



# ESCOLA NAVAL



*ta sainte & bief faire*

Mário Manuel Malta Ribeiro

**Técnicas de cálculo de trajetórias de raios  
acústicos e respetivas simulações**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia  
Naval Ramo de Armas e Eletrónica



Alfeite

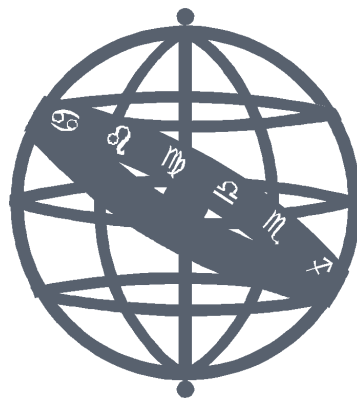
2021





# ESCOLA NAVAL

*talant de bi-faire*



Mário Manuel Malta Ribeiro

*Técnicas de cálculo de trajetórias de raios acústicos e  
respetivas simulações*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia Naval Ramo  
de Armas e Eletrónica

**Orientação de:** Mário Alexandre Pousão da Costa Gatta

**Co-orientação de:** Miguel Ângelo Pereira Bento Moreira

*O Aluno Mestrando,*

*O Orientador,*



Mário Ribeiro



Mário Gatta

Alfeite

2021



"I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me."

Isaac Newton



Dedico este trabalho ao meu pai que me acompanhou, acompanha e acompanhará sempre para qualquer que seja o caminho.



# Agradecimentos

As minhas primeiras palavras serão para o meu orientador, Professor Mário Gatta por todo o apoio, compreensão, interesse e pela inteira disponibilidade ao longo deste ultimo ano.

Agradeço também ao meu co-orientador, Professor Miguel Moreira, pelo auxilio prestado durante todo o processo.

Ao Comandante Delgado Vicente e ao Comandante Videira Marques agradeço a rápida resposta e ajuda no acesso a certos dados do Instituto Hidrográfico.

Por último, aos meus pais, irmão e toda a minha família por Tudo, pela certeza de que sempre que cair serão eles a levantarem-me mas que também será ao lado deles que festejarei todas as minhas conquistas.



# Resumo

Esta dissertação será desenvolvida no âmbito de várias unidades curriculares leccionadas no mestrado integrado em Engenharia Naval ramo de Armas e Electrónica, e tem como objectivo contribuir para a produção de conhecimento científico da Marinha. Sendo Portugal um país maioritariamente marítimo, tudo o que lhe diz respeito tem interesse para o país e por isso torna-se importante um cada vez maior e melhor conhecimento na área da acústica submarina, que serve de suporte a muito do trabalho de investigação e caracterização do meio submarino.

O problema que se pretende resolver é a modelação de raios acústicos submarinos segundo um modelo de geometria diferencial capaz de ter em conta as heterogeneidades e movimentos do meio de propagação. Para se conseguir cumprir este objectivo serão estudadas as equações que definem estes fenómenos e será criado um modelo que se irá testar em fontes hidrotermais. Mas é de relevância referir que o mesmo pode ser aplicado a outros exemplos como as zonas costeiras, com a condicionante de que o efeito só será visível a maiores distâncias (kms) e os resultados não seriam tão fidedignos já que o modelo utilizado não tem em conta a dissipação do som. Como é sabido, terá de ser considerada uma gama de frequências suficientemente altas para que seja válida a aproximação geométrica.

Através de três diferentes expressões que relacionam a velocidade do som com a temperatura, que em traços largos são as disponíveis presentemente e utilizadas em outros trabalhos, são analisados os comportamentos dos diferentes parâmetros e o impacto que têm nas trajectórias dos raios acústicos junto das fontes hidrotermais.

Após o cálculo analítico, resolvem-se as equações obtidas num programa MATLAB onde, através do código aqui desenvolvido, se pode ter acesso aos mais variados gráficos do trajecto que os raios descrevem, sendo que o "emissor" considerado nestes gráficos não é nada mais do que o raio central de cada uma das ondas sonoras.

**Palavras-chave:** Acústica Submarina, Aproximação Geométrica, Raios Acústicos, Fontes Hidrotermais, Geometria diferencial.



# Abstract

This dissertation will be developed within the scope of several curricular units taught in the integrated master's degree in Naval Engineering in the speciality of Weapons and Electronics, and aims to contribute to the production of scientific knowledge in the Portuguese Navy. As Portugal is mainly a maritime country, everything that concerns it is of interest to the country and that is why it is important to have greater and better knowledge in the area of underwater acoustics, which we know, supports several of the research and characterization work of the underwater environment.

The problem to be solved is the modeling of underwater acoustic rays according to a model of differential geometry capable of taking into account the heterogeneities and movements of the propagation medium. In order to achieve this objective, the equations that define these phenomena will be studied and a model will be created that will be tested in hydrothermal sources. But it is important to mention that the same can be applied to other examples such propagation near coastal zones with the condition that the effect would be visible only at greater distances (kms) and the results would not be as reliable as the model used does not take into account the dissipation of sound in the water. As is known, a sufficiently high frequency range will be assumed for the geometric approximation to be valid.

Through three different expressions that relate the speed of sound to temperature, which in broad lines respond are some of the ones presently available and used in other works, the behavior of the different parameters and the impact they have on the trajectories of acoustic rays near hydrothermal vents are analysed.

After the analytical calculation, the equations obtained in a MATLAB program are solved, where, through the code herein developed, allow access to the most varied graphics of the path that the rays describe. The "emitter" considered in these graphics is nothing more than the central ray of each sound wave.

**Keywords:** Underwater Acoustics, Geometric Approximation, Acoustic Rays, Hydrothermal Vents, Differential Geometry.

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| Motivação  | 1         |
| Estrutura  | 9         |
| <b>1 Enquadramento teórico</b>   | <b>11</b> |
| 1.1 Tensores não Cartesianos, Diferenciação Covariante                     | 11        |
| 1.2 Derivada Covariante e Aparecimento dos Símbolos de Christoffel         | 16        |
| 1.3 Operações Diferenciais Tensoriais                                      | 19        |
| 1.3.1 Gradiente  | 19        |
| 1.3.2 Divergência  | 20        |
| 1.3.3 Laplaciano   | 23        |
| 1.4 Equações Geodésicas  | 24        |
| 1.5 Obtenção do Tensor Métrico Acústico                                    | 26        |
| <b>2 Do Tensor Métrico Acústico às Equações Geodésicas</b>                 | <b>35</b> |
| 2.1 Tensor e velocidade do som   | 35        |
| 2.2 Determinação do Campo de Temperatura                                   | 39        |
| 2.3 Determinação dos Coeficientes de Conexão                               | 39        |
| 2.3.1 Para o Modelo A  | 40        |
| 2.3.2 Para o Modelo B  | 43        |
| 2.3.3 Para o Modelo C  | 47        |
| 2.4 Determinação das Equações Geodésicas                                   | 52        |
| 2.4.1 Para o Modelo A  | 52        |
| 2.4.2 Para o Modelo B  | 54        |
| 2.4.3 Para o Modelo C  | 56        |
| <b>3 Cálculo e Resolução das Equações Geodésicas a Nível Computacional</b> | <b>61</b> |
| 3.1 O Programa   | 61        |
| 3.1.1 Campo de Temperatura   | 61        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.1.2    | Tensor e Expressões de $c(T)$                                  | 65        |
| 3.1.3    | Símbolos de Christoffel  | 66        |
| 3.1.4    | Equações Geodésicas  | 71        |
| 3.1.5    | Variações Adicionais   | 75        |
| <b>4</b> | <b>Simulações Numéricas e Discussão</b>                        | <b>77</b> |
| 4.1      | Modelo A   | 77        |
| 4.1.1    | Análise da variação do parâmetro $\alpha_1$                    | 78        |
|          | Para $A=400^\circ\text{C}$ :                                   | 78        |
|          | Para $A=100^\circ\text{C}$ :                                   | 79        |
| 4.1.2    | Análise da variação do parâmetro $\alpha_0$                    | 80        |
|          | Para $A=400^\circ\text{C}$ :                                   | 80        |
|          | Para $A=100^\circ\text{C}$ :                                   | 82        |
| 4.1.3    | Análise do efeito da variação da temperatura máxima $A$        | 82        |
|          | Para $A=100^\circ\text{C}$ :                                   | 83        |
|          | Para $A=400^\circ\text{C}$ :                                   | 84        |
|          | Para $A=700^\circ\text{C}$ :                                   | 85        |
| 4.1.4    | Variações no número de fontes                                  | 85        |
|          | Para duas fontes com a mesma temperatura máxima ( $A$ ) e      |           |
|          | altura da chaminé ( $z_{11}$ )                                 | 86        |
|          | Para duas fontes com diferentes temperaturas máximas ( $A$ ) e |           |
|          | alturas das chaminés ( $z_{11}$ )                              | 87        |
| 4.2      | Modelo B   | 88        |
| 4.2.1    | Análise da variação do parâmetro $\alpha_1$                    | 88        |
|          | Para $A=400^\circ\text{C}$ :                                   | 89        |
|          | Para $A=100^\circ\text{C}$ :                                   | 90        |
| 4.2.2    | Análise da variação do parâmetro $\alpha_0$                    | 91        |
|          | Para $A=400^\circ\text{C}$ :                                   | 91        |
|          | Para $A=100^\circ\text{C}$ :                                   | 92        |
| 4.2.3    | Análise do efeito da variação da temperatura máxima $A$        | 93        |
|          | Para $A=100^\circ\text{C}$ :                                   | 93        |
|          | Para $A=400^\circ\text{C}$ :                                   | 94        |
|          | Para $A=700^\circ\text{C}$ :                                   | 95        |
| 4.2.4    | Variações no número de fontes                                  | 96        |
|          | Para duas fontes com a mesma temperatura máxima ( $A$ ) e      |           |
|          | altura da chaminé ( $z_{11}$ )                                 | 96        |
|          | Para duas fontes com diferentes temperaturas máximas ( $A$ ) e |           |
|          | alturas das chaminés ( $z_{11}$ )                              | 98        |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 4.3  | Modelo C  | 99         |
| 4.3.1  | Análise da variação do parâmetro $\alpha_1$   | 99         |
|  | Para $A=400^\circ\text{C}$ :  | 100        |
|  | Para $A=100^\circ\text{C}$ :  | 101        |
| 4.3.2  | Análise da variação do parâmetro $\alpha_0$   | 101        |
|  | Para $A=400^\circ\text{C}$ :  | 102        |
|  | Para $A=100^\circ\text{C}$ :  | 103        |
| 4.3.3  | Análise do efeito da variação da temperatura máxima $A$   | 104        |
|  | Para $A=100^\circ\text{C}$ :  | 104        |
|  | Para $A=400^\circ\text{C}$ :  | 105        |
|  | Para $A=700^\circ\text{C}$ :  | 106        |
| 4.3.4  | Variações no número de fontes   | 106        |
|  | Para duas fontes com a mesma temperatura máxima ( $A$ ) e<br>altura da chaminé ( $z_{11}$ )         | 107        |
|  | Para duas fontes com diferentes temperaturas máximas ( $A$ ) e<br>alturas das chaminés ( $z_{11}$ ) | 108        |
| 4.4  | Análise Global dos Resultados   | 109        |
| <b>Conclusão</b>                                       |   | <b>110</b> |
| <b>Bibliografia</b>                                    |   | <b>115</b> |
| <b>Apêndices</b>                                       |   | <b>117</b> |
| <b>A Cálculo analítico dos símbolos de Christoffel</b> |   | <b>117</b> |
| A.1  | Para o Modelo A   | 118        |
| A.2  | Para o Modelo B   | 125        |
| A.3  | Para o Modelo C   | 128        |
| <b>B Equações Geodésicas Finais</b>                    |   | <b>135</b> |
| B.1  | Equações finais para o Modelo A   | 136        |
| B.2  | Equações finais para o Modelo B   | 136        |
| B.3  | Equações finais para o Modelo C   | 138        |
| <b>C Campo Temperatura</b>                             |   | <b>141</b> |
| <b>D Cálculo dos Símbolos de Christoffel</b>           |   | <b>143</b> |
| <b>E Equações Geodésicas e Trajetórias Acústicas</b>   |   | <b>149</b> |



# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | Mapa com os limites exteriores da plataforma continental estendida.   | 2  |
| 2   | Classificação do relevo submarino e profundidades médias correspondentes.   | 3  |
| 3   | Programa SEAMAP 2030 (Mapeamento do mar português).   | 3  |
| 4   | Mapa do monte submarino Gigante.  | 4  |
| 5   | "Chaminé negra" e "Chaminé branca", respetivamente.   | 5  |
| 6   | Fonte hidrotermal dos Açores <i>LuckyStrike</i> .   | 6  |
| 7   | Distribuição global das fontes hidrotermais em alto mar confirmadas e ativas (pigmentação amarela). As caixas pretas indicam os países membros que patrocinam as reivindicações na área. As caixas brancas representam zonas económicas exclusivas. Os círculos grandes representam cada área biogeográfica para a qual se tinha dados suficientes disponíveis para se realizar a análise, em ordem decrescente do número de cruzeiros de pesquisa realizados na região: (1) <i>Mid-AtlanticRidge</i> , (2) <i>NorthwestPacific</i> , (3) <i>SouthwestPacific</i> , (4) <i>JuandeFucaRidge</i> , (5) <i>NorthernEastPacificRise</i> , (6) <i>Mid-CaymanSpreadingCenter</i> , (7) <i>IndianOcean</i> e (8) <i>SouthernOcean</i> . As áreas biogeográficas do Ártico, Mediterrâneo e Sul do Pacífico Leste não são indicadas. | 7  |
| 8   | Atividade de uma fonte hidrotermal.   | 8  |
| 1.1 | Coordenadas polares com transformação de rotação de $\theta$ .  | 12 |
| 2.1 | Gráficos da velocidade do som para as diferentes expressões.  | 38 |
| 3.1 | Condições iniciais e $T(x, y)$ .  | 62 |
| 3.2 | Queda da temperatura com a distância na horizontal e vertical ao centro da fonte para diversos valores de $\alpha_1$ e $\alpha_0$ , respetivamente.   | 62 |
| 3.3 | Intervalo de $x$ e $y$ e modo de vista.   | 63 |
| 3.4 | Distribuição de Temperaturas para um $z_0=0$ e $z_{11}=0$ .   | 63 |
| 3.5 | Distribuição de Temperaturas para um $z_0=3$ e $z_{11}=0$ .   | 64 |
| 3.6 | Distribuição de Temperaturas para um $z_0=6$ e $z_{11}=0$ .   | 64 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.7  | Distribuição de Temperaturas para um $z_0=9$ e $z_{11}=0$ .   | 65 |
| 3.8  | Campo de temperaturas simbólico.  | 65 |
| 3.9  | Expressões de $c(T)$ .  | 66 |
| 3.10 | Tensor métrico acústico para um fluido em repouso.  | 66 |
| 3.11 | Atribuição de valores a $\sigma, \mu, \nu$ .  | 67 |
| 3.12 | Ciclo <code>if</code> que obtém o valor de $\rho$ .   | 67 |
| 3.13 | Ciclo <code>if</code> que obtém o valor de $M$ .  | 68 |
| 3.14 | Ciclo <code>if</code> que obtém o valor de $N$ .  | 68 |
| 3.15 | Ciclo <code>if</code> que obtém o valor de $Q$ .  | 68 |
| 3.16 | Ciclo <code>if</code> que obtém o valor de $B$ .  | 69 |
| 3.17 | Ciclo <code>if</code> que obtém da derivada de $N$ ( $n$ ).   | 69 |
| 3.18 | Ciclo <code>if</code> que obtém da derivada de $Q$ ( $q$ ).   | 69 |
| 3.19 | Ciclo <code>if</code> que obtém da derivada de $B$ ( $b$ ).   | 70 |
| 3.20 | Criação de matriz <code>combinacoes</code> que contém todas as possibilidades<br>de combinação de $\sigma, \mu$ e $\nu$ .   | 70 |
| 3.21 | Ciclo <code>for</code> , matriz <code>s</code> e novos valores de <code>h</code> , <code>fe</code> e <code>w</code> .   | 71 |
| 3.22 | Criação das variáveis <code>t2</code> , <code>x2</code> , <code>y2</code> e <code>z2</code> .   | 72 |
| 3.23 | Aparecimento de <code>l1</code> .   | 72 |
| 3.24 | Aparecimento de <code>l2</code> .   | 72 |
| 3.25 | Criação das variáveis <code>T</code> , <code>X</code> , <code>Y</code> e <code>Z</code> .   | 73 |
| 3.26 | Separação de <code>c1_1</code> em <code>T</code> , <code>X</code> , <code>Y</code> e <code>Z</code> .   | 73 |
| 3.27 | Aparecimento e escrita $\text{\LaTeX}$ do sistema <code>[dWd1]</code> .   | 73 |
| 3.28 | Conversão de <code>[dWd1]</code> em <code>DWDL</code> .   | 74 |
| 3.29 | Condições iniciais, intervalo de integração e <code>ode45</code> .  | 74 |
| 3.30 | Rotina de desenho num gráfico $(x,y)$ das trajectórias dos raios.   | 74 |
| 3.31 | Parâmetros iniciais da nova fonte hidrotérmica.   | 75 |
| 3.32 | Intervalo de $x$ e $y$ da nova fonte hidrotérmica..   | 76 |
| 3.33 | Exemplo de um gráfico de quatro fontes hidrotérmicas com diferentes<br>temperaturas centrais máximas( $A$ ), diferentes posições e diferentes<br>alturas das chaminés( $z_{11}$ ).  | 76 |
| 4.1  | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valo-<br>res de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas car-<br>tesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura<br>máxima( $A$ ) de $400^\circ\text{C}$ , $\alpha_0 = 0.5$ e variações do valor de $\alpha_1$ . | 78 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.2 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $100^\circ\text{C}$ , $\alpha_0 = 0.5$ e variações do valor de $\alpha_1$ . . . . .  | 79 |
| 4.3 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $400^\circ\text{C}$ , $\alpha_1 = 8$ e variações do valor de $\alpha_0$ . . . . .  | 80 |
| 4.4 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $100^\circ\text{C}$ , $\alpha_1 = 8$ e variações do valor de $\alpha_0$ . . . . .  | 82 |
| 4.5 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de $0.02$ m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $100^\circ\text{C}$ . . . . . | 83 |
| 4.6 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de $0.02$ m, fixo no eixo do $x$ em $x=-0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $400^\circ\text{C}$ . . . . .   | 84 |
| 4.7 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de $0.02$ m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $700^\circ\text{C}$ . . . . . | 85 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.8  | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Temperaturas máximas ( $A$ ) iguais nas duas fontes, ambas as fontes com $A = 400^\circ\text{C}$ . Alturas de chaminés ( $z_{11}$ ) iguais, ambas as fontes com $z_{11} = 0$ m. Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem e fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas $(0.5, 0.18)$ . . . . .                      | 86 |
| 4.9  | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem, com temperatura máxima( $A$ ) igual a $400^\circ\text{C}$ e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de 0m. Fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas $(0.5, 0.18)$ , temperatura máxima( $A$ ) igual a $200^\circ\text{C}$ e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de 3m. . . . . | 87 |
| 4.10 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $400^\circ\text{C}$ , $\alpha_0 = 0.5$ e variações do valor de $\alpha_1$ . . . . .   | 89 |
| 4.11 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $100^\circ\text{C}$ , $\alpha_0 = 0.5$ e variações do valor de $\alpha_1$ . . . . .   | 90 |
| 4.12 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $400^\circ\text{C}$ , $\alpha_1 = 8$ e variações do valor de $\alpha_0$ . . . . .   | 91 |
| 4.13 | Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $100^\circ\text{C}$ , $\alpha_1 = 8$ e variações do valor de $\alpha_0$ . . . . .   | 92 |

|   |    |
|---|----|
| 4.14 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $100^\circ\text{C}$ . . . . .   | 93 |
| 4.15 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $400^\circ\text{C}$ . . . . .   | 94 |
| 4.16 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $700^\circ\text{C}$ . . . . .   | 95 |
| 4.17 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Temperaturas máximas ( $A$ ) iguais nas duas fontes, ambas as fontes com $A = 400^\circ\text{C}$ . Alturas de chaminés ( $z_{11}$ ) iguais, ambas as fontes com $z_{11} = 0$ m. Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem e fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas $(0.5, 0.18)$ . . . . .                      | 96 |
| 4.18 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem, com temperatura máxima( $A$ ) igual a $400^\circ\text{C}$ e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de 0m. Fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas $(0.5, 0.18)$ , temperatura máxima( $A$ ) igual a $200^\circ\text{C}$ e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de 3m. . . . . | 98 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.19 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $400^\circ\text{C}$ , $\alpha_0 = 0.5$ e variações do valor de $\alpha_1$ . . . . .  | 100 |
| 4.20 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $100^\circ\text{C}$ , $\alpha_0 = 0.5$ e variações do valor de $\alpha_1$ . . . . .  | 101 |
| 4.21 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $400^\circ\text{C}$ , $\alpha_1 = 8$ e variações do valor de $\alpha_0$ . . . . .  | 102 |
| 4.22 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas $(-0.2, 0.02)$ com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de $100^\circ\text{C}$ , $\alpha_1 = 8$ e variações do valor de $\alpha_0$ . . . . .  | 103 |
| 4.23 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de $0.02$ m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $100^\circ\text{C}$ . . . . . | 104 |
| 4.24 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de $0.02$ m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $400^\circ\text{C}$ . . . . . | 105 |
| 4.25 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de $0.02$ m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a $700^\circ\text{C}$ . . . . . | 106 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.26 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Temperaturas máximas ( $A$ ) iguais nas duas fontes, ambas as fontes com $A = 400^\circ\text{C}$ . Alturas de chaminés ( $z_{11}$ ) iguais, ambas as fontes com $z_{11} = 0$ m. Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem e fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas $(0.5, 0.18)$ . . . . .                      | 107 |
| 4.27 Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do $y$ num intervalo compreendido entre $[-0.2 ; 0.2]$ m com decrementos de 0.02m, fixo no eixo do $x$ em $x = -0.2$ m, ângulo de emissão igual a 0, $\alpha_1 = 8$ e $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem, com temperatura máxima( $A$ ) igual a $400^\circ\text{C}$ e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de 0m. Fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas $(0.5, 0.18)$ , temperatura máxima( $A$ ) igual a $200^\circ\text{C}$ e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de 3m. . . . . | 108 |



# Introdução

## Motivação

A importância da Acústica Submarina nas actividades da Marinha Portuguesa será evidente. Como se sabe, quer a detecção a sua minimização de sinais acústicos têm sido objecto de estudo e progresso tecnológico crescente desde praticamente a 1ª Guerra Mundial. Também a Marinha Portuguesa deve, em nossa opinião, manter formação actualizada neste tema e, neste sentido, teses de mestrado dos seus cadetes poderão constituir pontos de partida para a formação de um grupo de futuros oficiais particularmente formados nestes estudos, podendo, assim, ter uma base formativa que lhes permita, mais tarde, avançar no desenvolvimento interno destas competências.

O nosso país está cada vez mais próximo de vir a ser um dos maiores países marítimos do mundo. A expectável aprovação da extensão da plataforma continental terá impacto a todos os níveis pois garantirá a Portugal francas hipóteses de prosperação a nível económico, social, cultural e ambiental (Nogueira [2019](#)).

A proposta foi entregue em maio de 2009 e tem em vista alargar a área do solo e subsolo da Plataforma Continental (PC) das atuais 200 milhas contadas a partir das linhas da base, seja a de costa ou as de base reta - que unem dois pontos da costa portuguesa e onde a água mais próxima de terra é considerada como água interior (Freire [2019](#)).





FIGURA 2: Classificação do relevo submarino e profundidades médias correspondentes.

2

Em Portugal, está em curso um projecto SEAMAP 2030 que tem como objectivo mapear o fundo do mar português em imagens de alta resolução até ao final da década, revelando em detalhe o relevo submarino do país.

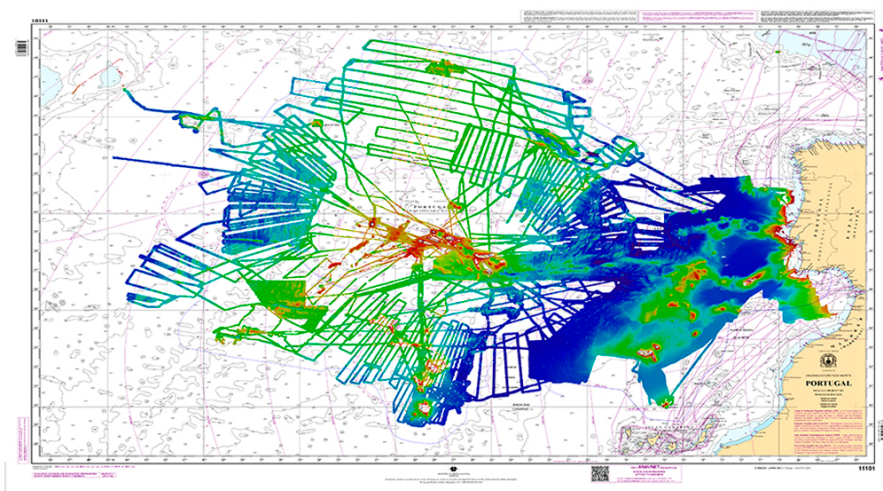


FIGURA 3: Programa SEAMAP 2030 (Mapeamento do mar português).

3

Para este mapeamento estão a ser utilizados sondadores multifeixe, ou seja, o navio equipado com esta tecnologia envia para o fundo do mar feixes sonoros numa

---

<sup>2</sup>Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/relevo-submarino.htm>

<sup>3</sup>Fonte: <https://www.hidrografico.pt/iprojeto/16>

abertura angular e, ao recebê-los de volta, cobre uma faixa longa do solo marinho (Firmino [2020](#)).

O conhecimento do fundo marinho não tem só impacto para a segurança da navegação, este também promove a gestão sustentável já que ao existir um melhor conhecimento dos recursos que se possui consegue-se tornar a sua exploração mais eficiente; Torna-se importante no apoio à tomada de decisão, pois garante o conhecimento necessário para que sejam tomadas melhores ações a nível económico, mas também ao nível da segurança, defesa e proteção civil e ainda potencia a investigação científica (IH [s.d.](#)).

É através destes e de outros projectos semelhantes que vão sendo descobertas certas estruturas oceânicas como por exemplo as fonte hidrotermais, que são um dos pontos centrais desta dissertação.

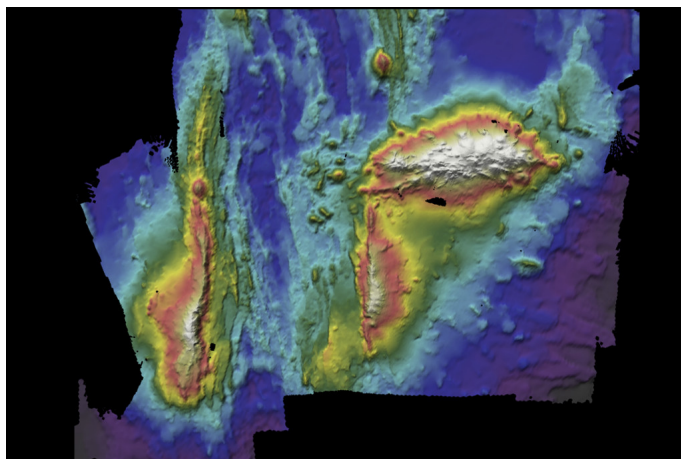


FIGURA 4: Mapa do monte submarino Gigante.

[4](#)

As fontes hidrotermais são nascentes quentes que se localizam a grandes profundidades no leito dos oceanos, que formam estruturas únicas, assemelhando-se a chaminés (Leahy [2018](#)).

São conhecidas como os vulcões sub-aquáticos que se encontram espalhados pelos limites das placas convergentes. Estas ainda podem ser diferenciadas em "chaminés negras" e "chaminés brancas" dependendo da sua composição química que irá alterar a cor com que podem ser visualizadas as suas fumarolas. Se a sua formação tiver por base depósitos de sulfeto de ferro, que é negro, teremos uma "chaminé negra", por sua vez se forem formadas por depósitos de bário, cálcio e silício terá um fumo de cor clara e por isso já será uma "chaminé branca" (NOOA [2021](#)).

<sup>4</sup>Fonte: <https://www.hidrografico.pt/noticia/378>

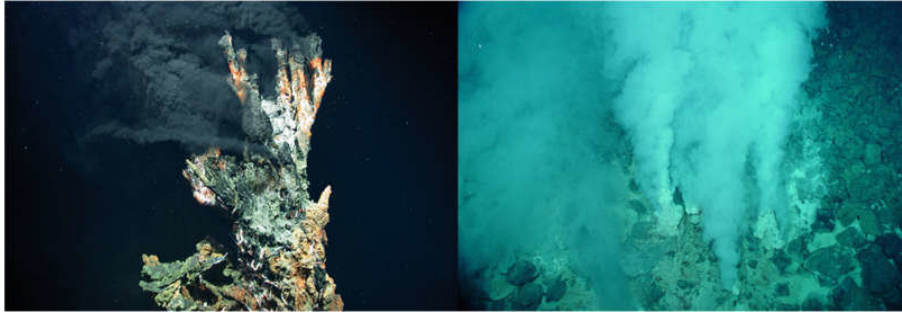


FIGURA 5: "Chaminé negra" e "Chaminé branca", respetivamente.

5

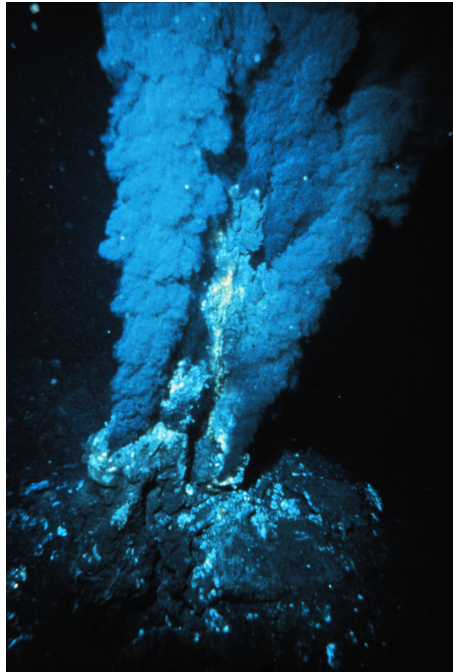
As fontes hidrotermais foram descobertos em 1977 enquanto um grupo de cientistas realizavam estudos nas ilhas Galápagos (NOOA [2021](#)). Daí em diante cada vez são mais os peritos da área a debruçarem-se sobre o assunto.

Uma das mais profundas e estudados fontes é a *BeebeventField* (BVF), que foi descoberta em 2010 no Mar das Caraíbas e encontra-se a uma profundidade de 4,960 metros. Esta emite fluidos enriquecidos em cobre, com uma pluma de cerca de 1100 metros (Connelly et al. [2012](#)).

No entanto não é necessário sair de Portugal para que se possam encontrar fontes hidrotermais, pois no arquipélago dos Açores também já foram descobertas. O primeiro campo de fontes hidrotermais foi descoberto em 1992, este denomina-se por *LuckyStrike* e a equipa norte-americana deparou-se com ele a 1700 metros abaixo do nível médio da água do mar. Para além dos 1700 metros de profundidade o *LuckyStrike* encontra-se a 180 milhas náuticas a sudoeste da ilha do Faial, numa área onde um lago de lava é rodeado por três pequenos vulcões. Neste campo podem ser observados tanto as "chaminés negras" como as "chaminés brancas" referidos anteriormente (Firmino [2009](#)).

---

<sup>5</sup>Fonte: [https://www.researchgate.net/figure/Hydrothermal-vent-chimneys-Left-the-candelabra-black-smoker-hydrothermal-vent-chimney\\_fig2340566377/download](https://www.researchgate.net/figure/Hydrothermal-vent-chimneys-Left-the-candelabra-black-smoker-hydrothermal-vent-chimney_fig2340566377/download)

FIGURA 6: Fonte hidrotermal dos Açores *LuckyStrike*.

6

Depois da *LuckyStrike* mais sete campos hidrotermais foram descobertos no arquipélago mas mais recentemente em 2018, também nos Açores, foi descoberto a apenas 570 metros de profundidade um novo campo hidrotermal, que se revelou uma descoberta extraordinária já que é o que se situa a uma menor profundidade que todos os outros conhecidos na Dorsal Médio-Atlântica (Leahy [2018](#)).

Com estes dois exemplos já dá para perceber que Portugal é também um país rico no que diz respeito a este tema o que ainda reforça mais a importância e a pertinência do estudo deste tema no nosso meio.

Foram mencionadas três campos de fontes hidrotermais: No entanto são apenas três das muitas que ainda estão por descobrir, apenas 400 de cerca de 1300 fontes existentes no nosso globo foram já localizadas (Beaulieu, Baker e German [2015](#)).

Por norma, as fontes situam-se em zonas de convergência de placas tectónicas, gerando cordilheiras montanhosas ou dorsais, mas também podem ser encontrados em bacias oceânicas ou *hotspots* (Leahy [2018](#)).

---

<sup>6</sup>Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hydrothermal\\_vents\\_and\\_seamounts\\_of\\_the\\_Azores/media/File:Blacksmoker\\_in\\_Atlantic\\_Ocean.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Hydrothermal_vents_and_seamounts_of_the_Azores/media/File:Blacksmoker_in_Atlantic_Ocean.jpg)

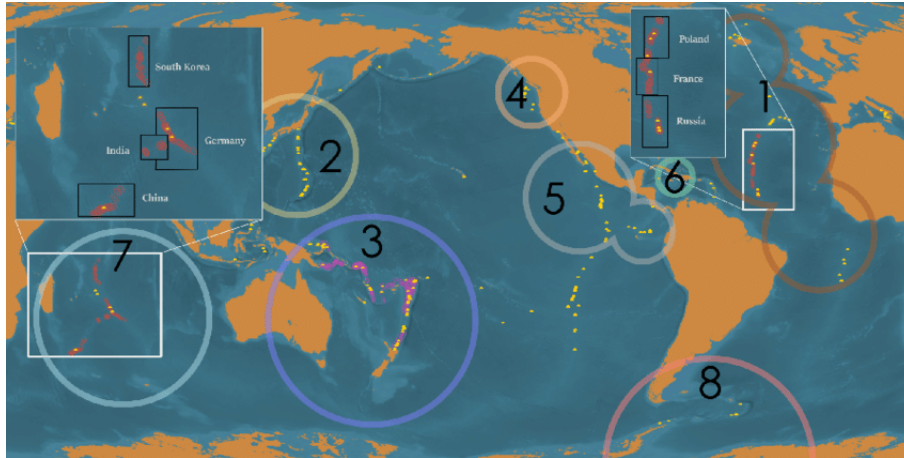


FIGURA 7: Distribuição global das fontes hidrotermais em alto mar confirmadas e ativas (pigmentação amarela). As caixas pretas indicam os países membros que patrocinam as reivindicações na área. As caixas brancas representam zonas económicas exclusivas. Os círculos grandes representam cada área biogeográfica para a qual se tinha dados suficientes disponíveis para se realizar a análise, em ordem decrescente do número de cruzeiros de pesquisa realizados na região: (1) *Mid–AtlanticRidge*, (2) *NorthwestPacific*, (3) *SouthwestPacific*, (4) *JuandeFucaRidge*, (5) *NorthernEastPacificRise*, (6) *Mid – CaymanSpreadingCenter*, (7) *IndianOcean* e (8) *SouthernOcean*. As áreas biogeográficas do Ártico, Mediterrâneo e Sul do Pacífico Leste não são indicadas.

7

Estas fontes resultam da infiltração da água do mar através de fissuras na crosta oceânica junto aos locais onde duas placas tectónicas se afastam ou se juntam. A água fria do mar (cerca de 2°C) infiltra-se no solo submarino e vai ser aquecida pela magma quente e ressurge no leito oceânico para formar as aberturas. Junto das fontes hidrotermais a água do mar pode atingir temperaturas superiores a 370°C. Apesar das altas temperaturas a água quente em fontes hidrotermais não ferve, facto que é explicado pela extrema pressão que existe nas profundezas do oceano onde estas fontes são formadas.

<sup>7</sup>Fonte: [https://www.researchgate.net/figure/Global-distribution-of-deep-sea-hydrothermal-vents-ISA-issued-high-seas-mining\\_fig1335002580/download](https://www.researchgate.net/figure/Global-distribution-of-deep-sea-hydrothermal-vents-ISA-issued-high-seas-mining_fig1335002580/download)

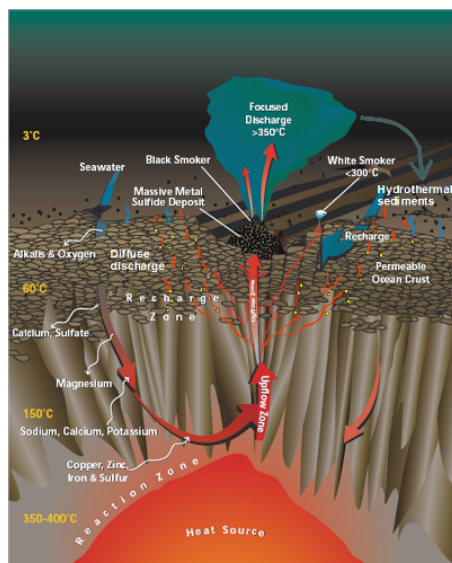


FIGURA 8: Atividade de uma fonte hidrotermal.

8

Por incrível que pareça apesar de toda esta pressão e escuridão subsequente da profundidade, estas fontes são capazes de abrigar centenas de espécies únicas de formas de vida, espécies essas que se adaptaram a todas estas características especiais do que as rodeia e criaram o seu próprio sistema (Leahy [2018](#)).

Por esta e por muitas outras razões está visto que as fontes hidrotermais merecem toda a nossa atenção, podendo vir a ter utilidade económica e sendo a missão da Marinha Portuguesa servir Portugal no mar o melhor conhecimento do mesmo irá ser útil no que diz respeito ao cumprimento da missão.

Este tema de investigação surge no âmbito dos conteúdos de várias das unidades curriculares frequentadas ao longo dos anos na Escola Naval, como as de “Acústica, Sonar e Armas Submarinas”, leccionada no quarto ano do ciclo de estudos da Classe de Engenharia Naval ramo de Armas e Electrónica (conjuntamente com o 3o ano da Classe de Marinha), bem como as de Análise Matemática, Programação, Álgebra, Análise Numérica, Mecânica Física, Electromagnetismo e Óptica.

A acústica enquanto ciência estuda ao fenómeno da produção, propagação e recepção de som em qualquer meio e para qualquer objectivo, objectivo este que tanto pode ser visto de uma forma puramente científica, mas também de uma forma táctica.

<sup>8</sup>Fonte: <https://expedicaoacores.wordpress.com/2009/10/16/11º-dia-de-missao/>

Esta dissertação dedicar-se-á o fenómeno da trajectória de raios sonoros a três dimensões, no meio submarino, utilizando várias técnicas físico-matemáticas de determinação dessas trajectórias, algumas já usadas em anteriores teses na Escola Naval, e comparando os respectivos méritos. Pretende-se, assim, prosseguir trabalhos já realizados por outros Cadetes da Escola Naval e contribuir para um corpo de conhecimento próprio que permita ultrapassar a atitude, a nosso ver nefasta, de “comprar já feito”, permitindo que se acrescente mais conhecimento interno. Pretende-se também que esta tese se insira numa sequência já iniciada e que deveria continuar na Escola Naval, no âmbito do estudo da propagação acústica submarina.

## Estrutura

Esta dissertação começa com um capítulo 1, onde se faz um resumo de todos os conceitos teóricos que o leitor necessita de ter em mente para a compreensão e interpretação do que está a ser feito. Este mesmo capítulo há uma secção onde se refere os métodos analíticos que vão ser utilizados para o cálculo das trajectórias dos raios acústicos junto às fontes hidrotermais. Aqui o leitor vai ficar a perceber como é que é obtido o tensor acústico assim como é efectuado o cálculo dos coeficientes de conexão e dos equações geodésicas.

Após a recapitulação de toda a parte teórica necessária pode dar-se início ao cálculo propriamente dito dos equações geodésicas que no capítulo 2 é demonstrado de forma analítica e no capítulo 3 de forma computacional através do MATLAB. Para este cálculo tanto analítica como computacionalmente são usadas expressões de velocidade do som em função da temperatura sendo estes aspectos explorados ao longo das secções do capítulo 2.

No capítulo 4, são apresentados todos os resultados obtidos, ou seja, é onde através do código elaborado anteriormente no capítulo 3, se vão obter as trajectórias dos raios. Neste capítulo ir-se-á abordar a relação entre diversos factores que vão ter influência na trajectória dos raios acústicos variando todos eles, assim como se apresentará os resultados para um número maior ou menor de fontes.

O final do capítulo 4 vai ser o local onde, através de todos os conhecimentos adquiridos ao longo do percurso na Escola Naval e na realização deste trabalho se irá comentar e comparar os resultados obtidos.

No final encontram-se as conclusões e algumas sugestões e recomendações para projectos futuros na área.



# Capítulo 1

## Enquadramento teórico

Este capítulo foi escrito com base em diversos trabalhos e pesquisas já realizadas anteriormente no entanto seria impossível explicar todo o trabalho desenvolvido sem fazer um breve resumo sobre o tema que permitisse ao leitor acompanhar esta dissertação de forma autónoma sem que tenha de recorrer a uma leitura e estudo prévio do tema. As primeiras quatro secções tem por base algumas notas manuscritas sobre tensores (Gatta [s.d.](#)), co-orientador da presente dissertação, e o livro "Mathematical Methods for Physicists"(Arfken, Weber e Harris [2012](#)). Já a demonstração de como se obtém este tensor métrico utilizado foi um trabalho realizado no ano anterior pelo GMAR EN-AEL Passeira do Rocha (Rocha [2020](#)), trabalho este feito com base no livro "Computational Acoustics: Theory and Implementation"(Bergman [2018](#)). No entanto certas demonstrações também poderão ser encontradas noutras fontes como por exemplo no livro "A most incomprehensible thing: notes towards a very gentle introduction to the mathematics of relativity"(Collier [2017](#)) ou no relatório técnico "Application of differential geometry to acoustics: Development of a generalized paraxial ray-trace procedure from geodesic deviation"(Bergman [2005](#)), entre outras numerosas possíveis referências, especialmente no cálculo tensorial.

### 1.1 Tensores não Cartesianos, Diferenciação Covariante

Começa-se por deixar claro a regra geral da transformação das componentes de um vector na sua representação contravariante. O deslocamento elementar  $d\vec{r}$ , de componentes  $dx^1, dx^2, dx^3$  (a 3D, por exemplo), terá componentes  $dx'^1, dx'^2, dx'^3$ , onde  $x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3)$  noutra sistema de coordenadas  $S'$ , tais que

$$dx^i = \sum_j \frac{dx^i}{dx^j} dx^j \quad (1.1)$$

Ou, agora para um vector qualquer  $\vec{A}$ ,

$$A^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} A^j, \quad (1.2)$$

como, por exemplo, uma velocidade  $\frac{d\vec{r}^i}{dt}$ .

Já para um vector em representação covariante, como será à partida o campo vectorial do gradiente de um campo escalar  $\varphi(\vec{r})$  vem,

$$\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{d\varphi}{d\vec{r}} = \frac{d\varphi}{d\vec{r}^i} \frac{d\vec{r}^i}{d\vec{r}}, \quad (1.3)$$

ou seja,  $\frac{\partial\varphi}{dx^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i}$ .

Olhando para o exemplo de coordenadas polares com transformação de rotação  $\theta$ , ilustrado na figura seguinte,

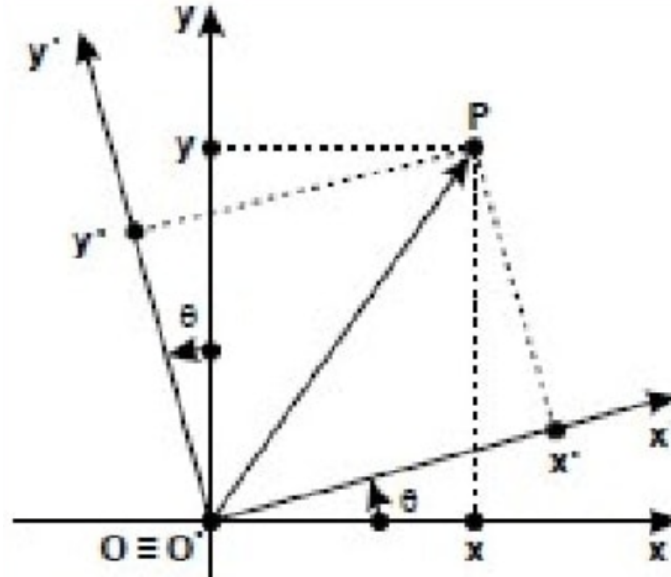


FIGURA 1.1: Coordenadas polares com transformação de rotação de  $\theta$ .

temos,

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases} \quad (1.4)$$

e, inversamente ,

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + y \sin\theta \\ y' = -x \sin\theta + y \cos\theta \end{cases} \quad (1.5)$$

E portanto,

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \cos\theta = \frac{\partial x'}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = -\sin\theta = \frac{\partial y'}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x'} = \sin\theta = \frac{\partial x'}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = \cos\theta = \frac{\partial y'}{\partial y}$$

Chegando assim à expressão:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (1.7)$$

Como se pode observar as coordenadas euclidianas são aquelas cuja posição do índice em cima ou em baixo é indiferente.

A partir deste momento vão apenas ser considerados sistemas de coordenadas onde os vectores base não têm de ser ortogonais nem de modulo unitário, e por esta razão um vector aplicado num qualquer ponto  $(q_1, q_2, q_3)$  do espaço 3D, será apresentado da seguinte forma:

$$\vec{V} = V^1 \vec{\varepsilon}_1 + V^2 \vec{\varepsilon}_2 + V^3 \vec{\varepsilon}_3 \equiv \sum_{i=1}^3 V^i \vec{\varepsilon}_i \equiv V^i \vec{\varepsilon}_i, \quad (1.8)$$

expresso nas suas componentes contravariantes.

Um qualquer deslocamento elementar  $d\vec{r}$  aparecerá:

---

<sup>9</sup>Fonte: <https://pt.slideshare.net/ellensouza74/aula-transformaes-de-coordenadas>

$$d\vec{r} = dq^1\vec{\varepsilon}_1 + dq^2\vec{\varepsilon}_2 + dq^3\vec{\varepsilon}_3 = dq^i\vec{\varepsilon}_i, \quad (1.9)$$

onde,  $\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} (x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z)$ .

No caso geral o quadrado do elemento linha é expresso por:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= (dq^i\vec{\varepsilon}_i)^2 \\ &= (dq^i\vec{\varepsilon}_i) \cdot (dq^j\vec{\varepsilon}_j) \\ &= (\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j) dq^i dq^j \\ &= g_{ij} dq^i dq^j \end{aligned} \quad (1.10)$$

Define-se aqui o "tensor métrico"  $g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j$ , e os somatórios nos índices repetidos na expressão obtida dependem do número de dimensões consideradas, e, estão subentendidos os somatórios  $\sum_i$  e  $\sum_j$  sobre o número de dimensões do espaço em questão.

Apesar de não se ter de apresentar em todos os casos como diagonal, o tensor métrico é sempre simétrico graças ao produto interno ser comutativo, ou seja  $\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = \vec{\varepsilon}_j \cdot \vec{\varepsilon}_i$  e por isso:

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (1.11)$$

O vector covariante  $g_{kj}$  tem um correspondente tensor contravariante  $g^{ik}$  que satisfaz:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (1.12)$$

Ao serem escritos na forma de matriz ir-se-á obter:

$$[g^{ik}] = [g_{ik}]^{-1} \quad (1.13)$$

Por forma a verificar a veracidade da expressão vai-se considerar coordenadas esféricas ortogonais  $(r, \theta, \varphi)$ , por exemplo.

Então,

$$d\vec{r} = dq^1\vec{\varepsilon}_1 + dq^2\vec{\varepsilon}_2 + dq^3\vec{\varepsilon}_3, \quad (1.14)$$

é agora escrito como,

$$d\vec{r} = dr\vec{\varepsilon}_r + d\theta\vec{\varepsilon}_\theta + d\varphi\vec{\varepsilon}_\varphi, \quad (1.15)$$

onde  $\vec{\varepsilon}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$ ,  $\vec{\varepsilon}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$  e  $\vec{\varepsilon}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ .

Em coordenadas esféricas  $d\vec{r}$  também se escreve:

$$d\vec{r} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi \quad (1.16)$$

Logo,  $\vec{\varepsilon}_r = \hat{e}_r$ ,  $\vec{\varepsilon}_\theta = r\hat{e}_\theta$  e  $\vec{\varepsilon}_\varphi = r\sin\theta\hat{e}_\varphi$  e portanto

$$\begin{aligned} g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = [g_{ij}] &= \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 & \vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_2 & \vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_3 \\ \vec{\varepsilon}_3 \cdot \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_3 \cdot \vec{\varepsilon}_2 & \vec{\varepsilon}_3 \cdot \vec{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{\varepsilon}_r & \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{\varepsilon}_\theta & \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{\varepsilon}_\varphi \\ \vec{\varepsilon}_\theta \cdot \vec{\varepsilon}_r & \vec{\varepsilon}_\theta \cdot \vec{\varepsilon}_\theta & \vec{\varepsilon}_\theta \cdot \vec{\varepsilon}_\varphi \\ \vec{\varepsilon}_\varphi \cdot \vec{\varepsilon}_r & \vec{\varepsilon}_\varphi \cdot \vec{\varepsilon}_\theta & \vec{\varepsilon}_\varphi \cdot \vec{\varepsilon}_\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r & \hat{e}_r \cdot r\hat{e}_\theta & \hat{e}_r \cdot r\sin\theta\hat{e}_\varphi \\ r\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta \cdot r\hat{e}_\theta & r\hat{e}_\theta \cdot r\sin\theta\hat{e}_\varphi \\ r\sin\theta\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_r & r\sin\theta\hat{e}_\varphi \cdot r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\hat{e}_\varphi \cdot r\sin\theta\hat{e}_\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Já o tensor métrico em coordenadas esféricas mas em componentes contra-variantes será

$$g^{ij} = \vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^j = [g_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

O que torna evidente a validade da expressão  $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$  por multiplicação de matrizes.

## 1.2 Derivada Covariante e Aparecimento dos Símbolos de Christoffel

Para começar vai ser considerado um campo escalar  $\psi(q^1, q^2, q^3, \dots, q^N)$  num espaço N dimensional, e temos

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} dq^i \quad (1.19)$$

(somatório em  $i$  subentendido).

E o gradiente do campo escalar  $\psi(q^i)$ :

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \vec{\varepsilon}^i \quad (1.20)$$

Sabendo à partida que numa base curvilínea oblíqua  $\{\vec{\varepsilon}_i\}$  e em componentes contra-variantes, um campo vectorial  $\vec{V}(q^i)$  é expresso da seguinte forma:

$$\vec{V}(q^i) = V^i \vec{\varepsilon}_i \quad (1.21)$$

Pela regra da derivada do produto irá obter-se, não esquecendo agora que os vectores de base, em geral não unitários, são também em geral função da posição,

$$\frac{\partial \vec{V}(q^i)}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j} (V^i \vec{\varepsilon}_i) = \frac{\partial V^i}{\partial q^j} \vec{\varepsilon}_i + \frac{V^i \partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} \quad (1.22)$$

E sendo verdade que,  $\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}$  é ele próprio um vector com as respectivas componentes,

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = () \vec{\varepsilon}_1 + () \vec{\varepsilon}_2 + () \vec{\varepsilon}_3 + \dots, \quad (1.23)$$

pode-se escrever,

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_k, \quad (1.24)$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  será o símbolo de Christoffel (subentendido o somatório em  $k$ ).

Fazendo as devidas substituições na expressão anterior (1.22) irá obter-se a chamada derivada covariante do campo vectorial  $\vec{V}$  num espaço N dimensional,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial q^j} (q^i) = \frac{\partial V^i}{\partial q^j} \vec{\varepsilon}_i + V^i \Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_k \quad (1.25)$$

Olhando agora para os símbolos de Christoffel também conhecidos por coeficientes de conexão, estes possuem uma propriedade de simetria nos índices inferiores, que é demonstrada da seguinte forma:

$$\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} \right) = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_j}{\partial q^i} \quad (1.26)$$

Como  $\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_k$  assim como  $\frac{\partial \vec{\varepsilon}_j}{\partial q^i} = \Gamma_{ji}^k \vec{\varepsilon}_k$ , e ainda  $\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_j}{\partial q^i}$  torna-se óbvio que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

Por forma a obter a expressão que dá o resultado de  $\Gamma_{ij}^k$  em termos dos  $\vec{\varepsilon}_i$  e das suas derivados, volta-se à expressão  $\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_k$  e toma-se o produto,

$$\vec{\varepsilon}_m \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \vec{\varepsilon}_m \cdot \Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_k = \Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_m \cdot \vec{\varepsilon}_k \quad (1.27)$$

Como é sabido  $\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}_j = \delta_j^i$  já que,

$$\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}_j = \vec{\varepsilon}^i \cdot g_{jk} \vec{\varepsilon}^k = \left( \vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^k \right) g_{jk} = g^{ik} g_{jk} = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (1.28)$$

E ainda que, para um qualquer campo vectorial  $\vec{F}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon}^i &= \left( F^j \vec{\varepsilon}_j \right) \cdot \vec{\varepsilon}^i = F^j \left( \vec{\varepsilon}_j \cdot \vec{\varepsilon}^i \right) = F^j \delta_j^i = F^i \\ \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon}_i &= F_j \delta_i^j = F_i \end{aligned} \quad (1.29)$$

Por estas razões,

$$\Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_m \cdot \vec{\varepsilon}_k = \Gamma_{ij}^k \delta_k^m = \Gamma_{ij}^m \quad (1.30)$$

Ou seja,  $\Gamma_{ij}^m = \vec{\varepsilon}_m \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}$  e  $\Gamma_{ij}^k = \vec{\varepsilon}_k \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}$

Definindo o símbolo de Christoffel de primeira espécie:

$$[i \ j, k] = g_{mk} \Gamma_{ij}^m = g_{mk} \vec{\varepsilon}_m \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \vec{\varepsilon}_k \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} \quad (1.31)$$

Como  $g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j$ , podemos escrever que,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^k} \cdot \vec{\varepsilon}_j + \vec{\varepsilon}_i \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_j}{\partial q^k} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = [i \ k, j] + [j \ k, i] \quad (1.32)$$

Com  $[i \ j, k] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\}$ , expressão que é facilmente comprovada pela seguinte demonstração:

$$\begin{aligned}
 [i j, k] &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{i k}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{j k}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{i j}}{\partial q^k} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \{ [i j, k] + [k j, i] + [j i, k] + [k i, j] - [i k, j] - [j k, i] \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 2 [i j, k] \} \\
 &= [i j, k]
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Onde  $[i j, k] = [j i, k]$ .

Por forma a obter a expressão geral que dá o valor dos coeficientes de conexão multiplica-se tudo por  $g^{ks}$  e vem:

$$\begin{aligned}
 g^{ks} (g_{mk} \Gamma_{ij}^m) &= (g^{ks} g_{mk}) \Gamma_{ij}^m = \delta_m^s \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij}^s \\
 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^s &= g^{ks} [g_{m k} \Gamma_{ij}^m] = g^{ks} [i j, k] \\
 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^s &= g^{ks} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{i k}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{j k}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{i j}}{\partial q^k} \right\} \\
 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^s &= \frac{1}{2} g^{ks} \left\{ \frac{\partial g_{i k}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{j k}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{i j}}{\partial q^k} \right\},
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

que será a expressão geral prática usada nesta tese.

## 1.3 Operações Diferenciais Tensoriais

### 1.3.1 Gradiente

Como já foi referido a expressão tensorial do gradiente de um campo escalar  $\psi(q^i)$  é:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \vec{\varepsilon}^i \tag{1.35}$$

Também se sabe que  $\vec{\varepsilon}^i = g^{i j} \vec{\varepsilon}_j$  e ao recordar que se estivermos em coordenadas ortogonais e não oblíquas  $[g^{i j}]$  é diagonal, que  $[g^{i j}] = [g^{j i}]^{-1}$  e que  $\vec{\varepsilon}_i = h_i \hat{e}_i$  pode escrever-se que:

$$\vec{\varepsilon}^i = \frac{1}{g_{ii}} \vec{\varepsilon}_i = \frac{1}{h_i} \vec{\varepsilon}_i = \frac{1}{h_i} h_i \hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \hat{e}_i \quad (1.36)$$

Fazendo as devidas substituições na expressão inicial (1.33) fica:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q^i} \frac{1}{h_i} \hat{e}_i \quad (1.37)$$

Com  $h_i = h_i(q^k)$  e  $\hat{e}_i = \hat{e}_i(q^k)$ .

Se se pretender escrever esta igualdade em coordenadas cartesianas tem de estar presente que:

$$\vec{\varepsilon}^i = \frac{\partial q^i}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial q^i}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial q^i}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1.38)$$

E sendo assim fica-se com:

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial q^i} \vec{\varepsilon}^i \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial z} \hat{e}_z \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.39)$$

### 1.3.2 Divergência

Para coordenadas curvilíneas oblíquas, a divergência de um campo  $\vec{V}(q^i)$  é de forma geral definida por:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{V} &= \vec{\varepsilon}^j \cdot \frac{\partial (V^i \vec{\varepsilon}_i)}{\partial q^j} \\
 &= \vec{\varepsilon}^j \cdot \left[ \left( \frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \right) \vec{\varepsilon}_i \right] \\
 &= \left( \vec{\varepsilon}^j \cdot \vec{\varepsilon}_i \right) \cdot \left[ \frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \right] \\
 &= \delta_i^j \left( \frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \right) \\
 &= \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ki}^i \\
 &= V_{ji}^i
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Revendando a expressão () sabe-se que  $\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\}$  e dessa forma,

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left\{ \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^m} \right\} \tag{1.41}$$

Já que  $g^{im} = g^{mi}$ ,

$$g^{im} \frac{\partial g_{km}}{\partial q^i} = g^{mi} \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^m} = g^{im} \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^m} \tag{1.42}$$

E desta forma os dois últimos termos anulam-se e obtém-se a expressão:

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} \tag{1.43}$$

Fazendo as devidas substituições:

$$\nabla \cdot \vec{V} = V_{ji}^i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} \tag{1.44}$$

Agora, utilizando a parencças entre a expressão utilizada para  $\Gamma_{ik}^i$  e a expressão da derivada de um determinante onde os seus elementos são coordenadas  $q^k$ , pode-se escrever de outra maneira o resultado obtido, desta vez expresso em termos do determinante de matriz que representa o tensor métrico.

$$\frac{\partial}{\partial q^k} (g) = g g^{im} \frac{\partial im}{\partial q^k} \quad (1.45)$$

Onde  $g = \det [g_{ij}]$

Olhando para a expressão de  $\Gamma_{ik}^i$ , repara-se que esta pode ser escrita da seguinte forma,

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial q^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^k} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial q^k} \quad (1.46)$$

Se  $g \equiv \det ([g]) > 0$ , substituindo em  $\Gamma_{ik}^i$  fica-se com,

$$\nabla \cdot \vec{V} = V_{ji}^i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ki}^i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial q^k} \quad (1.47)$$

Já que  $i$  em  $\frac{\partial V^i}{\partial q^i}$  é mudo, este pode ser substituído por  $k$  e passa-se a ter:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= V_{ji}^i = \frac{\partial V^k}{\partial q^k} + V^k \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial q^k} \\ &= \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial q^k} \left( V^k g^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial V^k}{\partial q^k} \right) g^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} V^k \frac{\partial g^{\frac{1}{2}}}{\partial q^k} \\ &= \frac{\partial V^k}{\partial q^k} + \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} V^k \frac{1}{2} g^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial q^k} \\ &= \frac{\partial V^k}{\partial q^k} + \frac{1}{2} V^k \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial q^k} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Conclui-se então que se pode escrever,

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{V} &= V_{ji}^i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ki}^i \\
 &= \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial g^{\frac{1}{2}}}{\partial q^k} \\
 &= \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial q^k} (g^{\frac{1}{2}} V^k)
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

### 1.3.3 Laplaciano

Como já é sabido o laplaciano de um campo escalar  $\psi$  pode ser definido por:

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi \tag{1.50}$$

No entanto, agora vai-se aplicar isto mas usando a definição mais geral, apresentada na secção anterior, de divergência.

Para isso  $\nabla \psi$  ( $\psi$  escalar) terá de ser convertido de um campo vectorial covariante para uma representação contra-variante através do tensor métrico, já que ao escrever  $\nabla \cdot \vec{V} = V_{ji}^i$ , está-se a fazer a deriva da covariante de um vector em representação contra-variante, ou seja:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \vec{\varepsilon}^k \tag{1.51}$$

Onde  $\frac{\partial \psi}{\partial q^k} = (\nabla \psi)_k$  é a componente covariante de  $\nabla \psi$ .

E assim sendo a respectiva componente contra-variante será:

$$(\nabla \psi)^i = g^{ik} (\nabla \psi)_k = g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \tag{1.52}$$

Fica-se então com a expressão com a expressão do Laplaciano por vezes também chamado de operador de Laplace-Beltrami, para um qualquer número de dimensões:

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \nabla \cdot (\nabla\psi) = \left( g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial q^k} \right)_{,i} \\ \Leftrightarrow \nabla^2\psi &= \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g^{\frac{1}{2}} g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial q^k} \right)\end{aligned}\tag{1.53}$$

A equação de onda respectiva seria:

$$\frac{1}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g^{\frac{1}{2}} g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial q^k} \right) = 0 ,\tag{1.54}$$

com  $i, k$  em 4D.

## 1.4 Equações Geodésicas

Quando se fala em equações geodésicas (linhas de menor distância em espaços de Riemann) a maneira mais geral de chegar até elas será o calculo variacional, no entanto aqui vai ser utilizado a queda livre de graves, vista num chamado "referencial elevador", onde as coordenadas de qualquer objecto em queda livre são dados por  $X^\alpha$ , com  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  no caso do tempo, espaço 3D. Para além, deste referencial também será considerado um outro referencial inercial "da Terra" subjacente e aí as coordenadas serão  $x^\varrho$ , com  $\varrho = 0, 1, 2, 3$ .

Segundo o Principio de Galileu ao considerar-se um objecto em queda livre as coordenadas no "referencial elevador" serão constantes e por isso tem-se,

$$\frac{dX^\alpha}{d\varsigma} = 0 (\forall\alpha) \Rightarrow \frac{d^2X^\alpha}{d\varsigma^2} = 0 ,\tag{1.55}$$

com  $\varsigma$  sendo o tempo medido pelo objecto em queda livre admitindo que estão a ser considerados os efeitos temporais como em relatividade restrita.

Agora, relacionando as coordenadas de um objecto no "referencial elevador" com as suas coordenadas no referencial inercial "da Terra", obtem-se

$$X^\alpha = X^\alpha(x^\varrho)\tag{1.56}$$

E através da regra da derivada composta tem-se,

$$\frac{dX^\alpha}{d\zeta} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} \frac{dx^e}{d\zeta} \quad (1.57)$$

E por isso,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X^\alpha}{d\zeta^2} &= \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{dX^\alpha}{d\zeta} \right) = \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} \frac{dx^e}{d\zeta} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} \frac{d^2 x^e}{d\zeta^2} + \left[ \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} \right) \right] \frac{dx^e}{d\zeta} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} \frac{d^2 x^e}{d\zeta^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} \right) \frac{dx^\mu}{d\zeta} \right] \frac{dx^e}{d\zeta} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} \frac{d^2 x^e}{d\zeta^2} + \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^e} \frac{dx^\mu}{d\zeta} \frac{dx^e}{d\zeta} = 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

Multiplicando tudo por  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha}$ ,

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} \frac{d^2 x^e}{d\zeta^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^e} \frac{dx^\mu}{d\zeta} \frac{dx^e}{d\zeta} = 0 \quad (1.59)$$

Já que  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^e} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^e} = \delta_e^\lambda$  e como  $x^\lambda$  e  $x^e$  são independentes,

$$\delta_e^\lambda \frac{d^2 x^e}{d\zeta^2} + \left( \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^e} \right) \frac{dx^\mu}{d\zeta} \frac{dx^e}{d\zeta} = 0 \quad (1.60)$$

Aos factores entre parêntesis chamaremos "coeficientes de conexão", que são, de facto, os já referenciados símbolos de Christoffel:

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^e} \equiv \Gamma_{\mu e}^\lambda \quad (1.61)$$

Deste resultado destes símbolos de Christoffel onde estão envolvidos dois sistemas de coordenadas, pode-se deduzir, após extensos cálculos, a expressão mais prática que tira partido do tensor métrico e suas derivadas e que é  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\rho}} \right)$ , já deduzida atrás e agora descrita num mesmo sistema de coordenadas (Neuenschwander [2015](#)).

Obtém-se

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{d\zeta^2} + \Gamma_{\mu e}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\zeta} \frac{dx^e}{d\zeta} = 0 \quad (1.62)$$

Fica-se então com a trajetória no espaço e no tempo ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ) do objecto, medida "no referencial Terra", mas válida em qualquer outro referencial ainda que não-inercial.

Como já se constatou os símbolos de Christoffel podem ser escritos apenas em termos do tensor métrico e das suas derivadas. No entanto, é de ressaltar que o parâmetro  $\zeta$  é mudo e já que este desaparece na resolução conjunta das equações geodésicas pode ser trocado por outro parâmetro covariante.

## 1.5 Obtenção do Tensor Métrico Acústico

Para começar vão se escrever as equações de continuidade e de Euler de uma forma não linear:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = 0 \quad (1.64)$$

E como as ondas acústicas estão relacionados com as perturbações de pressão, densidade e velocidade ( $p_1, \rho_1, \vec{v}_1$ , respetivamente) em relação aos valores de equilíbrio sem a propagação do som ( $p_0, \rho_0$  e  $\vec{v}_0$ ).

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}, t) + p_1(\vec{r}, t)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}, t) + \rho_1(\vec{r}, t) \quad (1.65)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(\vec{r}, t) + \vec{v}_1(\vec{r}, t)$$

Por forma a obterem-se as equações clássicas e lineares da mecânica dos fluidos relativas às variações das variáveis perturbadas vão-se realizando diversas simplificações e começa-se por tornar o termo de arrastamento  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  da equação de Euler tão diminuta que se passa a considerar 0. Ainda na equação de Euler  $\nabla p_0 \simeq 0$ , já que este sofre apenas pequenas variações espaciais.

Passando agora à equação da continuidade com  $p_0$  fixo obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho_1) \vec{v}] = 0 \quad (1.66)$$

$$\Leftrightarrow 0 + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{v}) = 0$$

e como  $\rho_1 \ll \rho_0$ ,

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.67)$$

Tendo em consideração a equação de estado, da mecânica de fluidos, que relaciona as variações de pressão com as variações de densidade e multiplicando a equação 1.5 por  $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}$  que por sua vez da termodinâmica dos fluidos sabe-se que é igual a  $c^2$  ( $c$ = velocidade do som na água), estamos em condições de escrever as equações que se tinham definido como objectivo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p_1 = 0 \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + c^2 \rho_0 \nabla^2 \psi = 0$$

Prosseguindo o raciocínio em busca das novas e mais simplificadas versões destas duas equações da mecânica de fluidos, vai-se derivar em função do tempo depois de se isolar o termo  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  e pela conjugação das duas vai-se obter a equação de onda linear, em função do campo escalar de velocidade que definido no início:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi \quad (1.69)$$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Provado na dissertação anteriormente referida, sabe-se que  $\nabla \rho = \frac{1}{c^2} \nabla p$ , realizando a substituição na equação da continuidade e de seguida multiplicando por

$c^2(\vec{r})$  fica-se com uma nova versão linear da equação da continuidade em função da velocidade, pressão e densidade:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\nabla p) \cdot \vec{v} + c^2 \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (1.70)$$

A nova forma de ser escrita a equação de Euler surge realizando um manuseamento em todo parecido com as forças externas conservativas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \\ \Leftrightarrow \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] &= -\nabla p + \rho \vec{g} \end{aligned} \quad (1.71)$$

Retomando a equação (1.8), assumindo que  $p_1 = \frac{1}{c^2} \rho_1$  e desprezando os Termos e 2<sup>a</sup> ordem irá obter-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (p_0 + p_1) + \nabla (p_0 + p_1) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + c^2 (\rho_0 + \rho_1) \nabla \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_0 + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 & \\ + (\nabla p_1) \cdot \vec{v}_0 + c^2 [\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_0] &\simeq 0 \end{aligned} \quad (1.72)$$

Após se realizar a separação dos termos perturbados e não perturbados, acaba por se perceber que os termos não perturbados são iguais a uma expressão já conhecida e que se sabe ser igual a 0:

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_0 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0 \quad (1.73)$$

Tal como já foi dito as ondas acústicas são associadas aos termos perturbados por isso aplicando (1.11) obtêm-se:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + (\nabla p_1) \cdot \vec{v}_0 + c^2 (\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_0) = 0 \quad (1.74)$$

Fazendo os mesmos passos para a equação de Euler fica-se com mais duas novas formas de escrever as duas equações dos fluidos:

$$\rho_1 \left[ \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \rho_0 \left[ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \nabla p_1 \simeq 0 \quad (1.75)$$

De seguida para além de ser considerado  $c^2 \rho_1 = p_1$ , introduz-se ainda um operador diferencial,  $\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \equiv D_0$  e ainda duas novas igualdades por forma a simplificar mais as expressões:

$$\begin{aligned} (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + p_1 (\nabla \cdot \vec{v}_0) &\equiv F_1 \\ (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \frac{p_1}{c^2 \rho_0} D_0 \vec{v}_0 &\equiv \vec{F}_2 \end{aligned} \quad (1.76)$$

Aplicando estas ultimas igualdades e considerando apenas que as perturbações são muito mais pequenas que os valores de equilíbrio  $(\rho_0, p_0 e v_0)$ , vamos ficar com:

$$\begin{aligned} [D_0 p_1 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] + F_1 &= 0 \\ [D_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1] + \vec{F}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.77)$$

O próximo objectivo será obter equações diferenciais de segunda ordem que terão um termo em comum que fará com que seja possível haver uma expressão abrangente aos diferentes casos de estudo.

De forma a obter-se uma das equações diferenciais de 2<sup>a</sup> ordem irá ser feita e combinação das equações anteriores através dos termos  $\nabla \cdot (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1$  e  $\nabla \cdot \vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1)$ , que após algum cálculo, que se encontra por extenso na dissertação do GMAR EN-AEL Rocha, chega-se à conclusão que:

$$\nabla \cdot [(\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1] - \nabla \cdot [\vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1)] = \sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right) \quad (1.78)$$

E ganha-se de novo mais uma forma de escrever a equação da continuidade:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) - \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} (D_0 p_1) \right] \\
 & + \sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} \right) - \nabla \cdot \vec{F}_2 - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) - \nabla \cdot \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} F_1 = 0
 \end{aligned} \tag{1.79}$$

Mas se chamarmos a equação (1.16) de  $F_3$  ainda consegue se compactar mais a equação anterior ficando por isso com:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} (D_0 p_1) + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right] \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} F_1 \right) + \nabla \cdot \vec{F}_2 - F_3
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

O passo seguinte passa por considerar que o vector velocidade ( $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ) é igual a um potencial escalar ( $\nabla \psi(\vec{r}, t)$ ), igualdade essa que apenas se pode utilizar em fluidos irrotacionais ( $\nabla \times \vec{v} = 0$ ) e fica-se com:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot (\nabla \rho) + \nabla \cdot \vec{v} = 0
 \end{aligned} \tag{1.81}$$

Na equação de Euler as forças externas vão ser desprezados e assumindo o fluído irrotacional ( $\nabla \times \vec{v}(\vec{r}, t) = 0$ ), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0
 \end{aligned} \tag{1.82}$$

Com mais algumas operações matemáticas e acrescentando um  $\sigma = \ln(\rho)$  na equação da continuidade e na equação de Euler introduzindo uma função potencial ( $\varphi(\vec{r}, t)$ ) por forma a que  $d\psi = \frac{1}{\rho} dp \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \psi$ , vai-se obter as equações diferenciais parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \sigma) &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \varphi(\sigma) &= 0\end{aligned}\tag{1.83}$$

Volta-se agora a assumir que o valor instantâneo da variável é igual à soma do valor perturbado com o valor de equilíbrio, isto é:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \psi_1 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \nabla \psi_1 \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 = \ln \rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \rho_1\end{aligned}\tag{1.84}$$

Eliminando as variáveis não perturbados e multiplicando por  $\rho_0$  a equação da continuidade e a de Euler por  $\frac{\rho_0}{c^2}$ , as duas equações passam a ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\rho_0 D_0 \sigma_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \psi_1) &= 0 \\ \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 &= 0\end{aligned}\tag{1.85}$$

De seguida, aplicando o operador  $D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla$  à equação de Euler e com  $D_0 \sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \sigma_1$ , irá juntar-se as duas equações anteriores e após algum cálculo resulta:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 \right) - \nabla \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 - \rho_0 \nabla \psi_1 \right) = 0\tag{1.86}$$

Com,  $\rho_0 = \rho_0(\vec{r}, t), c = c(\vec{r}, t), \vec{v}_0 = \vec{v}_0(\vec{r}, t), \psi_1 = \psi_1(\vec{r}, t)$  e  $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \nabla \psi_1$

Até agora tem se visto que através de uma separação perturbativa ( $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \rho = \rho_0 + \rho_1, p = p_0 + p_1$ ) é conseguida a linearização que se pretendia, agora torna-se capaz de confirmar que nos vários casos há algo em comum e que o operadores diferenciais que se obtiveram estão na forma:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a}{c^2} D_0 f \right) - \nabla \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{a}{c^2} D_0 \psi_1 f - a \nabla \psi_1 f \right) = 0\tag{1.87}$$

onde,  $a = a(\vec{r}, t)$ ,  $c = c(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(\vec{r}, t)$ ,  $f = f(\vec{r}, t)$  e  $D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla$

O objectivo agora será a partir do operador diferencial anterior encontrar-se uma formulação única mas que possa ser usada de forma geral.

Para começar tem de se ter presente que em 3D e coordenadas cartesianas,

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T \quad (1.88)$$

A este podemos acrescentar uma componente temporal e depois de introduzir uma abreviatura  $\partial_\nu$ , onde  $\nu$  irá assumir à vez os valores 0, 1, 2,3 ( $t, x, y, z$ , respectivamente), fica-se com:

$$\partial_\nu[f] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] = f(t, x, y, z) \quad (1.89)$$

Pegando no caso da propagação de uma onda sonora sobre um meio homogéneo e sem variações espaço-temporais da velocidade da propagação, pode-se escrever:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \nabla^2 f = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f \quad (1.90)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} + \nabla^2 f$$

Como no operador diferencial tanto  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\nabla$  atuam à esquerda fica-se com:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a}{c^2} D_0 \right) + \nabla \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{a}{c^2} D_0 - a \nabla \right) \right] f \quad (1.91)$$

Substituindo por  $D_0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f$ , fica-se com um operador diferencial 4D,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \left( \vec{v}_0 \frac{a}{c^2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) - a \nabla f \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{a}{c^2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{a}{c^2} \left( v_{0x} \frac{\partial f}{\partial t} - (c^2 - v_{0x}^2) \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{a}{c^2} \left( v_{0y} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial x} - (c^2 - v_{0y}^2) \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{a}{c^2} \left( v_{0z} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial y} - (c^2 - v_{0z}^2) \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] = \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{a}{c^2} \begin{bmatrix} 1 & v_{0x} & v_{0y} & v_{0z} \\ v_{0x} & -(c^2 - v_{0x}^2) & v_{0x} v_{0y} & v_{0x} v_{0z} \\ v_{0y} & v_{0x} v_{0y} & -(c^2 - v_{0y}^2) & v_{0y} v_{0z} \\ v_{0z} & v_{0x} v_{0z} & v_{0y} v_{0z} & -(c^2 - v_{0z}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial f / \partial t \\ \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{a}{c^2} \right) D_0 f \right] - \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{a}{c^2} \right) D_0 f - a \nabla f \right] \end{aligned} \quad (1.92)$$

Juntando o campo escalar de interesse  $f(\vec{r}, t)$ , no nosso caso, o campo escalar de variação de pressão do fluido, identificado com o som em propagação, fica-se com a equação das ondas de um campo escalar qualquer  $f(x, y, z, t)$  na forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{a}{c^2} \begin{bmatrix} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c^2 - v_{0x}^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0x}v_{0y} & c^2 - v_{0y}^2 & -v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0x}v_{0z} & -v_{0y}v_{0z} & c^2 - v_{0z}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial f / \partial t \\ \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{bmatrix} = 0, \quad (1.93)$$

aqui  $c(\vec{r}, t)$  é a velocidade local do som,  $a(\vec{r}, t)$  uma função que poderá ser a densidade do fluido subjacente como exemplo e  $\vec{v}_0$  (de componentes cartesianas  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  e  $v_{0z}$ ) a velocidade desse fluido.

A partir da equação diferencial de onda (1.93) poderia começar-se uma abordagem ondulatória de propagação sonora. No entanto, seguir-se-á a aproximação habitual, em geral mais simples, da descrição geométrica dos raios sonoros, em que o ponto de partida é, como se sabe, também a equação diferencial das ondas (sem perdas por dissipação), mas, neste caso, expressa em termos do tensor métrico (acústico) e das subsequentes equações geodésicas, à semelhança da descrição da propagação de ondas electromagnéticas num espaço-tempo físico, onde a respectiva curvatura, expressa pelo tensor métrico apropriado, traduz o antigo "campo gravitacional" do corpo celeste junto do qual se propagam as ditas ondas electromagnéticas.

# Capítulo 2

## Do Tensor Métrico Acústico às Equações Geodésicas

### 2.1 Tensor e velocidade do som

Neste capítulo iremos proceder ao cálculo das equações geodésicas associadas às diferentes expressões do campo de velocidade do som  $c$ , tendo por base a noção de tensor métrico definida anteriormente.

$$g_{\alpha\beta} = \frac{a}{c} \begin{bmatrix} -c^2 + \vec{v}_0^T \vec{v}_0 & -\vec{v}_0^T \\ \vec{v}_0 & I \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{ac} \begin{bmatrix} -1 & -\vec{v}_0^T \\ \vec{v}_0 & c^2 I - \vec{v}_0 \vec{v}_0^T \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\det g_{\alpha\beta} = -\frac{a^4}{c^2} \quad (2.3)$$

Assumiremos o meio em repouso, o que facilitará o cálculo uma vez que  $v_{0x} = v_{0y} = v_{0z} = 0$ . Nestas circunstâncias o tensor métrico acústico será diagonal:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -ac & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a/c \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1/ac & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c/a \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Como já foi anteriormente referido o valor de  $a$  será uma função que poderá ser por exemplo a densidade, mas inicialmente e partindo de novo do caso mais simples irá ser considerado como uma constante, e basta dizer que este será constante sem que lhe seja atribuído qualquer valor, porque como se verá mais à frente ao ser feita esta consideração a constante  $a$  não terá qualquer implicação na obtenção dos valores dos coeficientes de conexão.

Na determinação de  $c$  (velocidade local do som) optou-se por obter diversas expressões a variar de acordo com um determinado campo de temperatura, que ainda não foi referido.

A escolha das expressões de  $c$  foi feita tendo por base a dissertação de mestrado de 2017 da 2<sup>o</sup>TEN Evangelista Paiva (Paiva [2018](#)) para que desta forma pudesse existir no final uma comparação de resultados e se puder aferir qual o melhor método de obtenção das trajectórias dos raios acústicos.

A primeira expressão (Modelo A), que se irá utilizar para a velocidade do som é:

$$c(T) = \sqrt{KR}\sqrt{T}, \quad (2.6)$$

onde  $c$  será então a velocidade do som,  $K$  a relação dos calores específicos a volume e pressão constantes,  $R$  a constante dos gases e por fim  $T(x, y)$  a temperatura absoluta de um local com coordenadas em  $(x, y)$ .

Esta expressão oriunda da teoria cinética dos gases, é usada no artigo "Acoustic computer tomographic pyrometry for two-dimensional measurement of gases taking into account the effect of refraction of sound wave paths"(Lu, Wakai, Takahashi e Shimizu [2000](#)), em que o foco foi conseguir projectar a distribuição bidimensional da temperatura, tendo em conta a refração das ondas do som.

Outra das expressões (Modelo B) que será utilizada para a velocidade do som será a utilizada no artigo "Study on the high precision acoustic measurement techniques for determining temperature field around seafloor hydrothermal vent"(Cai, Fan, Zhou, Fu, Fang e Jin [2012](#)),

$$c(T) = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \epsilon T^3, \quad (2.7)$$

em que  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$  são os coeficientes constantes, cujo valor a utilizar na presente dissertação será o mesmo para todos (0,1) e  $T$  volta a ser a temperatura de um local com coordenadas em  $(x, y)$ .

Por fim vai ser utilizada a expressão desenvolvida em 1974 por Del Grosso para a velocidade de propagação do som em águas oceânicas (Modelo C),

$$c(T, S, P) = 1449.08 + 4.57(T) e^{-\left[\frac{T}{86.9} + \left(\frac{T}{360}\right)^2\right]} + 1.33(S - 35) e^{-\left[\frac{T}{120}\right]} + 0.1522P e^{\left[\frac{T}{1200} + \frac{S-35}{400}\right]} + 1.46 * 10^{-5} P^2 e^{-\left[\frac{T}{20} + \frac{S-35}{10}\right]}, \quad (2.8)$$

com  $c$  igual à velocidade do som em m/s,  $T$  a Temperatura em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $S$  a salinidade em ppm e  $P$  a pressão em atm (Kinsler, Frey, Coppens e Sanders 1999). Tal como as expressões utilizadas, também os valores de  $S$  e  $P$  vão ser os mesmos já utilizados em 2017 pela 2<sup>o</sup>TEN Paiva, e por isso  $S$  será tomada como valendo 35 ppm e  $P$  assumirá o valor de 100 atm.

Iremos seguidamente mostrar os gráficos da velocidade do som na água em relação à temperatura que virá em graus Kelvin para as duas primeiras e em graus centígrados para a expressão de Del Grosso.

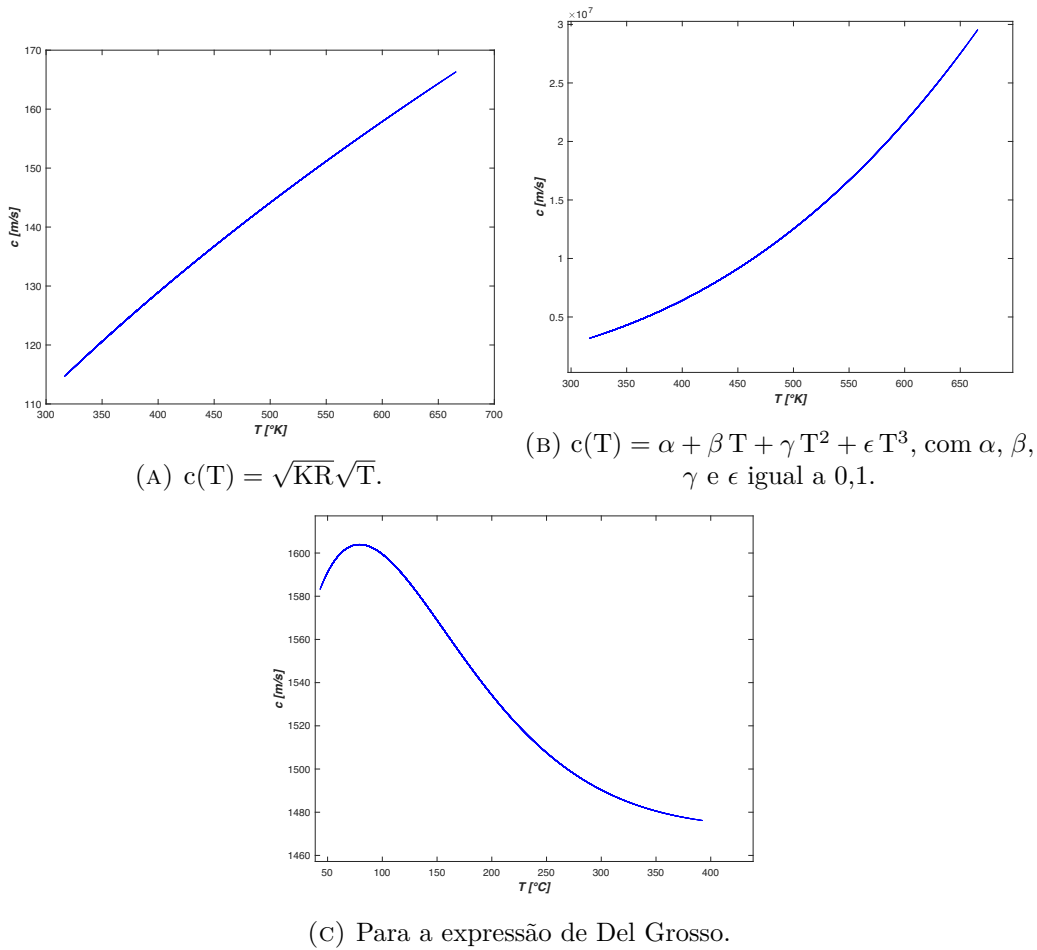


FIGURA 2.1: Gráficos da velocidade do som para as diferentes expressões.

Como se pode observar estas expressões apresentam limitações uma vez que não foram pensadas para umas tão elevadas profundidade e temperatura mas ainda assim os resultados esperados são de grosso modo aceitáveis e os expectáveis já que é observável a crescente velocidade do som com a temperatura nos gráficos (A) e (B). No entanto no gráfico (C) é nítida uma inversão a partir dos 70°C o que prova a sensibilidade desta aos altos valores da temperatura já que a expressão de Del Grosso foi pensada para um intervalo de temperaturas de 0° a 35°C (Del Grosso 1974). Esta inversão vai ajudar a justificar o que se vai poder observar no capítulo 4 nas figuras 4.24(A) e 4.25(A) que é a convergência dos raios para a fonte hidrotermal.

Apesar de terem sido escolhidas estas três expressões, é de referir que o programa desenvolvido permite que, quando existir uma expressão que retrate o que se passa a temperaturas elevadas, com maior veracidade possa ser utilizado.

Torna-se também importante referir que para um melhor esclarecimento dos estudos desenvolvidos por de trás das expressões que se vai utilizar para velocidade do som deve ser consultada a referida dissertação de 2017.

No sub-capítulo seguinte vai ser explicado como se chegou ao campo temperatura, que é o parâmetro a faltar para se poder começar o cálculo com vista a obtenção das geodésicas.

## 2.2 Determinação do Campo de Temperatura

O pretendido para esta expressão será encontrar uma função Gaussiana que se assemelhe em traços largos com o que é o comportamento da temperatura no interior de uma fonte hidrotermal e por isso propôs-se a seguinte expressão geral:

$$T = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (z_0-z_{11})} + TK + TM \quad (2.9)$$

Nesta expressão  $A$  é a temperatura máxima no centro e à saída da fonte em graus centígrados( $^{\circ}C$ ),  $\alpha_0$  é a constante de decaimento vertical;  $\alpha_1$  a constante de decaimento horizontal;  $z_0$  é o valor em metros da profundidade considerada;  $z_{11}$  a altura da chaminé da fonte hidrotermal em metros;  $x_{21}$  e  $y_{21}$  são as coordenadas da origem;  $TK$  é o termo que adicionado a  $TM$  permite obter a temperatura em graus Kelvin e  $TM$  a temperatura ambiente da água do mar, longe da fonte hidrotermal.

## 2.3 Determinação dos Coeficientes de Conexão

Neste sub-capítulo vai-se proceder ao cálculo dos coeficientes de conexão para as três expressões de  $c(T)$  e para isso volta a ser necessário recordar a expressão já referida no capítulo 1 através da qual se obtém o valor do coeficiente de conexão:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\rho}} \right) \quad (2.10)$$

Este sub-capítulo vai ser dividido em três para que seja mais fácil distinguir o cálculo dos símbolos de Christoffel para as diferentes expressões que vamos atribuir a  $c$ . Torna-se importante referir que uma vez que o tensor utilizado é mesmo para as três expressões o número de Christoffels com valor diferente de zero será o mesmo pois o cálculo vai ser igual até ao momento em que se torna necessário calcular o valor da derivada de  $c$ . Cada uma das três partes vai ter demonstrado o cálculo para

dois dos coeficientes nos restantes apenas será apresentado o valor final do mesmo para que a leitura não se torne repetitiva, no entanto em caso de dúvida cálculo pode ser consultado no Apêndice **(A)**.

Para uma melhor e mais fácil compreensão e melhor simplificação ainda foram consideradas as seguintes igualdades que utilizaremos em todo o texto:

- $W = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2 + (y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (z_0 - z_{11})}$ ;
- $T = \text{TK} + \text{TM} + A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2 + (y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (z_0 - z_{11})} = \text{TK} + \text{TM} + W$ ;
- $d = \sqrt{(x - x_{21})^2 + (y - y_{21})^2}$ ;
- $H = W \alpha_1 (x - x_{21})$
- $J = W \alpha_1 (y - y_{21})$
- $c =$  à expressão da velocidade que se está a tratar.

### 2.3.1 Para o Modelo A

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{0\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\rho} \right) \quad (2.11)$$

Sabendo que  $g^{\mu\nu}$  é diagonal, para que  $g^{\sigma\rho} \neq 0 \Rightarrow \rho = 0$ , por isso:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \left( 0 + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right), c/x^1 = x \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{ac} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) (-ac) \\ &= -\frac{1}{2c} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) (-c) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Considerando  $W = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2 + (y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (z_0 - z_{11})}$  e realizando-se a derivada em função de  $x$  irá obter-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(-c) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\sqrt{KR} \sqrt{TK + TM + W} \right) \\ &= \frac{W \alpha_1 (2x - 2x_{21}) \sqrt{KR}}{4 \sqrt{(x - x_{21})^2 + (y - y_{21})^2} \sqrt{TK + TM + W}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por forma a simplificar a expressão  $d = \sqrt{(x - x_{21})^2 + (y - y_{21})^2}$  e substituindo agora na expressão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= -\frac{1}{2 \left( \sqrt{KR} \sqrt{W + TM + TK} \right)} \left( \frac{W \alpha_1 (2x - 2x_{21}) \sqrt{KR}}{4 d \sqrt{TK + TM + W}} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{W \alpha_1 (x - x_{21})}{d(TK + TM + W)} \\ &= -\frac{H}{4dT} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Partimos agora para os próximos coeficientes de conexão onde serão consideradas as mesmas igualdades que no coeficiente de conexão anterior para simplificar o cálculo.

$$\begin{aligned} \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 2}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^\rho} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \left( 0 + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \right), c/x^2 = y \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{ac} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) (-ac) \\ &= -\frac{1}{2c} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) (-c) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Agora realizando-se a derivada mas desta vez em função y, irá obter-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(-c) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\sqrt{KR} \sqrt{TK + TM + W} \right) \\ &= \frac{W \alpha_1 (2y - 2y_{21}) \sqrt{KR}}{4d \sqrt{TK + TM + W}}\end{aligned}\quad (2.16)$$

Realizando as devidas substituições na expressão obtem-se:

$$\begin{aligned}\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 &= -\frac{1}{2 \left( \sqrt{KR} \sqrt{W + TM + TK} \right)} \left( \frac{W \alpha_1 (2y - 2y_{21}) \sqrt{KR}}{4d \sqrt{TK + TM + W}} \right) \\ &= -\frac{1}{4d} \frac{W \alpha_1 (y - y_{21})}{(TK + TM + W)} \\ &= -\frac{J}{4dT}\end{aligned}\quad (2.17)$$

Tal como já foi referido de seguida vão ser apresentados apenas os valores finais e não nulos dos restantes coeficientes de conexão, no entanto todos eles se encontram calculados de forma detalhada como foi feito até aqui no Apêndice(A).

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{HKR}{4d}\quad (2.18)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{H}{4d(T)}\quad (2.19)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{J}{4d(T)}\quad (2.20)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{H}{4d(T)}\quad (2.21)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{H}{4d(T)}\quad (2.22)$$

$$\Gamma_{00}^2 = -\frac{J K R}{4 d} \quad (2.23)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{J}{4 d (T)} \quad (2.24)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{J}{4 d (T)} \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{H}{4 d (T)} \quad (2.26)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{J}{4 d (T)} \quad (2.27)$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{H}{4 d (T)} \quad (2.28)$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{J}{4 d (T)} \quad (2.29)$$

### 2.3.2 Para o Modelo B

Como já foi referido no início do sub-capítulo o cálculo do valor do coeficiente de conexão vai ser igual até à derivada de  $c$  e por isso para evitar uma leitura repetitiva vai-se partir do instante seguinte:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = -\frac{1}{2c} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) (-c) \quad (2.30)$$

O passo seguinte vai ser calcular a deriva de  $c$  em função de  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (-c) &= \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha - \beta T - \gamma T^2 - \epsilon T^3) \\ &= \frac{W \alpha_1 \beta (2x - 2x_{21})}{2d} + \frac{3W \alpha_1 \epsilon (2x - 2x_{21}) (T)^2}{2d} \\ &\quad + \frac{W \gamma \alpha_1 (2x - 2x_{21}) (T)}{d} \\ &= \frac{W \alpha_1 \beta (x - x_{21})}{d} + \frac{3W \alpha_1 \epsilon (x - x_{21}) (T)^2}{d} \\ &\quad + \frac{2W \gamma \alpha_1 (x - x_{21}) (T)}{d} \\ &= \frac{H \beta}{d} + \frac{3H \epsilon (T)^2}{d} + \frac{2H \gamma (T)}{d} \\ &= \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2\gamma (T)) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Voltando ao cálculo do simbolo de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \\ &= -\frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2\gamma (T)) \right) \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta(T)}{2} + \frac{\gamma(T)^2}{2} + \frac{\epsilon(T)^3}{2} \right)}{\left( \alpha + \beta (T) + \gamma (T)^2 + \epsilon (T)^3 \right)^2} \\ &= -\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2\gamma (T)) \right) \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \\ &= -\frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2c (T)) \right)}{2c} \end{aligned} \quad (2.32)$$

O segundo exemplo como se vai poder constatar vai ser em tudo igual ao anterior com a exceção de que este vai ter uma derivada em relação a  $y$  em vez de  $x$  o que fará com que resultado final se altere. Para a sua resolução vai-se partir do mesmo ponto de partida:

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = -\frac{1}{2c} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) (-c) \quad (2.33)$$

Aqui encontra-se a derivada em função de  $y$  que se tinha falado anteriormente cujo resultado será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (-c) &= \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha - \beta T - \gamma T^2 - \epsilon T^3) \\ &= \frac{W \alpha_1 \beta (2y - 2y_{21})}{2d} + \frac{3W \alpha_1 \epsilon (2y - 2y_{21}) (T)^2}{2d} \\ &\quad + \frac{W \gamma \alpha_1 (2y - 2y_{21}) (T)}{d} \\ &= \frac{W \alpha_1 \beta (y - y_{21})}{d} + \frac{3W \alpha_1 \epsilon (y - y_{21}) (T)^2}{d} \\ &\quad + \frac{2W \gamma \alpha_1 (y - y_{21}) (T)}{d} \\ &= \frac{J \beta}{d} + \frac{3J \epsilon (T)^2}{d} + \frac{2J \gamma (T)}{d} \\ &= \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2\gamma (T)) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Fazendo as devidas substituições e simplificações fica-se com:

$$\begin{aligned} \Gamma_{02}^0 &= \Gamma_{20}^0 = \\ &= -\frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2\gamma (T)) \right) \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta(T)}{2} + \frac{\gamma(T)^2}{2} + \frac{\epsilon(T)^3}{2} \right)}{\left( \alpha + \beta (T) + \gamma (T)^2 + \epsilon (T)^3 \right)^2} \\ &= -\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2\gamma (T)) \right) \left( \frac{c}{c^2} \right) \\ &= -\frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2\gamma (T)) \right)}{2c} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Agora de novo vão ser apresentados apenas os resultados finais dos restantes simbolos de Christoffel cujo cálculo se encontra em Apêndice [\(A\)](#).

$$\Gamma_{00}^1 = -\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon (T)^2 + 2\gamma (T)) \right) \left( \frac{c}{2} \right) \quad (2.36)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\left(\frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{2c} \quad (2.37)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\left(\frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{2c} \quad (2.38)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{\left(\frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{2c} \quad (2.39)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{\left(\frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{2c} \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{00}^2 = -\left(\frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right) \left(\frac{c}{2}\right) \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{\left(\frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{2c} \quad (2.42)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{\left(\frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{2c} \quad (2.43)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\left(\frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{2c} \quad (2.44)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\left(\frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{2c} \quad (2.45)$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{\left(\frac{H}{d} \left(\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)\right)\right)}{2c} \quad (2.46)$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{\left(\frac{J}{d} \left(\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)\right)\right)}{2c} \quad (2.47)$$

### 2.3.3 Para o Modelo C

Na utilização da expressão 2.8 considerar-se-á:

- $O = 1449.08$
- $O_0 = 4.57$
- $O_1 = 86.9$
- $O_2 = 360$
- $O_3 = 1.33$
- $O_4 = 35$
- $O_5 = 120$
- $O_6 = 0.1522$
- $O_7 = 1200$
- $O_8 = 400$
- $O_9 = 1.46 * 10^{-5}$
- $O_{10} = 20$
- $O_{11} = 10$

Assim:

$$\begin{aligned} c(T, S, P) = & O + O_0(T) e^{-\left[\frac{T}{O_1} + \left(\frac{T}{O_2}\right)^2\right]} + O_3(S - O_4) e^{-\left[\frac{T}{O_5}\right]} \\ & + O_6 P e^{\left[\frac{T}{O_7} + \frac{S - O_4}{O_8}\right]} + O_9 P^2 e^{-\left[\frac{T}{O_{10}} + \frac{S - O_4}{O_{11}}\right]} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Calculemos agora os coeficientes de conexão:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = -\frac{1}{2c} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) (-c) \quad (2.49)$$

Tal como nos casos anteriores é agora necessário resolver  $\left( \frac{\partial}{\partial x} \right) (-c)$ , por isso:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) (-c) &= \frac{W O_0 \alpha_1 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} (2x - 2x_{21})}{2d} \\ &- O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left[ \frac{W \alpha_1 (2x - 2x_{21})}{2O_1 d} + \frac{W \alpha_1 (2x - 2x_{21}) (T)}{O_2^2 d} \right] (T) \\ &+ \frac{W O_3 \alpha_1 e^{-\frac{T}{O_5}} (2x - 2x_{21}) (O_4 - S)}{2O_5 d} \\ &- \frac{W O_9 P^2 \alpha_1 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}} (2x - 2x_{21})}{2O_{10} d} \\ &+ \frac{W O_6 P \alpha_1 e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}} (2x - 2x_{21})}{2O_7 d} \quad (2.50) \\ &= \frac{H O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}}}{d} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( \frac{H}{O_1 d} + \frac{2H(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ &+ \frac{H O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5 d} - \frac{H O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{H O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \\ &= \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) \right] (T) \\ &+ \left[ \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{aligned}$$

Juntando esta derivada ao restante cálculo fica-se com:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = -\frac{\left[ \begin{aligned} &\frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) \right] (T) \\ &+ \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \end{aligned} \right]}{2c} \quad (2.51)$$

Calculemos agora:

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = -\frac{1}{2c} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) (-c) \quad (2.52)$$

Verifique-se então que :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) (-c) &= \frac{W O_0 \alpha_1 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} (2y - 2y_{21})}{2d} \\ &- O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left[ \frac{W \alpha_1 (2y - 2y_{21})}{2O_1 d} + \frac{W \alpha_1 (2y - 2y_{21}) (T)}{O_2^2 d} \right] (T) \\ &+ \frac{W O_3 \alpha_1 e^{-\frac{T}{O_5}} (2y - 2y_{21}) (O_4 - S)}{2O_5 d} \\ &- \frac{W O_9 P^2 \alpha_1 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}} (2y - 2y_{21})}{2O_{10} d} \\ &+ \frac{W O_6 P \alpha_1 e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}} (2y - 2y_{21})}{2O_7 d} \quad (2.53) \\ &= \frac{J O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}}}{d} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( \frac{J}{O_1 d} + \frac{2J(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ &+ \frac{J O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5 d} - \frac{J O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{J O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \\ &= \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) \right] (T) \\ &+ \left[ \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{aligned}$$

Obtém-se o resultado final de,

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = - \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) \right] (T) + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right]}{2c} \quad (2.54)$$

Os restantes cálculos encontram-se em apêndice sendo a expressão final:

$$\Gamma_{00}^1 = -\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{H}{d}\right)\left[O_0 e^{-\frac{T}{O_1}-\frac{T^2}{O_2^2}}\left(1-\left(\frac{1}{O_1}+\frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right)(T)\right. \\ \left.+\frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}}(O_4-S)}{O_5}-\frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}}-\frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}}+\frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7}-\frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7}\right] \quad (2.55)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\left[\frac{H}{d}\left[O_0 e^{-\frac{T}{O_1}-\frac{T^2}{O_2^2}}\left(1-\left(\frac{1}{O_1}+\frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right)(T)\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}}(O_4-S)}{O_5}-\frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}}-\frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}}+\frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7}-\frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7}\right]\right]}{2c} \quad (2.56)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\left[\frac{J}{d}\left[O_0 e^{-\frac{T}{O_1}-\frac{T^2}{O_2^2}}\left(1-\left(\frac{1}{O_1}+\frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right)(T)\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}}(O_4-S)}{O_5}-\frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}}-\frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}}+\frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7}-\frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7}\right]\right]}{2c} \quad (2.57)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{\left[\frac{H}{d}\left[O_0 e^{-\frac{T}{O_1}-\frac{T^2}{O_2^2}}\left(1-\left(\frac{1}{O_1}+\frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right)(T)\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}}(O_4-S)}{O_5}-\frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}}-\frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}}+\frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7}-\frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7}\right]\right]}{2c} \quad (2.58)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{\left[\frac{H}{d}\left[O_0 e^{-\frac{T}{O_1}-\frac{T^2}{O_2^2}}\left(1-\left(\frac{1}{O_1}+\frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right)(T)\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}}(O_4-S)}{O_5}-\frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}}-\frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}}+\frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7}-\frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7}\right]\right]}{2c} \quad (2.59)$$

$$\Gamma_{00}^2 = -\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{J}{d}\right)\left[O_0 e^{-\frac{T}{O_1}-\frac{T^2}{O_2^2}}\left(1-\left(\frac{1}{O_1}+\frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right)(T)\right. \\ \left.+\frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}}(O_4-S)}{O_5}-\frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}}-\frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}}+\frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7}-\frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7}\right] \quad (2.60)$$

$$\Gamma_{11}^2 = - \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right]}{2c} \quad (2.61)$$

$$\Gamma_{33}^2 = - \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right]}{2c} \quad (2.62)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right]}{2c} \quad (2.63)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right]}{2c} \quad (2.64)$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right]}{2c} \quad (2.65)$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right]}{2c} \quad (2.66)$$

## 2.4 Determinação das Equações Geodésicas

Uma vez determinados todos os valores dos coeficientes de conexão pode dar-se início à obtenção das equações geodésicas e para isso utiliza-se a equação já falada anteriormente, mas que se vai relembrar:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0 \quad (2.67)$$

É de salientar, que não irá ser considerado o comportamento relativamente ao tempo  $x_0$ , ou seja  $t$  pois o objectivo limita-se à obtenção das trajectórias no espaço 2D dos planos horizontais acima da boca da chaminé e que em todas elas,  $\lambda$  é um parâmetro mudo que desaparece ao acoplar as expressões obtidas para as coordenadas por forma a chegar às pretendidas trajectórias  $x_2(x_1)$ , ou seja  $y(x)$ , dos raios acústicos, em planos sucessivos onde  $x_3$ , ou seja  $z$ , toma valores constantes.

Este sub-capítulo irá seguir a mesma sequência do anterior sendo dividido em três partes. Também este vai ter um apêndice [\(B\)](#) mas desta vez é no apêndice [\(B\)](#) que se encontram as equações finais para que quem as vá utilizar não tenha de folhear a dissertação até aqui e o acesso a elas seja mais expedito.

### 2.4.1 Para o Modelo A

Vai-se começar pela coordenada  $x^0$ :

$$\begin{aligned} x^0 = t &\Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} + \Gamma_{01}^0 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} \\ &\quad + \Gamma_{02}^0 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} + \Gamma_{20}^0 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} + 2\Gamma_{02}^0 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 t}{d\lambda^2} - \frac{H}{2dT} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} - \frac{J}{2dT} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Para a segunda coordenada tem-se:

$$\begin{aligned}
 x^1 = x &\Rightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} + \Gamma_{11}^1 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} + \Gamma_{12}^1 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} \\
 &\quad + \Gamma_{21}^1 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} + \Gamma_{22}^1 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} + \Gamma_{33}^1 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx^1}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{dx^3}{d\lambda}\right)^2 \\
 &\quad + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dx^2}{d\lambda}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x}{d\lambda^2} - \frac{H K R}{4d} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{H}{4d(T)} \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 \\
 &\quad + \frac{J}{2dT} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} - \frac{H}{4dT} \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 - \frac{H}{4dT} \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

A terceira ficará:

$$\begin{aligned}
 x^2 = y &\Rightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^2 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} + \Gamma_{11}^2 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} + \Gamma_{33}^2 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} \\
 &\quad + \Gamma_{22}^2 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} + \Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} + \Gamma_{21}^2 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^2 \left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dx^1}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{33}^2 \left(\frac{dx^3}{d\lambda}\right)^2 \\
 &\quad + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dx^2}{d\lambda}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 y}{d\lambda^2} - \frac{J K R}{4d} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{J}{4dT} \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 \\
 &\quad - \frac{J}{4dT} \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 + \frac{J}{4dT} \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \frac{H}{2dT} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Por ultimo para  $x^3$ :

$$\begin{aligned}
 x^3 = z &\Rightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + \Gamma_{31}^3 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} \\
 &\quad + \Gamma_{23}^3 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + \Gamma_{32}^3 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 z}{d\lambda^2} + \frac{H}{2dT} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + \frac{J}{2dT} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

### 2.4.2 Para o Modelo B

Uma vez demonstrado como se desenvolve a expressão através da qual se retiram as equações geodésicas nesta e na próxima secção começar-se-á na linha antes das substituição dos Christoffel pois até lá o desenrolar é o mesmo que já foi feito. A primeira equação fica então:

$$\begin{aligned}
 x^0 = t &\Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} + 2\Gamma_{02}^0 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 t}{d\lambda^2} - \frac{\left(\frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{c} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \\
 &\quad - \frac{\left(\frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T))\right)}{c} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

A segunda equação será:

$$\begin{aligned}
 x^1 = x &\Rightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \left( \frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left( \frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left( \frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad + \Gamma_{22}^1 \left( \frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x}{d\lambda^2} - \left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} \\
 &\quad - \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Para  $x^2$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 x^2 = y &\Rightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^2 \left( \frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^2 \left( \frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^2 \left( \frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad + \Gamma_{22}^2 \left( \frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 y}{d\lambda^2} - \left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

A ultima coordenada terá:

$$\begin{aligned}
 x^3 = z &\Rightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 z}{d\lambda^2} + \frac{\left(\frac{H}{d} \left(\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)\right)\right)}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \\
 &\quad + \frac{\left(\frac{J}{d} \left(\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)\right)\right)}{c} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

### 2.4.3 Para o Modelo C

$$\begin{aligned}
 x^0 = t &\Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} + 2\Gamma_{02}^0 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 t}{d\lambda^2} \\
 &\quad - \frac{\left[ \begin{aligned} &\frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ &\left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \\
 &\quad - \frac{\left[ \begin{aligned} &\frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ &\left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \right]}{c} \tag{2.76}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^1 = x &\Rightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx^1}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{dx^3}{d\lambda}\right)^2 \\
 &+ \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dx^2}{d\lambda}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x}{d\lambda^2} \\
 &- \left(\frac{c}{2}\right) \left(\frac{H}{d}\right) \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \\
 &\left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \\
 &+ \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 \quad (2.77) \\
 &+ \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} \\
 &- \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 \\
 &- \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 = y &\Rightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^2 \left( \frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^2 \left( \frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^2 \left( \frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 \\
 &+ \Gamma_{22}^2 \left( \frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 y}{d\lambda^2} \\
 &- \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{J}{d} \right) \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\
 &+ \left. \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \\
 &- \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \quad (2.78) \\
 &- \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left( \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \\
 &+ \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \\
 &+ \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 = z &\Rightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 z}{d\lambda^2} \\
 &+ \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \\
 &+ \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{2.79}$$



# Capítulo 3

## Cálculo e Resolução das Equações Geodésicas a Nível Computacional

### 3.1 O Programa

O desenvolver deste programa (Apêndice [E](#)) partiu da necessidade inicial de, depois de obtidas as equações geodésicas estas precisarem de ser resolvidas para que desta forma se obtivessem as trajectórias dos raios acústicos.

Todavia, acabou por ser desenvolvido um programa muito mais complexo e com mais capacidades do que o idealizado inicialmente, pois para além de obter os gráficos das trajectórias, este consegue fazer todo o cálculo desde o tensor até às trajectórias finais, passando pelo cálculo dos coeficientes de conexão e obtenção das próprias equações diferenciais.

Conseguir criar este programa foi um passo importantíssimo para o desenvolver do restante estudo pois veio a poupar imenso tempo cada vez que se queria experimentar um novo tensor, ou até mesmo quando se detectava um erro evitou o cálculo exaustivo de equações geodésicas até que estas fossem as pretendidas.

Para além do já referido, o código ainda permitiu que se pudesse ir mais além de forma mais eficiente pois passar funções constantes a não constantes, fluido em repouso a não repouso e até mesmo representar um campo hidrotérmico com o número de fontes que se quisesse ficou à distância de um *click*.

Justificado o programa, vai passar-se agora à explicação do mesmo.

#### 3.1.1 Campo de Temperatura

Após determinada a expressão do campo de temperatura no capítulo anterior, esta vai ser escrita em MATLAB para que assim se possa observar melhor o

seu comportamento. Recordando a expressão já proposta,

$$T = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (z_0-z_{11})} + TK + TM \quad (3.1)$$

Como é de reparar esta, é uma igualdade que tem muitos parâmetros e no programa é precisamente por isso que se vai começar, vão ser definidas todas elas. e de seguida a própria expressão tendo em conta esses parâmetros.

```
%Parâmetros iniciais
A1=400; %temperatura no centro
gamma=0.5; %alpha1
alp=8; %alpha2
z0=0; %altura do corte
z11=0; %altura da fonte
x_21=0; %abscissa do centro da fonte
y_21=0; %ordenada do centro da fonte
TM=1.5; %temperatura ambiente da água do mar
TK=273.15; %conversor para graus Kelvin

%campo temperatura
Z1=(A1*exp(-gamma*(z0-z11))*exp(-alp*sqrt(((X1-x_21).^2+(Y1-y_21).^2)))+TM)+TK;
```

FIGURA 3.1: Condições iniciais e  $T(x, y)$ .

Observando a figura anterior repara-se que foram atribuídos valores a  $\alpha_0$  e a  $\alpha_1$ . Os valores propostos provêm da análise de um gráfico onde é visível a queda da temperatura com a distância na horizontal e vertical ao centro da fonte para diversos valores dos  $\alpha$ .

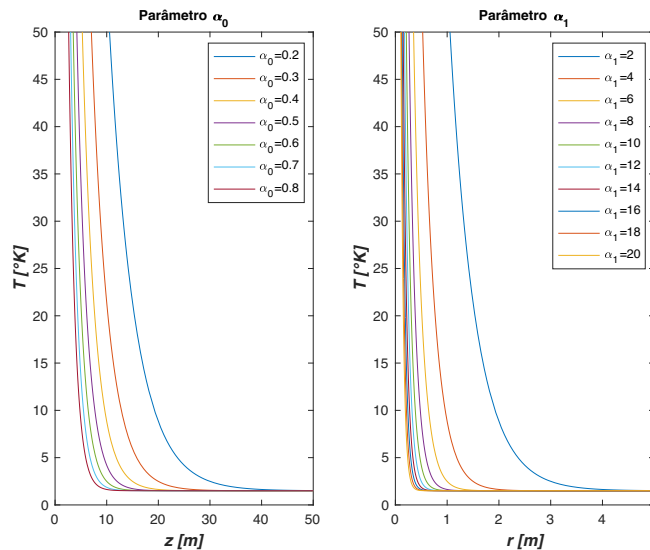


FIGURA 3.2: Queda da temperatura com a distância na horizontal e vertical ao centro da fonte para diversos valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_0$ , respectivamente.

### 3.1. O Programa

Neste gráfico ao ser considerado como razoável uma distância de quinze e um metros para que se atinja a temperatura ambiente ( $1.5^{\circ}\text{C}$ ) virá aproximadamente  $\alpha_0$  igual a 0.5 e  $\alpha_1$  igual a 8 tal como foi definido na figura (3.1).

Agora escolhem-se os intervalos pretendidos de  $x$  e  $y$  que são mostrados a partir do `meshgrid`. Posto isto, o gráfico é representado numa vista aérea através do `contour()` e lateral pelo `mesh()`.

```
min_x1=min(-0.2);
min_y1=min(-0.2);
max_x1=max(0.2);
max_y1=max(0.2);

x11 = linspace(min_x1,max_x1);
y11 = linspace(min_y1,max_y1);
[X1,Y1] = meshgrid(x11,y11);

contour(X1,Y1,Z1) %/mesh(X1,Y1,Z1)
```

FIGURA 3.3: Intervalo de  $x$  e  $y$  e modo de vista.

Como já foi referido irão ser considerados diversos cortes longitudinais a diferentes alturas, ou seja diferentes parâmetros  $z_0$  em relação à altura fonte ( $z_{11}$ ), e por isso obtêm-se os seguintes gráficos ao correr o programa no Apêndice (C).

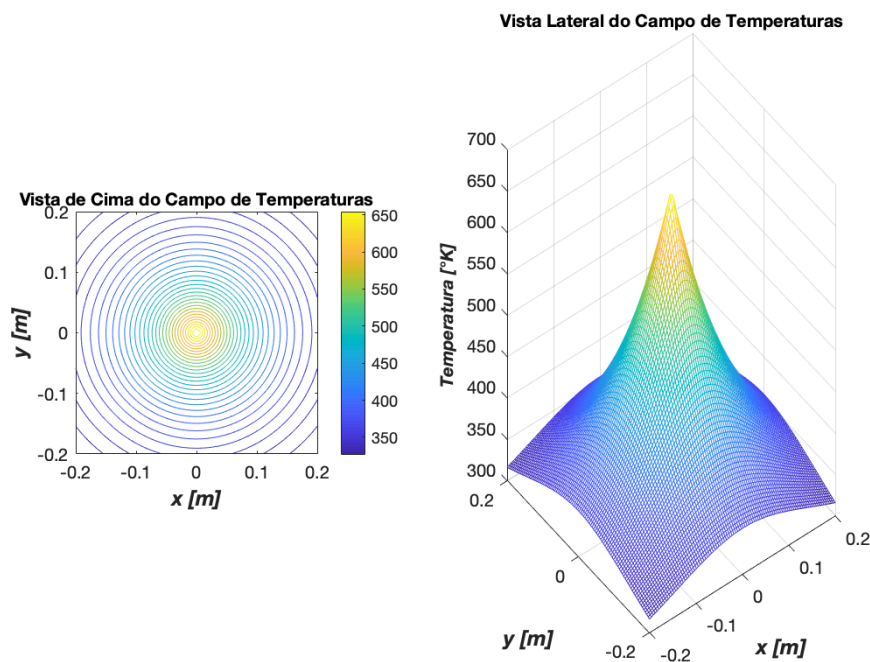


FIGURA 3.4: Distribuição de Temperaturas para um  $z_0=0$  e  $z_{11}=0$

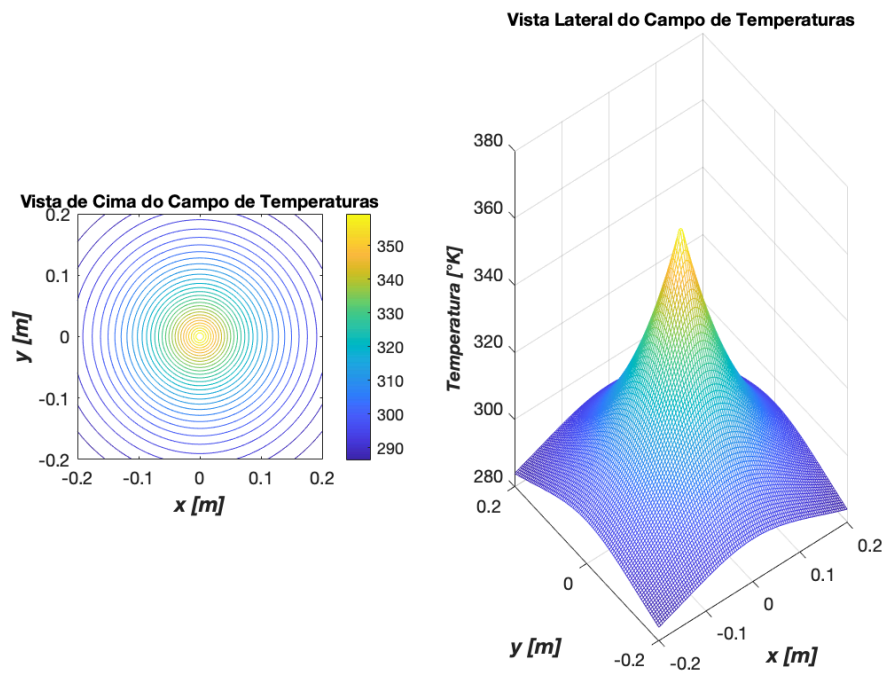


FIGURA 3.5: Distribuição de Temperaturas para um  $z_0=3$  e  $z_{11}=0$

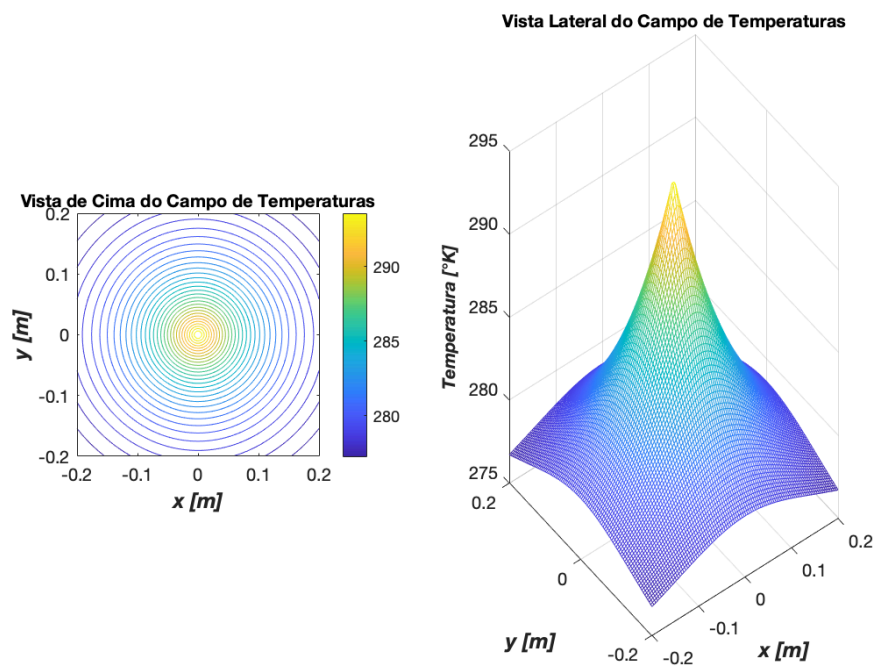


FIGURA 3.6: Distribuição de Temperaturas para um  $z_0=6$  e  $z_{11}=0$ .

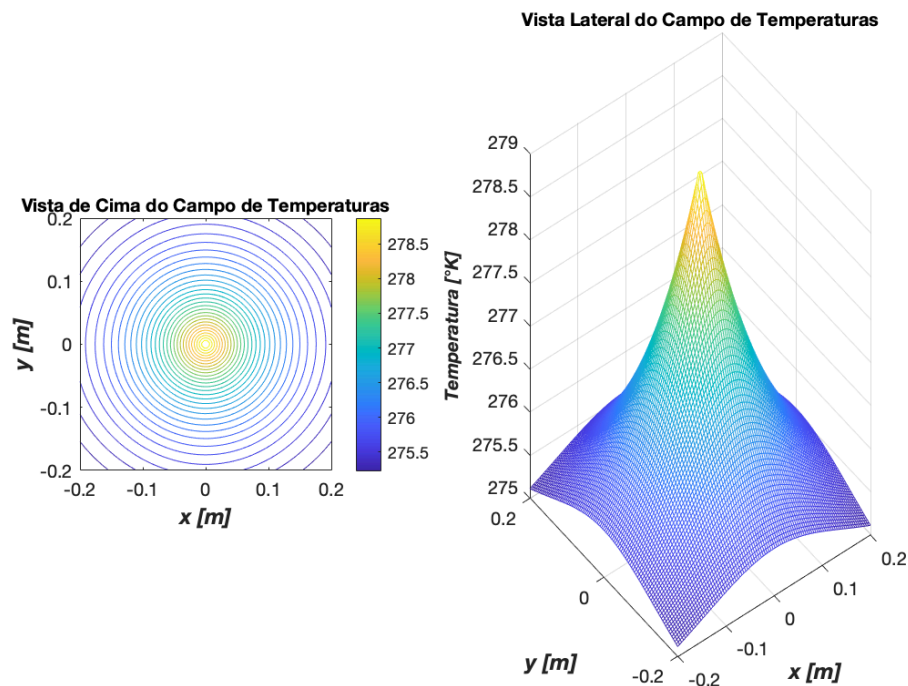


FIGURA 3.7: Distribuição de Temperaturas para um  $z_0=9$  e  $z_{11}=0$ .

### 3.1.2 Tensor e Expressões de $c(T)$

Definida a expressão do campo de temperaturas pode dar-se início ao programa que será responsável pelo cálculo das trajectórias dos raios acústicos.

O primeiro passo será definir todas as variáveis simbólicas que se pretende usar e isso será feito através do função `syms t x y z`.

Após estarem definidas podemos começar a escrever quais as expressões de  $c(T)$  que se pretende usar, mas primeiro volta-se a escrever  $z_1$  num formato simbólico já que se está a utilizar variáveis simbólicas.

```
A1=400; %temperatura no centro
gamma=0.5; %alpha1
alp=20;%alpha2
z0=0; %altura do corte
z11=0; %altura da fonte
x_21=0; %abscissa do centro da fonte
y_21=0; %ordenada do centro da fonte
T1=(A1*exp(-gamma*(z0-z11))*exp(-alp*((x-x_21)^2+(y-y_21)^2)^(1/2))+1.5)+(273.15);
```

FIGURA 3.8: Campo de temperaturas simbólico.

De seguida vai escrevem-se então as expressões de  $c$  que já foram faladas no início do Capítulo(2) e é ainda acrescentada uma quarta opção para que desta forma seja o utilizador a definir qual a  $c(T)$  que pretende utilizar.

```

%expressão SQRT(KRT)
K=5;
R=8.31;
ct=sqrt(K*R)*sqrt(Temp);

%expressão dos polinômios
% alpha=0.1;
% beta=0.1;
% Gamma=0.1;
% epsilon=0.1;
% ct=alpha+beta*Temp+Gamma*(Temp)^2+epsilon*(Temp)^3;

%Expressão para Del Grosso
% P=100;
% S=35;
% ct=1449.08+4.57*Temp*exp(-((Temp/86.9)+(Temp/360)^2))+1.33*(S-35)*exp(-Temp/120)
%+0.1522*P*exp((Temp/1200)+((S-35)/400))+1.46*10^(-5)*P^2*exp(-((Temp/20)+((S-35)/10)));

%expressão c(t) escolhida pelo utilizador.A incluir futuramente uma
%dependência válida para altas temperaturas.
% c_1='insira o c(t)';
% ct=input(c_1);

```

FIGURA 3.9: Expressões de  $c(T)$ .

Resta apenas definir o tensor que como também já foi falado será diagonal uma vez que se trata de um fluido em repouso.

```

%tensor metrico acustico
g00=-(a*ct);
g01=0;
g02=0;
g03=0;
g10=0;
g11=(a/ct);
g12=0;
g13=0;
g20=0;
g21=0;
g22=(a/ct);
g23=0;
g30=0;
g31=0;
g32=0;
g33=(a/ct);
tm=[g00 g01 g02 g03; g10 g11 g12 g13; g20 g21 g22 g23; g30 g31 g32 g33];

g0=-1/(a*ct);
g1=ct/a;
g2=ct/a;
g3=ct/a;
tm1=[g0 0 0 0; 0 g1 0 0; 0 0 g2 0; 0 0 0 g3];

```

FIGURA 3.10: Tensor métrico acústico para um fluido em repouso.

Estão escritos todos os dados iniciais e desta forma pode iniciar-se o cálculo que será explicado nos próximos sub-capítulos.

### 3.1.3 Símbolos de Christoffel

Tal como se fez analiticamente, também computacionalmente para se chegar às equações geodésicas tem de se começar pelos símbolos de Christoffel. Ao olhar de novo para a expressão (2.9) nota-se que o que dá os diferentes valores dos coeficientes são exactamente os valores de  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  e por isso vai ter de se atribuir valores, começamos por exemplo pelo 0 e fazendo,  $h=\sigma$ ,  $\bar{f}=\mu$  e  $w=\nu$ , fica-se com:

```
h=0;%sigma
f=0;%mu
w=0;%nu
```

FIGURA 3.11: Atribuição de valores a  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

O passo seguinte só se torna possível se tal como inicialmente o fluido estiver em repouso e a matriz do tensor for uma matriz diagonal. Este ponto é a parte do programa que irá fazer o cálculo daquele  $\rho$  que vemos na fórmula. Para isso vai ser considerado  $\rho=\text{rho}$  e através do seguinte ciclo `if`, vai-se conseguir o seu valor já que para que  $g^{\sigma\rho} \neq 0 \Rightarrow \rho = \sigma$ .

```
if h==0
    rho=0;
elseif h==1
    rho=1;
elseif h==2
    rho=2;
elseif h==3
    rho=3;
else
    disp('0 valor não é permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
end
```

FIGURA 3.12: Ciclo `if` que obtém o valor de  $\rho$ .

Posto isto, está descoberta a forma de chegar ao valor de  $g^{\sigma\rho}$ , resta  $\left[ \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\rho} \right]$  e não contabilizando por umas linhas de código as derivadas parciais,

$$\begin{aligned} M &= g^{\sigma\rho} \\ N &= g_{\rho\nu} \\ Q &= g_{\mu\rho} \\ B &= g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.2}$$

O conjunto de `if` seguintes irá transpor os valores correspondentes do tensor a cada letra através dos valores de  $\sigma, \rho, \mu$  e  $\nu$ .

```
if h==0 && rho==0
    M=g0;
elseif h==1 && rho==1
    M=g1;
elseif h==2 && rho==2
    M=g2;
elseif h==3 && rho==3
    M=g3;
else
    M=0;
end
```

FIGURA 3.13: Ciclo `if` que obtém o valor de `M`

```
if rho==0 && w==0
    N=g00;
elseif rho==1 && w==1
    N=(g11);
elseif rho==2 && w==2
    N=(g22);
elseif rho==3 && w==3
    N=(g33);
else
    N=0;
end
```

FIGURA 3.14: Ciclo `if` que obtém o valor de `N`

```
if f==0 && rho==0
    Q=g00;
elseif f==1 && rho==1
    Q=(g11);
elseif f==2 && rho==2
    Q=(g22);
elseif f==3 && rho==3
    Q=(g33);
else
    Q=0;
end
```

FIGURA 3.15: Ciclo `if` que obtém o valor de `Q`

```

if f==0 && w==0
    B=g00;
elseif f==1 && w==1
    B=(g11);
elseif f==2 && w==2
    B=(g22);
elseif f==3 && w==3
    B=(g33);
else
    B=0;
end

```

FIGURA 3.16: Ciclo `if` que obtém o valor de B

Neste momento temos a expressão do coeficientes como sendo,

$$C = \frac{1}{2}M(N + Q - B) = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\nu} + g_{\mu\rho} - g_{\mu\nu}) \quad (3.3)$$

Igualdade que não está correcta pois faltam as derivadas já faladas. Essas derivadas serão calculadas no próximo conjunto de `if` que através da função `diff` fará-se-á a derivada de N, Q ou B em relação a  $t$ ,  $x$ ,  $y$  ou  $z$  consoante o valor de  $\mu$ ,  $\nu$  e  $\rho$  seja 0,1, 2 ou 3 respectivamente.

```

|if f==0
    n=diff(N,t);
elseif f==1
    n=diff(N,x);
elseif f==2
    n=diff(N,y);
elseif f==3
    n=diff(N,z);
else
    disp('0 valor não é permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
end

```

FIGURA 3.17: Ciclo `if` que obtém da derivada de N (n).

```

|if w==0
    q=diff(Q,t);
elseif w==1
    q=diff(Q,x);
elseif w==2
    q=diff(Q,y);
elseif w==3
    q=diff(Q,z);
else
    disp('0 valor não é permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
end

```

FIGURA 3.18: Ciclo `if` que obtém da derivada de Q (q).

```

if rho==0
    b=diff(B,t);
elseif rho==1
    b=diff(B,x);
elseif rho==2
    b=diff(B,y);
elseif rho==3
    b=diff(B,z);
else
    disp('0 valor não é permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
end

```

FIGURA 3.19: Ciclo `if` que obtém da derivada de B (b).

Terminado estes ciclos temos a igualdade pretendida,

$$C = \frac{1}{2}M(n + q - b) = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\rho} \right) \quad (3.4)$$

Ou seja com um simples `disp (C)` ficar-se-ia a conhecer o valor de  $\Gamma_{00}^0$ , mas isto obrigaria ao utilizador um trabalho tão ou mais cansativo do que calcular analiticamente todos os Christoffel, pois teria de correr, neste caso, sessenta e quatro vezes o programa para que tivesse o resultado de todos os coeficientes.

A solução que se encontrou foi simples um ciclo `for`, que cada vez que este é iniciado é para uma combinação de  $\sigma$ ,  $\mu$  e  $\nu$  diferente. Falta gerar as combinações. As combinações são gerados pelas seguintes linhas,

```

coordenadas = 0:3;
expoentes = 3;
dimensoes = numel(coordenadas);
combinacoes = coordenadas(dec2base(0:dimensoes^expoentes-1,dimensoes)-'0'+1);

```

FIGURA 3.20: Criação de matriz `combinacoes` que contém todas as possibilidades de combinação de  $\sigma$ ,  $\mu$  e  $\nu$ .

Onde `coordenadas` vai ser o campo onde se estabelece os valores que  $\sigma$ ,  $\mu$  e  $\nu$  podem tomar (aqui em concreto 0, 1, 2 ou 3), `expoente` é o número de espaços que esses quatro valores podem ocupar, `dimensoes` define o número de dimensões e por fim `combinacoes` gera uma matriz com todas as sessenta e quatro possibilidades.

Agora sim no ciclo `for` há um `i` que percorre todos os valores de 0 (incluído) até 63 com um incremento de 1 em 1.

Já dentro do `for` e para resolver o problema de `h`, `f` e `w` ocuparem os valores certos da matriz existe um `s` que é a matriz de cada linha da matriz `combinacoes`.

```

1 for i=0.0:+1:63
    s=combinacoes(1+i, :, :);
    h=s(1,1);%sigma
    f=s(1,2);%mu
    w=s(1,3);%nu

```

FIGURA 3.21: Ciclo `for`, matriz `s` e novos valores de `h`, `f` e `w`.

No final de tudo isto com um `Pretty(C)` antes do `end` do ciclo `for` obtemos todos os valores possíveis para os símbolos de Christoffel. O código completo encontra-se no Apêndice [\(B\)](#).

### 3.1.4 Equações Geodésicas

Obtidos os valores de todos os coeficientes de conexão, pode-se partir para a construção das equações geodésicas.

Recordando a expressão (2.68), a partir da qual se obtém as equações que vão dar as trajectórias dos raios acústicos, sabe-se que esta terá sempre o valor do coeficiente de conexão a multiplicar pela derivada de  $x^\mu$  em relação a  $\lambda$  e pela derivada de  $x^\nu$  também em relação a  $\lambda$ , ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (3.5)$$

Sabendo que  $\mu$  e  $\nu$  podem ter valor de 0, 1, 2 ou 3 e que  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  e  $x^3 = z$  poderemos ter quatro possíveis derivadas, a que se chamou,

$$\begin{aligned} t2 &= \frac{dx^0}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} \\ x2 &= \frac{dx^1}{d\lambda} = \frac{dx}{d\lambda} \\ y2 &= \frac{dx^2}{d\lambda} = \frac{dy}{d\lambda} \\ z2 &= \frac{dx^3}{d\lambda} = \frac{dz}{d\lambda} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Computacionalmente ficou,

```
t2=diff(t(l));
x2=diff(x(l));
y2=diff(y(l));
z2=diff(z(l));
|
```

FIGURA 3.22: Criação das variáveis t2, x2, y2 e z2

Estando definido  $t2$ ,  $x2$ ,  $y2$ ,  $z2$ , falta apenas criar as linhas de código que decidem qual das variáveis usar dependendo de  $\mu$  e  $\nu$ . Os seguintes `if` vão fazer isso mesmo, sabendo que  $l1 = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  e  $l2 = \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ,

```
if f==0
l1=t2;
elseif f==1
l1=x2;
elseif f==2
l1=y2;
elseif f==3
l1=z2;
else
disp('0 valor não é permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
end
```

FIGURA 3.23: Aparecimento de l1.

```
if w==0
l2=t2;
elseif w==1
l2=x2;
elseif w==2
l2=y2;
elseif w==3
l2=z2;
else
disp('0 valor não é permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
end
```

FIGURA 3.24: Aparecimento de l2.

Resumindo, até aqui tem-se,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = C1 * l1 * l2 = c1\_1 \quad (3.7)$$

Em que  $C1$  é a nova designação no código para o valor do símbolo de Christoffel.

Já foi falado da importância de  $\mu$  e  $\nu$ , mas ainda nada foi dito em relação ao  $\sigma$ , este é o valor mais importante pois é este que vai decifrar se  $C1\_1$  pertence à equação  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  ou  $x^3 = z$ . Antes de mais são criadas quatro novas variáveis ( $T, X, Y, Z$ ) com valor inicial 0,

```

T=0;
X=0;
Y=0;
Z=0;

```

FIGURA 3.25: Criação das variáveis T, X, Y e Z

A variável T corresponde á soma de todos os C1\_1 que pertençam a  $x^0$ , tal como X todos os que façam parte de  $x^1$ , Y a  $x^2$  e Z a  $x^3$ . À medida que o ciclo `for` vai correndo a separação e a soma vai ser feita da seguinte forma:

```

if h==0
    T=T+(C1_1); %T será a soma de todos os C1_1 que pertençam a x^0=t
elseif h==1
    X=X+(C1_1); %X será a soma de todos os C1_1 que pertençam a x^1=x
elseif h==2
    Y=Y+(C1_1); %Y será a soma de todos os C1_1 que pertençam a x^2=y
elseif h==3
    Z=Z+(C1_1); %Z será a soma de todos os C1_1 que pertençam a x^3=z
else
    disp('0 valor não é permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
end

```

FIGURA 3.26: Separação de C1\_1 em T, X, Y e Z.

Fica agora a faltar um único termo para que a equação fique completa, o termo  $\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2}$ , que é somado a T, X, Y ou Z consoante  $\sigma$  seja 0, 1, 2 ou 3, respectivamente. Se se considerar computacionalmente  $\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} = \text{diff}(x^\sigma, 2)$ , fica-se com as quatro equações geodésicas possíveis escritas da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 \text{diff}(t, 2) &= -T \\
 \text{diff}(x, 2) &= -X \\
 \text{diff}(y, 2) &= -Y \\
 \text{diff}(z, 2) &= -Z
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

No entanto, escritas desta forma não são nada no MATLAB e só quando colocadas na função `odeToVectorField` é que estas se transformarão num sistema de oito equações de primeira ordem chamado [dWd1], que após a linha `latex(dWd1)` é possível ser visualizado num formato  $\text{\LaTeX}$ .

```

[dWd1]=odeToVectorField(diff(t,2)==-T,diff(x,2)==-X,diff(y,2)==-Y,diff(z,2)==-Z);
|
latex(dWd1)

```

FIGURA 3.27: Aparecimento e escrita  $\text{\LaTeX}$ do sistema [dWd1]

O objectivo de obter as equações geodésicas é alcançar as trajectórias dos raios acústicos para uma velocidade  $c$  que varia de acordo com o campo de temperatura e isso o programa ainda não faz; por isso vai-se continuar a explicar os passos a seguir até que seja possível obtê-las.

O primeiro passo consiste em converter o sistema para um sistema de equações não simbólico pois o *solver* do MATLAB (`ode45`) não é compatível com cálculo simbólico, posto isto teremos um novo sistema designado por DWDL que é obtido através da seguinte linha de código:

```
DWDL = matlabFunction(dWdl, 'vars', {'l', 'Y'});
```

FIGURA 3.28: Conversão de [dWdl] em DWDL

Antes de se colocar DWDL no *solver* ainda são definidas as condições iniciais ( $wa$ ) e o intervalo de integração (`lspan`).

```
y1_0=0.2;
y2_0=sin(0*pi/180);
t1_0=0;
t2_0=0;
x1_0=-0.2;
x2_0=cos(0*pi/180);
z1_0=0;
z2_0=0;
wa=[x1_0 x2_0 t1_0 t2_0 y1_0 y2_0 z1_0 z2_0];

numstepl=1000;
deltal=0.001;
lfinal=numstepl*deltal;
lspan=[0:deltal:lfinal];

[l,wa] = ode45(DWDL,lspan,wa,[]);
```

FIGURA 3.29: Condições iniciais, intervalo de integração e `ode45`.

No final de tudo resta fazer o desenho do gráfico  $(x,y)$ ,

```
x21=wa(:,1);
y21=wa(:,5);
plot(x21,y21)
axis equal
grid on
hold on
```

FIGURA 3.30: Rotina de desenho num gráfico  $(x,y)$  das trajectórias dos raios.

Juntando os Apêndices (C) e (D) vamos obter o Apêndice (E) que será o código que obterá as equações geodésicas e que desenhará as trajetórias dos raios acústicos num gráfico onde também estará representado o campo de temperatura para que se possa ter uma melhor noção de como os raios se comportam em função da temperatura.

### 3.1.5 Variações Adicionais

Este sub-capítulo serve para dar a conhecer algumas alterações que se podem fazer no Apêndice (E) para que o programa ganhe mais capacidade e ferramentas.

Algumas delas são óbvias, como por exemplo se quisermos que o tensor não dependa só da velocidade mas também do parâmetro  $a$  e para isso basta na linha de código 60 do Apêndice (E) o utilizador introduzir a expressão que quer usar.

Outro exemplo que também foi usado para o estudo realizado foi em vez de se ter única e exclusivamente um emissor ter  $n$  emissores e para se conseguir isso basta acrescentar um `for` `variavel = valor inicial: valor que se soma ...` ou `subtrai: valor final` na linha 26 do Apêndice (E) e um `end` na linha 301. Para além disso substitui-se na linha 275 por `y1_0 = variavel`.

Se em vez de vários emissores quisermos apenas um mas com vários ângulos de emissão terá de se seguir a mesma lógica do caso anterior, ou seja um ciclo `for` na mesma linha, mas o valor inicial, final e o que se soma ou subtrai dizem respeito ao ângulo pretendido e em vez de se substituir o valor de `y1_0`, vai-se alterar nas linhas 276 e 280 o 0 por a variável do ciclo `for`.

A certa altura também surgiu a necessidade de em vez de ser considerada uma única fonte hidrotérmica, serem consideradas duas ou mais e por isso também se teve de acrescentar algumas linhas de código. Em vez de se ter apenas uma gaussiana agora vão existir duas ou mais e por isso vai ser definido um novo T, por exemplo T2 e todos os seus parâmetros iniciais como sugere a imagem,

```
A2=400;%temperatura no centro
alp1=20; %alpha2
gamma=0.5; %alpha1
z0=0;%altura do corte
z12=3;%altura da fonte
x_22=0.3;%abcissa do centro da fonte
y_22=0.1;%ordenada do centro da fonte

% novo campo temperatura
T2=(A2*exp(-gamma*(z0-z12))*exp(-alp1*((x-x_22)^2+(y-y_22)^2)^(1/2))+1.5)+(273.15);
Temp=T1+T2;
```

FIGURA 3.31: Parâmetros iniciais da nova fonte hidrotérmica.

Isto vai ser acrescentado depois da linha 37 do já referido Apêndice(E) e na linha 38 terá de aparecer  $Temp=T1+T2$ .

Para que esta nova fonte apareça também no gráfico teremos de acrescentar a partir da linha 316 o mesmo que se fez da linha 302 até à 316 para  $z1$  só que agora para um  $z2$  que será equivalente a  $T2$ ,

```

hold on
%novos intervalos de x e y
min_x11=min(0.1);
min_y11=min(-0.1);
max_x11=max(0.5);
max_y11=max(0.3);

%nova representação desses intervalos
x12 = linspace(min_x11,max_x11);
y12 = linspace(min_y11,max_y11);
[X2,Y2] = meshgrid(x12,y12);
%novo campo temperatura equivalente a T2
Z2=A2*exp(-gamma*(z0-z12))*exp(-alp1*sqrt(((X2-x_22).^2+(Y2-y_22).^2))+1.5)+273.15;
%representação do novo campo de temperaturas
contour(X2,Y2,Z2)

```

FIGURA 3.32: Intervalo de  $x$  e  $y$  da nova fonte hidrotérmica..

Compreendido isto agora podem ser acrescentadas o número de fontes que se quiser sempre seguindo o mesmo raciocínio.

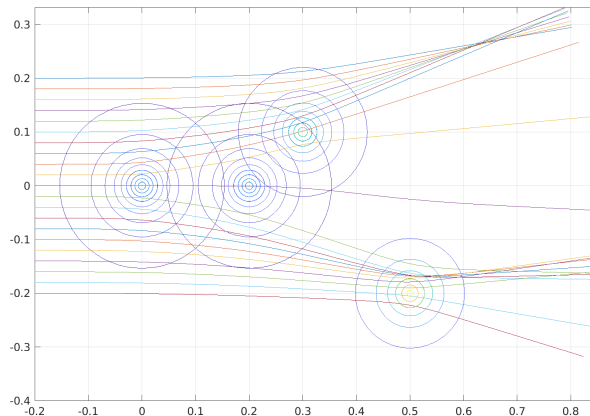


FIGURA 3.33: Exemplo de um gráfico de quatro fontes hidrotérmicas com diferentes temperaturas centrais máximas( $A$ ), diferentes posições e diferentes alturas das chaminés( $z_{11}$ ).

# Capítulo 4

## Simulações Numéricas e Discussão

Neste capítulo realizar-se-ão simulações numéricas de trajectórias de raios acústicos utilizando equações geodésicas deduzidas com base em diferentes relações temperatura-velocidade.

Na secção 4.1 utilizaremos a relação  $c(T) = \sqrt{KR}\sqrt{T}$ . Na secção 4.2 utilizaremos a relação  $c(T) = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \epsilon T^3$ . Finalmente, na secção 4.3 utilizaremos a relação  $c(T, S, P) = 1449.08 + 4.57(T) e^{-\left[\frac{T}{86.9} + \left(\frac{T}{360}\right)^2\right]} + 1.33(S - 35) e^{-\left[\frac{T}{120}\right]} + 0.1522P e^{\left[\frac{T}{1200} + \frac{S-35}{400}\right]} + 1.46 * 10^{-5} P^2 e^{-\left[\frac{T}{20} + \frac{S-35}{10}\right]}$ . As relações acabadas de referir serão designadas respectivamente por Modelo A, Modelo B e Modelo C, tal como anteriormente.

### 4.1 Modelo A

Na presente secção a relação temperatura-velocidade que está na base da dedução das equações geodésicas utilizadas nas simulações numéricas é  $c(T) = \sqrt{KR}\sqrt{T}$ .

Notemos que a expressão utilizada na modelação da distribuição de temperatura será  $T = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2 + (y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0(z_0 - z_{11})} + TK + TM$ . Esta expressão depende dos parâmetros  $A$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  que traduzem a temperatura máxima no centro e à saída da fonte em graus centígrados (em °C), a constante de decaimento vertical e a constante de decaimento horizontal, respectivamente. Refira-se que assumir-se-á a temperatura base da água (do mar)  $TM=1.5^\circ$  C, a relação dos calores específicos  $K=5$  e a constante dos gases perfeitos  $R=8.31\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ . O parâmetro  $TK$  representa o termo que adicionado a  $TM$  permite representar a temperatura da água do mar em graus Kelvin na expressão utilizada.

### 4.1.1 Análise da variação do parâmetro $\alpha_1$

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $\alpha_1$  em dois cenários distintos:  $A= 400\text{ }^\circ\text{C}$  e  $A=100^\circ\text{C}$ .

Para  $A=400^\circ\text{C}$ :

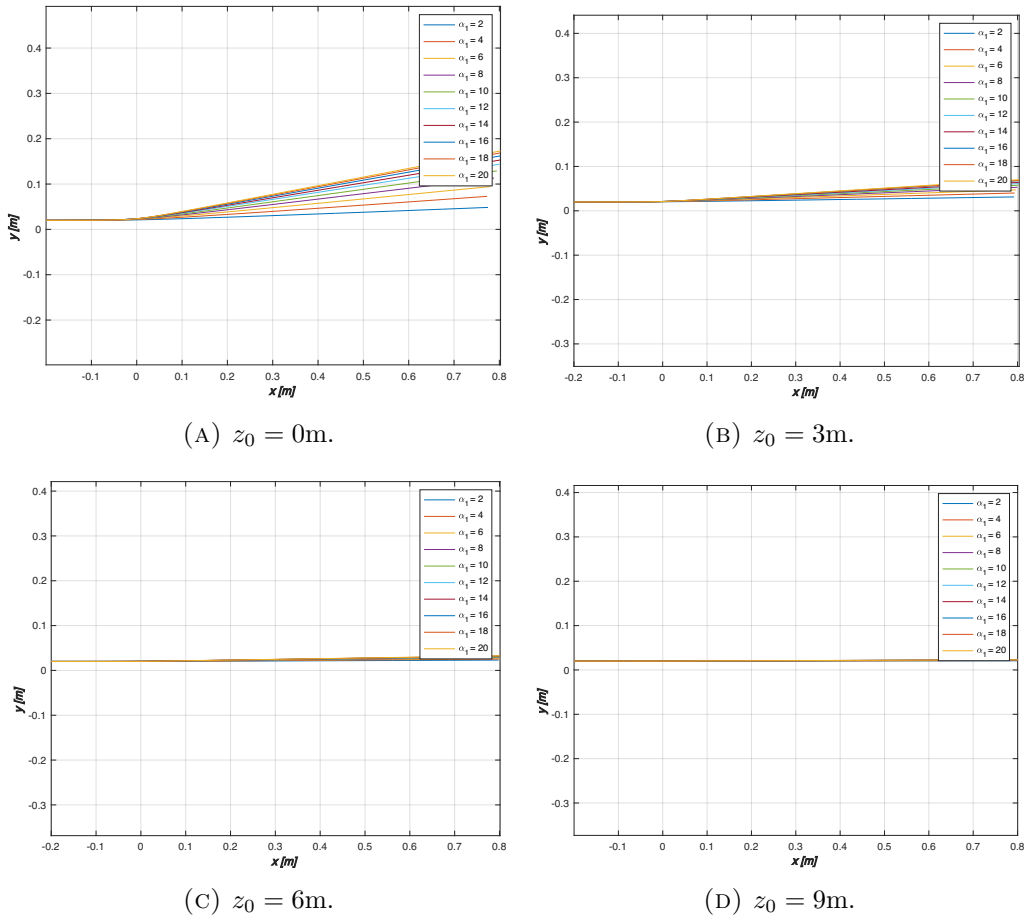


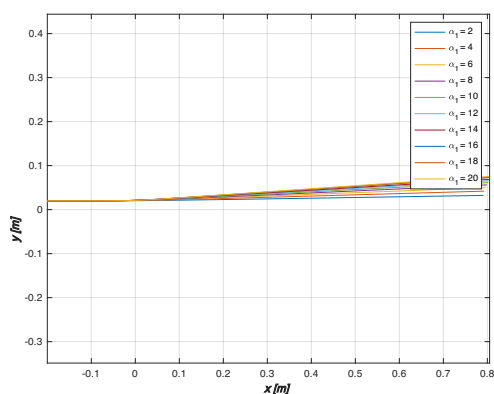
FIGURA 4.1: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $400^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_0 = 0.5$  e variações do valor de  $\alpha_1$ .

Para a obtenção destes gráficos foram utilizados quatro valores de profundidade ( $z_0$ ) distintos. foram estes  $z_0=0$ m,  $z_0=3$ m,  $z_0=6$ m e  $z_0=9$ m representados nos gráficos A, B, C e D, respectivamente. Para além destes valores, há valores que são os mesmos para todos os quatro gráficos obtidos, são eles o valor de  $\alpha_0=0.5$ , as coordenadas cartesianas do emissor  $(-0,2, 0.02)$  e ainda o ângulo de emissão que é igual a 0.

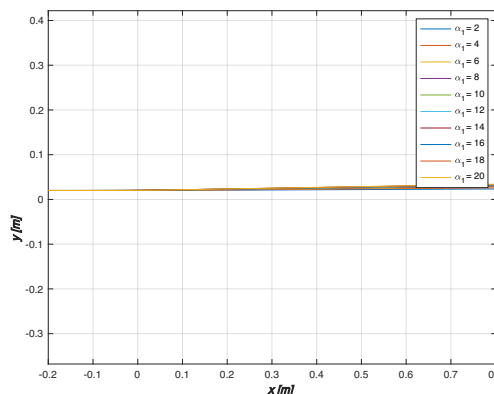
#### 4.1. Modelo A

Por forma a conseguir-se observar o impacto de  $\alpha_1$ , na trajectória dos raios em cada um dos gráficos foram representados vários trajectos dos raios para um intervalo de  $\alpha_1$  de 2 a 20 com incremento de dois. Tal como era expectável quanto maior for o valor do decaimento horizontal ( $\alpha_1$ ) mais rápido e maior será o desvio apresentado nas proximidades da fonte. Também é de notar que com o aumentar de  $z_0$  menor serão os desvios apresentados pois quanto maior for a distância à boca da chaminé menor será a temperatura do meio onde se propagam os raios.

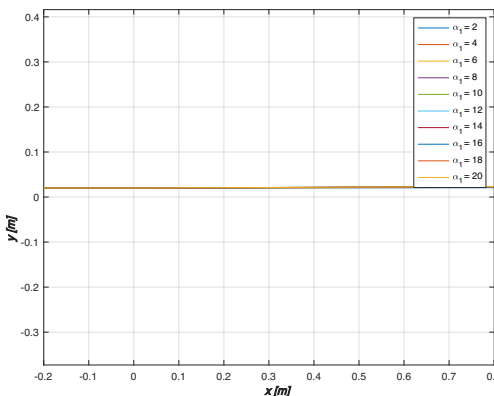
Para  $A=100^\circ\text{C}$ :



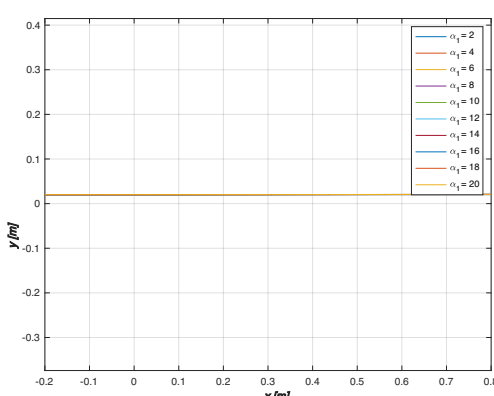
(A)  $z_0 = 0\text{m}$ .



(B)  $z_0 = 3\text{m}$ .



(C)  $z_0 = 6\text{m}$ .



(D)  $z_0 = 9\text{m}$ .

FIGURA 4.2: Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_0 = 0.5$  e variações do valor de  $\alpha_1$ .

Na simulações representadas na Figura 4.2 a única alteração que é feita em relação às simulações representadas na Figura 4.1 será, tal como o título sugere, o valor da temperatura máxima no centro e à saída da fonte ( $A$ ), que passa de  $400^\circ\text{C}$

para 100°C. As as conclusões que podem ser retiradas são as mesmas, no entanto, há um reforçar da ideia de que quanto maior for a temperatura do meio em que os raios se propagam maior será o desvio apresentado o que é observável ao comparar, por exemplo, os dois gráficos A onde o  $z_0$  é igual a zero metros.

### 4.1.2 Análise da variação do parâmetro $\alpha_0$

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $\alpha_0$  em dois cenários distintos:  $A= 400\text{ }^\circ\text{C}$  e  $A=100^\circ\text{C}$ .

Para  $A=400^\circ\text{C}$ :

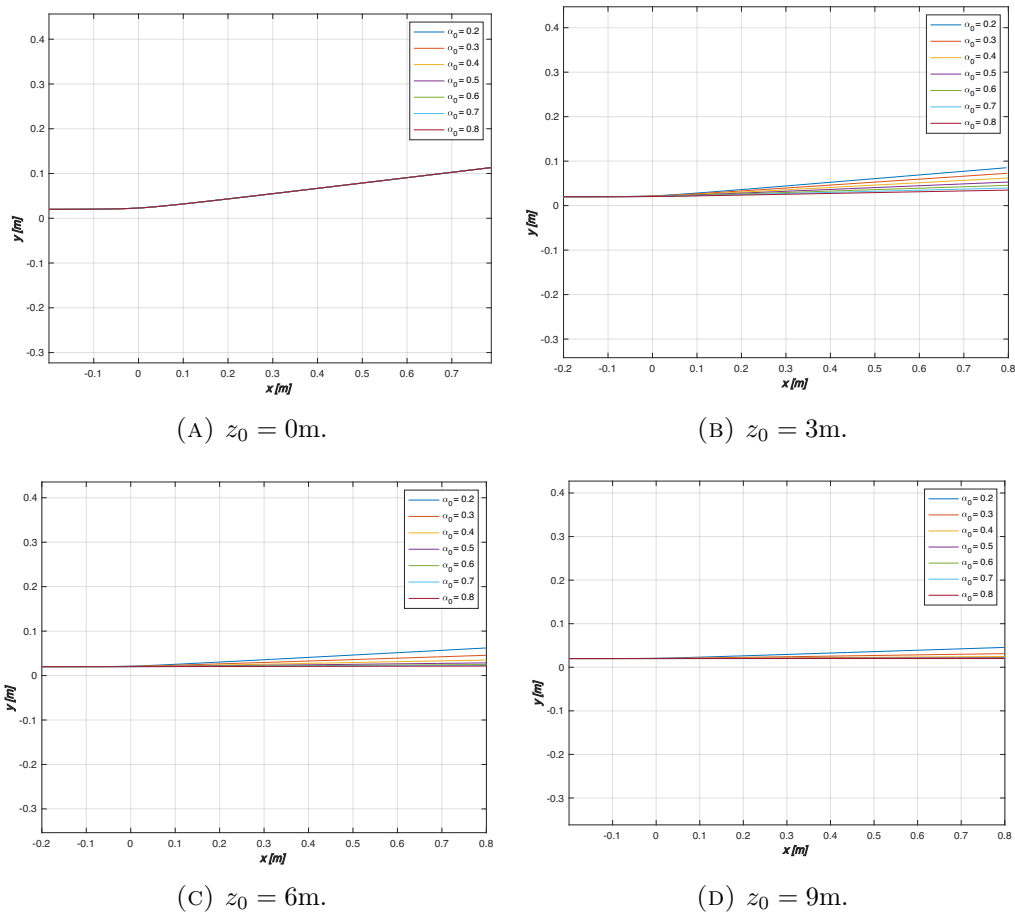


FIGURA 4.3: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de 400°C,  $\alpha_1 = 8$  e variações do valor de  $\alpha_0$ .

Nestas simulações pretendemos verificar de que forma é que o trajecto dos raios é afectado pela constante de decaimento vertical ( $\alpha_0$ ), e para isso foram utilizados de novo os mesmos valores de  $z_0$  e o emissor estará de novo no mesmo ponto fixo. Ou seja, o que se vai alterar é que agora  $\alpha_1$ , é fixo e igual a 8 e  $\alpha_0$  que toma valores de 0,2 a 0,8 com incremento de 0,2.

Ao olhar para os resultados obtidos, o gráfico A da Figura 4.3 será o mais representativo pois exhibe se observa uma única trajectória. Esta situação resulta do facto da expressão para T deixar de depender de  $\alpha_0$ .

$$\begin{aligned}
 T &= A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (z_0-z_{11})} + TK + TM \\
 &= A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (0-0)} + TK + TM \\
 &= A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} + TK + TM
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Assim que atribuímos um valor diferente de zero a  $z_0$ , já volta a ser possível observar a influência desta constante no desvio dos trajectórias influência esta, que diminui à medida que o  $\alpha_0$  e  $z_0$  aumentam.

Para  $A=100^{\circ}\text{C}$ :

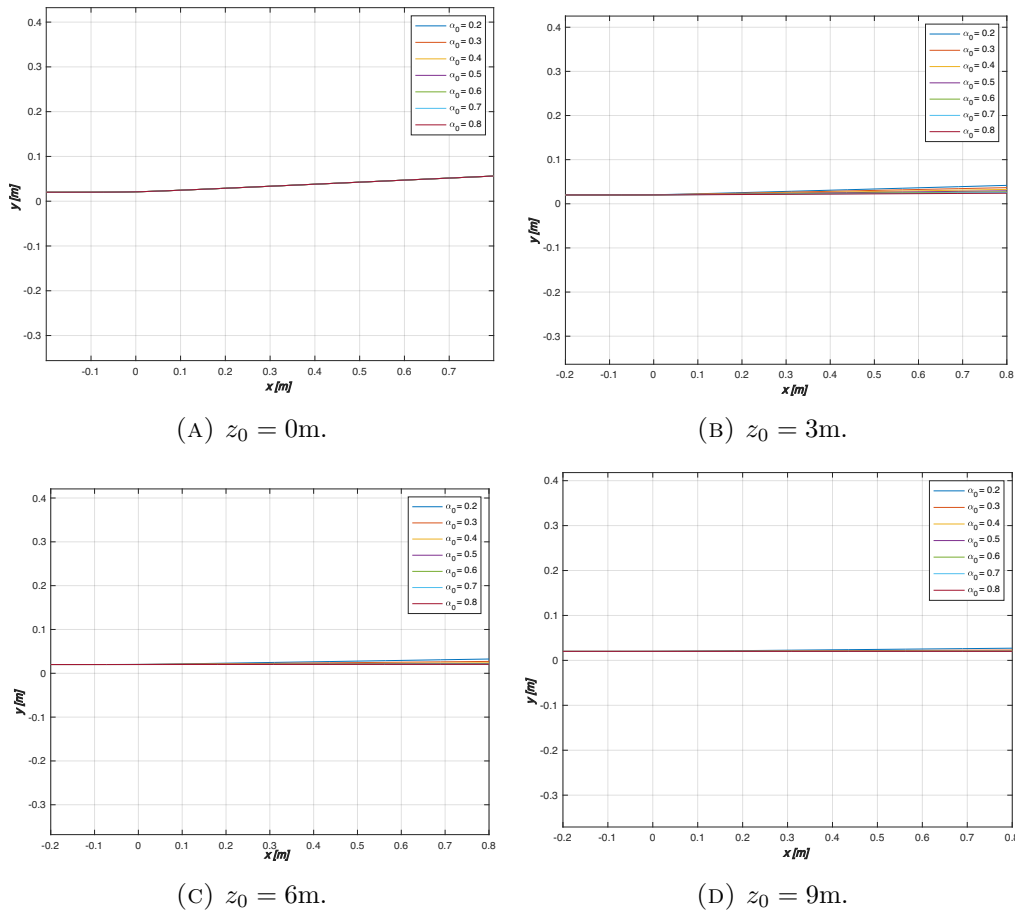


FIGURA 4.4: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $100^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_1 = 8$  e variações do valor de  $\alpha_0$ .

Na Figura 4.4 repetimos as simulações efectuadas na Figura 4.3 mas fazendo  $A=100^{\circ}\text{C}$ . Tal como anteriormente verifica-se que quanto maior for a temperatura do meio em que os raios se propagam, maior será o desvio apresentado.

### 4.1.3 Análise do efeito da variação da temperatura máxima $A$

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $A$  em cenários localizado em diferentes profundidades:  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$ .

Para  $A=100^{\circ}\text{C}$ :

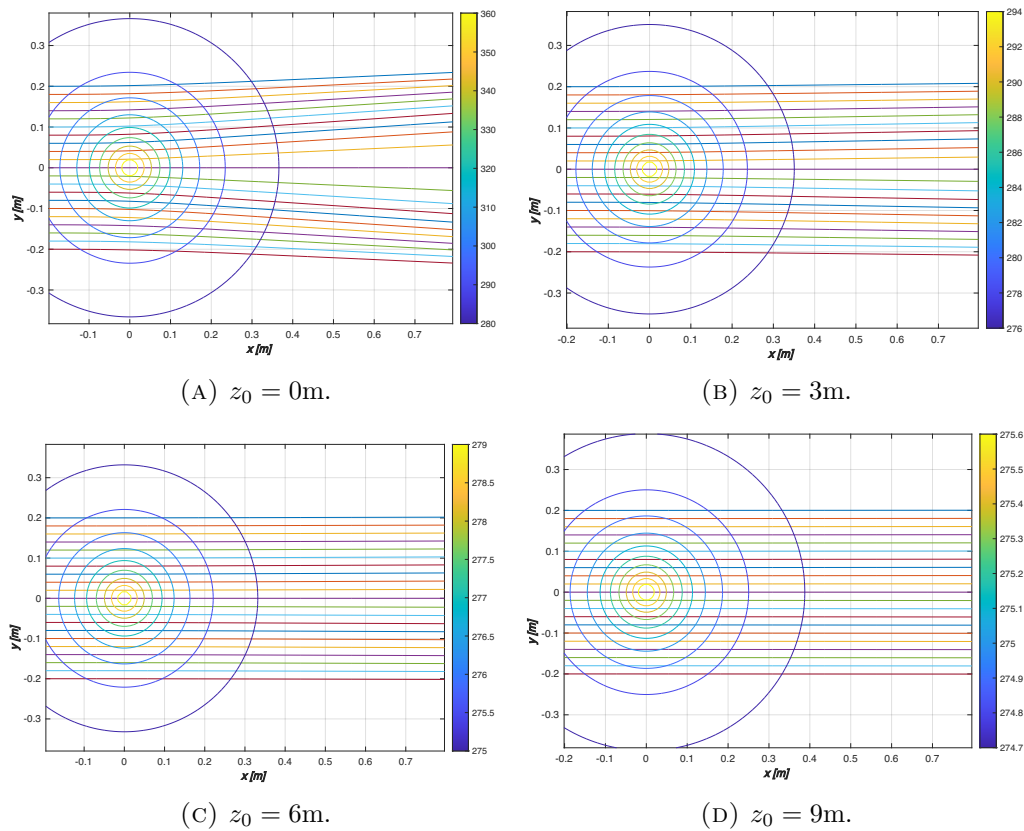


FIGURA 4.5: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima (A) igual a  $100^{\circ}\text{C}$ .

Ao contrário do que se tem feito até aqui agora existem diferentes diferentes posições do emissor ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $-0,2$  e  $0,2$  metros com decrementos de  $0,02$  metros, mantendo fixa a coordenada  $x=-0,2\text{m}$ . O ângulo de emissão volta a ser  $0$ ,  $\alpha_0=0,5$  e  $\alpha_1=8$ .

Ao analisar os resultados obtidos nos quatro gráficos percebe-se que neste modelo para  $A=100^{\circ}\text{C}$  ainda não se verifica um significativo desvio nas trajetórias. Mais uma vez com o aumentar de  $z_0$  menor será o desvio apresentado.

Para  $A=400^{\circ}\text{C}$ :

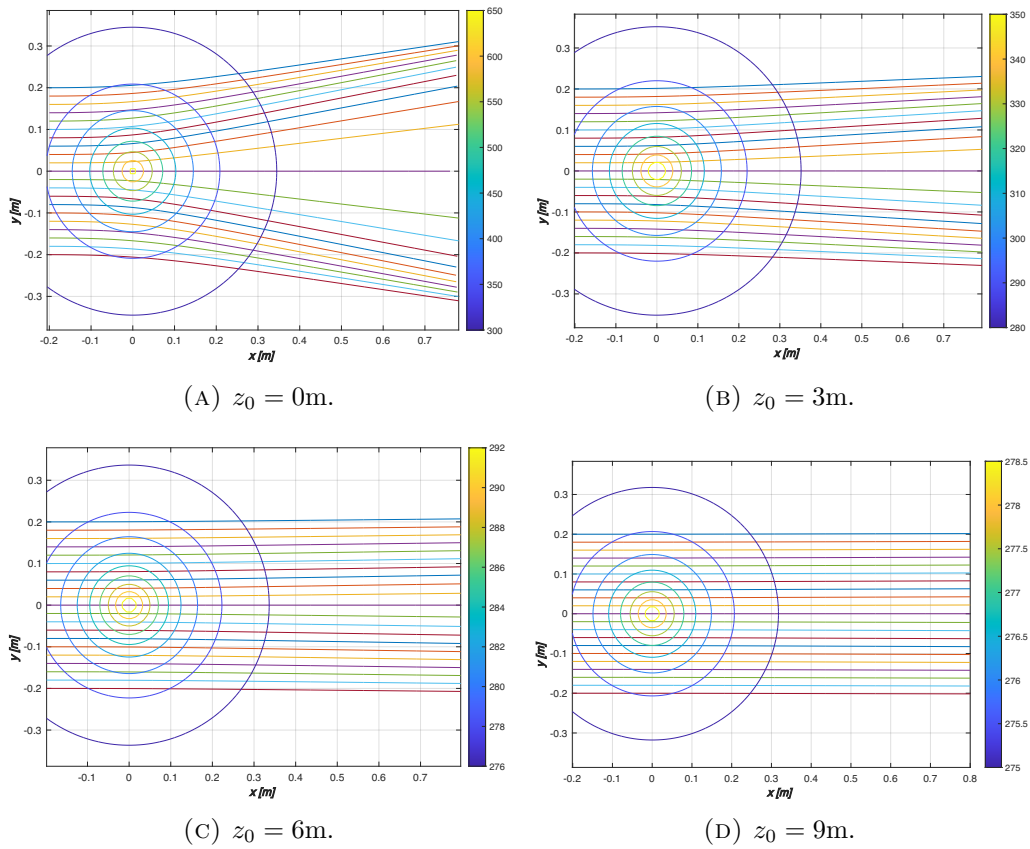


FIGURA 4.6: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x=-0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a  $400^{\circ}\text{C}$ .

Nos gráficos da Figura 4.6 as simulações foram realizadas fazendo  $A=400^{\circ}\text{C}$  e mantendo os parâmetros das simulações representadas na Figura 4.5. Tal como anteriormente verifica-se que com o aumentar da temperatura maior será o desvio representado.

Para  $A=700^{\circ}\text{C}$ :

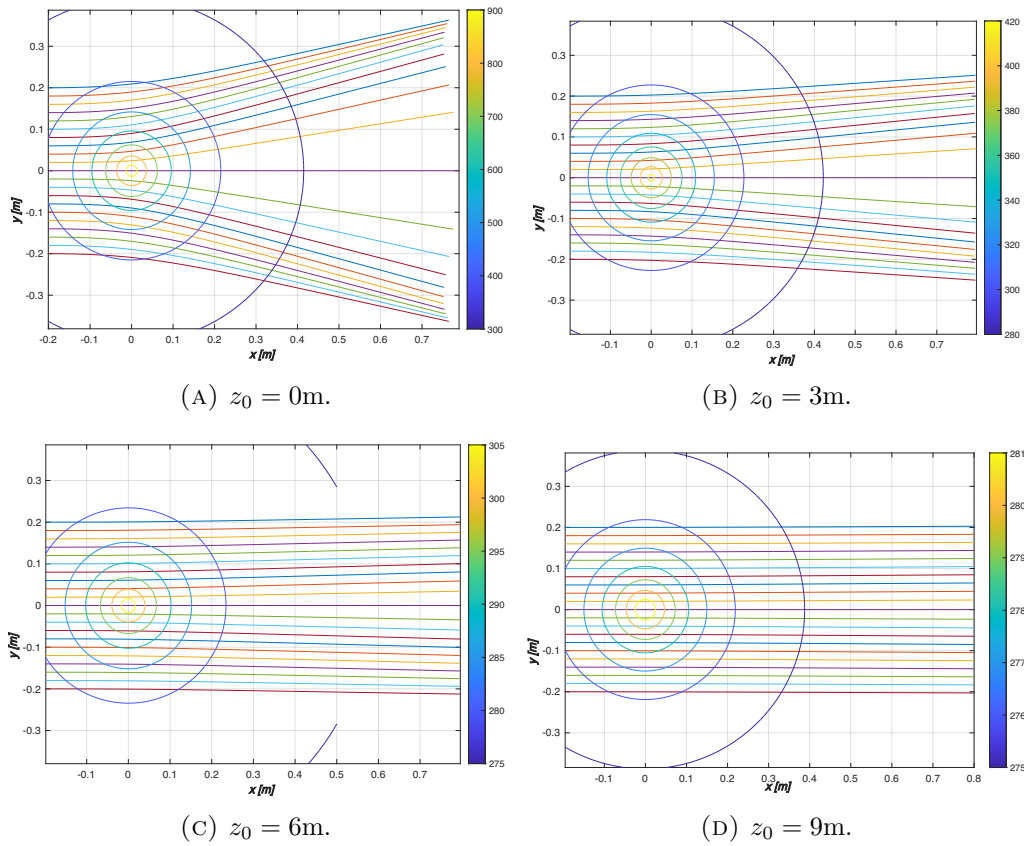


FIGURA 4.7: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima ( $A$ ) igual a  $700^{\circ}\text{C}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.7 a escolha da temperatura de  $700^{\circ}\text{C}$  foi apenas utilizada para que se percebesse de uma melhor forma o acentuar dos desvios com o aumento das temperaturas pois não existem ainda fontes conhecidas que apresentem esse valor. E, como se pode observar é nitido que o desvio para um  $A=400^{\circ}\text{C}$  é maior do que o descrito para  $A=100^{\circ}\text{C}$  e por sua vez o de  $A=700^{\circ}\text{C}$  maior que o de  $400^{\circ}\text{C}$ .

#### 4.1.4 Variações no número de fontes

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da existência de duas fontes hidrotermais em cenários localizado em diferentes profundidades:  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$ .

Para duas fontes com a mesma temperatura máxima ( $A$ ) e altura da chaminé ( $z_{11}$ )

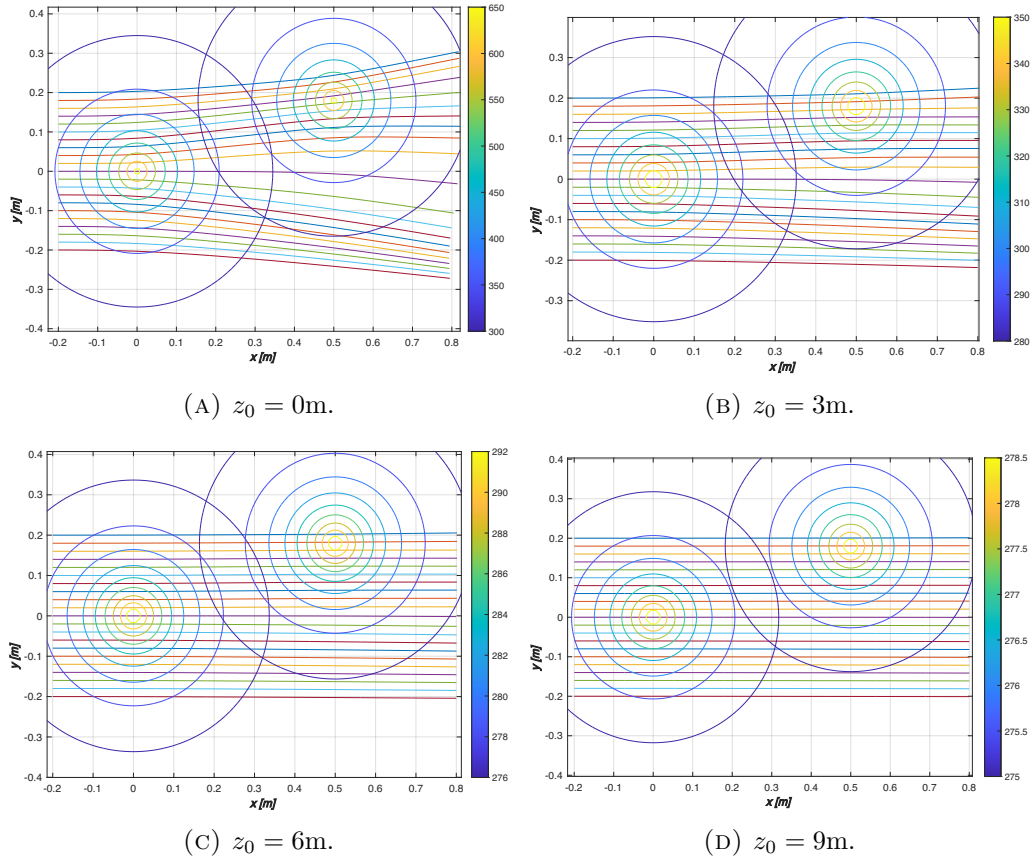


FIGURA 4.8: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Temperaturas máximas (A) iguais nas duas fontes, ambas as fontes com  $A = 400^\circ\text{C}$ . Alturas de chaminés ( $z_{11}$ ) iguais, ambas as fontes com  $z_{11} = 0\text{m}$ . Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem e fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$ .

Mais uma vez utilizaram-se diferentes posições do emissor ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $0,2$  e  $0,2$  metros com decrementos de  $0,02$  metros, sendo fixa a coordenada  $x=-0,2\text{m}$ . O ângulo de emissão igual  $0$ ,  $\alpha_0=0.5$  e  $\alpha_1=8$ .

Nestas simulações foram utilizadas duas fontes hidrotermais. Uma das fontes foi centrada, tal como até aqui, na origem e a outra em  $(0.5,0.18)$ , mas ambas

#### 4.1. Modelo A

com o mesmo  $A(400^\circ\text{C})$  e  $z_{11}(0\text{m})$ .

A existência de duas fontes apenas acentua a percepção do impacto que tem a temperatura no caminho que os raios acústicos irão seguir pois é observável os dois desvios que o trajecto faz na presença de temperaturas mais elevadas.

**Para duas fontes com diferentes temperaturas máximas ( $A$ ) e alturas das chaminés ( $z_{11}$ )**

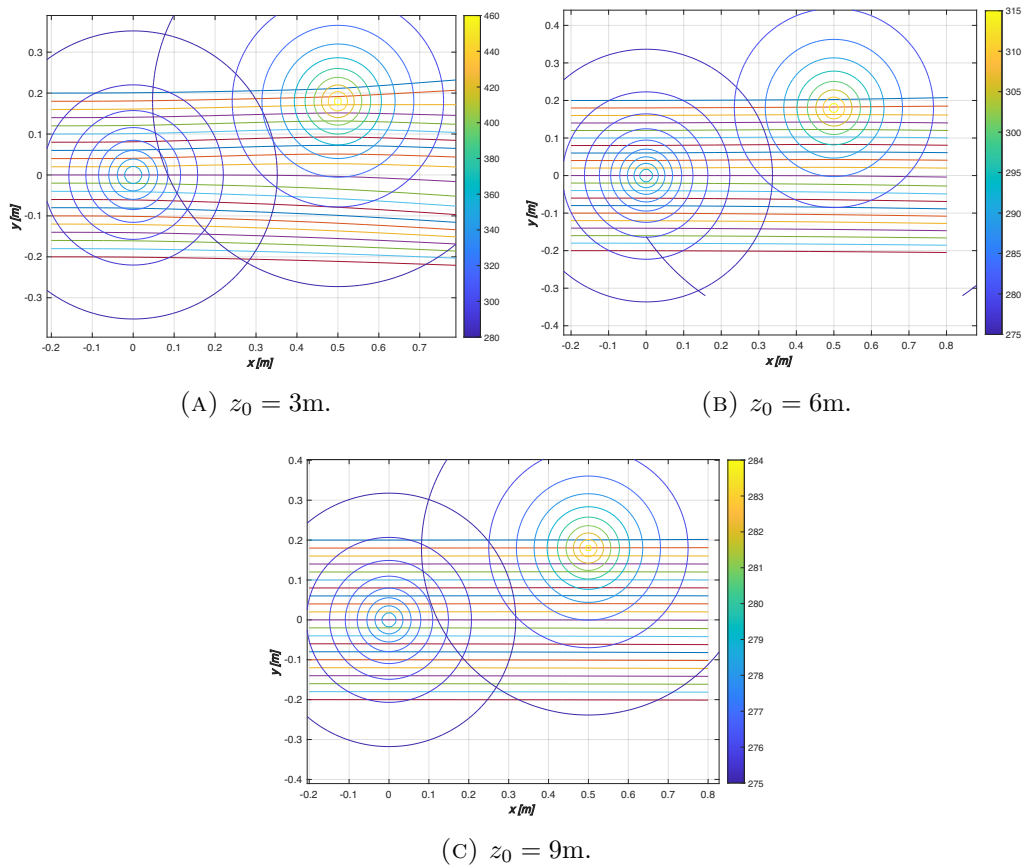


FIGURA 4.9: Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem, com temperatura máxima( $A$ ) igual a  $400^\circ\text{C}$  e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de  $0\text{m}$ . Fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$ , temperatura máxima( $A$ ) igual a  $200^\circ\text{C}$  e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de  $3\text{m}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.9 alteraremos apenas as características das fontes. Na fonte centrada na origem vai manteremos o  $A=400^\circ\text{C}$  e

$z_{11}=0$  metros. Na fonte com origem no ponto de coordenadas cartesianas (0.5,0.18) faremos  $A=200^{\circ}\text{C}$  e  $z_{11}=3$  metros.

O facto de existirem duas fontes com temperaturas máximas diferentes faz com que seja observável num só gráfico o maior e menor desvio frente à maior ou menor temperatura da fonte hidrotermal, isto é, na fonte centrada na origem do gráfico A da Figura 4.9 o desvio é praticamente inexistente pois a temperatura central a  $z_0=3$  metros já é muito reduzida, já na fonte com origem no ponto de coordenadas cartesianas (0.5,0.18) é possível notar um maior desvio já que a  $z_0=3$  metros nos encontramos à boca da chaminé e por isso a temperatura será maior, consequentemente o desvio representado também aumentará.

## 4.2 Modelo B

Nesta secção a relação temperatura-velocidade que está na base da dedução das equações geodésicas utilizadas nas simulações numéricas é  $c(T) = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \epsilon T^3$ , com  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\epsilon$  iguais a 0,1, valor este utilizado na já referida dissertação de mestrado referida (Paiva [2018](#)).

Mais uma vez, a expressão utilizada na modelação da distribuição de temperatura será  $T = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2 + (y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (z_0 - z_{11})} + TK + TM$ . Esta expressão depende dos parâmetros  $A$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  que traduzem a temperatura máxima no centro e à saída da fonte em graus centígrados( $^{\circ}\text{C}$ ), a constante de decaimento vertical e a constante de decaimento horizontal, respectivamente. A temperatura da água (do mar) será de novo  $TM=1.5^{\circ}\text{C}$  assim como o termo de conversão para graus Kelvin será  $TK = 273.15^{\circ}\text{K}$ .

### 4.2.1 Análise da variação do parâmetro $\alpha_1$

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $\alpha_1$  em dois cenários distintos:  $A= 400^{\circ}\text{C}$  e  $A=100^{\circ}\text{C}$ .

Para  $A=400^{\circ}\text{C}$ :

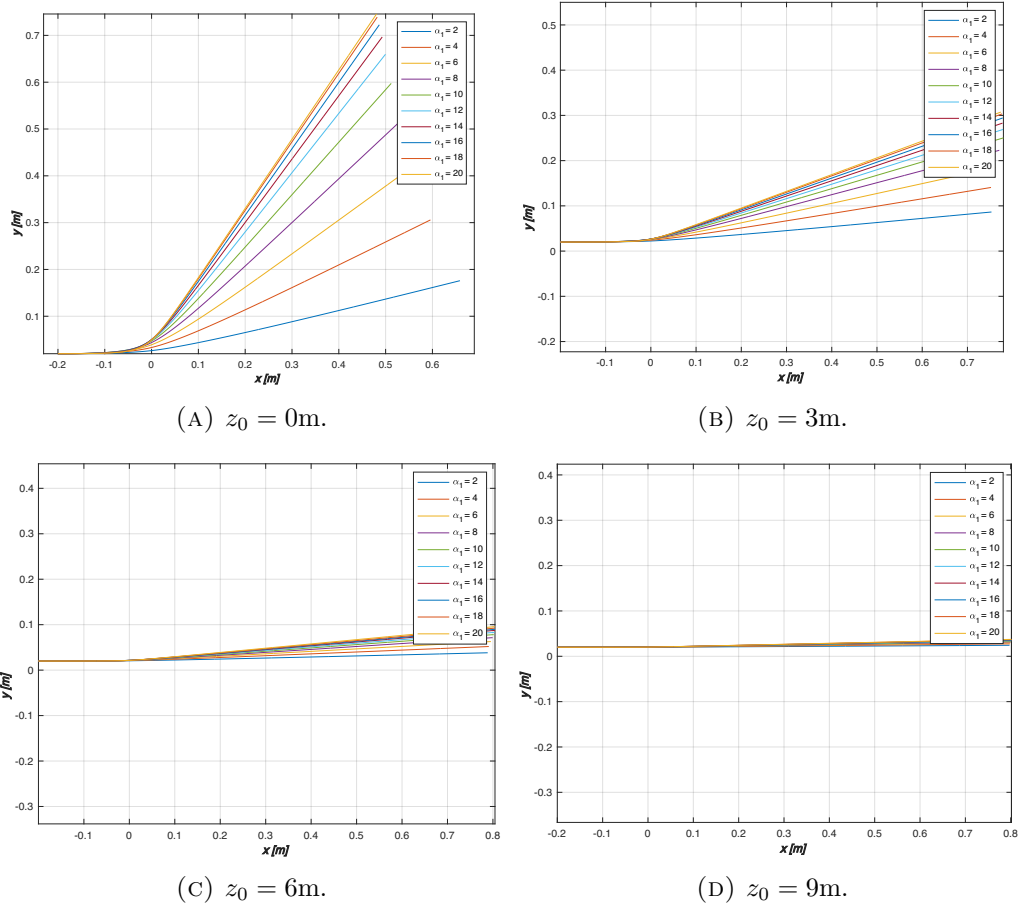


FIGURA 4.10: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima ( $A$ ) de  $400^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_0 = 0.5$  e variações do valor de  $\alpha_1$ .

Os quatro valores de profundidade ( $z_0$ ) utilizados foram:  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$  representados nos gráficos A, B, C e D, respectivamente. Tal como aconteceu no Modelo A há valores que são os mesmos para todos os quatro gráficos obtidos, são eles o valor de  $\alpha_0=0.5$ , as coordenadas cartesianas do emissor  $(-0.2, 0.02)$  e ainda o ângulo de emissão que é igual a 0.

Em cada gráfico, as diferentes trajetórias são obtidas fazendo  $\alpha_1$  variar num intervalo de 2 a 20 com incremento de dois. Tal como observámos no modelo anterior, quanto maior for o valor do decaimento horizontal ( $\alpha_1$ ) maior será o desvio apresentado nas proximidades da fonte e com o aumentar de  $z_0$  menor serão os

desvios apresentados pois quanto maior for a distância à boca da chaminé menor será a temperatura do meio onde se propagam os raios.

Para  $A=100^{\circ}\text{C}$ :

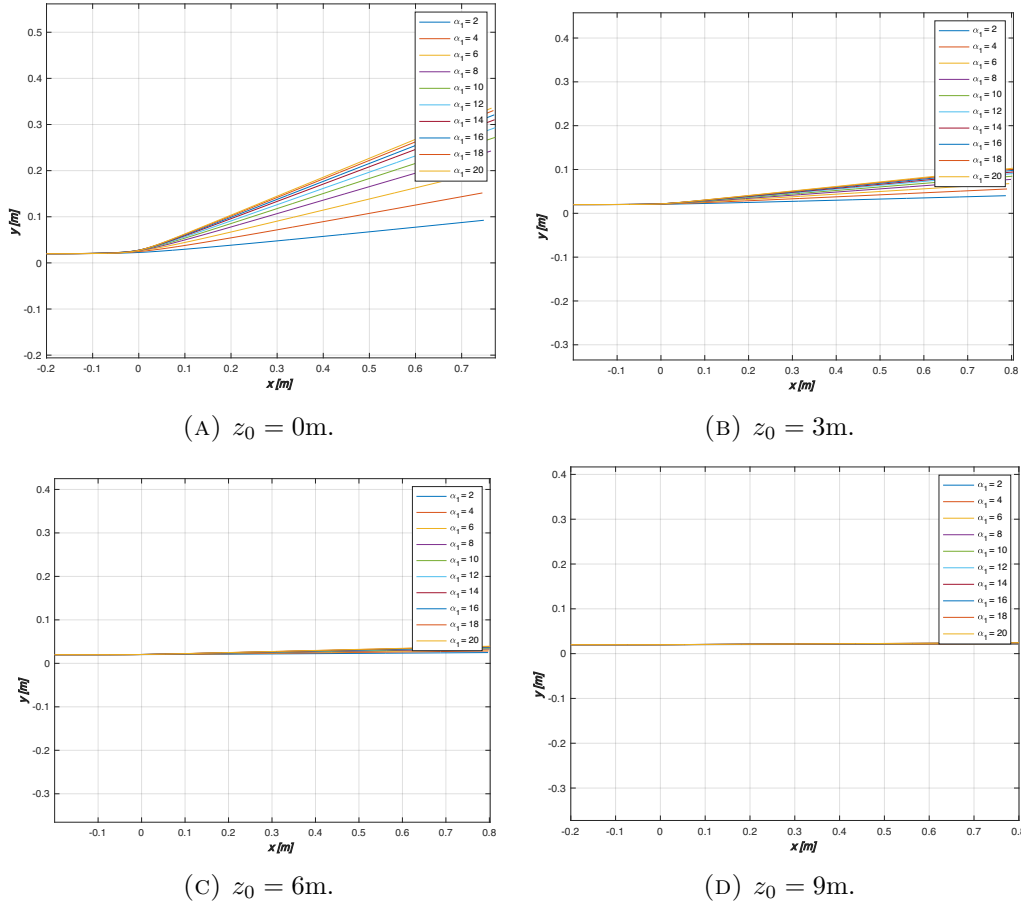


FIGURA 4.11: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $100^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_0 = 0.5$  e variações do valor de  $\alpha_1$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.11 o valor da temperatura máxima no centro e à saída da fonte (A) agora passa para  $100^{\circ}\text{C}$  e é novamente observável que quanto maior for a temperatura do meio em que os raios se propagam maior será o desvio apresentado.

### 4.2.2 Análise da variação do parâmetro $\alpha_0$

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $\alpha_0$  em dois cenários distintos:  $A=400^\circ\text{C}$  e  $A=100^\circ\text{C}$ .

Para  $A=400^\circ\text{C}$ :

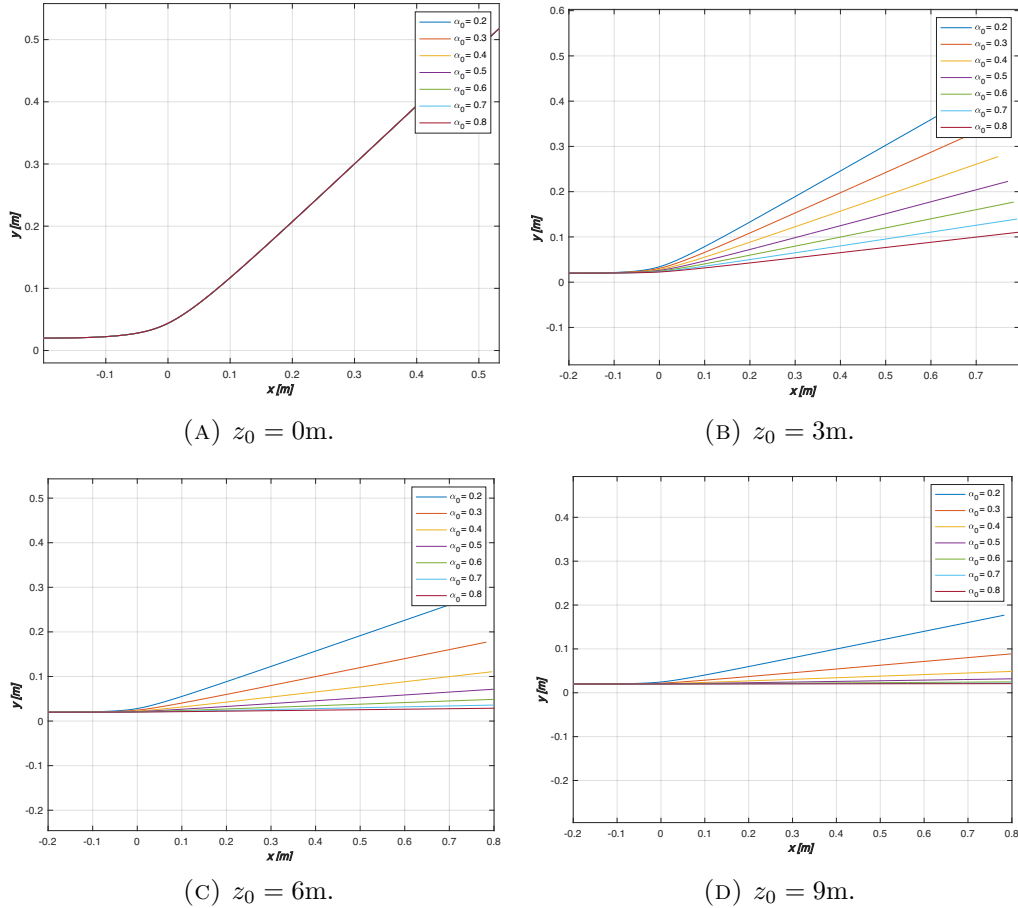


FIGURA 4.12: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a  $0$ , temperatura máxima ( $A$ ) de  $400^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_1 = 8$  e variações do valor de  $\alpha_0$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.12 é possível fazer a análise do impacto do valor da constante de decaimento vertical ( $\alpha_0$ ), e para isso foram utilizados de novo os mesmos valores de  $z_0$  e o emissor estará de novo no mesmo ponto fixo. Nestas simulações  $\alpha_1=8$  e  $\alpha_0$  variará de  $0.2$  a  $0.8$  com incrementos de  $0.2$  metros.

Tal como se verificou no modelo anterior ao variar  $\alpha_0$  o gráfico A será aquele onde apenas é visível uma única trajetória e a razão é a mesma que já foi explicada anteriormente.

Nos restantes gráficos como  $z_0 \neq 0$  volta a ser possível observar que à medida que o  $\alpha_0$  e  $z_0$  aumentam o desvio da trajetória dos raios diminui.

Para  $A=100^\circ\text{C}$ :

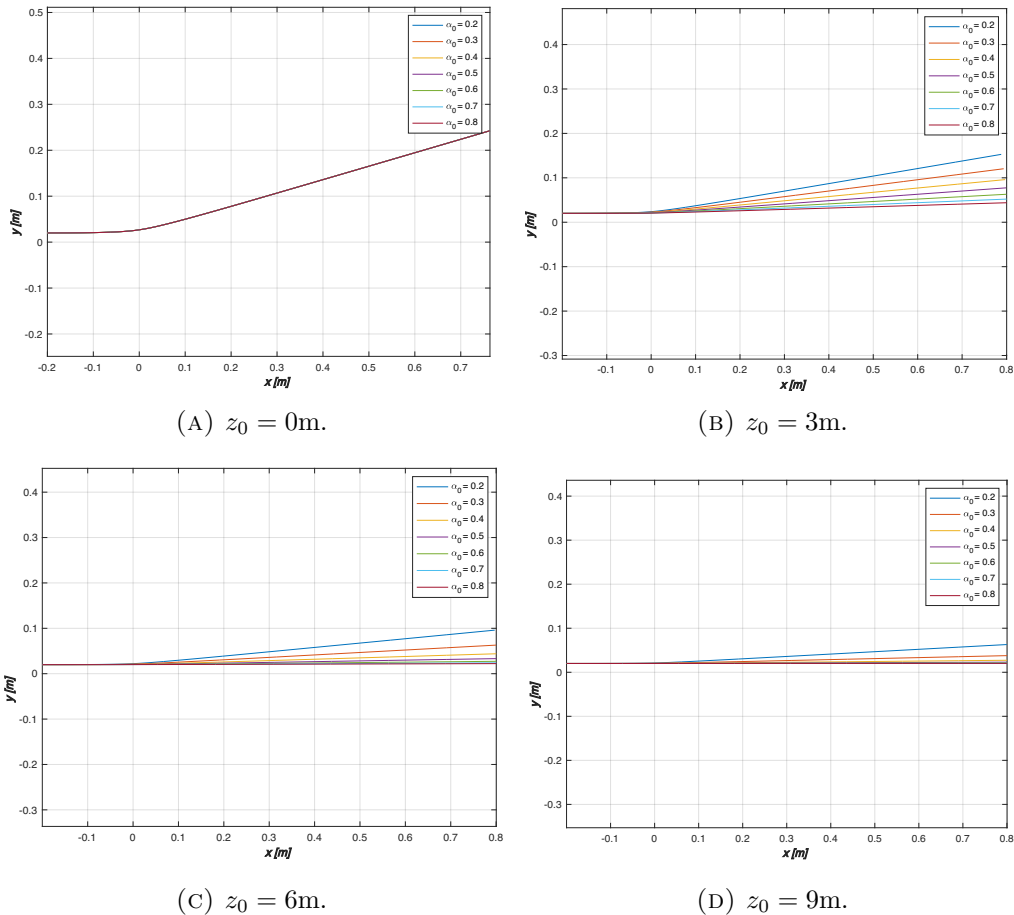


FIGURA 4.13: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_1 = 8$  e variações do valor de  $\alpha_0$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.13 podemos reforçar que quanto menor for a temperatura do meio em que os raios se propagam, menos exuberante será o desvio apresentado.

### 4.2.3 Análise do efeito da variação da temperatura máxima

#### A

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $A$  em cenários localizado em diferentes profundidades:  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$ .

Para  $A=100^\circ\text{C}$ :

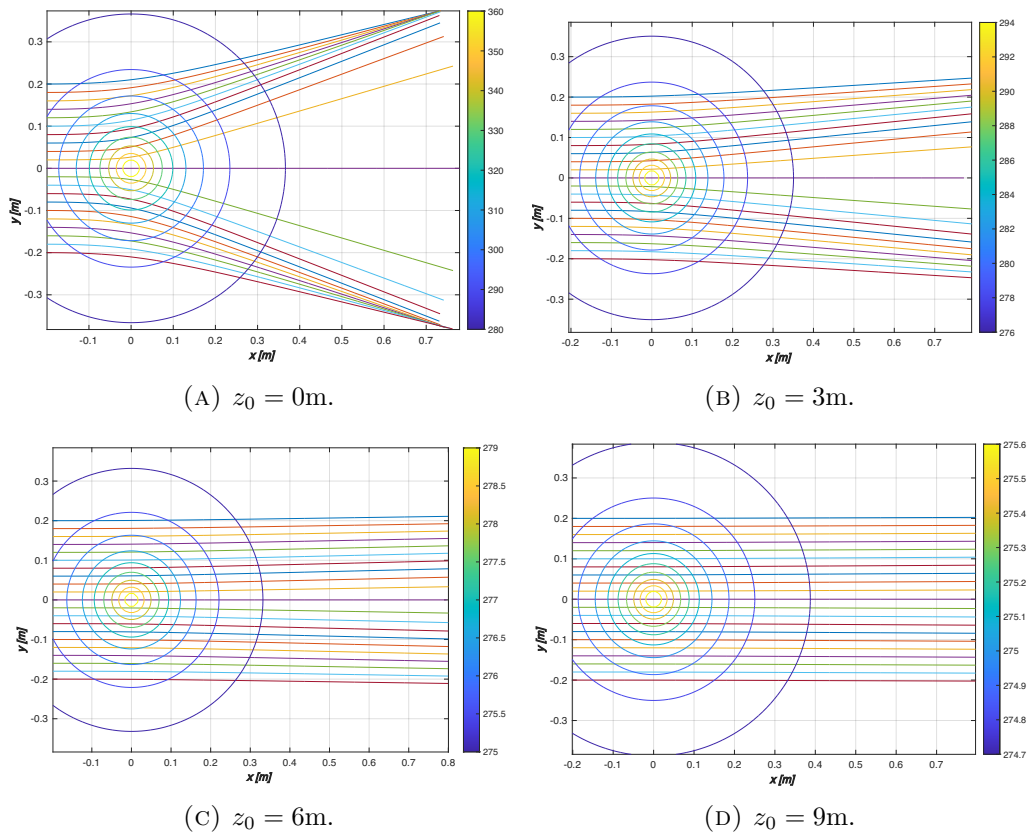


FIGURA 4.14: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima (A) igual a  $100^\circ\text{C}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.14 o emissor foi colocado ao longo de eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $-0,2$  e  $0,2$  metros com decrementos de  $0,02$  metros mas fixo em  $x=0,2\text{m}$ . O ângulo de emissão volta a ser  $0$ ,  $\alpha_0=0,5$  e  $\alpha_1=8$ .

Neste modelo para um  $A=100^{\circ}\text{C}$  nota-se que existe um desvio maior nas trajetórias do que aquele verificado no Modelo A. Também aqui podemos observar que com o aumento de  $z_0$  o desvio tende em diminuir.

Para  $A=400^{\circ}\text{C}$ :

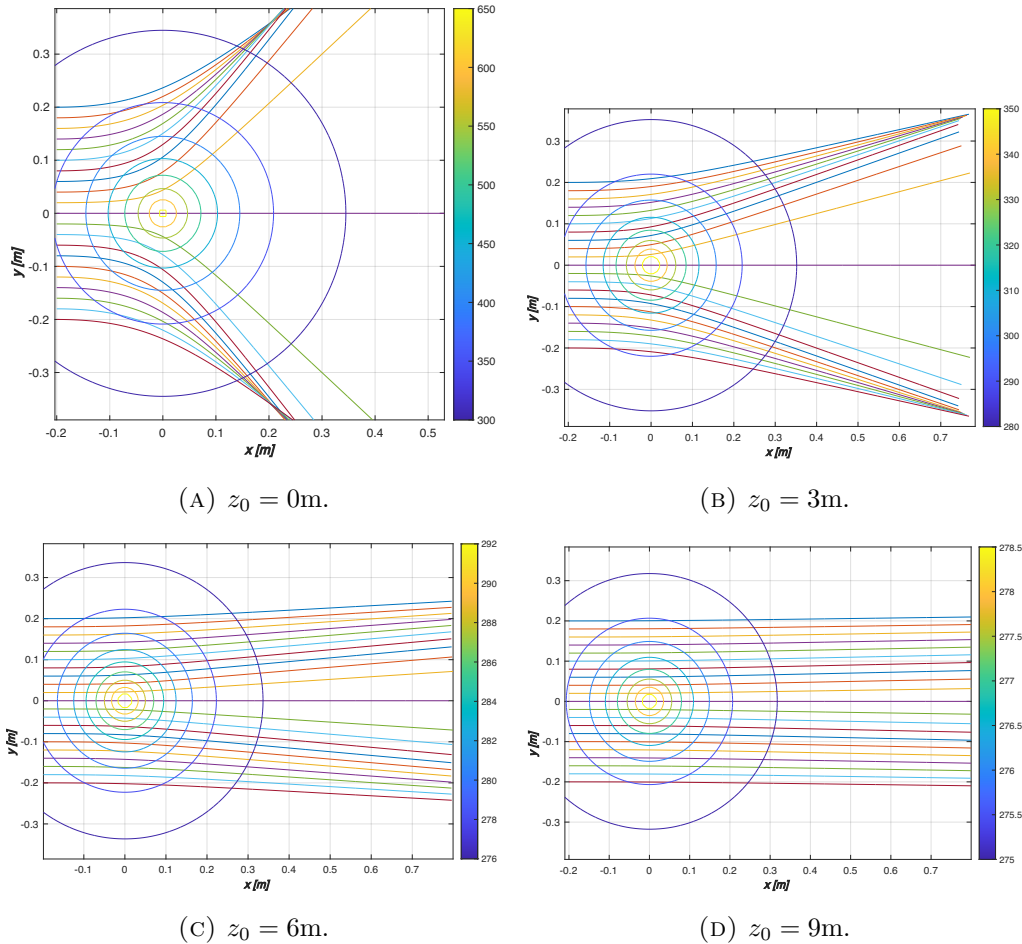


FIGURA 4.15: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima (A) igual a  $400^{\circ}\text{C}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.15 manteve-se tudo e apenas se alterou o valor de  $A$  para  $400^{\circ}\text{C}$  e o que se pode visualizar é que o desvio apresentado tende em aumentar com a temperatura. A esta temperatura máxima no centro e à saída da fonte começa a ser perceptível nos gráficos (A) e (B) a existência de sobreposição dos raios.

Para  $A=700^{\circ}\text{C}$ :

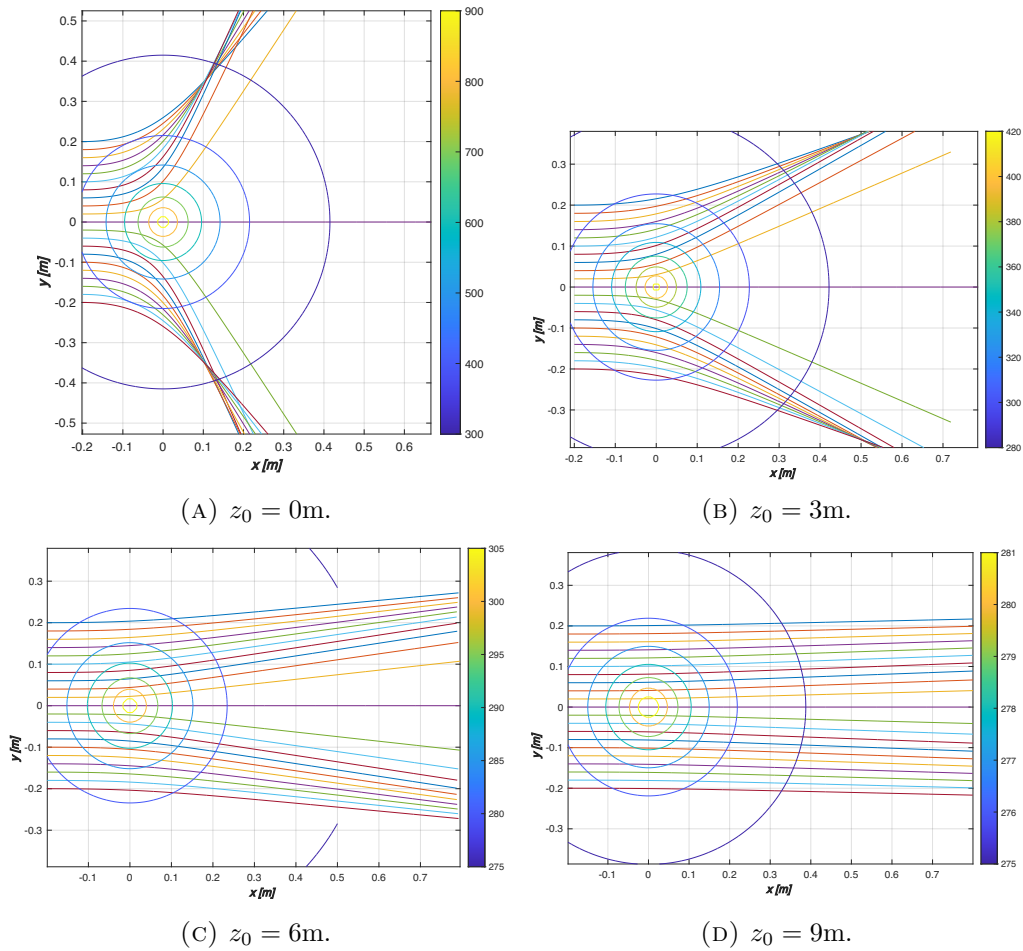


FIGURA 4.16: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima (A) igual a  $700^{\circ}\text{C}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.16 definimos  $A=700^{\circ}\text{C}$ . Podemos observar que à semelhança dos gráficos analisados até aqui para um  $A=400^{\circ}\text{C}$  o desvio é maior do que o descrito para  $A=100^{\circ}\text{C}$  e por sua vez o de  $A=400^{\circ}\text{C}$  menor que o de  $700^{\circ}\text{C}$ . Resumindo, mais uma vez percebe-se que o desvio das trajetórias aumenta com a temperatura.

Neste gráficos surge algo interessante e que poderia constituir-se como alvo de estudo para próximas dissertações que seria resolver o problema inverso e através das sobreposições dos raios, nítidas no gráfico (A), tendo em vista descobrir o valor da temperatura central da fonte.

### 4.2.4 Variações no número de fontes

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da existência de duas fontes hidrotermais em cenários localizado em diferentes profundidades:  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$ .

Para duas fontes com a mesma temperatura máxima (A) e altura da chaminé ( $z_{11}$ )

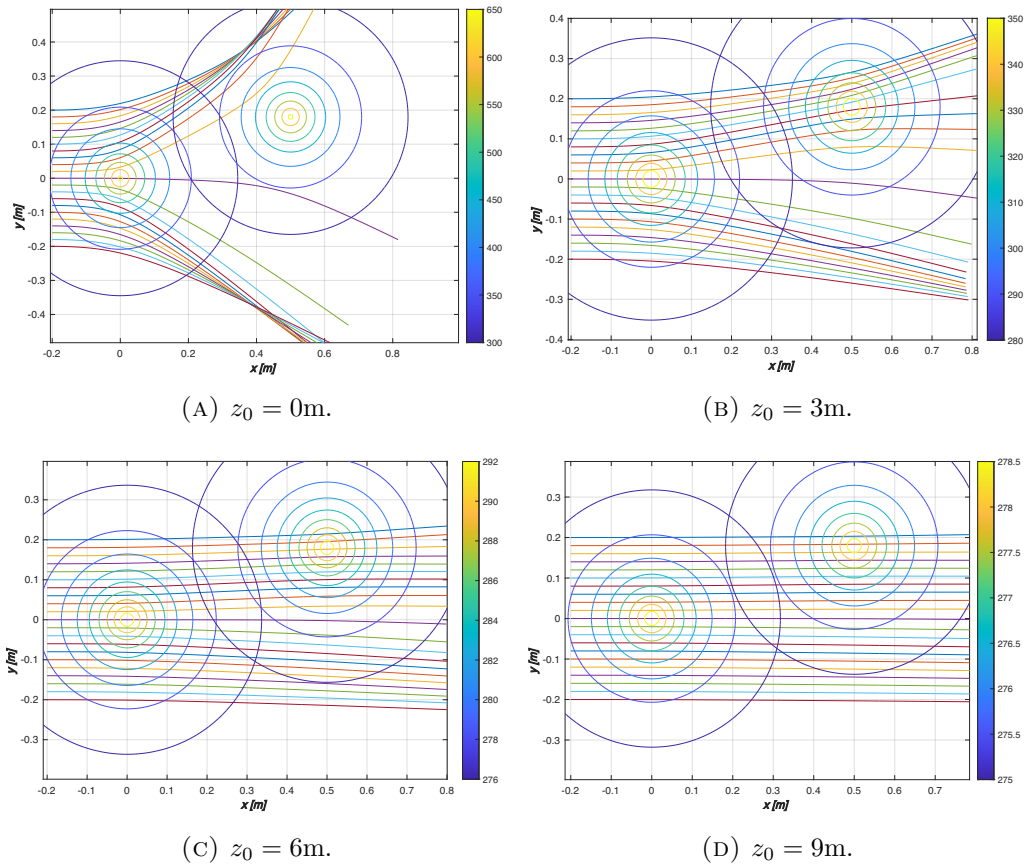


FIGURA 4.17: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Temperaturas máximas (A) iguais nas duas fontes, ambas as fontes com  $A = 400^\circ\text{C}$ . Alturas de chaminés ( $z_{11}$ ) iguais, ambas as fontes com  $z_{11} = 0\text{m}$ . Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem e fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.17 utilizaram-se diferentes posições do emissor ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $-0,2$  e  $0,2$  metros com decrementos de  $0,02$  metros, sendo fixa a coordenada  $x=-0,2$ m. O ângulo de emissão igual  $0$ ,  $\alpha_0=0.5$  e  $\alpha_1=8$ . Foram utilizadas duas fontes hidrotermais, uma foi centrada, tal como até aqui, na origem e a outra em  $(0.5,0.18)$ , mas ambas com o mesmo  $A(400^\circ\text{C})$  e  $z_{11}(0\text{m})$ .

A existência de duas fontes permite visualizar o efeito que a temperatura tem no trajecto dos raios acústicos. Nestes gráficos podemos observar assim os desvios dos raios acústicos localizados nas posições mais próximas do centro das fontes hidrotermais.

Para duas fontes com diferentes temperaturas máximas ( $A$ ) e alturas das chaminés ( $z_{11}$ )

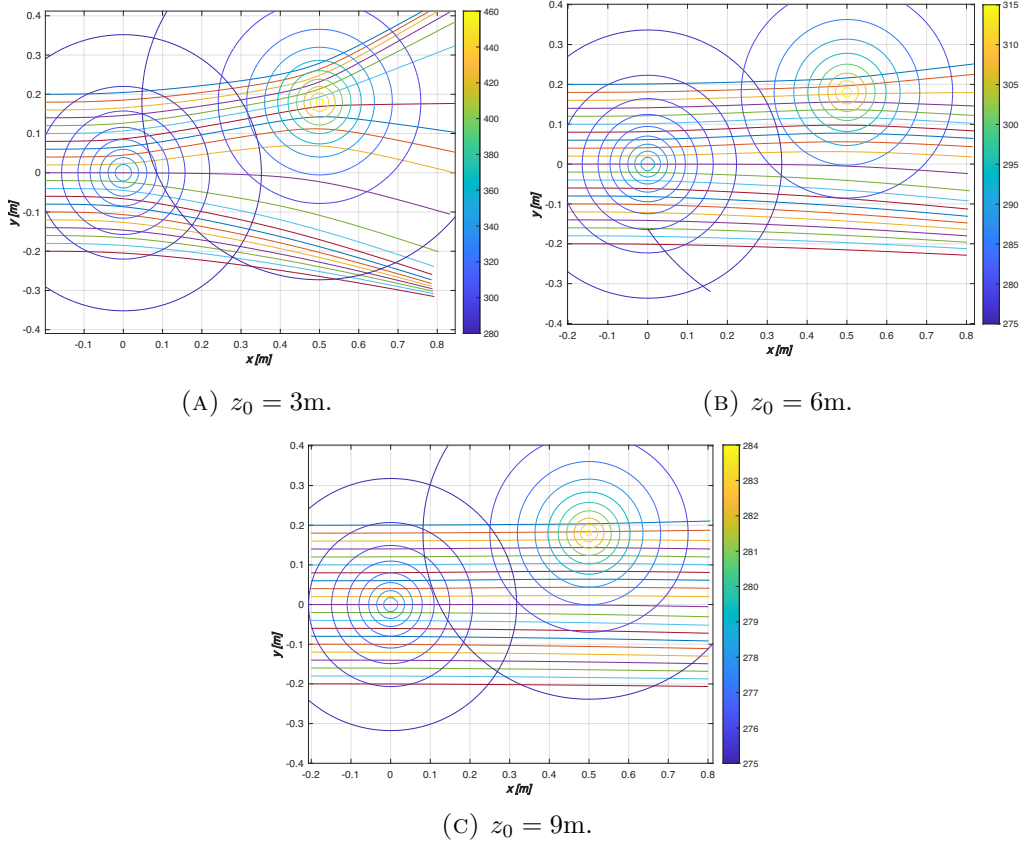


FIGURA 4.18: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal 1 (a mais à esquerda) centrada na origem, com temperatura máxima ( $A$ ) igual a  $400^\circ\text{C}$  e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de  $0\text{m}$ . Fonte hidrotermal 2 (a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$ , temperatura máxima ( $A$ ) igual a  $200^\circ\text{C}$  e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de  $3\text{m}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.18 alteraremos apenas as características das fontes. Na fonte centrada na origem vai manteremos o  $A=400^\circ\text{C}$  e  $z_{11}=0$  metros. Na fonte com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$  faremos  $A=200^\circ\text{C}$  e  $z_{11}=3$  metros. Podemos verificar que a fonte centrada na origem ao apresentar uma temperatura mais reduzida para  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$  causará um desvio menor no trajecto dos raios acústicos que a fonte com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$ .

## 4.3 Modelo C

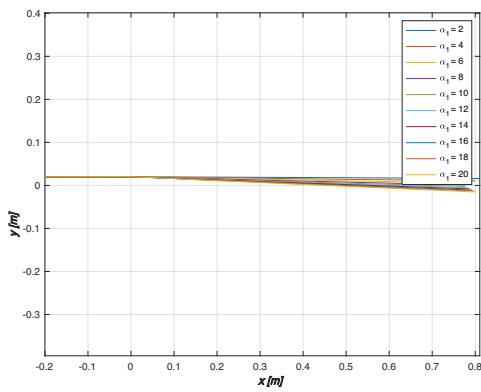
Aqui a relação temperatura-velocidade que está na base da dedução das equações geodésicas utilizadas nas simulações numéricas é  $c(T, S, P) = 1449.08 + 4.57(T) e^{-\left[\frac{T}{86.9} + \left(\frac{T}{360}\right)^2\right]} + 1.33(S - 35) e^{-\left[\frac{T}{120}\right]} + 0.1522P e^{\left[\frac{T}{1200} + \frac{S-35}{400}\right]} + 1.46 * 10^{-5} P^2 e^{-\left[\frac{T}{20} + \frac{S-35}{10}\right]}$ .

Tal como nas secções anteriores a expressão utilizada na modelação da distribuição de temperatura será  $T = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2 + (y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0 (z_0 - z_{11})} + TK + TM$ . Esta expressão depende dos parâmetros  $A$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  que traduzem a temperatura máxima no centro e à saída da fonte em graus centígrados(°C), a constante de decaimento vertical e a constante de decaimento horizontal, respectivamente. A temperatura da água (do mar) volta a ser  $TM=1.5^\circ$  C mas como na expressão de Del Grosso a temperatura é em graus Celsius(°C)  $TK=0^\circ$ K, a salinidade vem  $S=35$ ppm e a pressão será considerada  $P=100$ atm.

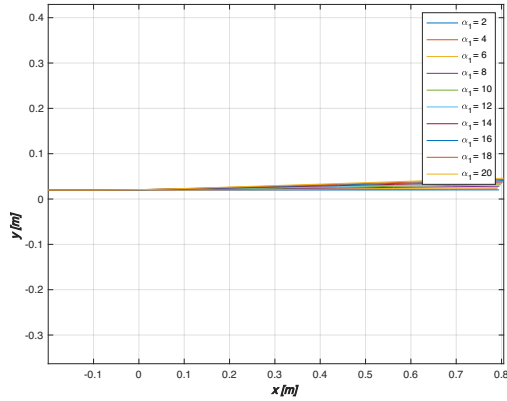
### 4.3.1 Análise da variação do parâmetro $\alpha_1$

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $\alpha_1$  em dois cenários distintos:  $A= 400^\circ$  C e  $A=100^\circ$  C.

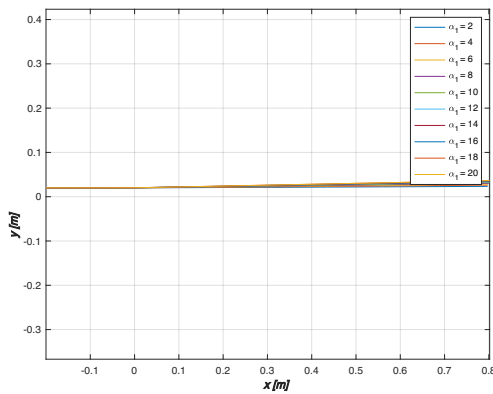
Para  $A=400^{\circ}\text{C}$ :



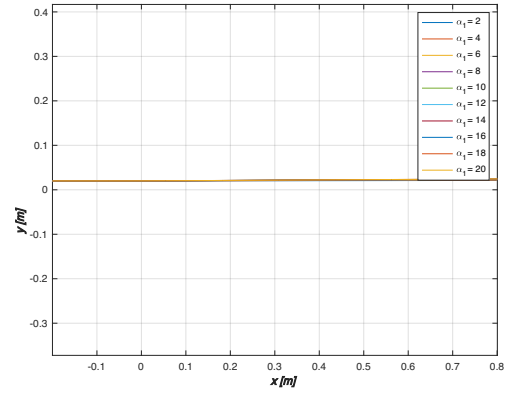
(A)  $z_0 = 0\text{m}$ .



(B)  $z_0 = 3\text{m}$ .



(C)  $z_0 = 6\text{m}$ .



(D)  $z_0 = 9\text{m}$ .

FIGURA 4.19: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $400^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_0 = 0.5$  e variações do valor de  $\alpha_1$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.19 e para melhorar comparar com as simulações anteriores os valores que foram utilizados para  $z_0$  foram também  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$ . Para além destes valores mantiveram-se o  $\alpha_0=0.5$ , as coordenadas cartesianas do emissor  $(-0.2, 0.02)$ , o ângulo de emissão igual a 0 e o intervalo de valores de  $\alpha_1$   $[2,20]$  com incremento de dois.

Podemos observar que o comportamento é o mesmo que foi já referido nos Modelos A e B, ou seja, quanto maior for  $\alpha_1$  maior será o desvio. Como se explicou noutros capítulos a limitação das altas temperaturas para a expressão de Del Grosso faz com que a curvatura do raio seja ao contrário do obtido nas duas expressões anteriores.

Para  $A=100^{\circ}\text{C}$ :

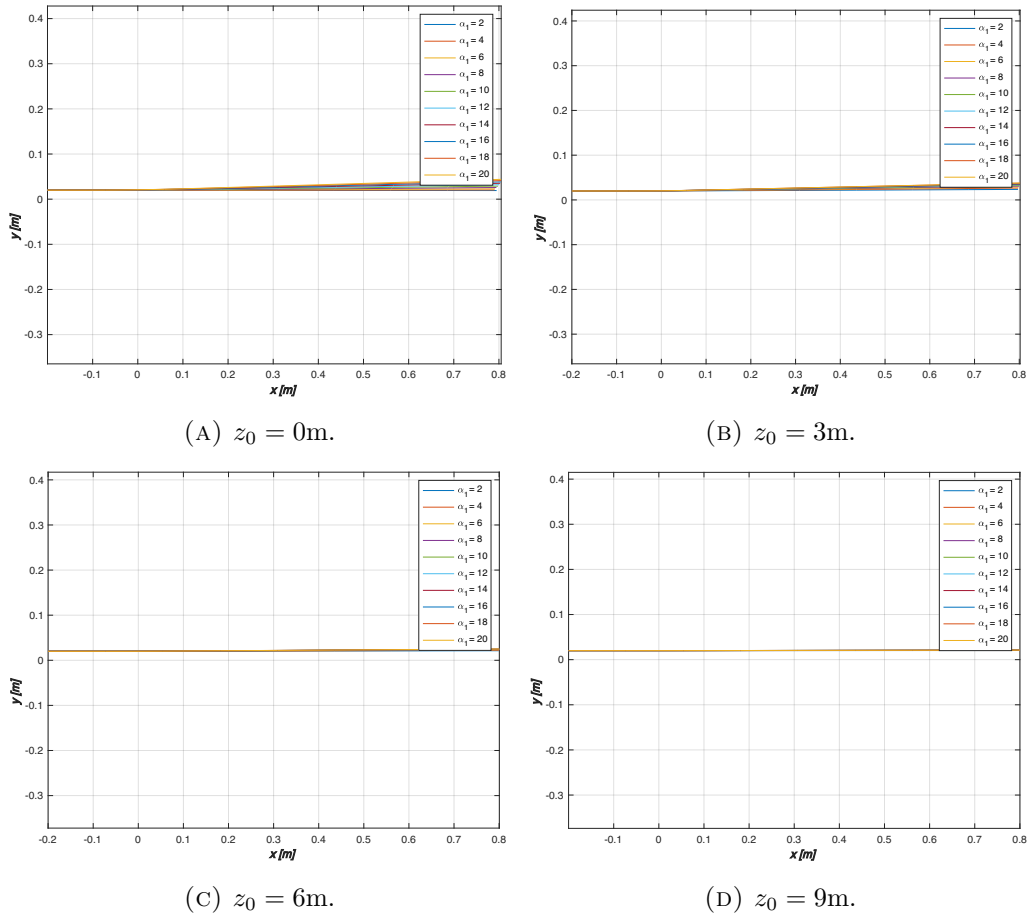


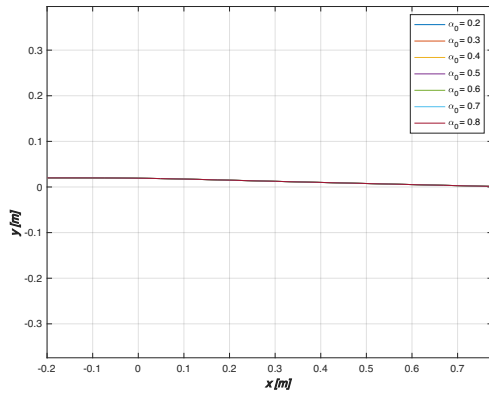
FIGURA 4.20: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $100^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_0 = 0.5$  e variações do valor de  $\alpha_1$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.20  $A=100^{\circ}\text{C}$ . Como se pode observar no gráfico (A), por exemplo, o resultado obtido já voltou a ser semelhante ao resultado dos Modelos A e B, isto é, os trajectos dos raios já voltam a divergir uma vez que, embora longe, estamos mais próximos do intervalo de valores para que a expressão de Del Grosso foi pensada.

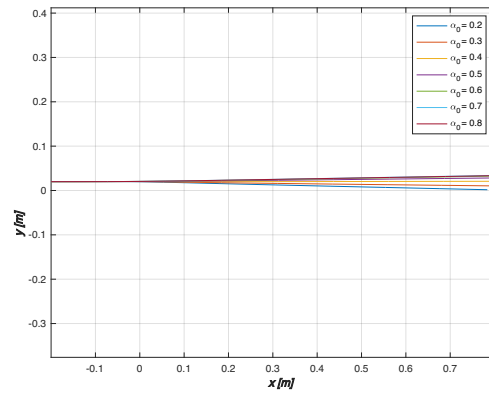
### 4.3.2 Análise da variação do parâmetro $\alpha_0$

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $\alpha_0$  em dois cenários distintos:  $A= 400^{\circ}\text{C}$  e  $A=100^{\circ}\text{C}$ .

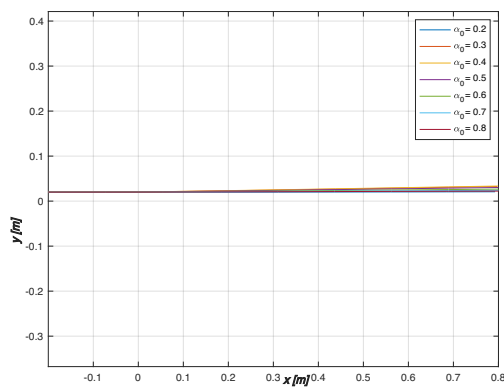
Para  $A=400^{\circ}\text{C}$ :



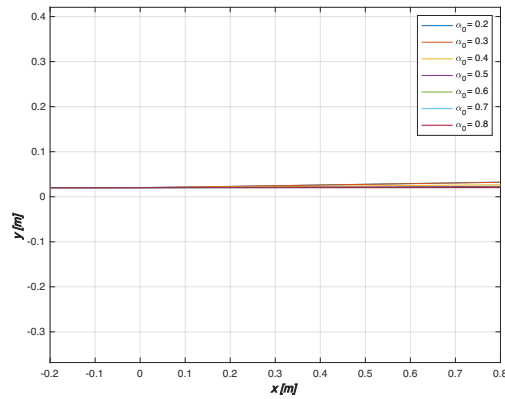
(A)  $z_0 = 0\text{m}$ .



(B)  $z_0 = 3\text{m}$ .



(C)  $z_0 = 6\text{m}$ .



(D)  $z_0 = 9\text{m}$ .

FIGURA 4.21: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $400^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_1 = 8$  e variações do valor de  $\alpha_0$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.21 e tendo em vista avaliar o impacto de  $\alpha_0$  na trajetória dos raios acústicos partiu-se do mesmo ponto fixo do emissor e utilizaram-se os valores  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$ . O valor de  $\alpha_1$  será 8 e  $\alpha_0$  varia no intervalo de 0,2 a 0,8 com incrementos de 0,2.

Também agora observamos que pela mesma razão que nos modelos A e B o gráfico (A) volta a apresentar apenas uma trajetória apesar dos diferentes valores de  $\alpha_0$ . Nos restantes gráficos volta a parecer comprovar-se a sensibilidade da expressão de Del Grosso aos altos valores de temperaturas, uma vez que é notória a convergência no trajecto dos raios acústicos.

Para  $A=100^{\circ}\text{C}$ :

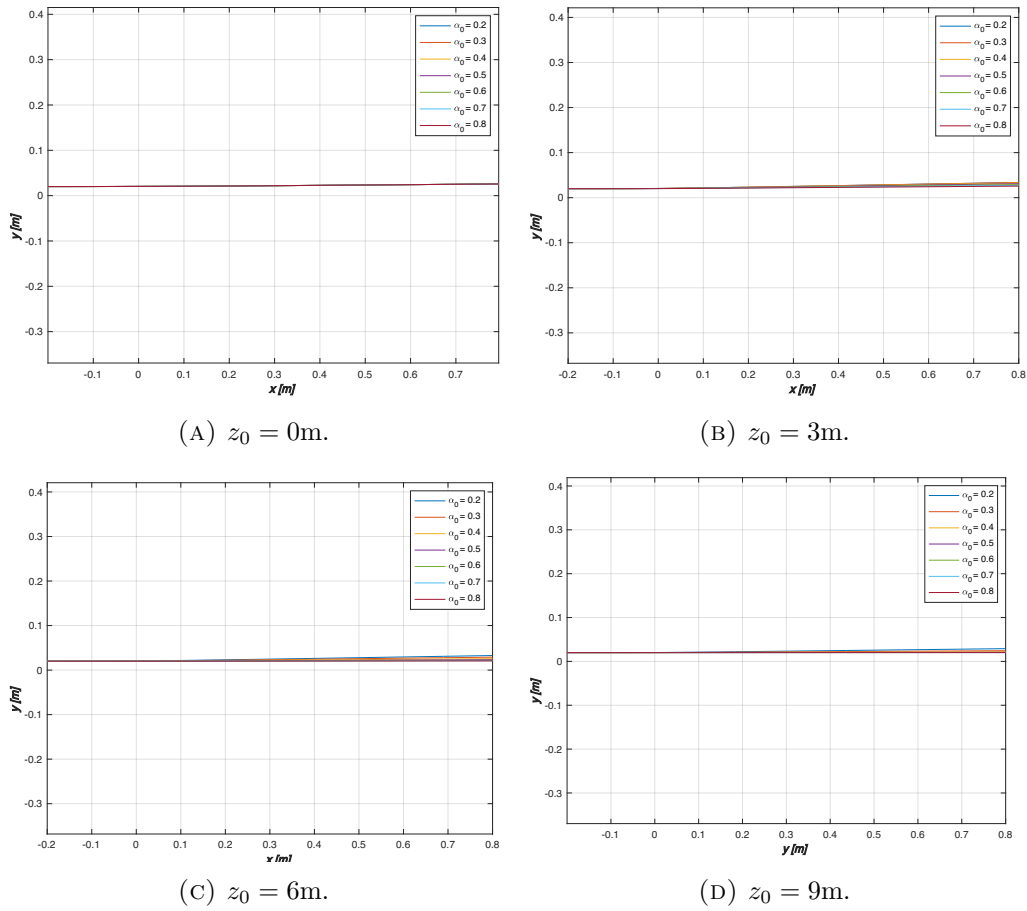


FIGURA 4.22: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ), emissor fixo no ponto de coordenadas cartesianas  $(-0.2, 0.02)$  com ângulo de emissão igual a 0, temperatura máxima( $A$ ) de  $100^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_1 = 8$  e variações do valor de  $\alpha_0$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.22 o valor da temperatura máxima no centro e à saída da fonte ( $A$ ) passa para  $100^{\circ}\text{C}$ . Podemos verificar que quanto maior for o  $\alpha_0$  menor será o desvio representado.

Assim como se observou quando se fazia variar o parâmetro  $\alpha_1$ , também aqui ao diminuir o valor de  $A$  os trajectos dos raios voltam a apresentar resultados semelhantes aos Modelos A e B, isto é a trajetória dos raios volta a divergir.

### 4.3.3 Análise do efeito da variação da temperatura máxima

#### A

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da variação do parâmetro  $A$  em cenários localizado em diferentes profundidades:  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$  e  $z_0=9\text{m}$ .

Para  $A=100^\circ\text{C}$ :

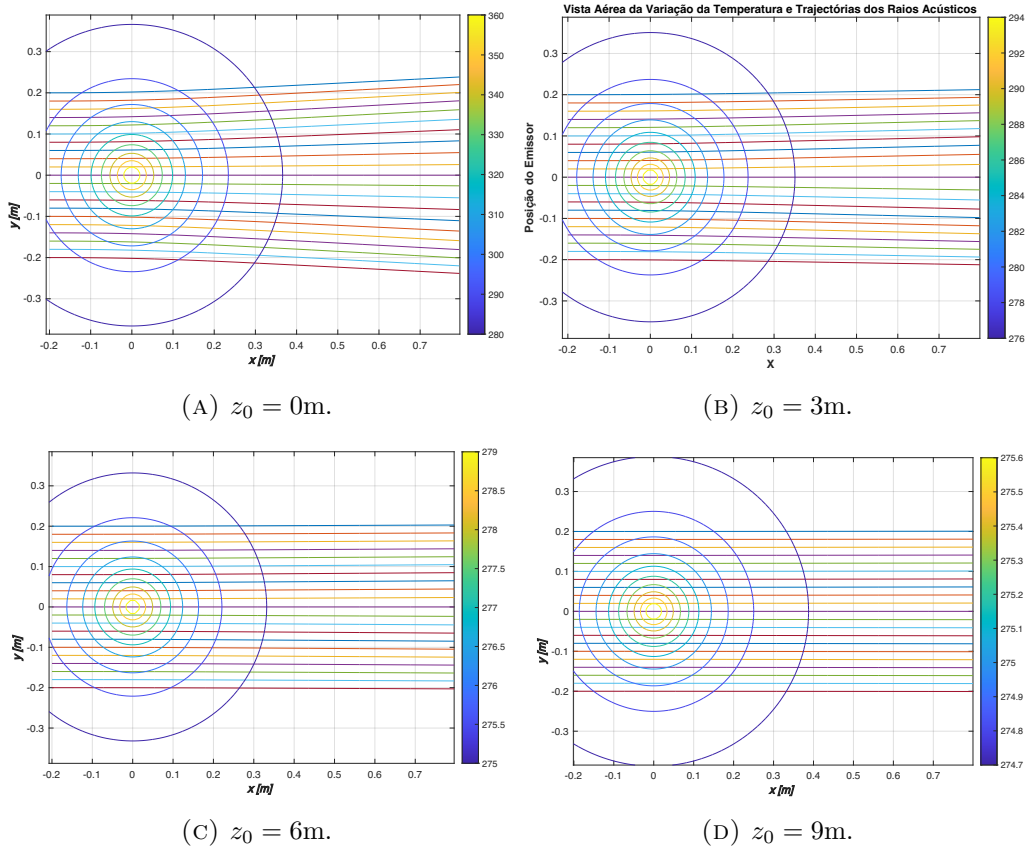


FIGURA 4.23: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima (A) igual a  $100^\circ\text{C}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.23 mais uma vez, utilizaram-se as já conhecidas (dos outros modelos) diferentes posições do emissor ao longo de eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $-0,2$  e  $0,2$  metros com decrementos de  $0,02$  metros, sendo constante o valor da coordenada  $x=0,2\text{m}$ . O ângulo de emissão volta a ser  $0$ ,  $\alpha_0=0,5$  e  $\alpha_1=8$ .

### 4.3. Modelo C

Nestes gráficos é possível comprovar o que se tem vindo a dizer em relação ao modelo C pois como se verificou, quer quando se variou o parâmetro  $\alpha_1$ , quer quando se variou o parâmetro  $\alpha_0$ , quando  $A=100^\circ\text{C}$  a trajectória dos raios acústicos tende a divergir das altas temperaturas.

Para  $A=400^\circ\text{C}$ :

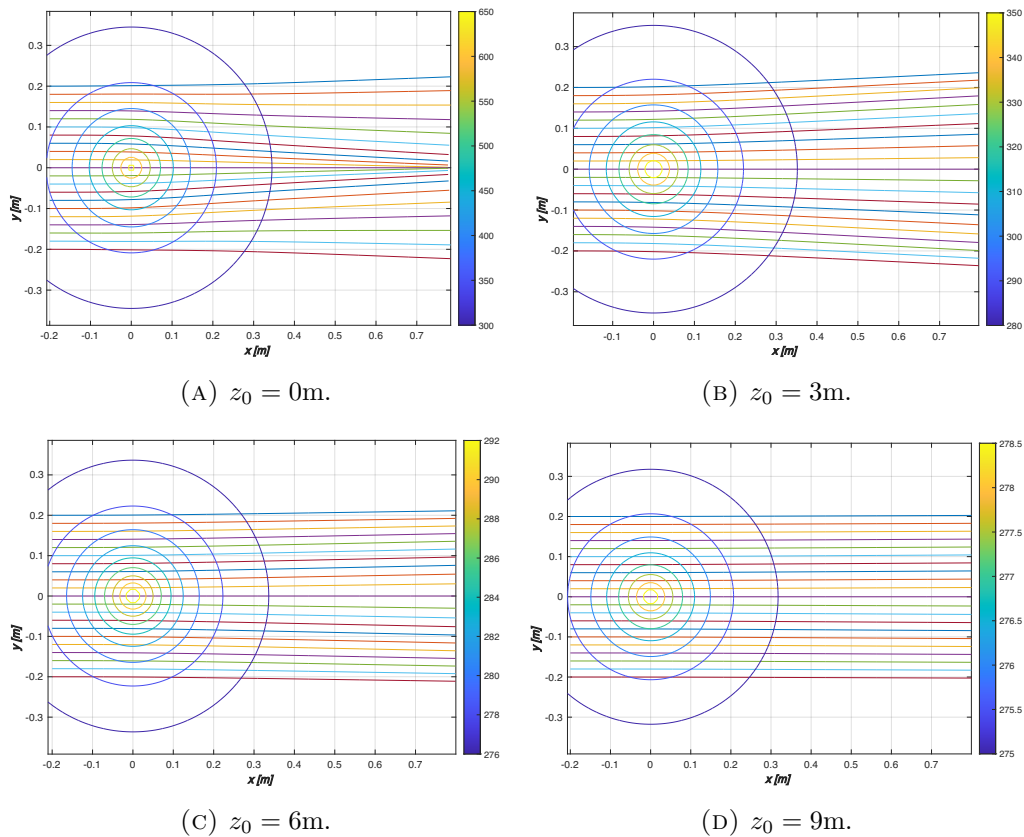


FIGURA 4.24: Gráficos das trajectórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima (A) igual a  $400^\circ\text{C}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.24  $A=400^\circ\text{C}$ . Podemos observar que os raios na presença de altas temperaturas convergem. Isto acontece no Modelo C porque se está a trabalhar fora do intervalo de validade de temperaturas para que este este foi pensado.

Para  $A=700^{\circ}\text{C}$ :

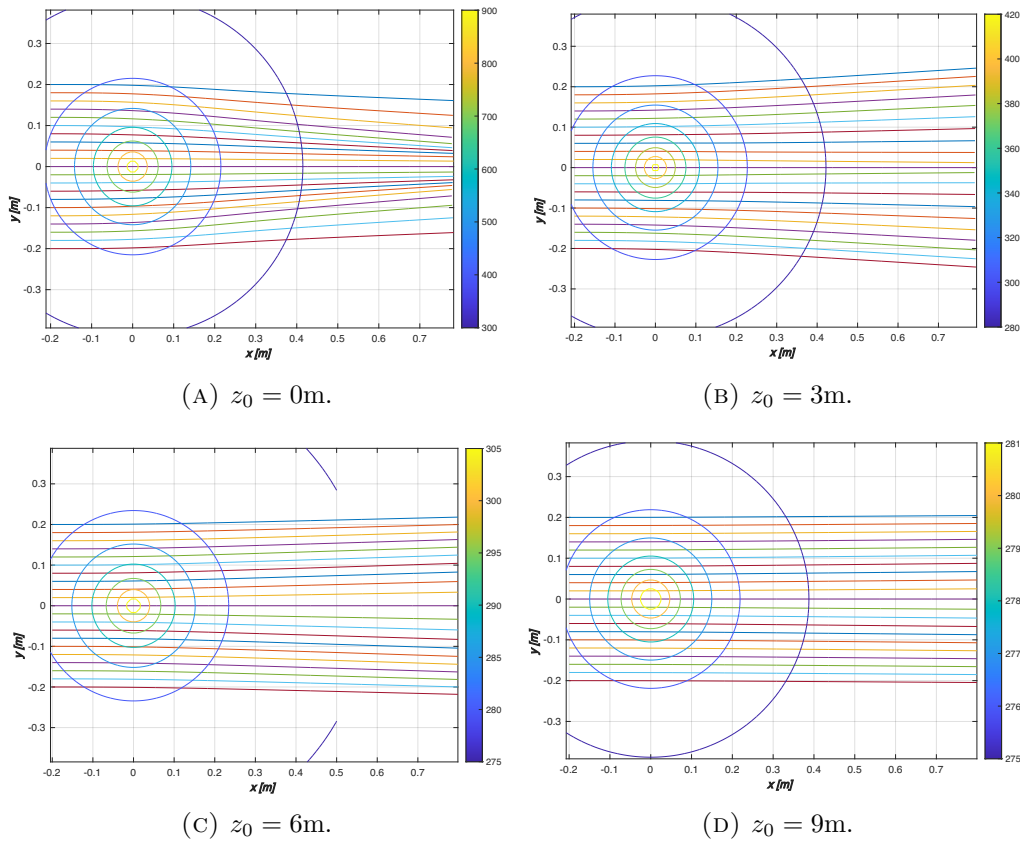


FIGURA 4.25: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal centrada na origem com temperatura máxima (A) igual a  $700^{\circ}\text{C}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.25 quando se aumenta ainda mais o valor de  $A$  neste caso para a temperatura de  $700^{\circ}\text{C}$  a convergência ainda se torna mais acentuada. No gráfico (B) é possível observar que os raios voltam a divergir e isto acontece porque ao aumentar-se o valor de  $z_0$  está-se também a aumentar a distância à boca da chaminé e como se pode ler no gráfico a temperatura do centro da fonte já será de  $420^{\circ}\text{K}$  ( $146,85^{\circ}\text{C}$ ) e como já se observou com diminuir da temperatura a expressão de Del Grosso apresenta melhores resultados.

#### 4.3.4 Variações no número de fontes

Nesta subsecção analisaremos os efeitos da existência de duas fontes hidrotermais em cenários localizado em diferentes profundidades:  $z_0=0\text{m}$ ,  $z_0=3\text{m}$ ,  $z_0=6\text{m}$

e  $z_0=9\text{m}$ .

Para duas fontes com a mesma temperatura máxima (A) e altura da chaminé ( $z_{11}$ )

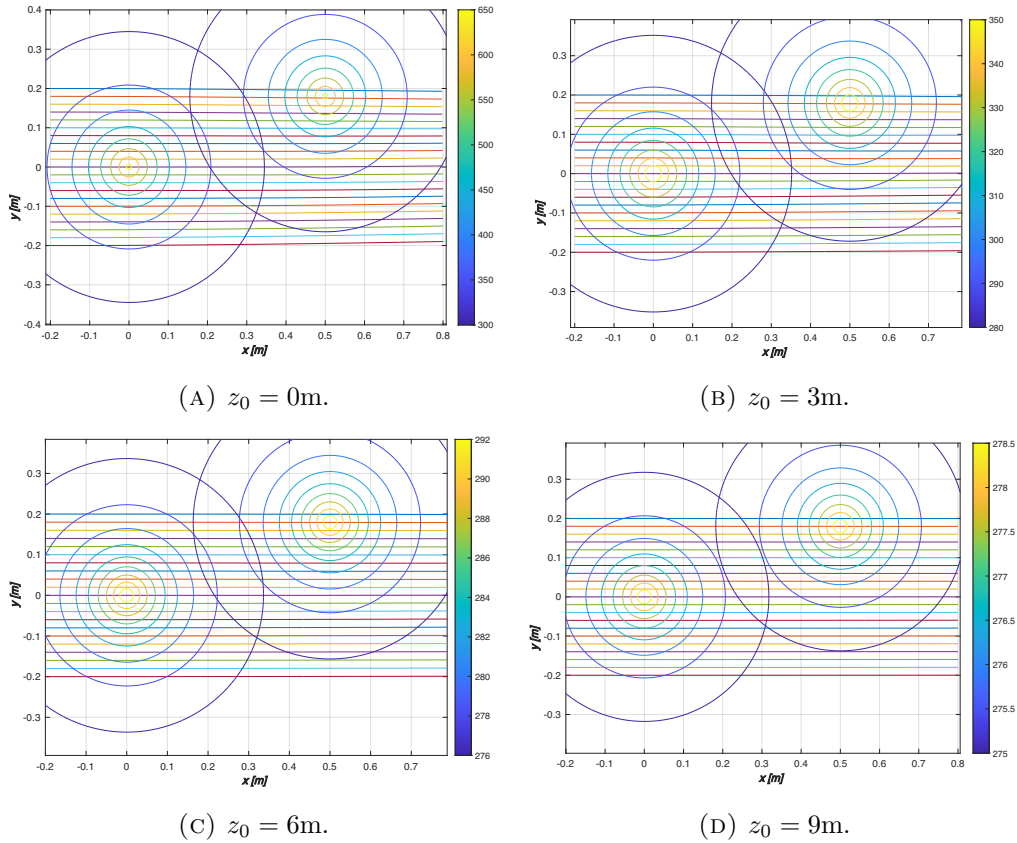


FIGURA 4.26: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Temperaturas máximas (A) iguais nas duas fontes, ambas as fontes com  $A = 400^\circ\text{C}$ . Alturas de chaminés ( $z_{11}$ ) iguais, ambas as fontes com  $z_{11} = 0\text{m}$ . Fonte hidrotermal 1(a mais à esquerda) centrada na origem e fonte hidrotermal 2(a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.26 assim como se fez nos modelos A e B também aqui se acrescentou aos gráficos anteriores uma nova fonte hidrotermal com origem em  $(0.5,0.18)$ , mas ambas com o mesmo  $A(400^\circ\text{C})$  e  $z_{11}(0\text{m})$ . No entanto ao utilizar-se a expressão de Del Grosso não se torna visível o efeito que a segunda

fonte tem na trajetória dos raios, mais uma vez isto prende-se com o facto de estar perante temperaturas demasiado elevadas.

Para duas fontes com diferentes temperaturas máximas ( $A$ ) e alturas das chaminés ( $z_{11}$ )

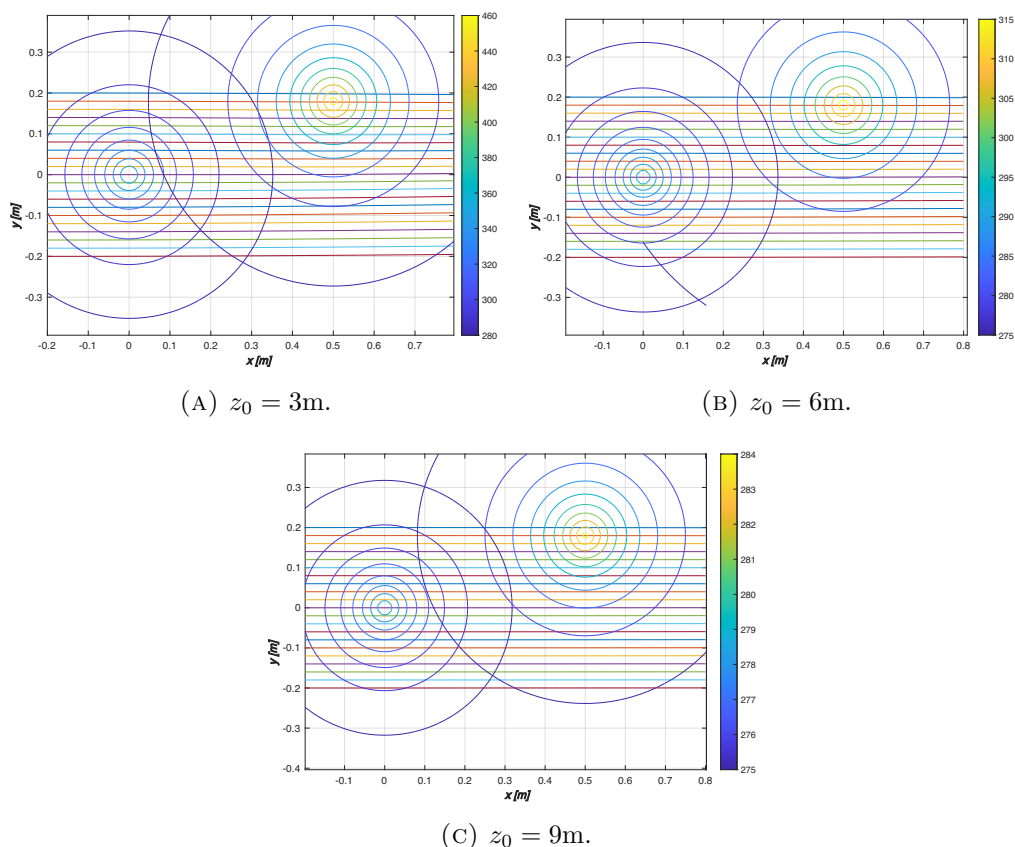


FIGURA 4.27: Gráficos das trajetórias dos raios acústicos para os diferentes valores de profundidade ( $z_0$ ). Emissor com diversas posições ao longo do eixo do  $y$  num intervalo compreendido entre  $[-0.2 ; 0.2]\text{m}$  com decrementos de  $0.02\text{m}$ , fixo no eixo do  $x$  em  $x = -0.2\text{m}$ , ângulo de emissão igual a  $0$ ,  $\alpha_1 = 8$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Fonte hidrotermal 1 (a mais à esquerda) centrada na origem, com temperatura máxima ( $A$ ) igual a  $400^\circ\text{C}$  e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de  $0\text{m}$ . Fonte hidrotermal 2 (a mais à direita) com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$ , temperatura máxima ( $A$ ) igual a  $200^\circ\text{C}$  e um altura da chaminé ( $z_{11}$ ) de  $3\text{m}$ .

Nas simulações representadas na Figura 4.27 vai se alterar as características da fonte com origem no ponto de coordenadas cartesianas  $(0.5, 0.18)$  para  $A=200^\circ\text{C}$  e  $z_{11}=3$  metros.

Tal como nos gráficos da Figura 4.26 devido às altas temperaturas o efeito das duas fontes não se torna visível para o modelo C que utiliza a expressão de Del Grosso.

## 4.4 Análise Global dos Resultados

Antes de se começar a fazer qualquer análise torna-se importante referir mais uma vez que as expressões para a velocidade do som utilizadas não conseguem exprimir o que se passa na realidade junto às fontes hidrotermais, pois não foram pensadas para estas temperaturas e profundidades. No entanto, o que se observa nos gráficos, e apesar das limitações que apresentam, é um resultado aceitável e expectável. De facto já houve vários estudos na área e com artigos publicados utilizando as mesmas expressões, para fontes hidrotermais a baixas profundidades.

O melhor exemplo que se obteve destas limitações foi no gráfico 4.24(A) ou no gráfico 4.25(A), pois estamos a trabalhar fora do intervalo de temperaturas válidas para a expressão de Del Grosso. O suposto é que as trajectórias tendam a afastar-se das regiões com uma maior temperatura e nestes gráficos mencionados isso não acontece, antes pelo contrário, e é possível observar perfeitamente a convergência destes num ponto. Porém, ainda no modelo C, nas Figuras 4.20, 4.22 e 4.23, para a temperatura de 100°C os raios já se afastam das regiões com temperaturas mais elevadas.

É de reparar ainda que o modelo B é essencialmente um desenvolvimento em série de potências da temperatura, o que é sempre possível fazer-se (série de Taylor) e que outros coeficientes, eventualmente mais adequados, poderiam ser usados. O problema é que não existe conhecimento (nem teórico nem empírico) sobre que valores escolher para esses coeficientes.

Ao fazer a análise geral dos gráficos percebe-se que quanto maior for o valor de  $z_0$ , menores serão os desvios e isto prende-se com o facto de que quanto mais longe se estiver da boca da chaminé também menor será a temperatura do meio onde se propagam os raios.

Todos os gráficos, à excepção dos gráficos apresentados para o modelo C já que não se está a trabalhar no intervalo de 0°C a 35°C, tornam possível constatar que, quanto maior for a temperatura do meio de propagação dos raios maior será o desvio apresentado nas suas trajectórias.

Ao analisar-se a variação de  $\alpha$ , percebe-se que quanto maior for o valor do decaimento horizontal ( $\alpha_1$ ) maior e mais rápido será o desvio apresentado junto da fonte (exemplo, Figura 4.10). Relativamente à constante de decaimento vertical ( $\alpha_0$ ) passa-se o inverso e quanto maior for, menor será o desvio no trajecto dos raios acústicos (exemplo, Figura 4.11). Como se observa nas Figuras 4.19 e 4.21, também aqui se faz sentir as limitações da expressão de Del Grosso face às altas temperaturas, pois para uma temperatura máxima no centro e à saída da fonte ( $A$ ) de 400°C a curvatura do raio face às altas temperaturas da fonte é ao contrário das duas expressões anteriores.

Para terminar, a existência de duas fontes permite observar num só gráfico os efeitos já aqui referidos pois é possível observar os dois desvios que a trajectória apresenta ao aproximar-se das temperaturas mais ou menos elevadas, como por exemplo na Figura 4.17.

É claro que poderia facilmente aumentar o número de fontes em diferentes posições ( $x, y$ ), níveis ( $z$ ) e temperaturas centrais ( $A$ ), bem como com diferentes constantes ( $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ ) de decrescimento de temperatura no espaço e desta forma obter mais gráficos com outras combinações de parâmetros e condições iniciais.

# Conclusão

Este tema partiu de uma enorme motivação e interesse em conseguir alargar e criar novos horizontes no diz respeito ao conhecimento matemático aplicado à acústica submarina. Para além disto, é óbvio que a interrogação da aplicabilidade deste método da geometria diferencial também teve um peso enorme.

É com felicidade que se olha para os resultados obtidos pois apesar da imensa dificuldade na recolha de dados reais do que se passa junto à fontes hidrotermais e da inexistência de uma expressão verdadeira que relacione a velocidade do som na água com a temperatura, conseguiu-se de grosso modo obter resultados razoáveis e aceitáveis para o que seria expectável acontecer com as trajectórias dos raios acústicos.

Como se observe ao longo do capítulo 4, todos os parâmetros têm impacto no que diz respeito ao trajecto descrito pelos raios. De uma forma geral, com o aumento da temperatura com que o raio se depara maior será o desvio apresentado, quanto maior a constante de decaimento vertical menos se afastará o raio e o contrário acontece quando se varia a constante de decaimento horizontal.

Fora isto, ainda se fica com um programa disponível e editável para que assim que vão surgindo mais e melhores dados relativos ao comportamento das trajectórias a estas elevadas profundidades e temperaturas se possa acrescentar o que possibilitará uma melhor análise e estudo nesta área. Como esta ferramenta possui a capacidade de serem acrescentadas um número infinito de fontes com diversas características cada uma, com mais e melhores dados, ou seja, mais reais também será possível retratar em traços largos um campo hidrotermal e observar o que acontece ao trajecto do raio quando em vez de uma se possui duas, três, quatro ou número de fontes que o campo em estudo possuir.

Este método acaba por se revelar bastante mais poderoso do que outros já utilizados anteriormente, nomeadamente pelo Princípio de Fermat, pois para além de incorporar em si todos as variações dos parâmetros intervenientes na expressão da velocidade do som, também vai incluir as variantes de velocidade do meio, o que

vai possibilitar a introdução das correntes marítimas em qualquer profundidade, e ainda o próprio escoramento vertical dos fluidos quentes emitidos pelas chaminés.

Durante o estudo ainda foram realizados algumas comparações de resultados, especificamente os resultados da aplicação directa do Principio de Fermat, e reparou-se que ao serem utilizados perfis de velocidade mais simples aproximadamente válidos entre os 0 e os 750 metros de profundidade como:

$$c(x, y) = bw - mwy, \quad (4.2)$$

com  $bw$  igual a 1520 e  $mwy$  igual a 0.05, os resultados eram praticamente coincidentes. No entanto, ao passar-se para os casos mais complexos como os que foram utilizados ao longo da presente dissertação as diferenças já eram mais acentuadas e por isso fica como uma primeira proposta de trabalho futuro a tentativa de procura do factor que justifica tal diferença mesmo só considerando o parâmetro temperatura, sendo que este se tratará de um trabalho analítico, em primeiro lugar.

Apesar de todas as vantagens já assinaladas, este modelo ainda possui algumas limitações que podem tentar ser colmatadas em trabalhos que se venham a realizar futuramente.

Uma destas limitações é o facto de a geometria acústica não ser capaz de introduzir a dissipação do som, que neste estudo não se esperaria que tivesse um impacto significativo já que se estava perante curtas distâncias mas que ao serem estudados, por exemplo, zonas costeiras onde em vez de metros se vai ter quilómetros, a diferença irá ser muito maior.

No entanto, ressalva-se que nas fontes hidrotermais, existe uma enorme variedade de materiais e a sua composição química também poderá interferir na trajectória dos raios e na atenuação do som. Por isso, o desafio que se aqui deixa é tentar incorporar também este factor no cálculo.

A maior dificuldade na elaboração deste estudo, para além do exaustivo e demorado cálculo inerente ao tema, foi a procura de dados capazes de satisfazer a necessidade. Por outro lado, esta procura também permitiu criar um novo leque de conhecimento no que diz às organizações, militares e civis, por detrás de todos os trabalhos que dizem respeito a esta área científica, inclusive ainda obrigou mesmo ao contacto com algumas delas e apesar de não se terem conseguido os dados pretendidos permitiu a recolha das diversas abordagens ao tema por parte destas unidades.

A falta de dados foi só mais uma prova de que esta é uma aérea, que ainda merece muito a atenção do público e que a Marinha de Guerra Portuguesa deve continuar a apostar na formação e investigação nela para que se consiga criar um conjunto mais forte e coeso de conhecimento que será útil no cumprimento da sua missão.



# Bibliografia

- Arfken, GB, HJ Weber e FE Harris (2012). *Mathematical Methods for Physicists. seventh.*
- Beaulieu, Stace E, Edward T Baker e Christopher R German (2015). «Where are the undiscovered hydrothermal vents on oceanic spreading ridges?» Em: *Deep Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography* 121, pp. 202–212.
- Bergman, David R (2005). *Application of differential geometry to acoustics: Development of a generalized paraxial ray-trace procedure from geodesic deviation.* Rel. téc. NAVAL RESEARCH LAB WASHINGTON DC.
- (2018). *Computational acoustics: Theory and implementation.* John Wiley & Sons.
- Cai, Yong, Wei Fan, Yan Zhou, Xian-qiao Fu, Hui Fang e Tao Jin (2012). «Study on the high precision acoustic measurement techniques for determining temperature field around seafloor hydrothermal vent». Em: *China Ocean Engineering* 26.4, pp. 723–732.
- Collier, Peter (2017). *A most incomprehensible thing: notes towards a very gentle introduction to the mathematics of relativity.* Incomprehensible Books.
- Connelly, Douglas P, Jonathan T Copley, Bramley J Murton, Kate Stansfield, Paul A Tyler, Christopher R German, Cindy L Van Dover, Diva Amon, Maaten Furlong, Nancy Grindlay et al. (2012). «Hydrothermal vent fields and chemosynthetic biota on the world’s deepest seafloor spreading centre». Em: *Nature communications* 3.1, pp. 1–9.
- Del Grosso, Vincent A (1974). «New equation for the speed of sound in natural waters (with comparisons to other equations)». Em: *The Journal of the Acoustical Society of America* 56.4, pp. 1084–1091.
- EMEPC (s.d.). *EMEPC: Missão.* URL: <https://www.emepc.pt/missao>. (acedido a 02.06.2021).
- Firmino, Teresa (2009). «O primeiro mergulho português em fontes hidrotermais». Em: *Público*. DOI: <https://www.publico.pt/2009/10/17/jornal/o-primeiro-mergulho-portugues-em-fontes-hidrotermais-18033265>.
- (2020). «Espreitemos por esta escotilha (com vista ampla) para o fundo do mar português». Em: *Público*. DOI: <https://www.publico.pt/2020/>

- 08/23/ciencia/noticia/espreitemos-escotilha-vista-fundo-mar-portugues-1928975.
- Freire, Manuel Carlos (2019). «ONU analisou esta semana proposta de alargar fundo do mar português». Em: *Diário de Notícias*. DOI: <https://www.dn.pt/poder/onu-analisou-esta-semana-proposta-de-alargar-fundo-do-mar-portugues-11186620.html>.
- Gatta, Mário (s.d.). *Notas antigas de tensores*.
- IH (s.d.). *IH: PROGRAMA SEAMAP 2030 (MAPEAMENTO DO MAR PORTUGUÊS)*. URL: <https://www.hidrografico.pt/iprojeto/16>. (acedido a 30.05.2021).
- Kinsler, Lawrence E, Austin R Frey, Alan B Coppens e James V Sanders (1999). *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & Sons.
- Leahy, Stephen (2018). «Descobertas Fontes Hidrotermais em Águas Oceânicas Surpreendentemente Pouco Profundas». Em: *National Geographic*. DOI: <https://www.natgeo.pt/viagem/2018/07/descobertas-fontes-hidrotermais-em-aguas-oceanicas-surpreendentemente-pouco>.
- Lu, J, K Wakai, S Takahashi e S Shimizu (2000). «Acoustic computer tomographic pyrometry for two-dimensional measurement of gases taking into account the effect of refraction of sound wave paths». Em: *Measurement Science and Technology* 11.6, p. 692.
- Neuenschwander (2015). *Tensor Calculus for Physics*. John Hopkins University Press.
- Nogueira, Tiago Manuel Chaves (2019). «Uma Leitura Geopolítica e de Ambiente da Plataforma Continental: O Caso Português». Tese de doutoramento.
- NOAA (2021). «What is a hydrothermal vent?» Em: *National Ocean Service*. DOI: <https://oceanservice.noaa.gov/facts/vents.html>.
- Paiva, Beatriz Manuel Evangelista (2018). «Caracterização de fontes hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas». Tese de mestrado.
- Rocha, Alexandre Passeira da (2020). «Métodos da Geometria Diferencial no Estudo da Acústica Submarina na Aproximação Geométrica». Tese de mestrado.

## Apêndice A - Cálculo analítico dos símbolos de Christoffel

Este apêndice encontra-se dividido também em três partes para que se distingam perspicazmente os cálculos para as diferentes expressões de  $c$ . Apenas a primeira secção vai ter o desenrolar da fórmula que dá valor aos coeficientes de conexão pois independentemente do valor de  $c$  isso irá manter-se, de igual forma só na primeira secção é que se vai mostrar os casos quem que o valor do símbolo de Christoffel é zero porque os coeficientes serão os mesmos e em igual numero para todos os  $c$ .

Antes de se começar o cálculos dos coeficientes de conexão é importante referir que as igualdades referidas no corpo da dissertação se mantêm agora no presente apêndice, ou seja:

- $W = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0(z_0-z_{11})}$ ;
- $T = TK + TM + A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0(z_0-z_{11})} = TK + TM + W$ ;
- $d = \sqrt{(x - x_{21})^2 + (y - y_{21})^2}$ ;
- $H = W\alpha_1(x - x_{21})$
- $J = W\alpha_1(y - y_{21})$
- $c =$  à expressão no inicio da secção.

Posto isto estão reunidas as condições para o cálculo de todos os símbolos de Christoffel.

## A.1 Para o Modelo A

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\rho} \right) \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} \left( 0 + 0 - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} \left( -\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right), c/x^1 = x \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) (-ac) \\
 &= \frac{c}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) c \\
 &= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( -\frac{W\alpha_1(2x-2x_{21})\sqrt{KR}}{4d\sqrt{TK+TM+W}} \right) \\
 &= -\frac{WKR\alpha_1(x-x_{21})}{4d} \\
 &= -\frac{HKR}{4d}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\rho} \right) \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right), c/x^1 = x \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{a}{c} \right) \\
 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\
 &= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( \frac{W\alpha_1(2x-2x_{21})}{4d\sqrt{KR}(TK+TM+W)^{3/2}} \right) \\
 &= \frac{W\alpha_1(x-x_{21})}{4d(TK+TM+W)} \\
 &= \frac{H}{4d(T)}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{1\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 1}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right), c/x^2 = y \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{c} \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( \frac{W \alpha_1 (2y - 2y_{21})}{4d\sqrt{KR}(TK+TM+W)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{W \alpha_1 (y - y_{21})}{4d(TK+TM+W)} \\
&= \frac{J}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\rho}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left( -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right), c/x^1 = x \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( -\frac{W \alpha_1 (2x - 2x_{21})}{4d\sqrt{KR}(TK+TM+W)^{3/2}} \right) \\
&= -\frac{W \alpha_1 (x - x_{21})}{4d(TK+TM+W)} \\
&= -\frac{H}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\rho}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left( -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right), c/x^1 = x \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( -\frac{W\alpha_1(2x-2x_{21})}{4d\sqrt{KR}(TK+TM+W)^{3/2}} \right) \\
&= -\frac{W\alpha_1(x-x_{21})}{4d(TK+TM+W)} \\
&= -\frac{H}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2} g^{2\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left( 0 + 0 - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left( -\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \right), c/x^2 = y \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial y} \right) (-ac) \\
&= \frac{c}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial y} \right) c \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( -\frac{W\alpha_1(2y-2y_{21})\sqrt{KR}}{4d\sqrt{TK+TM+W}} \right) \\
&= -\frac{WKR\alpha_1(y-y_{21})}{4d} \\
&= -\frac{JKR}{4d}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{2\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{22} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{22} \left( -\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right), c/x^2 = y \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( -\frac{W\alpha_1(2y-2y_{21})}{4d\sqrt{KR}(TK+TM+W)^{3/2}} \right) \\
&= -\frac{W\alpha_1(y-y_{21})}{4d(TK+TM+W)} \\
&= -\frac{J}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{2\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\rho}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{22} \left( \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{22} \left( -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right), c/x^2 = y \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( -\frac{W\alpha_1(2y-2y_{21})}{4d\sqrt{KR}(TK+TM+W)^{3/2}} \right) \\
&= -\frac{W\alpha_1(y-y_{21})}{4d(TK+TM+W)} \\
&= -\frac{J}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} g^{2\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 1}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right), c/x^1 = x \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( \frac{W \alpha_1 (2x - 2x_{21})}{4d\sqrt{KR}(TK+TM+W)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{W \alpha_1 (x - x_{21})}{4d(TK+TM+W)} \\
&= \frac{H}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{2\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\rho}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right), c/x^2 = y \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{1}{c} \right) \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( \frac{W \alpha_1 (2y - 2y_{21})}{4d\sqrt{KR}(TK+TM+W)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{W \alpha_1 (y - y_{21})}{4d(TK+TM+W)} \\
&= \frac{J}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} g^{3\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 1}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\rho}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{33} \left( \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{33} \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right), c/x^1 = x \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( \frac{W \alpha_1 (2x - 2x_{21})}{4d \sqrt{KR} (TK + TM + W)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{W \alpha_1 (x - x_{21})}{4d (TK + TM + W)} \\
&= \frac{H}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2} g^{3\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 2}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\rho}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^\rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{33} \left( \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{33} \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right), c/x^2 = y \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{a}{c} \right) \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{c} \\
&= \left( \frac{\sqrt{KR}\sqrt{W+TM+TK}}{2} \right) \left( \frac{W \alpha_1 (2y - 2y_{21})}{4d \sqrt{KR} (TK + TM + W)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{W \alpha_1 (y - y_{21})}{4d (TK + TM + W)} \\
&= \frac{J}{4d(T)}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Até aqui foram demonstrados todos os coeficientes de conexão cujo resultado irá ser diferente de zero. A partir deste ponto vai-se apenas apresentar um exemplo para cada uma das possíveis variantes que faz com que resultado do símbolo de

Christoffel seja nulo.

$$\Gamma_{31}^0 = \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}g^{0\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 3}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\rho}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^\rho} \right) \quad (\text{A.13})$$

Mais uma vez já que  $g^{\mu\nu}$  é diagonal, para que  $g^{\sigma\rho} \neq 0 \Rightarrow \rho = 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \Gamma_{31}^0 = \Gamma_{31}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left( \frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^3} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2}g^{00} (0 + 0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Tal como no último exemplo todos os coeficientes de conexão onde  $\sigma \neq \mu \neq \nu$  o resultado final vai ser nulo uma vez que inicialmente estamos a trabalhar com uma matriz diagonal.

Outra razão que faz com que o coeficiente de conexão não tenha um resultado diferente de zero é quando após a substituição e simplificação da fórmula que nos dá o valor final pretendido a derivada de  $c$  ser em função de  $z$  ou  $t$  pois  $c$  não possui uma coordenada  $z$  nem  $t$ . Segue-se um exemplo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2}g^{3\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\rho} \right) \\ &= \frac{1}{2}g^{33} \left( \frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \right) \\ &= \frac{1}{2}g^{33} \left( 0 + 0 - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \right), c/x^3 = z \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) (-ac) \\ &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) (-c) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Por fim, outra maneira do resultado final dar zero é quando a expressão pede a derivada de  $a$  em função de  $t$ ,  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , já que ainda não se atribuiu uma expressão a  $a$  o que a torna uma constante e por isso a sua derivada vai ser sempre igual a zero.

## A.2 Para o Modelo B

Como já foi referido nesta e na próxima secção o cálculo irá começar no momento em que se tem de fazer o cálculo da derivada parcial de  $c$  e por isso o cálculo efectuado até então tem de ser consultado na secção A.1.

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{c}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) c \\ &= -\frac{c}{2} \left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)\end{aligned}\tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\ &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{\frac{H\beta}{d} + \frac{3H\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2H\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\ &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\ &= \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}\end{aligned}\tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{c} \\ &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{\frac{J\beta}{d} + \frac{3J\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2J\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\ &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\ &= \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}\end{aligned}\tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( -\frac{\frac{H\beta}{d} + \frac{3H\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2H\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( -\frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\
 &= -\frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{33}^1 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( -\frac{\frac{H\beta}{d} + \frac{3H\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2H\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( -\frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\
 &= -\frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^2 &= \frac{c}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial y} \right) c \\
 &= -\frac{c}{2} \left( \frac{J}{d} (b + 3d(T)^2 + 2c(T)) \right)
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^2 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( -\frac{\frac{J\beta}{d} + \frac{3J\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2J\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( -\frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\
 &= -\frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{33}^2 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( -\frac{\frac{J\beta}{d} + \frac{3J\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2J\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( -\frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\
 &= -\frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{\frac{H\beta}{d} + \frac{3H\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2H\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\
 &= \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^2 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{1}{c} \right) \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{\frac{J\beta}{d} + \frac{3J\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2J\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\
 &= \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{\frac{H\beta}{d} + \frac{3H\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2H\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \\
 &= \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{c} \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{\frac{J\beta}{d} + \frac{3J\epsilon(T)^2}{d} + \frac{2J\gamma(T)}{d}}{c^2} \right) \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{J}{c^2} \left( \beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T) \right) \right) \\
 &= \frac{\left( \frac{J}{d} \left( \beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T) \right) \right)}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

### A.3 Para o Modelo C

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{c}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) c \\
 &= - \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{H}{d} \right) \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right]
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\
 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\left[ \frac{H O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}}}{d} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{(T)^2}{O_2^2}} \left( \frac{H}{O_1 d} + \frac{2H(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \right.}{\left( c \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{H O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5 d} - \frac{H O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{H O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \right] \right) \\
 &= \left( \frac{c}{2} \right) \left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right] \\
 &= \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{c} \\
 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{JO_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}}}{d} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{(T)^2}{O_2^2}} \left( \frac{J}{O_1 d} + \frac{2J(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ + \frac{JO_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4-S)}}{O_5 d} - \frac{JO_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{JO_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7 d} \end{array} \right]}{(c)^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4-S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right] \\
 &= \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4-S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right]}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
 &= -\frac{c}{2} \left( \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{HO_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}}}{d} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{(T)^2}{O_2^2}} \left( \frac{H}{O_1 d} + \frac{2H(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ + \frac{HO_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4-S)}}{O_5 d} - \frac{HO_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{HO_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7 d} \end{array} \right]}{(c)^2} \right) \\
 &= - \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left[ \begin{array}{l} \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4-S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right] \\
 &= - \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4-S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4-S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4-S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{array} \right]}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{33}^1 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
 &= -\frac{c}{2} \left( \frac{\left[ \begin{aligned} & \frac{H O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}}}{d} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{(T)^2}{O_2^2}} \left( \frac{H}{O_1 d} + \frac{2H(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ & + \frac{H O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5 d} - \frac{H O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{H O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \end{aligned} \right]}{(c)^2} \right) \\
 &= -\left( \frac{c}{c^2} \right) \left[ \begin{aligned} & \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ & \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \end{aligned} \right] \\
 &= -\frac{\left[ \begin{aligned} & \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ & \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^2 &= \frac{c}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial y} \right) c \\
 &= -\left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{J}{d} \right) \left[ \begin{aligned} & O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \\ & + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^2 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
 &= -\frac{c}{2} \left( \frac{\left[ \begin{array}{l} JO_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{(T)^2}{O_2^2}} \left( \frac{J}{O_1 d} + \frac{2J(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ + \frac{JO_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5 d} - \frac{JO_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{JO_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \end{array} \right]}{(c)^2} \right) \\
 &= -\left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \\ \left. \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right] \\
 &= -\frac{\phantom{c}}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{33}^2 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{1}{c} \right) \\
 &= -\frac{c}{2} \left( \frac{\left[ \begin{array}{l} JO_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{(T)^2}{O_2^2}} \left( \frac{J}{O_1 d} + \frac{2J(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ + \frac{JO_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5 d} - \frac{JO_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{JO_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \end{array} \right]}{(c)^2} \right) \\
 &= -\left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \\ \left. \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right] \\
 &= -\frac{\phantom{c}}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\
 &= \frac{c}{2} \left( \left[ \frac{H O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{(T)^2}{O_2^2}} \left( \frac{H}{O_1 d} + \frac{2H(T)}{O_2^2 d} \right) (T)}{d} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{H O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5 d} - \frac{H O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{H O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \right] \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right] \\
 &= \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^2 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{1}{c} \right) \\
 &= \frac{c}{2} \left( \left[ \frac{J O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{(T)^2}{O_2^2}} \left( \frac{J}{O_1 d} + \frac{2J(T)}{O_2^2 d} \right) (T)}{d} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{J O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5 d} - \frac{J O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{J O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \right] \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{c}{2}}{c^2} \right) \left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right] \\
 &= \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c}
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{c} \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{H O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}}}{d} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( \frac{H}{O_1 d} + \frac{2H(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ + \frac{H O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5 d} - \frac{H O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{H O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \end{array} \right]}{(c)^2} \right) \\
&= \left( \frac{c}{c^2} \right) \left[ \begin{array}{l} \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right] \\
&= \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{c}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{c} \\
&= \frac{c}{2} \left( \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{J O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}}}{d} - O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( \frac{J}{O_1 d} + \frac{2J(T)}{O_2^2 d} \right) (T) \\ + \frac{J O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5 d} - \frac{J O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10} d} + \frac{J O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7 d} \end{array} \right]}{(c)^2} \right) \\
&= \left( \frac{c}{c^2} \right) \left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right] \\
&= \frac{\left[ \begin{array}{l} \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5} (O_4 - S)}}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c}
\end{aligned} \tag{A.39}$$



## Apêndice B - Equações Geodésicas Finais

Para a interpretação deste apêndice é necessário ter presente as igualdades gerais, ou seja, para as três expressões:

- $W = A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0(z_0-z_{11})}$ ;
- $T = TK + TM + A e^{-\alpha_1 \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2}} e^{-\alpha_0(z_0-z_{11})} = TK + TM + W$ ;
- $d = \sqrt{(x - x_{21})^2 + (y - y_{21})^2}$ ;
- $H = W\alpha_1(x - x_{21})$
- $J = W\alpha_1(y - y_{21})$
- $c =$  à expressão no início da secção.

Além destas ainda se tem as específicas para a expressão de Del Grosso:

- $O = 1449.08$
- $O_0 = 4.57$
- $O_1 = 86.9$
- $O_2 = 360$
- $O_3 = 1.33$
- $O_4 = 35$
- $O_5 = 120$
- $O_6 = 0.1522$
- $O_7 = 1200$
- $O_8 = 400$
- $O_9 = 1.46 * 10^{-5}$
- $O_{10} = 20$
- $O_{11} = 10$

## B.1 Equações finais para o Modelo A

A equação geodésica para a coordenada  $x^0 = t$

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} - \frac{H}{2dT} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} - \frac{J}{2dT} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0 \quad (\text{B.1})$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^1 = x$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\lambda^2} - \frac{H K R}{4d} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{H}{4d(T)} \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \\ + \frac{J}{2dT} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} - \frac{H}{4dT} \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 - \frac{H}{4dT} \left( \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^2 = y$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\lambda^2} - \frac{J K R}{4d} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{J}{4dT} \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \\ - \frac{J}{4dT} \left( \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + \frac{J}{4dT} \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \frac{H}{2dT} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^3 = z$

$$\frac{d^2 z}{d\lambda^2} + \frac{H}{2dT} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + \frac{J}{2dT} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} = 0 \quad (\text{B.4})$$

## B.2 Equações finais para o Modelo B

A equação geodésica para a coordenada  $x^0 = t$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} - \frac{\left( \frac{H}{d} \left( \beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T) \right) \right)}{c} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \\ - \frac{\left( \frac{J}{d} \left( \beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T) \right) \right)}{c} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^1 = x$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 x}{d\lambda^2} - \left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \\
 & + \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \\
 & + \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} \\
 & - \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \\
 & - \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^2 = y$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 y}{d\lambda^2} - \left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right) \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \\
 & - \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \\
 & - \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \\
 & + \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{2c} \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \\
 & + \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^3 = z$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 z}{d\lambda^2} + \frac{\left( \frac{H}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \\
 & + \frac{\left( \frac{J}{d} (\beta + 3\epsilon(T)^2 + 2\gamma(T)) \right)}{c} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

### B.3 Equações finais para o Modelo C

A equação geodésica para a coordenada  $x^0 = t$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} - \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right.}{\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \\ - \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right.}{\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^1 = x$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\lambda^2} - \left( \frac{c}{2} \right) \left( \frac{H}{d} \right) \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \\ \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \\ + \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right.}{\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \\ + \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right.}{\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} \\ - \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right.}{\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \\ - \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left( 1 - \left( \frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2} \right) \right) (T) \right. \right.}{\left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left( \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^2 = y$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 y}{d\lambda^2} - \left(\frac{c}{2}\right) \left(\frac{J}{d}\right) \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \\
 & \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \\
 & - \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 \\
 & - \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 \\
 & + \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{2c} \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 \\
 & + \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

A equação geodésica para a coordenada  $x^3 = z$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 z}{d\lambda^2} + \frac{\left[ \frac{H}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \\
 & + \frac{\left[ \frac{J}{d} \left[ O_0 e^{-\frac{T}{O_1} - \frac{T^2}{O_2^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{O_1} + \frac{2(T)}{O_2^2}\right)\right) (T) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{O_3 e^{-\frac{T}{O_5}} (O_4 - S)}{O_5} - \frac{O_9 P^2 e^{\frac{O_4 - S}{O_{11}} - \frac{T}{O_{10}}}}{O_{10}} + \frac{O_6 P e^{\frac{T}{O_7} - \frac{O_4 - S}{O_8}}}{O_7} \right] \right]}{c} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{B.12}$$



## Apêndice C - Campo Temperatura

```
1 clear,clc,close
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %%%%%%%%% Campo de Temperaturas %%%%%%%%%
4 %%%%%%%%% 27 de Marco de 2021 %%%%%%%%%
5 %%%%%%%%% Mario Ribeiro %%%%%%%%%
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7
8 %Parametros iniciais
9 A1=400; %temperatura no centro
10 gamma=0.5; %alpha1
11 alp=20;%alpha2
12 z0=0; %altura do corte
13 z11=0; %altura da fonte
14 x_21=0; %abcissa do centro da fonte
15 y_21=0; %ordenada do centro da fonte
16
17 %intervalos de x e y
18 min_x1=min(-0.2);
19 min_y1=min(-0.2);
20 max_x1=max(0.2);
21 max_y1=max(0.2);
22
23 %representacao desses intervalos
24 x11 = linspace(min_x1,max_x1);
25 y11 = linspace(min_y1,max_y1);
26 [X1,Y1] = meshgrid(x11,y11);
27
28 %campo temperatura
29 Z1=(A1*exp(-gamma*(z0-z11))*exp(-alp*sqrt(((X1-x_21).^2
30 +(Y1-y_21).^2)))+1.5)+273.15;
31
32 %posicao na figura
33 subplot(1,2,1)
34
35 %vista aerea
36 contour(X1,Y1,Z1,30)
37
38 %caracteristicas do grafico
39 axis equal
40 x1=xlabel('x');
41 set(x1,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
```

```
42 y1=ylabel('y');
43 set(y1,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
44 t=title('Vista Aerea do Campo de Temperaturas');
45 set(t,'FontSize',10,'Fontweight','bold');
46
47 %posicao na figura
48 subplot(1,2,2)
49
50 %vista lateral
51 mesh(X1,Y1,Z1)
52
53 %caracteristicas do grafico
54 x2=xlabel('x');
55 set(x2,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
56 y2=ylabel('y');
57 set(y2,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
58 z1=zlabel('Temperatura em graus Kelvin');
59 set(z1,'FontSize',10,'Fontweight','bold')
60 t1=title('Vista Lateral do Campo de Temperaturas');
61 set(t1,'FontSize',10,'Fontweight','bold');
```

## Apêndice D - Cálculo dos Simbolos de Christoffel

```
1 clear,clc,close
2
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Apendice A %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculo dos simbolos de Christoffel %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 29 de Marco de 2021 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Mario Ribeiro %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9
10
11 %onde se vai definir todas as variaveis simbolicas com que o ...
    programa vai trabalhar.
12
13 syms t x y z bw mw z0 A K R Ga a0 a1
14 %bw,mw,z0,A,K,R,Ga,a0,a1 sao variaveis que se utilizaram para a ...
    obtencao dos Christoffel sem atribuir valores numericos.
15
16 %velocidades para ja 0 porque o fluido esta em repouso.
17 vox=0;
18 voy=0;
19 voz=0;
20
21 %expressao c(t) escolhida pelo utilizador. A incluir futuramente ...
    uma dependencia valida para altas temperaturas.
22 % c_1='insira o c(t)';
23 % ct=input(c_1);
24
25 %Campo temperatura
26 A1=400;
27 gamma=0.5;
28 alp=20;
29 z0=0;
30 z11=2;
31 x_21=0;
32 y_21=0;
33 T1=(A1*exp(-gamma*(z0-z11))*exp(-alp*((x-x_21)^2+(y-y_21)^2)^(1/2))
34 +1.5)+(273.15);
35 Temp=T1;
36 %expressao SQRT(KRT)
37 K=5;
38 R=8.31;
```

```

39 ct=sqrt (K*R) *sqrt (Temp) ;
40
41 %Expressao dos polinomios
42 % alpha=0.1;
43 % beta=0.1;
44 % Gamma=0.1;
45 % epton=0.1;
46 % ct=alpha+beta*Temp+Gamma* (Temp) ^2+epton* (Temp) ^3;
47
48 %Expressao para Del Grosso
49 % P=100;
50 % S=35;
51 % ct=1449.08+4.57*Temp*exp (- ( (Temp/86.9)
52 %+ (Temp/360) ^2) )+1.33* (S-35) *exp (-Temp/120)+0.1522*P*exp ( (Temp/1200)
53 %+ ( (S-35) /400) )+1.46*10^ (-5) *P^2*exp (- ( (Temp/20) + ( (S-35) /10) ) ) ;
54
55 %Para ja uma constante
56 a=1;
57
58 %Tensor metrico acustico
59 g00=- (a*ct) ;
60 g01=-vox* (a/ct^2) ;
61 g02=-voy* (a/ct^2) ;
62 g03=-voz* (a/ct^2) ;
63 g10=-vox* (a/ct^2) ;
64 g11= (a/ct) ;
65 g12=-vox*voy* (a/ct^2) ;
66 g13=-vox*voz* (a/ct^2) ;
67 g20=-voy* (a/ct^2) ;
68 g21=-vox*voy* (a/ct^2) ;
69 g22= (a/ct) ;
70 g23=-voy*voz* (a/ct^2) ;
71 g30=-voz* (a/ct^2) ;
72 g31=-vox*voz* (a/ct^2) ;
73 g32=-voy*voz* (a/ct^2) ;
74 g33= (a/ct) ;
75 tm=[g00 g01 g02 g03; g10 g11 g12 g13; g20 g21 g22 g23; g30 g31 ...
      g32 g33];
76 g0=-1/ (a*ct) ;
77 g1=ct/a;
78 g2=ct/a;
79 g3=ct/a;
80 tm1=[g0 0 0 0;0 g1 0 0 ;0 0 g2 0;0 0 0 g3];
81
82

```

```

83
84 %aqui e onde vamos gerar todas as combinacoes possiveis para o ...
      sigma, o mu e o nu da formula dos simbolos de Christoffel.
85 coordenadas = 0:3;% neste ponto indica-se o valores que eles ...
      podem tomar neste caso e 0,1,2 ou 3.
86 expoentes = 3;% aqui e o numero de espacos que os valores ...
      escolhidos antes podem ocupar neste caso sao 3(sigma,mu,nu).
87 dimensoes = numel(coordenadas);%define-se o numero de dimensoes ...
      (neste caso 4D).
88 combinacoes = ...
      coordenadas(dec2base(0:dimensoes^expoentes-1,dimensoes)-'0'+1);
89 %gera uma matriz com todas as 64(neste caso)possibilidades.
90
91
92 %inicio do ciclo for para que possamos ir avancando de linha em ...
      linha na matriz combinacoes.
93 for i=0.0:+1:63 %de 0 ao 63 incrementos de 1 em 1 pois nos ...
      temos 64 linhas na matriz combinacoes.
94
95 %vai-se agora criar uma matriz s sera cada linha da matriz ...
      combinacoes.
96 s=combinacoes(1+i, :, :);
97
98 %aqui selecionamos dentro da matriz s o valor de sigma, mu, nu.
99 h=s(1,1);%sigma
100 f=s(1,2);%mu
101 w=s(1,3);%nu
102
103 %neste ciclo if vamos comecar a resolver a expressao que nos da ...
      o valor dos coeficientes de conexao e, tal como ...
      analiticamente, como tm e tml sao matrizes diagonais sigma=rho
104
105 if h==0
106     rho=0;
107 elseif h==1
108     rho=1;
109 elseif h==2
110     rho=2;
111 elseif h==3
112     rho=3;
113 else
114     disp('0 valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
115 end
116

```

```
117 %nos 4 if's que se seguem vamos definir M,N,Q e B como sendo ...
      g^(rho*sigma),g_(rho*nu),g_(mu*rho) e g_(mu*nu).
118
119
120 if h==0 && rho==0
121     M=g0;
122 elseif h==1 && rho==1
123     M=g1;
124 elseif h==2 && rho==2
125     M=g2;
126 elseif h==3 && rho==3
127     M=g3;
128 else
129     M=0;
130 end
131
132 if rho==0 && w==0
133     N=g00;
134 elseif rho==1 && w==1
135     N=(g11);
136 elseif rho==2 && w==2
137     N=(g22);
138 elseif rho==3 && w==3
139     N=(g33);
140 else
141     N=0;
142 end
143
144 if f==0 && rho==0
145     Q=g00;
146 elseif f==1 && rho==1
147     Q=(g11);
148 elseif f==2 && rho==2
149     Q=(g22);
150 elseif f==3 && rho==3
151     Q=(g33);
152 else
153     Q=0;
154 end
155
156 if f==0 && w==0
157     B=g00;
158 elseif f==1 && w==1
159     B=(g11);
160 elseif f==2 && w==2
```

```

161     B=(g22);
162 elseif f==3 && w==3
163     B=(g33);
164 else
165     B=0;
166 end
167
168 %Neste momento era possivel obtermos C=(1/2)*M*(N+Q-B) (sendo C ...
    o coeficiente de conexao),mas como sabemos a expressao nao e ...
    simplesmente essa pois faltam as derivadas parciais e e isso ...
    que os 3 if's seguintes irao definir
169
170 %neste vamos definir n como sendo a derivada de N em relacao a ...
    t,x,y ou z consoante o valor de mu e 0,1,2 ou 3 respectivamente.
171
172 if f==0
173     n=diff(N,t);
174 elseif f==1
175     n=diff(N,x);
176 elseif f==2
177     n=diff(N,y);
178 elseif f==3
179     n=diff(N,z);
180 else
181     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
182 end
183
184 %neste vamos definir q como sendo a derivada de Q em relacao a ...
    t,x,y ou z consoante o valor de nu e 0,1,2 ou 3 respectivamente.
185
186 if w==0
187     q=diff(Q,t);
188 elseif w==1
189     q=diff(Q,x);
190 elseif w==2
191     q=diff(Q,y);
192 elseif w==3
193     q=diff(Q,z);
194 else
195     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
196 end
197
198 %neste vamos definir b como sendo a derivada de B em relacao a ...
    t,x,y ou z consoante o valor de rho e 0,1,2 ou 3 ...
    respectivamente.

```

```
199
200 if rho==0
201     b=diff(B,t);
202 elseif rho==1
203     b=diff(B,x);
204 elseif rho==2
205     b=diff(B,y);
206 elseif rho==3
207     b=diff(B,z);
208 else
209     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
210 end
211
212 %Agora ja iremos ter os dados suficientes para obter o valor ...
213     final do Christoffel e C1 sera esse valor.
214
215 C=(1/2)*M*(n+q-b);
216
217 %permite que vao sendo visualizados os simbolos de Christoffel
218 Pretty(C)
219
220 %final do ciclo for que nos permitia avancar nas diferentes ...
221     linhas da matriz combinacoes.
222 end
```

# Apêndice E - Equações Geodésicas e Trajetórias Acústicas

```
1 clear, clc, close
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %%%%%%%%% Trajetorias dos raios acusticos %%%%%%%%%
4 %%%%%%%%% Para um c(t) definido pelo utilizador %%%%%%%%%
5 %%%%%%%%% 02 de Abril de 2021 %%%%%%%%%
6 %%%%%%%%% Mario Ribeiro %%%%%%%%%
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8
9 %onde se vai definir todas as variaveis simbolicas com que o ...
   programa ira trabalhar.
10 syms t(1) x(1) y(1) z(1)
11
12 %velocidades para ja 0 porque o fluido esta em repouso.
13 vox=0;
14 voy=0;
15 voz=0;
16
17 %expressao c(t) escolhida pelo utilizador.A incluir futuramente ...
   uma dependencia valida para altas temperaturas.
18 % c_1='insira o c(t)';
19 % ct=input(c_1);
20
21 %aqui e onde se define t2,x2,y2,z2.
22 t2=diff(t(1));
23 x2=diff(x(1));
24 y2=diff(y(1));
25 z2=diff(z(1));
26
27 %Campo temperatura
28 A1=400;
29 alp=20;
30 gamma=0.5;
31 z0=0;
32 z11=0;
33 z12=3;
34 x_21=0;
35 y_21=0;
36 T1=(A1*exp(-gamma*(z0-z11))*exp(-alp*((x-x_21)^2
37 +(y-y_21)^2)^(1/2))+1.5)+(273.15);
```

```

38 Temp=T1;
39
40 %Expressao SQRT (KRT)
41 K=5;
42 R=8.31;
43 ct=sqrt (K*R)*sqrt (Temp);
44
45 %Expressao dos polinomios
46 % alpha=0.1;
47 % beta=0.1;
48 % Gamma=0.1;
49 % epton=0.1;
50 % ct=alpha+beta*Temp+Gamma*(Temp)^2+epton*(Temp)^3;
51
52 %Expressao para Del Grosso
53 % P=100;
54 % S=35;
55 % ct=1449.08+4.57*Temp*exp(-((Temp/86.9)+(Temp/360)^2))
56 %+1.33*(S-35)*exp(-Temp/120)+0.1522*P*exp((Temp/1200)+((S-35)/400))
57 %+1.46*10^(-5)*P^2*exp(-((Temp/20)+((S-35)/10)));
58
59 %para ja uma constante
60 a=1;
61
62 %tensor metrico acustico
63 g00=-(a*ct);
64 g01=0;
65 g02=0;
66 g03=0;
67 g10=0;
68 g11=(a/ct);
69 g12=0;
70 g13=0;
71 g20=0;
72 g21=0;
73 g22=(a/ct);
74 g23=0;
75 g30=0;
76 g31=0;
77 g32=0;
78 g33=(a/ct);
79 tm=[g00 g01 g02 g03; g10 g11 g12 g13; g20 g21 g22 g23; g30 g31 ...
      g32 g33];
80 g0=-1/(a*ct);
81 g1=ct/a;

```

```

82 g2=ct/a;
83 g3=ct/a;
84 tm1=[g0 0 0 0;0 g1 0 0 ;0 0 g2 0;0 0 0 g3];
85
86 %aqui e onde vamos gerar todas as combinacoes possiveis para o ...
    sigma, o mu e o nu da formula dos simbolos de Christoffel.
87 coordenadas = 0:3;% neste ponto indica-se o valores que eles ...
    podem tomar neste caso e 0,1,2 ou 3.
88 expoentes = 3;% aqui e o numero de espacos que os valores ...
    escolhidos antes podem ocupar neste caso sao 3(sigma,mu,nu).
89 dimensoes = numel(coordenadas);%define-se o numero de dimensoes ...
    (neste caso 4D).
90 combinacoes = ...
    coordenadas(dec2base(0:dimensoes^expoentes-1,dimensoes)-'0'+1);
91 %gera uma matriz com todas as 64(neste caso)possibilidades.
92
93 %Aqui define-se o valor inicial de T,X,Y,Z para que mais a ...
    frente possamos somar valores do ciclo de acordo com o ciclo ...
    if que vamos estabelecer
94 T=0;
95 X=0;
96 Y=0;
97 Z=0;
98
99 %inicio do ciclo for para que possamos ir avancando de linha em ...
    linha na matriz combinacoes.
100 for i=0.0:+1:63 %de 0 ao 63 incrementos de 1 em 1 pois nos ...
    temos 64 linhas na matriz combinacoes.
101
102 %vai-se agora criar uma matriz s sera cada linha da matriz ...
    combinacoes.
103 s=combinacoes(1+i, :, :);
104
105 %aqui selecionamos dentro da matriz s o valor de sigma,mu,nu.
106 h=s(1,1);%sigma
107 f=s(1,2);%mu
108 w=s(1,3);%nu
109
110 %neste ciclo if vamos comecar a resolver a expressao que nos da ...
    o valor dos coeficientes de conexao e, tal como ...
    analiticamente, como tm e tml sao matrizes diagonais sigma=rho.
111 if h==0
112     rho=0;
113 elseif h==1
114     rho=1;

```

```

115 elseif h==2
116     rho=2;
117 elseif h==3
118     rho=3;
119 else
120     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
121 end
122
123 %nos 4 if's que se seguem vamos definir M,N,Q e B como sendo
124 %g^(rho*sigma),g_(rho*nu),g_(mu*rho) e g_(mu*nu).
125 if h==0 && rho==0
126     M=g0;
127 elseif h==1 && rho==1
128     M=g1;
129 elseif h==2 && rho==2
130     M=g2;
131 elseif h==3 && rho==3
132     M=g3;
133 else
134     M=0;
135 end
136
137 if rho==0 && w==0
138     N=g00;
139 elseif rho==1 && w==1
140     N=(g11);
141 elseif rho==2 && w==2
142     N=(g22);
143 elseif rho==3 && w==3
144     N=(g33);
145 else
146     N=0;
147 end
148
149 if f==0 && rho==0
150     Q=g00;
151 elseif f==1 && rho==1
152     Q=(g11);
153 elseif f==2 && rho==2
154     Q=(g22);
155 elseif f==3 && rho==3
156     Q=(g33);
157 else
158     Q=0;
159 end

```

```

160
161 if f==0 && w==0
162     B=g00;
163 elseif f==1 && w==1
164     B=(g11);
165 elseif f==2 && w==2
166     B=(g22);
167 elseif f==3 && w==3
168     B=(g33);
169 else
170     B=0;
171 end
172
173 %Neste momento era possivel obtermos C=(1/2)*M*(N+Q-B) (sendo C ...
    o coeficiente de conexao),mas como sabemos a expressao nao e ...
    simplesmente essa pois faltam as derivadas parciais e e isso ...
    que os 3 if's seguintes irao definir
174
175 %neste vamos definir n como sendo a derivada de N em relacao a ...
    t,x,y ou z consoante o valor de mu e 0,1,2 ou 3 respectivamente.
176 if f==0
177     n=diff(N,t);
178 elseif f==1
179     n=diff(N,x);
180 elseif f==2
181     n=diff(N,y);
182 elseif f==3
183     n=diff(N,z);
184 else
185     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
186 end
187
188 %neste vamos definir q como sendo a derivada de Q em relacao a ...
    t,x,y ou z consoante o valor de mu e 0,1,2 ou 3 respectivamente.
189 if w==0
190     q=diff(Q,t);
191 elseif w==1
192     q=diff(Q,x);
193 elseif w==2
194     q=diff(Q,y);
195 elseif w==3
196     q=diff(Q,z);
197 else
198     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
199 end

```

```

200
201 %neste vamos definir b como sendo a derivada de B em relacao a ...
      t,x,y ou z consoante o valor de mu e 0,1,2 ou 3 respectivamente.
202 if rho==0
203     b=diff(B,t);
204 elseif rho==1
205     b=diff(B,x);
206 elseif rho==2
207     b=diff(B,y);
208 elseif rho==3
209     b=diff(B,z);
210 else
211     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
212 end
213
214 %Agora ja iremos ter os dados suficientes para obter o valor ...
      final do Christoffel e C1 sera esse valor.
215 C1=(1/2)*M*(n+q-b);
216
217 %Estes if's vao definir se as duas derivadas sao t2,x2,y2 ou z2 ...
      consoante mu e nu forem 0,1,2 ou 3.
218
219 %l1 sera a primeira derivada que aparece a multiplicar pelo ...
      coeficiente de conexao e depende do valor de f(mu).
220 if f==0
221     l1=t2;
222 elseif f==1
223     l1=x2;
224 elseif f==2
225     l1=y2;
226 elseif f==3
227     l1=z2;
228 else
229     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
230 end
231
232 %l2 sera a segunda derivada que aparece a multiplicar pelo ...
      coeficiente de conexao e depende do valor de w(nu).
233 if w==0
234     l2=t2;
235 elseif w==1
236     l2=x2;
237 elseif w==2
238     l2=y2;
239 elseif w==3

```

```

240     l2=z2;
241 else
242     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
243 end
244
245 %C1_1 sera entao essa parte da equacao geodesica.
246 C1_1=C1*l1*l2;
247
248 %Aqui e onde vai entrar aquele T,X,Y e Z que se criou ao inicio.
249 if h==0
250     T=T+(C1_1); %T sera a soma de todos os C1_1 que pertencem a ...
        x^0=t
251 elseif h==1
252     X=X+(C1_1); %X sera a soma de todos os C1_1 que pertencem a ...
        x^1=x
253 elseif h==2
254     Y=Y+(C1_1); %Y sera a soma de todos os C1_1 que pertencem a ...
        x^2=y
255 elseif h==3
256     Z=Z+(C1_1); %Z sera a soma de todos os C1_1 que pertencem a ...
        x^3=z
257 else
258     disp('O valor nao e permitido tem de ser 0,1,2 ou 3.')
259 end
260
261 %final do ciclo for que nos permitia avancar nas diferentes ...
        linhas da matriz combinacoes.
262 end
263
264 %[dWdl] sera o sistema de 8 equacoes de primeira ordem das ...
        equacoes geodesicas.
265 [dWdl]=odeToVectorField(diff(t,2)==-T,diff(x,2)==-X,
266 diff(y,2)==-Y,diff(z,2)==-Z);
267
268 %apresenta o sistema de equacoes num formato compativel com ...
        LaTeX para se possam vizualizar de uma forma melhor.
269 latex(dWdl)
270
271 %Como o ode45 nao faz calculo simbolico temos de converter o ...
        sistema obtido para uma funcao compativel.
272 DWDL = matlabFunction(dWdl,'vars',{'l','Y'});
273
274 %Resolve o sistema de equacoes para a expressao, para as ...
        seguintes condicoes iniciais .
275 y1_0=0.2;

```

```

276 y2_0=sin(0*pi/180);
277 t1_0=0;
278 t2_0=0;
279 x1_0=-0.2;
280 x2_0=cos(0*pi/180);
281 z1_0=0;
282 z2_0=0;
283 wa=[x1_0 x2_0 t1_0 t2_0 y1_0 y2_0 z1_0 z2_0];
284
285 %Intervalo de Integracao
286 numstepl=1000;
287 Δl=0.001;
288 lfinal=numstepl*Δl;
289 lspan=[0:Δl:lfinal];
290
291 %Solver
292 [l,wa] = ode45(DWDL,lspan,wa, []);
293
294 %desenha o grafico. wa(:,1)=x1, wa(:,2)=x2, wa(:,3)=t1, ...
    wa(:,4)=t2, wa(:,5)=y1, wa(:,6)=y2, wa(:,7)=z1 e wa(:,8)=z2.
295 x21=wa(:,1);
296 y21=wa(:,5);
297 plot(x21,y21)
298 axis equal
299 grid on
300 hold on
301
302 %intervalos de x e y para o campo de temperaturas
303 min_x1=min(-0.2);
304 min_y1=min(-0.2);
305 max_x1=max(0.2);
306 max_y1=max(0.2);
307
308 %representacao desses intervalos
309 x11 = linspace(min_x1,max_x1);
310 y11 = linspace(min_y1,max_y1);
311 [X1,Y1] = meshgrid(x11,y11);
312
313 %campo temperatura que e iquivalente a T1
314 Z1=(A1*exp(-gamma*(z0-z11))*exp(-alp*sqrt(((X1-x_21).^2
315 +(Y1-y_21).^2)))+1.5)+273.15;
316 contour(X1,Y1,Z1,30)

```