$</p> <hr style="border: 0.5px solid black;"/> <p>$2 \times 8 = 12$</p> <hr style="border: 0.5px solid black;"/> <p>$20 \times 8 = 160$</p> </div> <p>Francisco $224 \div 7 = 32$</p> <p>$32 = 20 + 12$</p> <p style="text-align: center;">7</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p>$20 \times 7 = 140$</p> <hr style="border: 0.5px solid black;"/> <p>$12 \times 7 = 84$</p> </div>
<p>Estratégia 3: adicionar os cromos do Guilherme e do Francisco e utilização do modelo retangular.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: left;"> <p>256 $+224$ <hr style="width: 50px; margin-left: 0;"/> 480</p> </div> <div style="text-align: left;"> <p>$480 \div 15 = 32$</p> <p style="text-align: center;">15</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p>$30 \times 15 = 450$</p> <hr style="border: 0.5px solid black;"/> <p>$2 \times 15 = 30$</p> </div> </div> </div> <p>$30 + 2 = 32$</p>	<p>Estratégia 4: calcular utilizando múltiplos de 10 e a adição.</p> <p>Guilherme $256 \div 8 = 32$</p> <p>$10 \times 8 = 80$ $20 \times 8 = 116$ $30 \times 8 = 240$ $240 + 8 = 248$ $248 + 8 = 256$</p> <p>$30 + 2 = 32$</p> <p>Francisco $224 \div 7 = 32$</p> <p>$10 \times 7 = 70$ $20 \times 7 = 140$ $30 \times 7 = 210$ $210 + 7 = 217$ $217 + 7 = 224$</p> <p>$30 + 2 = 32$</p>