



# ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire

Departamento de Ciências do Mar

Marta Sofia Portela Roliz Alambre do Sacramento

*Aplicações da equação de Duffing-Holmes à identificação de  
sinais periódicos ténues na presença de ruído*

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais,  
na especialidade de Marinha



Alfeite  
2020





# ESCOLA NAVAL

talant de bifaire



**ASPOF M Marta Sofia Portela Roliz Alambre do Sacramento**  
***Aplicações da equação de Duffing-Holmes à identificação de sinais na  
presença de ruído***

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre**  
**em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha**

**Orientação de: Professor Miguel Ângelo Pereira Bento Moreira**

**Co-orientação de: Professora Ana Luísa Correia**

O Aluno Mestrando



ASPOF M Alambre do Sacramento

O Orientador



Miguel Moreira

**Alfeite**

**2020**



"O caos é uma ordem por decifrar."  
- José Saramago



# Agradecimentos

A presente dissertação de mestrado não poderia chegar a bom porto sem o precioso apoio de algumas pessoas.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao Professor Miguel Moreira, pois mais que orientador desta dissertação, foi a pessoa que motivou o estudo e trabalho ao longo do meu percurso na Escola Naval. Esta dissertação não teria sido possível sem os trabalhos precedentes, realizados em conjunto com a camarada Cecília Almeida e impulsionados pelo professor, que permitiram abrir portas ao "mundo" das equações diferenciais e não só. Em particular durante a realização deste trabalho, que grande parte dele foi realizado em condições extraordinárias, o seu apoio e disponibilidade foram incessantes e constantes.

Agradeço também ao Professor Vincent Debut, ao Professor José Vieira Antunes e à Professora Ana Luísa Correia, a coorientadora desta dissertação, por todos os contributos, apoio, sugestões, disponibilidade para esclarecer dúvidas e interesse demonstrados pelo trabalho.

Gostaria ainda de agradecer ao Doutor Luís Costa Diogo, pelo apoio e incentivo ao longo do meu percurso.

Quero também agradecer à minha família por tudo o que consegui conquistar e pelo apoio incondicional que me deram.

Por fim, gostaria de agradecer a todos aqueles, que de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.



# Resumo

A equação de *Duffing-Holmes* é uma equação diferencial não linear de segunda ordem que apresenta um termo de rigidez não linear polinomial de ordem três e um termo dissipativo de natureza viscosa. Esta equação, introduzida por Georg *Duffing*, em 1918, no contexto do estudo de sistemas com amortecimento não linear, apresenta propriedades físico-matemáticas extremamente interessantes. A equação de *Duffing-Holmes* quando forçada harmonicamente revela a existência de órbitas sub-harmônicas, bifurcações associadas à duplicação do período, ciclos limite, estados periódicos críticos e comportamento caótico. A equação de *Duffing-Holmes* é atualmente utilizada para desenvolver algoritmos de identificação de sinais periódicos tênues na presença de ruído. Os algoritmos desenvolvidos para esse efeito baseiam-se na sensibilidade da resposta desta equação. As aplicações dos algoritmos referidos têm tido lugar em áreas relacionadas com a identificação e análise de assinaturas acústicas de navios, identificação e análise de sinais de GPS, detecção precoce de dano, entre muitas outras. Neste trabalho efetuar-se-á o estudo exploratório desta equação e das aplicações práticas que têm sido desenvolvidas até ao presente. O estudo analítico e as simulações preliminares, servirão para escolher de entre as diversas configurações da equação de *Duffing-Holmes*, aquela que é capaz de realizar a detecção de sinais periódicos acústicos mesmo na presença de ruído. Os resultados das simulações foram satisfatórios, sendo possível concluir que as ferramentas criadas poderão ser usadas futuramente em sinais hidrofônicos acústicos reais.

Palavras chave: Equação de *Duffing-Holmes*, Detecção sinais periódicos, Ruído, Acústica submarina



# Abstract

The *Duffing* equation is a second order non-linear differential equation with a cubic polynomial stiffness term as well as a linear viscous type damping term. This nonlinear equation was introduced by Georg Duffing in 1918 as a result of his work in systems with nonlinear damping, and it has extremely interesting physical and mathematical properties. The *Duffing-Holmes* equation, when forced harmonically reveals the existence of subharmonic orbits, bifurcations associated with the doubling of the period, limit cycles, critical periodic states and chaotic behavior. The *Duffing-Holmes* equation is currently used to develop algorithms for identifying weak periodic signals in the presence of noise. The algorithms developed for this purpose are based on the sensitivity of the response of this equation. The applications of the aforementioned algorithms have taken place in areas related to the identification and analysis of acoustic signatures of ships, identification and analysis of GPS signals, early damage control, among others. In this work we will carry out an exploratory study of this equation and the practical applications that have been developed to date. The analytical study and preliminary simulations, will serve to choose, from among the different configurations of the *Duffing-Holmes* equation, the one that is capable of detecting periodic acoustic signals even in the presence of noise. The results of the simulations were satisfactory, and it is possible to conclude that the tools created may be used in the future in real acoustic signals.

Key words: *Duffing-Holmes* Equation, Periodic Signal Detection, Noise, Submarine Acoustics



# Índice Geral

Epígrafe	I
Agradecimentos	III
Resumo	V
Abstract	VII
Índice Geral	IX
Índice de Figuras	XI
Índice de Tabelas	XV
Lista de Acrónimos e Abreviaturas	XVII
Prefácio	XIX
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Enquadramento teórico</b>	<b>5</b>
2.1 Sistemas dinâmicos . . . . .	6
2.2 Caracterização do regime evolutivo . . . . .	10
2.2.1 Caos . . . . .	11
2.2.2 Técnicas de deteção de regimes caóticos . . . . .	12
2.3 Determinação de soluções de equações diferenciais . . . . .	16
2.3.1 Métodos numéricos . . . . .	16
2.3.2 Métodos de perturbação . . . . .	17
2.3.3 Métodos assintóticos . . . . .	19
2.3.4 Métodos homotópicos . . . . .	19
2.4 Análise espectral . . . . .	19
2.5 Ruído . . . . .	22

<b>3</b>	<b>A equação de <i>Duffing-Holmes</i></b>	<b>25</b>
3.1	A viga em flambagem de Moon ( <i>Moon's Beam</i> ) . . . . .	25
3.2	Adimensionalização da equação . . . . .	27
3.3	Estudo analítico . . . . .	29
3.4	Estudo paramétrico das principais configurações da equação de <i>Duffing</i> . . . . .	42
3.4.1	Configuração de <i>Moon-Holmes</i> . . . . .	42
3.4.2	Configuração de <i>Rayleigh</i> . . . . .	50
3.4.3	Configuração de <i>Patil e Mallick</i> . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Aplicações da equação de <i>Duffing</i> à detecção de sinais</b>	<b>59</b>
4.1	Análise da influência do amortecimento . . . . .	61
4.2	Análise da influência da rigidez não linear . . . . .	65
4.3	Estudo numérico exploratório da capacidade de detecção com ruído . . . . .	68
4.4	Técnica de transformação de escala do tempo . . . . .	73
4.5	Formulação do algoritmo de detecção . . . . .	75
4.6	Validação do algoritmo . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>85</b>
5.1	Conclusões Gerais . . . . .	85
5.2	Trabalhos Futuros . . . . .	86
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>
	<b>A Produção científica precedente</b>	<b>93</b>

# Índice de Figuras

2.1	À esquerda está representado o ponto fixo, no meio o ciclo limite e à direita o atrator de <i>torus</i> . . . . .	9
2.2	Órbitas do plano de fase para a equação de <i>Duffing</i> não forçada e não amortecida. . . . .	10
2.3	Órbitas dos mapas de fase das soluções da equação (2.1) com $w = 1.2$ e $c = 0.1$ . À esquerda está representado uma órbita periódica para $F = 0.27$ , e à direita um movimento caótico para $F = 0.30$ . . . . .	13
2.4	Espetros de frequência de soluções da equação (2.1) com $w = 1.2$ e $c = 0.1$ , em que à esquerda é possível observar um comportamento periódico (para $F = 0.27$ ) e à direita um comportamento caótico (para $F = 0.30$ ). . . . .	14
2.5	Mapas de Poincaré das soluções da equação (2.1) com $w = 1.2$ e $c = 0.1$ , em que à esquerda é possível observar um comportamento periódico (para $F = 0.27$ ) e à direita um comportamento caótico (para $F = 0.30$ ). <sup>*</sup> . . . . .	15
2.6	<i>PSD</i> do ruído Gaussiano branco (em cima) e ruído cor de rosa (em baixo). . . . .	24
3.1	Moon's beam . . . . .	26
3.2	Curvas de resposta de frequência: variação do fator de amplificação relativamente à frequência de excitação para diferentes valores do fator de amortecimento. . . . .	34
3.3	Diagrama de fase em $[x, \dot{x}] = [0, 0.01]$ a esquerda e em $[x, \dot{x}] = [0, -0.01]$ a direita. . . . .	35
3.4	<i>Backbone curves</i> : variação da amplitude relativamente à frequência de excitação para diferentes valores da taxa de amortecimento. . . . .	38
3.5	<i>Backbone curve</i> : variação da amplitude relativamente à frequência de excitação para o fator de amortecimento $\zeta = 0.2$ . . . . .	39

3.6	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.02\frac{dy}{d\tau} + y^3 = 0.8 \cos(\tau)$ (Oscilador de <i>Ueda</i> ): resposta periódica. . . . .	40
3.7	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.02\frac{dy}{d\tau} + y^3 = 1.3 \cos(\tau)$ (Oscilador de <i>Ueda</i> ): resposta periódica. . . . .	41
3.8	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.02\frac{dy}{d\tau} + y^3 = 1.4 \cos(\tau)$ (Oscilador de <i>Ueda</i> ): resposta caótica. . . . .	41
3.9	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.3 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): com período transiente. . . . .	43
3.10	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.3 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): ciclo limite. . . . .	44
3.11	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.4 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): pontos fixos em $x = -1$ e $x = 1$ . . . . .	45
3.12	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.6 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): movimento caótico e <i>strange attractor</i> (secções de Poincaré). . . . .	45
3.13	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.825 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): movimento caótico. . . . .	46
3.14	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.828 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): comportamento periódico. . . . .	47
3.15	$\frac{d^2y}{d\tau^2} - -y + y^3 = 0.1 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> conservativa): comportamento caótico. . . . .	48
3.16	$\frac{d^2y}{d\tau^2} - y + y^3 = 5 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> conservativa): comportamento caótico. . . . .	49
3.17	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} + y - y^3 = 0.1 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Rayleigh</i> ): órbita periódica simétrica. . . . .	50
3.18	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} + y - y^3 = 0.591 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Rayleigh</i> ): duplicações de período. . . . .	51
3.19	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + y - y^3 = 0.01 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Rayleigh</i> conservativa): ciclo limite. . . . .	52
3.20	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + y - y^3 = 0.1 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Rayleigh</i> conservativa): duplicações de período. . . . .	53
3.21	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} + y + y^3 = 0.1 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Patil e Mallick</i> ): estado periódico. . . . .	54
3.22	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} + y + y^3 = 0.05 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Patil e Mallick</i> ): estado periódico. . . . .	55
3.23	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + y + y^3 = 0.05 \cos(\tau)$ (Configuração <i>Patil e Mallick</i> conservativa): estado periódico. . . . .	56
4.1	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F^* \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): amplitude de excitação em que ocorre a mudança de estado em relação ao fator de amortecimento $\zeta$ . . . . .	62

4.2	Gráfico de sensibilidade ao ruído branco para a configuração <i>Moon-Holmes</i> : $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F \cos(\tau) + S(\tau)$ . . . . .	63
4.3	Gráfico de sensibilidade ao ruído cor de rosa para a configuração <i>Moon-Holmes</i> : $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F \cos(\tau)$ . . . . .	65
4.4	Curvas de resposta de amplitude para diferentes valores de amortecimento. O valor usado para contruir as curvas foi $F = 0.3$ . . . . .	66
4.5	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + \gamma y^3 = F \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): sensibilidade ao ruído cor de rosa para $\gamma = 0.1$ , $\gamma = 1$ e $\gamma = 10$ . . . . .	67
4.6	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.418 \cos(\tau) + S(\tau)$ : alteração do limiar de passagem a estado periódico com a adição de 100% de ruído branco Gaussiano, $F^* = 0.418$ . . . . .	69
4.7	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.45 \cos(\tau) + S(\tau)$ : alteração do limiar de passagem a estado periódico com a adição de 100% de ruído cor de rosa, $F^* = 0.45$ . . . . .	70
4.8	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F^* \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): Níveis de ruído branco Gaussiano máximo. . . . .	71
4.9	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F^* \cos(\tau)$ (Configuração <i>Moon-Holmes</i> ): Níveis de ruído branco Gaussiano e ruído cor de rosa máximos. . . . .	72
4.10	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 9.75 \cos(5\tau)$ : simulação com sinal sintético com 300% de ruído cor de rosa com presença de componentes harmónicas. . . . .	79
4.11	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 9.75 \cos(5\tau)$ : simulação com sinal sintético com 500% de ruído cor de rosa com presença de componentes harmónicas. . . . .	80
4.12	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{5\tau} - y + y^3 = 0.1 \cos(\tau)$ : simulação com sinal sintético com presença de componentes harmónicas (caso falso negativo). . . . .	81
4.13	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0$ : simulação com sinal sintético com 300% de ruído cor de rosa sem presença de componentes harmónicas. . . . .	82
4.14	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0$ : simulação com sinal sintético com 600% de ruído cor de rosa sem presença de componentes harmónicas. . . . .	83



# Índice de Tabelas

3.1	Característica das expressões da solução e do ponto de equilíbrio em $\frac{d^2y}{d\tau^2} + sy = 0$ . . . . .	30
3.2	Característica das expressões da solução e do ponto de equilíbrio do sistema não linear: $\frac{d^2y}{d\tau^2} + sy + \gamma y^3 = 0$ . . . . .	31
4.1	$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.1\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F \cos(\Omega_0\tau)$ : resposta à mudança de frequência de excitação. . . . .	74



# Lista de Acrónimos e Abreviaturas

DEMON	<i>Detection of Envelope Modulation on Noise</i>
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
HAM	<i>Homotopy Analysis Method</i>
IFOHAM	<i>Iterative First Order Homotopy Analysis Method</i>
PDL	<i>Program Design Language</i>
PSD	<i>Power Spectrum Diagram</i>
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>



# Prefácio

Este trabalho encontra-se organizado por capítulos, iniciando-se no capítulo 1 com uma introdução ao problema que irá ser estudado. Depois de apresentar a equação em estudo e a algumas das suas aplicações, nomeadamente a potencialidade para a deteção de sinais fracos, são referidos os principais trabalhos desenvolvidos e a sua importância em áreas chave da Marinha.

No capítulo 2, são abordados os principais fundamentos teóricos que serão essenciais para a compreensão dos fenómenos estudados nos capítulos seguintes. São destacados alguns conceitos relacionados com os sistemas dinâmicos, a caracterização do regime evolutivo da equação, alguns métodos de determinação de soluções de equações diferenciais (como os métodos numéricos, os perturbativos, os assintóticos e os homotópicos). Destaca-se ainda neste capítulo alguns conceitos sobre análise espectral e por fim sobre o ruído.

No capítulo 3 é feita uma introdução ao problema. Este começa por definir uma das formas da equação de *Duffing*, a equação de *Duffing-Holmes*, com o exemplo prático da viga em flambagem de Moon (*Moon's beam*). Segue-se, o estudo das principais configurações da equação de *Duffing*, no âmbito da deteção de sinais fracos.

No capítulo 4, é abordada a análise dos parâmetros da equação, o estudo numérico que resulta nas simulações que são apresentadas, estas realizadas sem e com a adição de ruído, discutindo-se depois os resultados destas. É também apresentada a metodologia do algoritmo de deteção e a validação do mesmo com sinais sintéticos.

Por fim, as conclusões e as sugestões de trabalho futuro são apresentadas no capítulo 5, encontrando-se em apêndice a produção científica precedente a este trabalho.



# Capítulo 1

## Introdução

Um dos efeitos da criação de algo por um autor é que, a sua criação possa transportar ao longo dos tempos, o seu legado, neste caso, a equação de *Duffing-Holmes* combina o legado de dois autores. Esta equação foi introduzida inicialmente por Georg Duffing em 1918, na sequência de um estudo sobre sistemas com amortecimento não linear. Tal como descrito na sua biografia de 1994 (Rimrott, 1994), Georg Wilhelm Christian Caspar Duffing, nascido a 11 de Abril de 1861 (em Baden, Alemanha) não era um académico, mas sim um engenheiro que se apoiava no seu trabalho exploratório para construir e testar as suas teorias.

Desde os seus primeiros anos de vida escolar, foi reconhecido a Georg Duffing um dom para a matemática e para a música, tendo ingressado posteriormente nos estudos superiores na área da matemática e tendo seguidamente tirado um mestrado em engenharia. Em 1910, Duffing foi convidado para trabalhar como engenheiro na empresa *Westinghouse*, nos Estados Unidos da América, onde conseguiu juntar dinheiro para regressar ao seu país, em 1913, tornando-se um inventor e cientista por conta própria.

Quando a primeira Grande Guerra eclodiu, Duffing estava a trabalhar em vibrações, freios, engrenagens e motores, realizando paralelamente experiências em laboratório e patenteando as suas invenções à medida que estas surgiam. Já em 1917, dedicou-se ao estudo das vibrações descritas por equações diferenciais particulares, que levou à escrita do livro no qual surgiu a célebre equação, cujo título traduzido é "Oscilações forçadas com frequência natural variável e o seu significado técnico", publicado na sua língua nativa em 1918 por *Vieweg & Sohn*. O trabalho de Duffing apresentou ainda, de forma sistemática, soluções aproximadas para as equações não lineares e, em especial, soluções exatas, como é o caso da solução do pêndulo não linear (Ivana Kovacic, 2011).

A equação de *Duffing* é uma equação diferencial não linear de segunda

ordem, que apresenta um termo dissipativo de natureza viscosa e tem uma não-linearidade cúbica. Esta força cúbica despoleta um conjunto de fenômenos complexos, continuando a preservar uma forma matemática simples e baixa dimensionalidade, tornando-a acessível à exploração computacional e, até um certo ponto, ao estudo analítico. Esta equação descreve um oscilador simples que pode exibir saltos de amplitude e fase quando a frequência do termo de excitação é tomada como um parâmetro que está a variar, tendo ainda a capacidade de apresentar um comportamento caótico com uma variedade de propriedades associados a este.

Devido a estas propriedades físico-matemáticas, a equação de *Duffing* foi estudada por outros, nomeadamente por Philip John Holmes, engenheiro e professor de Engenharia Mecânica e Aeroespacial na Universidade de *Princeton*, que em 1979 juntamente com Francis Moon, publicou um artigo (Moon and Holmes, 1979) onde foi introduzida a equação de *Duffing*, usada para modelar o comportamento vibratório de uma viga excitada por forças magnéticas, sistema este designado pelo *Moon's beam*, que será desenvolvido mais à frente.

As aplicações desta equação têm vindo a surgir em áreas relacionadas com a deteção precoce de danos, como em (Hu and Wen, 2003) que aplica o oscilador de *Duffing* para extrair as características dos sinais precoces de falha mecânica, (Liu et al., 2017) que usa o método de ressonância vibracional variável para melhorar os sinais fracos que advêm dos rolamentos das máquinas de rotação. Ao nível da criação de algoritmos de deteção de sinais de GPS (*Global Positioning System*) fracos (Qin et al., 2010), (Huang et al., 2009). Também, em áreas relacionadas com a acústica como é o caso de (Liu and Liu, 2011) que trabalhou na deteção de sinais fracos aplicado aos sistemas de telemetria acústica de fundo de poços, entre outros. E, aquele que é mais interessante no âmbito em estudo, a análise de assinaturas hidrofónicas de navios aplicado à identificação do número de pás de hélices. Esta aplicação, explorada em (Wang et al., 2016), define inicialmente que o ruído que é irradiado por um navio, é modulado a uma taxa que é ditada por alguns parâmetros das hélices e do motor (número de pás e velocidade de rotação). A avaliação dessa modulação fornece informações sobre o navio, como a frequência de rotação das hélices, que pode ser usada para a classificação do navio. O método para estimar a modulação em frequência é conhecida por DEMON (*Detection of Envelope Modulation on Noise*), foi criado em 1988 (Lourens, 1988) e é usado atualmente. O método de DEMON convencional, é usado para restringir o ruído e melhorar a relação sinal-ruído, ou SNR (*Signal to Noise Ratio*). No entanto, se a frequência do ruído e a frequência do sinal forem próximos, o sinal útil pode ser danificado quando se restringe o ruído. Assim, de forma a colmatar esta limitação, tem-se desenvolvido um

crescente interesse no controlo de sistemas não-lineares caóticos, onde um sinal fraco é detetado através da transição de um estado caótico para um estado periódico.

Ao longo deste trabalho o oscilador de *Duffing* será estudado no âmbito da deteção de sinais e propõe-se:

- Elaborar uma pesquisa bibliográfica ancorada nas equações de *Duffing* e *Duffing-Holmes*, que aborde as metodologias de estudo das equações diferenciais não lineares, estudo qualitativo de equações diferenciais não-lineares, sistemas dinâmicos e aplicações da equação de *Duffing-Holmes* à identificação de sinais na presença de ruído;
- Realizar o estudo paramétrico da equação de *Duffing-Holmes* destinado à caracterização do domínio adequado à sua utilização para deteção de sinais fracos na presença de ruído;
- Desenvolver metodologias para utilizar a resposta do sistema *Duffing-Holmes* na identificação de sinais fracos de frequências arbitrárias;
- Estudar e testar numericamente ferramentas matemáticas para a caracterização dinâmica da resposta de sistemas não lineares;
- Validar as metodologias desenvolvidas recorrendo a sinais sintéticos com interesse prático;
- Estabelecer uma metodologia validada e baseada na equação *Duffing-Holmes* com aplicabilidade viável no contexto da Marinha destinada a tarefas de identificação de sinais fracos na presença de ruído.

Assim, a importância do estudo desta matéria reside no elevado potencial de aplicação em identificação de sinais em áreas chave da atividade da Marinha, tais como acústica submarina, navegação eletrónica e deteção precoce de dano (manutenção preditiva), atividades estas de elevado impacto económico e operacional.

Nestas circunstâncias, a criação e a preservação de conhecimento neste contexto é indiscutivelmente importante, assim como a possibilidade de desenvolver uma metodologia de identificação de aplicabilidade prática que seja potencialmente mais eficiente e confiável em termos computacionais do que as existentes, à resolução dos inúmeros problemas de identificação que se colocam quotidianamente na Marinha.



# Capítulo 2

## Enquadramento teórico

Este capítulo, servirá para sustentar o estudo que será realizado no Capítulo 3, pelo que se inicia com a apresentação da equação de *Duffing* e os seus constituintes, passando para alguns conceitos base no estudo de sistemas dinâmicos, a caracterização do regime evolutivo do oscilador de *Duffing*, detalhadamente o regime caótico e as técnicas de deteção deste tipo de regime. Introduz-se ainda algumas técnicas de determinação de soluções de equação diferenciais não lineares, conceitos sobre análise espectral e por fim sobre o ruído.

A equação de *Duffing* tem a seguinte forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k_1x + k_2x^3 = F(t) \quad (2.1)$$

Interpretando (2.1) à luz da mecânica,  $x = x(t)$  representa o deslocamento no tempo  $t$ ,  $\frac{dx}{dt}$  é a primeira derivada de  $x$  em ordem a  $t$ , ou seja, a velocidade, e  $\frac{d^2x}{dt^2}$  é a derivada de segunda ordem a  $t$ , ou seja a aceleração. Em que as constantes  $m, c, k_1$  e  $k_2$  representam as seguintes grandezas:

- $m$  - massa;
- $c$  - o coeficiente de amortecimento<sup>1</sup>;
- $k_1x + k_2x^3$  - a força de restituição, em que o termo  $k_1x$  representa a componente linear e o termo  $k_2x^3$  representa a componente não linear da rigidez:

– Quando  $k_2 > 0$ , o sistema apresenta uma rigidez em "enrijecimento";

---

<sup>1</sup>O amortecimento é uma influência interna ou externa ao sistema oscilatório, que tem o efeito de reduzir, restringir ou impedir a sua oscilação. Este é produzido por processos que dissipam a energia, armazenada na oscilação (Sunday, 2017).

– Quando  $k_2 < 0$ , o sistema apresenta uma rigidez negativa com "amolecimento";

- $F(t)$  representa uma força externa de excitação.

Mostra-se que a Equação (2.1) descreve o movimento de uma partícula no chamado duplo vale<sup>2</sup> e é uma das equações diferenciais ordinárias não lineares mais significativas, tendo em conta as diversas aplicações já referidas.

O estudo paramétrico desta equação, realizada por diversos autores (como (Ivana Kovacic, 2011) (Liu and Liu, 2011), (Liao, 2012), (Cveticanin, 2013), entre outros) passa pela compreensão da sua sensibilidade às condições iniciais e pelo estudo da influência dos seus parâmetros, na resposta e no estado do sistema.

## 2.1 Sistemas dinâmicos

O termo dinâmico refere-se a um fenómeno cuja configuração evolui ao longo do tempo, constituindo assim uma série de eventos num processo de evolução (Luenberger, 1979). Muitos sistemas dinâmicos podem ser representados por equações diferenciais, pois estas providenciam uma estrutura para representar laços cronológicos entre as variáveis descritivas do fenómeno e as respetivas taxas de variação.

As equações diferenciais podem ser lineares ou não-lineares. As equações lineares são apenas de primeira ordem, ou seja, podem representar linhas retas. Enquanto que as equações não lineares têm ordens superiores a 2 e podem representar curvas num gráfico. Em qualquer dos casos a possibilidade de determinar soluções analíticas de equações diferenciais só ocorre num conjunto muito particular e restrito de casos. No entanto, contrariamente às equações não-lineares, a teoria das equações lineares constitui um corpo completo e atualizado de conhecimento apto a estudar quantitativamente e a prever rigorosamente as respostas deste tipo de equações. As equações diferenciais não lineares, apresentam propriedades complexas cujo estudo exige, em geral, a utilização de técnicas qualitativas. A existência e a unicidade de soluções que satisfaçam certas condições iniciais e/ou fronteiras são problemas para os quais não existe uma teoria aplicável a todas as situações. A sensibilidade às condições iniciais e a pequenas perturbações, constituem um ingrediente fundamental na resposta exibida por este tipo de equações e não

---

<sup>2</sup>Duplo vale é a energia potencial de um sistema representado em função do deslocamento. Este sistema pode ter vários mínimos locais ou máximos, no caso em que há um mínimo local, é chamado de vale simples, se tiver dois mínimos locais, é chamado de duplo vale (Ivana Kovacic, 2011).

é alheia ao comportamento dinamicamente complexo das correspondentes respostas. A ocorrência de respostas caóticas, respostas que exibem ciclos limite, entre outras, está reservada a equações não-lineares.

Um sistema dinâmico não-linear é definido em (Hilborn, 1994), como um sistema no qual as variáveis dinâmicas que descrevem a propriedades do sistema (como por exemplo a posição, velocidade, aceleração, pressão, etc.) integram a descrição do sistema numa forma não linear.

Nos sistemas não-lineares, o estabelecimento da existência e da unicidade de soluções, não só não é tarefa elementar, como nem sempre tal propriedade se verifica. Muitos sistemas não lineares apresentam uma infinidade de soluções diferentes. Mais ainda, a obtenção duma solução que satisfaça certas condições, frequentemente só é válida numa região restrita e limitada (Hirsch et al., 2004).

O estudo dos sistemas dinâmicos não lineares, iniciou-se e consolidou-se nos séculos XIX e XX. O desenvolvimento de abordagens analíticas foi efetuado por Lord Rayleigh (1877), que materializou através da obra (*The Theory of Sound*), a teoria de corpos sujeitos a vibrações que ainda hoje é adotada. Esta obra juntou o trabalho de Galilei nas oscilações do pêndulo livre (1638), de Isaac Newton sobre formulação das leis de movimento (1696), de Robert Hooke, sobre formulação da relação entre tensão e deformação em corpos elásticos (1678) e a solução subsequente da equação diferencial para uma viga sujeita a vibrações de Leonard Euler e Daniel Bernoulli (1753). Mais tarde, Duffing (1918), Van de Pol (1928 com o oscilador de *Van der Pol*), Lyapunov (1892 com a teoria da estabilidade) e mais recentemente Edward Lorenz (em 1961 com a teoria do caos), deram origem a muitas das técnicas de análise e compreensão destes sistemas.

Os sistemas dinâmicos podem ainda dividir-se em duas categorias, os autónomos e os não-autónomos. Os autónomos são sistemas dinâmicos contínuos descritos por um conjunto de equações diferenciais ordinárias nas quais a variável independente não aparece explicitamente. Se o tempo aparecer explicitamente, o sistema dinâmico é considerado não-autónomo (Ivana Kovacic, 2011). Toda a teoria e resultados fundamentais são estabelecidos para sistemas autónomos. O transporte de muitos resultados para sistemas não autónomos, exige a adição de uma ou mais equações, que resultam da necessidade de efetuar mudanças de variável para tornar os sistemas não autónomos em sistemas autónomos.

O estudo de um sistema dinâmico envolve a utilização de diversas ferramentas, das quais se destaca a análise de diagramas de fase. Estes representam a evolução, ao longo do tempo, da trajetória de um sistema dinâmico contínuo. No caso dos sistemas dissipativos, verifica-se, inicialmente, um movimento transitório antes de se estabelecer assintoticamente numa solução

estável, o que está relacionado com a presença de um atrator. Os atratores são formas geométricas que caracterizam o comportamento que um sistema é atraído. Outra designação que pode ser dada a um atrator é de estado estacionário (Crutchfield et al., 1986).

O tipo mais simples de um atrator é um ponto fixo ou ponto de equilíbrio, sendo  $\hat{x}$  um qualquer ponto de um sistema dinâmico dado por  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , se  $f(\hat{x}) = 0$ , então  $\hat{x}$  é um ponto fixo, ilustrado na Figura (2.1). Os pontos fixos podem ter diversas caracterizações, que dependem dos valores próprios<sup>3</sup> da matriz Jacobiana (abordada mais à frente). Assim, um ponto fixo diz-se:

- Hiperbólico- se nenhum dos valores próprios tiver parte real zero;
- Nó estável- se todos os valores próprios tiverem parte real negativa;
- Nó instável- se pelo menos um dos valores próprios tiver uma parte real positiva;
- *Saddle point*- representado na Figura (2.2), verifica-se quando pelo menos um valor próprio tem uma parte real negativa e uma parte real positiva.

Outro atrator é o ciclo limite, que forma um *loop* fechado no espaço de fase e é ilustrado na (2.1). Um ciclo limite, descreve oscilações estáveis, como o batimento de um coração. As oscilações compostas, ou comportamentos quasi-periódicos (que são oscilações que contém duas ou mais frequências incomensuráveis, que mantêm uma relação irracional entre si) correspondem a um atrator de *torus*, também representado na Figura (2.1).

Por outro lado, a característica fundamental do espaço de fase com três ou mais dimensões, que permite um comportamento caótico, é a capacidade das trajetórias permanecerem dentro de algumas regiões limitadas ao se entrelaçarem e envolverem umas nas outras, sem se intersectarem e sem se repetirem. As trajetórias associadas a este comportamento, vão ser estranhas, daí que tais atratores tenham o nome de *strange attractors* (atratores estranhos). Se as trajetórias do atrator estranho demonstrarem uma divergência exponencial para órbitas próximas, diz-se que o atrator é caótico.

---

<sup>3</sup>Valor próprio é um valor particular de um determinado parâmetro, para o qual uma equação diferencial possui uma função própria.

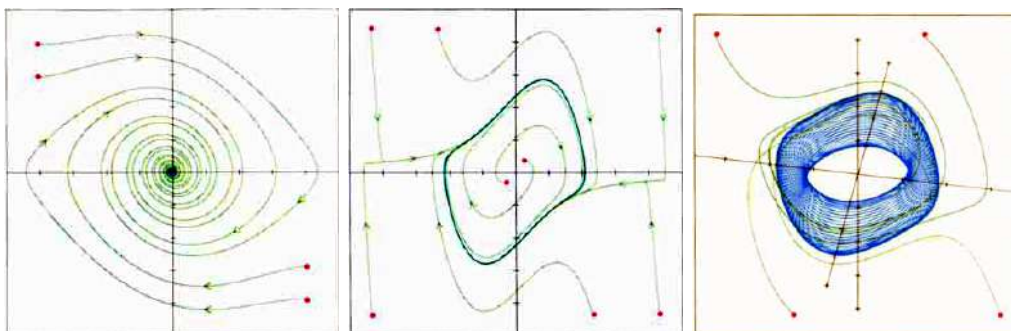


Figura 2.1: À esquerda está representado o ponto fixo, no meio o ciclo limite e à direita o atrator de *torus*.\*

\*Retirado de Crutchfield, 1986.

A matriz Jacobiana, é uma matriz de derivadas parciais de primeira ordem de uma função. Representa a melhor aproximação linear para uma função diferenciável perto de um determinado ponto. Suponhamos que  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função que experimenta uma transformação do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}^m$ . Em que  $m$  representa o número de funções de valor real  $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$  (Thomsen, 2003). Se as derivadas parciais de todas essas funções existem, elas podem ser organizadas numa matriz de  $m$  linhas e  $n$  colunas:

$$J_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A matriz Jacobiana é útil no contexto dos sistemas dinâmicos, pois pode ser usada para representar os mesmos, fornecendo uma melhor aproximação local da função e, pelo facto de ser uma matriz, permite representar funções com dimensões superiores.

Em 1963, Edward Lorenz descobriu um exemplo concreto de um sistema de baixa dimensão que exibiu um comportamento complexo. Motivado pelo desejo de entender a imprevisibilidade do clima, começou a estudar as equações de movimento para o fluxo de fluidos e, simplificando-as, obteve um sistema com apenas três graus de liberdade. No entanto, o sistema comportou-se de uma forma aparentemente aleatória que não pôde ser adequadamente caracterizada por nenhum dos três atratores conhecidos. O atrator que ele observou, que agora é conhecido como atrator de *Lorenz*, foi o primeiro exemplo de um atrator caótico (Crutchfield et al., 1986).

O caos pode ser um fenómeno vantajoso ou indesejável, no problema em estudo considera-se essencial, visto que num dos estudos publicados mais

recentemente (Shangbin et al., 2019), terem sido usadas as características caóticas do sistema de *Duffing* bidimensional para identificar a frequência de sinais fracos.

## 2.2 Caracterização do regime evolutivo

No que concerne ao regime evolutivo de um sistema que pode ser modelado pela equação de *Duffing*, este tem sido alvo de diversos estudos, nomeadamente (Ji et al., 2014), (Wang et al., 2016), (Qin et al., 2010) e (Zhihong and Shaopu, 2015), que descreveram de forma sequencial, como este evolui, sendo unânime a ideia que o estado móvel do sistema muda regularmente com a amplitude da força de excitação periódica. Isto é, quando a amplitude de excitação  $F$  é pequena, o ponto de fase exibe uma oscilação periódica em torno do ponto central. Quando  $F$  aumenta gradualmente, o sistema é caracterizado por determinadas mudanças, documentadas na seguinte sequência: órbita homoclínica; bifurcação associada à duplicação de período; estado caótico; estado crítico e por fim um estado periódico em larga escala. Nesta secção iremos dedicar-nos ao estudo destes diferentes estados.

Começando pela órbita homoclínica, esta caracteriza-se por ter uma trajetória de fase que une um ponto de equilíbrio ou ponto fixo a si mesmo (Ivana Kovacic, 2011), ou seja, trata-se de cruzamentos transversais relativamente a um *saddle point*, que podem ser estáveis ou instáveis, apesar do *saddle point*, por si só, ser sempre estável. Estas órbitas são, para além disto, caracterizadas por se formarem em volta de pontos, os chamados poços de potencial, que na Figura (2.2) são os pontos  $x = -1$  e  $x = 1$ .

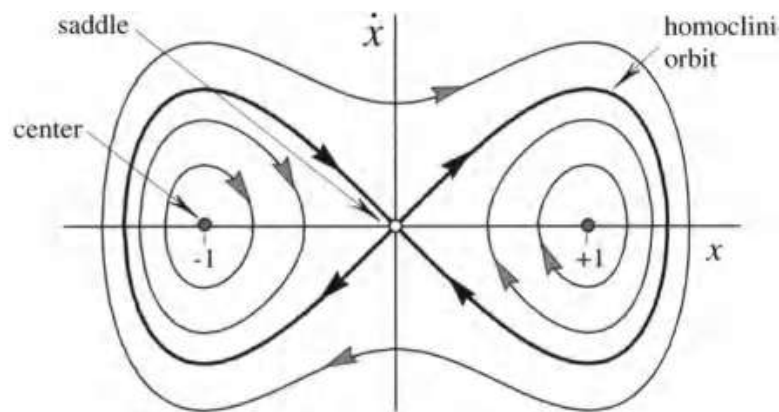


Figura 2.2: Órbitas do plano de fase para a equação de *Duffing* não forçada e não amortecida.\*

\*Retirado de Thomsen, 2003.

Relativamente à bifurcação, trata-se de uma mudança qualitativa na topologia do diagrama de fase, que ocorre durante a variação, quase estática, de um parâmetro de controlo, sendo que essa mudança permite detetar o valor crítico desse parâmetro. Um dos tipos de bifurcação mais comuns nos sistemas dinâmicos, capazes de exibir um comportamento caótico, é a bifurcação *pitchfork*. Nesta, os pontos fixos ou são destruídos ou criados novos enquanto um parâmetro do sistema é variado e é produzida quando o sinal de um valor próprio real da matriz Jacobiana é alterado (Ivana Kovacic, 2011).

O estado crítico é caracterizado por ser um estado transitório, em que as mudanças, arbitrariamente pequenas, nos parâmetros do sistema podem fazer com que o caráter da resposta mude drasticamente, como o caso de passar de um estado caótico, que será discutido de seguida, para um estado periódico. O movimento  $x = x(t)$  diz-se periódico se existir uma constante  $T$  tal que  $x(t) = x(t + T)$ , para todo o valor de  $t$ . Sendo  $T$ , o período da função, isto é, o tempo necessário para a função concluir um ciclo completo.

### 2.2.1 Caos

Depois dos trabalhos realizados no âmbito do estudo de sistemas não lineares, Cartwright e Littlewood (1945) observaram um comportamento aleatório restrito, que agora é chamado de caos. Este pode ser definido como um aparente comportamento complexo, do que se pode considerar simples, em sistemas, digam-se "bem comportados". Aparente porque subjacente a este comportamento errático e quase que aleatório, como se tratasse do comportamento de um sistema influenciado fortemente por ruído exterior, está uma ordem determinada, de certo modo, pelas equações que descrevem o sistema.

O caos determinístico obedece a equações diferenciais determinísticas, que podem ter uma componente conservativa ou dissipativa. No entanto, para que um sistema exiba um comportamento caótico é necessário que seja descrito por pelo menos três equações diferenciais (Gregory L. Baker, 1996). A equação de *Duffing*, não-autónoma, isto é, excitada externamente por uma força que depende do tempo ( $F(t)$ ), pode ser transformada, com uma mudança de variável apropriada, num sistema de três equações diferenciais não lineares autónomas, podendo assim exibir comportamento caótico.

De forma geral são necessários três componentes para determinar o comportamento de um sistema:

- As equações de evolução temporal;
- Os valores dos parâmetros que descrevem o sistema;
- Condições iniciais.

É importante referir ainda o caos que deriva de sistemas Hamiltonianos. Estes são sistemas dinâmicos cujas equações de movimento podem ser derivadas de uma função escalar, chamada função hamiltoniana  $H(q_i, p_i, t)$ , onde  $i = 1, \dots, n$ , e  $n$  representa o grau de liberdade,  $q_i$  são coordenadas generalizadas,  $p_i$  são momentos generalizados e  $t$  é o tempo. A propriedade mais específica destes sistemas é que conservam a energia total  $H$ , que permanece constante ao longo das suas trajetórias. É importante notar que existem sistemas que "economizam" energia, mas não são hamiltonianos. Assim, conservar energia não é a única propriedade chave dos sistemas hamiltonianos. Além disso, os sistemas hamiltonianos não têm atrito e as equações que os caracterizam são reversíveis no tempo.

O caos, tem uma potencial aplicação na deteção de sinais fracos, devido às propriedades sensíveis a determinado sinal e imunes ao ruído ao mesmo tempo. Uma pequena perturbação de um parâmetro, pode causar uma mudança essencial do estado num sistema caótico não linear. Esta mudança é designada de bifurcação, conceito já abordado. Depois deste momento, o comportamento do sistema divide-se em duas regiões: uma acima e outra abaixo do valor do parâmetro onde a mudança ocorre (Hilborn, 1994).

A literatura (Hu and Wen, 2003) propõe que o limite da bifurcação, pode ser usado para detetar sinais fracos, que no caso referido correspondem a sinais precoces de falhas mecânicas. Tal é possível, pois foi observado que se a frequência do sinal a ser detetado for igual à do sinal de referência irá, conseqüentemente, ocorrer uma mudança de fase, apesar da amplitude ser pequena, o que faz com que o sistema passe de um estado caótico para um estado periódico em larga escala.

### 2.2.2 Técnicas de deteção de regimes caóticos

De seguida, serão apresentadas algumas ferramentas para detetar a presença de regimes caóticos, sendo estas: os diagramas de fase, os espetros de frequência, os mapas de Poincaré e os expoentes de Lyapunov. Todas estas ferramentas foram utilizadas no trabalho, à exceção dos expoentes de Lyapunov, mas por se considerar uma técnica cada vez mais utilizada neste campo e com capacidade de ser aplicada no futuro, será também abordado.

#### Diagramas de fase

A análise dos chamados diagramas ou mapas de fase, permite-nos perceber algumas das características gerais das curvas de solução, tais como os pontos de equilíbrio (Feng et al., 2006). Os mapas de fase, também chamados de planos de fase, são projeções do espaço de fase, que abrangem duas variáveis

de estado arbitrárias (geralmente uma variável de posição e outra de velocidade). Permitindo assim, distinguir se o sistema se encontra no movimento periódico, quasi-periódico ou não periódico (como é o caso do movimento caótico).

A equação de *Duffing* (2.1), pode ser escrita como três equações de primeira ordem nas três variáveis de estado  $(x, y, z)$ , sendo  $y = \frac{dx}{dt}$  e  $z = \frac{dy}{dt}$ , então o plano  $(x, y)$  é um plano de fase. Em (Thomsen, 2003), é afirmado que o movimento periódico se revela como uma órbita fechada no plano de fase, enquanto que o movimento caótico e quasi-periódico preenche grande parte da área do plano, tal como pode ser verificado na Figura (2.3).

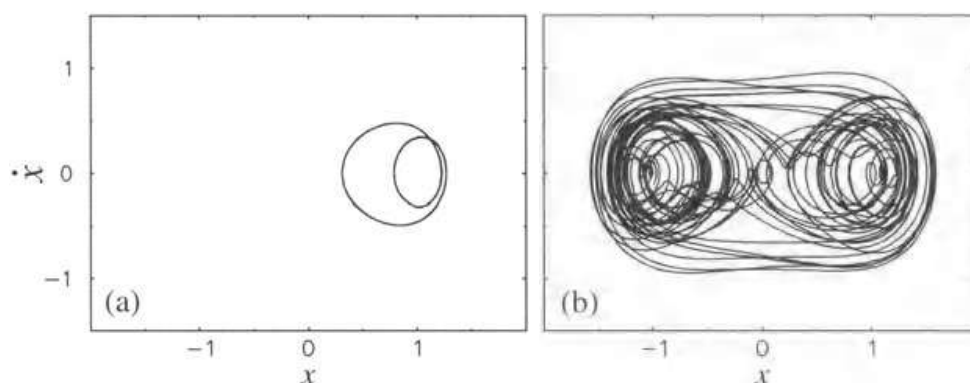


Figura 2.3: Órbitas dos mapas de fase das soluções da equação (2.1) com  $w = 1.2$  e  $c = 0.1$ . À esquerda está representado uma órbita periódica para  $F = 0.27$ , e à direita um movimento caótico para  $F = 0.30$ .\*

\*Retirado de Thomsen, 2003.

## Espetro de frequências

O espetro de frequências é a análise de uma determinada variável no domínio da frequência e é uma ferramenta muito útil para distinguir se o sistema se encontra num estado periódico, quasi-periódico ou não periódico. Normalmente, usam-se as transformadas de *Fourier* (que será abordado na secção 2.4.) para obter este espetro.

O movimento periódico aparece sempre com um espetro de frequências discreto (ilustrado na Figura (2.4.a)), isto é, um sinal periódico, tem somente valor em determinados pontos do domínio da frequência, correspondentes às frequências sinusoidais que compõem o sinal no tempo. O mesmo ocorre com o movimento quasi-periódico, exibindo as duas ou mais frequências não mensuráveis. O estado caótico, por sua vez, produz um espetro contínuo de banda larga (isto é, há uma grande diferença entre as frequências superiores

e inferiores de uma banda contínua de frequências) com picos ascendentes nas frequências dominantes, tal como pode ser observado na Figura (2.4.b).

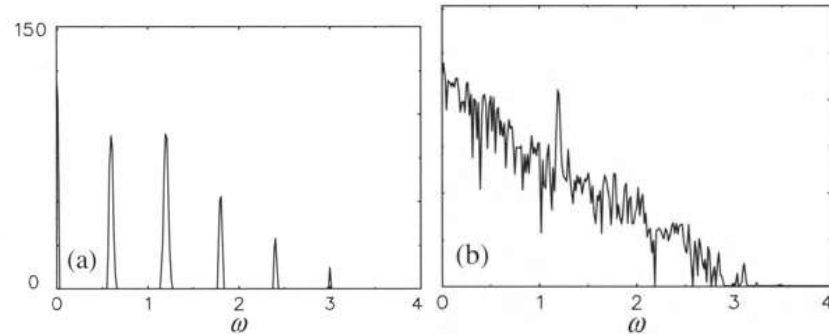


Figura 2.4: Espectros de frequência de soluções da equação (2.1) com  $w = 1.2$  e  $c = 0.1$ , em que à esquerda é possível observar um comportamento periódico (para  $F = 0.27$ ) e à direita um comportamento caótico (para  $F = 0.30$ ).\*

\*Retirado de Thomsen, 2003.

No entanto, para sistemas com muitos graus de liberdade, o espectro é contínuo, pois existem muitas frequências envolvidas na resposta (Thomsen, 2003).

O fenómeno do salto de frequência<sup>4</sup>, característico do oscilador de *Duffing*, normalmente é indesejado e foram até criadas várias técnicas para controlar este fenómeno. No entanto, é bem visível no domínio frequencial (através de um espectro). Assim, uma análise detalhada do espectro pode ser útil, em particular para estudar o fenómeno de salto que ocorre em sistemas não lineares e que aparece na equação de *Duffing*. Por exemplo, (Ramlan et al., 2016) mostrou que a partir dessa análise conseguia extrair alguns parâmetros do sistema.

Outra informação importante a retirar dos espectros de frequência, é a frequência de ressonância do sistema. Importa referir que a ressonância é definida como um pico na magnitude da curva de resposta da frequência. A ressonância primária (principal), ocorre quando o sistema é excitado em frequências próximas à sua frequência natural. As ressonâncias secundárias incluem, por exemplo, ressonâncias sub-harmónicas (ocorre quando a frequência de excitação é  $n$  vezes maior que a frequência de resposta) e super-harmónicas (ocorre quando a frequência de excitação é  $n$  vezes menor que a frequência de resposta) (Ivana Kovacic, 2011).

<sup>4</sup>O salto de frequência é uma mudança repentina da amplitude da resposta quando a frequência varia muito lentamente e os restantes parâmetros do sistema são mantidos constantes.

### Mapa de Poincaré

Os mapas ou secções de Poincaré representam o ponto de interseção de uma trajetória com um plano de secções, com o ponto de interseção subsequente, permitindo distinguir entre um estado periódico e não periódico, e ainda entre os diferentes tipos de atratores.

Como já explicado, a representação do plano de fase é obtida juntando num gráfico as duas componentes de um vetor de estado  $x(t)$ . Mas ao considerar os valores das duas variáveis de estado, apenas em momentos discretos  $t_k = 0, 1, 2, \dots$ , o estado do sistema aparecerá como uma sequência de pontos no plano de fase. Esta sequência de estados é substituída por um mapa discreto bidimensional, que mapeia os estados no momento  $t_k$  nos estados posteriores  $t_{k+1}$ .

Relativamente à sua interpretação, se o mapa apresentar um número finito de pontos, tal implica um movimento periódico. Enquanto que um número infinito de pontos, que preenche uma curva fechada, corresponde ao movimento quasi-periódico e um número infinito de pontos distribuídos ordenadamente corresponde ao estado caótico, ilustrado na Figura (2.5).

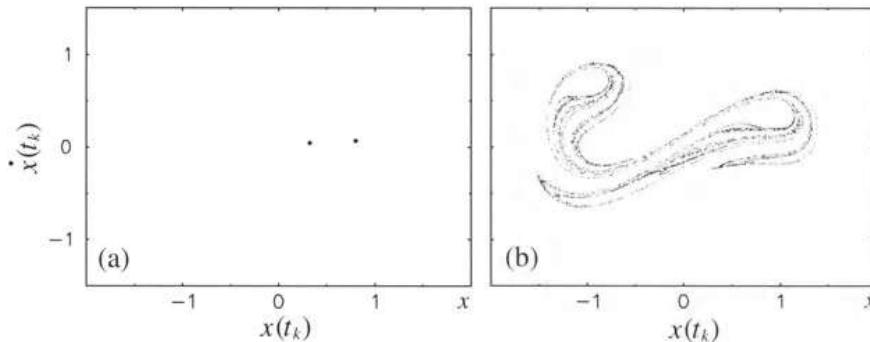


Figura 2.5: Mapas de Poincaré das soluções da equação (2.1) com  $w = 1.2$  e  $c = 0.1$ , em que à esquerda é possível observar um comportamento periódico (para  $F = 0.27$ ) e à direita um comportamento caótico (para  $F = 0.30$ ).\*

\*Retirado de Thomsen, 2003.

Existe ainda a possibilidade do mapa de Poincaré não consistir num número finito de pontos, nem em pontos que preenchem uma curva fechada, mas sim de um conjunto de pontos organizados de forma ordenada, sendo um forte indicador de caos determinístico.

Para alguns sistemas caóticos, os pontos de Poincaré podem ainda aparecer espalhados pelo mapa, ilustrando o caos hamiltoniano, que se relembra, ser tipicamente encontrado quando a dissipação do sistema é nula ou muito pequena (Thomsen, 2003).

### Expoentes de *Lyapunov*

Os expoentes de Lyapunov, introduzidos pelo matemático Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), podem ser definidos como uma medida quantitativa da divergência exponencial ou atração no tempo de trajetórias que correspondem a condições iniciais ligeiramente diferentes. Eles quantificam a taxa média de divergência de trajetórias, que começa por ser infinitesimalmente próxima a uma referência, generalizando o conceito de estabilidade linear ao movimento não periódico (Cencini et al., 2010).

Os expoentes de Lyapunov, medem essencialmente as taxas médias de convergência ou divergência de órbitas próximas no espaço de fase. Um expoente Lyapunov positivo indica uma separação exponencial de órbitas próximas, ou seja, um "alongamento" do espaço de fase. Como para sistemas reais o espaço de fase é sempre limitado, este alongamento não pode durar para sempre, e quando chegam a esse limite, as órbitas "comprimem" de volta para o centro do espaço de fase. Este processo de alongamentos e compressões repetidos é o que define o caos. Assim, um expoente positivo de Lyapunov, devidamente calculado, está entre os indicadores mais fortes do movimento caótico (Kulkarni, 2013) e (Thomsen, 2003).

## 2.3 Determinação de soluções de equações diferenciais

Existem diversas técnicas de resolução de equações diferenciais e mais especificamente, métodos que foram documentados e aplicados à equação em estudo. Estes dividem-se em métodos numéricos, métodos perturbativos, métodos assintóticos e métodos homotópicos (Cveticanin, 2013) e (Chapra, 2012).

### 2.3.1 Métodos numéricos

Os métodos numéricos são técnicas através das quais são formulados problemas matemáticos, para que possam ser resolvidos com operações aritméticas e lógicas (Chapra, 2012). Ao criar um modelo numérico para resolver uma equação diferencial é necessário introduzir algumas aproximações, que passam pela substituição das derivadas existentes por quocientes de diferenças, alterar a variável independente contínua por uma variável discreta e substituir a função por um conjunto discreto de valores. Por este motivo, existe sempre um determinado erro associado aos métodos de resolução numérica e é por isso que se consideram as soluções numéricas como um apoio para o

conhecimento do problema e não como uma solução única e definitiva (Simmons and Krantz, 2006).

Um dos métodos numéricos de aproximação da solução a considerar, é o de *Runge-Kutta*, que é aplicável a equações diferenciais e é capaz de atingir a mesma precisão de uma abordagem através de séries de *Taylor*, sem exigir o cálculo de derivadas mais altas. Para um problema cuja expressão é  $y' = \varphi$ , a forma geral do método é:

$$y_{i+1} = y_i + \varphi h \quad (2.3)$$

onde  $\varphi$  é a função de incremento, que pode ser interpretada como uma representação da média ponderada do declive no intervalo correspondente. A função de incremento pode ser escrita, de forma geral, como:

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (2.4)$$

onde os coeficientes  $a_n$ , com  $n = 1, \dots, N$ , são constantes e os  $k_i$ 's para o método de *Runge-Kutta* de  $4^a/5^a$  ordem, que será o usado neste trabalho, são dados por:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (2.5)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (2.6)$$

$$k_3 = f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \quad (2.7)$$

$$k_4 = f(t_i + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 h + q_{32} k_2 h + q_{33} k_3 h) \quad (2.8)$$

$$k_5 = f(t_i + p_4 h, y_i + q_{41} k_1 h + q_{42} k_2 h + q_{43} k_3 h + q_{44} k_4 h) \quad (2.9)$$

Complementarmente, os valores de  $a$ ,  $p$  e  $q$  são obtidos ao igualar a Equação (2.3) aos termos da série de *Taylor*.

Esta técnica permite obter resultados de uma exatidão muito elevada, sem exigir valores muito pequenos de  $h$ , visto que o erro associado ao cálculo de um determinado ponto  $y_n$  é da ordem de grandeza de  $h^4$ . Note-se ainda que existe uma recorrência funcional entre os  $k$ 's, o que torna o método de *Runge-Kutta* muito eficiente para cálculos computacionais.

### 2.3.2 Métodos de perturbação

Os métodos de perturbação baseiam-se na obtenção de soluções aproximadas para os problemas, envolvendo um parâmetro  $\varepsilon$ . A filosofia da teoria das perturbações é começar com uma forma simplificada do problema original

(que pode ser extremamente difícil de manusear) e, gradualmente, adicionar correções ou perturbações, para que a solução se aproxime da solução do problema original. A forma simplificada é obtida deixando o parâmetro de perturbação ( $\varepsilon$ ) assumir o valor zero (Radhika et al., 2014).

Dentro das técnicas perturbativas existem vários métodos comumente aplicados para resolver, de forma aproximada, sistemas não lineares, dos quais se destacam: o método de múltiplas escalas, o método do balanço harmónico e o método da média (Dyke, 1975). A sua aplicação é restrita a sistemas fracamente não lineares, portanto os termos não lineares devem ser pequenos em comparação aos termos lineares.

No método de escalas múltiplas, para sistemas não lineares, a amplitude e a frequência, geralmente exibem dependência, por exemplo, no caso do pêndulo livre as oscilações de grande amplitude ocorrem a uma frequência mais baixa do que as de menor amplitude. A relação entre amplitude e frequência permite que a solução seja uma função de variáveis múltiplas de tempo independentes ou escalas. Assim, uma escala rápida pode ser usada para capturar movimentos em frequências comparáveis à frequência natural linear do sistema, enquanto que uma escala lenta é responsável pela modulação lenta de amplitudes e fases. Isto permitirá que seja representada uma adequada relação de amplitude-frequência, livre de termos seculares<sup>5</sup> (Thomsen, 2003).

No método do balanço harmónico, assume-se uma solução periódica na forma de uma série harmónica. Esta é resolvida em ordem a duas variáveis, que no fim acabam por ser determinadas pelas condições iniciais. Este método envolve significativamente menos cálculos que o método das escalas múltiplas, mas apenas se se souber antecipadamente o carácter da solução (a partir de observações experimentais ou simulações em computador). Se nada for conhecido, pode ser necessário um grande número de termos para garantir uma aproximação precisa, e essa precisão não é facilmente quantificada.

Diversos métodos perturbativos são também baseados na média, como é exemplo o método de *Krylov-Bogoliubov*, que já foi aplicado à equação de *Duffing* em (Cveticanin, 2013). Neste método, transforma-se a equação diferencial de segunda ordem num sistema de equações diferenciais de primeira ordem e baseia-se no pressuposto que um parâmetro de baixo valor (diga-se, menor que 1) existe na equação, o que acaba por restringir as aplicações da técnica perturbativa.

---

<sup>5</sup>Termos seculares são termos que crescem sem limites, à medida que o tempo aumenta, fazendo com que o seu efeito seja apreciável muito tardiamente (Ivana Kovacic, 2011).

### 2.3.3 Métodos assintóticos

O método assintótico pode ser usado para fornecer soluções a equações diferenciais. A característica mais significativa destes métodos é a sua excelente precisão para todo o intervalo de valores de amplitude de oscilação. Além disso, pode ser usado para resolver problemas de osciladores conservadores não-lineares com não-linearidades complexas. As soluções são rapidamente convergentes e os seus componentes podem ser simplesmente calculados. Além disso, comparativamente a outros métodos analíticos, pode-se observar, que os resultados destes métodos, exigem menor esforço computacional e apenas uma iteração pode levar a soluções precisas (Bayat et al., 2012).

### 2.3.4 Métodos homotópicos

Os métodos homotópicos são métodos de aproximação analítica da solução e nomeadamente Liao, em 1992 desenvolveu um método homotópico, designado de HAM (*Homotopy Analysis Method*) que ainda hoje é utilizado para determinar aproximações para as soluções de equações diferenciais. Ao contrário de todas as outras técnicas analíticas, esta garante a convergência de soluções em série, de problemas não lineares através da introdução de um parâmetro auxiliar  $c_0$ , chamado parâmetro de controlo da convergência (Liao, 2012).

No estudo realizado por (Pirbodaghi et al., 2009), foi usado HAM para obter soluções analíticas para a equação de *Duffing*, e concluiu-se que foi possível obter valores precisos para diversos valores de amplitudes de oscilação, que a solução é rapidamente convergente, que os seus componentes podem ser facilmente calculados e ainda que requer menores esforços computacionais comparativamente aos métodos assintóticos e aos métodos perturbativos. Apesar destas vantagens, não existe nenhuma teoria rigorosa que conduza à escolha das aproximações iniciais, dos operadores auxiliares lineares das funções auxiliares e dos parâmetros auxiliares.

## 2.4 Análise espectral

A evolução no tempo de um sistema dinâmico é representada pela variação  $f(t)$  ou por séries de tempo das suas variáveis dinâmicas. A determinação das suas forças relativas é a chamada análise espectral.

A análise espectral constitui uma ferramenta alternativa de identificar, descrever e analisar sinais que é complementar à análise da série temporal, pois permite a identificação e supressão seletiva de fontes de interferência,

coerentes ao longo do sinal e proporciona uma forma rápida e eficiente de identificar as componentes de um sinal.

Se a função  $f(t)$  for periódica, o espetro pode ser expresso como uma combinação linear de oscilações, cujas frequências são múltiplos inteiros de uma frequência base. Esta combinação linear é chamada de série de *Fourier*. No entanto, quando  $f(t)$  não é periódica o espetro deve ser expresso em termos de oscilações, com uma sequência contínua de frequências. Esta representação espectral é chamada de transformada de *Fourier* de  $f(t)$ .

Assim, explicar-se-á as características principais das séries de *Fourier* e depois o método da transformada de *Fourier* como um caso particular das séries de *Fourier* (quando a periodicidade de  $f(t)$  se torna infinitamente grande, deixando de ser periódica).

Se a função for periódica

$$f(t) = f(t + nT) \quad (2.10)$$

com  $n$  sendo um número inteiro positivo ou negativo e  $T$  sendo a periodicidade base, então as frequências das várias componentes espectrais são todas múltiplos da frequência base ( $\omega_0$ ):

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (2.11)$$

A representação de  $f(t)$  na forma de série de *Fourier* pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad (2.12)$$

onde  $a_n$  são as amplitudes das componentes de frequência  $n\omega_0$ , que podem ser determinadas por:

$$a_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (2.13)$$

A transformada de *Fourier*, por sua vez, implica que o espaço entre os componentes da frequência se torne infinitesimal. Dada uma componente  $a_n$ , esta é convertida para  $a(\omega)\delta\omega$  em que  $a(\omega)$  é a amplitude que depende da frequência ou transformada de *Fourier* e  $\delta\omega$  é um intervalo de frequência pequeno. A vantagem prática da transformada é que pode ser usada para analisar uma função e, nomeadamente, conhecer propriedades que desconhecemos à partida. Assim, ao realizar as conversões em cima descritas à Equação (2.12), ficamos com a transformada de *Fourier*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.14)$$

e  $a_n$  é convertido para

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.15)$$

Nas aplicações experimentais da transformada de *Fourier*, a função  $f(t)$  é discretizada ao longo de um intervalo finito de tempo  $T$ . A função  $f(t)$  é conhecida apenas num certo número de  $N$  pontos equidistantes, pertencentes ao intervalo  $[0, T]$ . Pontos estes que correspondem ao número de amostras da função  $f(t)$  obtidas nos instantes  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Desta forma, torna-se necessário utilizar uma versão discreta da expressão (2.15) no intervalo  $[0, T]$ :

$$a(\omega) \approx \int_0^T f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.16)$$

sendo  $T$  definido como o tempo total de amostragem:

$$T = N\Delta t \quad (2.17)$$

em que  $\Delta t$  representa o incremento da variável temporal.

Sendo  $f_s$  a frequência de amostragem, ou seja, o número de amostras,  $N$ , adquiridas em cada unidade de tempo, definida por:

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} = \frac{N}{T}. \quad (2.18)$$

E assim a expressão da transformada de *Fourier* discreta de  $f(t)$  ou DFT (*Discrete Fourier Transform*) fica:

$$a(n\omega) = a_n \frac{T}{\Delta t} = a_n N = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\frac{2\pi n}{N} k}. \quad (2.19)$$

O cálculo analítico da transformada de *Fourier* pode, por vezes ser pouco eficiente, pelo que existe uma abordagem que permite melhorar este aspeto e que pode ser usada quando os dados são discretos. Essa abordagem é chamada de transformada de *Fourier* rápida ou FFT (*Fast Fourier Transform*). Este algoritmo retira vantagens de determinadas propriedades de simetria nas funções trigonométricas, de forma a alcançar e aumentar em velocidade de computação. Se  $N$  for o número de pontos num determinado intervalo de tempo de variação do sinal, então os algoritmos convencionais

precisariam de cerca  $N^2$  operações computacionais, enquanto que a FFT requer cerca de  $N \log_2 N$  operações (Gregory L. Baker, 1996).

O teorema da amostragem, também conhecido por teorema de *Nyquist*, toma também um papel muito importante na análise espectral, visto que estabelece que se  $f(t)$  for um sinal real de banda limitada por  $L$  Hz, então, pode ser reconstruído, sem erros, recorrendo a uma amostragem igualmente espaçada, obtida a uma frequência  $f_N > 2L$ . Esta frequência mínima  $f_N$  é designada por frequência de *Nyquist*. Este teorema garante que  $\omega < 2\pi \times \frac{f_s}{2}$  existe no sinal temporal (sendo  $\omega$  identificada pela DFT), desde que o sinal seja de banda limitada por  $f_s$ , ficando:

$$a(n2\pi\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i(2\pi n\Delta f)k\Delta t}, n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.20)$$

A transformada de *Fourier* é uma função complexa, sendo por isso útil definir uma função de valor real, a densidade espectral de potência:

$$S(\omega) = |a(\omega)|^2 \quad (2.21)$$

Os sistemas de análise de sinais começam por calcular a autocorrelação e depois calculam a transformada de *Fourier*, obtendo desta forma a densidade espectral de potência ou PSD (*Power Spectrum Density*). A PSD traduz a distribuição de energia do sinal ao longo da frequência e pode ser visualizado num gráfico designado de *Power Spectrum Diagram*.

## 2.5 Ruído

O ruído pode ser extraído de uma distribuição de probabilidade. As três distribuições mais comuns são a binomial, *Poisson* e Gaussiana (Vaseghi, 2006).

A distribuição Gaussiana resulta da soma de um grande número de eventos aleatórios independentes de quantidade flutuante  $x$ :

$$P(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.22)$$

em que  $\mu$  é a média  $\mu = \langle x \rangle$  e  $\sigma$  o desvio padrão.

Dependendo da fonte, um ruído pode ser classificado em várias categorias, indicando a ampla natureza física deste, como o ruído acústico (é gerado por fontes em movimento, vibração ou colisão e é o tipo de ruído mais familiar presente em ambientes quotidianos), o ruído térmico, eletromagnético,

entre outros que podem ser consultados em (Vaseghi, 2006). E quanto à distribuição espectral ou características temporais, o ruído pode ainda ser classificado em ruído branco e ruído colorido. Para o ruído ser considerado branco o valor da média ( $\mu$ ) tem de ser nulo, o desvio padrão tem de ser constante, não pode existir nenhuma correlação entre intervalos e a distribuição de energia também tem de ser constante. Tais características fazem com que este tipo de ruído tenha um PSD horizontal, tal como pode ser verificado na Figura (2.6).

Embora o conceito de ruído branco forneça uma aproximação razoavelmente realista, matematicamente conveniente e útil de alguns tipos de ruído predominantemente encontrados em sistemas de telecomunicações, o ruído que existe na natureza não é branco. Assim o termo "ruído colorido" refere-se a qualquer ruído de banda larga com um espectro não branco, ou seja, não constante. O ruído colorido pode ter várias formas mas a que será abordada, será o ruído cor de rosa. O espectro de frequências do ruído rosa é uma reta numa escala logarítmica. A densidade de potência espectral, que pode ser observada na Figura (2.6), em comparação com o ruído branco, diminui em 3 dB por oitava, tendo a seguinte forma:

$$S(f) = \frac{1}{f} \quad (2.23)$$

sendo  $f$  a frequência (Vaseghi, 2006).

Uma importante ferramenta a definir na adição de ruído a um sinal, é a razão da potência de um sinal e a potência do ruído sobreposto ao sinal. A esta relação dá-se o nome de relação sinal-ruído ou SNR, geralmente expressa em Decibel. E é dada pela seguinte expressão (Hodges, 2010):

$$SNR = 10 \log \frac{P_{\text{sinal}}}{P_{\text{ruído}}} dB \quad (2.24)$$

sendo  $P$  a potência média do sinal original sem ruído ou do sinal ruidoso. Quanto mais alta for a relação sinal-ruído, menor é o efeito do ruído sobre a deteção ou medição do sinal.

Se considerarmos a aplicação da equação de *Duffing* à identificação de sinais periódicos de assinaturas hidrofónicas (Wang et al., 2016), então o ruído neste ambiente é bastante característico. Isto porque no caso dos oceanos, a cavitação<sup>6</sup> das hélices dos navios é a fonte mais prevalente de ruído subaquático. Ainda mais quando ocorre a cavitação das hélices esta passa a ser a fonte de ruído dominante em qualquer navio.

---

<sup>6</sup>Cavitação ocorre quando a pressão da água diminui abaixo da pressão do ar contido nas bolhas ou cavidades, geradas pela hélice ou pela superfície da hélice em rotação (Ross, 1976).

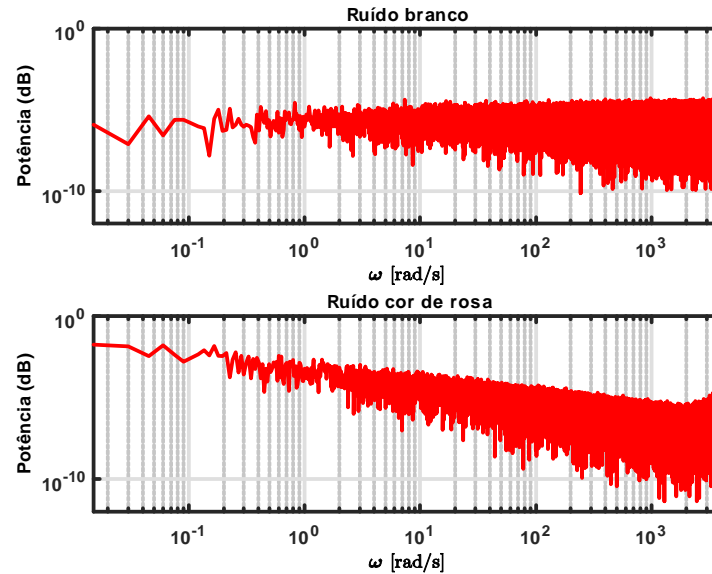


Figura 2.6: *PSD* do ruído Gaussiano branco (em cima) e ruído cor de rosa (em baixo).

Quanto aos navios de superfície, geralmente, têm as hélices desenvolvidas para reduzir a cavitação, de forma a que consigam controlar o espectro irradiado desde os 5 Hz aos 100 kHz. Dependendo das condições de operação, as hélices experimentam a cavitação em vários locais diferentes, e podem, de forma geral, ter duas origens: nos vórtices gerados pelas hélices ou na superfície da lâmina da hélice, sendo esta última a que provoca mais ruído. Isto deve-se porque os vazios gerados colapsam rapidamente quando atingem uma região de pressão positiva. Enquanto que os tipos de vazios gerados pela cavitação por vórtice, permanecem em regiões de pressão negativas por períodos relativamente longos, tendendo a aumentar e, por conseguinte, colapsam com menos liberação de energia.

Os espectros de baixa frequência de hélices de navios cavitantes, geralmente são dominados por componentes tonais da frequência de rotação, sendo os harmónicos do *blade rate*<sup>7</sup> os mais fortes. Como as hélices dos navios geralmente operam entre 60 a 350 rpm e têm de três a seis pás, as frequências fundamentais de repetição desse tipo de som variam dos 0 aos 50 Hz. Os componentes mais fortes são geralmente harmónicos entre 10 e 50 Hz (Ross, 1976). Estas informações são importantes, pois é essencial conhecer a gama de frequências para poder dirigir o estudo do sinal para essa mesma gama.

<sup>7</sup> *Blade rate* é a frequência de passagem das pás.

# Capítulo 3

## A equação de *Duffing-Holmes*

Até agora, definiram-se as características gerais da equação de *Duffing*. Como vimos anteriormente, para as equações não autônomas, espera-se encontrar soluções periódicas e, além disso, não periódicas, quasi-periódicas e caóticas.

Neste capítulo, apresenta-se uma configuração da equação de *Duffing*, denominada equação de *Duffing-Holmes*.

De seguida, será realizado o estudo da equação de *Duffing-Holmes* que se iniciará com o processo de adimensionalização desta equação e posteriormente apresentar-se-ão alguns aspetos do estudo analítico desta equação. O estudo apresentado será ilustrado com gráficos obtidos recorrendo a simulações numéricas. As simulações numéricas foram realizadas em MATLAB<sup>®</sup>.

### 3.1 A viga em flambagem de Moon (*Moon's Beam*)

A equação de *Duffing* é uma equação diferencial de 2<sup>a</sup> ordem com amortecimento viscoso e uma rigidez polinomial de ordem três (Ivana Kovacic, 2011). Neste trabalho estaremos interessados na forma da equação de *Duffing* que descreve a experiência de *Duffing-Holmes* relativa à viga magneto-elástica em flambagem (Moon and Holmes, 1979), equação esta que é conhecida por equação de *Duffing-Holmes* (3.1).

Em 1979, Francis Moon e Phillip Holmes publicaram um artigo cujo título é "*A nonlinear oscillator with a strange attractor*" onde apresentaram um oscilador magneto-elástico com movimentos não periódicos do tipo caótico. Esses movimentos são análogos às soluções de sistemas dinâmicos não lineares que possuem o que tem sido chamado de *strange attractors*. Este sistema, ilustrado na Figura (3.1), conhecido por *Moon's Beam*, consiste numa viga de aço suspensa verticalmente, com uma das extremidades encastrada e a

outra livre. A extremidade livre é excitada magneticamente pelos ímanes representados na figura referida.

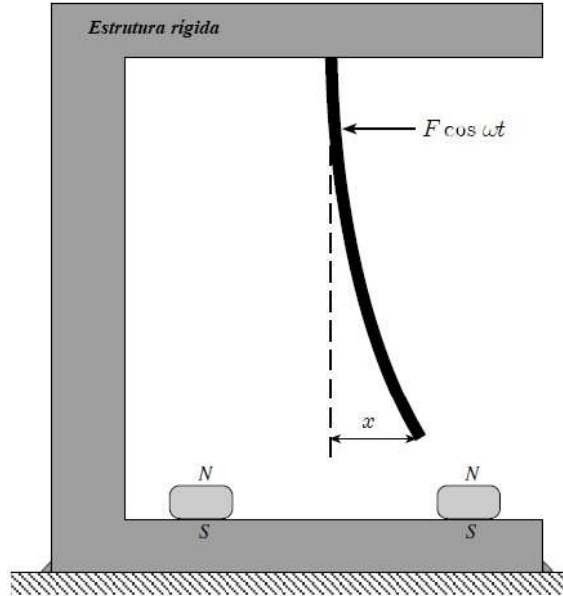


Figura 3.1: Moon's beam.\*

\*Adaptado de Brennan, 2011.

O sistema considerado, é modelado pela seguinte configuração da equação de *Duffing-Holmes*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 = F \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

A Equação (3.1) tem sido utilizada recentemente para desenvolver algoritmos de identificação de sinais periódicos ténues na presença de ruído (Qin et al., 2010), (Li and Liu, 2012), (Wang et al., 2016) e (Xu et al., 2017). Tais algoritmos são baseados nas propriedades dinâmicas da equação, que é sensível a sinais fracos sujeitos a ruído forte sob configurações paramétricas apropriadas.

A Equação (3.1) descreve a deflexão  $x(t)$  da viga em resposta à força harmónica de amplitude  $F$  e frequência  $\omega$ , na presença de amortecimento linear cujo coeficiente é  $c$ . Holmes (Moon and Holmes, 1979), verificou que quando  $F = 0$ , existem três posições de equilíbrio estático ( $x = \pm 1 \vee x = 0$ ) e que a frequência linear natural para oscilações pequenas, em redor das posições de equilíbrio  $x = \pm 1$ , é  $\omega = 1$ . Quando  $F \neq 0$  a viga pode oscilar em volta de uma ou das duas posições  $x = \pm 1$ .

Holmes e Moon apresentam, assim, uma evidência experimental para movimentos não periódicos do tipo caótico de um oscilador magneto-elástico determinístico.

### 3.2 Adimensionalização da equação

Postule-se  $m > 0$  e assumase  $c \geq 0$ .

Note-se que a situação  $m > 0$  e  $c < 0$  conduz a uma resposta que tende exponencialmente para infinito. Com efeito, consideremos as variáveis de estado  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$  e  $x_3 = \theta t$  e descreva-se (3.1) recorrendo ao campo vetorial (autónomo) seguinte:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -cx_2 - k_1x_1 - k_2x_1^3 + F_r \cos(x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = \theta \end{cases} \quad (3.2)$$

A divergência do campo vetorial

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -cx_2 - k_1x_1 - k_2x_1^3 + F_r \cos(x_3), \theta)$$

é

$$\text{div}(\mathbf{f}) = -c,$$

o que mostra que se  $c$  for negativo (e consequentemente a divergência for positiva) o escoamento não será nem dissipativo, nem conservativo e a distância entre quaisquer duas trajetórias próximas irá aumentar exponencialmente (Ali H. Nayfeh, 1995). Trajetórias com estas características, não são adequadas para serem usadas em aplicações que tenham na sua base alterações qualitativas das respostas dinâmicas, na presença de modificações na frequência, amplitude e fase da excitação harmónica.

Formulemos, então, a Equação (3.1), como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} \pm \frac{|k_1|}{m} x \pm \frac{|k_2|}{m} x^3 = \frac{F_r}{m} \cos \theta t, \quad (3.3)$$

com  $m > 0$  e  $c \geq 0$ .

Notemos, adicionalmente que o termo de rigidez

$$\pm \frac{|k_1|}{m} x \pm \frac{|k_2|}{m} x^3 \quad (3.4)$$

da Equação (3.3) pode assumir quatro diferentes configurações. A configuração

$$-\frac{|k_1|}{m}x - \frac{|k_2|}{m}x^3 \quad (3.5)$$

conduz o sistema a respostas triviais que tendem exponencialmente para infinito (Ivana Kovacic, 2011). Nestas circunstâncias, só as restantes três configurações para a rigidez, geram respostas com uma dinâmica suficientemente rica:

$$-\frac{|k_1|}{m}x + \frac{|k_2|}{m}x^3, \quad (3.6)$$

$$+\frac{|k_1|}{m}x - \frac{|k_2|}{m}x^3, \quad (3.7)$$

$$+\frac{|k_1|}{m}x + \frac{|k_2|}{m}x^3. \quad (3.8)$$

A configuração (3.6) conduz-nos aos trabalhos de Moon e Holmes (Moon and Holmes, 1979) de investigação do comportamento em flambagem da viga magneto elástica (*Moon's beam*), já abordada na secção anterior. A configuração (3.7), característica duma rigidez com amolecimento, conduz-nos à formulação não linear do pêndulo gravítico de Rayleigh (Gregory L. Baker, 1996). Finalmente, a configuração (3.8), característica duma rigidez com endurecimento, conduz-nos aos trabalhos de Patil e Mallick (Patil and Mallick, 2007) na modelação da resposta dum pêndulo torcional solicitado com este tipo de rigidez.

Começemos por definir a *frequência natural não-amortecida* da componente linear

$$\omega = \sqrt{\frac{|k_1|}{m}} \quad (3.9)$$

da equação não excitada. Defina-se o *amortecimento crítico*

$$c_r = 2\sqrt{|k_1|m} \quad (3.10)$$

e o correspondente *fator de amortecimento*  $\zeta$

$$\zeta = \frac{c}{c_r} = \frac{c}{2\sqrt{|k_1|m}}, \quad (3.11)$$

e o *fator de rigidez não linear*  $\gamma$

$$\gamma = \pm \frac{|k_2|}{m\omega^2}, \quad (3.12)$$

Note-se que utilizando os parâmetros  $\omega$  e  $\zeta$ , a Equação (3.3) pode ser reescrita de forma equivalente como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega\frac{dx}{dt} \pm \omega^2x \pm \frac{|k_2|}{m}x^3 = \frac{F_r}{m}\cos(\theta t). \quad (3.13)$$

Efetuada a mudança de variável no domínio temporal

$$\tau = \omega t \text{ e } y(\tau) = x(t) \quad (3.14)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{dy}{d\tau} \text{ e} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Desta forma, a Equação (3.13) assume a seguinte forma adimensional

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} + sy + \gamma y^3 = F \cos(\Omega\tau) \quad (3.16)$$

em que

$$s = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$F \cos(\Omega\tau) = \frac{F_r}{m\omega^2} \cos\left(\frac{\theta}{\omega}\tau\right) \quad (3.18)$$

sendo

$$\Omega = \frac{\theta}{\omega}. \quad (3.19)$$

A discussão que se seguirá incidirá sobre a instância adimensionalizada (3.16).

### 3.3 Estudo analítico

Depois de adimensionalizar a equação, nesta secção passa-se ao estudo analítico da equação de *Duffing*. Inicialmente abordar-se-á a forma conservativa ( $\zeta = 0$ ) e depois a dissipativa ( $\zeta > 0$ ) que se dividirá na análise da componente linear não excitada, da componente linear excitada harmonicamente e na análise da componente não linear excitada harmonicamente. No seio do estudo do caso dissipativo consideraremos uma configuração adicional que corresponde à situação em que  $s = 0$  e que é conhecida por oscilador de *Ueda* (Ueda, 1979).

### Análise da forma conservativa da equação de *Duffing*

Nesta secção estudaremos a forma conservativa da equação de *Duffing*, isto é, a situação em que o fator de amortecimento é nulo ( $\zeta = 0$ ).

Começemos por estudar a resposta não excitada Equação (3.16), assumindo  $F(\tau) = 0$ :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + sy + \gamma y^3 = 0 \quad (3.20)$$

Suponha-se adicionalmente que  $\gamma = 0$ :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + sy = 0 \quad (3.21)$$

cuja solução, para  $\Omega = 1$ , pode assumir a seguinte forma:

$$y(\tau) = \begin{cases} y_0 \cos(\sqrt{s}\tau), & \text{se } s > 0 \\ y_0, & \text{se } s = 0 \\ y_0 \cosh(\sqrt{|s|}\tau), & \text{se } s < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Isto é importante pois de uma perspetiva física, significa que a variação do valor de  $s$  implica uma expressão da solução periódica constante ou exponencial, tal como pode ser visualizado na Tabela 3.1 adaptada de (Liao, 2012).

	$s > 0$	$s = 0$	$s < 0$
Expressão da solução	periódica	constante	exponencial
Ponto de equilíbrio	$y = 0$ , estável	$y = y(0)$ , neutro	$y = 0$ , instável

Tabela 3.1: Característica das expressões da solução e do ponto de equilíbrio em  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + sy = 0$ .

Suponha-se agora  $\gamma \neq 0$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + sy + \gamma y^3 = 0 \quad (3.23)$$

e determinemos os correspondentes pontos de equilíbrio:

$$f = -sy - \gamma y^3 = -\gamma y \left( \frac{s}{\gamma} + y^2 \right) = 0 \quad (3.24)$$

As características do ponto de equilíbrio e da solução para diferentes valores de  $s$  e  $\gamma$  estão descritas na Tabela 3.2, também adaptada de (Liao, 2012). É importante referir que no caso em que  $\gamma > 0$  a solução  $y(\tau)$  é periódica.

	$\gamma > 0$	$\gamma < 0$
$s \geq 0$	1 ponto de equilíbrio: $y = 0$ (estável); Expressão da solução: periódica	3 pontos de equilíbrio: $y = 0$ (estável); $y = \pm \sqrt{ \frac{s}{\gamma} }$ (instáveis). Expressão da solução: - Periódica se $ y(0)  < \sqrt{ \frac{s}{\gamma} }$ - Exponencial se $ y(0)  > \sqrt{ \frac{s}{\gamma} }$ .
$s < 0$	3 pontos de equilíbrio: $y = 0$ (instável); $y = \pm \sqrt{ \frac{s}{\gamma} }$ (estáveis). Expressão da solução: periódica	1 ponto de equilíbrio: $y = 0$ (instável) Expressão da solução: exponencial

Tabela 3.2: Característica das expressões da solução e do ponto de equilíbrio do sistema não linear:  $\frac{d^2y}{dt^2} + sy + \gamma y^3 = 0$ .

Além disso, no caso em que  $\gamma < 0$ , existe uma solução periódica quando  $s > 0$ , soluções estas que descrevem as oscilações em torno de um ponto de equilíbrio estável. Nos outros casos, a solução é uma função exponencial, descrevendo um aumento exponencial da resposta.

Portanto, dependendo dos parâmetros físicos  $s$ ,  $\gamma$  e das condições iniciais  $y(0)$  e  $y'(0)$ , existem dois tipos diferentes de soluções para o sistema (3.23). Uma é periódica em torno de um ponto de equilíbrio estável. Neste caso, o parâmetro físico importante é a frequência angular do movimento, denotada por  $\omega$ . A outra é uma função não periódica, que tende exponencialmente para infinito. Nesse caso, existe um parâmetro importante,  $\mu$ , que descreve a velocidade de escape do corpo desde o ponto inicial  $y(0)$  até ao infinito. Cada  $\omega$  e  $\mu$  correspondem a um tipo de escala temporal, para que assim seja possível definir uma variável temporal adimensional designada por  $\tau = \omega t$  como já vimos, para a função periódica ou  $\tau = \mu t$  para a função não periódica. Embora agora não conheçamos os detalhes da solução do sistema dinâmico não linear, é possível assim afirmar que a solução periódica pode ser expressa por:

$$y(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\tau), \quad \tau = \omega t \quad (3.25)$$

e a solução não periódica por:

$$y(\tau) = b_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \exp(k\tau), \quad \tau = \mu t \quad (3.26)$$

em que  $a_k$  e  $b_k$  são constantes a serem determinadas.

Consideremos agora o caso não homogêneo, isto é, o caso em que a frequência de excitação iguala a frequência natural, ou seja, quando o sistema se encontra em ressonância ( $\omega = \Omega = 1$ ):

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + sy + \gamma y^3 = F \cos(\tau) \quad (3.27)$$

a solução particular tem a forma:

$$y(\tau) = a \cos(\omega\tau + \phi) = A_1 \cos(\tau + \phi) + A_2\tau \sin \tau \quad (3.28)$$

em que  $A_1$  e  $A_2$  são constantes. As expressões da forma  $\tau^n \cos(\tau)$  ou  $\tau^n \sin(\tau)$  são chamadas termos seculares.

Devido à não linearidade cúbica, o sistema pode experimentar ressonâncias, mesmo quando a frequência de excitação está afastada da frequência natural do sistema.

### Análise da forma dissipativa da equação de *Duffing*

Nesta secção analisaremos a situação não conservativa na qual  $0 < \zeta < 1$ , pelo que se iniciará com o estudo da forma linear homogênea da Equação (3.16), ou seja com o termo de rigidez não linear nulo ( $\gamma = 0$ ) na ausência de excitação ( $F(\tau) = 0$ ):

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + sy = 0. \quad (3.29)$$

Relembremos que  $s = -1$ ,  $s = 0$  ou  $s = +1$ .

Mostra-se que a solução geral da Equação (3.29) tem a forma

$$y(\tau) = Ae^{-\zeta\tau} \sin(\omega_d\tau + \psi) \quad (3.30)$$

em que

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.31)$$

representa a *frequência amortecida (damped)* do sistema, dependendo o valor das constantes  $A$  e  $\psi$  das condições iniciais  $y_0 = y(0)$  e  $z_0 = \frac{dy}{d\tau}(0)$ .

Esta solução (3.30), caso  $0 < \zeta < 1$ , representa uma resposta harmónica amortecida exponencialmente que se designa caso *sub-amortecido*. Nos casos *criticamente amortecido*  $\zeta = 1$  e *super-amortecido*  $\zeta > 1$ , o movimento é exponencialmente amortecido sem oscilações (Thomsen, 2003).

Estudemos agora a componente linear ( $\gamma = 0$ ) da equação de *Duffing-Holmes* adimensionalizada excitada harmonicamente ( $F(t) = F \cos(\Omega t)$ ):

$$\frac{dy}{d\tau} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + sy = F \cos(\Omega\tau). \quad (3.32)$$

Ao adicionar a componente não homogênea, a solução geral da Equação (3.32) será:

$$y(\tau) = Ae^{-\zeta\tau} \cos(\omega_d\tau + \psi) + a \cos(\Omega\tau + \phi) \quad (3.33)$$

em que  $\phi$  é uma constante relativa à fase da força de excitação externa  $F(t)$ :

$$\phi(\Omega) = \begin{cases} -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}\right) & \Omega \leq 1 \\ -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\Omega}{\Omega^2-1}\right)\right) & \Omega > 1 \end{cases} \cdot \quad (3.34)$$

O parâmetro  $a$  é a amplitude da resposta à força de excitação  $F(t)$  descrito por:

$$a = M |F| \quad (3.35)$$

com  $M$ :

$$M(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}. \quad (3.36)$$

$M$  representa um fator de amplificação da resposta relativamente ao deslocamento estático.

No gráfico da Figura (3.2) o fator de ampliação é representado em função da frequência de excitação  $\Omega$ , para diferentes fatores de amortecimento  $\zeta$ . As curvas representadas designam-se habitualmente curvas de resposta em frequência.

A frequência de excitação na qual ocorre o valor mais alto do fator de amplificação, pode ser determinada igualando a zero a derivada de  $M(\Omega)$ .

$$\frac{dM(\Omega)}{d\Omega} = 0, \quad (3.37)$$

resultando

$$\Omega = 0 \vee \Omega = \sqrt{-2\zeta^2 + 1}. \quad (3.38)$$

Desta última expressão é possível retirar que para haver um máximo nesta função, necessariamente:  $0 < \zeta < \frac{1}{2}$ .

Consideremos agora a versão completa da equação de *Duffing* (3.16):

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + sy + \gamma y^3 = F \cos(\Omega\tau)$$

Notemos que o parâmetro  $s$  pode ser negativo, por exemplo quando a flambagem está envolvida, e o sinal de  $\gamma$  descreve se a força de restauração

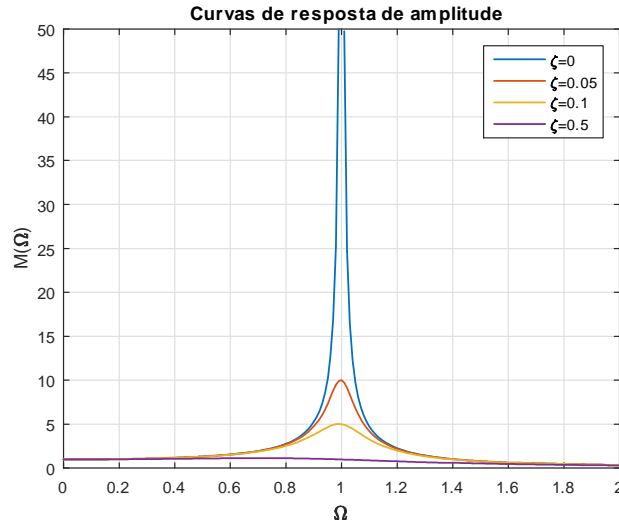


Figura 3.2: Curvas de resposta de frequência: variação do fator de amplificação relativamente à frequência de excitação para diferentes valores do fator de amortecimento.

não-linear apresenta características de "amolecimento" ( $\gamma < 0$ ) ou "endurecimento" ( $\gamma > 0$ ). Abordado já no capítulo 2, o sistema básico de *Duffing* pode exibir todos os tipos de comportamento dinâmico complexo. Em particular, quando  $\gamma < 0$ , o caos pode prevalecer para amplas faixas de parâmetros do sistema. Simulações numéricas do comportamento caótico foram verificadas experimentalmente, por exemplo, com o modelo *Moon's beam* (Thomsen, 2003).

Relativamente à análise quantitativa e qualitativa dos parâmetros da equação verifica-se que podem existir dois comportamentos distintos, o primeiro, baseado no pressuposto que a não linearidade é fraca (ou seja  $s > 0$  e  $\gamma \ll s$ ), o segundo baseado no pressuposto que a não linearidade é forte ( $s \simeq \gamma$ ). Para o primeiro caso foram previamente estudados os métodos de escalas múltiplas, *Bogolubov-Mitropolski*, *Krylov-Bogolubov*, *Straitfoward expansion* e *Listed Poincaré* (todas estas técnicas são expostas em (Thomsen, 2003)). Para o segundo caso a solução analítica aproximada é baseada na solução exata da equação diferencial (Cveticanin, 2013).

Se  $s = 1$ ,  $\gamma = -1$ , o sistema pode atingir 3 pontos de equilíbrio, são estes  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = -1$ , estes dois últimos representados na Figura (3.3).

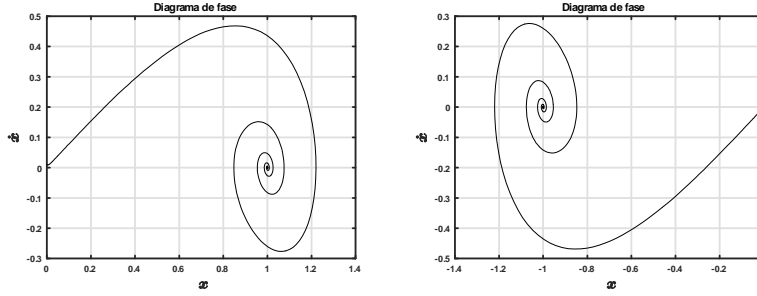


Figura 3.3: Diagrama de fase em  $[x, \dot{x}] = [0, 0.01]$  a esquerda e em  $[x, \dot{x}] = [0, -0.01]$  a direita.

Tendo em vista estimar a resposta em frequência do sistema, efetuemos o balanço harmónico de primeira ordem relativamente à resposta estacionária da Equação (3.16). Admitiremos que a resposta referida tem a forma

$$y = Y \cos(\Omega\tau - \alpha), \quad (3.39)$$

onde  $\alpha$  representa a diferença de fase relativamente à excitação considerada.

Substituindo esta solução na Equação (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + sy + \gamma y^3 &= F \cos(\Omega\tau) \Leftrightarrow \\ \{-Y\Omega^2 + sY\} \cos(\Omega\tau - \alpha) - 2\zeta Y\Omega \sin(\Omega\tau - \alpha) + \gamma Y^3 \cos^3(\Omega\tau - \alpha) &= F \cos(\Omega\tau). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Aproximando  $\cos^3(\Omega\tau - \alpha)$ , por  $\frac{3}{4} \cos(\Omega\tau - \alpha)$ , obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} \{-Y\Omega^2 + sY\} \cos(\Omega\tau - \alpha) - 2\zeta Y\Omega \sin(\Omega\tau - \alpha) + \gamma Y^3 \frac{3}{4} \cos(\Omega\tau - \alpha) &= F \cos(\Omega\tau) \\ &= F \cos(\Omega\tau) \Leftrightarrow \\ \left\{-Y\Omega^2 + sY + \gamma Y^3 \frac{3}{4}\right\} \cos(\Omega\tau - \alpha) - 2\zeta Y\Omega \sin(\Omega\tau - \alpha) &= F \cos(\Omega\tau) \Leftrightarrow \\ \left\{-Y\Omega^2 + sY + \gamma Y^3 \frac{3}{4}\right\} (\cos(\Omega\tau) \cos \alpha + \sin(\Omega\tau) \sin \alpha) & \\ - 2\zeta Y\Omega (\sin(\Omega\tau) \cos \alpha - \sin \alpha \cos(\Omega\tau)) &= F \cos(\Omega\tau) \Leftrightarrow \\ \left[Y \left\{-\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4}\right\} \cos \alpha + 2\zeta Y\Omega \sin \alpha - F\right] \cos(\Omega\tau) & \\ + \left[Y \left\{-\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4}\right\} \sin \alpha - 2\zeta Y\Omega \cos \alpha\right] \sin(\Omega\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Isto é,

$$\Delta_1 \cos(\Omega\tau) + \Delta_2 \sin(\Omega\tau) = 0, \forall \tau \quad (3.42)$$

com

$$\Delta_1 = Y \left\{ -\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4} \right\} \cos \alpha + 2\zeta Y \Omega \sin \alpha - F, \quad (3.43)$$

$$\Delta_2 = Y \left\{ -\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4} \right\} \sin \alpha - 2\zeta Y \Omega \cos \alpha.$$

Assim, por ortogonalidade, concluímos que

$$\Delta_1 = Y \left\{ -\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4} \right\} \cos \alpha + 2\zeta Y \Omega \sin \alpha - F = 0 \text{ e} \quad (3.44)$$

$$\Delta_2 = Y \left\{ -\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4} \right\} \sin \alpha - 2\zeta Y \Omega \cos \alpha = 0. \quad (3.45)$$

Reescreva-se (3.44) e (3.45) e deduza-se uma expressão para  $\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$ :

$$\begin{bmatrix} 2\zeta Y \Omega & Y \left\{ -\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4} \right\} \\ Y \left\{ -\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4} \right\} & -2\zeta Y \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (3.46)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F\Omega \frac{\zeta Y}{Y^2 Z^2 + 4\Omega^2 (\zeta Y)^2} \\ FY \frac{Z}{Y^2 Z^2 + 4\Omega^2 (\zeta Y)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{com } Z = \left\{ -\Omega^2 + s + \gamma Y^2 \frac{3}{4} \right\}.$$

Podemos concluir que

$$\left( 2F\Omega \frac{\zeta Y}{Y^2 Z^2 + 4\Omega^2 (\zeta Y)^2} \right)^2 + \left( FY \frac{Z}{Y^2 Z^2 + 4\Omega^2 (\zeta Y)^2} \right)^2 = 1. \quad (3.47)$$

Simplificando este resultado obtemos

$$\begin{aligned} Y^2 &= F^2 \frac{4\Omega^2 \zeta^2 + Z^2}{(4\Omega^2 \zeta^2 + Z^2)^2} \\ &= \frac{F^2}{4\Omega^2 \zeta^2 + Z^2} \\ &= \frac{F^2}{4\Omega^2 \zeta^2 + \left\{ \Omega^2 - s - \frac{3}{4} \gamma Y^2 \right\}^2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ou seja,

$$Y^2 = \frac{F^2}{4\Omega^2\zeta^2 + \left\{\Omega^2 - s - \frac{3}{4}\gamma Y^2\right\}^2}. \quad (3.49)$$

A expressão anterior pode escrever-se na forma do polinómio bi-cúbico em  $B = Y^2$  :

$$B^3\gamma^2 + \frac{8}{3}\gamma(s - \Omega^2)B^2 + \frac{16}{9}((4\zeta^2 - 2s)\Omega^2 + \Omega^4 + s^2)B - \frac{16}{9}F^2 = 0 \quad (3.50)$$

Admita-se, por exemplo que  $s = 1$ ,  $\gamma = 1$  e que a amplitude da excitação externa é unitária,  $F = 1$ . A Equação (3.49) assume a seguinte forma

$$Y^2 = \frac{1}{4\Omega^2\zeta^2 + \left\{\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4}Y^2\right\}^2} \quad (3.51)$$

e a expressão (3.50) fica:

$$B^3 + \frac{8}{3}(1 - \Omega^2)B^2 + \frac{16}{9}((4\zeta^2 - 2)\Omega^2 + \Omega^4 + 1)B - \frac{16}{9} = 0. \quad (3.52)$$

Note-se que o polinómio (3.52), pode ter uma, ou três raízes reais, isto é, para certas frequências a unicidade na resposta não se verifica.

Na Figura (3.4) podemos observar três curvas de resposta em frequência correspondentes à expressão (3.52) e os respeitantes três valores diferentes de amortecimento reduzido ( $\zeta = 0.13$ ;  $\zeta = 0.2$  e  $\zeta = 0.3935$ ).

As curvas representadas designam-se habitualmente por *backbone curves*. Ocorrem tipicamente quando a força restauradora de um oscilador é traduzida por uma relação não linear entre a amplitude do deslocamento e a frequência natural. Estas curvas apresentam um eixo de simetria não vertical, cuja inclinação depende da rigidez não linear do sistema ( $\gamma$ ), ou seja, apresentam-se curvadas para a direita quando o termo de rigidez não linear ( $\gamma$ ) é positivo, caso contrário a curvatura é para a esquerda. Observa-se ainda que para valores de amortecimento menores (muito próximos de zero) a curvatura é muito mais acentuada e o pico desta curva acontece a frequências mais elevadas quando comparado a valores de amortecimento maiores.

Ao isolar uma das curvas da Figura (3.4), cujos valores para a sua construção foram  $F = 0.3$  e  $\gamma = 0.5$ , é possível observar que a curva de resposta em frequência na Figura (3.5), tem uma tangente vertical nos pontos I e S, nos quais ocorre o fenómeno de salto de frequência. A parte da curva de frequência entre os pontos I e S é instável, ou seja, as soluções deste ramo são instáveis. Isto significa que, se a frequência de excitação aumentar gradualmente, a partir de um valor baixo, quando chega ao ponto S, a resposta

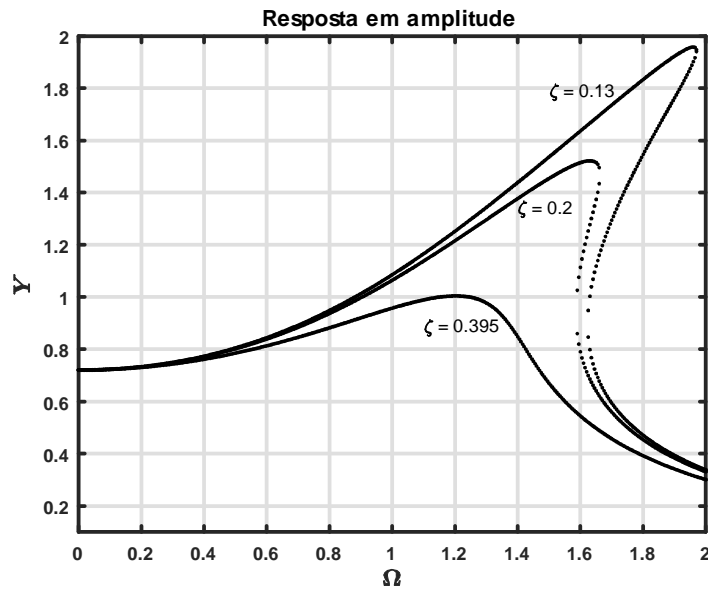


Figura 3.4: *Backbone curves*: variação da amplitude relativamente à frequência de excitação para diferentes valores da taxa de amortecimento.

salta de um estado de ressonância para não ressonância, passando por uma bifurcação ou *saddle point*. Assim, começando com uma frequência alta da curva de resposta (que não corresponde a nenhuma frequência de ressonância), se a frequência de excitação for gradualmente reduzindo, a amplitude salta novamente para a gama de frequências de ressonância no ponto de salto inferior (I). Depois de ocorrer um salto, o sistema leva mais tempo para entrar no estado estacionário. Este tempo depende da taxa de varrimento da frequência de excitação e do valor do amortecimento.

Conclui-se também, que a largura da região na qual ocorre o salto, diminui com o aumento do amortecimento e, eventualmente, para um valor crítico de amortecimento, o fenómeno do salto deixa de ocorrer. No entanto, o valor do amortecimento crítico necessário para evitar qualquer salto na amplitude da resposta, depende do nível de excitação. Quando para uma frequência são obtidos três valores de amplitude, a amplitude intermédia é instável. Por exemplo, no gráfico da Figura (3.5), para  $\Omega = 1.6$  existem 3 soluções e a intermédia encontra-se no ramo instável da curva.

### Caso do oscilador de Ueda

O oscilador de Ueda, é um caso particular da forma dissipativa da equação de *Duffing*, em que a componente não linear é nula ( $s = 0$ ) e a excitação

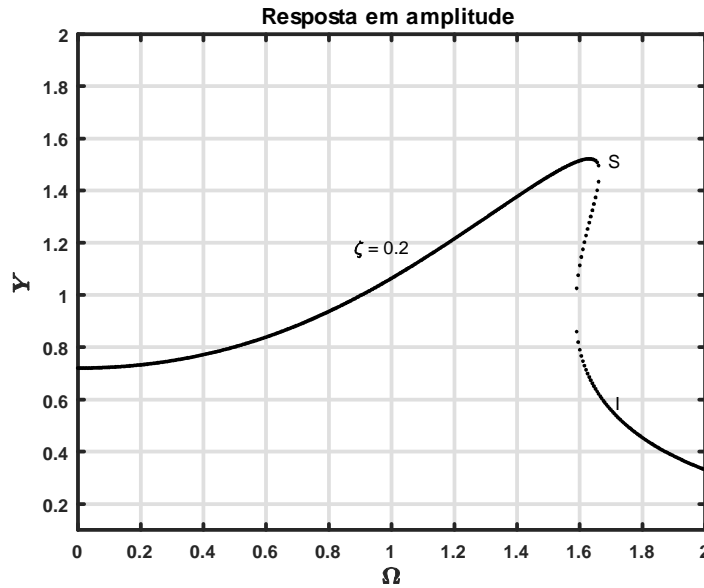


Figura 3.5: *Backbone curve*: variação da amplitude relativamente à frequência de excitação para o fator de amortecimento  $\zeta = 0.2$ .

externa tem uma frequência de  $\Omega = 1$ , isto é:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + \gamma y^3 = F \cos(\tau). \quad (3.53)$$

A equação foi estudada por Yoshisuki *Ueda* e é usada para descrever um comportamento de circuitos elétricos particulares (*Ueda*, 1979). Foram realizadas algumas simulações que comprovam a riqueza da dinâmica associada a esta equação. Destas simulações, realizadas com  $\zeta = 0.01$  e  $\gamma = 1$  é importante destacar os gráficos das figuras (3.6), (3.7) e (3.8).

Na Figura (3.6), que coincide com  $F = 0.8$ , é possível verificar a ocorrência duma resposta periódica em redor de dois pontos fixos, e quando  $F = 1.3$ , a resposta continua a ser periódica mas agora em redor de três pontos fixos, agora representado na Figura (3.7).

Na Figura (3.8) é possível observar que a resposta do oscilador, quando  $F = 1.3$  é caótica. Na correspondente secção de Poincaré é possível observar uma representação característica, conhecida como atrator de *Ueda*.

Devido à não linearidade cúbica, o sistema pode experimentar ressonâncias, mesmo quando a frequência de excitação está longe da frequência natural do sistema.

O oscilador de *Ueda* não linear, forçado, apresenta um vasto leque de respostas dinâmicas com a existência de movimento periódico, atratores

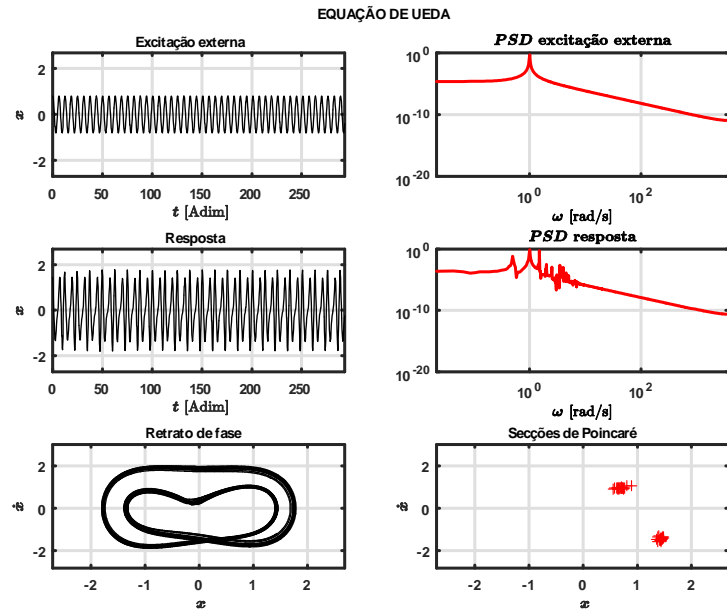


Figura 3.6:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.02\frac{dy}{d\tau} + y^3 = 0.8 \cos(\tau)$  (Oscilador de *Ueda*): resposta periódica.

caóticos, e até regiões em que coexistem os atratores caóticos com atratores periódicos. A complexidade da resposta deste oscilador é explorada em (Ivana Kovacic, 2011).

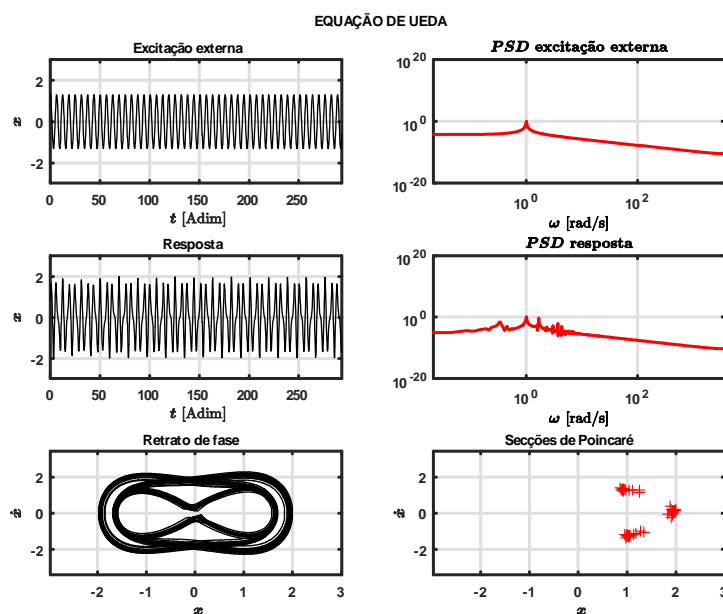


Figura 3.7:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.02\frac{dy}{d\tau} + y^3 = 1.3 \cos(\tau)$  (Oscilador de *Ueda*): resposta periódica.

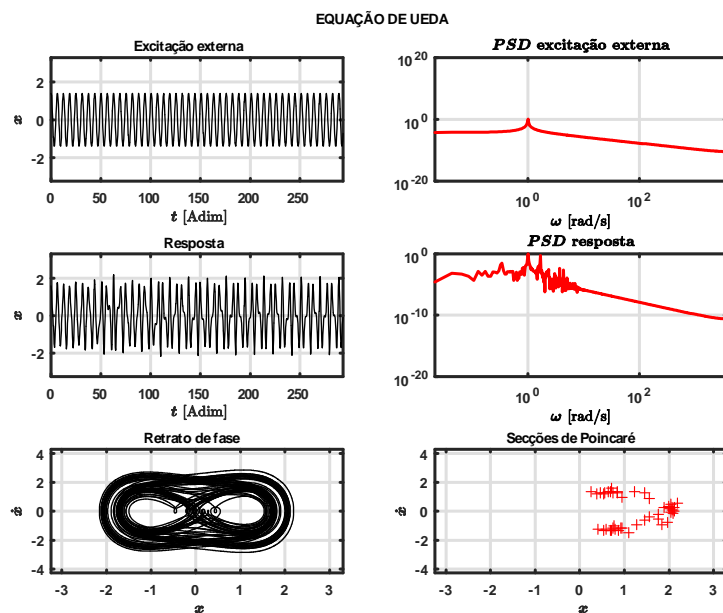


Figura 3.8:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.02\frac{dy}{d\tau} + y^3 = 1.4 \cos(\tau)$  (Oscilador de *Ueda*): resposta caótica.

### 3.4 Estudo paramétrico das principais configurações da equação de *Duffing*

Nas secções anteriores, apresentámos e discutimos alguns aspetos genéricos da equação de *Duffing*. Importa agora conhecer qual das diferentes configurações possíveis é mais favorável para criar um modelo do oscilador de *Duffing* capaz de detetar sinais harmónicos.

Nesta secção, realizar-se-á o estudo paramétrico da equação de *Duffing* (3.1). Este estudo, tem como objetivo caracterizar alguns dos aspetos da dinâmica das diferentes configurações que a equação de *Duffing* pode apresentar.

Assim, estudaremos e discutiremos a família de equações (3.16) para cada uma das configurações possíveis. Nesta fase do iremos proceder ao estudo das configurações adimensionalizadas correspondentes às configurações de *Moon-Holmes*, *Rayleigh* e *Patil e Mallick*, usando, respetivamente, a notação  $(-,+)$ ,  $(+,-)$  e  $(+,+)$  denotando nas componentes dos pares ordenados identificadores da configuração, o sinal da rigidez linear e não-linear, tal como referido anteriormente. Adicionalmente, irão ser também estudadas estas configurações na sua forma conservativa. Deste estudo resultará uma configuração favorável à deteção de sinais fracos.

Esta análise basear-se-á tanto em simulações numéricas, realizadas em MATLAB, como no estudo analítico. Para resolver a Equação (3.16) foi usada a rotina `ode45` do MATLAB, que implementa o algoritmo numérico de  $4^a/5^a$  ordem de *Runge-Kutta*. As simulações apresentadas foram realizadas para uma frequência de excitação de  $\Omega = 1$  rad/s e as condições iniciais  $[y(0), \frac{dy}{d\tau}(0)] = [0, 0]$ , a partir das quais se obtiveram os gráficos de resposta temporal (ou traçado da série temporal), os diagramas de fase, os gráficos de densidade de potência espectral (PSD) e os diagramas de Poincaré.

#### 3.4.1 Configuração de *Moon-Holmes*

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F \cos(\tau). \quad (3.54)$$

Nesta secção iremos estudar a configuração de *Moon-Holmes* (3.54). Esta configuração apresenta o fator de amortecimento com o valor de  $\zeta = \frac{1}{4}$ , o coeficiente de rigidez linear negativo ( $s < 0$ ) e o coeficiente cúbico de rigidez não linear positivo ( $\gamma > 0$ ). Iniciou-se o estudo realizando simulações variando os valores da amplitude de excitação  $F$  de 0.1 em 0.1 até  $F = 1$ , e de 0.2 em 0.2 de 1 a 5, de forma a perceber grosseiramente as diferentes respostas dinâmicas.

Como se referiu na secção 2.2., existem uma série de eventos que caracterizam a evolução da equação de *Duffing-Holmes* quando sujeita a uma excitação harmónica externa. À medida que a amplitude de excitação  $F$  aumenta de forma gradual, foi documentado que os diagramas de fase do sistema apresentam respostas com diferentes comportamentos, desde trajetórias homoclínicas, bifurcações, comportamento caótico, estado crítico, e estado periódico. Nas próximas figuras, estas fases poderão ser observadas.

Na Figura (3.9) verifica-se que existem duas fases distintas, o período transiente e o período estacionário. Sempre que o foco do estudo se localizar no comportamento estacionário da resposta, a sua componente transiente será eliminada.

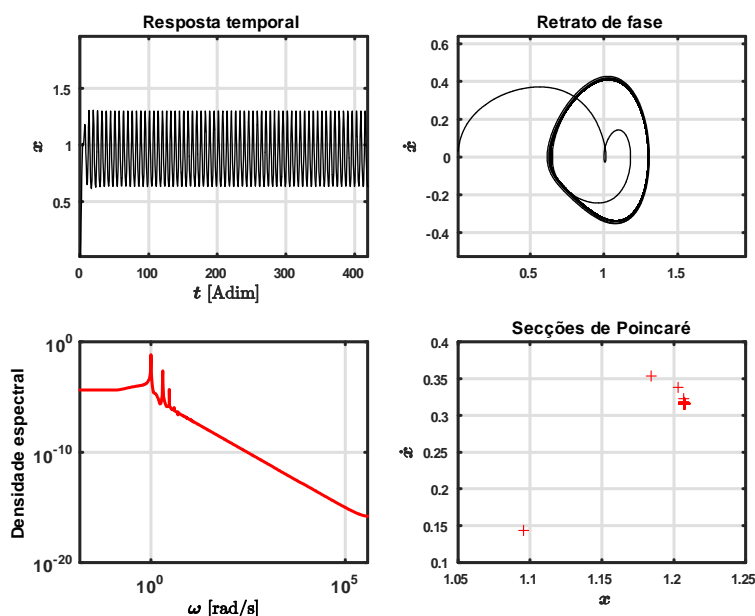


Figura 3.9:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.3 \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): com período transiente.

No diagrama de fase da Figura (3.10) pode-se observar uma órbita periódica simples, em torno do mínimo do potencial em  $y = 1$ . Também no mapa de Poincaré, obtido pela sequenciação dos pontos  $(y(t_k), \frac{dy}{dt}(t_k))$  com  $t_k = t_0 + k\frac{2\pi}{\Omega}$ , escolhendo  $t_k = t_0 + kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , onde  $T$  é o período da força de excitação, é possível observar que o movimento se verifica em torno de um ponto.

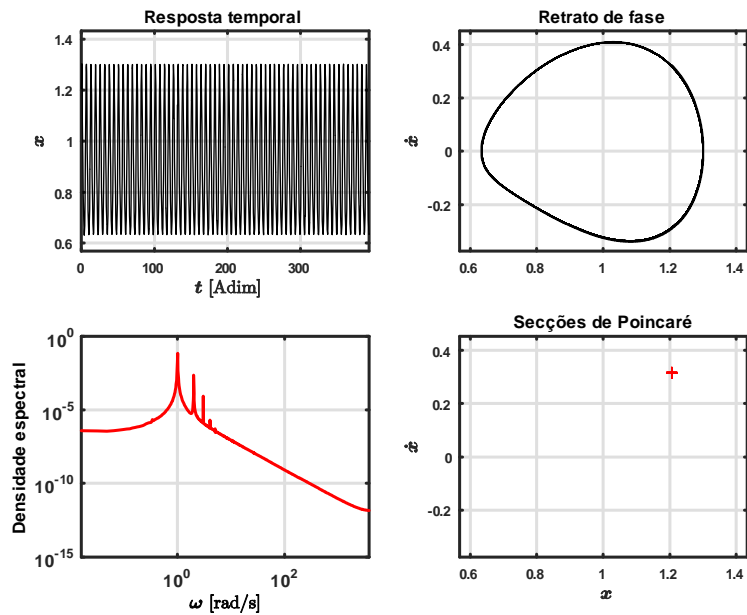


Figura 3.10:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.3 \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): ciclo limite.

A Figura (3.11) é o resultado do aumento do valor da amplitude de excitação para  $F = 0.4$ , em que se verifica no diagrama de fase que existe um movimento em redor de dois pontos fixos ( $y = 1$  e  $y = -1$ ), que está associado ao fenómeno de bifurcação.

A partir da última amplitude de excitação, o sistema começa a evoluir para um estado caótico, Figura (3.12), que pode ser comprovado pelo diagrama de fase que não estabiliza numa órbita e pelo diagrama de Poincaré, que apresenta um conjunto limitador de pontos para os quais a trajetória tende, formando uma figura, que apresenta uma estrutura bem definida. A esta figura dá-se o nome de *strange attractor*.

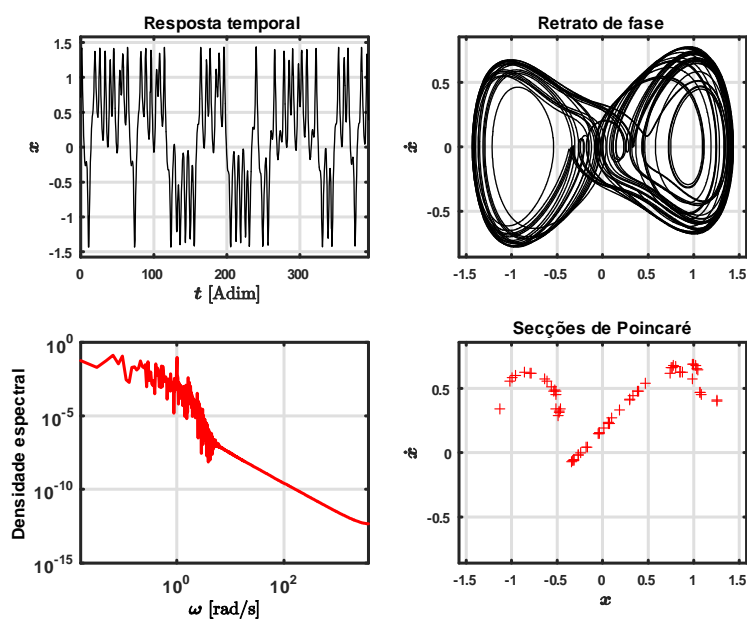


Figura 3.11:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.4 \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): pontos fixos em  $x = -1$  e  $x = 1$ .

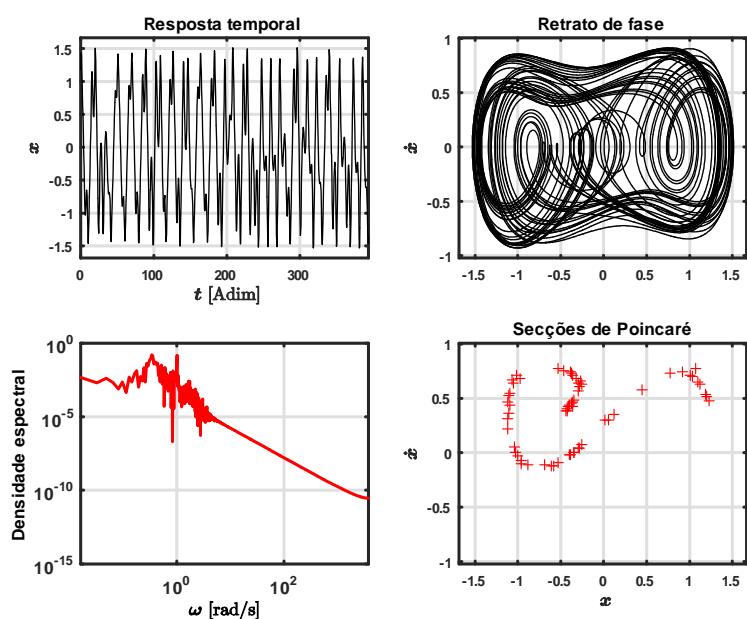


Figura 3.12:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.6 \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): movimento caótico e *strange attractor* (secções de Poincaré).

As próximas figuras (3.13) e (3.14) servem para ilustrar a passagem do

estado caótico, que prevalece quando  $F = 0.825$ , para o estado periódico que se observa quando  $F = 0.828$ , onde se pode observar um ciclo limite no diagrama de fase, uma resposta temporal constante e o "desaparecimento" do *strange attractor* no diagrama de Poincaré.

Conclui-se que esta equação é sensível às mudanças na amplitude de excitação, resultando desta sensibilidade a mudança de regime e portanto a capacidade de detecção de sinais harmônicos.

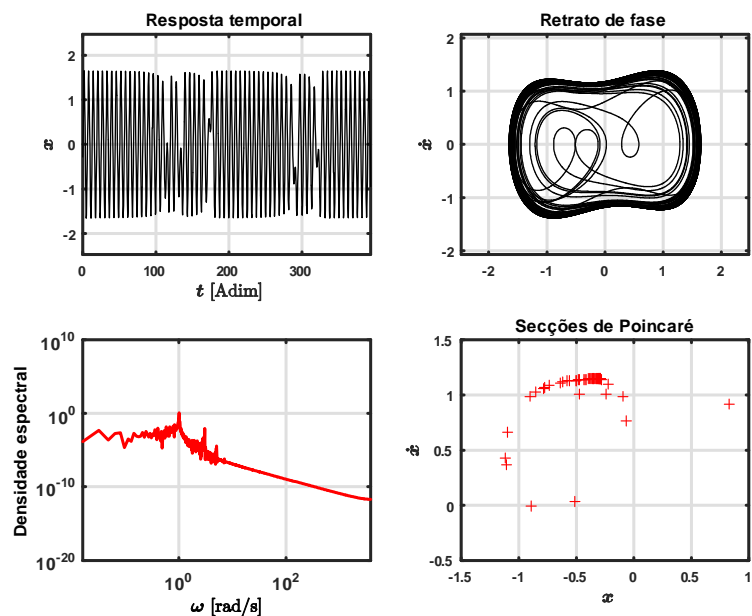


Figura 3.13:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.825 \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): movimento caótico.

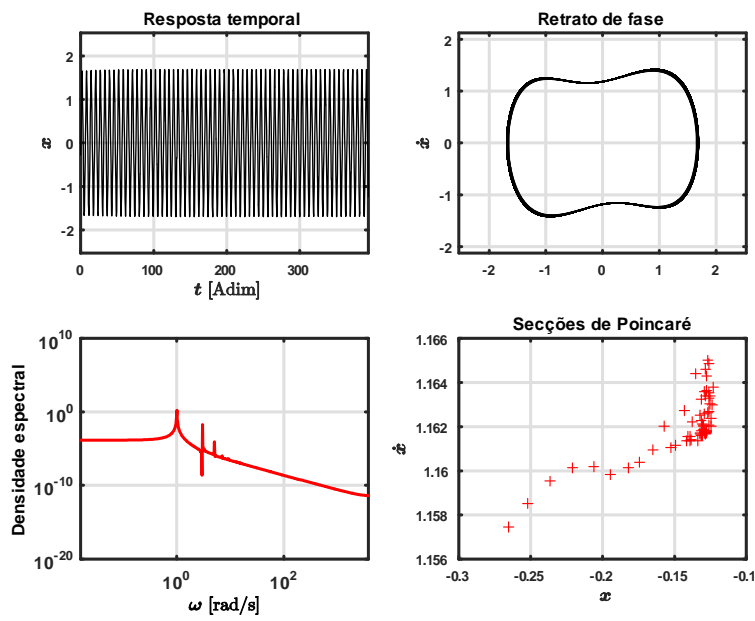


Figura 3.14:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.828 \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): comportamento periódico.

### Caso conservativo da configuração de *Moon-Holmes*

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - y + y^3 = F \cos(\tau). \quad (3.55)$$

Passa-se agora ao estudo da forma conservativa da configuração de *Moon-Holmes* (3.55). Esta apresenta o termo de amortecimento nulo ( $\zeta = 0$ ), o coeficiente linear negativo ( $s < 0$ ) e o coeficiente cúbico de rigidez não linear positivo ( $\gamma > 0$ ). Nas simulações iniciais, fez-se variar os valores da amplitude de excitação  $F$  de 0.1 em 0.1 até  $F = 1$ , e de 1 a 5 observou-se a evolução de 0.2 em 0.2. A análise dos gráficos gerados permitiu concluir que desde amplitudes de excitação muito pequenas, que o movimento das partículas é caótico, Figura (3.15). E este estado não é alterado com as mudanças de amplitude de excitação, mantendo-se até  $F = 5$ , tal como pode ser verificado na Figura (3.16).

Através da análise da matriz Jacobiana da equação (3.55), em (Ivana Kovacic, 2011), foi possível concluir que nesta configuração, existe solução para todos os valores de amplitude de excitação, de modo que a sua solução é definida por uma mudança arbitrária de tempo, o que significa que existem duas órbitas homoclínicas simétricas. A solução desta equação tende assintoticamente para 0 quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , o que é equivalente a dizer que o período dessas soluções particulares é infinito, daí as respostas serem caóticas.

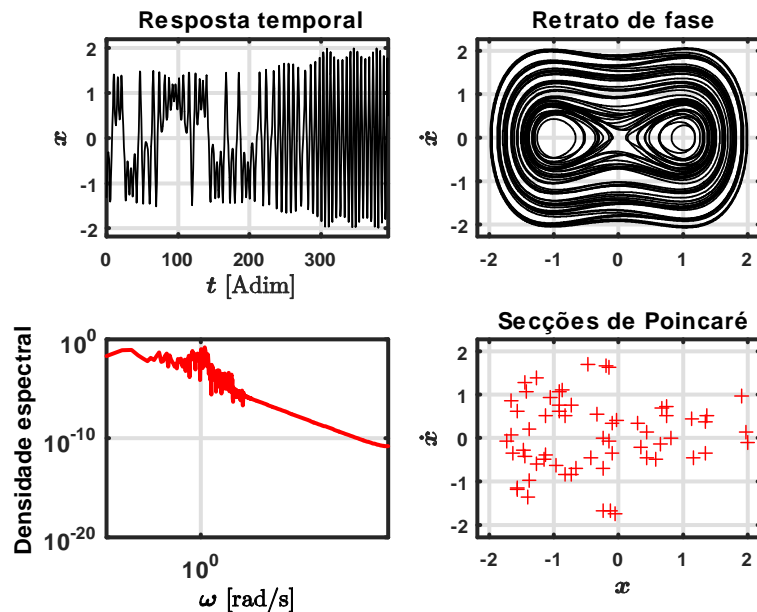


Figura 3.15:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} - y + y^3 = 0.1 \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes* conservativa): comportamento caótico.

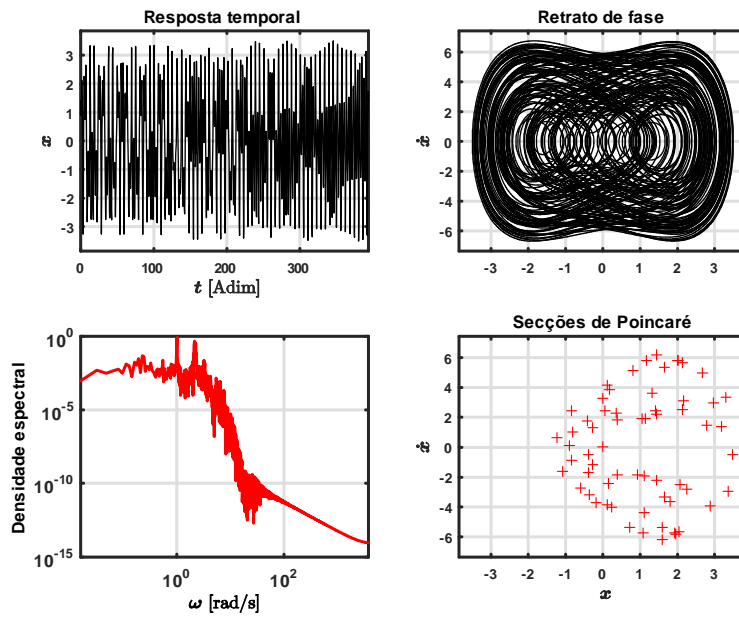


Figura 3.16:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} - y + y^3 = 5 \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes* conservativa): comportamento caótico.

Por não haver a passagem para o estado periódico, esta configuração não permite identificar a presença de sinais harmônicos.

### 3.4.2 Configuração de *Rayleigh*

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} + y - y^3 = F \cos(\tau). \quad (3.56)$$

Esta secção dedica-se à configuração de *Rayleigh* (3.56). Esta configuração apresenta o termo de amortecimento com o valor de  $\zeta = \frac{1}{4}$ , o coeficiente linear positivo ( $s > 0$ ) e o coeficiente cúbico de rigidez não linear negativo ( $\gamma < 0$ ). No decurso das simulações numéricas realizadas, que pretendiam estudar a evolução da equação até ao valor de amplitude de excitação  $F = 5$ , observou-se que é exibida uma órbita periódica simétrica, quando  $F = 0.1$  (Figura (3.17)) que se mantém até ao valor de amplitude de excitação de  $F = 0.58$ .

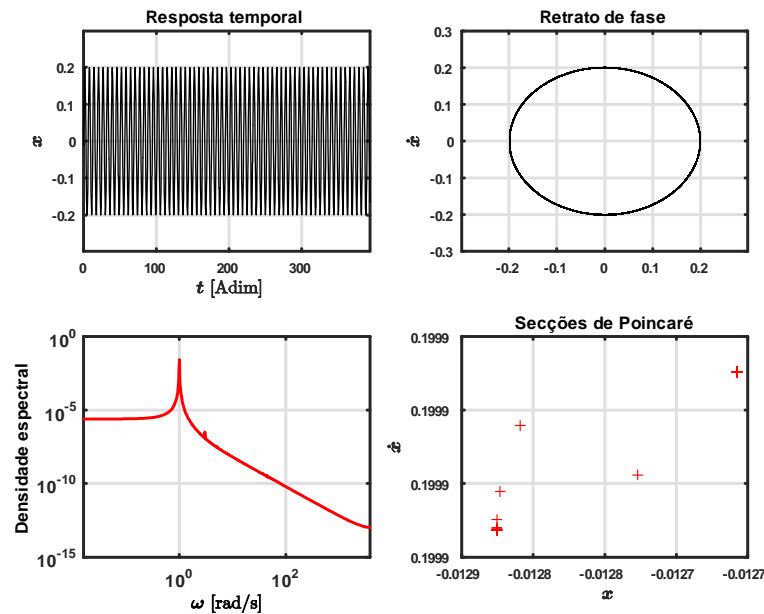


Figura 3.17:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} + y - y^3 = 0.1 \cos(\tau)$  (Configuração *Rayleigh*): órbita periódica simétrica.

No entanto, quando  $F$  se aproxima de 0.591, ocorre uma bifurcação do tipo *pitchfork* que quebra a simetria, resultando três soluções assimétricas (2 estáveis e 1 instável). Nas simulações numéricas realizadas observámos que quando a amplitude de excitação é 0.6, a rotina de resolução numérica exige um passo temporal que não é compatível com a aritmética do ponto flutuante e o ode45 acaba por interromper o cálculo.

Este tipo de quebra de simetria, normalmente, precede as bifurcações de duplicação de período, que podem ser comprovadas pelas sucessivas duplicações de ciclo no diagrama de fase da Figura (3.18), pois geralmente apenas

as órbitas assimétricas podem sofrer duplicação de período (Ivana Kovacic, 2011). Do aumento da força de excitação resultam soluções com o período duplicado, a que se sucedem frequências sub-harmônicas (frequências que são frações integrais da frequência de excitação) no espectro de potência. Estes resultados são ilustrativos de uma sequência de bifurcações com duplicação de período, levando a um movimento caótico.

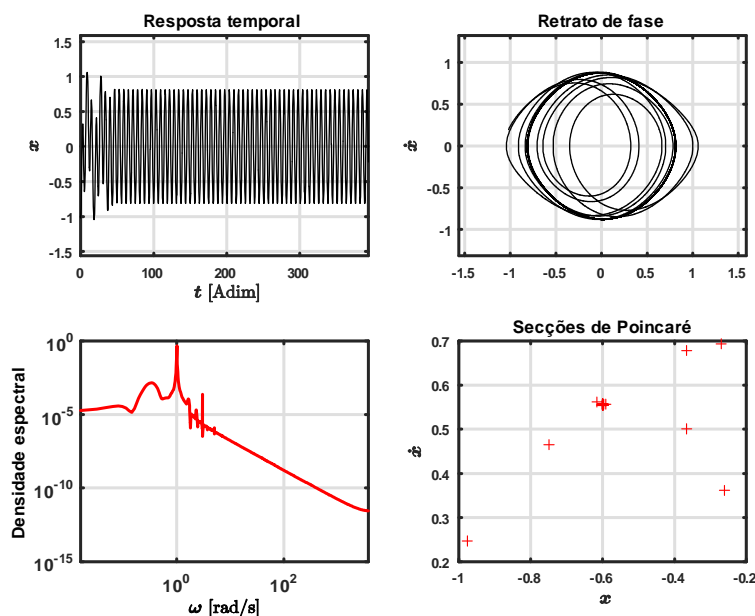


Figura 3.18:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} + y - y^3 = 0.591 \cos(\tau)$  (Configuração *Rayleigh*): duplicações de período.

Visto que esta configuração não permite a identificação de uma mudança do estado caótico para o estado periódico, exclui-se a possível representação de um detetor de sinais periódicos válido com esta configuração.

### Caso conservativo da configuração de *Rayleigh*

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + y - y^3 = F \cos(\tau). \quad (3.57)$$

Esta secção dedica-se à configuração de *Rayleigh* na sua forma conservativa (3.57). Esta configuração apresenta assim o termo de amortecimento nulo ( $\zeta = 0$ ), o coeficiente linear positivo ( $s > 0$ ) e o coeficiente cúbico de rigidez não linear negativo ( $\gamma < 0$ ).

No decurso da realização das simulações numéricas com o objetivo de testar a evolução da solução da equação entre as amplitudes de excitação  $F = 0$  e  $F = 5$ , surgiram problemas numéricos que não foi possível ultrapassar, que impediram a realização de simulações com valores de amplitudes de excitação externa  $F$  acima de 0.11.

Na Figura (3.19) é possível visualizar um ciclo limite no retrato de fase e a linha nas secções de Poincaré indica que as soluções do sistema são curvas fechadas. Verifica-se na Figura (3.20) que um ligeiro aumento da amplitude de excitação provoca uma perda de estabilidade resultando no aparecimento de ciclos limites múltiplos e na duplicação dos períodos desses ciclos limites.

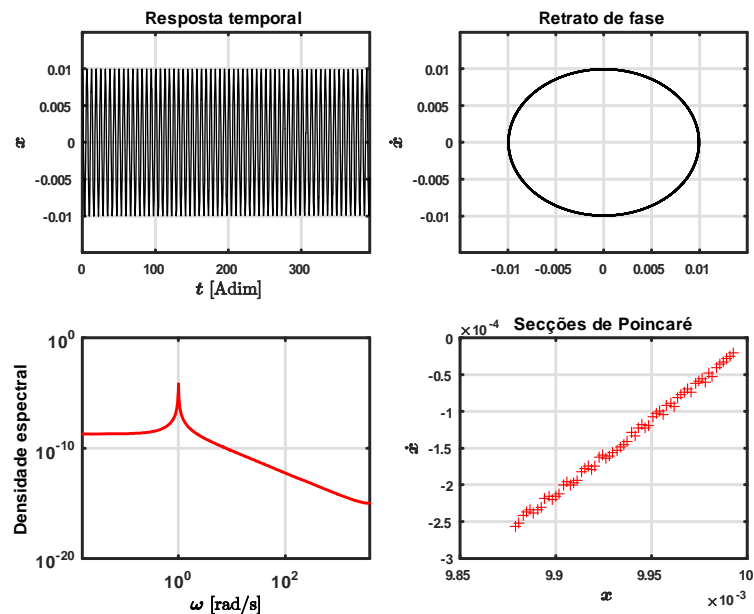


Figura 3.19:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + y - y^3 = 0.01 \cos(\tau)$  (Configuração *Rayleigh* conservativa): ciclo limite.

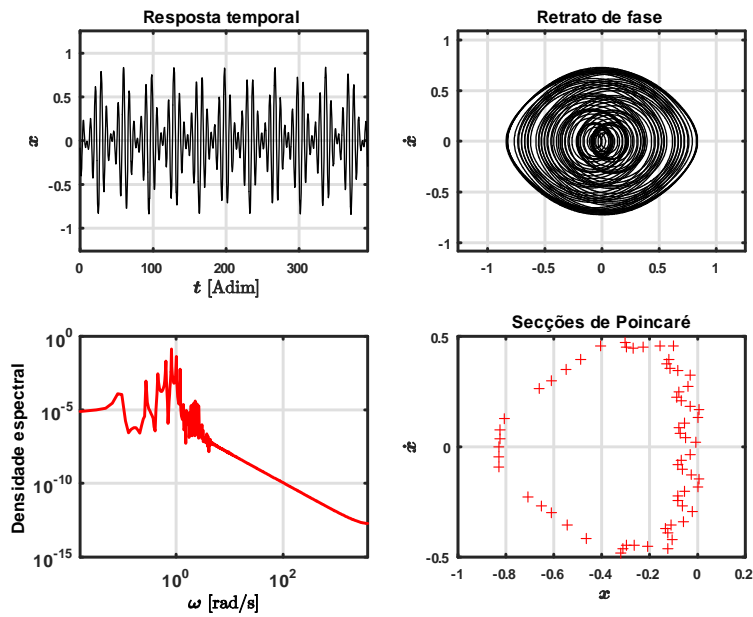


Figura 3.20:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + y - y^3 = 0.1 \cos(\tau)$  (Configuração *Rayleigh* conservativa): duplicações de período.

Visto que esta configuração deriva da configuração de *Rayleigh* era de esperar que tivessem comportamentos semelhantes o que acabou por se verificar. Pelo mesmo motivo, conclui-se que esta configuração não pode ser considerada para o propósito de deteção de sinais harmónicos

### 3.4.3 Configuração de *Patil e Mallick*

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} + y + y^3 = F \cos(\tau). \quad (3.58)$$

Esta secção dedica-se à configuração de *Patil e Mallick* (3.58). Esta configuração apresenta o termo de amortecimento com o valor de  $\zeta = \frac{1}{4}$ , e tanto o coeficiente linear como o coeficiente cúbico de rigidez não linear são positivos ( $s > 0$  e  $\gamma > 0$ ). Tal como no estudo das outras configurações, realizaram-se inicialmente simulações variando os valores da amplitude de excitação  $F$  de 0.1 em 0.1 até  $F = 1$ , e de 1 a 5 observou-se a evolução de 0.2 em 0.2. Ao analisar os gráficos que foram gerados foi possível concluir que a equação não apresenta sensibilidade às mudanças da amplitude de excitação, ou seja, o movimento tende logo desde o início para um ciclo limite (Figura (3.21)), que apenas sofre pequenas deformações à medida que  $F$  aumenta que se podem observar na Figura (3.22), mas que nunca chega a passar pelo estado caótico.

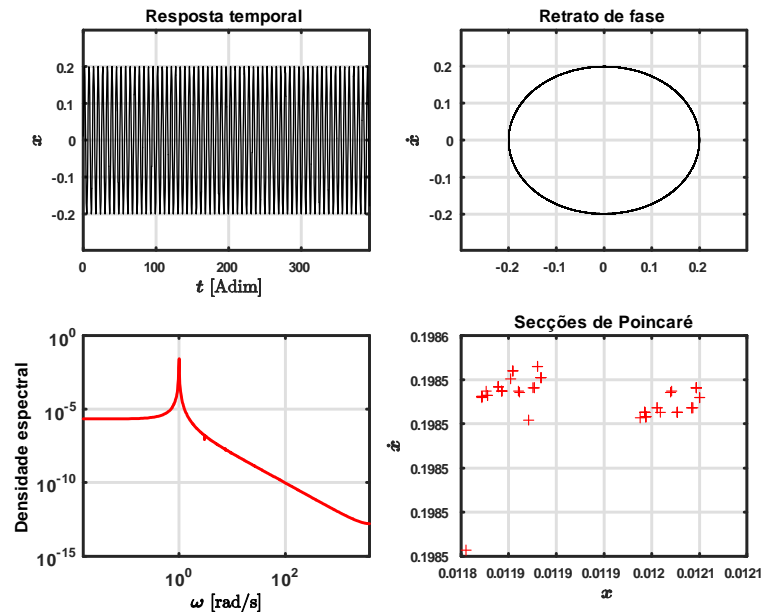


Figura 3.21:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} + y + y^3 = 0.1 \cos(\tau)$  (Configuração *Patil e Mallick*): estado periódico.

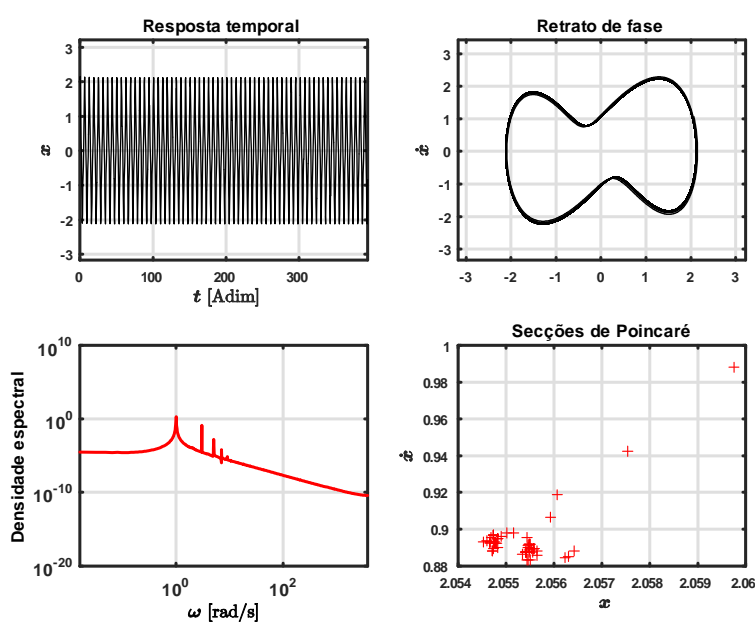


Figura 3.22:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} + y + y^3 = 0.05 \cos(\tau)$  (Configuração *Patil e Mallick*): estado periódico.

Tal coincide com os estudo analítico realizado em (Ivana Kovacic, 2011) que revela que se as condições  $(\Omega)^2 = s$  e  $0 < \zeta < \Omega$  se verificarem, o ponto fixo vai ser um nó estável, o que implica uma amplitude harmónica estável.

Assim, devido ao facto de nesta configuração nunca haver um comportamento caótico, não é possível considerá-la como um mecanismo de deteção de sinais periódicos.

### Caso conservativo da configuração de *Patil e Mallick*

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + y + y^3 = F \cos(\tau). \quad (3.59)$$

Esta secção dedica-se ao caso conservativo da configuração de *Patil e Mallick* (3.59). Esta configuração apresenta o termo de amortecimento nulo ( $\zeta = 0$ ), e tanto o coeficiente linear como o coeficiente cúbico de rigidez não linear são positivos ( $s > 0$  e  $\gamma > 0$ ). À semelhança das outras configurações, realizámos simulações numéricas tendo em vista gerar os gráficos correspondentes aos diferentes valores de amplitude de excitação, sendo que de 0 a 1 estudou-se de 0.1 em 0.1, e de 1 a 5 de 0.2 em 0.2.

É possível constatar, com base nas simulações numéricas realizadas, que a resposta não apresenta alterações qualitativas de comportamento, associadas ao aumento da amplitude  $F$ . Na Figura (3.23) ilustramos o comportamento típico da resposta desta configuração.

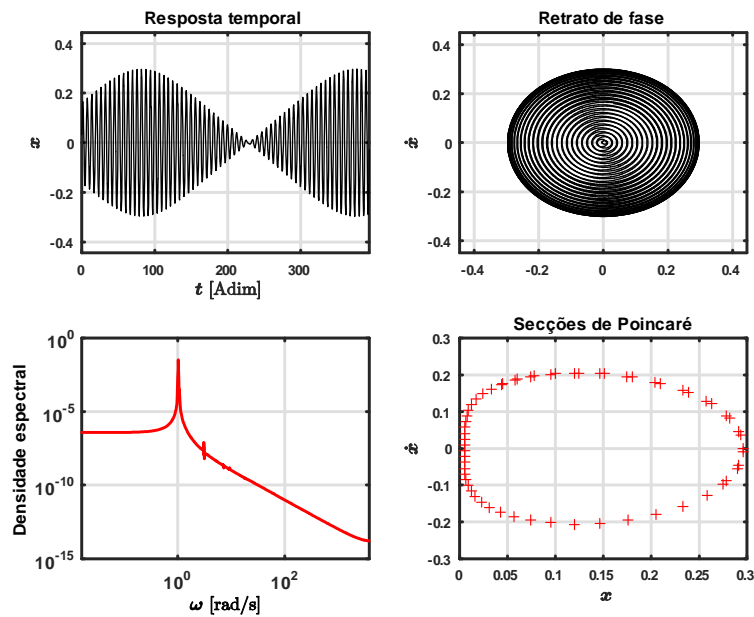


Figura 3.23:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + y + y^3 = 0.05 \cos(\tau)$  (Configuração *Patil e Mallick* conservativa): estado periódico.

Assim conclui-se que o amortecimento toma um papel extremamente importante num sistema simples como este, pois sem esta componente o sistema não apresenta mudanças de estado que permitam torná-lo um identificador de sinais periódicos.

Em suma, os resultados destas simulações revelaram que a configuração *Moon-Holmes* é a única que podemos concluir ser possível para a detecção de sinais.



## Capítulo 4

# Aplicações da equação de *Duffing* à deteção de sinais

Tal como já foi referido, diversas obras e artigos projetam as potencialidades do oscilador *Duffing-Holmes* para a deteção de sinais fracos sob a influência de ruído. A deteção, por técnicas matemáticas, da alteração da dinâmica exibida pela equação em estudo está na base do estabelecimento das metodologias de identificação atualmente em desenvolvimento (Wang et al., 2016).

A deteção e medição de sinais fracos em ambientes ruidosos é um dos problemas mais desafiantes em muitas áreas. Especialmente em setores como comunicação, radar, sonar, deteção de falhas, GPS e medição industrial, desempenha um papel importante. Embora alguns métodos tenham sido apresentados anteriormente para deteção de sinais fracos, como autocorrelação em camada única, autocorrelação em várias camadas e outros métodos (Zheng and Zhang, 2010), a imunidade ao ruído era uma meta ainda não alcançada. No seio do rápido desenvolvimento da teoria do caos (Crutchfield et al., 1986), surgiu a aplicação do caos para detetar sinais fracos, em 1992. Donald L. Bix descobriu que quando o sistema se encontrava num estado caótico tinha sensibilidade a sinais fracos e mais importante ainda, uma determinada imunidade ao ruído (Bix and Pipenberg, 1992). Tendo por base este facto, surgiram diversos autores que tentaram utilizar este fenómeno recorrendo à equação de *Duffing* (Li and Liu, 2012), (Qin et al., 2010), (Zhihong and Shaopu, 2015), fazendo desta um dos sistemas não lineares mais usados atualmente para detetar sinais fracos.

É exemplo desta aplicação, o estudo realizado por Liu (Liu and Liu, 2011), no âmbito das comunicações realizadas através de sistemas de telemetria acústica, no interior de explorações petrolíferas. Foi confirmado que o fenómeno da alteração repentina da dinâmica dum sistema não linear, pode ser usado para a deteção de sinais fracos. Tal é feito adicionando um sinal

de referência, com uma frequência idêntica à do sinal a detetar e amplitude ligeiramente menor que o limiar de transição de comportamento do sistema. De seguida, o sinal previamente preparado é adicionado ao sinal cujo conteúdo espectral se pretende detetar e este conjunto utilizado como excitação externa do sistema não linear. A mudança de comportamento, de caótico para periódico, assinala a presença do sinal que se pretende detetar. Na implementação deste conceito utilizaremos o oscilador caótico de *Duffing*.

Um interessante estudo dos limiares de detecção na presença de ruído, pode encontrar-se em (Hu and Wen, 2003), no qual o valor mínimo da relação sinal-ruído (SNR), ou seja, de capacidade de detecção com a influência de ruído branco Gaussiano, foi estabelecido em  $-63$  dB, revelando a esta técnica, um elevado potencial de detecção.

O capítulo anterior permitiu chegar à configuração da equação de *Duffing* mais apropriada para implementar este conceito de detecção de sinais harmónicos. A escolha da configuração mais apropriada recaiu no modelo de *Moon-Holmes*. Seguidamente, iremos pesquisar quais os valores mais apropriados para os parâmetros em aberto nesta configuração, nomeadamente, o valor do amortecimento  $\zeta$  e o valor do coeficiente de rigidez não linear  $\gamma$ . Começaremos por realizar o estudo do valor adequado para o fator de amortecimento e posteriormente realizaremos o estudo do valor adequado para o coeficiente de rigidez não linear  $\gamma$ . Para isto, nas simulações numéricas, ao sinal externo, será adicionado, pelos motivos enunciados na secção 2.5, ruído branco Gaussiano e ainda ruído cor de rosa e verificar-se-á se continuam a apresentar a mudança do estado caótico para o estado periódico nas condições previstas. De forma a realizar esta análise, para além dos gráficos de resposta temporal (ou traçado da série temporal), os diagramas de fase, os gráficos de densidade de potência espectral (PSD) e os diagramas de Poincaré, foram elaborados gráficos da série temporal e PSD da excitação externa.

A percentagem de ruído adicionado ao sinal de referência respeitou a seguinte expressão:

$$SNR = \frac{100}{p}. \quad (4.1)$$

sendo  $p$  a percentagem de ruído em relação ao sinal ( $F \cos(\Omega\tau)$ ).

Resumindo, trabalharemos com o sistema:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + sy + \gamma y^3 = F \cos(\Omega\tau) + S(\tau) \quad (4.2)$$

em que  $S(\tau)$  representa o ruído, podendo este ser Gaussiano branco ou cor de rosa.

Importa referir, que foi necessário estabelecer um parâmetro de caracterização da sensibilidade e este consiste no valor do declive médio das retas criadas a partir dos pontos que correspondem às amplitudes de excitação críticas, ou seja, aquelas em que ocorre a mudança de regime, com diferentes níveis de ruído. Quanto menor for o declive destas retas, menor será a influência do ruído.

O objetivo deste capítulo será assim, otimizar a configuração *Moon-Holmes* para atividades de identificação de sinais fracos contaminados com ruído, ou seja, escolher os parâmetros  $\zeta$  e  $\gamma$  de forma a tornarem o identificador mais "surdo" (menos sensível) ao ruído e mais robusto.

## 4.1 Análise da influência do amortecimento

Esta secção tem como objetivo encontrar o valor do fator de amortecimento  $\zeta$  para o qual a configuração de *Moon-Holmes* (3.54) apresenta um melhor desempenho na deteção de sinais periódicos ténues na presença de ruído.

Na secção 3.2.2 mostrou-se que o valor máximo do parâmetro de amortecimento, para o qual a curva de *backbone*, exhibe saltos de frequência e uma mudança de regime, é  $\zeta_{\max} = 0.5$ . No entanto, a realização de simulações numéricas preliminares, revelaram que apenas para valores de  $\zeta < 0.4$  é que a equação era, suficientemente, sensível a variações de amplitude de excitação externa. Nas simulações numéricas que se seguirão, identificaremos as amplitudes de excitação nas quais ocorre a mudança de regime ( $F^*$ ), para os diferentes valores do fator de amortecimento possíveis. Podemos observar, na Figura (4.1), que o o fator de amortecimento máximo, no qual há a passagem de estado, é de  $\zeta = 0.35$ . Observa-se também que quanto maior o fator de amortecimento, maior a amplitude de excitação em que ocorre a mudança de regime ( $F^*$ ).

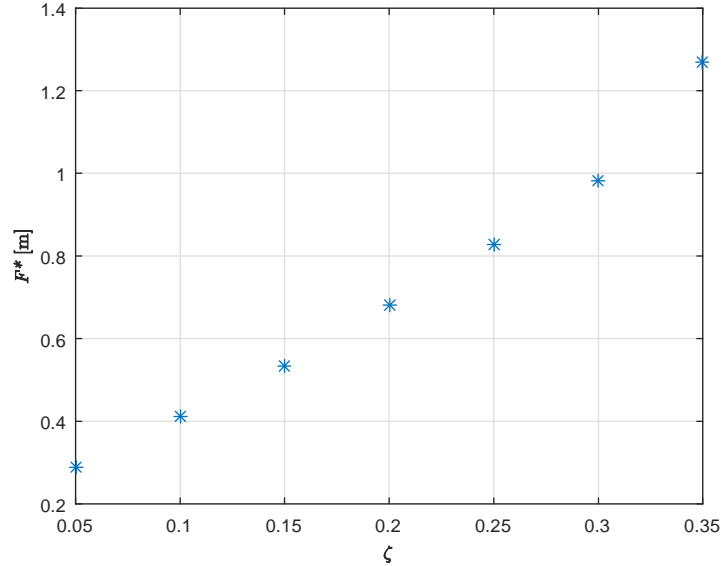


Figura 4.1:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F^* \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): amplitude de excitação em que ocorre a mudança de estado em relação ao fator de amortecimento  $\zeta$ .

Como referido, o intervalo de interesse para o estudo dos valores a adotar para o fator de amortecimento é  $0 < \zeta < 0.4$ . Seguidamente, apresentaremos as simulações com a adição de ruído branco Gaussiano, supondo  $\Omega = 1$ , utilizando  $\zeta = 0.05$ ;  $\zeta = 0.1$ ;  $\zeta = 0.15$ ;  $\zeta = 0.2$ ;  $\zeta = 0.25$ ;  $\zeta = 0.30$  e  $\zeta = 0.35$ .

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F \cos(\tau). \quad (4.3)$$

Na Figura (4.2) podemos observar um gráfico que relaciona as simulações realizadas com diferentes níveis de ruído Gaussiano branco com a amplitude de excitação em que ocorre a mudança de regime na respetiva simulação. Foi ainda descrita uma reta de regressão para cada conjunto de simulações com cada valor do fator de amortecimento. Podemos concluir que em todas as configurações foi possível achar a amplitude de excitação que permite a mudança de estado, e para saber qual a configuração que é mais "surda" ao ruído, comparou-se os declives das retas de regressão, sendo que, tal como já foi referido, um declive menor indica uma menor alteração entre as amplitudes de mudança e a ascendente adição do nível de ruído, e portanto uma menor sensibilidade a este. Visto que a configuração com  $\zeta = 0.1$ , é a que apresenta uma reta de regressão com declive menor ( $Declive = 4.54 \times 10^{-05}$ ), conclui-se que é esta que apresenta menor sensibilidade ao ruído branco.

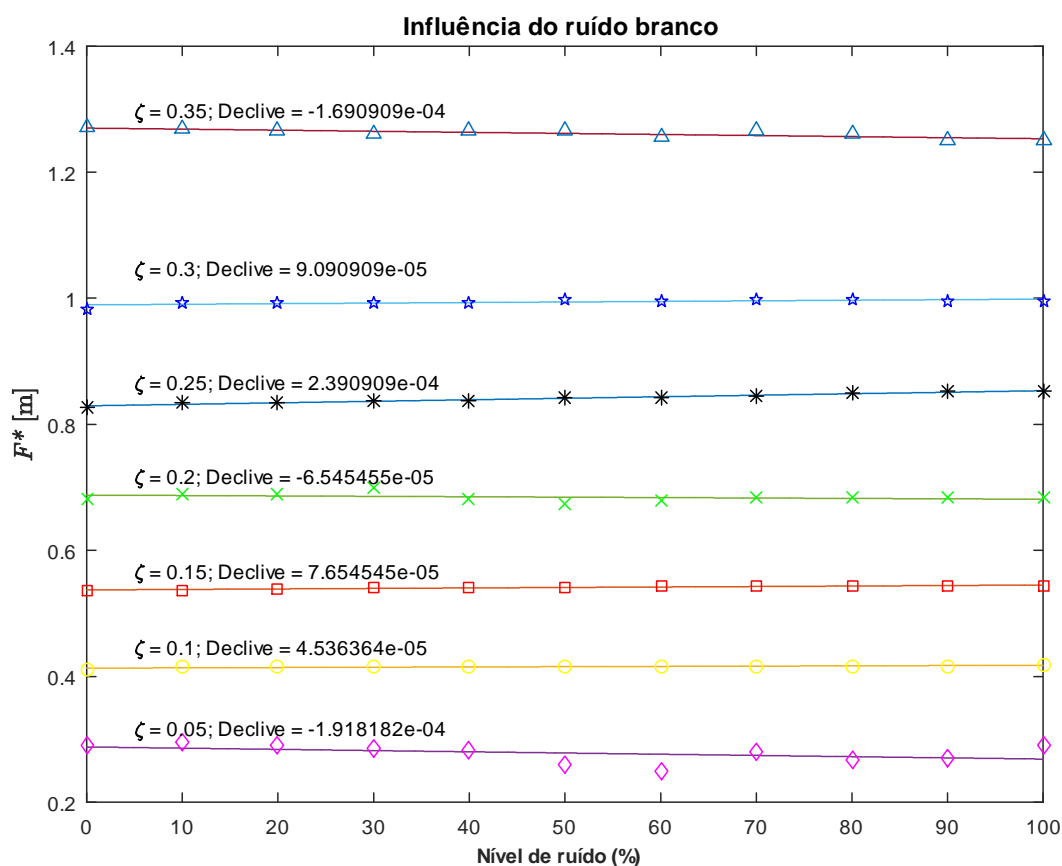


Figura 4.2: Gráfico de sensibilidade ao ruído branco para a configuração Moon-Holmes:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F \cos(\tau) + S(\tau)$ .

Seguidamente, foram realizados testes com ruído cor de rosa, pelos motivos expostos na secção 2.5, que permitiram constatar a escolha anterior. Na Figura (4.3) está representado um gráfico que foi obtido da mesma forma que o gráfico da Figura (4.2), mas em vez de se adicionar ruído branco, foi adicionado ruído cor de rosa.

Conclui-se que, contrariamente ao que acontece com o ruído branco, as diferentes configurações da equação não exibem um comportamento linear no que diz respeito à influência do ruído cor de rosa. Mais ainda, à exceção da configuração com  $\zeta = 0.1$ , todas as outras, a partir de um determinado nível de ruído cor de rosa, deixam de verificar a passagem do estado caótico para periódico, prevalecendo o comportamento caótico. A única configuração capaz de manter esta passagem é aquela que foi considerada anteriormente como a mais surda ao ruído branco Gaussiano, concluindo-se que a escolha do parâmetro de amortecimento  $\zeta = 0.1$  é a que permite uma menor sensibi-

lidade ao ruído e por isso mais favorável à detecção de sinais fracos afogados em ruído.

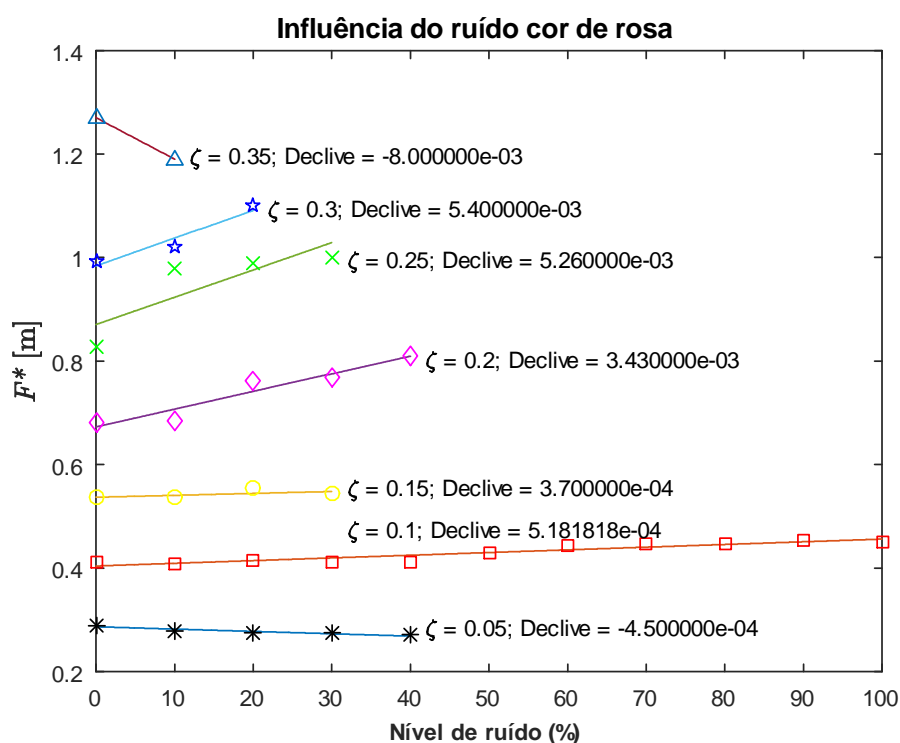


Figura 4.3: Gráfico de sensibilidade ao ruído cor de rosa para a configuração Moon-Holmes:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F \cos(\tau)$ .

## 4.2 Análise da influência da rigidez não linear

Iremos proceder agora ao estudo da influência do coeficiente de rigidez não linear. Começamos por considerar os valores  $\gamma = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 10$ .

A análise da influência da componente que controla a rigidez não linear, realizou-se pelo ensaio das curvas de *backbone*, obtidas a partir da Equação (3.49), dependentes de  $\gamma$  e considerando  $F = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $s = -1$  e  $\zeta = 0.1$ :

$$B^3\gamma^2 - \frac{16}{3}\gamma B^2 + \frac{1616}{225}B - \frac{16}{9} = 0 \quad (4.4)$$

A Figura (4.4), onde estão representadas estas mesmas curvas, permite concluir que o aumento de  $\gamma$  determina o aumento da frequência para a qual a resposta em amplitude deixa de ser unívoca (protelando em frequência a ocorrência desse fenómeno), ou seja, o pico (que se refere à mudança de estado do sistema) ocorre a frequências mais elevadas. Este resultado já seria de esperar, visto que, quanto maior for a rigidez dum sistema, maior

energia será necessária para que ele mude de estado. Por outro lado, quando  $\gamma$  aumenta, a amplitude máxima da resposta diminui. Este comportamento é coerente com o que sucede qualitativamente com sistemas lineares com o aumento da rigidez.

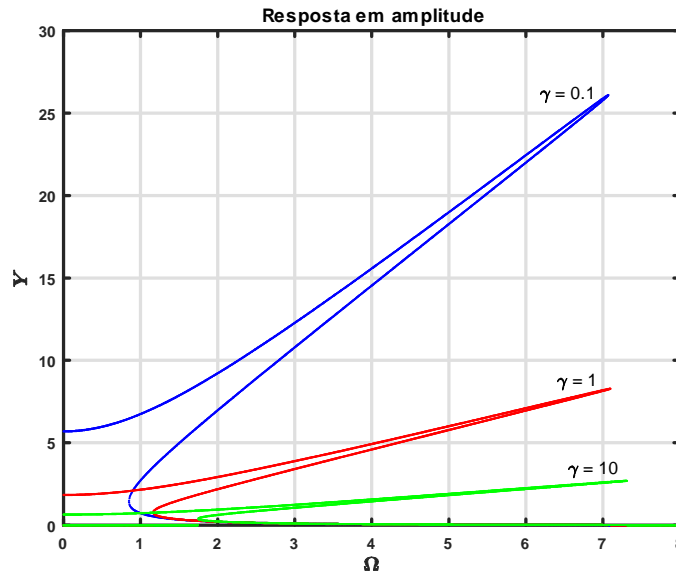


Figura 4.4: Curvas de resposta de amplitude para diferentes valores de amortecimento. O valor usado para contruir as curvas foi  $F = 0.3$ .

Para além do estudo das curvas de *backbone*, foram realizadas simulações numéricas com  $\gamma = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 10$ . Inicialmente, adicionaram-se diferentes níveis de ruído branco Gaussiano mas não se verificaram alterações significativas nas amplitudes de excitação críticas. Seguidamente, procedeu-se ao estudo das simulações numéricas com a adição de ruído cor de rosa, com níveis até 500%. Pode observar-se, pelos resultados ilustrados na Figura (4.5), que apenas a configuração que apresenta o termo de rigidez não linear  $\gamma = 1$  é que mantém a capacidade de deteção do sinal mesmo com a adição de ruído muito superior às outras configurações.

Podemos concluir resumidamente que objetivo de otimização da configuração *Moon-Holmes* para a deteção de sinais harmónicos com ruído perturbativo, foi cumprido, visto terem sido encontrados os valores dos parâmetros mais vantajosos,  $\zeta = 0.1$  e  $\gamma = 1$ .

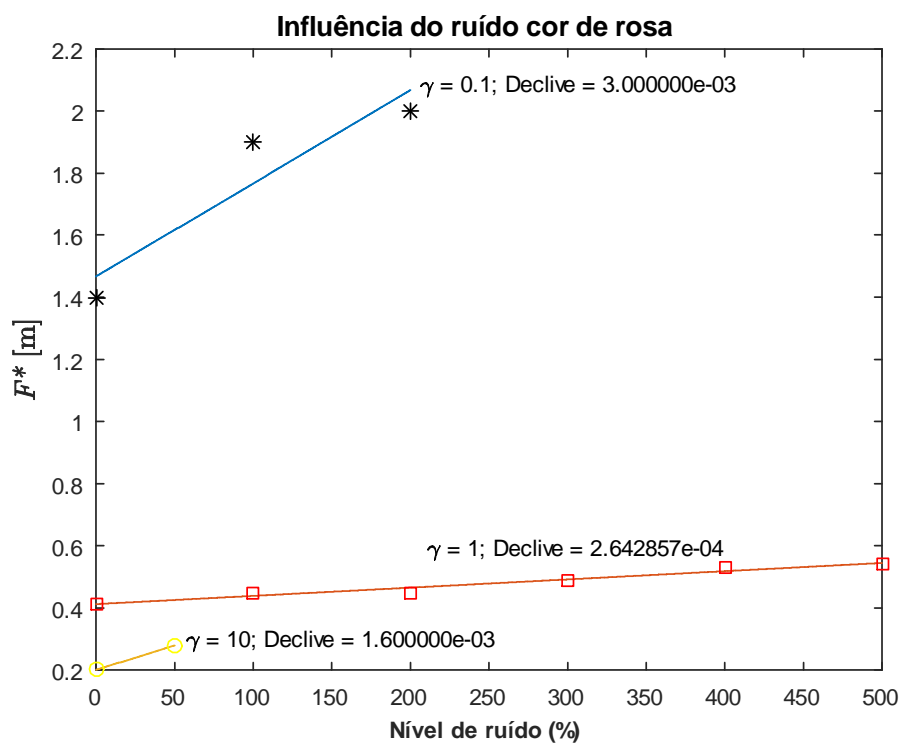


Figura 4.5:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + \gamma y^3 = F \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): sensibilidade ao ruído cor de rosa para  $\gamma = 0.1$ ,  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 10$ .

### 4.3 Estudo numérico exploratório da capacidade de deteção com ruído

Escolhida a configuração adequada para a deteção de sinais periódicos na presença de ruído (configuração de *Moon-Holmes* com  $\zeta = 0.1$  e  $\gamma = 1$ ), interessa agora avaliar como é que esta configuração responde à presença de ruído. Lembra-se que sem a adição de ruído, a amplitude de excitação que desencadeia a passagem do estado caótico para o estado periódico é  $F^* = 0.411$ .

A situação altera-se quando o sinal a estudar está contaminado com ruído. Nesta situação, os limiares de mudança de estado  $F^*$  alteram-se como observámos nas secções anteriores, Figuras (4.3) e (4.5). Podemos verificar que os limiares  $F^*$  de mudança de estado aumentam com a adição de ruído se considerarmos a configuração adotada:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} + y + y^3 = F \cos(\Omega\tau). \quad (4.5)$$

Nas Figuras (4.6) e (4.7) apresentamos as simulações numéricas do estado do sistema após a ultrapassagem dos novos limiares de mudança de estado (para o estado periódico) face à adição de 100% de ruído Gaussiano e cor de rosa, respetivamente, no sistema indicado.

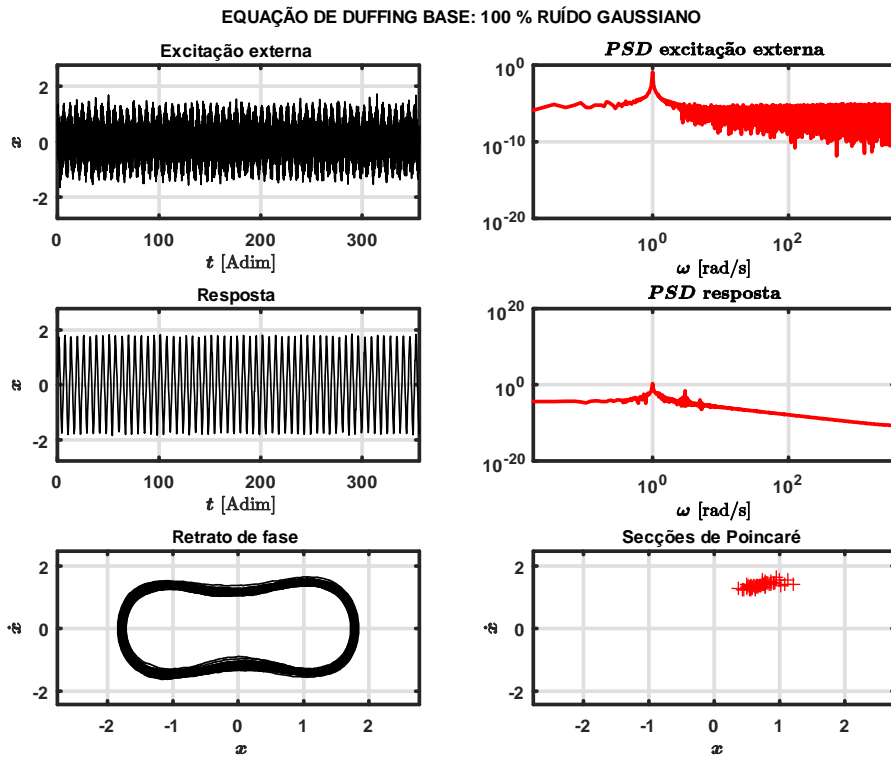


Figura 4.6:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.418 \cos(\tau) + S(\tau)$ : alteração do limiar de passagem a estado periódico com a adição de 100% de ruído branco Gaussiano,  $F^* = 0.418$ .

Como podemos verificar no PSD da excitação externa (correspondente ao ruído cor de rosa) existe um decaimento à medida que a frequência aumenta, uma das características deste tipo de ruído, já abordado. Este efeito acaba por alterar de forma mais notória a resposta do sistema, apesar de ainda ocorrer mudança de estado.

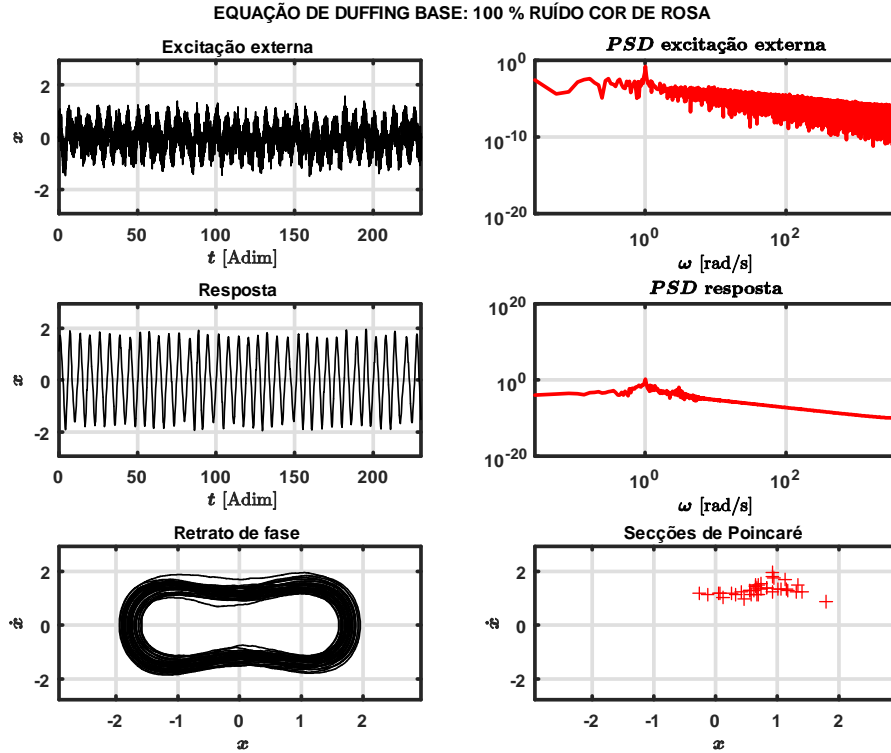


Figura 4.7:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0.45 \cos(\tau) + S(\tau)$ : alteração do limiar de passagem a estado periódico com a adição de 100% de ruído cor de rosa,  $F^* = 0.45$ .

De forma a avaliar a robustez do modelo, foram realizadas simulações tendo em vista conhecer o limite máximo de ruído que é possível considerar sem que o sistema perca a sua capacidade de deteção. Na Figura (4.8) é possível observar que para a configuração com  $\zeta = 0.25$  o valor de ruído máximo é de 19000%, que é cerca de  $-23$  dB. No entanto, as simulações com a configuração com  $\zeta = 0.1$  revelaram que têm uma tolerância ao ruído maior que a configuração anterior, podendo detetar a mudança de regime até 25000% de ruído branco, que é cerca de  $-24$  dB. Lembra-se que, na literatura, para a configuração de *Moon-Holmes* com  $\zeta = 0.25$  e  $\gamma = 1$ , o valor do SNR máximo para o ruído Gaussiano branco é  $-63$  dB, o que equivale a 200000000% de nível de ruído. No entanto, as simulações realizadas

revelaram valores muito inferiores. Apesar disto, o valor de SNR obtido nas simulações numéricas é bastante satisfatório no contexto dos sistemas de deteção na presença de ruído.

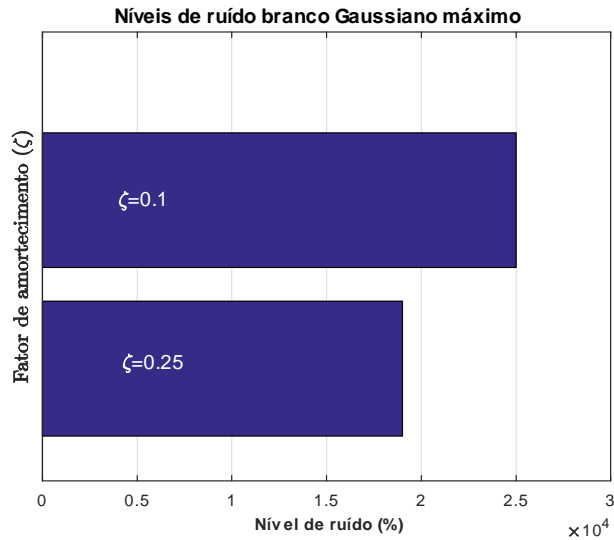


Figura 4.8:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F^* \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): Níveis de ruído branco Gaussiano máximo.

Comparou-se ainda o nível máximo de ruído branco Gaussiano para que ocorra a mudança de regime, com o nível máximo de ruído cor de rosa. Os resultados estão representados na Figura (4.9), o sistema consegue detetar níveis de ruído branco Gaussiano, cerca de 25000%, superiores aos níveis de ruído cor de rosa, cerca de 11000%. Pode-se concluir que, como seria de esperar, o sistema tem uma sensibilidade ao ruído cor de rosa muito maior mas que, mesmo assim, é possível haver deteção de sinais harmónicos com níveis elevados deste ruído.

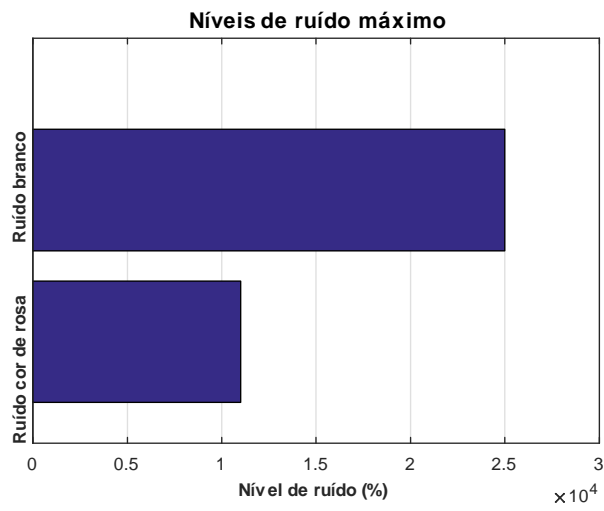


Figura 4.9:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F^* \cos(\tau)$  (Configuração *Moon-Holmes*): Níveis de ruído branco Gaussiano e ruído cor de rosa máximos.

## 4.4 Técnica de transformação de escala do tempo

A configuração de detecção adequada permite detetar sinais harmónicos com uma frequência angular de 1 rad/s. Tendo em vista alargar a possibilidade de detecção a um suficientemente amplo intervalo de frequências torna-se necessário efetuar uma transformação de escala do tempo.

Esta mudança de escala temporal permite reformular a configuração de *Duffing* adotada (4.6) de forma a relocalizar a sua frequência de ressonância na frequência de detecção pretendida  $\Omega_0$ .

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} + sy + \gamma y^3 = F \cos(\Omega\tau) \quad (4.6)$$

Introduza-se a seguinte mudança de variável:

$$\tau = \Omega_0\tau_0 \quad (4.7)$$

e defina-se

$$y(\tau) = z(\tau_0). \quad (4.8)$$

Desta forma,

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau_0} \frac{d\tau_0}{d\tau} = \frac{1}{\Omega_0} \frac{dz}{d\tau_0} \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{d^2z}{d\tau_0^2}, \quad (4.10)$$

e

$$\frac{1}{\Omega_0^2} \frac{d^2z}{d\tau_0^2} + 2\zeta \frac{1}{\Omega_0} \frac{dz}{d\tau_0} + sz + \gamma z^3 = F \cos(\Omega_0\tau_0) + \phi(\tau_0) \quad (4.11)$$

Pelo que se garante a mesma resposta, para os valores de amplitude de excitação:

$$F_c = (\Omega_0)^2 F \quad (4.12)$$

sendo  $F_c$  a amplitude de excitação corrigida para a frequência  $\Omega_0$  do sinal.

A Tabela 4.1 foi realizada a partir dos resultados das simulações com diferentes valores da frequência de excitação  $\Omega_0$  e verificada a amplitude de excitação em que provocava a mudança de regime:

	$\Omega_0 = 1$	$\Omega_0 = 5$	$\Omega_0 = 10$	$\Omega_0 = 20$
0% ruído	0.411	0.411	0.411	0.411
100% ruído branco Gaussiano	0.418	0.418	0.421	0.421
100% ruído cor de rosa	0.45	0.43	0.435	0.435

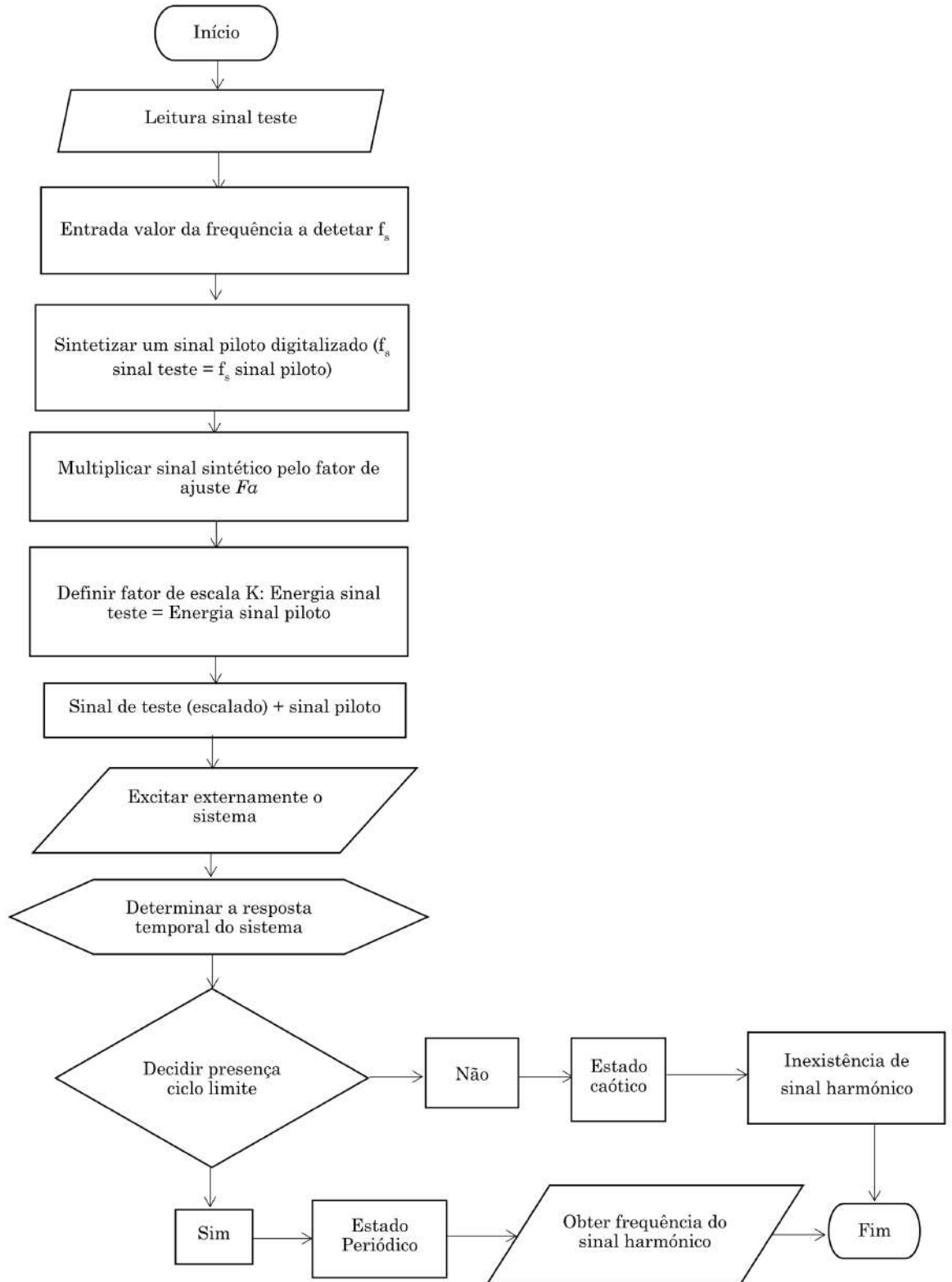
Tabela 4.1:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.1\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = F \cos(\Omega_0\tau)$ : resposta à mudança de frequência de excitação.

Constata-se que, nas simulações sem ruído, as amplitudes de excitação para as diferentes frequências de excitação, são iguais. Mas para as simulações com ruído há pequenas alterações, dentro da mesma ordem de grandeza, que se podem dever a erros de resolução numérica do ode45.

## 4.5 Formulação do algoritmo de deteção

Tendo por objetivo dispor dum algoritmo capaz de detetar sinais periódicos mergulhados em ruído, foi elaborado um programa em MATLAB, que através dos gráficos gerados, indica, se o sistema está num regime periódico ou não. Na próxima secção apresentar-se-á uma descrição sumária da sequência de ações a tomar para a deteção de um sinal periódico. Para tal serão propostos um fluxograma, que esquematiza o processo e um pseudocódigo ou PDL (*Program Design Language*), pois permite equilibrar a compreensão do algoritmo e a precisão do código de programação.

De seguida, apresenta-se o fluxograma que deve ser seguido para identificar a presença dum sinal harmónico de baixa frequência (entre 0 e 50 Hz):



Como pode verificar-se pela leitura do fluxograma, inicialmente, recolhe-se o sinal de teste, pelo que se admite que se conhece a frequência do sinal  $\Omega_0$ , cuja presença se pretende identificar.

Numa segunda fase, determinam-se os parâmetros de resolução numérica, tais como a frequência de amostragem  $f_s$  e o tempo de amostragem  $T$ . Depois, é necessário criar um sinal piloto  $Sp$ , que terá de ser digitalizado à mesma frequência de amostragem do sinal teste  $St$ , da seguinte forma:

$$Sp = F^*(\Omega_0)^2 \cos(\Omega_0\tau) \quad (4.13)$$

Para verificar a sensibilidade do sistema ao sinal periódico, o sinal piloto terá de ter uma amplitude de excitação ligeiramente inferior da necessária para a mudança de estado. Para isto, é criado o fator de ajuste ( $Fa$ ), que irá afetar o sinal piloto:

$$Sp = [F^*(\Omega_0)^2 \cos(\Omega_0\tau)]Fa \quad (4.14)$$

De seguida, para normalizar o sinal sintético, é necessário definir um fator de escala  $K$ , de forma que a potência de energia gerada  $Sp + K.St$  esteja abaixo da percentagem de ruído máximo que o sistema de deteção suporta.

Posteriormente, adicionam-se os dois sinais, o sinal piloto e o sinal teste ruidoso (já com a mudança de escala apropriada) e aplica-se o sinal como excitação externa do sistema.

Na fase final, a resposta do sistema terá que ser analisada e se constatada a periodicidade da resposta, pode concluir-se que estamos na presença de um sinal harmónico e daqui retirar a frequência deste sinal. Caso contrário, conclui-se que o sinal não tem nenhuma componente harmónica.

De seguida apresentar-se-á o pseudocódigo, associado ao algoritmo de deteção:

1. Get signal to be tested (test signal);
2. Get signal frequency  $\Omega_0$
3. Get test signal sampling frequency  $f_s$  and sampling period  $T$
4. Compute a pilot signal  $Sp = F^*(\Omega_0)^2 \cos(\Omega_0\tau)$ ;
5. Apply adjustment factor  $Fa$  to pilot signal:  $Sp = [F^*(\Omega_0)^2 \cos(\Omega_0\tau)]Fa$
6. For  $Sp + K.St <$  maximum percentage of noise
  - 6.1. Define scale factor  $K$

7. Normalize the test signal so that it has the same energy as the pilot signal
8. Add pilot signal to the test signal (scaled)
  - 8.1. Insert signal to identification system
  - 8.2. Calculate system's temporal response
  - 8.3. If is present a limit cycle
    - 8.3.1. System is in periodic state
    - 8.3.2. Confirmation of the presence of a harmonic signal
    - 8.3.3. Display signal frequency
  - 8.4. Else
    - 8.4.1. System is in chaotic state
    - 8.4.2. There is no presence of a harmonic signal
9. End

O pseudocódigo apresentado é uma proposta para um algoritmo de detecção que permita a automatização de todo o processo e uma menor intervenção do utilizador.

## 4.6 Validação do algoritmo

Para que sejam conhecidas as potencialidades e possíveis limitações de um algoritmo, é necessário validá-lo. Para isso, o conceito descrito na secção anterior, foi preliminarmente testado com sinais sintéticos com ruído. Dividiram-se as simulações em 2 conjuntos de sinais:

1. Sinais de teste com a presença de diferentes amplitudes do sinal a detetar;
2. Sinais de teste sem a presença de sinais harmónicos.

A primeira simulação do primeiro conjunto foi realizada com um sinal criado sinteticamente com as seguintes características:

- Frequência de amostragem:  $f_s = 11025$  Hz;
- Tempo de amostragem:  $T = 60$ s;

- Sinal a detetar:  $9.75 \cos(5\tau)$ ;
- Percentagem de ruído cor de rosa: 300%.

A Figura (4.10) ilustra os gráficos gerados na simulação e é possível verificar que o diagrama de fase apresenta um ciclo limite, verificando a existência de um sinal periódico à frequência indicada inicialmente no sinal de teste.

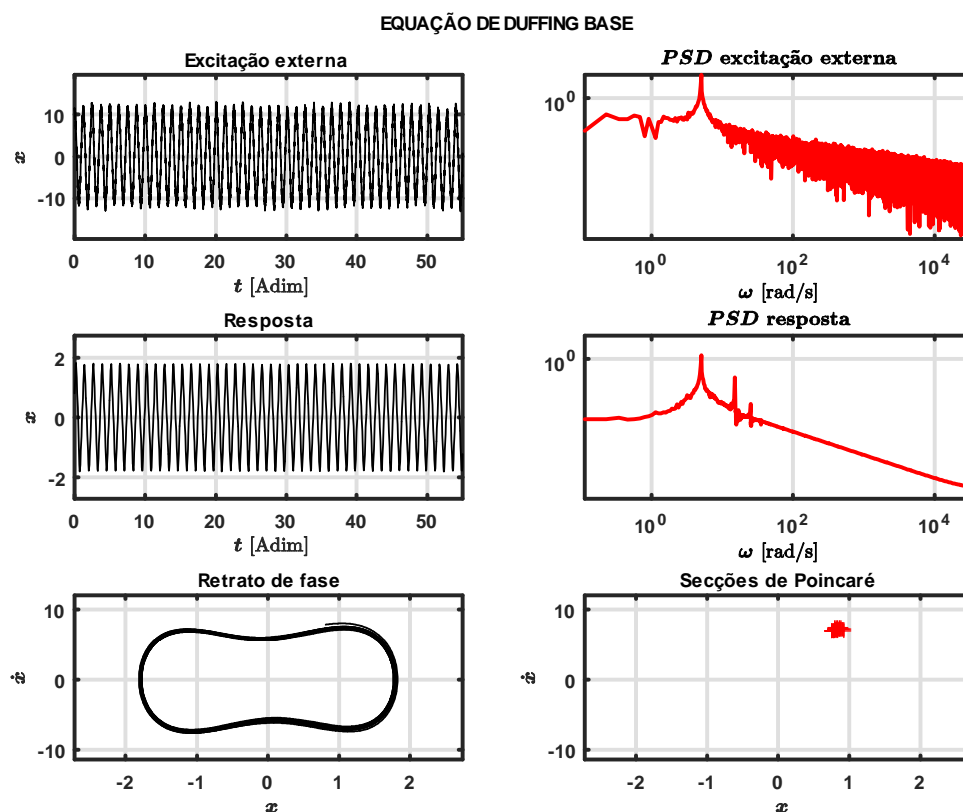


Figura 4.10:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 9.75 \cos(5\tau)$ : simulação com sinal sintético com 300% de ruído cor de rosa com presença de componentes harmónicas.

De seguida apresenta-se o segundo exemplo do conjunto de sinais de teste com a presença de diferentes amplitudes do sinal a detetar, que tem as seguintes características:

- Frequência de amostragem:  $f_s = 11025$  Hz;
- Tempo de amostragem:  $T = 60$ s;
- Sinal a detetar:  $9.75 \cos(5\tau)$ ;

- Percentagem de ruído cor de rosa: 500%.

A Figura (4.11), é o resultado da simulação numérica com o sinal com 500% de ruído cor de rosa. Também é possível observar um comportamento periódico, verificando a existência de um sinal periódico com 5 Hz.

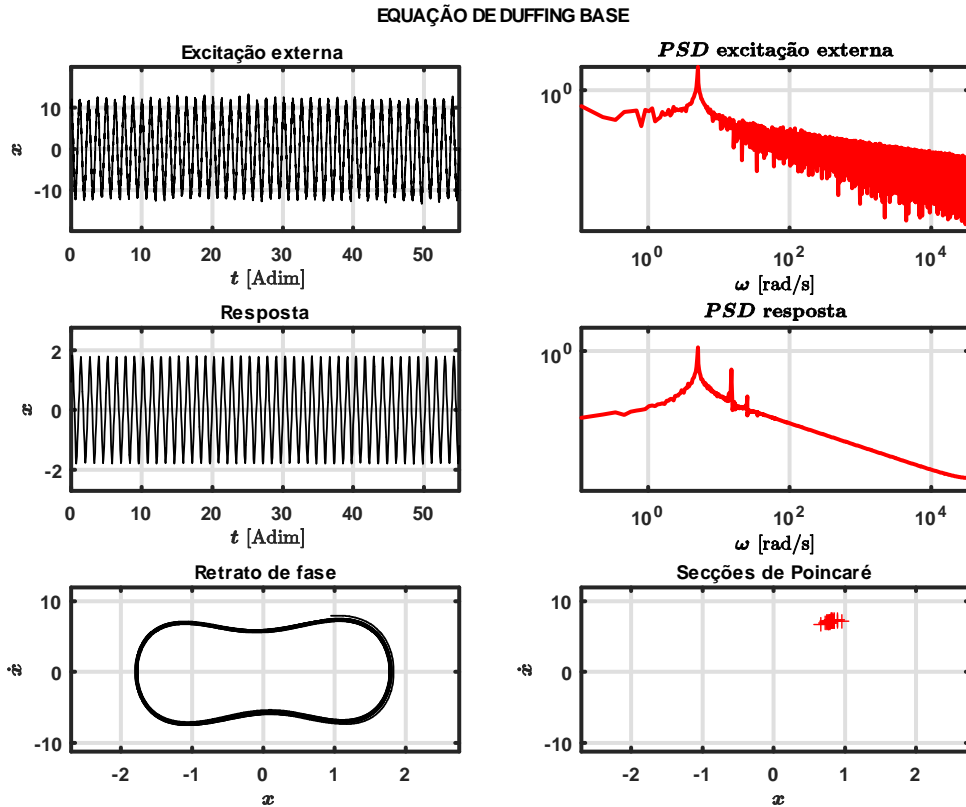


Figura 4.11:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 9.75 \cos(5\tau)$ : simulação com sinal sintético com 500% de ruído cor de rosa com presença de componentes harmônicas.

Segue-se o terceiro exemplo do primeiro conjunto de sinais testados. Este sinal apresenta as seguintes características:

- Frequência de amostragem:  $f_s = 11025$  Hz;
- Tempo de amostragem:  $T = 60$ s;
- Sinal a detetar:  $0.1 \cos(5\tau)$ ;
- Percentagem de ruído cor de rosa: 500%.

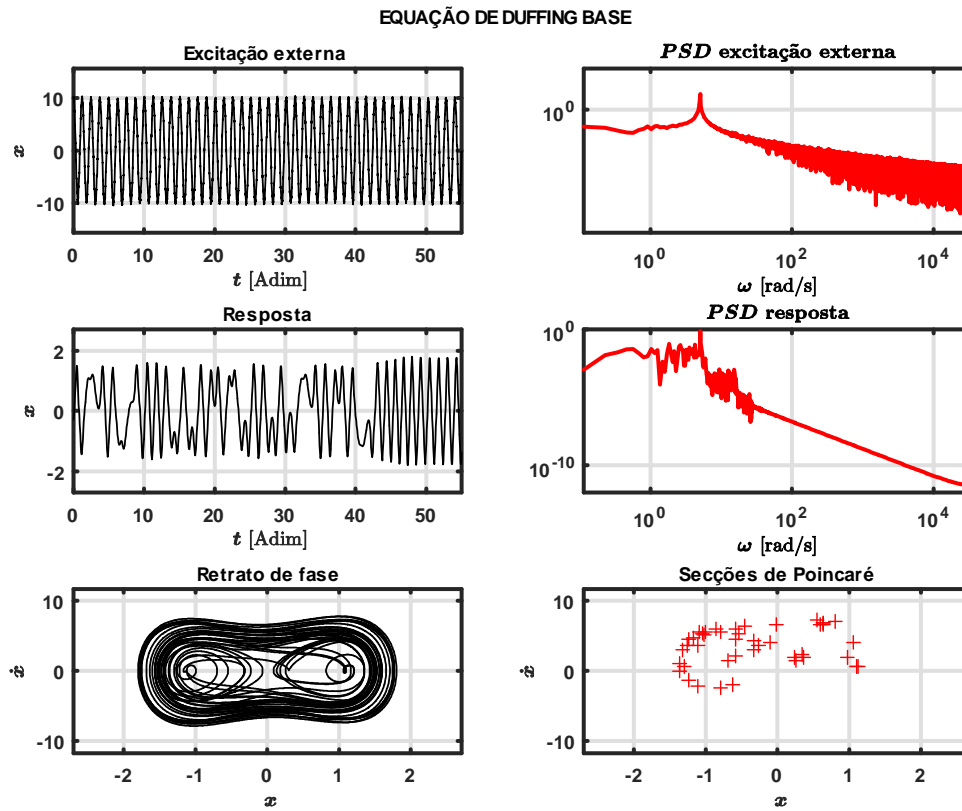


Figura 4.12:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{5\tau} - y + y^3 = 0.1 \cos(\tau)$ : simulação com sinal sintético com presença de componentes harmônicas (caso falso negativo).

A Figura (4.12) ilustra os resultados da simulação e verifica-se um comportamento caótico. Constata-se assim a existência de falsos negativos, isto é, sabe-se que no sinal testado existe uma componente harmônica afogada em ruído, mas não se verifica a passagem para o estado periódico.

Para evitar este problema, terá que ser realizado um estudo mais aprofundado do fator de ajuste  $Fa$  e do fator de escala  $K$ , que se remete para trabalho futuro.

No segundo conjunto de testes, os sinais não têm a presença de sinais harmônicos. O primeiro sinal deste conjunto consiste apenas em 300% de ruído cor de rosa. Os resultados da simulação são ilustrados na Figura (4.13), onde é possível observar que não existe passagem para o estado periódico.

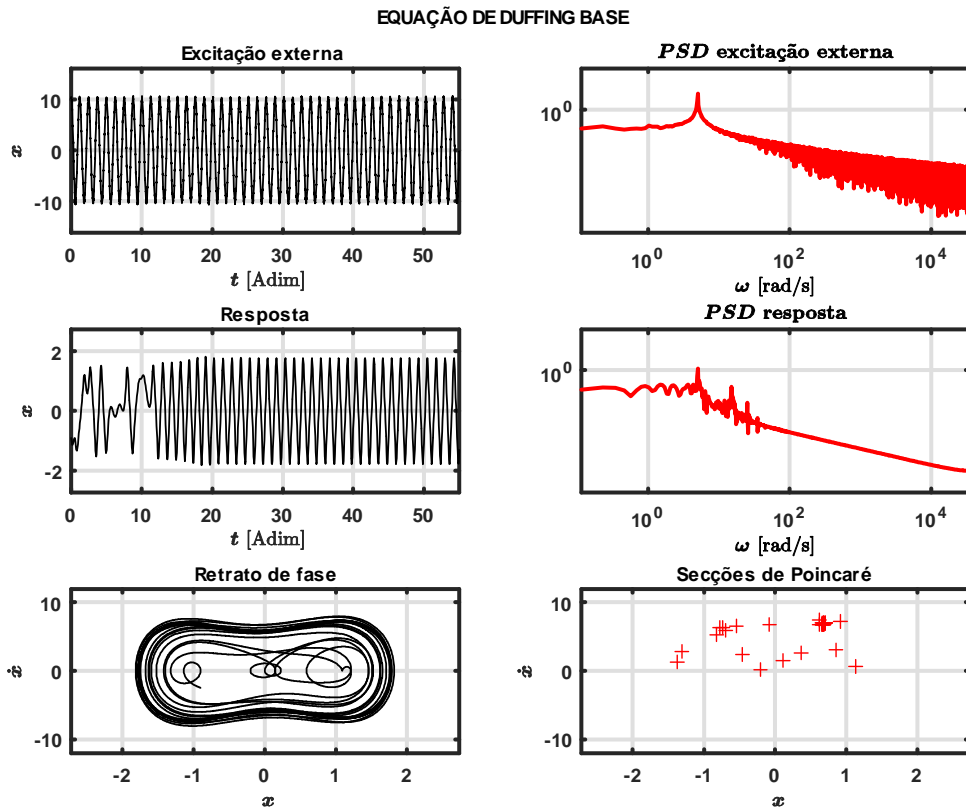


Figura 4.13:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0$ : simulação com sinal sintético com 300% de ruído cor de rosa sem presença de componentes harmónicas.

Foi ainda realizado outro teste com um sinal com 600% de ruído e também sem componentes harmónicas que revelou os mesmos resultados do sinal anterior, tal como pode ser observado na Figura (4.14). Isto é, verifica-se a existência dum comportamento caótico, podendo concluir que não existe nenhum sinal harmónico nesta amostra.

Pese embora os resultados ainda não estarem consolidados, o modelo tem potencialidade, com os fatores referidos e otimizados para cada caso, para se tornar um sistema de deteção de sinais ténues mergulhados em ruído.

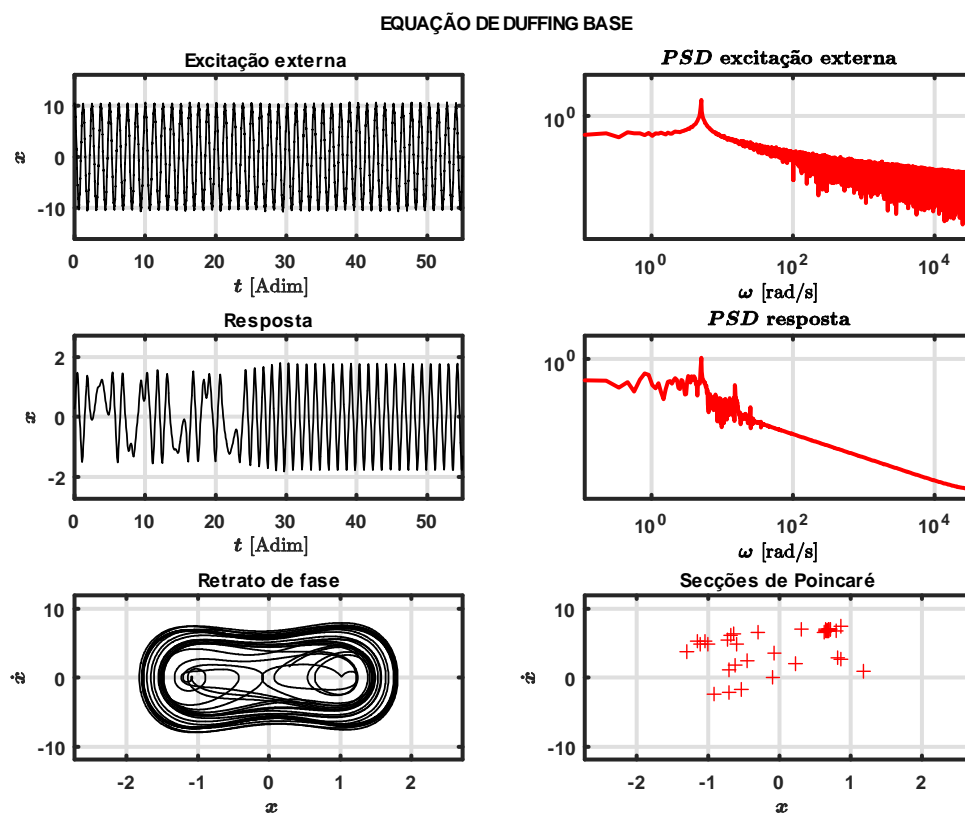


Figura 4.14:  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + 0.2\frac{dy}{d\tau} - y + y^3 = 0$ : simulação com sinal sintético com 600% de ruído cor de rosa sem presença de componentes harmónicas.



# Capítulo 5

## Conclusões

Seguidamente faremos a exposição das conclusões que se podem retirar do trabalho realizado e remeteremos para trabalho futuro alguns pontos que consideramos essenciais para a criação de um modelo funcional do conceito apresentado.

### 5.1 Conclusões Gerais

Nesta dissertação, aprofundamos o estudo da equação de *Duffing*. Apesar desta equação já estar profundamente estudada por muitos autores, introduzimos uma abordagem dirigida à análise da potencialidade da sua aplicação à deteção de sinais harmónicos na presença de ruído. A demonstração do conceito de deteção apresentado facilitará a sua aplicação futura em algoritmos de identificação de sinais, não só na área da acústica como, por exemplo, em áreas relacionadas com a deteção de danos, entre outras.

A consolidação inicial de alguns conceitos fundamentais tais como sistemas dinâmicos permitiu a utilização de ferramentas adequadas à compreensão dos fenómenos verificados nos capítulos subsequentes. O estudo da equação de *Duffing* e das suas diferentes configurações revelou-se instrumental para a materialização do conceito de deteção estudado e apresentado.

Seguidamente apresentamos as principais conclusões:

- A configuração da equação de *Duffing* conhecida por viga de Moon (*Moon's beam*), revelou uma interessante riqueza de respostas dinâmicas. A sensibilidade desta configuração face a pequenas variações de parâmetros de controlo apropriados revelou ser a "chave" do conceito de deteção apresentado. Particularmente, a sensibilidade do sistema a um ligeiro aumento da amplitude de excitação que provoca uma mudança de regime, de caótico para periódico;

- Verificou-se pelo estudo paramétrico da equação de *Duffing-Holmes*, que, de entre as configurações abordadas na literatura (configuração *Moon-Holmes*, *Rayleigh* e *Patil, Mallick* e as versões conservativas de cada uma), a configuração de *Moon-Holmes* era aquela que melhor se adequava à detecção de sinais harmônicos fracos;
- As simulações numéricas com a adição de ruído branco Gaussiano, ruído cor de rosa e a criação de um parâmetro que caracteriza a sensibilidade do sistema ao ruído, sustentaram a escolha do fator de amortecimento ( $\zeta = 0.1$ ) e posteriormente do parâmetro de rigidez não linear ( $\gamma = 1$ ). Este estudo teve em vista chegar a uma versão particularmente adequada do oscilador de *Duffing* para a detecção de sinais periódicos fracos mergulhados em ruído;
- Através das simulações numéricas realizadas com a configuração de *Moon-Holmes* otimizada, determinaram-se os limites de detecção do sistema proposto. A comparação dos limites referidos com dados análogos obtidos na literatura permitiram revelar, nomeadamente para a sensibilidade ao ruído Gaussiano branco, uma discrepância mas que, para um modelo de detecção, foram resultados bastantes satisfatórios, verificando a robustez e eficácia do mesmo;
- Tendo por objetivo alargar o conceito de detecção apresentado a diferentes frequências, incluímos no mesmo, a técnica de mudança de escala temporal;
- Desenvolvemos o algoritmo de detecção e procedemos à sua validação com sinais de teste sintéticos perspetivando a sua validação com sinais reais.

## 5.2 Trabalhos Futuros

Como possíveis trabalhos futuros, no que toca ao conhecimento do sistema de identificação a desenvolver, realça-se:

- Estudar a sensibilidade de  $F^*$  relativamente ao parâmetro de amortecimento  $\zeta$ , de rigidez não linear  $\gamma$  e à frequência de excitação  $\Omega_0$  tendo por base a configuração base normalizada sem ruído e a análise dos parâmetros:  $\frac{\partial F^*}{\partial \zeta}$ ,  $\frac{\partial F^*}{\partial \gamma}$  e  $\frac{\partial F^*}{\partial \Omega}$ ;
- Estudar a sensibilidade de  $F^*$  relativamente a  $\zeta$ ,  $\gamma$  e  $\Omega_0$  tendo por base a configuração base normalizada na presença de ruído e usando os parâmetros anteriores;

- Desenvolver e incluir algoritmos de automatização da identificação da passagem do estado caótico para o estado periódico, através dos expoentes de *Lyapunov*, por exemplo;
- Desenvolver o algoritmo de detecção dotando-o da funcionalidade de pesquisa automática de frequências presentes num intervalo arbitrado;
- Consolidar estudo do fator de ajuste  $Fa$  e o fator de escala  $K$ ;
- Materializar computacionalmente a metodologia proposta;
- Testar a validar o conceito de detecção com sinais reais;
- Dotar o algoritmo de detecção dum sistema inteligente de identificação de padrões tendo em vista aplicações em atividades de reconhecimento de assinaturas acústicas



# Bibliography

- Ali H. Nayfeh, B. B. (1995). *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley Series in Nonlinear Science. Wiley-VCH.
- Bayat, M., Pakar, I., and Domairry, G. (2012). Recent developments of some asymptotic methods and their applications for nonlinear vibration equations in engineering problems: A review. *Latin American Journal of Solid and Structures*, 9:145–234.
- Birx, D. L. and Pipenberg, S. J. (1992). Chaotic oscillators and complex mapping feed forward networks (cmffns) for signal detection in noisy environments. In *[Proceedings 1992] IJCNN International Joint Conference on Neural Networks*, volume 2, pages 881–888 vol.2.
- Cencini, M., Cecconi, F., and Vulpiani, A. (2010). *Chaos From Simple Models to Complex Systems*, volume 17 of *Advances in Statistical Mechanics*. World Scientific.
- Chapra, S. C. (2012). *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. McGraw Hill, 3 edition.
- Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., Packard, N. H., and Shaw, R. S. (1986). Chaos. *Scientific American*, 254(12):45–57.
- Cveticanin, L. (2013). Ninety years of duffings equation. *Theoretical and Applied Mechanics*, 40(1):49–63.
- Dyke, M. V. (1975). Perturbation methods in fluid mechanics. *The Parabolic Press*, 1(271).
- Feng, Z., Chen, G., and Hsu, S.-B. (2006). A qualitative study of the damped duffing equation and applications. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 6(5):1097–1112.

- Gregory L. Baker, J. P. G. (1996). *Chaotic Dynamics: An Introduction*. Cambridge University Press, 2 edition.
- Hilborn, R. C. (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press.
- Hirsch, M. W., Smale, S., and Devaney, R. L. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*. Elsevier.
- Hodges, R. (2010). *Underwater acoustics. Analysis, design and performance sonar*. John Willey and Sons Ltd., England, 1 edition.
- Hu, N. and Wen, X. (2003). The application of duffing oscillator in characteristic signal detection of early fault. *Journal of Sound and Vibration*, I(268):917–931.
- Huang, P., Pi, Y., and Zhao, Z. (2009). Weak gps signal acquisition algorithm based on chaotic oscillator. *Journal on Advances in Signal Processing*.
- Ivana Kovacic, M. J. B. (2011). *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and Their Behaviour*. John Wiley and Sons, 1 edition.
- Ji, C., Guo, W.-P., Ji, H., and Liu, M. (2014). Unknown weak signal detection based on duffing oscillator. *Sensors & Transducers*, 162:190–196.
- Kulkarni, V. S. (2013). Complexity, chaos, and the duffing oscillator model: An analysis of inventory fluctuations in markets. *School of Informatics and Computing*.
- Li, L. and Liu, C. (2012). A method of weak signal detection based on chaotic oscillator and lyapunov exponent. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*.
- Liao, S. (2012). *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer.
- Liu, X. and Liu, X. (2011). Weak signal detection research based on duffing oscillator used for downhole communication. *Journal of Computers*, 6(2):359–367.
- Liu, Y., Dai, Z., Lu, S., Liu, F., Zhao, J., and Shen, J. (2017). Enhanced bearing fault detection using step-varying vibrational resonance based on duffing oscillator nonlinear system. *Hindawi Shock and Vibration*.

- Lourens, J. G. (1988). Classification of ships using underwater radiated noise. *COMSIG 88 Southern African Conference on Communications and Signal Processing*, pages 130–134.
- Luenberger, D. G. (1979). *Introduction to dynamic systems-theory, models, and applications*. John Wiley & Sons.
- Moon, F. C. and Holmes, P. J. (1979). A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*.
- Patil, N. and Mallik, A. (2007). Experimental investigation of the response of a harmonically excited hard duffing oscillator. *Pramana - Journal of Physics*, 68(1):99–104.
- Pirbodaghi, T., Hoseini, S., Ahmadiana, M., and Farrahi, G. (2009). Duffing equations with cubic and quintic nonlinearities. *Computers and Mathematics with Applications*, I(57):500–506.
- Qin, H., Sun, X., and Jin, T. (2010). Weak gps signal detect algorithm based on duffing chaos system. *IEEE 10th International Conference on Signal Processing Proceedings, Signal Processing (ICSP), 2010 IEEE 10th International Conference on*, pages 2501 – 2508.
- Radhika, T., Iyengar, T., and Rani, T. R. (2014). *Approximate Analytical Methods for Solving Ordinary Differential Equations*. Taylor & Francis Group.
- Ramlan, R., Brennan, M. J., Kovacic, I., Mace, B. R., and Burrow, S. (2016). Exploiting knowledge of jump-up and jump-down frequencies to determine the parameters of a duffing oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*.
- Rimrott, F. (1994). Georg duffing (1861-1944). *Technische Mechanik*, 14:77–82.
- Ross, D. (1976). Chapter 7 - withdrawn: Cavitation. In Ross, D., editor, *Mechanics of Underwater Noise*, pages 202 – 252. Pergamon.
- Shangbin, J., Wei, J., Shuang, L., Weichao, H., and Qing, Z. (2019). Research on detection method of multi-frequency weak signal based on stochastic resonance and chaos characteristics of duffing system. *Chinese Journal of Physics*.
- Simmons, G. and Krantz, S. (2006). *Differential Equations: Theory, Technique, and Practice*. McGraw-Hill.

- Sunday, J. (2017). The duffing oscillator: Applications and computational simulations. *Asian Research Journal of Mathematics*.
- Thomsen, J. J. (2003). *Vibrations and Stability: Advanced Theory, Analysis, and Tools*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition.
- Ueda, Y. (1979). Randomly transitional phenomena in the system governed by duffing's equation. *Journal of Statistical Physics*, 20(2):181–196.
- Vaseghi, S. V. (2006). *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*. John Wiley & Sons Ltd.
- Wang, Y., Li, H., and Dai, W. (2016). Application of duffing oscillator in ship propeller blade number recognition. *2016 IEEE/OES China Ocean Acoustics (COA), Ocean Acoustics (COA), 2016 IEEE/OES China*, pages 1 – 5.
- Xu, B., Wang, Z., and Sun, L. (2017). Detection of rotor broken bar fault of asynchronous motor based on duffing and pso algorithm. *2017 20th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS), Electrical Machines and Systems (ICEMS), 2017 20th International Conference on*, pages 1 – 5.
- Zheng, Z. and Zhang, F. (2010). Comparative study on weak signal detection algorithms. In *2010 International Conference on E-Business and E-Government*, pages 3825–3828.
- Zhihong, Z. and Shaopu, Y. (2015). Application of van der pol–duffing oscillator in weak signal detection. *Computers and Electrical Engineering*, 41:1–8.

# Apêndice A

## Produção científica precedente

Este apêndice reúne os trabalhos científicos, participações em conferências, realizados no âmbito do tema IFOHAM (*Iterative First Order Homotopy Analysis Method*) e os trabalhos de exploração no domínio da equação de *Duffing*:

1. Artigo e apresentação para a Conferência Jornadas do Mar 2018, Escola Naval, Lisboa, novembro de 2018 - "IFOHAM e a determinação de soluções periódicas de equações diferenciais não lineares";
2. Artigo e apresentação para o Encontro Anual de Investigação e Desenvolvimento em Ciências Militares 2018, Instituto Universitário Militar, Lisboa, dezembro de 2018 - "Determinação de amplitudes e de frequências oscilatórias e resolução assintótica da equação de Van der Pol recorrendo ao método IFOHAM".
3. Apresentação para 41<sup>th</sup> *Scientific Conference for Bachelor Degree Students CADET-NAV 2019*, Constança, Roménia, abril de 2019 - "*Applications of the Duffing equation to weak signal detection: an exploratory study*";
4. Artigo (que será publicado nos *proceedings* pela editora *Springer*) e apresentação para *International Conference on Differential & Difference Equations and Applications 2019*, Hotel VIP Zurique, Lisboa, julho de 2019 - "*IFOHAM - a generalization of the Picard-Lindelöff iteration method*";
5. Apresentação plenária na conferência IDEIA 2020 (Investigação, Desenvolvimento, Experimentação e Inovação da Armada 2020), Escola Naval, Lisboa, janeiro 2020 - "Estudo das aplicações da equação de

*Duffing-Holmes* na identificação de sinais periódicos ténues na presença de ruído".

# IFOHAM E A DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES

*Marta Sacramento, Cecília Almeida*  
Portuguese Naval Academy (EN)  
e-mail: marta.sofia.sacramento@marinha.pt  
cecilia.branco.almeida@marinha.pt

*Miguel Moreira*  
Portuguese Naval Academy (EN)/ Navy Research Center (CINAV)  
Centre for Marine Technology and Ocean Engineering (CENTEC)  
e-mail: miguel.moreira@marinha.pt

## Resumo

O IFOHAM (Iterative First order HAM) consiste numa técnica assintótica de resolução de equações diferenciais não lineares que generaliza o método de Picard-Lindelöf e que se inspira no método HAM (Homotopy Analysis Method). Neste trabalho implementaremos esta técnica (IFOHAM) num ambiente computacional de manipulação simbólica e analisaremos e testaremos a sua aplicabilidade à resolução assintótica de equações diferenciais não lineares de 2ª ordem com soluções periódicas. Em particular, mostraremos que o método IFOHAM é capaz de identificar as frequências fundamentais de tais soluções periódicas. O conhecimento deste parâmetro tem particular importância prática nas actividades de projecto e manutenção porquanto caracteriza o comportamento oscilatório de muitos sistemas reais com respostas não-lineares. É o caso de sistemas constituídos por estruturas esbeltas sujeitas a escoamentos transversos tais como cabos submarinos, cabos de fixação de plataformas flutuantes ao fundo do oceano e tubos em permutadores de calor, por exemplo. Os resultados das simulações efectuadas serão comparados com resultados obtidos usando a técnica HAM e presentes na literatura bem como com simulações numéricas.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais não lineares, HAM, IFOHAM

## 1 Introdução

O método HAM foi desenvolvido por Shijun Liao [5] e consiste numa técnica assintótica de resolução de equações diferenciais, quer ordinárias quer com derivadas parciais. Esta técnica baseia-se no conceito de homotopia e transforma o problema original

$$N[u] = 0$$

numa família de problemas caracterizados pelas equações diferenciais lineares que seguidamente se apresentam

$$\mathcal{L}[u_1(t)] = c_0 [N[u_0(t)]], \quad (1)$$

$$\mathcal{L}[u_m(t) - u_{m-1}(t)] = c_0 \mathcal{D}_{m-1} [N[\phi(t; q)]], \quad m \in \mathbb{N} \text{ and } m > 1. \quad (2)$$

A resolução recorrente de (1) e (2) permite obter os sucessivos termos da solução procurada:

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(t). \quad (3)$$

De referir que  $\mathcal{L}$  representa um apropriado operador linear,  $u_0 = u_0(t)$  representa uma estimativa inicial do problema original,  $c_0$  representa um parâmetro que controla a convergência/velocidade de convergência do método,  $\mathcal{D}_k$  representa o operador de derivação homotópica de ordem  $k$  definido por

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial q^k} \Big|_{q=0} \quad (4)$$

e  $\phi(t; q)$  representa a chamada série homotópica de Maclaurin que tem a forma:

$$\phi(t; q) = u_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) q^n, \quad q \in [0, 1]. \quad (5)$$

Nas obras [3], [4] e [1] pode consultar-se a explicação dos detalhes acima referidos bem como numerosas aplicações ilustrativas, quer introdutórias, quer avançadas.

É importante mencionar o método HAM apresenta as seguintes particularidades que lhe conferem vantagens relativamente a outras técnicas assintóticas de resolução de problemas não-lineares:

- É possível melhorar a rapidez de convergência ou mesmo garantir a convergência do método escolhendo adequadamente o valor do parâmetro  $c_0$ ;
- Existe flexibilidade na escolha do operador linear  $\mathcal{L}$  e na estimativa inicial  $u_0 = u_0(t)$  do problema original;
- Capacidade para abordar e resolver equações diferenciais fracamente não lineares quer fortemente não lineares.
- Capacidade para determinar a amplitude e a frequência de soluções periódicas de problemas não-lineares.

Destes factos, entre outros, o método HAM tem sido profusamente aplicado pela comunidade científica nos últimos anos na resolução de problemas não-lineares.

## 2 O método IFOHAM

O IFOHAM (Iterative First order HAM) consiste numa técnica assintótica de resolução de equações diferenciais não lineares que generaliza o método de Picard-Lindelöf e que se inspira no método HAM (Homotopy Analysis Method).

Na abordagem do seguinte PVI (Problema de Valores Iniciais) de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0^{(0)} \end{cases}, \quad (6)$$

recorrendo ao HAM e tendo por base o pressuposto que a resolução da equação (1)

$$u_1(t) = c_0 \mathcal{L}^{-1} [N[u_0(t)]]$$

conduz a uma melhor aproximação

$$u_0(t) + u_1(t)$$

da solução procurada, somos conduzidos ao algoritmo que designámos por IFOHAM (consulte-se [6] para uma descrição mais pormenorizada deste método):

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0^{(0)} \\ \mathcal{L}[u_{n+1}(t)] = c_0 [N[\sum_{k=0}^n u_k(t)]], \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(t_0) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \\ x_n = \sum_{k=0}^n u_k(t) \end{cases}. \quad (7)$$

Em [6] mostra-se que se  $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{dh}{dt}(t)$ ,

$$N[x] \equiv \frac{dx}{dt} - f(t, x), \quad (8)$$

então (7), é equivalente ao processo

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = (1 + c_0)x_n(t) - c_0 \left( x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi \right), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

que generaliza o método iterativo de Picard-Lindelöf. Se  $c_0 = -1$ , esta técnica coincide exactamente com o atrás referido processo iterativo de Picard-Lindelöf, como se pode imediatamente observar:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Mostrou-se em [6] que o parâmetro  $c_0$  influenciava a velocidade de convergência do método IFOHAM aplicado a esta classe de problemas (8) e que a sua escolha adequada permitia melhorar o desempenho da técnica.

Em [6] conjectura-se a extensão da aplicabilidade do IFOHAM na resolução problemas que o método HAM já resolve entre os quais a possibilidade de determinação da frequência fundamental de soluções periódicas de problemas não lineares. Neste trabalho focar-nos-emos na abordagem deste problema com recurso ao IFOHAM.

### 3 Formulação do problema

Consideremos o problema detalhadamente estudado em [4] e descrito pela equação diferencial não linear de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (11)$$

munida das condições iniciais

$$x(0) = x^* \text{ e } \frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (12)$$

No Capítulo 2 de [4] é efectuado o estudo qualitativo deste problema não-linear através do qual são determinados os intervalos de valores de  $\lambda$  e  $\varepsilon$  para os quais o problema em questão apresenta soluções periódicas. O conhecimento da frequência fundamental  $\omega$  característica de tais soluções periódicas é particularmente importante. Esse conhecimento permite, não só, materializar a expressão da solução em termos de uma bem apropriada série trigonométrica, como também, é de enorme importância prática.

A determinação de soluções periódicas de diferentes ordens com recurso ao HAM, das correspondentes médias quadradas dos resíduos e das frequências fundamentais é realizada por Liao no trabalho anteriormente referido tendo por base diferentes valores dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x(0) = x^*$ , nomeadamente:

	$\lambda$	$\varepsilon$	$x^*$
A	$\frac{9}{4}$	1	1
B	0	1	1
C	4	-1	-1

Tabela I: Parâmetros utilizados nos testes A, B e C.

Tendo em vista comparar os resultados obtidos com o método IFOHAM e com o método HAM, utilizaremos aqui os valores dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x(0) = x^*$  acima tabelados.

Na abordagem do problema (11) recorrendo ao IFOHAM, à semelhança do que acontece quando se recorre ao HAM, torna-se necessário efectuar a mudança de variável  $\tau = \omega t$  e definir

$$x(t) = y(\tau), \quad (13)$$

para evidenciar no problema equivalente resultante desta mudança de variável a frequência fundamental  $\omega$  ainda desconhecida. Como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \quad (14)$$

a expressão (11) pode ser reescrita na forma (fazendo  $\gamma = \omega^2$ )

$$\gamma \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0, \quad (15)$$

munida das condições iniciais agora associadas à função  $y = y(\tau)$ :

$$y(0) = x^* \text{ e } \frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \quad (16)$$

Uma vez determinada a função  $y = y(\tau)$ , solução da equação diferencial (15), a solução procurada  $x = x(t)$ , da equação diferencial (11), será simplesmente

$$x = x(t) = y(\omega t). \quad (17)$$

## 4 Utilização do algoritmo IFOHAM

Na materialização da aplicação do algoritmo IFOHAM à resolução de (15), isto é

$$N[\gamma, y] = \gamma \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0, \quad (18)$$

seguiremos procedimentos comuns aos utilizados na aplicação da técnica HAM no tocante ao estabelecimento da *regra de construção da expressão da solução*, na escolha do *operador linear*  $\mathcal{L}$  e na *escolha da aproximação*  $u_0 = u_0(\tau)$  da solução procurada. Estes procedimentos encontram-se justificados no Capítulo 2 de [4] e também, por exemplo em [2]. Ter-se-á, então

$$\begin{cases} u_0(\tau) = x^* \cos \tau \\ \gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[\gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(\tau_0) = 0 \text{ e } u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases}, \quad (19)$$

com

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f. \quad (20)$$

O procedimento que utilizaremos para determinar os sucessivos termos  $\gamma_n$  desconhecidos no processo (19) seguirá a abordagem adoptada e justificada, por exemplo, em [2]. Este procedimento tem por base a eliminação em cada iterada dos chamados termos seculares  $\tau \cos \tau$  que decorrem da resolução da equação diferencial linear:

$$\gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ \gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (21)$$

Isto é, em cada iterada, a escolha de  $\gamma_n$  é realizada de forma a garantir que o termo  $u_{n+1}$ , a determinar, não apresenta parcelas seculares do tipo  $\tau \cos \tau$ . A origem deste procedimento tal com é referido e citado em [2] remonta a trabalhos de Lindstedt, Bohlin, Poincaré e Gylgén.

O processo descrito, a ser convergente, conduzirá à obtenção de sucessões

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \text{ e } y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y$$

cujos limites satisfazem o problema de valores iniciais (15) e (16).

Para melhor compreender a aplicação do método IFOHAM à resolução do problema em estudo exemplifiquemos aqui os procedimentos analíticos necessários à execução da primeira iterada.

Considerando (18) e (20) ter-se-á:

$$\gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \left( \gamma_0 \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} + \lambda u_0 + \varepsilon u_0^3 \right). \quad (22)$$

Como  $u_0(\tau) = x^* \cos \tau$  deduzir-se-á<sup>1</sup> a expressão da equação diferencial a resolver para obter  $u_1$  e  $\gamma_0$  :

$$\gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \left\{ \left( -\gamma_0 x^* + \lambda x^* + \frac{3\varepsilon (x^*)^3}{4} \right) \cos \tau + \frac{\varepsilon (x^*)^3}{4} \cos 3\tau \right\}. \quad (23)$$

Ora, para que não existam termos seculares do tipo  $\tau \cos \tau$  na solução geral do problema (23) bastará garantir que

$$-\gamma_0 x^* + \lambda x^* + \frac{3\varepsilon (x^*)^3}{4} = 0,$$

isto é, bastará fazer

$$\gamma_0 = \lambda + \frac{3\varepsilon (x^*)^2}{4}. \quad (24)$$

Os valores concretos de  $\gamma_0$  nos casos de teste A, B e C apresentam-se na Tabela 2.

	$\lambda$	$\varepsilon$	$x^*$	$\gamma_0$
A	$\frac{9}{4}$	1	1	3
B	0	1	1	$\frac{3}{4}$
C	4	-1	-1	$\frac{13}{4}$

Tabela 2: Valores de  $\gamma_0$  correspondentes aos Testes A, B e C.

Uma vez fixado, desta forma, o valor de  $\gamma_0$  o problema a resolver reduzir-se-á a determinar  $u_1$  a partir do problema de valores iniciais resultante:

$$\begin{cases} \gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \frac{\varepsilon (x^*)^3}{4} \cos 3\tau \\ u_1(0) = 0 \text{ e } u_1'(0) = 0 \end{cases}. \quad (25)$$

Como se sabe, uma solução particular de (25)  $u_1^p$  será da forma

$$u_1^p(\tau) = C_1 \cos 3\tau + C_2 \sin 3\tau,$$

donde

$$u_1^p(\tau) = -\frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau.$$

Assim, a solução geral  $u_1$  deste problema será

$$u_1(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau,$$

<sup>1</sup>Tenha-se em conta que  $\cos^3 \tau = \frac{1}{4} \cos 3\tau + \frac{3}{4} \cos \tau$ .

a partir da qual, tendo em conta as condições iniciais ( $u_1(0) = 0$  e  $u_1'(0) = 0$ ), deduzimos:

$$u_1(\tau) = \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 \cdot 32} \cos \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 \cdot 32} \cos 3\tau. \quad (26)$$

A solução completa aproximada de ordem 1 do problema será

$$y_1(\tau) = u_1(\tau) + u_0(\tau) = \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 \cdot 32} \cos \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 \cdot 32} \cos 3\tau + x^* \cos \tau. \quad (27)$$

Considerando  $c_0 = -1$ , a solução completa aproximada de ordem 1 do problema correspondente ao Caso A consistirá na seguinte expressão:

$$y_1(\tau) = \frac{1}{96} \cos 3\tau + \frac{95}{96} \cos \tau. \quad (28)$$

Nas iteradas seguintes  $n \geq 2$  determinar-se-iam de forma análoga os pares  $(\gamma_n, u_{n+1})$  obtendo-se desta forma (em caso de convergência) sucessões

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \text{ e } y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y.$$

Admitida a convergência do método e recordando (17), a solução IFOHAM aproximada de ordem  $M$  do problema original (11) e (12) será simplesmente

$$x_M(t) = y_M(\sqrt{\gamma_M}t). \quad (29)$$

A metodologia seguida é análoga à utilizada na aplicação da técnica HAM, consulte-se por exemplo a página 38 de [4].

## 5 Testes e simulações numéricas

Os testes e as simulações numéricas serão realizados em MATLAB. Na implementação do algoritmo IFOHAM utilizaremos a toolbox simbólica da plataforma atrás referida. Na resolução numérica dos problemas teste utilizaremos o método Runge-Kutta associado à rotina `ode45` do MATLAB. Como foi referido aplicaremos a técnica IFOHAM na resolução do problema de valores iniciais (11) e (12) escolhendo para  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x^*$  os valores indicados na Tabela 1 associados respectivamente aos casos A, B e C.

De relevar o facto de na aplicação do método IFOHAM utilizarmos em todas as simulações o valor  $c_0 = -1$  relegando para um futuro trabalho a análise da influência deste parâmetro na convergência nesta técnica.

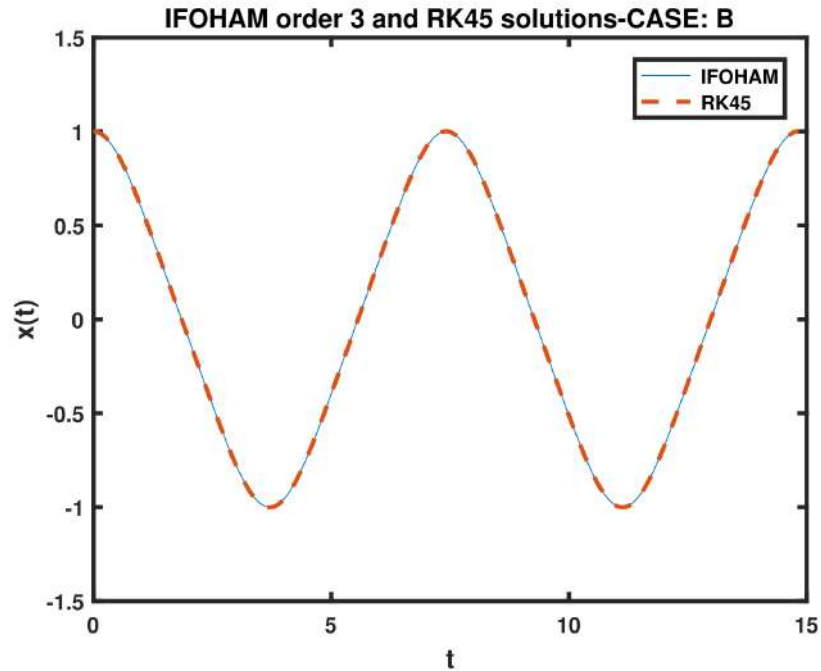


Figura 1: Solução IFOHAM aproximada de ordem 3 e solução numérica RK45. ( $\gamma = 9/4$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $x^* = 1$ ).

Nas Figuras 1, 2 e 3 representamos graficamente as soluções IFOHAM aproximadas de ordem 3 e as soluções numéricas RK45 obtidas com o método Runge-Kutta correspondentes a cada um dos casos testados: Caso A, caso B e caso C.

Na aferição da tendência de convergência calcularemos em cada iterada a versão discreta da média quadrática do resíduo calculado num período completo da solução aproximada de ordem  $M$

$$E_M = \frac{\int_0^{2\pi} (N [\gamma_M, y_M])^2 d\tau}{2\pi}, \quad (30)$$

a qual será computada da forma

$$E_M \approx \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (N [\gamma_M, y_M(\tau_k)])^2}{N + 1}, \quad (31)$$

em que

$$\tau_k = \frac{2k\pi}{N} \text{ e } N = 50. \quad (32)$$

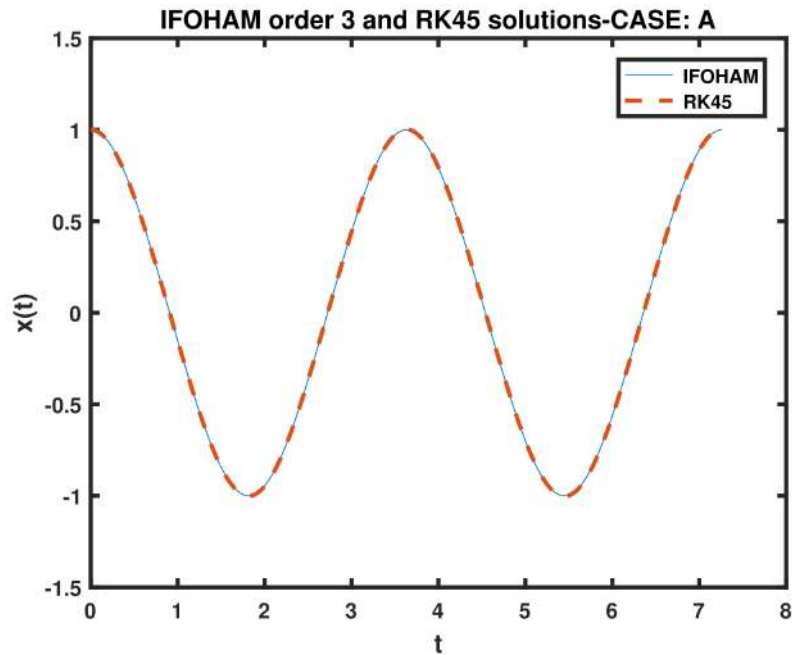


Figura 2: Solução IFOHAM aproximada de ordem 3 e solução numérica RK45. ( $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $x^* = 1$ ).

Nas Tabelas 3, 4 e 5 apresentamos os valores obtidos com o método IFOHAM das aproximações de ordem  $M$  do quadrado da frequência angular da oscilação  $\gamma = \omega^2$ , bem como dos correspondentes valores da versão discreta da média do quadrado do resíduo  $E_M$  respeitantes a cada um dos casos de teste: Caso A, caso B e caso C.

A título ilustrativo apresentamos seguidamente a solução aproximada de ordem 1 obtida na resolução do caso A tendo por base a implementação do método IFOHAM em MATLAB num ambiente de programação simbólica:

$$x_1(t) = \frac{1}{96} \cos 3\tau + \frac{95}{96} \cos \tau \quad (33)$$

$$\text{com } \begin{cases} \tau = \sqrt{\gamma_1} t \\ \gamma_1 = 2.992350260416667 \end{cases} .$$

Como não podia deixar de ser, as expressões (28) e (33) são coincidentes.

IFOHAM-Caso A		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	3.0000000000000000	0.031862745098039
1	2.992350260416667	0.000030759662724
2	2.992176238814215	0.000000008188297
3	2.992173084940535	0.00000000002787

Tabela 3: Valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$  (quadrado da frequência) e  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo) associados às três primeiras iteradas.

IFOHAM-Caso B		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	0.7500000000000000	0.031862745098039
1	0.721354166666667	0.000492900346247
2	0.718128571631923	0.000003750953237
3	0.717803950705108	0.000000038067810

Tabela 4: Valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$  (quadrado da frequência) e  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo) associados às três primeiras iteradas.

IFOHAM-Caso C		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	3.2500000000000000	0.031862745098039
1	3.242649778106509	0.000026979989273
2	3.242778638653018	0.000000004554289
3	3.242777081822536	0.00000000000845

Tabela 5: Valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$  (quadrado da frequência) e  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo) associados às três primeiras iteradas.

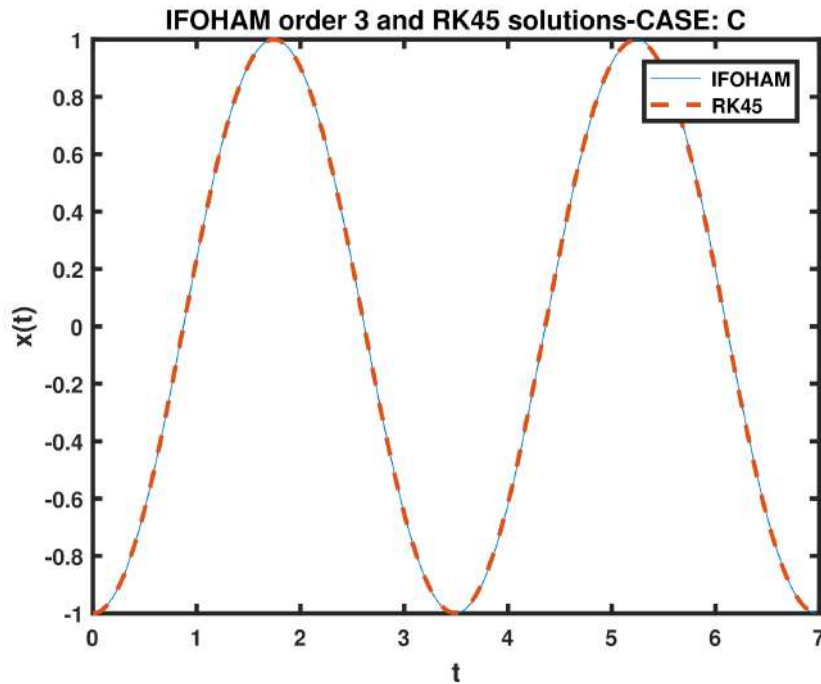


Figura 3: Solução IFOHAM aproximada de ordem 3 e solução numérica RK45. ( $\gamma = 4$ ,  $\varepsilon = -1$  e  $x^* = -1$ ).

## 6 Discussão dos resultados

As Figuras 1, 2 e 3 mostram que as soluções aproximadas de ordem 3, do problema em estudo, obtidas recorrendo ao método IFOHAM são aparentemente coincidentes com as soluções numéricas resultantes das simulações numéricas baseadas no método Runge-Kutta de  $4^a/5^a$  ordem, em todos os casos, A, B, e C, testados.

Analisando as Tabelas 3, 4 e 5 observamos uma tendência de convergência das soluções aproximadas de ordem crescente geradas pelo IFOHAM. Este facto encontra-se patente na forte diminuição dos valores da média quadrática do resíduo  $E_M$ , de iterada para iterada, que podemos constatar. A razão de diminuição deste parâmetro, de iterada para iterada, é inferior a  $10^{-2}$ , podendo assumir valores da ordem de  $10^{-4}$ . Naturalmente, esta tendência de convergência é acompanhada pela estabilização dos valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$ , sucessivamente gerados pelo método. Necessariamente, os valores aproximados das frequências  $\omega_M$  assim geradas pelo método IFOHAM serão tanto mais satis-

HAM, Liao [4]		
Caso	$\gamma_5$	$E_5(c_0)$
A ( $c_0 = -\frac{1}{3}$ )	2.9921730367	$1.3 \times 10^{-14}$
B ( $c_0 = -\frac{4}{3}$ )	0.7177741910	$1.5 \times 10^{-8}$
C ( $c_0 = -\frac{3}{10}$ )	3.2427770978	$6.7 \times 10^{-14}$

Tabela 6: Valores de  $\gamma_5 = \omega_5^2$  (quadrado da frequência) e  $E_5$  (média discreta do quadrado do resíduo) obtidos por Liao com recurso ao HAM.

fatórios quanto mais diminutas forem as médias quadrática  $E_M$  dos resíduos correspondentes.

Em [4], nas Tabelas 2.7 e 2.8, na página 47, podemos consultar os valores das médias quadráticas dos resíduos  $E_M$  e os valores de  $\gamma_M = \omega_M^2$  obtidos com recurso ao método HAM, na abordagem do problema em estudo (11) e (12), utilizando configurações correspondentes aos casos A, B e C. De referir que na aplicação referida do método HAM, Liao utilizou parâmetros  $c_0$  de controlo da convergência optimizados enquanto que aqui utilizámos sempre o valor  $c_0 = -1$ . Uma comparação grosseira dos valores tabelados, em [4] e aqui, sugere que as soluções aproximadas de 3ª ordem que obtivemos com o método IFOHAM apresentam um rigor substancialmente inferior às soluções aproximadas de 5ª ordem obtidas com recurso ao HAM [observe-se a Tabela 6].

Importa referir, no entanto, que os métodos IFOHAM e HAM são intrinsecamente distintos. O método IFOHAM é iterativo enquanto que o método HAM é construtivo factos que podem explicar diferenças no desempenho destas técnicas. Na implementação computacional do algoritmo IFOHAM a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem apresenta as dificuldades normalmente associadas a processos iterativos em que a extensão/complexidade de cada iterada aumentam.

## 7 Conclusões e recomendações para trabalho futuro

### 7.1 Conclusões

Tendo em conta os resultados apresentados e a discussão efectuada desenham-se as seguintes conclusões:

- O método IFOHAM apresenta-se, neste estudo preliminar, com capacidade para determinar soluções periódicas de problemas não-lineares e as correspondentes frequências oscilatórias.

- A utilização deste algoritmo é de diminuta complexidade e de fácil programação embora a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem apresente as dificuldades associadas a processos iterativos em que a extensão/complexidade de cada iterada vão aumentando.
- A opinião de que esta técnica (o método IFOHAM) é uma generalização do processo iterativo de Picard-Lindelöf é reforçada, facto este que pode ter interesse teórico.

## 7.2 Trabalho futuro

Quanto ao trabalho futuro perspectivam-se os seguintes desenvolvimentos:

- Optimizar a implementação computacional do algoritmo IFOHAM de modo a viabilizar a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem.
- Aplicação do IFOHAM à determinação das amplitudes, das frequências e soluções de outros problemas não lineares, nomeadamente da equação de van der Pol.
- Aplicação do IFOHAM à determinação das amplitudes e frequências oscilatórias de sistemas não lineares acoplados, tais como sistemas constituídos por estruturas esbeltas sujeitas a escoamentos transversos (físico-matematicamente modelados por equações estruturais acopladas à equação de van der Pol).
- Estudo das condições de convergência do IFOHAM em termos das características da equação diferencial não linear a resolver e do valor do parâmetro  $c_0$ .

## 8 Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Director de Ensino Capitão-de-mar-e-guerra Guerreiro Cardoso e ao Comandante do Corpo de Alunos Capitão-de-fragata Ferreira Teles as facilidades de trabalho autorizadas.

Agradecemos igualmente à Professora Pamela Tierney e ao Professor Nathan Doyle o apoio ao projecto em que este trabalho se insere.

## Referências

- [1] Shijun Liao. *Advances in Homotopy Analysis Method*. World Scientific, 2014.
- [2] Shijun Liao. “An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems”. Em: *Int. J. Nonlin. Mech.* 39 (2004), pp. 271–280.
- [3] Shijun Liao. *Beyond Perturbation - Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Chapman & All/CRC, 2004.
- [4] Shijun Liao. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer, 2012.
- [5] Shijun Liao. “The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems”. Tese de doutoramento. Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China, 1992.
- [6] Miguel Moreira. “IFOHAM-an iterative algorithm based on the first-order equation of HAM: exploratory preliminary results”. Em: *Arxiv* (2017). URL: <http://arxiv.org/abs/1710.01831>.

# JORNADAS DO MAR 2018



## O OCEANO UMA PONTE PARA MUITAS MARGENS

COLÓQUIO PARA ESTUDANTES

Certifica-se que nas Jornadas do Mar 2018 – O Oceano: Uma ponte para muitas margens realizadas na Escola Naval de 6 a 9 de novembro de 2018, **Marta Sacramento**, Escola Naval obteve **menção honrosa no 1º escalão**, da área de Matemática, Modelação e Engenharia com o trabalho: **IFOHAM e a determinação de soluções periódicas de equações diferenciais não lineares**

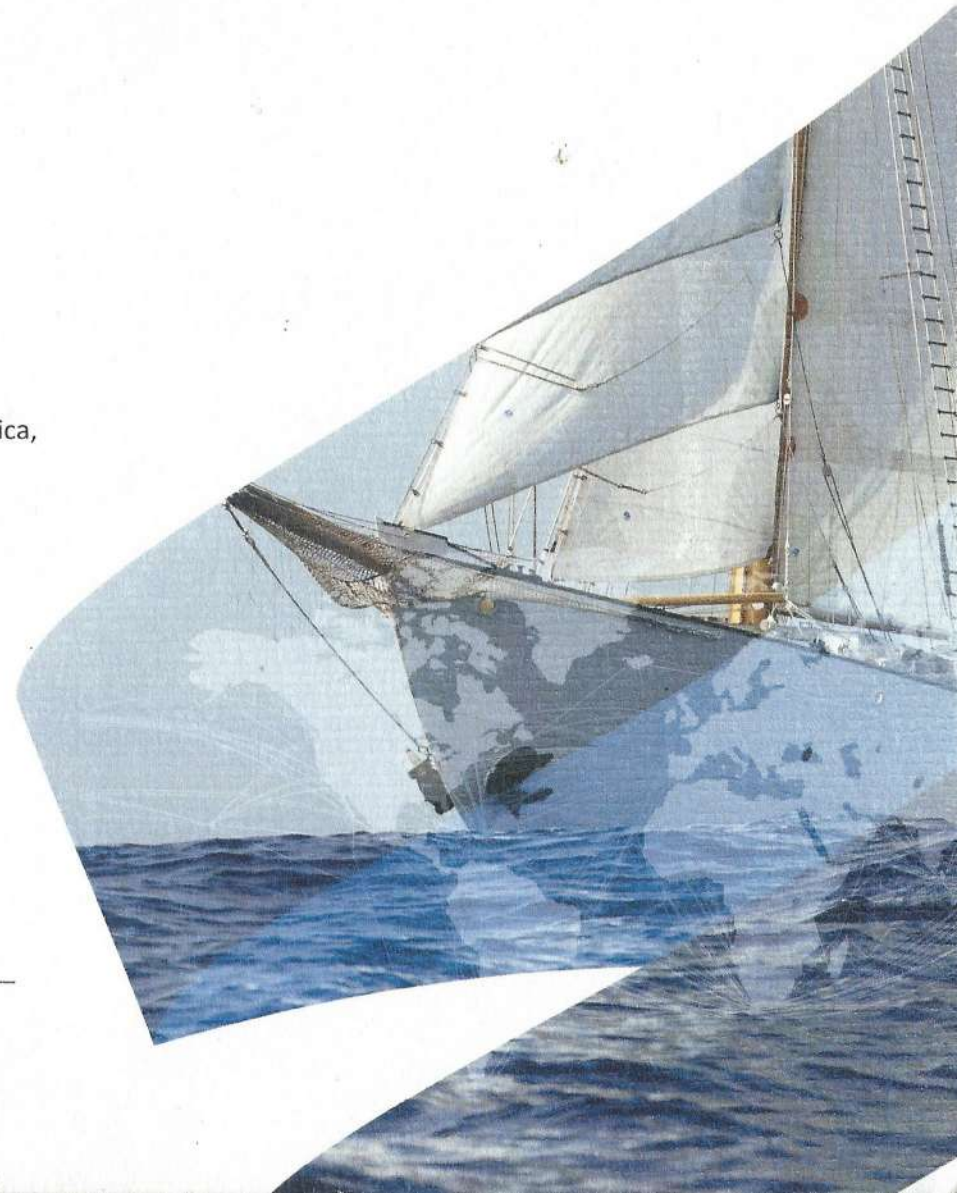
Escola Naval, 9 de novembro de 2018

O Secretário-geral do Colóquio

António José Duarte Costa Canas  
Capitão-de-mar-e-guerra

O Comandante da Escola Naval

Mário José Simões Marques  
Contra-almirante



DETERMINAÇÃO DE AMPLITUDES E DE FREQUÊNCIAS  
OSCILATÓRIAS E RESOLUÇÃO ASSINTÓTICA DA EQUAÇÃO DE VAN  
DER POL RECORRENDO AO MÉTODO IFOHAM

**Técnicas e Tecnologias Militares**

Cecília Almeida e Marta Sacramento  
*Escola Naval/Centro de Investigação Naval (CINAV),  
2810-001 Almada, Portugal*

Miguel Moreira  
*Escola Naval/Centro de Investigação Naval (CINAV),  
Centro de Engenharia e Tecnologia Naval e Oceânica (CENTEC)  
2810-001 Almada, Portugal*

**RESUMO**

O IFOHAM (Iterative First order HAM) consiste numa técnica assintótica de resolução de equações diferenciais não lineares que generaliza o método de Picard-Lindelöff e que se inspira no método HAM (Homotopy Analysis Method) e que é capaz de identificar frequências fundamentais de soluções periódicas de sistemas auto-excitados. Neste trabalho implementaremos esta técnica (IFOHAM) num ambiente computacional de manipulação simbólica e analisaremos e testaremos a sua aplicabilidade à resolução assintótica da equação de van der Pol. Em particular, mostraremos que o método IFOHAM é capaz de identificar não só frequências fundamentais de soluções periódicas da equação de van der Pol como também as amplitudes dessas soluções. Os resultados das simulações efectuadas serão comparados com resultados obtidos usando a técnica HAM e presentes na literatura bem como com simulações numéricas.

**Keywords:** Equações diferenciais não lineares, HAM, IFOHAM, Equação de van der Pol.

# 1. Introdução

O método IFOHAM é uma técnica iterativa de resolução assintótica de equações diferenciais não lineares que se inspira no método HAM (acrônimo de *Homotopy Analysis Method*) este último desenvolvido por Shijun Liao (S. Liao, 1992).

Seja  $\mathcal{L}$  um apropriado operador linear,  $c_0$  um parâmetro numérico de controlo da velocidade de convergência do processo e  $N$  o operador diferencial que caracteriza a equação diferencial não linear em estudo no seguinte sentido:

$$N[u] = 0 \Leftrightarrow \frac{d^m u}{dt^m} = f(t, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}). \quad (1)$$

O método IFOHAM consiste no processo iterativo,

$$\mathcal{L}[u_{n+1}(t)] = c_0 \left[ N \left[ \sum_{k=0}^n u_k(t) \right] \right],$$

em que  $u_0 = u_0(t)$  representa uma estimativa inicial da solução e  $u_k = u_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , representam termos da série que materializará (em caso de convergência do método) a solução do problema (1):

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t). \quad (2)$$

Na abordagem do PVI (Problema de Valores Iniciais) de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0^{(0)} \end{cases}, \quad (3)$$

o método IFOHAM assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0^{(0)} \\ \mathcal{L}[u_{n+1}(t)] = c_0 [N[\sum_{k=0}^n u_k(t)]], \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(t_0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ x_n = \sum_{k=0}^n u_k(t) \end{cases}. \quad (4)$$

Em (Moreira, 2017) mostra-se que se  $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{dh}{dt}(t)$ , então (4), é equivalente ao processo

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = (1 + c_0)x_n(t) - c_0 \left( x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi \right), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

que generaliza o método iterativo de Picard-Lindelöf. Se  $c_0 = -1$ , esta técnica coincide exactamente com o atrás referido processo iterativo de Picard-Lindelöf, como se pode imediatamente observar:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Mostrou-se também em (Moreira, 2017) que o parâmetro  $c_0$  influencia a velocidade de convergência do método IFOHAM aplicado a esta classe de problemas (3) e que a sua escolha adequada permitia melhorar o desempenho da técnica.

Em (Sacramento, Branco, & Moreira, 2018), tendo por base a abordagem do problema PVI não linear de 2ª ordem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x + \varepsilon x^3 = 0 \\ x(0) = x^* \text{ e } \frac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

mostrou-se que o método IFOHAM não só é capaz de gerar somas parciais de soluções aproximadas que convergem para a solução do problema (7) como também mostrámos que é capaz de aproximar assintoticamente frequências fundamentais características de instâncias diferentes deste problema. Para tal, recorreremos à mudança de variável  $\tau = \omega t$  e à definição

$$x(t) = y(\tau), \quad (8)$$

para transformar o problema original (7) no problema

$$\begin{cases} \gamma \frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0 \\ y(0) = x^* \text{ e } \frac{dy}{d\tau}(0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

A aplicação do método IFOHAM à resolução do problema (9) assumiu a seguinte configuração:

$$\begin{cases} u_0(\tau) = x^* \cos \tau \\ \gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[\gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(\tau_0) = 0 \text{ e } u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases} \quad (10)$$

com

$$N[\gamma, y] = \gamma \frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0 \quad (11)$$

e

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2f}{d\tau^2} + f. \quad (12)$$

Notemos que  $\gamma$  representa  $\omega^2$ , o quadrado da frequência oscilatória fundamental associada à solução do problema original. O procedimento utilizado para determinar os sucessivos termos  $\gamma_n$  desconhecidos no processo (10) seguiu a abordagem adoptada e justificada, por exemplo, em (S. Liao, 2012). Este procedimento tem por base a eliminação em cada iterada dos chamados termos seculares  $\tau \cos \tau$  que decorrem da resolução da equação diferencial linear:

$$\gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ \gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (13)$$

Admitida a convergência, o processo descrito conduzirá à obtenção de sucessões

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \text{ e } y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y,$$

cujos limites serão o quadrado da frequência oscilatória fundamental  $\gamma$  e a solução  $y = y(t)$  do problema (7). Em cada iterada a solução IFOHAM de ordem  $M$  do problema original será simplesmente

$$x_M(t) = y_M(\sqrt{\gamma_M}t) \quad (14)$$

em que  $y_M = \sum_{k=0}^M u_k(\tau)$ . No trabalho referido (Sacramento et al., 2018) comparámos as soluções obtidas com o IFOHAM com soluções obtidas com recurso ao HAM e disponíveis na literatura (S. Liao, 2012). Os resultados foram considerados muito satisfatórios tendo resultado reforçada a convicção de que o IFOHAM generalizava efectivamente o processo de Picard-Lindelöf.

No presente trabalho, tendo por base a equação de van der Pol, estudaremos a aplicabilidade do IFOHAM à determinação quer da amplitude, quer da frequência fundamental de soluções periódicas de sistemas auto-excitados.

## 2. A equação de van der Pol

A equação de van der Pol (não forçada) é a equação diferencial não linear

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (15)$$

na qual o parâmetro  $\mu$  regula a intensidade do amortecimento não linear.

Esta equação foi introduzida e estudada em 1920 pelo físico Holandês Balthazar van der Pol no contexto da modelação do comportamento oscilatório da corrente eléctrica numa válvula electrónica de tipo tríodo.

O sistema dinâmico modelado pela equação de van der Pol constitui um sistema auto-excitado. Estes sistemas apresentam tipicamente de forma espontânea uma resposta oscilatória de amplitude crescente (associada a um amortecimento negativo) que evolui para um ciclo limite quando, e se, estabilizada (por efeitos não lineares). O colapso da ponte de Tacoma em 1940 constitui um exemplo paradigmático de resposta oscilatória dum sistema auto-excitado (Billah & Scanlan, 1991).

Pelo facto de numerosos e importantes fenómenos electrónicos, mecânicos, geológicos e biológicos, entre outros apresentarem comportamentos dinâmicos com respostas oscilatórias típicas de sistemas auto-excitados o estudo deste tipo de modelos é particularmente importante. A equação de van der Pol, em particular, tem sido utilizada para descrever fenómenos tais como a dinâmica de impulsos nervosos (Engelbrecht, 1992) ou a dinâmica de placas tectónicas em falhas geológicas (Cartwright, Eguíluz, Hernández-García, & Piro, 1999).

Noutros contextos a equação de van der Pol constitui um dos componentes de modelos semi-empíricos destinados a descrever fenómenos muito complexos. É o caso dos chamados "modelos de esteira oscilante" ou *wake oscillator models* que descrevem o complexo processo oscilatório observado em estruturas expostas a escoamentos transversos de fluidos. Consulte-se por exemplo Blevins (Blevins, 1990) ou Facchinetti (Facchinetti, Langre, & Biottey, 2004).

Para qualquer  $\mu > 0$  a equação de van der Pol não forçada (15) tem um único ciclo limite (estável) para o qual a solução oscilatória evolui independentemente das condições iniciais (desde que diferentes da origem das coordenadas (Hafeez, Ndikilar, & Isyaku, 2015)). A solução oscilatória apresenta uma amplitude com valores próximos de 2 no ciclo limite dependendo o valor exacto dessa amplitude do valor de  $\mu$  (López, Abbasbandy, & López-Ruiz, 2008).

### **3. Estratégia para determinação da amplitude e frequência**

A estratégia que adoptaremos para determinar a amplitude e a frequência da resposta oscilatória auto-excitada de (15) seguirá a estratégia definida por Liao em (S.-J. Liao, 2004) na resolução do mesmo problema recorrendo ao HAM.

Como foi referido, a equação de van der Pol tem um único ciclo limite para o qual a solução oscilatória evolui independentemente das condições iniciais. Este ciclo limite é caracterizado por uma resposta de amplitude  $a$

e frequência natural  $\omega$ . Suponha-se então e sem perda de generalidade que  $x(0)$  assume precisamente o valor  $a$  da amplitude (por agora desconhecido)

$$x(0) = a. \quad (16)$$

Para fechar o problema postule-se adicionalmente

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (17)$$

Sequidamente efectue-se a mudança de variável  $\tau = \omega t$  e defina-se

$$x(t) = ay(\tau), \quad (18)$$

para evidenciar no problema equivalente resultante desta mudança de variável a amplitude oscilatória  $a$  e a frequência fundamental  $\omega$  desconhecidas. Como

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \frac{dy}{d\tau} \quad (19)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad (20)$$

a expressão (15) pode ser reescrita na forma equivalente

$$\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \mu (a^2y^2 - 1) \omega \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (21)$$

munida das condições iniciais agora associadas à nova função  $y = y(\tau)$ , solução do problema (21):

$$y(0) = 1 \text{ e } \frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \quad (22)$$

Uma vez determinada a função  $y = y(\tau)$ , solução da equação diferencial (21), a solução procurada  $x = x(t)$ , da equação diferencial (7), será simplesmente

$$x = x(t) = ay(\omega t). \quad (23)$$

## 4. Utilização do algoritmo IFOHAM

Defina-se seguidamente o operador  $N$  tendo em vista descrever de forma condensada o problema (21):

$$N[a, \omega, y] = \omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \mu (a^2y^2 - 1) \omega \frac{dy}{d\tau} + y. \quad (24)$$

Na aplicação da técnica IFOHAM seguiremos procedimentos comuns aos utilizados na aplicação da técnica HAM no tocante ao estabelecimento da *regra de construção da expressão da solução*, na escolha do *operador linear*  $\mathcal{L}$  e na *escolha da aproximação*  $u_0 = u_0(\tau)$  da solução procurada a qual deverá satisfazer as condições iniciais. Estes procedimentos encontram-se justificados no Capítulo 2 de (S. Liao, 2012) e também, por exemplo em (S. Liao, 2004).ou (S.-J. Liao, 2004) Ter-se-á, então

$$\begin{cases} u_0(\tau) = \cos \tau \\ \omega_n^2 \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[a_n, \omega_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], \quad n \geq 0 \\ \text{com } u_k(\tau_0) = 0 \text{ e } u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases}, \quad (25)$$

com

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f. \quad (26)$$

Notemos que  $u_0(\tau) = \cos \tau$  satisfaz as condições iniciais postuladas (22).

O procedimento que utilizaremos para determinar os sucessivos termos  $a_n$  e  $\omega_n$  desconhecidos no processo (25) seguirá a abordagem adoptada e justificada, por exemplo, em (S. Liao, 2004). Este procedimento tem por base a eliminação em cada iterada dos chamados termos seculares  $\tau \cos \tau$  e  $\tau \sin \tau$  que decorrem da resolução da equação diferencial linear:

$$\omega_n^2 \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ a_n, \omega_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (27)$$

A origem deste procedimento tal com é referido e citado em (S. Liao, 2004) remonta a trabalhos de Lindstedt, Bohlin, Poincaré e Gylden.

O processo descrito, a ser convergente, conduzirá à obtenção de sucessões  $\{a_n\}$ ,  $\{\omega_n\}$  e  $\{y_{n+1}\}$ ,

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow a \\ \omega_n &\rightarrow \omega \text{ e} \\ y_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y. \end{aligned}$$

cujos limites  $a$ ,  $\omega$  e  $y$ , satisfazem o problema de valores iniciais (21) e (22). Concomitantemente com a determinação da solução procurada (23) somos conduzidos, assim, ao conhecimento do valor dos parâmetros  $a$  e  $\omega$ .

Admitida a convergência do método e recordando (23), a solução IFOHAM aproximada de ordem  $M$  do problema original (15) com valores iniciais (16) e (17), será simplesmente

$$x_M(t) = a_M y_M(\omega_M t). \quad (28)$$

## 5. Testes e simulações numéricas

Os testes e as simulações numéricas serão realizados em MATLAB. Na implementação do algoritmo IFOHAM utilizaremos a toolbox simbólica da plataforma atrás referida. Na resolução numérica dos problemas teste utilizaremos o método Runge-Kutta associado à rotina `ode45` do MATLAB. Como foi referido aplicaremos a técnica IFOHAM à resolução do problema (15) com valores iniciais (16) e (17).

De relevar o facto de que na aplicação do método IFOHAM utilizarmos em todas as simulações o valor  $c_0 = -1$  relegando para um futuro trabalho a análise da influência deste parâmetro na convergência nesta técnica.

Nas Figuras 1, 2 e 3 representamos graficamente as soluções IFOHAM aproximadas de ordem 2 que obtidas e as soluções numéricas RK45 determinadas com o método Runge-Kutta correspondentes a cada um dos casos testados:  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  e  $\mu = 1.0$ .

Na aferição da tendência de convergência do método IFOHAM calcularemos em cada iterada a versão discreta da média quadrática do resíduo num período completo, da solução aproximada de ordem  $M$ ,

$$E_M = \frac{\int_0^{2\pi} (N [a_M, \omega_M, y_M])^2 d\tau}{2\pi}, \quad (29)$$

o qual será computado da forma seguinte,

$$E_M \approx \frac{\sum_{k=0}^{k=N} (N [a_M, \omega_M, y_M (\tau_k)])^2}{N + 1}, \quad (30)$$

em que

$$\tau_k = \frac{2k\pi}{N} \text{ e } N = 50. \quad (31)$$

Nas Tabelas 1, 2 e 3 apresentamos os valores obtidos com o método IFOHAM das aproximações de ordem  $M$  dos valores da versão discreta da média do quadrado do resíduo  $E_M$ , da frequência angular da oscilação  $\omega_M$  bem como da amplitude  $a_M$  da resposta oscilatória, respeitantes a cada um dos casos testados:  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  e  $\mu = 1.0$ .

## 6. Discussão dos resultados

As Figuras 1, 2 mostram que as soluções aproximadas de ordem 2, do problema em estudo, obtidas recorrendo ao método IFOHAM são aparentemente coincidentes com as soluções numéricas resultantes das simulações numéricas baseadas no método Runge-Kutta de  $4^a/5^a$  ordem, nos casos em que  $\mu = 0.25$

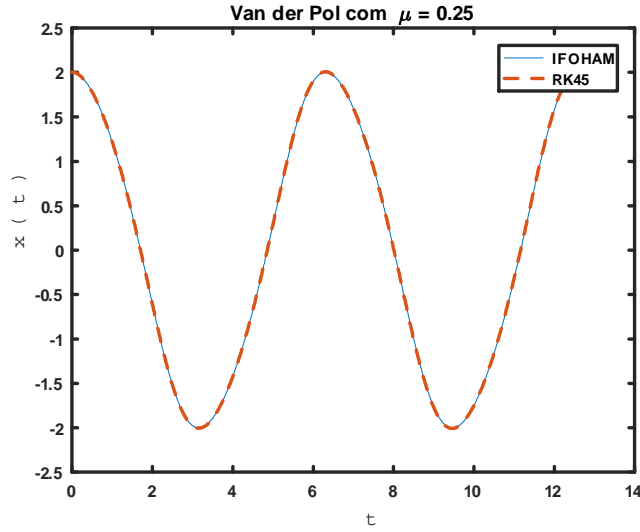


Figura 1: Solução IFOHAM aproximada de ordem 2 e solução numérica RK45. ( $\mu = 0.25$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 0.25$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.030637254901961	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	0.001797600707410	0.996244692913550	1.997947938077153
2	0.000017619444480	0.996126327784815	2.000666070870019

Tabela 1: Valores de  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo),  $\omega_M$  (quadrado da frequência) e  $a_M$  (amplitude) associados às duas primeiras iteradas ( $\mu = 0.25$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 0.50$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.122549019607843	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	0.027598653855655	0.986712903267367	1.990661336451152
2	0.001088915644987	0.984926844180597	2.002824407806937

Tabela 2: Valores de  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo),  $\omega_M$  (quadrado da frequência) e  $a_M$  (amplitude) associados às duas primeiras iteradas ( $\mu = 0.25$ ).

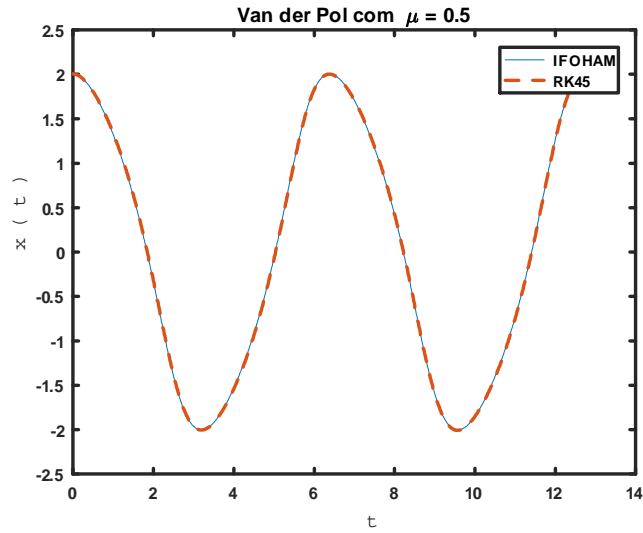


Figura 2: Solução IFOHAM aproximada de ordem 2 e solução numérica RK45. ( $\mu = 0.5$ ).

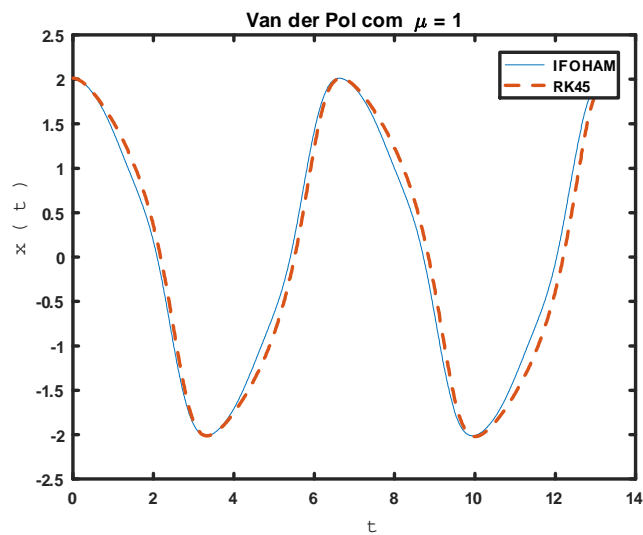


Figura 3: Solução IFOHAM aproximada de ordem 2 e solução numérica RK45. ( $\mu = 1.0$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 1.0$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.490196078431373	1.0000000000000000	2.0000000000000000
1	0.408178242095261	0.970406578035910	1.947754466672885
2	0.070306106500186	0.948058574258731	2.011425421086219

Tabela 3: Valores de  $E_M$  (média discreta do quadrado do resíduo),  $\omega_M$  (quadrado da frequência) e  $a_M$  (amplitude) associados às duas primeiras iteradas ( $\mu = 1.0$ ).

e  $\mu = 0.5$ . Na 3, caso  $\mu = 1.0$ , claramente a solução aproximada IFOHAM de ordem 2 não acompanha satisfatoriamente a solução numérica.

Analisando as Tabelas 1, 2 e 3 observamos uma tendência de convergência das soluções aproximadas de ordem crescente geradas pelo IFOHAM. Este facto encontra-se patente na diminuição dos valores da média quadrática do resíduo  $E_M$ , de iterada para iterada, que podemos constatar. Naturalmente, esta tendência de convergência é acompanhada pela estabilização dos valores de  $\omega_M$  e  $a_M$  sucessivamente gerados pelo método. Necessariamente, os valores aproximados das frequências  $\omega_M$  e amplitudes  $a_M$ , assim geradas pelo método IFOHAM, serão tanto mais satisfatórios quanto mais diminutas forem as médias quadrática  $E_M$  dos resíduos correspondentes.

Podemos observar, à medida que  $\mu$  cresce, uma diminuição no rigor da aproximação IFOHAM de 2ª ordem obtida. Este facto explica o ajuste insatisfatório entre a solução aproximada IFOHAM de ordem 2 e a solução numérica patente na Figura 3. Refira-se que esta dificuldade se agrava com o crescimento do parâmetro  $\mu$ .

A obtenção de soluções oscilatórias mais rigorosas exige o cálculo de soluções IFOHAM aproximadas de ordem substancialmente superior a 2. Esta tarefa apresenta, no entanto, as dificuldades associadas à eficiência de processos iterativos em que a extensão/complexidade de cada iterada vão aumentando.

## 7. Conclusões e recomendações para trabalho futuro

### 7.1. Conclusões

Tendo em conta os resultados apresentados e a discussão efectuada desenham-se as seguintes conclusões:

- O método IFOHAM apresenta-se, neste estudo preliminar, com capacidade para determinar soluções periódicas da equação de van der Pol, das correspondentes frequências e amplitudes oscilatórias.
- A utilização deste algoritmo é de diminuta complexidade e de fácil programação embora a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem apresente as dificuldades associadas a processos iterativos em que a extensão/complexidade de cada iterada vão aumentando.
- A opinião de que esta técnica (o método IFOHAM) é uma generalização do processo iterativo de Picard-Lindelöf é consolidada.

## 7.2. Trabalho futuro

Quanto ao trabalho futuro perspectivam-se os seguintes desenvolvimentos:

- Optimizar a implementação computacional do algoritmo IFOHAM de modo a viabilizar a obtenção automática de soluções aproximadas de maior ordem.
- Aplicação do IFOHAM à determinação das amplitudes e frequências oscilatórias de sistemas não lineares acoplados, tais como sistemas constituídos por estruturas esbeltas sujeitas a escoamentos transversos (físico-matematicamente modelados por equações estruturais acopladas à equação de van der Pol).
- Estudo das condições de convergência do IFOHAM em termos das características da equação diferencial não linear a resolver e do valor do parâmetro  $c_0$ .

## 8. Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer à Professora Pamela Tierney e ao Professor Nathan Doyle o apoio ao projecto em que este trabalho se insere.

## Referências

Billah, K. Y., & Scanian, R. H. (1991, feb). Resonance, tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *Am. J. Phys.*, 2, 118-124.

- Blevins, R. D. (1990). *Flow induced vibrations* (second ed.). Malabar, FL: Krieger Publishing Co.
- Cartwright, J. H. E., Eguíluz, V. M., Hernández-García, E., & Piro, O. (1999). Dynamics of elastic excitable media. *Int. J. Bifurcation and Chaos*(9), 2197-2202.
- Engelbrecht, J. (1992, oct). Mathematical modelling of nerve pulse transmission. *Periodica Polytechnica ser. mech. Eng.*(2), 153-161.
- Facchinetti, M., Langre, E. de, & Biolley, F. (2004). Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*(19), 123-140.
- Hafeez, H. Y., Ndikilar, C. E., & Isyaku, S. (2015, jul). Analytical study of the van der pol equation in the autonomous regime. *Progress in Physics*, 3, 252-255.
- Liao, S. (1992). *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*. Unpublished doctoral dissertation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China.
- Liao, S. (2004). An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 39, 271-280.
- Liao, S. (2012). *Homotopy analysis method in nonlinear differential equations*. Springer.
- Liao, S.-J. (2004). An analytic approximate approach for free oscillations for self-excited systems. *International Journal on non-linear mechanics*(39), 271-280.
- López, J., Abbasbandy, S., & López-Ruiz, R. (2008, jun). Formulas for the amplitude of the van der pol limit cycle. *arXiv*.
- Moreira, M. (2017). Ifoham-an iterative algorithm based on the first-order equation of ham: exploratory preliminary results. *Arxiv*.
- Sacramento, M., Branco, C., & Moreira, M. (2018, nov). Ifoham e a determinação de soluções periódicas de equações diferenciais não-lineares. In *Jornadas do mar 2018*.



**„MIRCEA CEL BATRAN”  
NAVAL ACADEMY**



# CERTIFICATE

*Awarded to*

**MARTA SACRAMENTO**

*for participation to the 41<sup>th</sup> Scientific Conference for Bachelor Degree Students CADET-NAV 2019*

**VICE-RECTOR FOR SCIENTIFIC RESEARCH  
“MIRCEA CEL BATRAN” NAVAL ACADEMY**

**Commander (N)**

**Lecturer Catalin CLINCI, Ph.D**

**12<sup>th</sup>-13<sup>th</sup> of Aprilie 2019**



**„MIRCEA CEL BATRAN”  
NAVAL ACADEMY**



# 1st PRIZE

*Awarded to*

**CECILIA ALMEIDA, MARTA SACRAMENTO**

from **PORTUGUESE NAVAL ACADEMY** section **FUNDAMENTAL SCIENCES**

*for their contribution to the 41<sup>th</sup> Scientific Conference for Bachelor Degree Students CADET-NAV 2019.*

**VICE-RECTOR FOR SCIENTIFIC RESEARCH  
“MIRCEA CEL BATRAN” NAVAL ACADEMY**

**Commander (N)**

**Lecturer Catalin CLINCI, Ph.D**

**12<sup>th</sup>-13<sup>th</sup> of Aprilie 2019**

# IFOHAM-a generalization of the Picard-Lindelöf iteration method

Marta Sacramento, Cecília Almeida and Miguel Moreira

**Abstract** IFOHAM (Iterative First order HAM) is an iterative technique based on the first order equation of the Homotopy Analysis Method (HAM). It can be shown that IFOHAM generalizes Picard-Lindelöf's iteration algorithm and can be used to solve nonlinear differential equations. In this work IFOHAM will be implemented in an symbolic computer environment and we will analyze and test its applicability to find series solutions of second order nonlinear differential equations with periodic solutions. In particular, we will show that the IFOHAM method is able to identify the fundamental frequencies as well as the amplitudes of such periodic solutions. Knowledge of these parameters is of particular importance in design and maintenance activities as it characterizes the oscillatory behavior of many real systems with nonlinear responses. The results of tests performed using the IFOHAM method will be compared with results available in the literature using the HAM as well as with results obtained using classical numerical techniques to solve differential equations.

## 1 Introduction

The HAM (Homotopy Analysis Method) was developed by Shijun Liao [4] and consists in an analytic approximation method [11] to solve nonlinear ordinary differential equations as well as partial differential equations. This technique is based on the concept of homotopy and transforms the original problem:

$$N[u] = 0 \tag{1}$$

---

Marta Sacramento and Cecília Almeida

Naval Academy/Navy Research Center (CINAV), 2810-001 Almada, Portugal, e-mail: marta.sofia.sacramento@marinha.pt and cecilia.branco.almeida@marinha.pt

Miguel Moreira

Naval Academy/Navy Research Center (CINAV)/Centre of Marine Technology and Ocean Engineering (CENTEC), 2810-001 Almada, Portugal e-mail: miguel.moreira@marinha.pt

into a family of problems characterized by the following linear differential equations:

$$\mathcal{L}[u_1(t)] = c_0[N[u_0(t)]] \quad (2)$$

$$\mathcal{L}[u_m(t) - u_{m-1}(t)] = c_0 \mathcal{D}_{m-1}[N[\phi(t; q)]] \quad (3)$$

with  $m \in N$  and  $m > 1$ . The recursive resolution of (2) and (3) gives the successive terms of the requested solution:

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(t). \quad (4)$$

Note that  $\mathcal{L}$  represents an appropriate linear operator;  $u_0 = u_0(t)$  represents an initial solution guess of the original problem;  $c_0$  represents an appropriate convergence control parameter;  $\mathcal{D}_k$  represents the homotopic derivative operator of order  $k$  defined by:

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k}{\partial q^k} \right|_{q=0}. \quad (5)$$

Finally,  $\phi(t; q)$  represents the homotopy Maclaurin series reading:

$$\phi(t; q) = u_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) q^n, \quad q \in [0, 1]. \quad (6)$$

In the works [6], [7] and [8], the explanation of the applications details of HAM, as well as, numerous illustrative applications, both introductory and advanced, can be consulted.

It's important to mention that the HAM has the following features, that gives advantages over other asymptotic nonlinear problem solving techniques:

- Guarantee of convergence by adequately choosing  $c_0$ , the convergence control parameter;
- Flexibility on the choice of base functions and decide about the solution expression by adequately choosing  $\mathcal{L}$  and the initial guess  $u_0(t)$ ;
- Great generality of application ranging from solving weakly to strong nonlinear differential equations or even fractional differential equations;
- Ability to find important parameters, such as amplitude and frequency, of periodic solutions of nonlinear problems.

Of these facts, among others, the HAM has been widely applied by the scientific community in recent years in solving nonlinear problems.

## 2 The IFOHAM method

The IFOHAM (Iterative First order HAM) is an asymptotic technique for solving nonlinear differential equations that generalizes the Picard-Lindelöf's method and

is inspired by the HAM (Homotopy Analysis Method). Indeed, in addressing the first order Initial Value Problem (IVP)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0^{(0)} \end{cases}, \quad (7)$$

based on HAM, one can find

$$u_1(t) = c_0 \mathcal{L}^{-1} [N[u_0(t)]] \quad (8)$$

from (2). Assuming the convergence of (4), one can conjecture that

$$u_0(t) + u_1(t) \quad (9)$$

leads to a better initial guess than the (postulated) original one,  $u_0(t)$ . We are thus led to the iterative algorithm we call IFOHAM (see [10], for a more detailed description of this method):

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0^{(0)} \\ \mathcal{L}[u_{n+1}(t)] = c_0 [N[\sum_{k=0}^n u_k(t)]] , \quad n \geq 0 \\ \text{with } u_k(t_0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ x_n = \sum_{k=0}^n u_k(t) \end{cases}. \quad (10)$$

It is demonstrated in [10] that, if

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{dh}{dt}(t), \quad (11)$$

and

$$N[x] \equiv \frac{dx}{dt} - f(t, x), \quad (12)$$

then, the iterative algorithm IFOHAM (10), is equivalent to the following algorithm

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = (1 + c_0)x_n(t) - c_0 \left( x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi \right), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

which generalizes the Picard-Lindelöf's iterative method. Clearly, if  $c_0 = -1$ , this technique (13) coincides exactly with the aforementioned Picard-Lindelöf's iterative process, as we can immediately observe:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0^{(0)} \\ x_{n+1}(t) = x_0^{(0)} + \int_{t_0}^t f(\xi, x_n(\xi)) d\xi, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

It was shown in [10] that the parameter  $c_0$  also influences the convergence speed of IFOHAM applied to the family of problems described by (12). So, the proper choice of  $c_0$  allows to improve the performance of the IFOHAM method.

In [10] it is conjectured the applicability of IFOHAM in solving problems already addressed and solved by the method HAM, such as, second order problems. The applicability of IFOHAM in determining the fundamental frequency, as well as, amplitudes of periodic solutions of nonlinear problems is also conjectured. In order to address these issues we will focus here on the autonomous Duffing equation and on the van der Pol equation.

### 3 Autonomous Duffing equation

The Duffing equation is typically a second order non-linear differential equation with a cubic polynomial stiffness term, as well as, a linear viscous type damping term [2]. This nonlinear equation was introduced by Georg Duffing in 1918 as a result of his work in forced vibrations in a system with a cubic softening nonlinearity. The autonomous Duffing equation can display an interesting self-oscillatory behavior.

Consider the autonomous Duffing equation studied in detail in [7] and described by the second-order nonlinear differential equation.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (15)$$

with the initial conditions,

$$x(0) = x^* \quad (16)$$

and

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (17)$$

In Chapter 2 of [7] the qualitative study of this nonlinear problem is performed, through which the ranges of values of  $\lambda$  and  $\varepsilon$  are determined, so that the problem in question presents periodic solutions. The knowledge of the fundamental frequency  $\omega$ , characteristic of such periodic solutions is particularly important. This is because not only enables the expression of the solution in terms of a well-suited trigonometric series, but it also has an enormous practical importance.

The determination of periodic solutions of different orders using HAM, the corresponding square means of the residual and the fundamental frequencies is performed by Liao in the aforementioned work for different parameter values  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  and  $x(0) = x^*$ . In order to compare the results obtained with the IFOHAM and the HAM, we will use the values of the parameters  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x(0) = x^*$  shown in Table 1.

**Table 1** Parameters used in tests A, B and C.

	$\lambda$	$\varepsilon$	$x^*$
A	$\frac{9}{4}$	1	1
B	0	1	1
C	4	-1	-1

### 3.1 Strategy for determining the frequency using IFOHAM

As with using the HAM method, in approaching the problem (15) using IFOHAM, it becomes necessary to make the variable transformation  $\tau = \omega t$  and define

$$x(t) = y(\tau), \quad (18)$$

to highlight, in the equivalent problem resulting from this change of variable, the fundamental frequency  $\omega$ . Then,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad (19)$$

and the expression (15) can be rewritten (doing  $\gamma = \omega^2$ ) in the form

$$\gamma \frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0. \quad (20)$$

The corresponding initial conditions that must be satisfied by the function  $y = y(\tau)$  will be

$$y(0) = x^* \quad (21)$$

and

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \quad (22)$$

From  $y = y(\tau)$ , the the sought solution  $x = x(t)$ , of the differential equation (15), will simply be

$$x = x(t) = y(\omega t). \quad (23)$$

### 3.2 Using the IFOHAM Algorithm

In order to apply the IFOHAM algorithm, define

$$N[\gamma, y] = \gamma \frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda y + \varepsilon y^3 = 0, \quad (24)$$

and let's follow the procedures adopted by the HAM users regarding the establishment of the rule of construction of the expression's solution, choosing an appropriate

linear operator  $\mathcal{L}$  and choosing an initial guess  $u_0 = u_0(\tau)$  of the sought solution. The motivation for such choices can be found in Chapter 2 of [7] and also, for example, in [5]. We will then have

$$\begin{cases} u_0(\tau) = x^* \cos \tau \\ \gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[\gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], \quad n \geq 0 \\ \text{with } u_k(\tau_0) = 0 \quad \text{and} \quad u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in N \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases}, \quad (25)$$

with

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f. \quad (26)$$

The procedure we will use to determine the successive  $\gamma_n$  terms, unknown in the process (25) will follow the approach taken and justified, for example in [5]. This procedure is based on the elimination, in each iterate of the so-called secular terms  $\tau \cos \tau$  resulting from the resolution of the linear differential equation:

$$\gamma_n \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ \gamma_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (27)$$

That is, at each iteration, the choice of  $\gamma_n$  is made to ensure that the term  $u_{n+1}$ , to be determined, doesn't have secular plots of type  $\tau \cos \tau$ . The origin of this procedure, as referred to and cited in [5], dates back to works by Lindstedt, Bohlin, Poincaré and Gylden.

If the process described is convergent it will lead to sequences

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \quad \text{and} \quad y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y \quad (28)$$

whose limits satisfy the Initial Value Problem (20) and (22).

To better understand the application of the IFOHAM to solve the problem under study, we will exemplify below the analytical procedures necessary to compute the first iterate. From (24) and (26), we can deduce:

$$\gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \left( \gamma_0 \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} + \lambda u_0 + \varepsilon u_0^3 \right). \quad (29)$$

Since  $u_0(\tau) = x^* \cos \tau$  and noting that  $\cos^3 \tau = \frac{1}{4} \cos 3\tau + \frac{3}{4} \cos \tau$  we will obtain the expression of the differential equation (30) to solve to find  $u_1$  and  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \left\{ \left( -\gamma_0 x^* + \lambda x^* + \frac{3\varepsilon (x^*)^3}{4} \right) \cos \tau + \frac{\varepsilon (x^*)^3}{4} \cos 3\tau \right\}. \quad (30)$$

In order to avoid the emergence of the secular terms,  $\tau \cos \tau$ , in the general solution of (30), it will be sufficient to ensure that

$$-\gamma_0 x^* + \lambda x^* + \frac{3\varepsilon (x^*)^3}{4} = 0,$$

that is

$$\gamma_0 = \lambda + \frac{3\varepsilon (x^*)^2}{4}. \quad (31)$$

The obtained values for  $\gamma_0$  in test cases A, B and C are shown in Table 2.

**Table 2** Values of  $\gamma_0$  in tests A, B and C.

	$\lambda$	$\varepsilon$	$x^*$	$\gamma_0$
A	$\frac{9}{4}$	1	1	3
B	0	1	1	$\frac{3}{4}$
C	4	-1	-1	$\frac{13}{4}$

Once the value of  $\gamma_0$  is set, the problem to be solved will be reduced to determine  $u_1$ , from the resulting initial values problem:

$$\begin{cases} \gamma_0 \left( \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = c_0 \frac{\varepsilon (x^*)^3}{4} \cos 3\tau \\ u_1(0) = 0 \\ u_1'(0) = 0 \end{cases}. \quad (32)$$

A particular solution  $u_1$  of (32) is going to be

$$u_1(\tau) = C_1 \cos 3\tau + C_2 \sin 3\tau.$$

Hence,

$$u_1(\tau) = -\frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau.$$

So, the general solution  $u_1$ , of (32), will be

$$u_1(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau,$$

from which, taking into account the initial conditions ( $u_1(0) = 0$  e  $u_1'(0) = 0$ ), we deduce:

$$u_1(\tau) = \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau. \quad (33)$$

The approximate order 1, complete solution of the problem, will be:

$$y_1(\tau) = u_1(\tau) + u_0(\tau) = \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos \tau - \frac{c_0 \varepsilon (x^*)^3}{\gamma_0 32} \cos 3\tau + x^* \cos \tau. \quad (34)$$

Considering  $c_0 = -1$ , the approximate order 1, complete solution of the problem defined by Case A, will be:

$$y_1(\tau) = \frac{1}{96} \cos 3\tau + \frac{95}{96} \cos \tau. \quad (35)$$

The calculation of the following  $n \geq 1$  terms, the pairs  $(\gamma_n, u_{n+1})$  will be determined a similarly way, thus obtaining (in case of convergence) sequences

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \quad \text{and} \quad y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y.$$

Assuming the convergence of the method and remembering (23), the approximate  $M$ -order IFOHAM solution of the original problem (15) and (17), will simply be:

$$x_M(t) = y_M(\sqrt{\gamma_M t}). \quad (36)$$

The methodology followed is analogous to the methodology adopted in the application of the HAM technique, see for example page 38 of [7].

### 3.3 Tests and numerical simulations

The tests and numerical simulations will be performed in MATLAB. In the implementation of the IFOHAM algorithm we will use the symbolic toolbox of the referred platform. In the numerical resolution of the test problems we will use the Runge-Kutta method associated with the MATLAB `ode45` routine. As mentioned, we will apply the IFOHAM technique to solve the initial values problem (15) and (17) by choosing for  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $x^*$  the values indicated in Table 1, respectively, associated with cases A, B and C.

It is noteworthy that in the application of the IFOHAM we used, in all simulations, the value  $c_0 = -1$  relegating for future work the analysis of the influence of this parameter on the convergence of this technique.

In Figures 1, 2 and 3 we plot the approximate order 3 IFOHAM solutions and the corresponding RK45 numerical solutions obtained with the Runge-Kutta method. to each case tested: Case A, Case B, and Case C.

In measuring the convergence trend we will calculate, in each iterate, the discrete version of the quadratic mean of the residue over a complete period of the approximate order  $M$  solution (discrete squared residual):

$$E_M = \frac{\int_0^{2\pi} (N[\gamma_M, y_M])^2 d\tau}{2\pi}, \quad (37)$$

which will be computed as

$$E_M \approx \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (N[\gamma_M, y_M(\tau_k)])^2}{N+1}, \quad (38)$$

where

$$\tau_k = \frac{2k\pi}{N} \quad \text{and} \quad N = 50. \tag{39}$$

In Tables 3, 4 and 5 we present the values obtained in the M-order approximations, using the method IFOHAM, of the squared angular frequency of the oscillation  $\gamma = \omega^2$ , as well as the corresponding values of the discrete squared residual  $E_M$  (38) for each one of the test cases: Case A, Case B, and Case C.

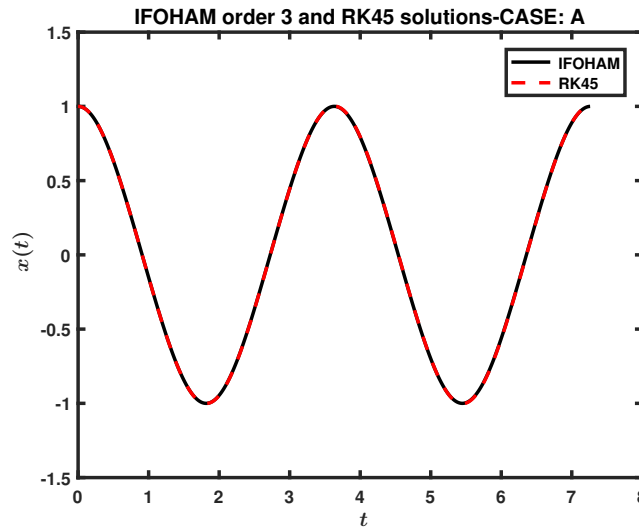
**Table 3** Values of  $\gamma_M = \omega_M^2$  (squared angular frequency) and  $E_M$  (discrete squared residual) of the first 3 iterates.

IFOHAM-Case A		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	3.000000000000000	0.031862745098039
1	2.992350260416667	0.000030759662724
2	2.992176238814215	0.000000008188297
3	2.992173084940535	0.000000000002787

We present below the approximate order 1 solution obtained, in the resolution of case A, based on the implementation of the IFOHAM in MATLAB:

$$x_1(t) = \frac{1}{96} \cos 3\tau + \frac{95}{96} \cos \tau \quad \text{with} \quad \begin{cases} \tau = \sqrt{\gamma_1} t \\ \gamma_1 = 2.992350260416667 \end{cases} \tag{40}$$

Of course, the expressions (35) and (40) are coincident.



**Fig. 1** Autonomous Duffing equation: Approximate order 3 IFOHAM solution and RK45 numerical solution ( $\gamma = 9/4$ ,  $\varepsilon = 1$  and  $x^* = 1$ ).

**Table 4** Values of  $\gamma_M = \omega_M^2$  (squared angular frequency) and  $E_M$  (discrete squared residual) of the first 3 iterates.

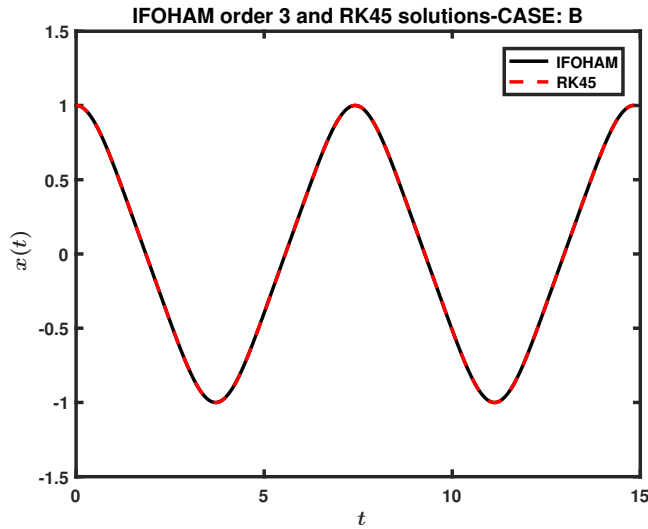
IFOHAM-Case B		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	0.7500000000000000	0.031862745098039
1	0.7213541666666667	0.000492900346247
2	0.718128571631923	0.000003750953237
3	0.717803950705108	0.00000038067810

**Table 5** Values of  $\gamma_M = \omega_M^2$  (squared angular frequency) and  $E_M$  (discrete squared residual) of the first 3 iterates.

IFOHAM-Case C		
Order $M$	$\gamma_M$	$E_M (c_0 = -1)$
0	3.2500000000000000	0.031862745098039
1	3.242649778106509	0.000026979989273
2	3.242778638653018	0.000000004554289
3	3.242777081822536	0.000000000000845

### 3.4 Discussion of results

Figures 1, 2 and 3 show that the approximate order 3 solutions of the problem under study using the IFOHAM are apparently coincident with the numerical solutions

**Fig. 2** Autonomous Duffing equation: Approximate order 3 IFOHAM solution and RK45 numerical solution ( $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  and  $x^* = 1$ ).

resulting from the numerical simulations based on the 4th / 5th order Runge-Kutta method, in all cases, A, B, and C, tested.

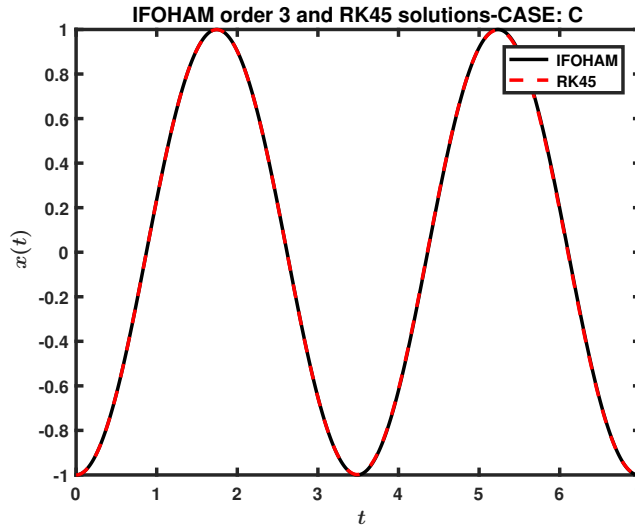
Looking at Tables 3, 4 and 5 we observe a convergence trend of the approximate solutions of increasing order generated by IFOHAM. This fact can be observed in the sharp decrease in the values of the quadratic mean of the residue  $E_M$ , from iterated to iterated. The decrease ratio of this parameter, from iterated to iterated, is less than  $10^{-2}$  and can assume values of the order of  $10^{-4}$ . Naturally, this convergence trend is accompanied by the stabilization of the values  $\gamma_M = \omega_M^2$ . Necessarily, the approximate values of the frequencies  $\omega_M$  generated by the IFOHAM, will be all the more satisfactory the smaller the quadratic mean  $E_M$  of the corresponding residues.

In Tables 2.7 and 2.8 of [7], we can access the values of the quadratic mean of the residuals  $E_M$  and the values of  $\gamma_M = \omega_M^2$  obtained using HAM, addressing the problem under study (15) and (17), under the configurations corresponding to cases A, B and C.

Note that in the referred application of HAM, it was used by Liao optimized convergence control parameters  $c_0$ . In contrast, when using IFOHAM here we used the constant value convergence control parameter  $c_0 = -1$ .

A rough comparison between the tabulated values in [7] and values obtained here and displayed in Tables 3, 4 and 5 suggests that the approximate 3rd order solutions obtained using IFOHAM are substantially less accurate than the approximate 5th order solutions obtained using HAM [ see Table 6].

It should be noted, however, that the IFOHAM and HAM are intrinsically distinct. The IFOHAM is iterative while the HAM is constructive, facts that may explain differences in the performance of these techniques. In the computational im-



**Fig. 3** Autonomous Duffing equation: Approximate order 3 IFOHAM solution and RK45 numerical solution ( $\gamma = 4$ ,  $\varepsilon = -1$  and  $x^* = -1$ ).

**Table 6** Values of  $\gamma_5 = \omega_5^2$  (squared angular frequency) and  $E_5$  (discrete squared residual) from Liao using HAM.

HAM, Liao [7]		
Case	$\gamma_5$	$E_5(c_0)$
A ( $c_0 = -\frac{1}{3}$ )	2.9921730367	$1.3 \times 10^{-14}$
B ( $c_0 = -\frac{3}{4}$ )	0.7177741910	$1.5 \times 10^{-8}$
C ( $c_0 = -\frac{3}{10}$ )	3.2427770978	$6.7 \times 10^{-14}$

plementation of the IFOHAM algorithm, the automatic obtaining of higher order approximations presents the difficulties normally associated with iterative processes in which the extension / complexity of each iterate significantly increases.

## 4 Van der Pol equation

The van der Pol equation was introduced and studied in 1920 by the Dutch physicist Balthazar van der Pol in the context of modeling the oscillatory behavior of electric current in a triode type electronic valve [12].

Consider the autonomous van der Pol equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (41)$$

where  $\mu$  accounts for the intensity of nonlinear damping.

Assuming  $\mu > 0$ , the dynamics described by the autonomous van der Pol equation (41) is that of a self-excited system which evolves to a stable periodic behavior, that is, there is a single limit cycle (stable) for which the solution evolves regardless of the initial conditions [1].

The oscillatory solution has an amplitude close to 2. The exact value of the amplitude depends on the parameter  $\mu$  [9].

### 4.1 Strategy for determining the amplitude and frequency using IFOHAM

The strategy we will adopt to determine the amplitude and frequency of the self-excited oscillatory response of (41) extends the adopted steps in determining the frequency of the oscillating solution of the Duffing autonomous equation in the previous section and follow the strategy defined by Liao in [3] in solving the same problem using HAM.

As noted, the van der Pol equation has a single limit cycle for which the oscillatory solution evolves independently of the initial conditions. This limit cycle is

characterized by an amplitude response  $a$  and natural frequency  $\omega$ . Suppose then, and without loss of generality, that  $x(0)$  assumes precisely the amplitude value  $a$  (for now unknown):

$$x(0) = a. \quad (42)$$

To close the problem postulate additionally

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (43)$$

Then, assume the variable transformation  $\tau = \omega t$  and set

$$x(t) = ay(\tau) \quad (44)$$

to highlight, in the new problem, the unknown oscillatory amplitude  $a$  and the fundamental frequency  $\omega$ . Because

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \frac{dy}{d\tau} \quad (45)$$

and

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} \quad (46)$$

the expression (41) can be rewritten in the equivalent form

$$\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \mu (a^2y^2 - 1) \omega \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (47)$$

with the initial conditions now associated with the new function  $y = y(\tau)$ , which is solution of the problem (47):

$$y(0) = 1 \quad \text{and} \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \quad (48)$$

Once determined the function  $y = y(\tau)$ , solution of the differential equation (47), the sought solution  $x = x(t)$ , of the differential equation (41), will simply be

$$x = x(t) = ay(\omega t). \quad (49)$$

## 4.2 Using the IFOHAM Algorithm

Define the operator  $N$  for a condensed description of the problem. (47):

$$N[a, \omega, y] = \omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \mu (a^2y^2 - 1) \omega \frac{dy}{d\tau} + y. \quad (50)$$

In applying the IFOHAM technique we will follow procedures common to those used in applying the HAM technique regarding the establishment of the solution expression construction rule, choosing the linear operator  $\mathcal{L}$  and choosing the initial guess  $u_0 = u_0(\tau)$  of the solution sought that must meet the initial conditions. These procedures are justified in Chapter 2 of [7], as well as, for example, in [5] or [3]. Then

$$\begin{cases} u_0(\tau) = \cos \tau \\ \omega_n^2 \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 [N[a_n, \omega_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau)]], \quad n \geq 0 \\ \text{with } u_k(\tau_0) = 0 \quad \text{and} \quad u'_k(\tau_0) = 0 \quad \forall k \in N \\ y_n = \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \end{cases}, \quad (51)$$

with

$$\mathcal{L}[f] = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f. \quad (52)$$

Note that  $u_0(\tau) = \cos \tau$  satisfies the postulated initial conditions (48).

The procedure adopted to determine the sequence of iterates  $a_n$  and  $\omega_n$  in the process (51) followed the approach taken and justified, for example in [5]. This procedure is based on the elimination in each iterate of the so-called secular terms  $\tau \cos \tau$  and  $\tau \sin \tau$  resulting from the resolution of the linear differential equation:

$$\omega_n^2 \mathcal{L}[u_{n+1}(\tau)] = c_0 \left[ N \left[ a_n, \omega_n, \sum_{k=0}^n u_k(\tau) \right] \right]. \quad (53)$$

The origin of this procedure, as referred to, and cited in [5], dates back to works by Lindstedt, Bohlin, Poincaré and Gylden.

The described process, being convergent, will lead to the determination of sequences  $\{a_n\}$ ,  $\{\omega_n\}$  and  $\{y_{n+1}\}$ , such that

$$a_n \rightarrow a, \quad (54)$$

$$\omega_n \rightarrow \omega, \quad (55)$$

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k(\tau) \rightarrow y, \quad (56)$$

whose limits  $a$ ,  $\omega$  and  $y$ , satisfy the initial value problem (47) and (48). So, the determination of the sought solution (49) is accompanied by the determination of the parameters  $a$  and  $\omega$ .

Assuming the convergence of the method and remembering (49), the approximate  $M$ -order IFOHAM solution of the original initial value problem (41), (42) and (43), will simply be:

$$x_M(t) = a_M y_M(\omega_M t). \quad (57)$$

### 4.3 Tests and numerical simulations

In the elaboration of tests and numerical simulations, in this section, we will continue to use MATLAB and the corresponding symbolic toolbox, as well as, the MATLAB `ode45` numerical routine. As mentioned above, the IFOHAM technique will be applied to solve the problem (41), with initial values (42) and (43).

It is noteworthy that, in the application of the IFOHAM method, we use in all simulations the value  $c_0 = -1$  relegating for future work the analysis of the convergence influence of this parameter.

In Figures 1, 2 and 3, we plot the approximate order 2 IFOHAM solutions and the RK45 numerical solutions obtained with the Runge-Kutta method, corresponding to each tested case:  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  and  $\mu = 1.0$ .

In measuring the convergence trend of the IFOHAM method, as previously done, we will calculate in each iterate the discrete version of the quadratic mean of the residue over a complete period (discrete squared residual), of the approximate solution of order  $M$ ,

$$E_M = \frac{\int_0^{2\pi} (N [a_M, \omega_M, y_M])^2 d\tau}{2\pi}, \tag{58}$$

which will be computed as follows,

$$E_M \approx \frac{\sum_{k=0}^{k=N} (N [a_M, \omega_M, y_M (\tau_k)])^2}{N + 1}, \tag{59}$$

where

$$\tau_k = \frac{2k\pi}{N} \quad \text{and} \quad N = 50. \tag{60}$$

In Tables 7, 8 and 9, we present the values obtained with the IFOHAM method of the  $M$ -order discrete squared residual  $E_M$ , the angular frequency of the oscillation  $\omega_M$  as well as the amplitude  $a_M$  of the oscillatory response, for each case tested:  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  e  $\mu = 1.0$ .

**Table 7** Values of  $E_M$  (discrete squared residual),  $\omega_M$  (squared angular frequency) and  $a_M$  (amplitude) of the first two iterates ( $\mu = 0.25$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 0.25$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.030637254901961	1.000000000000000	2.000000000000000
1	0.001797600707410	0.996244692913550	1.997947938077153
2	0.000017619444480	0.996126327784815	2.000666070870019

**Table 8** Values of  $E_M$  (discrete squared residual),  $\omega_M$  (squared angular frequency) and  $a_M$  (amplitude) of the first two iterates ( $\mu = 0.25$ ).

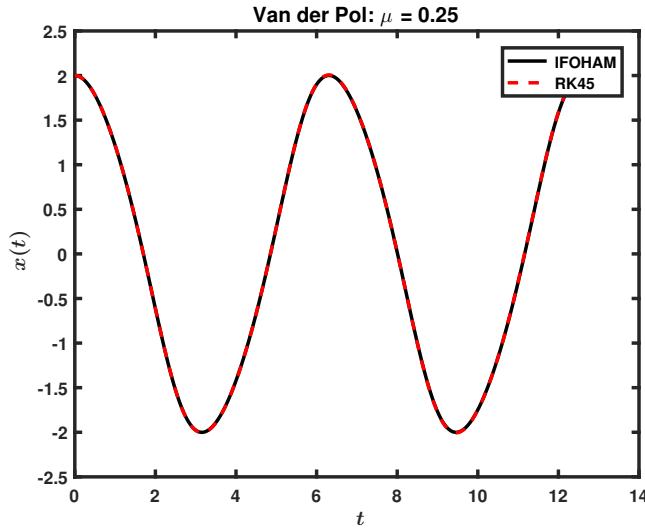
IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 0.50$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.122549019607843	1.000000000000000	2.000000000000000
1	0.027598653855655	0.986712903267367	1.990661336451152
2	0.001088915644987	0.984926844180597	2.002824407806937

**Table 9** Van der Pol equation: Values of  $E_M$  (discrete squared residual),  $\omega_M$  (squared angular frequency) and  $a_M$  (amplitude) of the first two iterates ( $\mu = 1.0$ ).

IFOHAM ( $c_0 = -1$ ) - $\mu = 1.0$			
Order $M$	$E_M$	$\omega_M$	$a_M$
0	0.490196078431373	1.000000000000000	2.000000000000000
1	0.408178242095261	0.970406578035910	1.947754466672885
2	0.070306106500186	0.948058574258731	2.011425421086219

#### 4.4 Discussion of the results

Figures 4 (case:  $\mu = 0.25$ ) and 5 (case:  $\mu = 0.5$ ) show that the approximate order 2 solutions of the problem under study, obtained using the IFOHAM method, appear to coincide with the numerical solutions resulting from numerical simulations based on the 4th / 5th order Runge-Kutta method. In 6, where  $\mu = 1.0$ , clearly the

**Fig. 4** Van der Pol equation: IFOHAM approximate solution of order 2 and numerical RK45 solution ( $\mu = 0.25$ ).

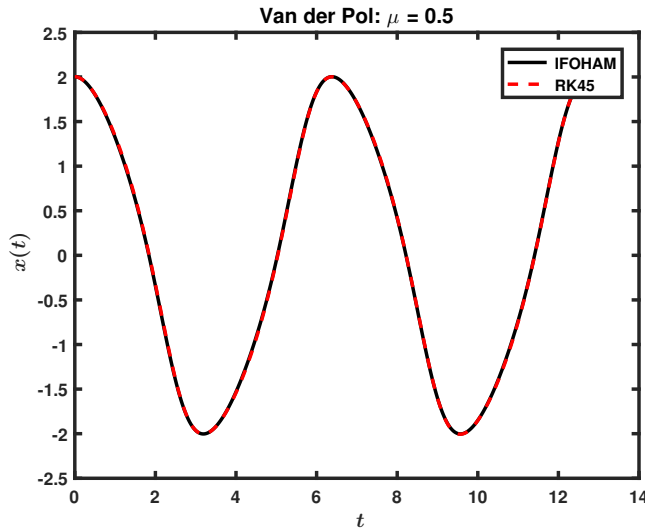
approximate order 2 IFOHAM solution does not satisfactorily follow the numerical solution.

From the observation of the discrete squared residual  $E_M$  decrease in Tables 7, 8 and 9, we observe the convergence trend of the approximate increasing order solutions generated by IFOHAM.

Of course, this convergence trend is accompanied by the stabilization of the values of  $\omega_M$  and  $a_M$  successively generated by the method. Necessarily, the approximate values of the frequencies  $\omega_M$  and amplitudes  $a_M$ , generated by the IFOHAM method, will be all the more satisfactory the smaller  $E_M$  of the corresponding discrete squared residual is.

As  $\mu$  grows, we can observe a decrease in the accuracy of the 2nd order IFOHAM approximation obtained. This explains the unsatisfactory fit between the approximate order 2 IFOHAM solution and the numerical solution shown in Figure 6. Note that this difficulty is aggravated by the growth of the parameter  $\mu$ .

Obtaining more accurate oscillatory solutions requires the calculation of approximate IFOHAM solutions of order substantially greater than 2. However, as mentioned above when discussing the results of applying this method to solve the Duffing equation, this task presents the difficulties associated with the efficiency of iterative processes in which the extent / complexity of each iterate significantly increases.



**Fig. 5** Van der Pol equation: IFOHAM approximate solution of order 2 and numerical RK45 solution ( $\mu = 0.5$ )

## 5 Conclusions and Recommendations for Future Work

### 5.1 Conclusions

Taking into account the results presented and the discussion made, the following conclusions are drawn:

- IFOHAM can determine periodic solutions of second order nonlinear problems and the corresponding amplitudes and oscillatory frequencies;
- IFOHAM is easy to program and apply, although, getting automatic solutions of higher order approximations presents the difficulties associated with iterative processes, in which the extension / complexity of each iterate significantly increases;
- The conjecture that IFOHAM is an extension of the Picard-Lindelöf iterative method is confirmed, which may be of theoretical interest.

### 5.2 Future Work

As for future work, the following developments are expected:

- Optimize the computational implementation of the IFOHAM algorithm to enable the automatic obtaining of higher order approximate solutions;
- Use IFOHAM to study the complex dynamic of the Duffing-Holmes equation;

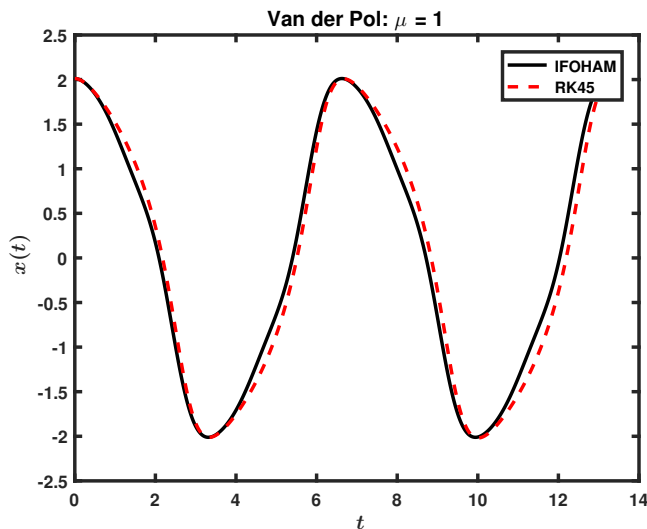


Fig. 6 IFOHAM approximate solution of order 2 and numerical RK45 solution ( $\mu = 1.0$ ).

- Use IFOHAM to study and determine the amplitude and oscillatory frequencies of coupled nonlinear systems, such as wake oscillator models;
- Study the convergence behavior of IFOHAM depending on the properties of the nonlinear differential equation under consideration, as well as, as a function of the parameter  $c_0$ .

**Acknowledgements** We thank the Navy Research Center (CINAV) for their financial support in carrying out this work.


## References

1. Hafeez Y. Hafeez, Chifu E. Ndikilar, and Sabo Isyaku. Analytical study of the van der pol equation in the autonomous regime. *Progress in Physics*, 3:252–255, jul 2015.
2. Ivana Kavacic and Michael J. Brennan, editors. *The Duffing Equation, nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons, 2011.
3. Shi-Jun Liao. An analytic approximate approach for free oscillations for self-excited systems. *International Journal on non-linear mechanics*, (39):271–280, 2004.
4. Shijun Liao. *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*. PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China, 1992.
5. Shijun Liao. An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 39:271–280, 2004.
6. Shijun Liao. *Beyond Perturbation - Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Chapman & All/CRC, 2004.
7. Shijun Liao. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer, 2012.
8. Shijun Liao. *Advances in Homotopy Analysis Method*. World Scientific, 2014.
9. J. L. López, S. Abbasbandy, and R. López-Ruiz. Formulas for the amplitude of the van der Pol limit cycle. *arXiv*, jun 2008.
10. Miguel Moreira. IFOHAM-an iterative algorithm based on the first-order equation of HAM: exploratory preliminary results. *Arxiv*, 2017.
11. T. S. L. Radhika, T. K. V. Iyengar, and T. Raja Rani. *Approximate analytical methods for solving ordinary differential equations*. 2015.
12. Balth van der Pol. LXXXV. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom, April 1922.

08. Proceedings - Sandra Pinelas x +

https://sites.google.com/site/sandrapinelas/icddea-2019/h-proceedings

## 08. Proceedings



Selected papers of the conference will be published by Springer in the new series Proceedings in Mathematics (PROM). All submitted papers will go through a regular peer review process. The length of the contribution should not exceed 16 pages.

The papers have to be prepared using the Springer style and submitted as a pdf file to the address [icddea.2019@gmail.com](mailto:icddea.2019@gmail.com). The deadline for submission is **October 31, 2019** (see the files below).

### Editors

- Sandra Pinelas, Academia Militar, Portugal
- John R. Graef, University of Tennessee at Chattanooga, USA
- Stefan Hilger, Katholische Universität Eichstätt, Germany
- Peter Kloeden, Huazhong University of Science & Technology, China
- Christos Schinas, Democritus University of Thrace, Greece

www.azip (0720) Sandra Pinelas, 12/03/2019, 08:54

RE: Paper - Mensagem (HTML)

De: PROF AUX Miguel Moreira  
 Para: 'Sandra Pinelas'  
 Cc: Cecília Branco de Almeida (cbranco@gmail.com); marianafasacranewko@bolmail.com  
 Assunto: RE: Paper

Enviada: qua 01/04/2020 11:25

De: Sandra Pinelas [<mailto:icddea.2019@gmail.com>]  
 Enviada: 1 de abril de 2020 11:12  
 Assunto: Paper

Dear Professor

I'm glad to inform you that your paper was accepted to publication in the ICDEEA proceedings

Please, send me the TEX files as soon as possible.

Thank you very much for your work.

Best regards  
 Sandra

Chair of ICDEEA 2019

Academia Militar  
 Departamento de Ciências Exatas e Engenharia  
 Av. Conde Castro Guimarães  
 2720-113 Alameda  
 Portugal  
 E-mail: [sandra.pinelas@gmail.com](mailto:sandra.pinelas@gmail.com)

# CERTIFICADO

*Certificamos que o ASPOF Marta Sacramento, participou com a comunicação intitulada:  
Estudo das aplicações da equação de Duffing-Holmes na identificação de sinais  
periódicos ténues na presença de ruído  
na Conferência IDEIA 2020 - Investigação, Desenvolvimento, Experimentação e  
Inovação da Armada, que decorreu nos dias 23 e 24 de janeiro de 2020, na Escola Naval.*

*Escola Naval, 24 de janeiro de 2020*



*O Diretor do Centro de Investigação Naval,  
Capitão-de-fragata Jorge Manuel Lourenço Gorricha*

Organização

