*Dedico este trabalho,*

*Aqueles que muito ou pouco me incentivaram a termina-lo,*

*E acima de tudo ao meu filho, Santiago Henriques.*

*Agora sentirás sempre orgulho, não desisti!*

# Índice

## Agradecimentos

Este trabalho não teria sido terminado sem a contribuição de muitas pessoas. Nesse sentido quero, amavelmente, expressar os meus enormes agradecimentos a todas elas, que de distintas formas fizeram parte deste processo de crescimento pessoal. É impossível descrever todas as pessoas que me apoiaram, mas estarei grata eternamente por todo o apoio e pressão que me fizeram conseguir concretizar este trabalho.

O meu agradecimento especial à Professora Joana Brocardo, minha orientadora, pela mestria e amabilidade com que se disponibilizou para me mostrar quais os caminhos a percorrer ao longo desta etapa. Demonstro aqui a minha infindável admiração pela sua sabedoria, dedicação, paciência e respeito.

Aos meus pais que fizeram um esforço enorme para me oferecerem os estudos, retiraram deles para me puderem ajudar a realizar o meu sonho e ser a Educadora/Professora que sempre sonhei, só trabalhando com crianças serei uma pessoa realizada.

Ao meu marido, graças a ele lutei até ao fim, apoiou-me e mostrou-me que era capaz de terminar o curso que eu tanto queria mas que pela vida parecia tão distante. Nunca me deixou desistir! Um agradecimento muito especial também ao meu filho faria tudo por ele e tudo o que quero é o seu orgulho.

Ao meu irmão, simplesmente por ser o melhor irmão do mundo e me apoiar sempre.

À minha amiga Patrícia Quintas, também ela nunca desistiu de mim, e bastou um “empurrãozinho” para não parar mais e por isso mesmo conseguir terminar, obrigada, sem ela não teria conseguido.

A todos aqueles que não mencionei aqui, mas que me fizeram realizar este sonho, o meu muito obrigada, guardarei para sempre cada palavra de apoio e incentivo e saberei sempre porque o consegui.

## Resumo:

Este é o Projeto Final, conclusivo do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico. Baseou-se num projeto iniciado em 2012, ‘Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos’.

Propus-me como objetivo principal do meu projeto final responder à questão: “ Qual o conhecimento pessoal que os alunos usam para resolver tarefas de multiplicação?”. O quadro teórico integra uma temática essencial: a multiplicação, explicando as suas propriedades, a sua aprendizagem e por fim, o papel do professor.

O método para este estudo enquadra-se nas características da investigação qualitativa e considerando o estudo a realizar, este enquadra-se no paradigma interpretativo. O método de recolha de dados utilizado foi a entrevista clínica, realizada a 4 alunos de 3º ano propondo uma tarefa de multiplicação.

As conclusões sobre o conhecimento pessoal dos alunos na resolução da tarefa matemática evidenciam que: (i) um dos alunos demonstra estar na fase inicial da aprendizagem da multiplicação, formação de grupos utilizando a adição; (ii) o segundo aluno demonstra não necessitar de suportar os seus cálculos no seu significado; (iii) outro dos alunos utiliza a tabuada para resolver a tarefa; (iv) o quarto aluno demonstra dominar a multiplicação por 10, mas não domina outros procedimentos que podiam apoiar uma passagem mais rápida do cálculo.

Apesar dos entrevistados serem todos alunos do 3º ano, com a mesma idade e apreciadores de matemática, pude concluir que cada um deles está em fases diferentes da aprendizagem da multiplicação.


**Palavras-Chave:** Aprendizagem da multiplicação; Entrevistas Clinicas; Tarefa matemática.

## Abstract:

This is the Final Project, conclusive of the Master in Preschool Education and Teaching of the 1st Cycle of Primary School.

This paper aims to answer the question: “Which personal knowledge students use to solve multiplication tasks?”. The theoretical framework includes a short discussion focused on multiplication, in its properties, learning. Included is also a small analysis and the teacher's role as a promoter of student learning.

The method used in this study fits in the characteristics of qualitative research and, considering the study to be performed, this is part of the interpretative paradigm. The data collection method used was a clinical interview, conducted to 4 students of 3rd year during which they exploited a multiplication task.

The conclusions on the personal knowledge of students in solving the mathematical task demonstrate that: (i) one student proves to be in the initial phase of the multiplication learning through the formation of groups with the same number of elements and using the addition; (ii) another student shows an ability to reason formally, without having to bear his calculations in its meaning; (iv) other student uses the multiplication table to solve the task; (iv) the fourth student demonstrates to master the multiplication by 10, but doesn’t dominate other procedures that could support a faster calculation passage.

Although the interviewed are all students of the 3rd year, with the same age and math lovers, I was able to conclude that each is at different stages of the learning multiplication.


**Keywords:** Multiplication learning; Clinical interviews; Mathematical task.

# 1.Introdução

Até iniciar a licenciatura em Ensino Básico nunca tinha tido uma avaliação positiva em Matemática. No entanto, percebi que nessa etapa da minha vida não podia continuar a deixar disciplinas para trás e foi nessa altura que o desafio se tornou mais interessante do que a aversão que sentia. Por este motivo e também pelas excelentes professoras que tive a sorte de conhecer durante a licenciatura, decidi enfrentar o medo de infância e escolher a Matemática como foco do projeto em que se incide o meu relatório de mestrado.

Também optei por trabalhar na área da matemática por considerar importante motivar as crianças a gostarem desta ciência, uma vez que está presente nas mais diversas situações do quotidiano desafiando-as e confrontando-as com a resolução dos mais variados problemas

Inicialmente foquei-me na aprendizagem da multiplicação com recurso a materiais manipuláveis. Pareceu-me fundamental partir de um contexto próximo da criança, manipulando materiais com os quais sentem familiaridade, pois “O desafio para os professores é (…) propor tarefas que se adaptem aos interesses dos alunos e estimulem a sua aprendizagem matemática.” (DGIDC, 2008). Ou seja, é importante promover conexões com a vida real, devendo partir de experiências/interesses dos alunos, uma vez que é fundamental tornar mais concreto uma ciência que envolve relações abstratas entre objetos. Também optei por este tema tendo em conta as dificuldades que os alunos do 3.º ano da turma em que estagiei no ano letivo de 2011/2012 sentiam na aprendizagem da multiplicação e por verificar que tinham maior facilidade de resolução de problemas de multiplicação quando os recorriam ao uso de materiais manipuláveis.

De facto, a dificuldade na resolução de problemas com incidência na multiplicação, foi visível com a realização de tarefas a partir de fichas elaboradas por mim e pela minha colega, no decorrer da prática pedagógica. Nalguns casos, a sua resolução apenas foi possível com recursos à utilização de materiais manipuláveis.

Embora inicialmente este tenha sido o tema escolhido, a dada altura este deixou de fazer sentido. Na altura em que me foi comunicado quem seria a minha orientadora do projeto final, o estágio e por consequência a minha observação e participação estavam no final e por isso o material recolhido não era adequado para analisar as dificuldades sentidas pelos alunos e observadas por mim. Se neste momento fosse colocada numa outra sala de 3.º ano, a probabilidade de as dificuldades desse grupo serem iguais às do grupo anterior, onde estive inserida uns meses, era remota e fazer toda uma nova observação e participação exigia tempo, e todo um processo de acompanhamento. Todavia, não tenho esse tempo e por este mesmo motivo a professora propôs-me trabalhar na área de um projeto que coordena. Neste projeto - '*Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* - são utilizados entrevistas clínicas cuja análise tem constituído a primeira fase do projeto, focada na conceção de tarefas adequadas ao estudo da flexibilidade de cálculo.

O projeto iniciou-se no ano de 2012 mas foi o ano de 2013 que marcou o início do desenvolvimento sistemático do projeto 'Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos', cuja equipa integra docentes das Escolas Superiores de Educação de Setúbal, Lisboa e Portalegre. Este projeto tem como principais objetivos:

- Identificar os conhecimentos conceptuais dos alunos que estão em jogo nos diferentes níveis de compreensão das operações/relações numéricas;

- Analisar se, e como, estes conhecimentos lhes permitem usar flexivelmente o cálculo mental;

- Estudar as implicações para a construção e exploração de tarefas, a formação de professores e a avaliação diagnóstico do desenvolvimento do cálculo mental.

Usando tarefas desenvolvidas por este projeto realizo e analiso entrevistas clínicas com o objetivo de responder à questão:

- Qual o conhecimento pessoal que os alunos usam para resolver tarefas de multiplicação?

Neste estudo, e seguindo o que Kraemer, Brocardo, Mendes e Delgado (2014) consideram, o conhecimento pessoal dos alunos inclui as ideais e procedimentos que os alunos usam para resolver tarefas matemáticas. Este conhecimento revela-se não só nas estratégias e soluções propostas mas também na abordagem inicial de exploração.

O presente projeto encontra-se dividido em três partes fundamentais, sendo que a primeira está direcionada para a fundamentação teórica, no qual se apresentam as linhas orientadoras que justificam a problemática em estudo, nomeadamente, a Multiplicação, a

Aprendizagem da Multiplicação, e por fim o Papel do Professor. A segunda parte descreve a metodologia de investigação que o sustenta e a sua fundamentação, assim como a técnica de recolha escolhida e utilizada para o tratamento dos dados recolhidos. Como término deste capítulo explicitam-se os procedimentos efetuados e as fases de implementação do projeto de intervenção investigativa.

O terceiro capítulo do relatório destina-se à apresentação e interpretação dos dados recolhidos, através da análise documental realizada.

Terminando as três partes estruturantes do trabalho, apresentam-se as conclusões finais do projeto.

# 2.Quadro Teórico

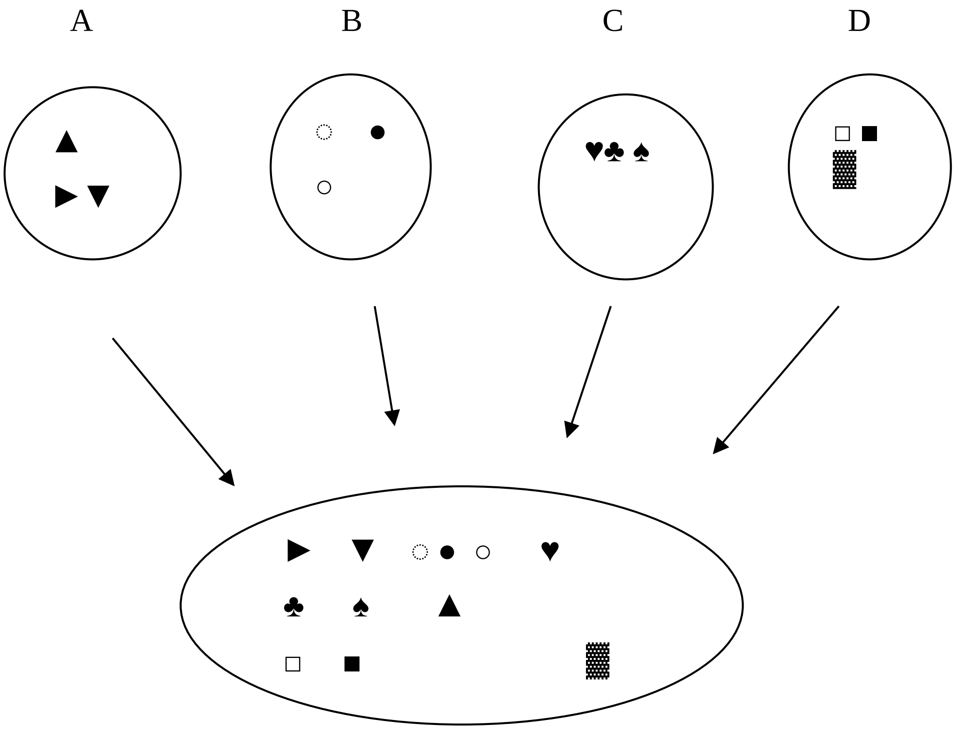
Considero ser pertinente iniciar este quadro teórico com uma breve abordagem à definição de multiplicação em que explico de forma sucinta as propriedades da multiplicação. Num segundo ponto abordo a aprendizagem dos alunos, refletindo sobre a sua aprendizagem ao nível da multiplicação. Finalmente, num terceiro ponto, abordo vários aspetos relacionados com o papel do professor no processo de ensino / aprendizagem.

## 2.1 A multiplicação

Considere-se os seguintes conjuntos:

A = {▶ ▼ ▲}  B = {○●◌}  C = {♠♣♥}  e  D = {■□▒}

Os conjuntos A, B e C têm o mesmo número de elementos e o conjunto E é a reunião de A, B, C e D:




E = A ∪ B ∪ C ∪ D

Uma vez que os conjuntos A, B, C e D são disjuntos dois a dois, ou seja, a interceção entre dois deles é sempre o conjunto vazio, a questão “Quantos elementos tem o novo conjunto A ∪ B ∪ C ∪ D” é respondida determinando o cardinal de E, ou seja 12.

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C \cup D) &= \#A + \#B + \#C + \#D \\ &= 3 + 3 + 3 + 3 = \\ &= 4 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

Assim, a multiplicação pode ser definida a partir da adição:

$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 =$

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \times 3$

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 = 6 \times 3$

…

$a + a + a + a + \ldots + a$ (n parcelas) $= n \times a$

$n \times a$ é o produto e os números “n” e “a” denominam-se de fatores, em que “n” é o multiplicador e o “a” o multiplicando.

O problema “Tenho 6 caixas de chocolate, cada uma com 9 bombons. Quantos bombons tenho?” É um exemplo de um problema de multiplicação.

A multiplicação surge igualmente ligada à disposição retangular, como no caso ilustrado por caixas de bombons ou de frutas:

Figura 1 – Caixa de bombons

Nesta caixa representam-se 16 bombons, organizados em 8 colunas com 2 bombons cada: 8 × 2 = 16.

A disposição retangular corresponde a uma interpretação que se aproxima da teoria de conjuntos e que Sequeira, Freitas e Nápoles (2009) apresentam da seguinte forma:

"Quando temos dois conjuntos, A com n elementos, e B, com m elementos, o produto cartesianos A × B, formado pelos pares (a, b) com a ∈A e b ∈B tem exatamente n×m elementos" (p. 37).

Por exemplo, se A = {a, b, c} e B = {1, 2, 3, 4, 5}, então A × B tem os seguintes 15 elementos:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | (a , 1) | (a, 2) | (a, 3) | (a, 4) | (a, 5) |
| b | (b, 1) | (b, 2) | (b, 3) | (b, 4) | (b, 5) |
| c | (c, 1) | (c, 2) | (c, 3) | (c, 4) | (c, 5) |

É importante salientar que aqui os conjuntos A e B têm de ser disjuntos.

A operação multiplicação goza de várias propriedades que são muito importantes ao nível da progressiva formalização do conceito de divisão.

- <u>Propriedade Comutativa</u>

$a \times b = b \times a$

(representando *a* e *b* números inteiros quaisquer)

A propriedade comutativa pode ser bem ilustrada nas caixas de frutas como a que se reproduz a seguir: o número de frutas total é o mesmo se se 'olhar' para a caixa 'vendo' 4 linhas e 6 colunas ou 6 linhas e 4 colunas (4 × 6 = 6 × 4). A 'composição' de cada linha e de cada coluna altera-se, num caso é cada linha (ou cada coluna) que tem vários tipos de frutos e no outro caso é cada linha (ou cada coluna) que só tem um tipo de frutos. No entanto, em ambas as situações o número de frutos é sempre 24.

Figura 2 – Caixa de fruta

- Existência do elemento neutro – 1 (um)

$$1 \times a = a$$

$$a \times 1 = a$$

$$1 \times a = a \times 1 = a$$

(representando *a* um número inteiro qualquer)

- Existência do elemento absorvente – 0 (zero)

$$0 \times a = 0$$

$$a \times 0 = 0$$

$$0 \times a = a \times 0 = 0$$

(representando *a* e *b* números quaisquer)

- Propriedade associativa

$$(a \times b) \times c = a \times ( b \times c )$$

(representando *a*, *b* e *c* números quaisquer)

Segundo Sequeira, Freitas e Nápoles (2009) p.36, a propriedade associativa é facilmente exemplicada com o seguinte exemplo: “se tivermos uma caixa onde estamos a guardar maçãs, que estão agrupadas em coleções de 3, 6 e 13, tanto faz juntar os dois primeiros conjuntos, formando um de 9, guardando as 9 e depois as 13, como agrupar os dois últimos conjuntos, formando um de 19, guardando depois primeiro o conjunto de 3 e depois o de 19. Em qualquer dos casos ficamos com 22 maçãs na caixa.

$$(3 + 6) + 13 = 3 + (6 + 13)$$

- Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$a \times ( b + c) = a \times b + a \times c$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

(representando *a*, *b* e *c* números quaisquer)

Exemplo: Tomarmos três vezes um conjunto de 11 elementos é o mesmo que tomarmos três vezes dois conjuntos com 4 e 7 elementos – isto é, $3 \times 11 = 3 \times 4 + 3 \times 7$.

- Propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

(representando *a*, *b* e *c* números inteiros quaisquer)

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$$

(representando *a*, *b* e *c* números inteiros quaisquer)

## 2.2 Aprendizagem da multiplicação

Para que seja mais fácil compreender os processos e as dificuldades que os alunos vivenciam no seu percurso de aprendizagem da multiplicação, é necessário centrar a atenção nas etapas que os alunos ultrapassaram para que, ao compreendê-las, enquanto docentes lhes possamos dar maior apoio e mais ferramentas para desenvolver a sua aprendizagem.

Segundo referem Brocardo, Serrazina e Rocha (2008) *a ideia que os alunos têm da multiplicação determina a forma como eles multiplicam, o modelo que usam para organizar os dados e como calculam* (p. 160). O conceito da multiplicação surge inicialmente associado à adição sucessiva, onde os alunos juntam a mesma quantidade várias vezes. A passagem para um raciocínio multiplicativo revela já um raciocínio mais estruturado.

Fosnot e Dolk (2001) identificam as G*randes ideias (big ideas)*, as estratégias e os modelos da multiplicação que devem suportar a aprendizagem e orientar o ensino. Estas *Grandes ideias* têm por base a evolução que os alunos apresentam no raciocínio multiplicativo e são o entendimento de um grupo como unidade (*unitizing*); *a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração; a propriedade comutativa da multiplicação; os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez e a propriedade associativa da multiplicação.* Investigações feitas no âmbito da aprendizagem da multiplicação Treffers e Buys (2001) e Fosnot e Dolk (2001) citados em Brocardo, Serrazina e Rocha (2008)] referem que os alunos conseguem desenvolver o conceito da multiplicação a partir das suas vivências quotidianas, atribuindo sentido ao que vêem e fazem, como por exemplo num cálculo de custo de compras (se 5 cromos custa 1€, quanto custam 10 cromos?) ou mesmo na organização de materiais (arrumar berlindes em 4 caixas de 6 berlindes. Quantos berlindes são?). Assim elas vão criando a ideia, mais ou menos complexa do que é a multiplicação, as suas diferentes formas e de como se relacionam.

Brocardo, Delgado e Mendes (2007. p.1) defendem que “o trabalho em torno da multiplicação deve assentar na compreensão de conceitos e propriedades, feitas ao longo de um período considerável de tempo. Começa-se a explorar a multiplicação quando se trabalha a adição sucessiva de parcelas iguais”.

As autoras afirmam que os alunos dominam o conceito a partir do momento que conseguem relacionar a multiplicação com as outras operações (sendo a multiplicação a operação inversa da divisão e que a adição sucessiva de parcelas iguais corresponde à multiplicação), que entendem as diferentes formas de multiplicar e as utilizam para resolver problemas da multiplicação, dominando aquilo que Fosnot e Dolk designam por “Grandes ideias”.

Segundo Stein *et al*. (2007) “as tarefas matemáticas, nas quais os alunos se envolvem, determinam o que eles aprendem em Matemática e como aprendem” (p.346) (cit. Por Mendes, Oliveira e Brocardo, 2007: 238). Inclusivamente, Walls, em 2005 (Idem: 238), afirma que a aprendizagem foca os processos de raciocínio e o pensamento matemático, os currículos demonstram esta inquietação ao sugerirem abordagens pedagógicas fundamentadas em tarefas matemáticas abertas e de resolução de problemas. De facto, muitos autores chamam a atenção para que as tarefas matemáticas devem ser pensadas de forma a desenvolver a aprendizagem dos alunos. Por isso, ao trabalhar a multiplicação importa saber organizar as tarefas, começando por propor situações de adição repetida com parcelas iguais e progredindo para a exploração da disposição retangular e das propriedades da multiplicação.

Apostando nas tarefas como um meio para desenvolver a aprendizagem, estas podem ter requisitos cognitivos diferentes, dependendo do tipo e nível de pensamento que provocam: memorização, procedimentos sem e com conexões, e fazer matemática (Idem: 238).

Existem diversos autores que reforçam a importância do estudo de contextos apropriados (Fraivilling, 2001; Reys, 1994). Na multiplicação esta ideia-chave tem extrema importância, dando relevância aos contextos apropriados, pois, estes mostram aspetos cruciais da operação e da multiplicação. Segundo Fosnot&Dolk, 2001; Treffers&Buys, 2008) (Idem: 239).

> *O papel decisivo dos contextos e dos modelos subjacentes na aprendizagem da multiplicação justifica-se porque: (i) aqueles revelam aspetos basilares das estruturas multiplicativas associadas e (ii) permitem fazer uma primeira abordagem às propriedades da multiplicação, facilitando o cálculo associado.*

Ao escolher contextos deve ter-se em atenção três aspetos referidos por Fosnot e Dolk (2001): *(i) Permitir o uso de modelos, (ii) fazer "sentido" para os alunos e (iii) criar surpresa e suscitar questões.* Ou seja, quando se propõem tarefas deve-se inserir imagens ou situações que provoquem a utilização de um determinado modelo. Relativamente ao segundo aspeto divide-se em dois, (1) as propostas devem ser situações reais ou imaginárias com as quais os alunos consigam lidar, analisar a razoabilidade do que fazem e dos resultados e (2) devem fazer "sentido" para a construção de estruturas e relações, que podem emergir do contexto. Relativamente ao último aspeto, a proposta deverá ter interesse e desafiar, originando uma vontade para a resolver, explicando e também se questionando, Porque é assim? Será que é? O que acontece se…?

Na aprendizagem da multiplicação é fundamental que se desenvolva a ideia de um grupo (composto por vários elementos) que é uma unidade (unitizing) e se estruture uma progressão da adição de parcelas iguais para a multiplicação. Ao cálculo aditivo deve suceder o cálculo multiplicativo em que a 21 × 23 é entendido como 21 grupos com 23 elementos cada um, e também, como o número (produto) que corresponde a 21 × 23. Nesta evolução os alunos começam por calcular aditivamente, repetindo as adições, isto é, em vez de utilizarem a multiplicação para resolver uma situação, utilizam as adições repetidas, é uma multiplicação por contagem em que não está claro o uso da multiplicação como operação, embora esta operação pudesse ser utilizada.

No cálculo estruturado, em conformidade com Brocardo, Delgado e Mendes (2007), os alunos já utilizam a operação da multiplicação explicitamente, passa a existir a ideia que uma quantidade se vai repetir "×" vezes. Voltando ao exemplo anterior, os alunos já pensam que são 20 bolas porque é o 5 vezes o 4, ou o 4 vezes 5.

O cálculo formal é o cálculo do produto entre dois números, recorrendo a diferentes relações numéricas e produtos já conhecidos. O que distingue este cálculo dos dois anteriores é a inexistência de modelos de apoio ao cálculo, pois este é realizado a nível numérico. O principal objetivo é a utilização das propriedades da multiplicação, diferentes designações do mesmo produto e valores das tabuadas para originarem outros produtos.

As tarefas devem oferecer um contexto motivador e desafiante para os alunos, permitindo uma melhor compreensão dos conteúdos, neste caso mais especificamente a compreensão da operação multiplicação, que será facilitada com a visualização de esquemas de disposição retangular. É de salientar a importância das questões formuladas pelo professor, orientadas para a procura e justificação de procedimentos e estratégias.

De acordo com Brocardo, Delgado e Mendes (2007), a aprendizagem da multiplicação deve centrar-se no desenvolvimento dos conceitos. Para tal é importante explorar contextos adequados que "evoquem" estruturas lineares, de grupo, retangulares, tridimensionais, etc. Estas autoras concretizam indicando contextos ligados a cada uma destas estruturas:

- ✓ Estruturas lineares (espetadas com diferentes ingredientes) e grupos de vários tipos (caixas de bolas, grupos de frutas)
- ✓ Estrutura retangular (caixas de fruta)
- ✓ Estrutura tridimensional (empilhar embalagens – ideia de volume), linha dupla ou tabela (fazer grupo, calcular preços de artigos a partir do preço unitário) e o esquema em árvore (combinar vestuário)

Mendes, Brocardo e Oliveira (2013) afirmam que os modelos inicialmente utilizados pelos alunos estão relacionados *com a "*sua interpretação da situação proposta e emergem da sua representação da ação, sendo modelos de situação", p. 141. O facto de uma tarefa ter sido planeada com base num modelo não garante que todos os alunos que a resolvam recorram a esse mesmo modelo. Com a utilização em sala de aula, por parte do professor, dos diversos modelos, estes serão incutidos nas práticas dos alunos, deixando de ser modelos de situação, transformando-se em ferramentas para raciocinar, isto é, modelos matemáticos de relações numéricas (Fosnot&Dolk, 2001; Gravemeijer, 2005).

As autoras defendem que a estratégia inicial utilizada pelas crianças é a ideia de multiplicação enquanto uma adição sucessiva de parcelas iguais, ou seja, a utilização de uma linha vazia como base para a representação deste tipo de situações. Contudo, consoante a evolução do raciocínio, também os modelos deverão evoluir. Assim, podem passar a utilizar disposições retangulares, que suportam o raciocínio multiplicativo, e tabelas de razão, que suportam o raciocínio proporcional. Muitos autores defendem que o modelo retangular é uma das formas de representação mais fortes, que melhor sustentam a evolução do raciocínio multiplicativo, pois torna visível a propriedade comutativa da multiplicação e as várias partições possíveis dos números, estando subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, o que irá servir de apoio aos alunos na passagem para o cálculo em coluna (Barmby, et al., 2009).

Dolk e Fosnot (2001) consideram que a utilização do modelo retangular em determinadas situações facilita o processo do cálculo por contagem para o cálculo por estruturação. A evolução da multiplicação por estruturação para a multiplicação formal dá-se consoante o desenvolvimento do aluno, a sua capacidade de raciocinar relativamente às relações numéricas e às propriedades oriundas dos modelos utilizados.

> *Há muito mais na compreensão da multiplicação (...) do que calcular quantidades. A criança deve aprender um conjunto inteiramente novo de sentidos de número e um novo conjunto de variáveis todos relacionados com a multiplicação.* (Nunes et al., 1997, p.142)

Segundo Verschaffel et al. (citado por Monteiro, Loureiro, Nunes e Gonçalves, 2007, p. 3), o aluno tem necessidade de ultrapassar uma fase conceptual, estando em contacto com muitos modelos de situações para cada operação aritmética. O que acontece na realidade nem sempre corresponde às necessidades dos alunos, muitas vezes nas escolas continua-se a ter pressa em fazer os registos escritos dos procedimentos, o que origina menos significado para quem regista (Serrazina, 2002, Idem; 3), valorizando assim o produto em detrimento do processo. As crianças precisam de tempo e de experiências, em quantidade e com qualidade, para ligarem a linguagem informal com a matemática *na construção dos conceitos subjacentes às operações, antes do ensino explícito dos símbolos* (Fernandes, 1994, Idem; 3). A esperança dos professores em que os alunos percebam rapidamente os procedimentos de cálculo acaba por incentivar alguns professores a basear o seu ensino na memorização, em vez de trabalharem o desenvolvimento do uso refletido das operações e das relações entre números. De facto, primeiramente é impreterível que se dedique tempo ao desenvolvimento conceptual dos alunos, originando assim significado e contexto para o trabalho seguinte em destrezas de cálculo (NTCM, 1991. Idem; 3).

Em nosso entendimento, a utilização de materiais manipuláveis permite uma melhor compreensão conceptual por parte dos alunos, pois assim mais facilmente organizam o seu pensamento lógico e, consequentemente, mais facilidade demonstram em explicar como pensar, promovendo a autonomia e a segurança. Segundo Ponte e Serrazina (in Brocardo, Serrazina e Rocha, 2008, p. 109 e 110), Portugal é um país no qual não há muita tradição na utilização de materiais manipuláveis nas salas de aula, os professores teriam por hábito utilizar o quadro de giz e o manual escolar. Todavia, em 1975 o programa incentivou que se utilizassem materiais manipuláveis tal como no início dos anos 90, pois estes são suporte de aprendizagem.

Yackel, em 2001, p. 110, fez uma observação nos EUA a partir da qual constatou que tanto os professores como os educadores concordam com a utilização dos materiais em sala de aula, todavia, refere que a utilização de um material por si só não tem valor, porque cada aluno traz para cada situação as suas experiências anteriores. Consideramos, de acordo com o proposto por Yackel, que a escolha dos materiais está intimamente ligada com o papel do professor uma vez que a escolha dos mesmos irá influenciar o sucesso da aprendizagem.

## 2.3 Papel do professor

> *"Os professores terão que mudar o seu papel, de professores que dão orientações e explicações para o de professores que ajudam os alunos a "reinventar" a matemática."*
>
> (Gravemeijer, citado in Brocardo, Serrazina e Rocha, 2008, p. 155).

A 30 de agosto de 2001 foi publicado o Decreto-Lei nº 241/2001 que aprovou um *perfil específico de desempenho profissional do professor do primeiro ciclo do ensino básico*, no qual são definidos alguns parâmetros de constituição, desenvolvimento e integração do currículo.

Este perfil define que o professor é o responsável pelo desenvolvimento do currículo específico, devendo tal ter lugar num contexto de escola inclusiva e ser apresentado de modo a abranger todas as áreas científicas específicas, promovendo assim a aprendizagem dos alunos. Cada docente de um determinado grupo escolar é também responsável por participar na construção e avaliação do projeto curricular de escola e, individualmente é ainda responsável pela construção do projeto curricular da sua própria turma. Em suma, o professor é o responsável pelo desenvolvimento do currículo, que deverá ser adequado às características específicas do seu grupo.

Este documento define ainda que, no âmbito da integração do currículo, o professor é responsável por promover o desenvolvimento dos alunos em diversas áreas, nomeadamente no desenvolvimento pessoal e social, na área da língua portuguesa, na área das ciências sociais e da natureza, da educação física, da educação artística e, a área sobre a qual se centra o nosso estudo, a matemática.

Relativamente à área da matemática, no ponto 3, referente à integração do currículo, alínea 3, salienta-se que o perfil específico do professor do primeiro ciclo deve contemplar as seguintes características fundamentais:

> *a) Promove nos alunos o gosto pela matemática, propiciando a articulação entre a matemática e a vida real e incentivando-os a resolver problemas e a explicitar os processos de raciocínio; b) Implica*
>
> *os alunos na construção do seu próprio conhecimento matemático, mobilizando conhecimentos relativos ao modo como as crianças aprendem matemática e aos contextos em que ocorrem essas aprendizagens; c) Promove nos alunos a aprendizagem dos conceitos, das técnicas e dos processos matemáticos implicados no currículo do 1.º ciclo, (…); d) Desenvolve nos alunos a capacidade de identificar, definir e discutir conceitos e procedimentos, bem como de aprofundar a compreensão de conexões entre eles e entre a matemática e as outras áreas curriculares; e) Proporciona oportunidades para que os alunos realizem atividades de investigação em matemática, utilizando diversos materiais (…).*

Os tempos mudaram, evoluíram, assim como as profissões. O papel do professor não é igual ao que era há alguns anos atrás. Hoje em dia é de conhecimento geral que a utilização de um modelo estritamente transmissivo, onde se ensina através da exposição dos conteúdos, apoiando com exemplos pré-concebidos, solicitando que a turma vá repetindo até decorar, não leva a um entendimento da matéria nem do modo de raciocinar na matemática. Tal como referem Mendes, Brocardo e Oliveira (2011, p.1), há uma evolução no ensino, os alunos passaram a ser *o centro da ação educativa,* eles são responsáveis do conhecimento, tendo um papel ativo na construção do seu saber. Esta alteração no ensino traduz-se numa mudança no papel do professor, este deve planear tendo consciência que o ritmo não é igual em todos e deve pensar sempre em estratégias de forma a aumentar a progressão na aprendizagem.

Em 1995, Simon (in Mendes, Brocardo e Oliveira, 2011, p. 2), utiliza a metáfora do velejador para expor a sua maneira de ver o percurso para a aprendizagem, esta trajetória é fundamental para aprender a multiplicação. O velejador decide de onde parte e para onde vai, terá que ter atenção às condições do clima, ao funcionamento do barco e a possíveis imprevisões. O professor também deve ter um planeamento completo, com várias tarefas incluídas, as quais irá atribuindo e modificando consoante o desenvolvimento dos alunos, as suas ideias, dificuldades e também os seus receios.

Esta relação deve ser percetível e explícita para os alunos, pois de acordo com Postic (2007: 3), a *relação pedagógica torna-se educativa quando, em vez de se limitar à mera transmissão do saber, consegue comprometer os seres num encontro onde cada um descobre o outro e ao mesmo tempo se vê a si próprio, a partir daqui começa uma aventura humana pela qual o adulto vai nascer na criança*, ou seja, terá de existir um reconhecimento, por parte do aluno, das capacidades e das características do professor para que esta seja capaz de se disponibilizar a confiar nelas.

É então também essencial considerar sempre as aprendizagens, os conhecimentos e os preconceitos que as crianças já possuem, de modo a que quaisquer atividades ou propostas lhe possam ser mais significativas e é também sustentada por Meirieu (2002: 83), que diz que *(...) uma conduta pedagógica autêntica não pode esperar conhecer os alunos para depois agir, pois é justamente a observação dos efeitos de nossa ação que nos permite ter acesso ao conhecimento dos alunos*. A vertente da avaliação, pela qual o professor também é responsável, não concerne apenas ao desenvolvimento das competências das crianças mas também à adequação das suas propostas, quer de organização de tempo ou espaço, quer de atividades específicas.

Também Franco (2003, s/pág.) defende esta perspetiva afirmando que, *(...) subsumir a Pedagogia à docência é, não somente produzir um reducionismo ingénuo a esta ciência, como também ignorar a enorme complexidade da tarefa docente, que para se efetivar requer o solo dialogante e fértil de uma ciência que a fundamente, que a investigue, compreenda e crie espaço para sua plena realização.*

Quanto à aprendizagem da matemática, mais especificamente no ensino da multiplicação, há todo um percurso a atravessar, nomeadamente a passagem da adição para a multiplicação. E esta ao cargo do professor apresentar tarefas que cativem os alunos, motivando-os a resolve-las, sempre com a intenção de desenvolver determinados contextos, modelos, estratégias, etc..

Criar meios adequados para que as crianças aprendam a gostar de matemática é muito importante, só assim a sua curiosidade e imaginação continuará a ser desenvolvida nesta área.

No 1.º ciclo e segundo a organização curricular e programas do 1º ciclo do ensino básico (2004), os grandes objetivos a desenvolver na matemática são a capacidade de raciocínio, de comunicação e por fim da resolução de problemas.

Na aprendizagem da matemática é muito importante que se perceba a importância da multiplicação, e é nos primeiros anos que se aborda este tema, já no final do 2º ano pretende-se que os alunos comecem a *explorar situações que conduzam à descoberta da multiplicação a partir da adição de parcelas iguais, utilizar o sinal de "x" na representação de produtos (representação horizontal a x b) e determinar quantidades dispostas em forma retangular utilizando a multiplicação.*

*Os algoritmos usuais das operações aritméticas elementares, "contas de papel e lápis", constituem, sem dúvida, um dos meios auxiliares do cálculo de maior importância e devem ser iniciados no 1º ciclo, embora com a consciência de que a verdadeira aprendizagem é pouco significativa quando o objetivo é apenas o treino de uma habilidade. A aprendizagem dos algoritmos deve surgir, sempre, como resultado de um longo trabalho com os números e as operações.*

A resolução de problemas de multiplicação tem particular relevo pois articula o desenvolvimento do raciocínio aditivo com as novas operações: multiplicação e divisão.

O sucesso matemático dos alunos em Portugal é constantemente tornado público e questionado pelos meios de comunicação social, mencionado por todos com preocupação. Tanto a nível nacional como a nível internacional o objetivo é tornar a matemática uma unidade curricular acessível de forma que todos a possam aprender e não a temam. Para Serrazina e Monteiro (2000) *todos os alunos devem ter oportunidade e apoio necessário para* *aprender matemática com profundidade e compreensão (...) e poderem prosseguir a sua escolaridade.*

Tal como foi referido anteriormente é de extrema importância a escolha das tarefas e dos materiais a utilizar em sala de aula, e cabe ao professor desempenhar este papel na perfeição. A aprendizagem dos alunos na sala de aula depende muito das tarefas propostas [(NTCM, 1991; ME, 2007; Stein, Remillard & Smith, 2007; Walls, 2005)]. Stein *et al* (citado por Mendes, Oliveira e Brocardo, 2007: 238) justificam a sua relevância por acreditarem que estas tarefas influenciam a aprendizagem dos alunos.

Segundo a experiência de Boavida, Silva e Fonseca (2009) é no momento de sala de aula, entre perguntas, dúvidas e respostas que origina novas e importantes aprendizagens. Propor uma tarefa e esperar pela sua resolução sem dar a saber a sua conclusão, percebendo as opções e conclusões de cada um é importante aliado ao acompanhamento da construção do seu pensamento.

Sentimos que, de acordo com os autores acima referidos, o incentivo dado aos alunos, no sentido de terem a liberdade de explicitarem os seus raciocínios e a forma como organizam o seu pensamento matemático, são fundamentais no desenvolvimento de uma boa capacidade de comunicar e irá promover a aquisição e consolidação dos conceitos envolvidos e, consequentemente, uma melhoria na qualidade das suas aprendizagens.

Pimentel et al. (2010. p. 8) afirmam que, nos primeiros anos, *o cálculo mental deve ser o ponto de partida para a exploração de situações numéricas. Se esta aptidão for trabalhada desde muito cedo, os alunos serão capazes de olhar para os números e usar a sua própria estratégia para calcular mentalmente*, ou seja, é essencial que o docente esteja desperto para a criação destas situações que se tornam oportunidades de desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo e de raciocínio matemático.

Em 1994, Reys (citado por Mendes, Oliveira e Brocardo, 2007. P. 239), explica que para desenvolver o sentido do número as tarefas deverão coincidir e descrever-se por:

*(i) encorajar os alunos a pensar sobre o que vão fazer e partilhá-lo com os colegas; (ii) promover a criatividade, a investigação e o uso de estratégias diversificadas; (iii) auxiliá-los a decidir o tipo de cálculo apropriado a cada situação; (iv) ajudá-los a compreender as regularidades da*

> *Matemática e as relações entre esta e o mundo real e (v) contribuir para uma visão dinâmica e desafiante da Matemática através da descoberta de relações.*

Em suma, sentimos ser pertinente afirmar que o professor também deve ser um profissional com um profundo conhecimento científico e didático e que saiba gerir de modo adequado a comunicação na sala de aula, pois é também com base nas relações que cria com os seus alunos que irá ter possibilidade de lhes proporcionar aprendizagens cognitivas significativas.

# 3. Metodologia

Este estudo teve como suporte parte do trabalho realizado pelo projeto '*Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos'* pois foi utilizada uma das tarefas desenvolvidas pelo projeto e uma abordagem de análise de dados que este mesmo projeto usa para analisar entrevistas clínicas. No entanto, tendo em conta as condicionantes relativas ao tempo, o objetivo deste trabalho situa-se a um nível de compreensão das abordagens dos alunos a uma tarefa de multiplicação e não tem como objetivo estudar a flexibilidade de cálculo.

## 3.1 Opções Metodológicas Gerais

Com o intuito de dar resposta ao propósito principal do estudo – compreender o raciocínio multiplicativo de alunos do 3º ano, realizei entrevistas clínicas a alunos de 3.º ano, ano em que se começa a estruturar de modo mais sistemático a multiplicação.

O método para este estudo enquadra-se nas caraterísticas da investigação qualitativa e considerando o estudo a realizar, este enquadra-se no paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem qualitativa. Tendo em conta o objetivo do meu estudo era fundamental aceder às interpretações de significado feitas pelas crianças e que não pretendia comprovar uma teoria, a investigação que realizei integra-se no paradigma interpretativo. Este paradigma assenta em compreender e interpretar o sentido que os protagonistas do estudo atribuem às suas práticas e segundo Berger e Luckmann (1966) está é caraterizada por elementos subjetivos (in Afonso 2005, p14).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), o paradigma interpretativo surge da hermenêutica do sentido estuda grandezas não suscetíveis a medição, mas sim a interpretação. O paradigma interpretativo, também designado de qualitativo, é adequado para aplicação em contextos educativos porque não procura explicar as ações, procura compreende-las, não procura encontrar resultados generalistas, mas sim assimilá-los no seu devido contexto.

Na realização deste estudo os procedimentos metodológicos vão ao encontro de uma investigação qualitativa onde o principal objetivo é aprofundar determinados comportamentos observados. A investigação qualitativa é *metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das perceções individuais* (Bogdan e Biklen, 1994: 11).

> *Pelo contrário o tratamento da informação qualitativa é um processo mais ambíguo, moroso, reflexivo, que se concretiza numa lógica de crescimento e aperfeiçoamento. A formatação do dispositivo não é prévia ao tratamento dos dados. Pelo contrário, constrói-se e consolida-se à medida que os dados vão sendo organizados e trabalhados no processo analítico e interpretativo* (Afonso 2005, p. 118).

Neste tipo de investigação, o investigador recolhe informação utilizando determinados procedimentos empíricos para que possa interpretar a realidade que estuda. Tal como afirma Afonso: *a investigação qualitativa preocupa-se com a recolha de informação fiável e sistemática sobre aspetos específicos da realidade social usando procedimentos empíricos com o intuito de gerar e inter-relacionar conceitos que permitam interpretar essa realidade* (2005, p 14).

Jacob (citado por Walsh,Tobin e Graue in Spodek, 2002) sugere que o paradigma interpretativo deve corresponder a três propriedades: a investigação tem lugar em "cenário natural", deverá destacar a compreensão pelas perspetivas dos participantes e a forma como o trabalho evolui deve ser influenciada pelo trabalho de campo.

Adequa-se a um paradigma interpretativo na medida em que se pretende, essencialmente, descrever os procedimentos matemáticos usados pelos alunos e compreender em que níveis de cálculo e raciocínio se encontram.

No decorrer deste estudo encontram-se destacadas as cinco características de uma investigação qualitativa tal como nos é apresentada por Bogdan e Biklen. Os autores referem que: (1) *A fonte direta de dados é o ambiente natural* (1994, p. 28 e 47), onde o investigador está no contexto educativo e desempenha um papel de entrevistador, fazendo questões e dialogando com o aluno; (2) *A investigação qualitativa é descritiva* (ibid, p. 48 e 49), os dados que contribuem para a investigação são anotações detalhadas e rigorosas do que o investigador observa, recolha de áudio, comentários e inferências; (3) *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos* *resultados ou produtos* (ibid., p. 50), o importante não é chegar a um resultado conclusivo, mas sim compreender o caminho que se percorre; (4) *Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva* (ibid. p.50), o investigador não sabe de antemão qual será a sua conclusão, ele procura construir uma pesquisa aberta que se vai tornando cada vez mais fechada e específica; (5) *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa* (ibid.,p. 50 e 51), para os investigadores qualitativos é importante compreender qual o sentido que os sujeitos que participam na investigação dão sentido as situações observadas.

Segundo Bodgan e Biklen, *os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador* (ibid.p. 51).

Tal como afirma Afonso (2005:14), *a investigação qualitativa preocupa-se com a recolha de informação fiável e sistemática sobre aspetos específicos da realidade social usando procedimentos empíricos com o intuito de gerar e inter-relacionar conceitos que permitam interpretar essa realidade.*

## 3.2 Participantes

Os alunos intervenientes no estudo são alunos de uma escola básica de 1.º ciclo que está inserida num Agrupamento constituído por quatro escolas do 1º ciclo, duas das quais com jardim-de-infância, um jardim-de-infância e por fim, uma escola básica de 2.º e 3.º ciclos, sendo esta a sede do agrupamento.

A escola onde foram realizadas as entrevistas situa-se em Mem Martins, e foi a escola escolhida porque foi lá onde a entrevistadora frequentou o 3.º e 4.º ano, neste momento já ampliada e remodelada.

Presentemente funciona em horário duplo da manhã e da tarde, mantendo em funcionamento 10 turmas distribuídas pelos dois períodos de funcionamento e uma turma de pré-escolar em horário normal.

A escolha dos alunos foi feita pela coordenadora da escola que em parceria com os respetivos professores orientaram a manhã em que a entrevistadora tinha agendado para realizar as entrevistas, cederam a sala de apoio especial. De acordo com uma conversa prévia que tive com a Professora Coordenadora Jacinta, os alunos selecionados para a entrevista deviam ser bons comunicadores, conseguindo explicar e justificar os processos que usavam na resolução de tarefas matemáticas. A primeira aluna foi então recebida pela entrevistadora que após breve conversa propôs a tarefa matemática, depois desta primeira entrevista, a aluna discretamente chamou o aluno seguinte, evitando assim interromper a aula e destabilizar os outros alunos.

As entrevistas foram realizadas a quatro alunos do 1.º ciclo, todos frequentavam o 3.º ano e todos tinham 8 anos, dois deles frequentavam o 3º B, um do 3º C e por fim o quarto aluno frequentava o 3º A.

## 3.3 Métodos de recolha de dados

### 3.3.1 Entrevistas

As entrevistas são um método de recolha de dados que utilizam a forma de comunicação verbal. Quanto maior for a liberdade e a iniciativa deixada aos intervenientes na entrevista maior a facilidade com que esta fluirá e mais fácil será tirar das entrevistas informações e elementos de reflexão muito ricos tendo em conta que na entrevista há contacto direto entre o investigador e os seus interlocutores.

Segundo Quivy (1992, p.p. 191-195), entrevista é um método de recolha de informação, o investigador deve estar muito atendo com o objetivo de que as suas intervenções tragam elementos de análise tão interessantes quanto possível. Este método oferece um grau de profundidade dos elementos de análise recolhidos, e ainda a flexibilidade e a fraca diretividade do dispositivo que permite recolher os testemunhos e as interpretações dos interlocutores, respeitando os próprios quadros de referência – a sua linguagem e as suas categorias mentais. Por outro lado, a flexibilidade do método pode intimidar aqueles que não consigam trabalhar com serenidade quando não existem diretivas técnicas precisas.

O método das entrevistas está ligado ao método de análise de conteúdo, durante as entrevistas trata-se de fazer aparecer o máximo possível de elementos de informação e reflexão, que servirão de materiais para uma análise sistemática do conteúdo.

A entrevista "consiste numa conversa intencional, geralmente entre duas pessoas, embora por vezes possa envolver mais pessoas, dirigida por uma delas com o objetivo de obter informações sobre a outra" (Morgan, 1988, citado por Bogdan & Biklen 1994: 134).

As entrevistas realizadas no contexto de exploração de uma determinada tarefa são habitualmente designadas por entrevistas clínicas. De facto elas partilham as potencialidades das entrevistas referidas anteriormente e caracterizam de um modo mais preciso o método usado nesta investigação. Hunting (1997) salienta que as entrevistas clínicas podem ser usadas para envolver os alunos na resolução de uma tarefa, percebendo, a cada passo, o que ele pensa ou faz. O entrevistador tem acesso à forma de pensar do aluno, percebendo os conhecimentos em que ele suporta a sua resolução da tarefa e o modo como os usa e relaciona.

### 3.3.2 Entrevista piloto

Antes de recolher os dados que analiso neste projeto realizei uma entrevista piloto a uma aluna de 8 anos, que frequentava o 3º ano. A transcrição integral da entrevista está incluída no anexo 1. Neste ponto começo por resumir a entrevista realizada e por analisá-la de modo a identificar o conhecimento próprio da aluna que nela revela. Analiso, igualmente, o meu papel procurando identificar aspetos menos bem conseguidos e que deverei procurar não repetir.

A entrevista foi feita no dia 20 de setembro de 2014, a aluna chama-se Bruna e tem 8 anos. Frequenta o terceiro ano do ensino básico numa escola de Leiria, é uma aluna inteligente, dedicada e perfecionista, faz sapateado e ballet e tem uma educação que me deixa fascinada.

Optei por propor uma alteração na tarefa inicial porque ao fazer a primeira questão prevista deparei-me com algumas dificuldades pois pensei que o enunciado estava elaborado para que resolução mais fácil fosse utilizar a divisão, e os alunos que passaram agora para o terceiro ano como é o caso da Bruna ainda não aprenderam a resolver tarefas com esta operação. Por isso, quando eu lhe perguntei quantas espetadas a mãe do Vasco iria conseguir fazer, tenha ela optado por espetadas de 3 ou de 5, a dúvida surgiu.

Inicialmente a Bruna optou por ir somando 5 a 5, ou seja, 5 camarões é uma espetada, mais 5 são duas espetadas…mas a dada altura e após ter-lhe perguntado se havia outra forma ela decidiu arranjar uma maneira mais rápida de chegar ao resultado da quantidade de espetadas, lembrou-se que podia multiplicar o número de camarões em cada espetada pelo número de camarões comprado, isto é, 5 × 61, que iria dar 305. No entanto o raciocínio dela foi diferente, 5 x 10 dá 50 mais 10 dá 60 e mais 1 dá o 61, e o primeiro 10 mais o segundo 10 dá 20 e mais 1 dá 21… 21 espetadas. Ao chegar a este resultado ficou confusa, e optou por descobrir o número de espetadas através da soma, 5+5+5+5… até ao 61 como tinha pensado inicialmente, concluindo que conseguiriam fazer 12 espetadas. Quando a confrontei novamente com a hipótese de pensar numa maneira mais fácil ela sugeriu o 5 × 60, quando na realidade isso iria dar 300, mas se fosse a dividir o raciocínio estaria perfeito porque 60÷5 daria as 12 espetadas. Quando a fiz pensar novamente dizendo que já tínhamos descoberto que eram 12 espetadas ela respondeu: 5 × 12 e assim deu o resultado correto dos 60 camarões com a conclusão que não dava para fazer mais nenhuma espetada porque sobrou apenas 1 camarão.

A Bruna, a dada altura, escolheu espetadas com 3 camarões cada, e supôs que seriam 20 espetadas, influenciada pelo enunciado…ao fazer 3 x 20 dá 60, o que era um ótimo raciocínio: todavia ela não conseguia identificar o que correspondia ao número 60, porque para ela o total (resultado final) deveria ser o número de espetadas, porque é essa a pergunta inicial, quantas espetadas a mãe do Vasco vai conseguir fazer. Mas o 60 correspondia ao número de camarões que a mãe comprou. Com estes dados, o mais fácil e rápido seria dividir o número de camarões (60) pelo número de camarões que cada espetada tinha (3) e assim o resultado iria originar o número de espetadas que se iria conseguir fazer (20).

Tal como foi referido anteriormente, optei por propor duas tarefas, modificando o enunciado da segunda em que decidi colocar a questão de outra maneira e a Bruna acabou por conseguir resolver a tarefa mais rapidamente e dissipando a confusão que tinha sido anteriormente.

Decidi que nos dados da tarefa constaria o número de espetadas e que a aluna teria que descobrir o número de camarões a comprar, arranjei um número de espetadas fictício para ver se assim a tarefa resultava. E ao dizer-lhe que a mãe do Vasco queria fazer 8 espetadas e tendo em conta que cada espetada teria 5 camarões, opção escolhida por ela, rapidamente ela decidiu fazer o 8 × 5 e depois de resolver a operação num papel disse que dava 40, quando lhe perguntei o que cada número queria dizer ela soube responder imediatamente. Posto isto, decidi utilizar os dados do enunciado, e perguntei-lhe qual seria o resultado se a mãe quisesse fazer 20 espetadas com 5 camarões cada e ela rapidamente respondeu que teria que ser 5 × 20 e que a mãe teria que comprar 100 camarões.

Foi uma entrevista interessante, porque a necessidade de dar um novo rumo à entrevista dificultou-me o trabalho todavia, descobrir uma opção foi muito gratificante.

Ao mostrar este trabalho à orientadora entendi a quantidade de erros que tinha cometido, primeiramente o enunciado não tinha que ser modificado e por esse mesmo motivo só consta deste trabalho a primeira gravação. A entrevista que realizei durou aproximadamente 11 minutos. De facto, pensar que “o mais fácil” é dividir 61 pelo número de camarões por espetada é assumir que esta tarefa deve ser resolvida usando um único processo e uma operação – a divisão – e não ter em conta as etapas de desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Numa perspetiva tradicional a tarefa proposta seria uma tarefa “de divisão” e eu, embora não querendo integrar-me acabei por utiliza-la, reproduzindo aquilo que sempre vivi enquanto aluna do 1.º ciclo. Num contexto novo e numa ação que para mim era complexa pois nunca tinha realizado entrevistas deste tipo como que “esqueci” tudo o que tinha estudado e perspetivado realizar sobre a aprendizagem da multiplicação.

Relativamente ao meu papel, percebi que tive aspetos menos bem conseguidos, nomeadamente uma insistência constantemente em responder pela aluna, assumindo que as respostas dela seriam aquilo que eu entendia à primeira e sem perguntar porquê: Respondi afirmativamente a um erro e deixe-a prosseguir numa tentativa de resolução incorreta, e por fim, mesmo após a resolução da tarefa insisti noutras resoluções cansando imenso a aluna com perguntas infindáveis. Apesar de todos estes erros, esta entrevista de preparação foi indispensável e muito importante para a realização das entrevistas em escola.

No quadro seguinte indico o conhecimento pessoal que Bruna utilizou para explorar a tarefa proposta.

| **Conhecimento Pessoal** | |
|---|---|
| <u>*Adição*</u><br>5+5+5+5+5…<br><u>*Produtos Básicos*</u><br>5x3=15<br>5x10=50<br>5x2=10<br><u>*Produtos Derivados*</u><br>3x20=60<br>5x12=60 | Formação de grupos para a multiplicação.<br><br>A aluna faz “5 x 3”, “5 x 10”, “5 x 2”, em vez de fazer “3 x 5”, “10 x 5”, “2 x 5”, isto é, 3 grupos de 5 camarões, 10 grupos de 5 camarões…<br>Cálculo 3x20 a partir de 3x2 acrescentando o 0. |

<u>Conhecimento pessoal de Bruna sobre a multiplicação:</u>

Em suma, a Bruna demonstra estar a transitar da adição para a multiplicação, ela forma grupos de 5, somando-os, conhece os produtos básicos, 5×3, 5×10, 5×2, no entanto, não expõe de forma a perceber que são 3 grupos de 5 camarões, 10 grupos de 5 camarões…

Interpretar que 3 espetadas de 5 camarões cada se representa por 3×5, pode significar que Bruna não dá sentido ao produto e, por isso não entende como refletindo 3 grupos de 5. No entanto, também é possível que Bruna tenha aprendido a tabuada da multiplicação como tradicionalmente se fazia em Portugal em que a tabuada do 5 se aprendia com 5×1, 5×2, 5×3… e não com 1×5, 2×5, 3×5… a que corresponde pensar em sucessivos números de grupos de 5. Conhece os produtos derivados, calculando 3x20 a partir do 3x2 acrescentando um 0.

A aluna não domina a proporcionalidade, pois parece associar “dar mais espetadas” porque cada espetada é composta por 5 camarões, quando na realidade se obterá menos espetadas tendo em conta que se gasta mais camarões.

# 4. Análise de dados

É neste capítulo que irei descrever e interpretar as entrevistas efetuadas. Tal como foi referido anteriormente, foram realizadas quatro entrevistas a alunos do 3º ano do Ensino Básico, todos eles com 8 anos.

Entrevista 1

Esta foi a primeira de quatro entrevistas cuja transcrição integral da entrevista está incluída no anexo 2. Neste ponto começo por resumir a entrevista realizada e por analisá-la de modo a identificar o conhecimento próprio que nela revela. A entrevista foi feita no dia 3 de novembro de 2014, a aluna chama-se Márcia.

A aluna referiu que gostava muito de Matemática durante a conversa em que introduzi a tarefa. Após ler o enunciado optou por espetadas com 5 camarões cada, “porque vejo sempre espetadas com muitas, não só com 3”. A Márcia achou que dariam umas 20 espetadas, mais de 10 e menos de 30, foi esse o seu pensamento. E depois fez os cálculos no papel para descobrir o número exato de espetadas. Somou 5+5+5+5... 12 vezes, até gastar os 60 camarões que a mãe do Vasco tinha comprado e no fim disse: “não dá”, perguntei-lhe porquê e ela respondeu que “faltava só um para fazer todas as espetadas”. Depois de me responder que tinha utilizado 60 camarões para fazer 12 espetadas, chegou a conclusão que sobrou um camarão.

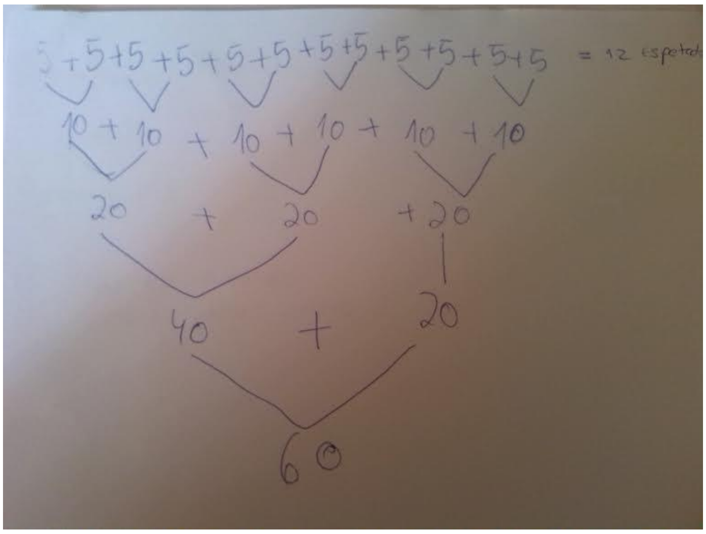
<table>
<tr><th colspan="2">Conhecimento Pessoal</th></tr>
<tr><td><u>Adição</u><br>5+5+5+5+5…</td><td>Formação de grupos<br>
</td></tr>
</table>

Figura 3 - Esquema da Márcia

<u>Conhecimento pessoal de Márcia sobre a multiplicação:</u>

Em suma, a Márcia demonstra estar ainda na fase de adição sucessiva, forma grupos de 5.

<u>Entrevista 2</u>

Esta foi a segunda de quatro entrevistas, a transcrição integral da entrevista está incluída no anexo 3. Tal como foi referido anteriormente, neste ponto começo por resumir a entrevista realizada e por analisá-la de modo a identificar o conhecimento próprio que nela revela.

A entrevista foi feita no dia 3 de novembro de 2014 e o aluno chama-se Ivan. Esta foi a entrevista mais rápida porque além do aluno adorar matemática estava extremamente empenhado em resolver a tarefa.

Após ler o enunciado, o aluno optou por espetadas com 5 camarões cada, “cinco, porque gosto muito de camarões”. Depois de ler a parte do enunciado em que dizia que a mãe do Vasco tinha comprado 61 camarões, perguntei-lhe quantas espetadas daria para fazer, ao que o Ivan respondeu prontamente "12", "mas porquê 12?" perguntei, "porque 5x12 é igual a 60 e sobra um camarão".

| Conhecimento Pessoal | |
|---|---|
| *Produtos Derivados*<br>5x12=60 | Usa a comutatividade da multiplicação 12x5=5x12. |

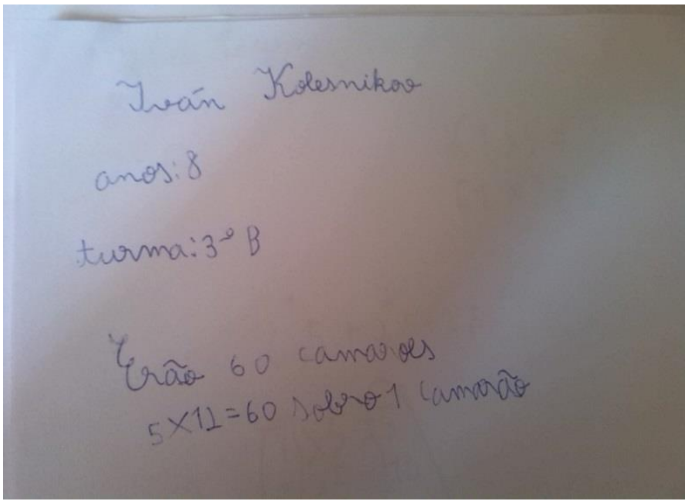



Figura 4: Representação do Ivan

Conhecimento pessoal do Ivan sobre a multiplicação:

Em suma, o Ivan demonstra não necessitar de suportar os seus cálculos no seu significado, isto é, o aluno raciocina a um nível mais formal, sem necessitar de recorrer à adição sucessiva ou a produtos parciais, podemos conjeturar que ele já domina a comutatividade da multiplicação, entendendo que $12 \times 5 = 5 \times 12$. De facto, a representação que traduz a sua opção é $12 \times 5$. No entanto, do ponto de vista do cálculo mental é mais fácil pensar em $5 \times 12$, tal como fez Ivan.

Entrevista 3

Esta foi a terceira de quatro entrevistas cuja transcrição integral da entrevista está incluída no anexo 4. Tal como nas anteriores, neste ponto começo por resumir a entrevista realizada e por analisá-la de modo a identificar o conhecimento próprio que nela revela.

A entrevista foi feita no dia 3 de novembro de 2014, o aluno chama-se Rafael. Após ler o enunciado, o aluno optou por espetadas com 5 camarões cada, "porque assim se um não quisesse comer a espetada toda dava a outro colega e não se gastava muito dinheiro". Quando o questionei de quantas espetadas daria, respondeu-me 10, relembrei-o que cada espetada tem 5 camarões e ele respondeu – "não pode ser 10 porque se não era 50 (…) porque 10 x 5 é 50, é a tabuada do 5". Depois de escrever a tabuada do 5, ele refere que "10 x 5 é igual a 50, e não ia dar porque ia sobrar muito", depois de somar o 11 e o 12, deu 60 camarões e disse que não podia somar mais 5 porque ia dar 65 e a mãe do Vasco só tinha comprado 61 camarões. O aluno acabou por concluir que tinha dado 12 espetadas e sobrava 1 camarão.

| **Conhecimento Pessoal** | |
|---|---|
| *Adição*<br>5+5+5+5+5…<br>*Produtos Básicos*<br>1x5=5<br>2x5=10<br>3x5=15<br>4x5=20 (…)<br>10x5=50<br>11x5=55<br>12x5=60 | Formação de grupos para a multiplicação.<br><br>Sabe a tabuada do 5, e percebe que não podia adicionar mais 5 ao 60 porque se não daria 65, mais camarões do que os que comprou. |

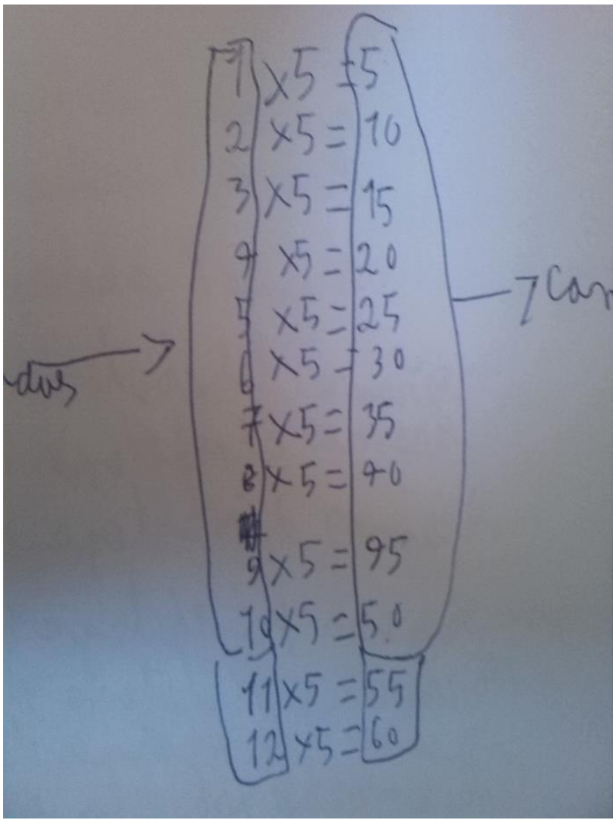



Figura 5: Representação do Rafael.

Conhecimento pessoal de Rafael sobre a multiplicação:

Em suma, o Rafael demonstra conhecer os produtos básicos, 1x5, 2x5, 3x5…10x5, 11x5, 12x5. Ele pensa em sucessivos números de grupos de 5 e tem noção que se somar mais 5 passa o 61 e por isso já não dá para fazer mais espetadas porque só há 61 camarões.

Entrevista 4

Esta foi a última entrevista cuja a transcrição integral da mesma está incluída no anexo 5. Tal como nas anteriores, neste ponto começo por resumir a entrevista realizada e por analisá-la de modo a identificar o conhecimento próprio que nela revela.

A entrevista foi feita no dia 3 de novembro de 2014, o aluno chama-se António. Após ler o enunciado, o aluno optou por espetadas com 3 camarões cada, ele referiu que assim haveriam mais espetadas. Esta foi uma entrevista mais longa, o aluno não dialogava e por isso todas as respostas foram dadas com muito custo.

Depois de lhe perguntar se daria mais de 20 espetadas, o aluno respondeu: "Sim (…) porque são só 3, então dá para fazer mais". Ao perguntar-lhe como poderia descobrir o número exato de espetadas o aluno referiu "3 a dividir por 61", após uma conversa em que lhe explico que deve dividir o 61 por 3 e não o contrário, ele diz que não consegue, perguntei-lhe como conseguia fazer na sala de aula e ele disse: "vamos à tabuada". Sugeri que fizesse de outra maneira mais fácil para ele, e o António optou por ir associando, se 1 espetada leva 3 camarões, 2 espetadas levam 6 camarões, 3 espetadas levam 9 camarões, depois o aluno passou logo para as 10 espetadas, porque sabia que 3 x 10 eram 30 e depois voltou a ir de 3 em 3 até às 20 espetadas.

| **Conhecimento Pessoal** | |
|---|---|
| *Adição*<br>3+3+3+3…<br>*Produtos Básicos*<br>1x3<br>2x3<br>10x3<br>(…) | Formação de grupos para a multiplicação.<br><br>Domina a multiplicação por 10, salta do 3x3 para o 3x10. |

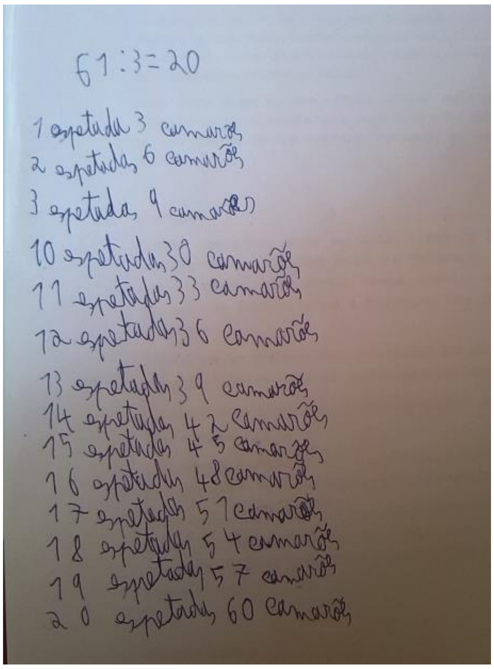



Figura 6: Representação do António

<u>Conhecimento pessoal de António sobre a multiplicação:</u>

Em suma, o António demonstra conhecer a tabuada do 3, mostra o problema da divisão, faz uma representação incompleta de “3:61” e não consegue resolver. Com ajuda o aluno verifica que deve fazer “61:3”. Estes \`produtos não formais´ ou seja preso no número de espetadas e vai calculando o número de camarões por utilizar. Domina a multiplicação por 10, pois o aluno não calcula tudo até ao 10, mas não domina outros procedimentos que podiam apoiar uma passagem mais rápida para o cálculo.

# 5. Conclusões

O presente estudo tem um objetivo: compreender qual o conhecimento pessoal que os alunos do 3º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico usam para resolver tarefas de multiplicação.

No sentido de perceber qual seria o seu conhecimento, realizei cinco entrevistas a cinco alunos diferentes. A primeira foi uma entrevista piloto que me permitiu perceber melhor alguns aspetos envolvidos na exploração da tarefa e me alertou para aspetos que eu deveria ter em atenção na condução das entrevistas. As restantes quatro entrevistas foram realizadas numa mesma escola a alunos de 3.º ano. Este capítulo apresenta as conclusões do estudo e uma reflexão pessoal.

## 5.1 Conhecimento pessoal relativo à multiplicação

Dado que o interesse do estudo incide na compreensão dos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução da tarefa matemática, a parte empírica constou da resolução de uma única tarefa (anexo 1) acompanhadas de entrevistas do tipo clínico, a 5 alunos do 3.º ano. A análise de dados centrou-se em produções escritas dos alunos e em entrevistas áudio-gravadas.

Uma primeira conclusão do estudo prende-se com a diversidade do conhecimento pessoal dos quatro alunos entrevistados. De facto, embora sejam todos alunos do mesmo ano e idade, sejam comunicativos e tenham gosto pela matemática – o conhecimento que usam situa-se em diferentes 'pontos' da teia de relações identificada por Kraemer, Brocardo, Mendes e Delgado (2014):

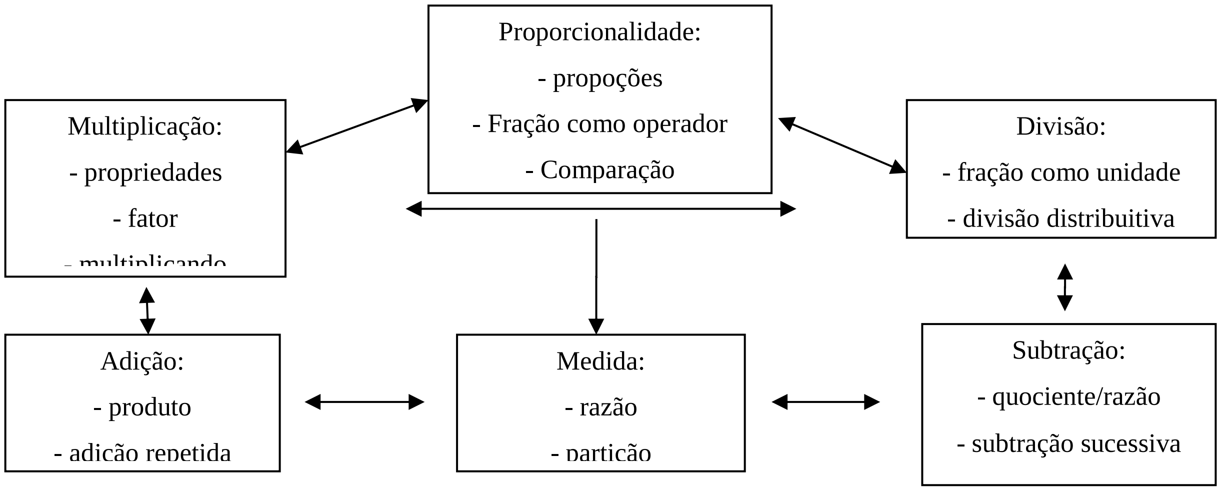
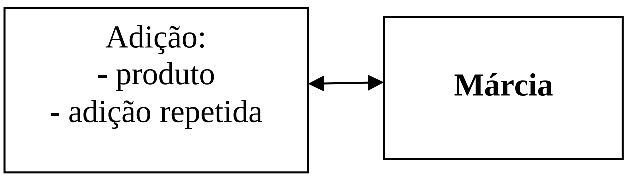



Figura 6 – Teia de relações, Kraemer, Brocardo, Mendes e Delgado, p. 12 (2014).

Esta conclusão vai no mesmo sentido do que autor como Mendes (2013) explica: “a diversidade de procedimentos encontrada está de acordo com o mencionado por alguns autores como Ambrose et al. (2003). Estes referem que, embora a diversidade de procedimentos possa ser influenciada pelo contexto de aprendizagem e pelo ensino, a investigação mostra que existem muitos pontos comuns entre os procedimentos usados pelos alunos, de estudo para estudo, apesar das diferenças entre eles. De facto, o conjunto de procedimentos que os alunos constroem e usam nesta experiência de ensino tendem a organizar-se em categorias mais ou menos definidas e semelhantes às identificadas por outros investigadores”.

Para um melhor entendimento do conhecimento pessoal de cada aluno, elaborei esquemas a partir da teia de relações, situando assim a fase em que cada um dos alunos está:

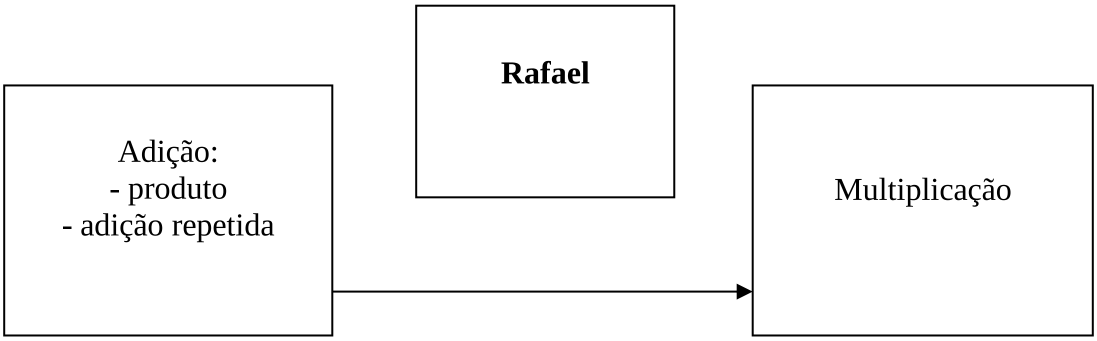



A exploração que Márcia faz da tarefa mostra que ela a resolve aditivamente, usando assim o conceito da adição: adiciona repetitivamente até chegar aos 60 camarões. Depois tem noção de que falta 1 até aos 61 camarões pelo que revela conseguir relacionar aditivamente (via a adição e a subtração) dois números (60 e 61).

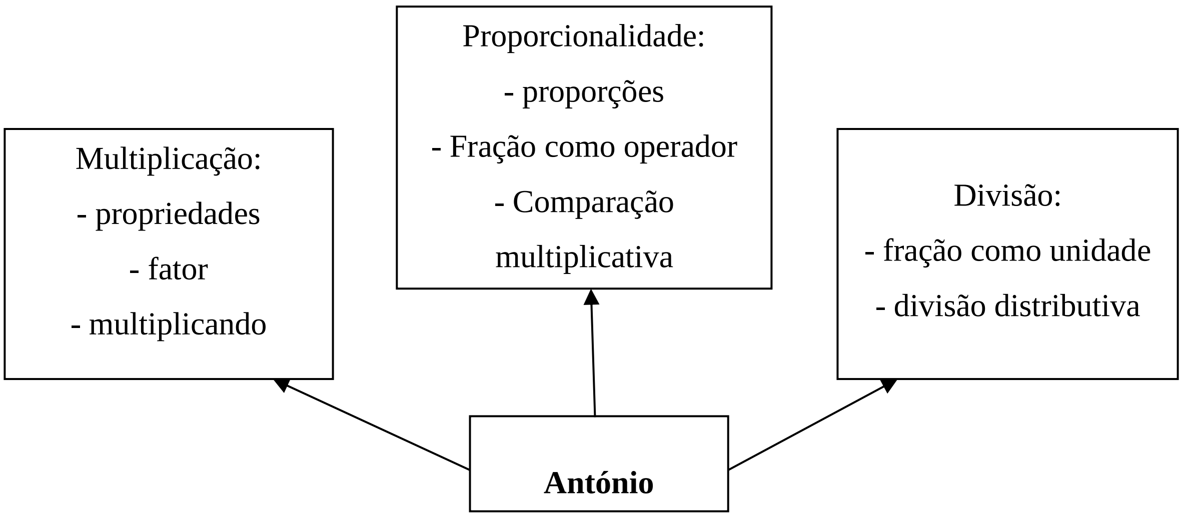
Márcia não usa um raciocínio da proporcionalidade para escolher as espetadas com 5 camarões. A sua escolha é justificada pelo que habitualmente vê: as espetadas não têm apenas 3 camarões, têm mais.

| Multiplicação: | | | | Divisão: |
|---|---|---|---|---|
| - propriedades<br>- fator<br>- multiplicando | ⟷ | **Iván** | ⟷ | - fração como unidade<br>- divisão distributiva |

O Iván, tal como a aluna anterior, não usa um raciocínio proporcional para escolher o número de camarões: indica o seu gosto pessoal para escolher 5 camarões em cada espetada. Todavia, na teia de relações o aluno situa-se no conceito de multiplicação, uma vez que desde o início recorre a esta operação para explorar a tarefa. No entanto, o aluno escreve 5×12 em vez de 12×5 o que pode indicar que (i) o aluno já está numa fase mais abstrata em que encara o 12×5 como sendo igual a 5×12 pois sabe que a multiplicação é comutativa ou (ii) na sua aprendizagem a tabuada foi introduzida seguindo o método tradicional, não associada à formação de grupos com 5 elementos cada um. Julgo que o aluno já está numa fase mais abstrata tendo em conta a maneira como ele resolveu a tarefa. Também considero que o aluno integra já a relação inversa da multiplicação com a divisão, pois ele tem noção de como chegar ao resto - tem a ideia de que sobra 1 camarão embora pense multiplicativamente.




Na teia de relações o Rafael está numa transição da adição para a multiplicação, pois identifica a multiplicação, mas não consegue executar os passos necessários para realizar essa operação. Ao utilizar a tabuada para conseguir calcular o resultado Rafael parece ter ainda muito presente um raciocínio aditivo que começa a ser operacionalizado em termos de multiplicação.

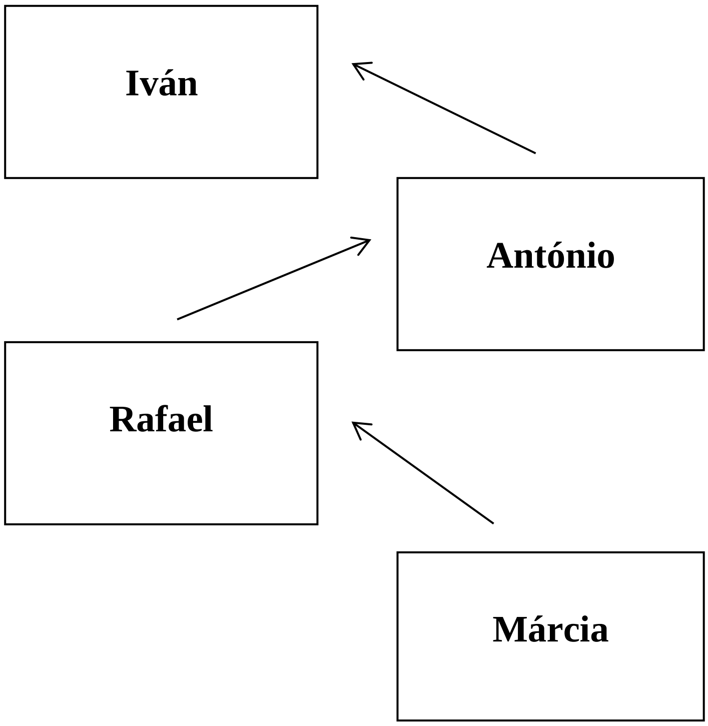



Por fim, António, o último aluno entrevistado, demonstra ter um raciocínio intuitivo da proporcionalidade, pois ele escolhe espetadas com 3 camarões porque assim haveria mais espetadas na festa de aniversário. O aluno tem também uma ideia pouco consolidada da divisão, mas sabe que a multiplicação é a operação inversa da divisão. O aluno acaba por resolver a tarefa utilizando a tabuada e demonstrando dominar a multiplicação do 10.

Mendes (2013) refere que "nas tarefas de multiplicação e divisão, os procedimentos usados pelos alunos variam de acordo com os seus conhecimentos sobre os números, as operações aritméticas e as suas propriedades. Por isso vão evoluindo, passando de procedimentos de contagem, a procedimentos aditivos e, finalmente, a procedimentos multiplicativos baseados em relações numéricas e propriedades desta operação."

Embora com base no estudo que realizei não possa tecer qualquer consideração sobre a evolução do conhecimento pessoal dos alunos, posso igualmente concluir que os alunos que entrevistei parecem situar-se em diferentes fases da progressão da aprendizagem da multiplicação.

**Considerações finais:**




Tal como foi dito anteriormente, apesar de vários dados em comum, como a idade, gosto pela matemática, frequentarem a mesma escola, os alunos encontram-se em pontos diferentes da teia de relações. Considero que o Iván está numa fase mais evoluída, seguido pelo António, pelo Rafael e por fim a Márcia, tal como está demonstrado no esquema anterior. O Iván está claramente na multiplicação, dominando a propriedade comutativa, o António relaciona a multiplicação com a divisão, o Rafael sabe a tabuada, está a transitar da adição para a multiplicação e por fim a Márcia está na adição.

Esta conclusão confirma a ideia de que num mesmo ano de escolaridade e na mesma altura do ano, os alunos se situam em diversos níveis de progressão relativamente à sua aprendizagem e que o papel do professor é determinante em ajudar a que cada um 'faça' o seu caminho, construindo a teia de relações multiplicativas e sendo capaz de usar procedimentos formais multiplicativos.

## 5.2 Reflexão Pessoal

A realização deste projeto final contribuiu para adquirir diversos conhecimentos, permitindo-me perceber ferramentas de análise mais finas centradas no que os alunos sabem e não no que não sabem. Relativamente à multiplicação aprendi a apoiar a aprendizagem no que os alunos sabem para o que não sabem, fazendo uma ligação importante na aprendizagem dos alunos.

A metodologia utilizada neste trabalho permitiu-me perceber a complexidade de conduzir entrevistas clinicas, partindo de uma primeira entrevista onde cometi diversos erros para as entrevistas seguintes onde já consegui realiza-las de forma segura e também com um olhar diferente tanto pela aprendizagem dos alunos como pelo seu conhecimento matemático.

# Bibliografia


- Afonso, N. (2005). Investigação Naturalista em Educação. Porto: Edições ASA.

- Boavida, A., Silva, M., & Fonseca, P. (2009) *Pequenos investigadores matemáticos: Do pensamento à comunicação e da comunicação ao pensamento*. Educação e Matemática. Número 102, 2 – 10.

- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). "Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à Teoria e aos Métodos". Porto: Porto Editora.

- Brocardo, J., Delgado, C.& Mendes, F. (2007). *A multiplicação no contexto do sentido do número* in Equipa do Projeto Desenvolvendo o sentido do número: Perspetivas e exigências curriculares. *Desenvolvendo o sentido do número: Perspetivas e exigências curriculares. Materiais para o professor do 1ºciclo. Vol.II.*Lisboa:APM.

- Brocardo, J., Serrazina, L. & Rocha, I. (2008). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática.* Lisboa: Escolar Editora.

- Catalão, I. Mª; Jorge, Mª. A. & Cangueiro, Mª. L. (1994). "Descobrindo a Matemática – 5º Ano". Texto Editora, Lisboa.

- Cerqueira, M. F. & Domingos, L. R. (1987). "Matemática 2 – 6º Ano Escolariedade". Empresa Literária Fluminense, Lisboa.

- Hunting, R. (1997). Clinical Interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165.

- Kraemer, J. M., Brocardo, J., Mendes, F. & Delgado, C. (2014). "Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning". Paper presented no ECER, Porto;

- Meirieu, Philippe (2002). *A pedagogia entre o dizer e o fazer: a coragem de começar* (trad. por Fátima Murad). Porto Alegre: Artmed. ISBN: 85-7307-879-0.

- Mendes, F. (2012). “A aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1º ciclo”. Universidade de Lisboa.

- Mendes, F., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2013). *A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação.* Revista Quadrante, Vol XXII.

- Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2011). *A multiplicação: Construir oportunidades para a sua aprendizagem* in M. Isoda & R. Olfos. Valparaíso, Chile.

- Mendes, F., Oliveira, H., & Brocardo, J. (2007). *As potencialidades de sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação*. Lisboa.

- Ministério da Educação (2004) *Organização curricular e programas do 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa

- Monteiro, A., Loureiro, C., Nunes, F., & Gonçalves, H. (2007). *Programa de formação contínua em matemática para professores do 1º e 2º ciclo: Multiplicação e divisão (tarefas -1).* Escola Superior de Educação de Lisboa.

- NCTM (1991). Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar. Lisboa: APM/IIE.

- Palhares, P. *Números e Operações*. Lidel, outubro de 2004.

- Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D. & Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos: tarefas e desafios para a sala de aula.* Lisboa. Texto Editores.

- Postic, Marcel (2007). *A Relação Pedagógica*. Sintra: Padrões Culturais. ISBN 978-972-872-176-3.

- Quivy, Raymond – “Panorama dos principais métodos de recolha de informação” in *Manual de investigação em ciências sociais*. Lisboa: Gradiva, 1992. 282 p. (p.p 191-195).

- Santos, E., Menino, H., Rocha, I., Botas, P., & Lucas, T. (2005). *Estratégias de multiplicação: Uma experiência curricular de desenvolvimento do sentido do número*. Educação e Matemática, número 85.

- Sequeira, L., Freitas, P. & Nápoles, S. (2009). "Números e Operações – Programa de formação contínua em matemática para professores do 1º e 2º ciclo do Ensino Básico". DGIDC, Ministério da educação, Lisboa.

- Serrazina, L., & Monteiro, C. (2000). *Professores e novas competências em Matemática no 1º ciclo*. Escola Superior de Educação de Lisboa.

- Walsh, Daniel, Tobin, Joseph, Graue, Elizabeth. *A voz interpretativa: investigação interpretativa em educação de infância* IN SPODEK, B. (Org.), (2002). *Manual de Investigação em Educação de Infância*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. ISBN 972-31-0965-4.

- Franco, Mª Amélia (2003). *A pedagogia para além dos confrontos*. Educação On – Line.

Fonte: http://www.educacaoonline.pro.br/index.php?option=com_content&view=article&id=325:a-pedagogia-para-alem-dosconfrontos&catid=4:educacao&Itemid=15

[Consultado a 16/08/14]

**Referências legislativas**

- DECRETO- LEI Nº 241/2001 de 30 de agosto, publicado no Diário da República, I Série - A, n.º 201, de 30 de agosto de 2001.

# Anexos

**Anexo 1:** Tarefa proposta aos alunos.

**Espetadas**

Para o seu almoço de aniversário o Vasco quer fazer espetadas de camarão. Ele hesita entre fazer espetadas com três camarões cada uma ou com cinco cada uma.

Explica o que o Vasco está a pensar. O que é que tu farias? Porquê?

O Vasco conta os camarões que a mãe comprou: …52, 54, 56, 58, 60, 61!

- Imagina o número de espetadas que pode fazer. Serão mais ou menos quantas? Mais do que 5? Mais do que 10? Mais do que 20? …
- O que poderias fazer para determinar o número exato de espetadas?

**Anexo 2:** Projeto no qual incide o meu projeto final.

**Entrevistas clínicas para estudar a flexibilidade no cálculo numérico**

Joana Brocardo, Fátima Mendes, Catarina Delgado

ESE/IPS

joana.brocardo@ese.ips.pt, fatima.mendes@ese.ips.pt, catarina.delgado@ese.ips.pt

**Introdução**

No âmbito do projeto de investigação '*Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos'* foram usadas entrevistas clínicas cuja análise suportou uma primeira fase do seu desenvolvimento, focada na conceção de tarefas adequadas ao estudo da flexibilidade de cálculo.

Neste texto, a par de uma reflexão sobre as potencialidades e limitações das entrevistas clínicas, analisamos o modo como a sua análise nos permitiu avançar na conceção de tarefas numéricas adequadas ao desenvolvimento do cálculo mental flexível.

**O projeto**

Embora começando ainda em 2012, o ano de 2013 marcou o início do desenvolvimento sistemático do projeto 'Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos', cuja equipa integra docentes das Escolas Superiores de Educação de Setúbal, Lisboa e Portalegre. Este projeto tem como principais objetivos:

- Identificar os conhecimentos conceptuais dos alunos que estão em jogo nos diferentes níveis de compreensão das operações/relações numéricas;

- Analisar se, e como, estes conhecimentos lhes permitem usar flexivelmente o cálculo mental;

- Estudar as implicações para a construção e exploração de tarefas, a formação de professores e a avaliação diagnóstico do desenvolvimento do cálculo mental.

Neste texto caracterizamos a fase que decorreu entre janeiro e outubro de 2013, focada no aprofundamento do entendimento de cálculo mental flexível, articulando uma reflexão sobre a literatura de referência com a conceção de tarefas numéricas.

**Metodologia**

As tarefas concebidas pela equipa foram resolvidas por alunos com idades compreendidas entre os 6 e os 12 anos, ao longo de entrevistas clínicas, conduzidas por investigadores que integram a equipa do projeto.

As potencialidades das entrevistas clínicas são reconhecidas por autores como Hunting (1997), que salientam que elas podem ser usadas para envolver os alunos na resolução de uma tarefa, percebendo, a cada passo, o que ele pensa ou faz. De um modo global, o investigador (ou o professor) tem acesso à forma de pensar do aluno, percebendo os conhecimentos em que ele suporta a sua resolução da tarefa e o modo como os usa e relaciona.

Antes da realização das entrevistas clínicas importa definir um protocolo que, embora global, oriente a ação do entrevistador/investigador para se focar nos aspetos que define previamente como relevantes. No caso deste projeto, o protocolo centra-se em dois objetivos centrais: i) procurar que os alunos nos ‘ensinem’ a perceber como pensam (no fim da entrevista o entrevistador deve ser capaz de resolver o problema usando os procedimentos e as palavras/símbolos/representações dos alunos) e ii) verificar se os alunos conseguem avançar para estratégias mais ‘poderosas’ explicitando as relações que estabelecem.

**Anexo 3:**

Entrevista de preparação

Gravação 1, 11 min e 11 segundos, dia 20 setembro 2014

- **Mi: Como te chamas?**
- Bruna: Bruna Cardoso Santos.
- **Mi: E tens quantos anos?**
- Bruna: 8.
- **Mi: Estas em que ano?**
- Bruna: 3º.
- **Mi: Trouxe uma tarefa que se chama espetadas, espetadas de camarão. Podes ler o enunciado para ver se percebes?**
- Bruna: Para o seu almoço de aniversário o Vasco quer fazer espetadas de camarão. Ele hesita entre fazer espetadas com três camarões cada uma ou com cinco cada uma.
- Explica o que o Vasco está a pensar. O que é que tu farias? Porquê?
- O Vasco conta os camarões que a mãe comprou: …52, 54, 56, 58, 60, 61!
- **Mi: Porque achas que o Vasco está a hesitar escolher espetadas com 3 ou 5 camarões? Imagina é uma festa de aniversário e vão muitos amigos, quando tu fazes anos vão as tuas amigas todas não é?**
- Bruna: É.
- **Mi: Então imagina, se tu fizesses anos, e um dos pratos fosse espetadas de camarão, tu fazias espetadas de 3 ou de 5?**
- Bruna: Com 5.
- **Mi: Porque?**
- Bruna: Porque se for 3 era muito pouco.
- **Mi: Então as pessoas se escolhessem comer espetadas comiam poucos camarões se fossem de três? Preferes que comam mais camarões?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: Se tivéssemos espetadas com 5 camarões como escolheste íamos ter mais espetadas ou menos espetadas?**
- Bruna: Mais.
- **Mi: Porque?**

- Bruna: Porque 5 é mais do que 3.
- **Mi: Exatamente, só que pensa numa coisa, se pusermos 5 camarões em cada espetada ficamos com espetadas de 5 camarões, sendo assim temos mais espetadas ou menos espetadas?**
- Bruna: Menos, porque são mais camarões.
- **Mi: Então gastas mais camarões numa espetada e por isso ficas com menos espetadas, muito bem, bom pensamento. O vasco começa a contar os camarões com a mãe dele, 61 camarões. Imagina o número de espetadas que se pode fazer com 61 camarões, escolheste espetadas de 5 camarões, quantas espetadas achas que vão conseguir fazer?**
- (Silêncio)
- **Mi: O que estas a pensar?**
- Bruna: 5+5+5+5+5+5… até ao 61.
- **Mi: E achas que isso vai dar mais ou menos quantas? Será que são mais de 5 espetadas?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: E mais de 10?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: E mais de 20?**
- Bruna: Não.
- **Mi: O que podes fazer por escrito para determinar o número de espetadas? Há algum cálculo que te leve a esse número? O número exato de espetadas…Podes me ir dizendo o que pensas, ajuda falar alto…**
- Bruna: 5… +… 5…. São duas espetadas…
- **Mi: Achas que arranjas uma maneira de saber o número de espetadas mais rápido? Sem ser a somar?**
- Bruna: Sim…
- **Mi: Como?**
- Bruna: 5x61
- **Mi: Achas que 5 x 61 vai dar o número de espetadas? Experimenta, vai experimentando para ver o que dá.** (silêncio) **O que estas a pensar?**
- Bruna: 5x10=50
- - Mais 10 dá 60 + 1 dá 61

- **Mi: Muito bem, mas conseguimos descobrir o número de espetadas?**
- Bruna: 21.
- **Mi: Qual foi o teu pensamento para chegarmos ao 21?**
- Bruna: Foi…ah..somar os 2 dez e depois mais 1.
- **Mi: Então se eu somar os 2 dez mais 1 dá 21, achas que vamos ter 21 espetadas?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: Então mas cada espetada tem 5, se são cinco camarões em cada espetada vamos ter 21 espetadas?**
- (Silêncio)
- **Mi: Faz as contas, pode ser que ajude…Uma espetada tem 5 camarões e nos temos 61 camarões certo, temos que descobrir quantas espetadas conseguimos, como fazemos isto?**
- Bruna: Ah… (silencio).
- **Mi: Era mais fácil para ti através da soma?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: Então faz…**
- Bruna: 5+5 são duas espetadas, + 5 são 3… mais 5 são cinco espetadas…
- **Mi: Já temos ai quantos camarões?**
- Bruna: 25.
- **Mi: Já chega?**
- Bruna: Não.
- Bruna: Mais 5, 6…mais 5…7…
- **Mi: Já temos 7 espetadas…**
- Bruna: Sim, mais 5, 8 espetadas, mais 5, 9 espetadas…
- **Mi: Já gastamos quantos camarões?**
- Bruna: 45…
- **Mi: Já chega para as espetadas?**
- Bruna: Não!
- **Mi: Mas uma coisa tinhas razão, vão ser mais que 10 espetadas, e tu achavas que era menos do que 20, não era?**
- Bruna: Era…
- **Mi: Então vamos continuar.**

- Bruna: Mais cinco, 10 espetadas, mais 5, 11 espetadas, mais 5, 12 espetadas, mais 5…
- **Mi: Então já tens quantos camarões?**
- Bruna: 60+1=61 camarões.
- **Mi: Muito bem, e deu quantas espetadas?**
- Bruna: 12
- **Mi: Multiplicando conseguias arranjar uma maneira de chegar as 12 espetadas? Achas que teria sido mais fácil multiplicando?**
- Bruna: Não sei…
- **Mi: Tu foste somando 5 + 5 + 5, conseguias fazer isso de outra maneira?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: Qual?**
- Bruna: Ah… (silencio)
- **Mi: O que estas a pensar?**
- Bruna: 5 x 60
- **Mi: Isso dá quanto? Faz ai na folha…** (demorou um pouco) **O que estas a fazer agora?**
- Bruna: A somar o 5 até ao 60…
- **Mi: Então mas isso já fizeste à bocado. Se formos somar 5 x 60, estamos a somar 5 camarões de cada espetadas vezes 60 camarões, vai dar o número que nós queremos? O número de espetadas… que tu pela soma descobriste e muito bem que são 12. Consegues uma maneira mais fácil?**
- Bruna: 5 x 12
- **Mi: Faz lá isso então…como costumas fazer?**
- Bruna: 5 x 10 = 50
- **Mi: Qual é o teu pensamento?**
- Bruna: + 5 x 2 que dá 10…Dá um total de 60.
- **Mi: Ou seja por ai também chegamos ao resultado, tens 12 espetadas, e consegues fazer mais alguma espetada?**
- Bruna: Não, só sobrou 1.
- **Mi: E se fizéssemos espetadas com 3 camarões, iriamos ter mais ou menos espetadas?**
- Bruna: Mais.
- **Mi: Porque?**

- Bruna: Porque o número é mais pequeno.
- **Mi: O número de camarões?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: E achas que íamos ter mais do que 5 espetadas?**
- Bruna: Sim
- **Mi: E do que 10?**
- Bruna: Também.
- **Mi: Chegaríamos às 20 espetadas? Era uma grande festa…**
- Bruna: Ah…
- **Mi: Sim ou não?**
- Bruna: Sim…
- **Mi: E o que podes fazer para comprovar isso? Vamos descobrir quantas espetadas iriamos conseguir?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: O que estas a pensar?**
- Bruna: Como vou fazer.
- **Mi: Qual é a tua ideia?**
- Bruna: Tentar descobrir o resultado mas de uma forma mais simples.
- **Mi: Sem teres que somar os 3 todos?**
- Bruna: Sim, é um número mais pequeno.
- **Mi: Qual é a tua ideia para ser mais fácil?**
- Bruna: Fazer 3 x o 20.
- **Mi: Força. Porque que pensaste em 3 x 20?**
- Bruna: Porque eu acho que dá… 3 x 0 dá 0 e 3 x 2 dá 6.
- **Mi: Isso quer dizer o que?**
- Bruna: Que são 60.
- **Mi: 60 que?**
- Bruna: Espetadas.
- **Mi: De certeza? Vamos fazer outra coisa… este 3 quer dizer o que?**
- Bruna: O número de camarões.
- **Mi: E tu arranjaste o 20 porque pensavas que 20 era o que?**
- Bruna: Espetadas.

- **Mi: Então se 3 é o número de camarões que puseste em cada espetada e 20 são o número de espetadas, 60 é o que? É um total certo?**
- Bruna: Sim.
- **Mi: De que?**
- (silêncio)
- **Mi: Pensa alto que ajuda.**
- **Mi: Vamos recapitular, 3 é o número de camarões em cada espetada, 20 são o número de espetadas, o 60 é o número de que? Flores? Cogumelos?**
- Bruna: 60 espetadas.
- **Mi: Então mas disseste-me que são 20 espetadas, como é que estas a dizer agora que são 60? Se são 20 espetadas com 3 camarões cada, 60 é o total de que?**
- (silêncio)
- **Mi: Estas a pensar em que? Não te ocorre nada para o 60? Estamos a fazer espetadas de que?**
- Bruna: De três…
- **Mi: Mas o que é que estas a colocar nas espetadas?**
- Bruna: Camarões…
- **Mi: E a mãe do Vasco comprou quantos camarões?**
- Bruna: 61
- **Mi: Então e se 3 é o numero de camarões em cada espetada, se vamos ter 20 espetadas na festa, 60 é o que?**
- Bruna: É o número de camarões que a mãe do Vasco comprou.
- **Mi: Exatamente…Sobrou quantos camarões?**
- Bruna: 1.
- **Mi: Porque que achas que foi tão difícil perceber que o 60 era o número de camarões?**
- Bruna: Era para descobrir o número de espetadas e eu pensava que era 60, por dar 60 na conta.
- **Mi: E porque achaste que eram 20 espetadas?**
- Bruna: Porque o número 3 é pequeno.
- **Mi: É pequeno?**
- Bruna: Sim.

- **Mi: Então podias ter dito 30 espetadas? Ou foi porque eu te falei no número 20? Quando te perguntei se dava mais do que 20?**
- Bruna: Sim…
- **Mi: Obrigada pela tua participação Bruna.**

**Anexo 4:**

1ª Entrevista

Gravação 2, 7 minutos e 19 segundos, dia 3 novembro 2014

- **Entrevistadora - Como te chamas?**
- Aluna – Márcia.
- **Entrevistadora - Tens quantos anos?**
- Aluna – 8.
- **Entrevistadora - Estas no terceiro ano?**
- Aluna – Sim. 3º B.
- **Entrevistadora - Gostas de matemática?**
- Aluna - Sim.
- **Entrevistadora – Isso é ótimo, lê esta tarefa de matemática e vamos resolve-la.**

  (O aluno lê)
- **Entrevistadora - O vasco vai fazer anos, e a mãe vai fazer-lhe uma festa de aniversário. Se fosse a tua festa escolhias espetadas de 3 ou de 5 camarões?**
- Aluna – 5.
- **Entrevistadora - Porque?**
- Aluna - Não sei.
- **Entrevistadora - Mas porque que escolheste 5 em vez de 3?**
- Aluna - Não sei.
- **Entrevistadora - Porque espetadas de 5 camarões?**
- Aluna - Porque vejo sempre espetadas com muitas, não só com 3.
- **Entrevistadora - O vasco começa a contar os camarões com a mãe…61, compraram 61, mais ou menos quantas espetadas de 5 camarões achas que eles vão conseguir fazer?**
- Aluna - Umas 20.
- **Entrevistadora - Porque 20?**
- Aluna - Não sei.
- **Entrevistadora - Mas porque que disseste o número 20?**
- Aluna - Pensei no 30, mas era muito e por isso disse 20.

- **Entrevistadora - O que podes fazer para sabermos o número exato de espetadas? Podes escrever no papel.**

  (Faz os cálculos no papel)
- Aluna - Não dá.
- **Entrevistadora - Não dá porque?**
- Aluna - Faltava só um.
- **Entrevistadora - Para que?**
- Aluna - Para fazer todas as espetadas.
- **Entrevistadora - São quantas?**

  (Conta os cincos)
- Aluna – 12.
- **Entrevistadora - Em 12 espetadas usaste quantos camarões?**
- Aluna – 60.
- **Entrevistadora – E a mãe do vasco tinha comprado 61, isso quer o que?**
- Aluna - Sobrou um camarão.

**Anexo 5:**

2ª Entrevista

Gravação 3, 6 minutos e 1 segundo, dia 3 novembro 2014

- **Entrevistadora - Como te chamas?**
- Aluno – Ivan.
- **Entrevistadora - Tens quantos anos?**
- Aluno – 8.
- **Entrevistadora - Estas no terceiro ano?**
- Aluna – Sim. 3º B.
- **Entrevistadora - Gostas de matemática?**
- Aluno - Adoro.
- **Entrevistadora – Isso é ótimo, lê esta tarefa de matemática e vamos resolve-la.**
  (O aluno lê)
- **Entrevistadora- Se fosse o teu aniversário querias espetadas de 3 ou de 5?**
- Aluno – Cinco.
- **Entrevistadora - Porque?**
- Aluno - Porque gosto muito de camarões.
- **Entrevistadora - A mãe do vasco comprou 61 camarões, achas que dá para fazer mais ou menos quantas espetadas?**
- Aluno – 12.
- **Entrevistadora - Porque 12?**
- Aluno - Porque 5 x 12 é igual a 60 e sobra um camarão.

**Anexo 6:**

3ª Entrevista

Gravação 3, 15 minutos e 37 segundos, dia 3 novembro 2014

- **Entrevistadora - Como te chamas?**
- Aluno – Rafael.
- **Entrevistadora - Tens quantos anos?**
- Aluno – 8.
- **Entrevistadora - Estas no terceiro ano?**
- Aluna – Sim. 3º C.
- **Entrevistadora - Gostas de matemática?**
- Aluno – Sim.
- **Entrevistadora – Muito bem, lê esta tarefa de matemática e vamos resolve-la.**

  (O aluno lê)
- **Entrevistadora- Se fosse o teu aniversário querias espetadas de 3 ou de 5?**
- Aluno – Cinco.
- **Entrevistadora - Mas porque?**
- Aluno - Porque assim se um não quisesse comer a espetada toda dava a outro colega e não se gastava muito dinheiro.
- **Entrevistadora - Então uma espetada dava pra dois?**
- Aluno – Sim.
- **Entrevistadora - a mãe do vasco comprou 61 camarões, quantas espetadas achas que vão conseguir fazer?**
- Aluno – 10.
- **Entrevistadora - Não te esqueças é que cada espetada tem 5 camarões.**
- Aluno - Não pode ser 10 porque se não era 50.
- **Entrevistadora - Porque?**
- Aluno - Porque 10 x 5 é 50, é a tabuada do 5.

  (O aluno escreve a tabuada do 5)
- Aluno - 10 x 5 é igual a 50, e não ia dar porque ia sobrar muito.

- **Entrevistadora - Mas sendo assim já sabes que em 10 espetadas gastas 50 camarões, falta saber o resto, olhando para ai achas que dá para fazer mais quantas espetadas?**
  (Somou mais o 11 e o 12 que deu 60)
- Aluno - Aqui não se pode somar mais nada.
- **Entrevistadora - Porque?**
- Aluno - Porque ia dar 65 e o vasco não comprou 65, só comprou 61.
- **Entrevistadora - Então deu quantas espetadas com os 61 camarões?**
- Aluno – 12.
- **Entrevistadora - E o outro camarão?**
- Aluno - Ele deixou para os familiares.

**Anexo 7:**

4ª Entrevista

Gravação 4, 33 minutos e 27 segundos, dia 3 novembro 2014

- **Entrevistadora - Como te chamas?**
- Aluno – António.
- **Entrevistadora - Tens quantos anos?**
- Aluno – 8.
- **Entrevistadora - Estas no terceiro ano?**
- Aluno – Sim. 3º A.
- **Entrevistadora - Gostas de matemática?**
- Aluno – Sim.
- **Entrevistadora – Muito bem, lê esta tarefa de matemática e vamos resolve-la.**

(O aluno lê o enunciado)

- **Entrevistadora - António se fosse o teu aniversário escolhias espetadas com 3 ou 5 camarões?**
- Aluno - Não sei.
- **Entrevistadora - Mas só tens que escolher, preferes com 3 ou 5 camarões?**
- Aluno - 3 camarões.
- **Entrevistadora - Porque?**
- Aluno - Para haver mais espetadas.
- **Entrevistadora - O vasco foi as compras com a mãe e compraram 61 camarões. quantas espetadas achas que conseguirão fazer? Mais do que 5?**
- Aluno – Sim.
- **Entrevistadora - Mais do que 10?**
- Aluno – Sim.
- **Entrevistadora - Mais do que 20?**
- Aluno – Sim.
- **Entrevistadora - Porque?**
- Aluno - Porque são só 3, então dá para fazer mais.
- **Entrevistadora - E como achas que podes achar o número de espetadas? Utiliza a folha para fazer os cálculos que precisares.**

- Aluno - 3 a dividir por 61.
- **Entrevistadora - Se fizeres isso achas que vai dar o número de espetadas?**
- Aluno – Sim.
- **Entrevistadora - Porque?**
- Aluno - Por em cada uma há 3 e compraram 61 camarões.
- **Entrevistadora - Mas consegues fazer isso?**
- Aluno – Não.
- **Entrevistadora - Tu queres é dividir o número de camarões pelo número de camarões em cada espetada.**
- Aluno - Quantos são os camarões?
- **Entrevistadora – 61.**
- Aluno - E o número de camarões em cada espetada?
- **Entrevistadora – 3.**
- Aluno - E assim já consegues chegar ao número de espetadas? Faz lá.
- **Entrevistadora - Não consigo.**
- Aluno - Na sala como consegues fazer essas contas?
- **Entrevistadora - Vamos à tabuada.**
- **Entrevistadora - E sabes a tabuada?**
- Aluno – Sim.
- **Entrevistadora - Então faz.**
- Aluno - Não sei.
- **Entrevistadora - Queres fazer de outra maneira? Qual é a outra forma que podes descobrir o número de espetadas?**
- Aluno - António uma espetada tem quantos camarões?
- **Entrevistadora – 3.**
- Aluno - E 2 espetadas?
- **Entrevistadora – 6.**
- Aluno - E 10 espetadas?
- **Entrevistadora - 30 camarões.**
- Aluno - Não achas melhor escrever para não te esqueceres? Já sabes que uma espetada tem 3 camarões…

  (escreve)

- **Entrevistadora - Achas que esta quase?**
- Aluno - Sim, estamos perto dos 61.
- **Entrevistadora - Isto é o que?**
- Aluno – 20.
- **Entrevistadora - 20 que?**
- Aluno – Espetadas.
- **Entrevistadora - Gastaste quantos camarões?**
- Aluno - 60.