

**Análise não linear de pórticos de betão armado:
discussão da avaliação dos efeitos de 2ª ordem**

Vinagre, J.; Camara, J.

III Encontro de Mecânica Computacional

Análise não linear de pórticos de betão armado: discussão da avaliação dos efeitos de 2ª ordem

João Vinagre

Assistente, aluno de doutoramento do IST

José Camara

Professor Associado do IST

*Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico,
Av. Rovisco Pais, 1096 Lisboa Codex, Portugal*

SUMÁRIO

Na presente comunicação abordam-se os principais problemas inerentes à quantificação dos efeitos de 2ª ordem na verificação da segurança de estruturas porticadas de betão armado quer na definição de métodos simplificados quer na utilização directa de análises não lineares.

Apresenta-se a formulação desenvolvida para a análise física e geometricamente não linear de pórticos planos de betão armado, implementada num programa de cálculo automático. As causas de não linearidade são analisadas separadamente, apresentando-se os aspectos de comportamento relativos a cada um dos efeitos não lineares e os modelos numéricos adoptados na sua simulação.

Em conclusão apresentam-se os resultados da aplicação, a um exemplo prático, do programa de cálculo desenvolvido discutindo-se neste contexto algumas das disposições regulamentares de contabilização dos efeitos de 2ª ordem no dimensionamento deste tipo de estruturas. Apresentam-se também os objectivos futuros dos estudos em curso neste âmbito.

1. INTRODUÇÃO

A quantificação dos efeitos de 2ª ordem na verificação da segurança de estruturas porticadas de betão armado quer para a definição de métodos simplificados quer na utilização directa de uma análise com consideração dos efeitos geométricos e fisicamente não lineares não é simples de resolver. Talvez por essa razão a evolução, na regulamentação, das metodologias de avaliação simplificada destes efeitos tem vindo a complicar-se. De facto, como analisado por Bártolo, Camara e Vinagre [2], as normas regulamentares europeias mais recentes, Eurocódigo 2 (EC2) [5] e Model Code 90 (MC90) [3], propõem processos morosos de contabilização desses efeitos e com certas disposições que não são fáceis de compreender.

Do nosso ponto de vista podem referir-se os seguintes aspectos principais que merecem uma reavaliação na metodologia de cálculo:

1. definição dos tipos de estruturas em que podem ser significativos os efeitos de 2ª ordem e para os quais é importante a sua consideração;
2. nos casos em que essa consideração é necessária, definição dos processos simplificados para a quantificação daqueles efeitos.

Em relação ao primeiro aspecto as disposições do EC2 e MC90 — necessidade de absorção de 90% das forças horizontais por paredes para que a estrutura seja considerada contraventada — são irrealistas, particularmente em zonas sísmicas, podendo, por via disso, ser-se mesmo conduzido a más concepções estruturais. Em relação à avaliação dos efeitos de 2ª ordem constata-se, por um lado, um desajustamento grave nas duas regulamentações referidas e, por outro, verifica-se que os estudos de base na sua quantificação se basearam sempre em pilares isostáticos sem ter em consideração a hiperstaticidade da estrutura — efeito indiscutivelmente favorável — e sem contemplar o efeito global, em edifícios altos, dos deslocamentos dos pisos superiores nos incrementos dos esforços dos pilares inferiores.

Um processo de cálculo regulamentar não deve, em nosso entender, ter um grau de sofisticação desajustado às aproximações e hipóteses inerentes à sua própria definição. Este ponto de vista aplica-se, com bastante sentido, aos modelos que se pretendem simplificados de avaliação dos efeitos de 2ª ordem nas estruturas.

No caso da utilização de análises física e geometricamente não lineares, quer para a avaliação da segurança de uma dada estrutura quer para a implementação de estudos de quantificação dos efeitos de 2ª ordem na segurança estrutural, levantam-se também algumas questões para as quais não existe consenso generalizado:

1. definição do critério que permite avaliar a partir de quando é que os efeitos de 2ª ordem devem ser considerados significativos;
2. definição dos modelos de comportamento dos materiais a adoptar na análise não linear;

3. definição da história de carga mais apropriada para a aferição deste efeito.

Em relação ao ponto 1 verifica-se que as definições do EC2 e MC90 não são coincidentes apesar de à primeira vista parecerem equivalentes. Para o MC90 os métodos simplificados (por exemplo desprezar os efeitos de 2ª ordem) não devem conduzir a reduções da capacidade resistente da estrutura ou do elemento estrutural em estudo excedendo 10% em relação à capacidade avaliada com base numa análise rigorosa de 2ª ordem. Esta é uma definição geral abrangendo estruturas e elementos estruturais, de simples compreensão e que não levanta dúvidas de interpretação. No entanto, a definição do EC2 refere a percentagem de 10% em relação aos esforços de flexão sem clarificar para que nível de carga e, no caso de uma estrutura hiperstática, se se refere a uma qualquer secção (que consideramos uma hipótese extremamente desfavorável e inconsistente), a uma variação média no piso ou a outro critério.

No que respeita ao ponto 2 os autores desta comunicação são de opinião que nas análises não lineares se devem tomar relações σ - ϵ únicas para os materiais. Desta forma evitam-se descontinuidades entre a fase de serviço e a rotura impossíveis de contemplar num processo racional de análise estrutural incremental. Propõem-se, assim, relações σ - ϵ para o betão e para o aço que permitam uma simulação global correcta na fase de serviço (em particular com consideração de um módulo de elasticidade realista para o betão e tendo em linha de conta o efeito do betão à tracção) e de que resultem capacidades resistentes das secções equivalentes às obtidas pelos critérios usuais de avaliação de segurança. Assim, em análises não lineares devem adoptar-se os seguintes factores de segurança para o betão:

- módulo de elasticidade : E_c/γ_c . O valor de γ_c deve ser, em geral, igual a 1.0 e, nos casos em que avaliação dos efeitos de 2ª ordem sejam significativos, igual a 1.2 — valor também proposto pelo MC90.
- resistência do betão à compressão: $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$. O valor de γ_c deve, em geral, ser igual a 1.5 e não, como proposto pelo MC90, igual a 1.2 e 1.5 para a avaliação da deformabilidade da estrutura e da resistência das secções, respectivamente.
- efeito da resistência do betão à tracção com f_{ctm} não afectado por coeficientes de segurança e sem alteração da capacidade resistente à flexão.

Na figura 1 indicam-se os modelos para o betão resultantes destas hipóteses assim como o do aço em relação ao qual não se levantam quaisquer questões.

Como resultado das hipóteses admitidas que permitem a utilização de relações únicas obtêm-se diferenças não significativas em relação à proposta do MC90. Assim, a deformabilidade das zonas fortemente comprimidas será sensivelmente superior por f_{cd} ser mais baixo e a capacidade resistente da secção ligeiramente superior pelo facto do módulo de elasticidade do betão, na origem, ser E_c (superior ao da parábola convencional de cálculo à rotura).

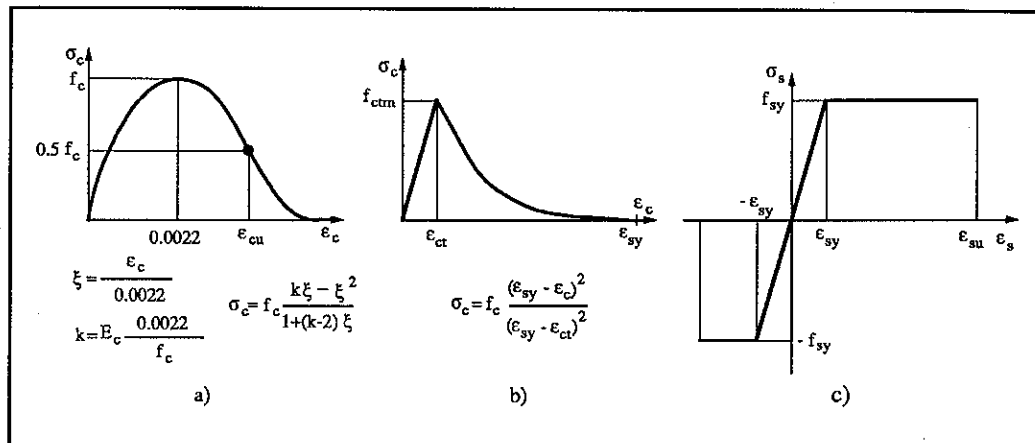


Figura 1 - Diagramas tensões-extensões: a) betão comprimido; b) betão traccionado; c) aço.

Em relação ao ponto 3 diferentes hipóteses têm sido admitidas por vários autores como Menegotto [8], Cauvin [4], Macchi [7], Ró e Moran [10]. Pretende-se ainda avaliar as implicações das diferentes metodologias tendo-se adoptado, no exemplo apresentado neste artigo, por aplicar primeiro as acções não majoradas (equivalente às combinações raras de acções) e posteriormente aplicar um parâmetro de carga λ que mede, de certa forma, o coeficiente de segurança parcial afecto às acções.

2. ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE BETÃO ARMADO

Apresenta-se seguidamente a formulação desenvolvida para a análise não linear de pórticos planos de betão armado. Os efeitos geometricamente não lineares são considerados com base numa descrição exacta das condições de equilíbrio e de compatibilidade da estrutura expressa em termos das variáveis totais a partir das quais se deduzem as correspondentes equações na forma incremental. No que respeita às relações constitutivas incrementais dos elementos de betão armado elas são estabelecidas em relação a um referencial local do elemento, definido pela linha que une as suas extremidades na configuração deformada, admitindo-se que as deformações independentes são pequenas. Esta hipótese tem a vantagem de permitir separar, na formulação do problema, os efeitos fisicamente não lineares, considerados no referencial local do elemento deformado, dos geometricamente não lineares e é correntemente adoptada em análises não lineares incrementais de estruturas.

Considerou-se a estrutura decomposta em elementos finitos (de geometria constante ou variável) com três graus de liberdade por nó, discretizados em diversas secções interiores nas quais se concentram os efeitos fisicamente não lineares introduzidos com base nas relações constitutivas dos materiais intervenientes.

2.1. Efeitos fisicamente não lineares

Para além dos efeitos dependentes do factor tempo a não linearidade física de uma estrutura de betão armado é, principalmente, função da fendilhação do betão e da interacção aço-betão nessas regiões, do comportamento não linear do betão

comprimido e do comportamento elasto-plástico do aço. Para o betão comprimido adoptou-se uma relação tensão-deformação expressa, em termos médios, pela curva representada na figura 1a) e proposta pelo CEB para a utilização em análise não linear. O comportamento do betão à tracção é fundamentalmente caracterizado pela sua resistência média, utilizando-se, em geral, um módulo de elasticidade igual ao adoptado para a compressão. Para ter em conta o comportamento do elemento de betão entre o início da fendilhação e a cedência da armadura considerou-se a relação indicada na figura 1b). O comportamento do aço pode, em geral, ser expresso de forma suficientemente aproximada por um diagrama elasto-plástico perfeito caracterizado pelo módulo de elasticidade e pelo valor da tensão de cedência (figura 1c).

Adoptando as hipóteses simplificativas relativas ao comportamento de uma secção transversal (hipótese de Navier-Bernoulli de distribuição linear de extensões ao longo da altura da secção) é possível obter a extensão de uma fibra genérica duma secção de abcissa x de um elemento através da expressão:

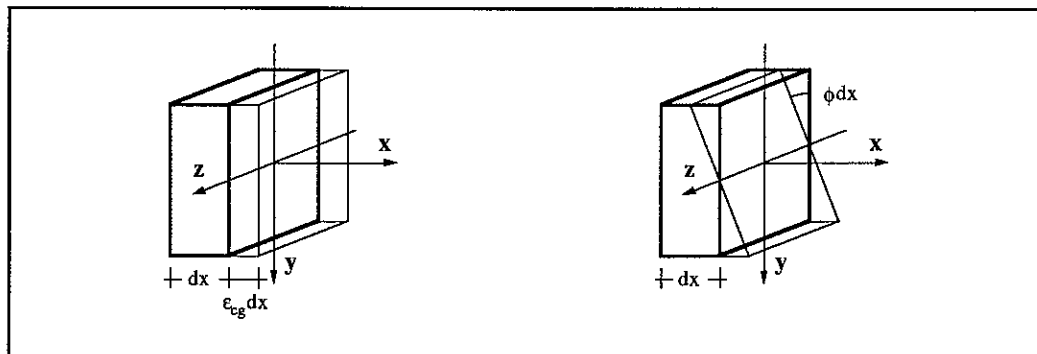


Figura 2 - Deformações independentes das secções.

$$\varepsilon(x,y) = \varepsilon_{cg}(x) + y \phi(x) \quad (1)$$

Conhecidas as extensões o recurso às relações constitutivas dos materiais permite escrever:

$$\sigma(x,y) = E(x,y) \cdot \varepsilon(x,y) = E(x,y) \cdot [\varepsilon_{cg}(x) + y \phi(x)] \quad (2)$$

Estabelecendo o equilíbrio na secção de abcissa x obtém-se:

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma(x,y) \, dA = \\ &= \varepsilon_{cg}(x) \int_A E(x,y) \, dA + \phi(x) \int_A y E(x,y) \, dA \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_A y \sigma(x,y) \, dA = \\ &= \varepsilon_{cg}(x) \int_A y E(x,y) \, dA + \phi(x) \int_A y^2 E(x,y) \, dA \end{aligned} \quad (4)$$

o que, na forma matricial, resulta:

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A E(x,y) dA & \int_A y E(x,y) dA \\ \int_A y E(x,y) dA & \int_A y^2 E(x,y) dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cg}(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

A inversão desta expressão permite obter, em cada secção, as deformações independentes associadas aos esforços que a solicitam:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{cg}(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Admitindo não existirem cargas no vão os esforços que actuam numa secção de abcissa x ficam definidos em função dos esforços que solicitam as secções extremas (esforços independentes do elemento: M_1 , M_2 e N) através das expressões:

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Os deslocamentos independentes da barra (rotações dos extremos em relação à corda, θ_1 e θ_2 , e alongamento desta, u_n) podem obter-se através da integração das deformações das diversas secções em que o elemento se encontra discretizado:

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^L \varepsilon_{cg}(x) dx \\ \theta_1 &= \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \phi(x) dx \\ \theta_2 &= \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) \phi(x) dx \end{aligned} \quad (8)$$

Introduzindo em (8) as equações (6) e (7) resulta:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 S_{22}(x) dx & \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) S_{22}(x) dx & \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) S_{21}(x) dx \\ \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) S_{22}(x) dx & \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 S_{22}(x) dx & \int_0^L \frac{x}{L} S_{21}(x) dx \\ \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) S_{21}(x) dx & \int_0^L \frac{x}{L} S_{21}(x) dx & \int_0^L S_{11}(x) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N \end{Bmatrix} \quad (10)$$

que, por inversão, permite obter a matriz de rigidez do elemento.

2.2. Efeitos geometricamente não lineares

Os efeitos geometricamente não lineares foram considerados tomando como base uma descrição exacta das condições de equilíbrio e compatibilidade como apresentadas em [6, 1]. As relações assim obtidas, expressas em termos de variáveis totais, são não lineares por se admitirem, no estabelecimento das equações de compatibilidade, grandes deslocamentos e por se definirem as condições de

equilíbrio do elemento na sua configuração deformada. Por forma a utilizar as equações obtidas num processo iterativo torna-se necessário exprimi-las na sua forma incremental desenvolvidas a um nível elementar e sendo posteriormente agrupadas para a obtenção das equações de equilíbrio e compatibilidade de toda a estrutura. Na figura 3 representa-se um elemento genérico, nas suas configurações inicial e deformada, assim como as grandezas necessárias à caracterização dos deslocamentos nodais e deformações do elemento.

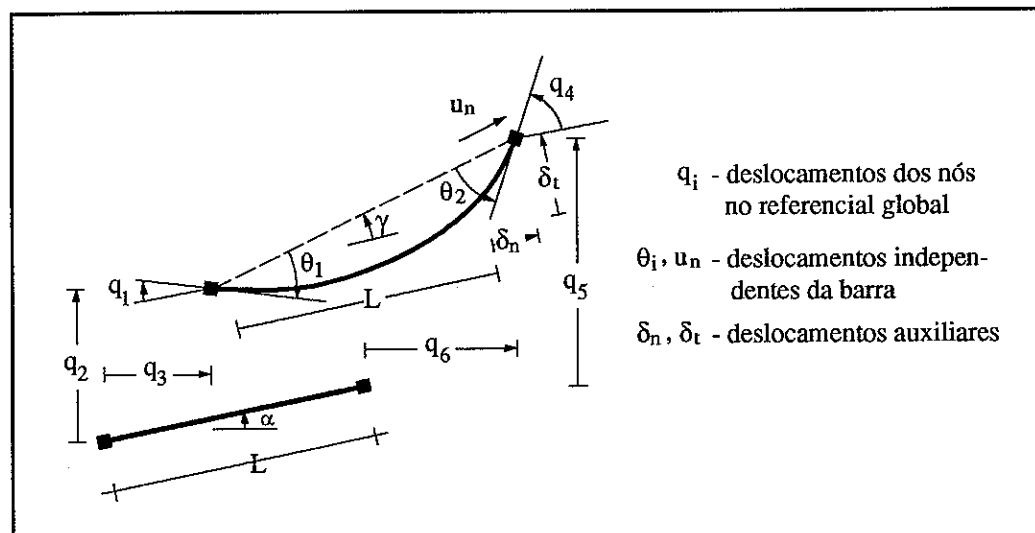


Figura 3 - Deslocamentos dos nós e deformações independentes do elemento.

3. MÉTODO ITERATIVO

A formulação atrás descrita deu origem a um sistema de equações não lineares. Não sendo conhecidas as relações constitutivas dos elementos (estas são definidas através das suas matrizes de rigidez tangente e secante) e sendo as relações constitutivas dos materiais não lineares, o método de resolução adoptado consistiu num processo iterativo a três níveis: ao nível da estrutura, dos elementos e das secções.

A técnica adoptada de resolução do sistema de equações globais da estrutura foi a de Newton-Raphson com correcções de equilíbrio — figura 4a). De acordo com este método a aplicação de um incremento de carga é efectuada por duas fases:

- aplicação do incremento de carga

O processo de resolução inicia-se com a montagem da matriz de rigidez tangente da estrutura e dos vectores de forças nodais estaticamente equivalentes ao carregamento (numa primeira fase são aplicados sucessivos incrementos das acções com carácter permanente seguidas das acções variáveis, afectadas de um parâmetro de carga, até se obter o colapso da estrutura). Calculados os deslocamentos globais correspondentes à solicitação e obtidos os esforços nos diversos elementos em que a estrutura se encontra discretizada determinam-se as forças interiores em equilíbrio com os esforços obtidos.

- sucessivas correcções de equilíbrio

Como a resposta da estrutura é não linear existe um desequilíbrio entre as forças interiores e as acções exteriores. Este desequilíbrio constitui o novo carregamento da estrutura reiniciando-se o processo e calculando-se uma nova solução. O objectivo destas operações é o de reduzir (anular) o desequilíbrio entre as forças interiores resultantes do campo de deslocamentos instalados na estrutura e as forças exteriores aplicadas nos nós, terminando-se quando é verificado o critério de convergência adoptado.

Uma vez calculados os deslocamentos independentes dos elementos que compõem a estrutura torna-se necessário determinar quais os esforços a eles associados. O método de Newton-Raphson aplicado aos elementos, figura 4b), com recurso às matrizes de rigidez tangente e secante (obtidas a partir das matrizes de rigidez das diversas secções que o compõem) consistiu em:

- estimar os esforços associados às deformações

Conhecidos os acréscimos de deslocamentos independentes dos elementos o processo iterativo inicia-se com o cálculo dos esforços a partir da matriz de rigidez tangente e consequente determinação das deformações das secções em que o elemento está discretizado.

- sucessivas correcções por forma a garantir a compatibilidade com as deformações do elemento

Com recurso às novas matrizes de rigidez tangente e secante do elemento, calculadas para a nova situação de deformação, desenvolve-se o processo iterativo até se verificar o critério de convergência adoptado.

No cálculo das matrizes de rigidez do elemento, o qual envolve a integração dos coeficientes das matrizes das diversas secções que o compõem, adoptou-se a regra de integração de Lobatto por esta conter as secções de extremidade e por utilizar funções de interpolação mais fortes que as de Simpson, permitindo assim uma discretização num menor número de secções.

Estimados, em cada iteração, os esforços de extremidade do elemento ficam conhecidos os esforços nas suas diversas secções interiores. O cálculo das de-

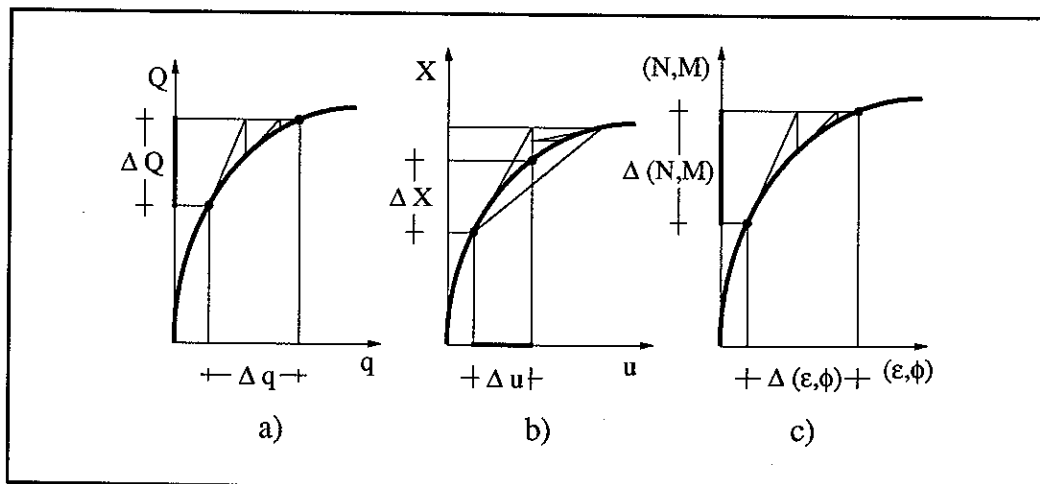


Figura 4 - Esquemas dos processos iterativos: a) na estrutura; b) no elemento; c) na secção.

formações independentes da secção é então efectuado num novo processo iterativo de Newton-Raphson com correcções de equilíbrio, idêntico ao adoptado para a iteração global ao nível da estrutura.

Nos processos iterativos descritos, e tendo por objectivo evitar os problemas de convergência usuais neste tipo de análise, procurou-se impedir acréscimos das variáveis intervenientes muito superiores aos obtidos na iteração anterior, otimizar o processo iterativo através do recurso à técnica de *line-search* e evitar o problema das falsas descargas.

4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Na figura 5a) encontra-se esquematicamente representado o pórtico analisado e os valores e distribuições das acções que o solicitam: uma de carácter permanente (CP) e uma sobrecarga de utilização (SC).

Através de um cálculo elástico da estrutura para a combinação de acções (1.35 CP + 1.50 SC) obteve-se o diagrama de esforços indicado na figura 5b). Procedeu-se em seguida ao dimensionamento das diversas secções para as duas situações seguintes:

Caso 1 - dimensionamento para os esforços elásticos;

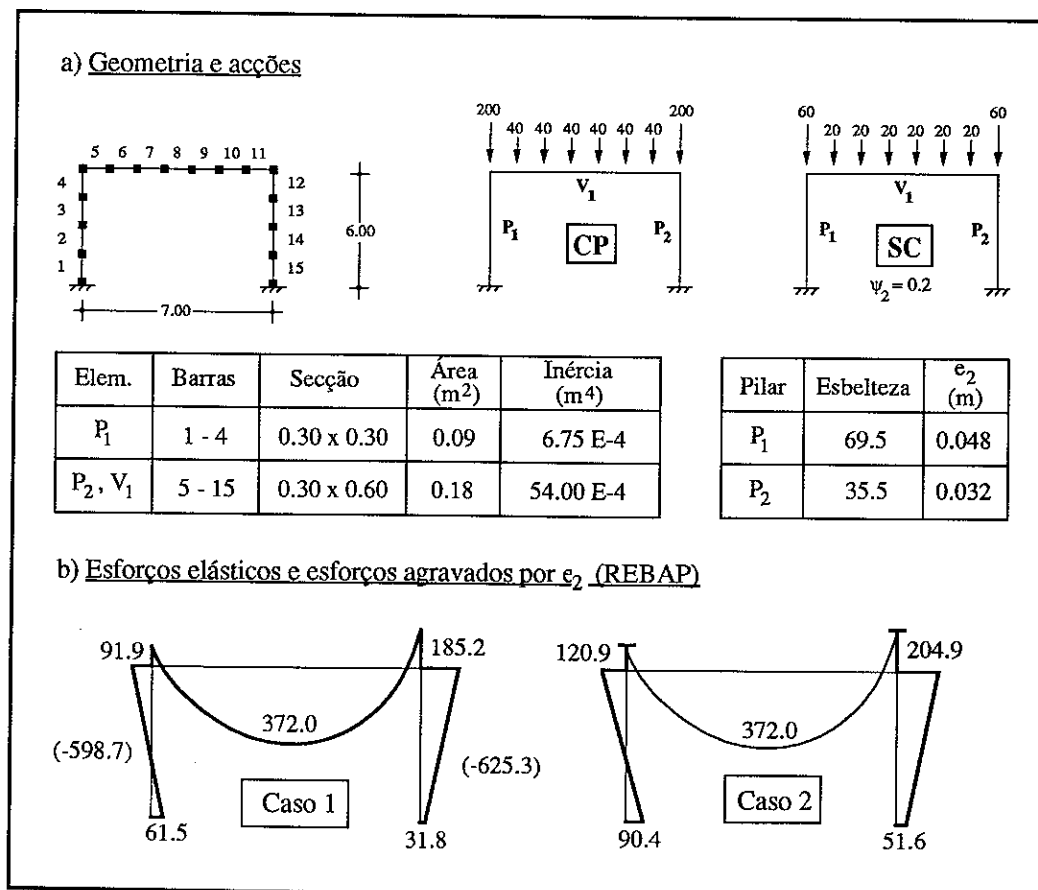


Figura 5 - Exemplo de aplicação: a) geometria e acções; b) esforços elásticos e esforços agravados por e₂ (REBAP) [9].

Caso 2 - dimensionamento para os esforços elásticos agravados da excentricidade de 2ª ordem calculada de acordo com o REBAP [9] (a estrutura foi considerada de nós móveis e desprezaram-se as excentricidades acidentais e de fluência).

No dimensionamento das secções adoptaram-se as relações constitutivas preconizadas pelo REBAP e as secções extremas da viga foram, no caso 2, dimensionadas para valores de momentos iguais aos obtidos nas cabeças dos pilares. As áreas de armadura assim obtidas encontram-se representadas na figura 6a). A armadura de cálculo obtida para o pilar P2 e considerada no estudo que se seguiu foi, em ambos os casos, inferior à armadura mínima regulamentar (5.40 cm² por face).

Por último procedeu-se a uma análise física e geometricamente não linear dos dois pórticos tendo sido aplicada a seguinte história de cargas:

1ª fase: as acções quase-permanentes — $1.0 CP + \psi_2 SC$;

2ª fase: restantes cargas — $\lambda [0.35 CP + (1.5 - \psi_2) SC] / 1.5$. Estas foram assim definidas por forma a que ao parâmetro de carga $\lambda = 1.5$ correspondesse a combinação de acções de dimensionamento dos pórticos.

Na figura 6b) encontram-se representados esquematicamente os esforços obtidos assim como os parâmetros de carga atingidos para as duas situações analisadas.

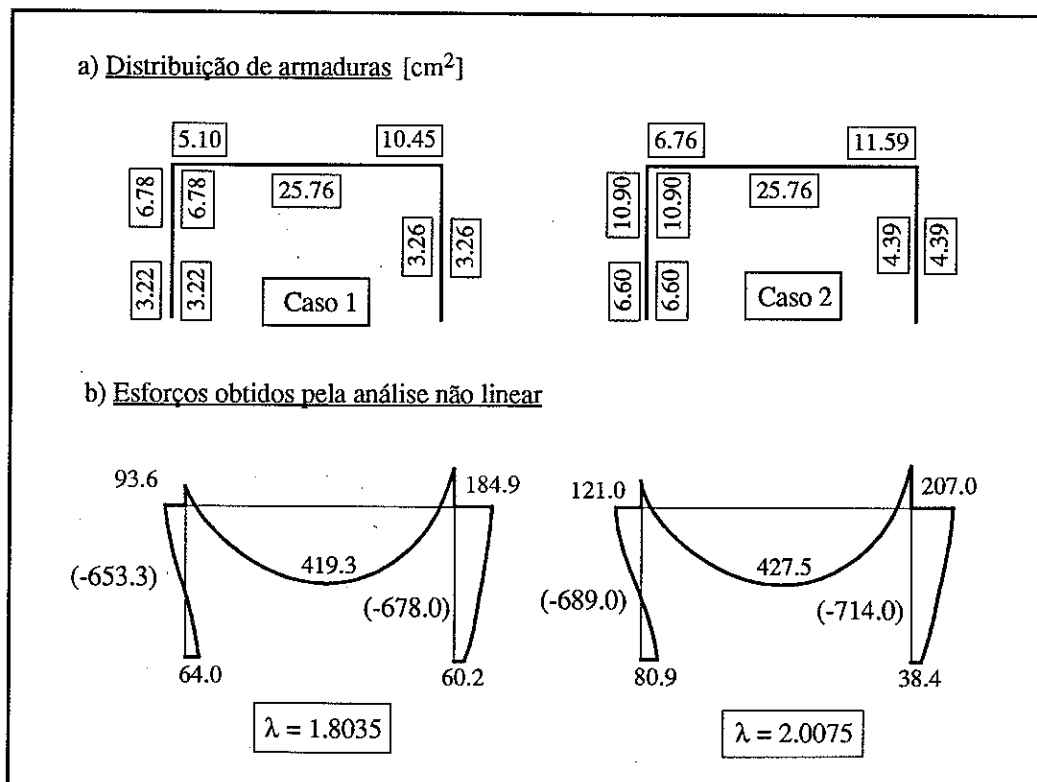


Figura 6 - Exemplo de aplicação: a) distribuição de armaduras sem/com consideração da excentricidade de 2ª ordem; b) esforços obtidos pela análise não linear.

No dimensionamento das secções das vigas não foi considerado o efeito favorável do esforço axial nela existente, procedimento este usual em projecto. Aquele foi responsável, na análise não linear efectuada, pelo acréscimo dos esforços resistentes da viga e, conseqüentemente, pelo acréscimo de resistência do pórtico. No caso 2 o efeito é ainda mais acentuado por se terem dimensionado as secções extremas das vigas para momentos iguais aos dos pilares, aspecto este não referido na regulamentação mas necessário para permitir o acréscimo de esforços nos pilares.

5. CONCLUSÕES

Com o exemplo apresentado pretendeu-se ilustrar uma situação em que um pilar muito esbelto apresenta um comportamento significativamente diferente daquele que teria se fosse considerado como pilar isolado, tratamento este indicado pela regulamentação para a resolução deste tipo de situações. O efeito de hiperstática do pórtico associado à existência de um elemento muito menos esbelto condicionam e alteram a sua resposta.

Apesar de se tratar de um pilar de esbelteza elevada ($\lambda = 69.5$) e estar submetido a um esforço axial reduzido $v \approx - 0.5$ a não consideração dos efeitos de 2ª ordem não afectou o nível de segurança requerido para a estrutura. A consideração daqueles efeitos só fez, neste caso, sobredimensionar a estrutura.

Em conclusão, neste artigo procurou-se salientar a necessidade de clarificação das situações em que os efeitos de 2ª ordem sejam relevantes no dimensionamento de pilares de estruturas de betão armado e na forma correcta da sua quantificação. O recurso a um programa de análise não linear, como o desenvolvido, permite analisar e, eventualmente, esclarecer diversas problemáticas inerentes a este tipo de problemas.

Pretende-se ainda, como desenvolvimentos futuros, incluir no programa de cálculo automático elementos que simulem o comportamento de paredes de betão armado e efectuar estudos paramétricos para a aferição e quantificação das principais variáveis envolvidas neste problema.

6. REFERÊNCIAS

- [1] - Almeida, J.: "Comportamento não linear e verificação da segurança de pontes atirantadas de betão", Tese de doutoramento, IST, Lisboa, Setembro 1989.
- [2] - Bártolo, A.; Camara, J.; Vinagre, J.: "Disposições regulamentares relativas ao dimensionamento de pilares de estruturas de betão armado", 2ªs Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Tema A, LNEC, Lisboa, Novembro 1990, pag. A305-A316.
- [3] - Bulletin d'Information n° 196, CEB-FIP Model Code 1990, First Draft, Mars 1990.
- [4] - Cauvin, A.: "Non-linear analysis of a multistorey sway frame according to CEB Model Code", CEB Bulletin d'Information n° 134, Avril 1978.

- [5] - Eurocode nº 2: "Design of Concrete Structures", Final Draft, Luxembourg, December 1989.
- [6] - Freitas, J.: "The elastoplastic analysis of planar frames for large displacements by mathematical programming", Ph.D. Thesis, University of London, 1979.
- [7] - Macchi, G.: "Non-linear analysis of concrete structures. Code problems and application", CEB Bulletin d'Information nº 134, Avril 1978.
- [8] - Menegotto, M.: " Observations on slenderness bounds for r.c. columns", CEB Bulletin d'Information nº 155, September 1983.
- [9] - Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, Imprensa Nacional — Casa da Moeda, Lisboa 1984.
- [10] - Río Suárez, O.; Moran Cabré, F.: "Limites de esbeltez para soportes de hormigon armado", Informes de la Construction, vol. 38, nº 388, Marzo-Abril 1987.