



CATARINA FERREIRA
MARES

**AS AÇÕES DO PROFESSOR NA
CONDUÇÃO DE DISCUSSÕES
COLETIVAS EM TAREFAS DE
ÁLGEBRA: UM ESTUDO NO 4.º ANO.**

Relatório de Projeto de Investigação do Mestrado
em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de
Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do
Ensino Básico

ORIENTADORA

Professora Doutora Célia Maria Martins
Vitorino Mestre

dezembro de 2025

CATARINA FERREIRA
MARES

**AS AÇÕES DO PROFESSOR NA
CONDUÇÃO DE DISCUSSÕES
COLETIVAS EM TAREFAS DE
ÁLGEBRA: UM ESTUDO NO 4.º ANO.**

JÚRI

Presidente: Professora Especialista Maria Teresa Elvas de Matos, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal

Arguente: Professora Doutora Joana Filipa Oliveira Cabral, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal

Orientador (a): Professora Doutora Célia Maria Martins Vitorino Mestre, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal

AGRADECIMENTOS

O presente relatório de investigação representa o culminar de uma longa jornada de trabalho árduo e aprendizagem intensa. Marca mais uma etapa concluída, de grande orgulho e realização pessoal para mim. Nenhum percurso se realiza sem o apoio e a motivação de quem nos rodeia, por isso quero começar por agradecer a todos aqueles que estiveram presentes neste percurso, especialmente nesta fase final tão importante. Cada um, de forma direta ou indireta, contribuiu para que eu chegasse até aqui.

Em primeiro lugar, quero agradecer ao meu companheiro de vida, Wilson, que me amparou nos momentos de desespero, incentivou-me a continuar e se disponibilizou para ajudar em inúmeras tarefas, tornando a minha prática mais motivadora e enriquecedora. Obrigada por tudo e por tanto.

Agradeço à minha família, que sempre acreditou em mim: ao meu pai, meu porto seguro; à minha mãe, irmão e irmã, que sempre demonstraram orgulho e confiança em mim, mesmo quando eu própria duvidava. À minha prima Inês, cuja ajuda na carta de motivação foi decisiva para que eu pudesse iniciar este percurso.

Às minhas colegas e amigas Joana, Inês e Nádia, que nunca largaram a minha mão, e à Mafalda, que foi essencial nesta reta final. À Rute, minha amiga, que nunca desistiu de acreditar em mim.

Um agradecimento especial a todos os professores que fizeram parte do meu percurso académico e às professoras Cooperantes, mas em particular às Professoras Amélia Rosa e Cristina Morais, pelas dicas valiosas que enriqueceram a minha prática, e à Professora Célia, por toda a motivação, força e por me mostrar que sou capaz.

E, por fim, um agradecimento especial ao meu avô João, que esteja onde estiver, espero que esteja orgulhoso.

Hoje é um dia de felicidade e superação. Finalmente, posso dizer com orgulho: sou professora!

RESUMO

O presente relatório descreve um estudo desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular Estágio em 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, tendo como foco a análise das ações do professor na condução de discussões coletivas em tarefas de Álgebra, num contexto de ensino exploratório, com uma turma do 4.º ano de escolaridade. O principal objetivo desta investigação consiste em caracterizar as ações do professor na condução dos momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra, bem como identificar os desafios associados à preparação da condução destas discussões. Assim, surgiram as seguintes questões de investigação: i) Como se caracterizam as ações do professor nos momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra?; ii) Quais os desafios e dificuldades sentidas pelo professor durante a condução dos momentos de discussão coletiva?; iii) De que modo a planificação das ações do professor contribuiu para a condução das discussões coletivas das tarefas?

A investigação seguiu uma abordagem qualitativa, enquadrada numa lógica de investigação sobre a prática. Os dados foram recolhidos através de observação participante, com registos em notas de campo e gravações áudio e vídeo, e da recolha documental com foco nas planificações elaboradas para cada tarefa. A análise dos dados foi conduzida através de análise de conteúdo, tendo por base o modelo de categorias de ações do professor proposto por Ponte (2013) e aprofundado por Brocardo et al. (2022), considerando as ações seguintes: Convidar, Apoiar, Guiar, Desafiar, Informar e Sugerir.

A intervenção pedagógica compreendeu a implementação de três tarefas de Álgebra, dinamizadas segundo as quatro fases do ensino exploratório. Os resultados revelam que ações como Guiar e Desafiar assumiram maior predominância e mostraram-se decisivas para promover a explicitação de raciocínios, a formulação de generalizações e a discussão de estratégias. Observou-se ainda um aumento das ações de Apoiar, informar e Sugerir, associado às dificuldades sentidas pelos alunos, evidenciando a necessidade de ajustamentos contínuos da intervenção. A análise das planificações mostrou que a antecipação de possíveis respostas, dificuldades e decisões pedagógicas contribuiu para uma condução mais estruturada e eficaz das discussões.

Conclui-se que as ações do professor não ocorrem de forma isolada, mas articuladas entre si, desempenhando um papel fundamental na construção do conhecimento matemático. Os desafios identificados - a gestão do tempo, o gerenciamento do tempo de espera e a necessidade de um sólido conhecimento do

professor sobre o conteúdo e os processos envolvidos na aprendizagem dos alunos – evidenciam a complexidade da condução de discussões coletivas e reforçam a importância de uma prática docente intencional, flexível e reflexiva.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem da Álgebra; Ações do professor; Ensino exploratório; Discussão coletiva.

ABSTRACT

This report describes a study developed within the course *Internship in Primary Education (1st and 2nd Cycles of Basic Education)*, focusing on the analysis of the teacher's actions in facilitating whole-class discussions of Algebra tasks in an exploratory teaching context, with a 4th-grade class. The main aim of this research is to characterise the teacher's actions during whole-class discussions of Algebra tasks, as well as to identify the challenges associated with planning and conducting these discussions. Accordingly, the following research questions were formulated: (i) How are the teacher's actions characterised during whole-class discussions of Algebra tasks? (ii) What challenges and difficulties does the teacher experience when facilitating these discussions? (iii) How does the planning of the teacher's actions contribute to the facilitation of whole-class discussions of tasks?

The study adopted a qualitative approach, framed within a practice-based research perspective. Data were collected through participant observation, including field notes and audio and video recordings, as well as through document analysis, focusing on the lesson plans prepared for each task. Data analysis was conducted using content analysis, based on the teacher action categories model proposed by Ponte (2013) and further developed by Brocardo et al. (2022), considering the following actions: Inviting, Supporting, Guiding, Challenging, Informing, and Suggesting.

The pedagogical intervention involved the implementation of three Algebra tasks, carried out according to the four phases of exploratory teaching. The results show that actions such as Guiding and Challenging were the most frequent and proved decisive in promoting the articulation of reasoning, the formulation of generalisations, and the discussion of strategies. An increase in Supporting, Informing, and Suggesting actions was also observed, associated with the difficulties experienced by the students, highlighting the need for continuous adjustments to the intervention. Analysis of the lesson plans indicated that anticipating possible responses, difficulties, and pedagogical decisions contributed to a more structured and effective facilitation of discussions.

It is concluded that the teacher's actions do not occur in isolation but are interconnected, playing a fundamental role in the construction of mathematical knowledge. The identified challenges—time management, management of wait time, and the need for strong teacher knowledge of content and learning processes—highlight the complexity of facilitating whole-class discussions and reinforce the importance of intentional, flexible, and reflective teaching practice.

Keywords: Teaching and Learning of Algebra; Teacher Actions; Exploratory Teaching; Whole-Class Discussion

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	III
RESUMO	IV
ABSTRACT	VI
ÍNDICE	VIII
Índice de Figuras	X
Índice de Tabelas	XII
INTRODUÇÃO	1
Objetivo e questões de investigação.....	1
Motivações	1
Pertinência	3
Organização do relatório	5
CAPÍTULO 1	7
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	7
1. O ensino e a aprendizagem da Álgebra no 1.º Ciclo.....	7
1.1. Enquadramento curricular	13
1.2. Dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra	16
2. O ensino exploratório da Matemática	17
2.1 Práticas de ensino exploratório	17
2.2 A importância da planificação de tarefas	21
3. O papel do professor e a condução de discussões coletivas.....	24
3.1. Ações do professor na condução de discussões coletivas	32
CAPÍTULO 2	38
METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO	38
1. Metodologia e investigação	38
1.1. Abordagem Qualitativa	40
1.2. Investigação sobre a prática	40
1.3. Ética.....	41
2. Recolha e tratamento de dados de dados.....	42
2.1. Técnicas de recolha de dados	42
2.1.1. Observação participante	43
3. Técnica de análise de dados.....	44
CAPÍTULO 3	47
INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA	47

1.Contexto e Participantes.....	47
2. Descrição da Intervenção.....	49
2.1. Descrição da implementação das tarefas	52
2.1.1. Tarefa 1 – “Vs mágicos”	52
2.1.2. Tarefa 2- Sequência dos Múltiplos	67
2.1.3. Tarefa 3- Sequência de Crescimento	87
CAPÍTULO 4.....	110
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	110
1. Análise global das ações	110
2. Análise por ação	111
2.1. Ação de Desafiar	111
2.2. Ação de Guiar	117
2.3. Ação de Informar	125
2.4. Ação de Sugerir	128
2.5. Ação de Convidar	131
2.6. Ação de Apoiar	134
Síntese	137
CAPÍTULO 5.....	138
CONSIDERAÇÕES FINAIS	138
REFLEXÕES SOBRE O ESTUDO	147
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	151
ANEXOS	160
Anexo 1: Modelo de Autorização.....	160
Anexo 2: Análise das ações por categorias – V’s Mágicos	161
Anexo 3: Análise das ações por categorias – Sequência dos Múltiplos	163
Anexo 4: Análise das ações por categorias – Sequência de Crescimento.....	165
Anexo 5: Organização e disposição da sala	167
Anexo 6: Ficha de Diagnóstico I	168
Anexo 7: Ficha de Diagnóstico II	170
Anexo 8- Grelha de Registo da avaliação da Ficha de Diagnóstico I	173
Anexo 9- Grelha de Registo da avaliação da Ficha de Diagnóstico II	174
Anexo 10: Planificação da tarefa dos V’s Mágicos	175
Anexo 11: Planificação da tarefa da Sequência dos Múltiplos	179
Anexo 12: Planificação da tarefa de Sequência de Crescimento	182

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1- Diversas estratégias de ensino de acordo	17
Figura 2- Ações Intencionais do professor num contexto de Ensino Exploratório.....	31
Figura 3- Modelo das ações do professor na condução de discussões matemáticas.	33
Figura 4- Ficha de Diagnóstico de Relações Algébricas	50
Figura 5- Ficha de Diagnóstico Sequências de Repetição.....	50
Figura 6- Folha de Registo e Cartões com números de 1 a 5	54
Figura 7- Exemplo de V's mágicos formados com os números de 1 a 5.....	54
Figura 8- V's Projetados no quadro	55
Figura 9- Resolução do Par SH. e A.	59
Figura 10- Resolução Par L. e M.	60
Figura 11- Paridade dos números dos braços e vértices dos V's Mágicos.....	61
Figura 12- Resolução do Par G. e D.....	62
Figura 13- Alunos a representarem a noção de par e ímpar	66
Figura 14- Ficha de Trabalho para sistematização das aprendizagens.....	67
Figura 15- Ficha de trabalho – Sequência dos Múltiplos.....	69
Figura 16- Questão 1.1. da ficha de trabalho	71
Figura 17- Resolução da questão 1.8 pelo Par M.L. e F.	72
Figura 18- Resolução da questão 1.7 pelo par M.F. e T.....	74
Figura 19- Resolução da questão 1.8 pelo par M.A. e L.S.....	75
Figura 20- Resolução da questão 1.8 pelo par M.A. e L.S.....	77
Figura 21- Grelha de identificação de estratégias de resolução para seleção dos grupos	79
Figura 22- Tarefa de sistematização sobre múltiplos	87
Figura 23- Folha de registo com regras da tarefa Sequência dos Múltiplos.....	89
Figura 24- Projeção da sequência de crescimento	91
Figura 25- Tabela de registo- Sequência de crescimento (Questão 2).....	91
Figura 26- Representação pictórica da sequência de crescimento	92
Figura 27- Resolução da Questão 2	95
Figura 28- Resolução da Questão 4 pelo par H.C. e C.	96
Figura 29- Resolução da Questão 5	97
Figura 30- Resolução da questão 5- Divisão.....	98
Figura 31- Regularidades da sequência-.....	99
Figura 32- Estratégia das alunas M.L. e S.H.apresentada no quadro	102
Figura 33- Estratégia do par H.C. e C. apresentada no quadro.....	103
Figura 34- Resolução do aluno T. apresentada no quadro	107

Figura 35- Sistematização feita no quadro	109
--	-----

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1- Tópicos e Subtópicos do tema Álgebra do 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico	15
Tabela 2- Técnicas de recolha de dados, métodos e instrumentos de recolha e técnicas de análise de dados	46
Tabela 3- Distribuição das Tarefas por Sessões	51
Tabela 4- “V’s mágicos”, de acordo com as AE de Matemática	53
Tabela 5- “Sequência de múltiplos”, de acordo com as AE de Matemática	68
Tabela 6- “Sequência de Crescimento”, de acordo com as AE de Matemática	88
Tabela 7- Tipo de ações nas tarefas.....	110
Tabela 8- Contagem das ações de Desafiar por tarefa	111
Tabela 9- Contagem das ações de Guiar por tarefa	117
Tabela 10- Contagem das ações de Informar por tarefa	125
Tabela 11- Contagem das ações de Sugerir por tarefa	129
Tabela 12- Contagem das ações de Convidar por tarefa	132
Tabela 13- Contagem das ações de Apoiar por tarefa.....	134
Tabela 14- Relação entre ações	143

INTRODUÇÃO

Objetivo e questões de investigação

O principal objetivo desta investigação consiste em caracterizar as ações do professor na condução dos momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra. A partir deste objetivo, foram formuladas as seguintes questões de investigação:

- i) Como se caracterizam as ações do professor durante os momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra?
- ii) Quais os desafios e dificuldades experienciados pelo professor na condução destes momentos?
- iii) De que modo a planificação das ações do professor contribuiu para a condução das discussões coletivas das tarefas?

Motivações

A motivação para este estudo surge da minha experiência pessoal, tanto enquanto aluna como enquanto futura docente. Ao longo do meu percurso académico, contactei maioritariamente com o ensino direto, em que o professor assume o papel central de transmissor de informação e os alunos aprendem particularmente “ouvindo o que lhes é dito e fazendo exercícios, cujo objetivo é mobilizar os conceitos e técnicas anteriormente explicados e exemplificados pelo professor” (Ponte, 2005, p.12). Esta experiência despertou em mim a vontade de conhecer e experimentar formas de ensino em que os alunos participem de forma mais ativa na construção do conhecimento.

Durante o ensino superior, tive oportunidade de experienciar uma realidade de ensino exploratório, na qual o professor não procura explicar tudo, deixando aos alunos uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento (Ponte, 2005, p.13). Esta abordagem mostrou-se mais motivadora, pois valoriza a participação ativa dos alunos, ao contrário do ensino direto, em que o professor conduz toda a explicação sem exploração prévia por parte dos estudantes (Ponte, 2005). Nos estágios realizados durante a licenciatura e o mestrado, adotei a prática de exploração autónoma de tarefas matemáticas e depois de partilha das suas estratégias. Estas tarefas permitiam aos alunos construir conhecimento através da reflexão sobre a própria exploração, aproximando-me do ensino exploratório mesmo que de forma inconsciente. Foi no último ano do mestrado que aprofundei os meus conhecimentos sobre esta

abordagem, reconhecendo a importância de selecionar tarefas que “fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas”, posteriormente sistematizadas através de discussão coletiva (Canavarro, 2011, p.11).

Neste contexto, Ponte (2005) refere que o ensino exploratório se torna mais motivador para quem aprende, pois dá mais ênfase ao envolvimento dos alunos na sua própria aprendizagem.

A escolha do ensino da Álgebra justifica-se por se tratar de uma área pouco trabalhada no 1.º Ciclo e por constituir, para mim, uma lacuna do meu conhecimento que pretendia superar. A Álgebra no 1.º Ciclo do Ensino Básico é reconhecida como basilar para o desenvolvimento do raciocínio algébrico, permitindo aos alunos criar conexões entre números, padrões e operações, mesmo em idades iniciais (Kieran, 2004). Para além disso, a escolha de abordar o pensamento algébrico justifica-se pela transversalidade deste domínio na Matemática e pela minha experiência no estágio em 2.º Ciclo do Ensino Básico, em que realizei uma tarefa sobre regularidades em sequências, integrando outro tema de forma transversal. Além disso, no momento do estágio no 1.º Ciclo, não tinha ainda uma noção completa dos conteúdos abordados, pelo que este estudo representou uma oportunidade para aprofundar os meus conhecimentos em Álgebra no 1.º Ciclo do Ensino Básico e observar como os alunos se apropriam da capacidade de generalizar e do raciocínio matemático.

A decisão de investigar as minhas próprias ações em momentos de discussão coletiva surge da minha consciência da importância e da necessidade de refletir sobre a prática profissional. Formosinho e Formosinho (2015) defendem que a reflexão sobre a prática permite transformar experiências em conhecimento profissional, enquanto Sanches (2005) destaca que a reflexão contínua sobre a prática docente ajuda na evolução progressiva do ensino-aprendizagem e na adaptação do ensino às necessidades dos alunos. Assim, este estudo constituiu uma oportunidade para colocar à prova decisões pedagógicas, observar o impacto das minhas ações e aprofundar a minha consciência profissional, promovendo um processo de aprendizagem (Ponte et al., 2013; Sanches, 2005). Para além disso, as ações do professor constituem o centro da intervenção pedagógica e permitem compreender como cada ação influencia o raciocínio matemático e o progresso dos alunos.

Escolhi focar-me nas discussões coletivas por serem momentos privilegiados para a observação e análise do raciocínio matemático dos alunos (Ponte et al., 2013; Brocardo et al., 2022). Além disso, as discussões coletivas favorecem a integração de

aprendizagens individuais, desenvolvem competências comunicativas e permitem refletir sobre a própria prática docente (Franke et al., 2007; Sanches, 2005).

Pertinência

O presente estudo apresenta relevância acadêmica e pedagógica, uma vez que aborda um tema ainda pouco explorado no contexto do 1.º Ciclo: *as ações do professor na condução de discussões coletivas em tarefas de Álgebra*. Embora as investigações sobre o ensino exploratório e o raciocínio algébrico no 1.º Ciclo do Ensino Básico estejam em crescimento, há uma insuficiência de estudos que analisem de forma integrada como o professor atua, que decisões toma e de que modo estas influenciam o raciocínio dos alunos (Brocardo et al., 2022; Ponte et al., 2013). A investigação neste domínio permite, portanto, contribuir para o desenvolvimento do conhecimento sobre práticas pedagógicas eficazes e sobre os instrumentos que promovem aprendizagens significativas em Matemática.

A presente investigação também possibilita compreender como a dinâmica das discussões coletivas contribui para a melhoria da prática docente, assumindo particular importância num momento educativo em que se valoriza cada vez mais a aprendizagem ativa e a comunicação matemática. Ao analisar como as diferentes ações do professor influenciam o raciocínio dos alunos, este estudo oferece contributos relevantes para o desenvolvimento de práticas que potenciam a autonomia, o raciocínio crítico e a capacidade de generalização, tal como defendem autores como Carraher e Schliemann (2007) e Kieran (2004).

Além disso, a investigação assume especial relevo no contexto da Álgebra no 1.º Ciclo, uma área que durante vários anos não surgiu como tema autónomo nas orientações curriculares e que, por isso, permaneceu pouco explorada nas práticas de sala de aula. As Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021) alteram este cenário, reforçando explicitamente a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais, ao reconhecerem este domínio como estruturante para o raciocínio matemático ao longo da escolaridade. O documento curricular sublinha que os alunos devem ter a oportunidade de identificar regularidades, formular generalizações, estabelecer relações e elaborar representações diversas, salientando que estes processos são fundamentais para desenvolver como o raciocínio matemático, a comunicação e a capacidade de resolução de problemas.

Neste âmbito, as Aprendizagens Essenciais de Matemática (Canavarro et al., 2021) destacam que:

- “É da maior importância implicar os alunos no processo de aprendizagem, numa perspetiva de abordagem dialógica na construção de conhecimento.” (p.6), enfatizando o exercício da autonomia e do sentimento de pertença à comunidade de aprendizagem.
- A dinâmica da aula deve proporcionar “tempo para que os alunos pensem, partilhem e discutam entre si as produções matemáticas” (p. 6), em momentos de discussão, seguido de uma sistematização coletiva, reconhecendo a discussão como momento essencial para adquirir e consolidar aprendizagens.
- As tarefas devem ser “...poderosas e desafiantes...” (p. 6), permitindo que os alunos reconheçam a relevância da Matemática e estabeleçam conexões com outros contextos e áreas do conhecimento.
- Os modos de trabalho devem incluir o trabalho individual e o trabalho em pequenos grupos, seguidos de discussão coletiva, valorizando a interação entre alunos como elemento central da aprendizagem.

Estas orientações reforçam de forma clara a pertinência de estudar como o professor conduz estes momentos de discussão e que ações implementa para promover um ambiente matemático produtivo, onde os alunos se sintam encorajados a participar, justificar, testar ideias e reformular o próprio pensamento.

Para além disso, a pertinência do estudo relaciona-se com o facto de ser crucial investigar a própria prática docente. Formosinho e Formosinho (2015) defendem que a reflexão transforma a experiência em conhecimento profissional, permitindo ao professor agir de forma mais consciente, fundamentada e intencional. Já Sanches (2005) refere que a reflexão contínua é essencial para o desenvolvimento profissional, possibilitando compreender o impacto das próprias decisões e reajustá-las em função das necessidades dos alunos. Neste sentido, ao analisar criticamente as minhas ações em contexto real de sala de aula, este estudo assume também uma dimensão formativa, permitindo identificar fragilidades, aprofundar competências e desenvolver um olhar profissional mais analítico e responsivo.

A pertinência deste estudo também se reflete no reconhecimento crescente de que o desenvolvimento de práticas reflexivas, aliadas a metodologias exploratórias, é essencial para construir ambientes de aprendizagem mais inclusivos, motivadores e intelectualmente estimulantes. Ao analisar a própria prática e identificar fatores que favorecem ou limitam o raciocínio dos alunos, o estudo não só aprofunda o conhecimento teórico, mas também potencia o desenvolvimento profissional e a

capacidade de tomada de decisão pedagógica, tornando o processo de ensino mais consciente, intencional e eficaz (Formosinho & Formosinho, 2015; Sanches, 2005). Investigar como as ações do professor influenciam diretamente o raciocínio matemático dos alunos contribui não apenas para a melhoria da prática individual, mas também para um avanço coletivo na compreensão de como se promove verdadeiramente o pensamento algébrico no 1.º Ciclo, respondendo às atuais exigências curriculares e às necessidades reais dos alunos

Por fim, a pertinência do estudo reside também na sua dimensão reflexiva e formativa para a futura docente.

Organização do relatório

Este relatório está estruturado em cinco capítulos. Inicialmente, a introdução apresenta o tema, as questões de investigação, as motivações da escolha do tema e a relevância da investigação para a prática docente.

O primeiro capítulo centra-se na revisão teórica, explorando o ensino e a aprendizagem da Álgebra no 1.º Ciclo, o ensino da Matemática em contexto exploratório, a condução de discussões coletivas, o papel do professor durante essas interações e os tipos de ações do professor nesses momentos. O segundo capítulo descreve a metodologia utilizada, incluindo o enquadramento do estudo, as opções de recolha de dados e os procedimentos de análise, bem como a justificação para cada decisão metodológica.

O terceiro capítulo apresenta a intervenção pedagógica, detalhando as tarefas desenvolvidas, a sequência das sessões e o enquadramento curricular que sustentou a prática docente. O quarto capítulo dedica-se à análise dos dados recolhidos, com base nos procedimentos metodológicos previamente descritos. Para uma análise organizada e coerente, são inicialmente apresentadas tabelas quantitativas que contabilizam e categorizam as ações por mim realizadas nos momentos de discussão coletiva, em cada tarefa. Posteriormente, essas ações são analisadas de forma comparativa e detalhada, permitindo identificar variações, razões para a predominância ou diminuição de determinadas ações, e compreender como cada ação foi concretizada, considerando a intencionalidade e o contexto de aplicação.

O quinto e último capítulo reúne as considerações finais, nas quais são sintetizados os resultados mais significativos, articulados com o referencial teórico, e é apresentada uma reflexão sobre todo o percurso de investigação.

O relatório termina com as Referências Bibliográficas e os Anexos.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1. O ensino e a aprendizagem da Álgebra no 1.º Ciclo

Ponte et al. (2009) enquadram a Álgebra no ensino Português mencionando que esta componente da matemática, até meados do século XX, possuía ênfase nos programas de matemática do ensino básico e secundário. Contudo, depois desse período a Álgebra desapareceu como tema principal. Todavia, nos últimos tempos, tem ganhado importância no currículo da matemática adquirindo um lugar de destaque. Os mesmos autores apresentam uma definição de Álgebra recorrendo a uma visão histórica da mesma, referindo que existe uma evolução nas diferentes perspetivas abordadas sobre o seu significado.

A primeira perspetiva diz respeito a um sentido redutor da Álgebra, segundo Ponte et al., (2009), que se define como “um conjunto de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais...) e processos de resolução de 7 equações do 1.º e 2.º grau e de sistemas de equações” (p. 7). A outra perspetiva assume os símbolos como o objeto central da Álgebra, sendo que “este campo da Matemática seria então definido pelo uso que faz de uma linguagem própria, a linguagem algébrica. Deste modo, faz sentido encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas.” (Ponte et al., 2009, p. 8). Neste sentido, Ponte et al. (2008) indicam que os símbolos “permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada e são muito úteis para a resolução de problemas” (p. 89).

No seguimento das ideias anteriores, no livro *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), a Álgebra é definida como um conjunto de relações entre quantidades, como formas de representação de relações matemáticas e análise de variações, recorrendo à notação simbólica. Para além destas ideias, ainda é referido que a “(...) Álgebra trata de estruturas abstratas e da utilização dos respetivos princípios na resolução de problemas expressos através de símbolos.” (p. 39).

Por outro lado, Canavarro (2007) refere que “a Álgebra escolar tem estado associada à manipulação dos símbolos e à reprodução de regras operatórias, tantas vezes aplicadas mecanicamente e sem compreensão, parecendo os símbolos ter adquirido um estatuto de primazia *per se*” (p. 88).

Por conseguinte, Borralho et al. (2007) defendem que a Álgebra é mais do que isso. Os alunos precisam de entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. Muitos desses conceitos algébricos podem ser construídos partindo das experiências com números; contudo a álgebra também está fortemente ligada à geometria e ao tratamento de dados. (p.1)

Ponte et al. (2009) apresentam uma última perspectiva que vai ao encontro da ideia anterior, referindo

que aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação simbólica, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas a uma das suas facetas. (p.10)

Deste modo, Kaput (2008) define dois aspetos fundamentais da Álgebra:

1. A representação organizada de generalizações, baseada em padrões e regras.
2. O raciocínio guiado por regras sintáticas sobre essas generalizações, utilizando sistemas simbólicos convencionais.

De forma clara, trata-se então de identificar padrões, expressá-los de maneira organizada e raciocinar sobre eles seguindo regras específicas. Isto permite modelar e resolver problemas matemáticos de forma eficaz.

Estes aspetos estão presentes de forma implícita nas tarefas matemáticas desenvolvidas nos primeiros anos, nomeadamente nas que envolvem padrões, sequências, relações numéricas e propriedades das operações.

De acordo com Ponte et al. (2009), ao longo do tempo, tem emergido uma nova visão sobre a Álgebra e por consequência, várias discussões sobre o que deve ser ensinado nesta vertente da matemática, nos vários ciclos de ensino. Deste modo, surgem, então, discussões acerca da definição de pensamento algébrico. Como tal, o pensamento algébrico é definido como

a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios (Ponte et al., 2009, p. 10).

O pensamento algébrico é, assim, composto por processos complexos de simbolização utilizados para formular e exprimir generalizações permitindo que se raciocine sobre essas generalizações de forma estruturada. Ou seja, os símbolos e representações são usados para identificar padrões e relações, facilitando o entendimento e a aplicação de conceitos em diferentes contextos (Kaput, 2008).

Na revista *in Brief* (2003) são mencionados os elementos fundamentais do currículo que apoiam o pensamento algébrico: (i) a generalização como o processo de desenvolver e sugerir regularidades sobre as propriedades ou relações que fundamentam as ideias matemáticas; (ii) a formalização como o processo de representação de generalizações matemáticas, que variam desde o uso da linguagem quotidiana a regras formais e simbólicas, em que os alunos progridem nas suas capacidades matemáticas à medida que expressam as suas ideias de formas cada vez mais formais. Por exemplo, um aluno pode primeiro exprimir um padrão em linguagem quotidiana, como "é sempre mais 2", e depois passar a representar este padrão de uma forma mais simbólica, como " $+ 2$ ".; (iii) a justificação de conjecturas, como o processo de desenvolver argumentos matemáticos para explorar e refutar ou validar ideias matemáticas. Um primeiro passo importante neste processo é que os alunos compreendam que as conjecturas matemáticas podem e devem ser justificadas. Ponte et al. (2009) vai ao encontro do referido pelos autores anteriores, explicando que

Um elemento igualmente central ao pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objectos. Ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objectos mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de regularidades num dado conjunto de objectos. (p. 9)

Por conseguinte, Ponte et al., (2009) concluem que o grande objetivo do estudo da Álgebra no ensino básico é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Assim sendo, Cusi e Malara (2007) defendem que o pensamento algébrico deve ser desenvolvido

desde os primeiros anos do ensino [básico], quando as crianças se aproximam do pensamento aritmético: este é o momento para ensiná-las a pensar aritmeticamente de forma algébrica. Por outras palavras, o pensamento algébrico deve ser desenvolvido nas crianças progressivamente, numa relação estreita com a aritmética, partindo dos significados desta. (p. 62)

Manson (2008) ainda acrescenta que “o pensamento algébrico é necessário para dar sentido à aritmética, em vez de apenas executá-la instrumentalmente” (p. 58). Neste sentido, Cusi e Malara (2007) apresentam diferenças entre Álgebra e aritmética, esclarecendo que

Essa diferença está ligada a um dos aspectos mais importantes da lacuna epistemológica entre a aritmética e a Álgebra: enquanto a aritmética exige uma procura imediata da solução, a Álgebra adia essa procura e começa por uma transposição formal do domínio da linguagem natural para um sistema específico de representação. Se forem orientados a ultrapassar a preocupação com o resultado, os alunos alcançam um nível superior de pensamento, substituindo os cálculos pela observação de si próprios e dos seus processos. (p. 62)

Segundo o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (2010)

Há muitos estudos que salientam que um ensino da aritmética cujo ênfase é o cálculo em detrimento da compreensão da estrutura do sistema de numeração, das relações entre números e das operações e suas propriedades, não é favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. (p.3)

Estes pontos reforçam a perspectiva de autores como Kieran (2004) e Kaput (2008), ao apresentarem a Álgebra como um modo de pensar, e não apenas uma linguagem simbólica.

A Álgebra tem vindo a ser reconhecida como essencial no currículo da matemática de todos os anos de escolaridade e Kaput (2008) defende mesmo que deve ser trabalhada desde os primeiros anos de escolaridade, deixando de ser um domínio reservado ao ensino secundário. E também Cusi e Malara (2007) reforçam que o pensamento algébrico deve ser desenvolvido progressivamente desde os primeiros anos de escolaridade.

Manson (2008) explica que “quando as crianças chegam à escola, já demonstram enorme capacidade de dar sentido aos mundos que habitam: o mundo material das coisas, o mundo mental das imagens, o mundo simbólico dos rótulos e das palavras e o mundo social das práticas.” (p. 57). Neste sentido, o autor indica que o maior problema do ensino é não dar oportunidade aos alunos para poderem utilizar estas capacidades inatas, esclarecendo que

quando autores de livros didáticos e quando os professores são tentados a fazer pelos alunos o que eles já poderiam fazer por si mesmos, usando seus próprios poderes, eles aumentam, em vez de diminuir, a dependência do aluno. Na verdade, contribuem para a atrofia gradual desses poderes, pelo menos no contexto da matemática, o que, por sua vez, contribui para o crescente desinteresse e descontentamento pela matemática escolar. Em nenhum lugar a necessidade desses poderes é mais evidente do que no ensino de Álgebra e, como argumentado aqui, isso também se aplica à aritmética. (p. 57)

No livro *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) é referido que sendo a Álgebra um fio condutor entre todo o currículo, deve ser trabalhada desde os primeiros anos de escolaridade, tendo por base as experiências dos alunos, por forma a criar uma base sólida para o trabalho desenvolvido no 3.º Ciclo.

A acrescentar a estas ideias, ainda foram desenvolvidas várias investigações que concluíram que quando os alunos iniciam o desenvolvimento do pensamento algébrico em anos iniciais, têm mais facilidade em lidar com a Álgebra mais formal nos ciclos de ensino mais avançados (Blanton, et al, 2017; Blanton et al., 2019).

No que diz respeito ao ensino da Álgebra, no Programa de Formação Contínua para professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico (2010) é mencionado que o pensamento algébrico deve ser desenvolvido progressivamente, introduzindo, no primeiro ciclo, “(...) conteúdos algébricos que facilmente servem de base ao desenvolvimento de competências relacionadas com a resolução de problemas, a comunicação e o raciocínio” (p.1) que estejam relacionadas com os interesses dos alunos e de situações da sua vida quotidiana.

Kaput e Blanton (2005) apresentam medidas para desenvolver o pensamento algébrico e trabalhá-lo em consonância com os outros temas matemáticos: (i) incentivar formas de pensar e representar que levem à identificação de padrões e à sua generalização; (ii) observar os números e as operações através das relações que estabelecem entre si, mais do que pelos seus valores; (iii) incitar, desde o 1.º Ciclo, a exploração de padrões e regularidades como base para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Os mesmos autores defendem que as abordagens tradicionais de ensino e currículo do primeiro Ciclo da matemática se têm centrado em procedimentos aritméticos e só nos ciclos seguintes se aborda a Álgebra de forma mais ampla. Neste sentido, a integração do pensamento algébrico no primeiro Ciclo oferece uma alternativa para o desenvolvimento conceptual de uma matemática mais profunda e complexa.

Neste sentido, Ponte et al. (2009) referem que o ensino da Álgebra tem sofrido “mudanças significativas” ao longo do tempo e apresenta três abordagens didáticas ligadas a este tema. A primeira abordagem utiliza a Álgebra como um instrumento técnico de resolução de problemas. A segunda abordagem, centra-se “(...) nas estruturas algébricas abstractas, ou seja, nas propriedades das operações numéricas ou das transformações geométricas” (p. 14). Estas duas correntes, não dão destaque às “situações extra-matemáticas”. Por fim, a última abordagem tenta superar as limitações das anteriores procurando não reduzir a Álgebra à resolução de problemas, dando

ênfase aos significados que podem ser representados por símbolos levando os alunos a “pensar genericamente”, percebendo regularidades e explicitando essas regularidades através de estruturas ou expressões matemáticas e a “pensar funcionalmente”, estabelecendo relações entre variáveis. Procura agora

[valorizar] a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. (p. 14)

Deste modo, os autores dão destaque à última abordagem relacionando-a com um ensino mais exploratório, elucidando que “na terceira corrente, a actividade a realizar pelo aluno assume necessariamente outra natureza, desenvolvendo-se a partir de tarefas de cunho exploratório ou investigativo, seja em contexto matemático ou extra-matemático.” (p.15)

Por fim, Kaput e Blanton (2005) ainda mencionam que para se construir uma prática que desenvolva o pensamento algébrico das crianças

requer um processo significativo de mudança para os professores do ensino primário, que são muitas vezes educados com formas aritméticas indiferentes de fazer matemática. Em suma, os professores do ensino primário devem desenvolver a Álgebra com os olhos e os ouvidos como uma nova forma de olhar para a matemática que estão a ensinar e ouvir o pensamento dos alunos sobre a mesma. (p. 440)

Em suma, diferentes perspetivas nacionais e internacionais destacam a resolução de problemas como eixo estruturante do ensino da Matemática, o que implica que a Álgebra seja abordada através de tarefas desafiantes e contextualizadas. Reforça, portanto, a necessidade de práticas pedagógicas, alinhadas com uma abordagem exploratória do ensino da Matemática, que promovam a exploração, a comunicação e a reflexão.

1.1. Enquadramento curricular

Ponte et al. (2009) consideraram a Álgebra um dos grandes ramos da Matemática, como mencionado anteriormente, no entanto, o modo como é perspectivada a sua importância tem sofrido grandes mudanças, no que diz respeito às orientações curriculares e didáticas da matemática no ensino português. Para além disso, tem vindo a ser reconhecida, nas últimas décadas, como uma componente essencial do currículo desde os primeiros anos de escolaridade, deixando de ser vista apenas como um domínio reservado ao ensino secundário (Kaput, 2008).

Perspetivando esta mudança, começemos pela análise do histórico das Aprendizagens Essenciais da Matemática dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico de 2018, no qual é possível analisar que o tema Álgebra apenas se averiguava, independente de outros, a partir do 5.º ano, não dando ênfase ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.

Nas Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (2018), observa-se que a Álgebra não era tida como independente, pois é referido que “o trabalho de natureza algébrica deve ter início desde 1.º Ciclo do ensino básico de modo articulado com o trabalho com o domínio NO [Números e Operações], procurando estabelecer relações e identificar propriedades, no trabalho com NO [Números e Operações] e com GM [Geometria e Medida]. (p. 4).

Embora no documento curricular anterior se verifique que a Álgebra é considerada no ensino aprendizagem da matemática do 1.º Ciclo, o mesmo não se verifica no histórico das Aprendizagens Essenciais de Matemática do 1.º Ciclo de 2018 e no Programa e Metas Curriculares Matemática de 2013 em que esta componente nunca é referida de forma explícita como tema a ser trabalhado na matemática.

Neste sentido, Ponte e Serrazina (s.d.) salientam que nas Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, a Álgebra não é encarada como um conteúdo isolado, mas sim como um eixo transversal que cruza o currículo desde o início da escolaridade, propondo o desenvolvimento do raciocínio algébrico através de tarefas com padrões, sequências e exploração das propriedades das operações.

Porém, atualmente e pela primeira vez no currículo português de matemática, a Álgebra é assumida nas novas Aprendizagens Essenciais da Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico de 2021 (Canavarro et al., 2021) como um tema autónomo na área da matemática em que se enfatiza o desenvolvimento progressivo do pensamento algébrico através do desenvolvimento da capacidade de “conjeturar, reconhecer e exprimir relações e generalizações, numéricas e algébricas” (p. 10). A Tabela 1 apresenta os tópicos e subtópicos, referentes ao tema Álgebra, de acordo com as Aprendizagens Essenciais da Matemática do Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), no que respeita aos anos do 1.º Ciclo.

Tabela 1

Tópicos e Subtópicos do tema Álgebra do 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Tema: Álgebra

Regularidades em sequências	Sequências de crescimento
Expressões e relações	Igualdades aritméticas
	Relações numéricas e algébricas
	Propriedades das operações

Nota. Adaptado de Canavarro et al. (2021)

Ainda nas Aprendizagens Essenciais da Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) são apresentadas, aos docentes, orientações metodológicas para a aprendizagem da matemática no primeiro Ciclo. Essas orientações referem que: deve existir articulação entre conteúdos; os alunos devem ter uma participação ativa na sua aprendizagem e terem oportunidade de discutirem e partilharem as aprendizagens entre si; o modo de trabalho deve ser adequado à intencionalidade da tarefa a desenvolver; os alunos devem trabalhar individualmente ou em pequenos grupos, seguido de uma discussão coletiva sobre o trabalhado; os docentes devem recorrer materiais manipuláveis e à tecnologia para potenciar a compreensão dos conceitos matemáticos.

No que diz respeito à gestão curricular, Ponte (2005) defende que implica ao professor uma reconstrução ou construção do currículo, tendo em conta as características dos alunos e as condições de trabalho. Essa gestão requer a criação de tarefas que proporcionem aos alunos o seu envolvimento em tarefas matematicamente ricas e produtivas.

Em relação aos manuais escolares, Carraher e Schliemann (2007) reforçam ainda que os livros didáticos dos primeiros anos de ensino incluem pouco conteúdo relacionado com o tema da Álgebra. Todavia, atualmente, todos os manuais de matemática portugueses precisam apresentar a Álgebra como um tema de modo a respeitar o currículo em vigor e para serem certificados pelas entidades competentes.

Em suma, o desenvolvimento do pensamento algébrico no 1.º Ciclo emerge como uma prioridade curricular clara, exigindo do professor não apenas o domínio dos conteúdos, mas também a capacidade de criar ambientes de aprendizagem ricos, onde

os alunos possam observar regularidades, levantar hipóteses, e construir sentido matemático a partir das suas próprias experiências.

1.2. Dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra

Vários autores, como Blanton & Kaput (2004) desenvolveram estudos que revelam que embora as crianças demonstrem capacidade para desenvolver o pensamento algébrico desde cedo, continuam a revelar dificuldades consistentes na forma como interpretam, representam e generalizam relações matemáticas.

A maior dificuldade encontrada diz respeito à transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. Falkner et al. (1999) referem que muitos alunos interpretam o sinal de igual como um resultado de uma operação, e não como uma relação de igualdade (equivalência) entre duas expressões. Como consequência, Knuth et al. (2006) explicam que esta condição poderá dificultar a construção de generalizações e a interpretação relacional das expressões.

Outra dificuldade, referida por Manson (1996) está relacionada com o reconhecimento de padrões e com a capacidade de generalizar. Embora as crianças consigam identificar facilmente padrões concretos, por vezes ficam presas na ideia de uma visão figural ou aritmética, não conseguindo pensar nisso como uma estrutura que pode ser generalizada. Para que uma criança passe de uma ideia concreta para uma abstrata, ou seja, que consiga generalizar, requer a de coordenar a linguagem, representações e abstração, procedimento que nem sempre ocorre de forma espontânea (Stacey & MacGregor, 1997).

A representação simbólica constitui igualmente uma barreira relevante, tal como nos indica Küchemann (1978), referindo que as crianças, por vezes interpretam as letras como “números escondidos, em vez de variáveis que representam conjuntos possíveis de valores (Booth, s.d.). MacGregor e Stacey (1997) acrescentam que esta leitura inflexível das letras leva a erros frequentes na manipulação de expressões e equações, quando os alunos aplicam regras aritméticas a situações que requerem raciocínio algébrico relacional.

Por fim, todas estas dificuldades podem ser reforçadas pelas práticas de sala de aula. Neste sentido, as crianças conseguem trabalhar mais facilmente com ideias algébricas quando as tarefas são ricas, significativas e bem estruturadas. Para além disso, o contexto da tarefa e a forma como o professor a organiza têm um impacto direto na maneira como as crianças irão adquirir as estruturas algébricas e o como irão desenvolver o seu raciocínio. Ainda, a exploração, a comunicação e a discussão em

grande grupo das estratégias desenvolvidas pelas crianças poderá favorecer a emergência de raciocínio algébrico precoce (Carraher et al., 2001).

2. O ensino exploratório da Matemática

2.1 Práticas de ensino exploratório

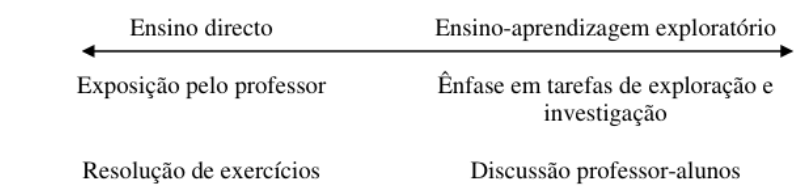
De acordo com Ponte (2014), na “Matemática como nas outras disciplinas escolares, a aprendizagem dos alunos depende em grande medida do que acontece na sala de aula” (p.5). O autor ainda refere que esta fundamentação tem vindo a suscitar interesse pelo estudo da prática profissional do professor e pelas possibilidades de a transformar, atendendo às necessidades de uma sociedade em constante mudança.

Neste sentido, e segundo Chapman e Heater (2010), as mudanças curriculares em vários países têm contribuído para a adoção de práticas de ensino mais exploratórias, nas quais os alunos são encorajados a comunicar, questionar, refletir e trabalhar em grupo. Ou seja, as mudanças curriculares contribuem para a promoção desse tipo de aprendizagem ativa e dialógica. Ainda assim, estas mudanças não obrigam a que os professores automaticamente adotem estas práticas, mas sim que as reformas e orientações curriculares criem condições favoráveis para isso.

Deste modo, e embora este subcapítulo se foque no ensino exploratório, é útil apresentar outras abordagens, como o ensino direto, para permitir uma compreensão comparativa entre modelos e destacar as diferenças em termos de papéis do professor e do aluno. Neste modelo diretivo, segundo Ponte (2005), o professor assume um papel central, transmitindo informações, exemplificando e comentando situações. O aluno aprende principalmente a ouvir e a aplicar os conhecimentos transmitidos pelo professor em exercícios de consolidação, onde o foco está na atenção às explicações e às respostas a questões do professor. A Figura 1 esquematiza estas duas abordagens.

Figura 1

Diversas estratégias de ensino



Nota. Retirado de Ponte (2005).

Por outro lado, Ponte (2005) refere que a abordagem exploratória tira destaque à transmissão do conhecimento para a construção ativa da aprendizagem pelos próprios alunos. O professor orienta, mas não explica tudo, deixando espaço para que os alunos descubram, questionem, formulem hipóteses e esclareçam dúvidas, promovendo uma participação mais autónoma e um envolvimento ativo no processo de aprendizagem. O autor ainda acrescenta que existem formas extremas de ensino direto e de ensino exploratório, mas também versões intermédias destas duas abordagens. Por exemplo, “se o professor suscita a participação dos alunos na exposição da matéria, através de perguntas, não deixa de ser ensino directo, pois neste caso é ainda ele quem assume o protagonismo fundamental na aula” (p. 13). E mesmo quando o professor propõe ocasionalmente tarefas mais desafiadoras, o estilo de ensino é definido pela prática habitual, e não por tarefas pontuais. Noutra perspetiva, tal como indica Ponte (2005), no ensino exploratório também podem, e devem, existir momentos de explicação pelo professor e de organização das aprendizagens conduzidas por este.

Nesta linha de pensamento, a abordagem de ensino exploratório pressupõe que o professor desempenhe um papel ativo e reflexivo, orientando o processo de ensino e aprendizagem de forma dialógica (Chapman & Heater, 2010; Ponte, 2005). Assim sendo, Stein et al. (2008) referem que esta prática exige do professor mais do que identificar e seleccionar tarefas para estas dinâmicas. A escolha de uma tarefa adequada e significativa é essencial, para que surjam as oportunidades certas de aprendizagem. Os autores ainda acrescentam que depois seleccionar a tarefa é crucial a sua planificação com vista ao potencial da mesma. Para além disso, esta planificação é igualmente importante para a preparação do professor em relação à complexidade inerente à exploração da tarefa em sala de aula.

No que diz respeito às tarefas, Ponte (2005) explica que “outra preocupação é encontrar situações de aprendizagem de natureza exploratória que constituam bons pontos de partida para o estudo de novos assuntos, circunscrevendo desse modo a abordagem verbalista e expositiva tão ao gosto do ensino directo” (p. 18).

Stein et al. (2008) indicam que o ensino exploratório se divide em três fases:

1. Lançamento da tarefa – em que professor apresenta a investigação ou problema matemáticos, os recursos disponíveis e o que se espera dos alunos;
2. Exploração pelos alunos– os alunos trabalham na investigação ou problema individualmente ou em grupos, desenvolvendo suas próprias estratégias e discutindo com colegas;

3. Discussão e sistematização – toda a turma debate e revê as diferentes soluções, abordagens e estratégias desenvolvidas pelos alunos, permitindo que o professor oriente a compreensão matemática coletiva.

Nesta linha de pensamento, Canavarro (2011) desenvolve estas fases dividindo-as de forma mais estruturada: 1) introdução da tarefa; 2) momento de trabalho autónomo, em grupo; 3) discussão coletiva das resoluções; 4) sistematização das principais aprendizagens matemáticas realizadas.

Na primeira fase, introdução da tarefa, o professor deve assegurar que os alunos entendem de forma clara o problema ou investigação propostos e que se sintam motivados e desafiados a realizar o trabalho (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008). Fonseca et al. (1999) indicam que a fase de introdução da tarefa é crucial, pois influencia diretamente o seu sucesso, especialmente quando os alunos não estão familiarizados com o tipo de trabalho proposto. O professor pode apresentar a tarefa de várias formas: distribuição do enunciado escrito com uma explicação oral, leitura em grande grupo com comentários ou questões para verificar a compreensão, apresentação apenas escrita ou apenas oral, com eventual registo de informações essenciais no quadro ou projetado. A clareza na apresentação inicial reduz a necessidade de apoio contínuo, permitindo maior autonomia dos alunos. Com a experiência, os alunos tornam-se mais independentes na compreensão das tarefas. Em situações espontâneas, a proposta pode surgir diretamente da atividade dos alunos.

Na segunda fase, no momento de trabalho autónomo, “o professor apoia os alunos no respetivo trabalho autónomo sobre a tarefa, realizado individualmente ou em pequenos grupos, procurando garantir que todos participam e de forma produtiva” (Canavarro et al., 2012, p. 256). Segundo Menezes e Oliveira (2013) “... embora o professor possa parecer pouco ativo, o seu papel é decisivo no acompanhamento e apoio aos alunos.” (p.5797). Para além destes aspetos, o professor deve garantir que os alunos se preparam adequadamente para apresentar as suas estratégias à turma e que têm o material necessário e estruturada para suportar esta comunicação, na fase da discussão coletiva (Canavarro et al., 2012).

Fonseca et al. (1999) acrescentam que

Durante esta fase, o professor tem um papel de orientador da actividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo de trabalho dos alunos e do tipo de apoio que presta no desenvolvimento

das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. Ao longo de toda esta fase o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que é alvo. (p.3)

Na fase de discussão coletiva, os vários grupos ou alunos apresentam à turma as suas resoluções, previamente selecionadas e sequenciadas pelo professor. É aqui que reside o maior desafio para o professor, a orquestração das discussões coletivas (Canavarro et al., 2011, 2012, 2013). Canavarro et al. (2013) ainda acrescenta que “embora o professor tenha como base de orientação um *script* (a sua planificação) e a observação que fez do trabalho dos alunos na fase anterior, existe um espaço amplo, com muitos caminhos, para a intervenção do professor na discussão.” (p. 32)

De acordo com o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores (2010), a discussão coletiva de ideias matemáticas tem ganho cada vez mais importância, pois permite que os alunos partilhem e justifiquem o seu raciocínio, coloquem dúvidas e debatam as estratégias dos colegas. Este tipo de interação é reconhecido como um meio fundamental para promover uma compreensão conceptual mais sólida.

Na fase de discussão, o professor atua como mediador e orientador, promovendo a comunicação entre os alunos. É neste momento que os alunos se deparam com diferentes hipóteses, estratégias e justificações, sendo incentivados a explicitar as suas ideias, defender os seus argumentos e questionar os colegas. Esta fase é também propícia para clarificar conceitos, organizar e sistematizar algumas conclusões e validar os resultados obtidos (Fonseca et al., 1999).

Por fim, de acordo com Menezes e Canavarro (2013), a fase de sistematização da aprendizagem é essencial para garantir que os objetivos definidos previamente são alcançados. Com o apoio do professor, a turma identifica e consolida os conceitos e procedimentos trabalhados, estabelece relações com aprendizagens anteriores e reforça aspetos fundamentais dos processos transversais, como a comunicação, a resolução de problemas e o raciocínio matemático.

Ponte et al. (2012) ainda acrescentam que

O professor, se possível solicitando a participação dos alunos, deve promover a sistematização das ideias fundamentais que foram trabalhadas nesta aula, formalizando-as na medida do necessário. Este é um momento de institucionalização de conhecimentos, isto é, em que as aprendizagens são tornadas explícitas e são evidenciadas, a fim de constituir parte do património matemático da turma. (pp. 9-10)

2.2 A importância da planificação de tarefas

De acordo com Ponte et al. (2015) uma aula enriquecedora depende de vários fatores: de um planeamento cuidadoso, da motivação e inspiração do professor, e do interesse e participação dos alunos. Embora a capacidade de improvisar e reagir a situações inesperadas seja essencial, a preparação prévia é crucial. Esta preparação fornece ao professor os elementos fundamentais que podem ser ajustados conforme o desenrolar da aula.

Os mesmos autores contextualizam que o interesse pela construção de planificações de aulas tem crescido. Neste sentido têm surgido os estudos de caso que representam uma

... atividade formativa um papel central a preparação de uma aula (a «research lesson») que é observada por um grupo de docentes e sujeita a uma análise detalhada com foco especial nas aprendizagens dos alunos. (p.26)

Ponte et al. (2005) ainda indicam que as planificações de aulas incluem não só a descrição das tarefas a realizar, mas também previsões sobre possíveis acontecimentos durante a aula e sobre as respostas que o professor poderá dar.

De acordo com Ponte (2005)

A definição de uma estratégia e a consequente planificação do professor não decorre apenas do currículo, mas tem necessariamente em conta outros elementos, incluindo as características dos alunos e as condições e recursos de que dispõe. Estes elementos intervêm todos em simultâneo e influenciam-se mutuamente. (p.19)

Neste sentido, os elementos a ter conta nas planificações são:

1. Objetivo(s) de aprendizagem para a aula (objetivo principal; objetivos complementares sobre o tópico e sobre os processos de raciocínio e comunicação);
2. Estratégia geral;
3. Estrutura da aula (segmentos previstos, incluindo eventuais períodos de trabalho autónomo e de discussão coletiva);
4. Recursos a usar (por exemplo, fichas de trabalho, material manipulável, material de Geometria, software, etc.) (Ponte et al., 2005, p.28).

No que diz respeito a planificações de ensino exploratório estas deverão ser elaboradas com o objetivo de criar situações de aprendizagem em que os alunos investigam, experimentam e constroem conhecimento ativamente. Neste tipo de ensino, o professor define objetivos, seleciona tarefas desafiantes e materiais apropriados, e antecipa possíveis estratégias ou dificuldades dos alunos, mantendo, porém, espaço para que estes explorem, formulem hipóteses e encontrem soluções próprias (Carraher & Schliemann, 2007). O papel do docente desloca-se do simples transmissor de conhecimento para orientador e mediador da aprendizagem, intervindo de forma ajustada às necessidades da turma, promovendo a reflexão, justificação e generalização das ideias matemáticas (Brocardo et al., 2022; Ponte et al., 2013).

A antecipação das ações dos intervenientes das diferentes fases do ensino exploratório e da tarefa, é uma prática crucial na planificação da aula. Assim sendo, corresponde essencialmente à antecipação do professor em relação à maneira como os alunos irão abordar as tarefas, relacionando possíveis ações com os objetivos matemáticos da aula. Isto inclui prever resoluções e níveis de envolvimento, identificar estratégias corretas e incorretas com diferentes graus de desenvolvimento, e relacioná-las com conceitos, processos ou competências a desenvolver. Para tal, é fundamental que o professor conheça profundamente a tarefa, experimente-a de várias formas e explore o conteúdo ou conteúdos ligados à tarefa, ganhando confiança e preparando

respostas e questões para eventuais abordagens inesperadas dos alunos (Canavarro, 2011).

Para além da previsão das ações dos alunos, é essencial que o professor planeie e preveja as suas próprias ações. Tal como nos indica Ponte (2005) quando explica que

Toda a planificação pressupõe a definição (explícita ou implícita) de uma estratégia de ensino, onde sobressaem sempre dois elementos, a actividade do professor (o que ele vai fazer) e a actividade do aluno (o que ele espera que o aluno faça. (p.12)

Stein et al. (2008) referem que, ao planear, os professores conseguem prever as respostas e intervenções que os alunos provavelmente irão apresentar, preparar formas de retorquir a essas contribuições e organizar as apresentações dos alunos, de modo a ir ao encontro dos objetivos matemáticos curriculares da aula. Ao dedicar mais tempo à tomada de planificação das suas práticas pedagógicas vai permitir que os professores se sintam cada vez mais confiantes e efetivamente estejam mais bem preparados para conduzir discussões em sala de aula. No que diz respeito a futuros professores, referem que quando estes planificam a aula

têm oportunidade para selecionar, discutir, adaptar e resolver tarefas matemáticas e, por conseguinte, para antecipar as estratégias de resolução que os alunos podem apresentar em aula, assim como as suas possíveis dificuldades. Com tal antecipação, os futuros professores preparam, ainda, intervenções adequadas aos vários momentos da aula (p.1195).

Ponte (2005) explica que "... a preparação de uma aula exploratória começa pela seleção de tarefas, as quais devem promover "momentos de reflexão e discussão com toda a turma" (p. 15-16). O professor deve antecipar cuidadosamente as soluções e dificuldades dos alunos, prevendo diferentes estratégias para atingir os objetivos da aula e considerando o tempo necessário para cada etapa. Durante a aula, deverá adaptar as suas ações na condução das tarefas consoante o desafio apresentado e a variedade das respostas dos alunos, gerindo o tempo e promovendo a participação dos alunos nas tarefas autónomas e na discussão coletiva. Estes aspetos têm como objetivo criar um ambiente de aprendizagem estimulante, que favoreça discussões coletivas ricas e

contribua efetivamente para a aprendizagem dos alunos (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008).

Ponte et al. (2013) frisam a complexidade do trabalho do professor ao conduzir discussões coletivas, salientando que as estratégias dos alunos costumam variar bastante. Reforçam, ainda, que é responsabilidade do professor organizar e dar sentido às variadas ideias dos alunos, integrando-as no conhecimento matemático formal. Para apoiar este trabalho, apresentam um modelo de preparação e condução de discussões matemáticas que envolve ações de antecipar, observar, selecionar, ordenar e conectar as contribuições dos alunos. Estas práticas serão desenvolvidas, mais à frente, no presente capítulo.

Os mesmos autores ainda sublinham a importância de interligar as respostas dos alunos, enquanto defendem a necessidade de equilibrar dois princípios essenciais: reconhecer a autoridade dos alunos sobre as suas ideias e promover a sua responsabilização pelo próprio raciocínio. Uma preparação cuidadosa nestes termos é um suporte valioso para orientar a discussão, contudo conduzir uma discussão envolve ainda muitos outros fatores imprevisíveis, aos quais o professor deve estar pronto para responder em tempo real.

3. O papel do professor e a condução de discussões coletivas

Segundo Ponte et al. (2012), nos últimos tempos, as orientações curriculares para o ensino da Matemática têm evoluído, enfatizando cada vez mais a realização de tarefas que envolvam exploração, investigação e resolução de problemas, bem como a sua discussão coletiva em contexto de turma. De acordo com Ponte et al. (2013) “esta forma de trabalho na sala de aula tem vindo a ganhar expressão como perspetiva curricular de Matemática de cunho exploratório (...)”. (p. 55)

Nesta perspetiva, vários autores defendem que as discussões coletivas constituem um grande potencial para promover a aprendizagem dos alunos em salas de aula caracterizadas por uma abordagem de ensino exploratório, (Ponte 2005; Ruthven, 1989). Neste sentido, Ponte et al. (2012) referem alguns autores têm aprofundado o estudo do trabalho do professor na condução de discussões matemáticas.

De acordo com Ponte (2005)

Ao contrário da exposição ou do questionamento, em que o professor assume um papel de protagonista central, a discussão pressupõe um muito maior

equilíbrio de participação entre ele e os alunos. Cabe-lhe, naturalmente, assumir um papel de moderador, gerindo a sequência de intervenções e orientando, se necessário, o respectivo conteúdo. (p.16)

Mata-Pereira e Ponte (2018a) indicam que ao considerarem-se tarefas de natureza exploratória “... a sua realização em sala de aula precisa ser conduzida de modo a que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático” (p.785). Os autores complementam as suas ideias referindo que as ações do professor, nos momentos de discussão coletiva, surgem como um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Contudo, Sfard (2003) explica que conduzir uma discussão matemática de forma produtiva é uma tarefa altamente exigente, em que a função do professor como mediador se revela particularmente complexa. Duarte et al. (2023) ainda acrescentam que

A realização de aulas exploratórias é desafiante para os professores e, em particular, para futuros professores. É fundamental perceber como aulas dessa natureza podem ser organizadas e quais os aspetos a considerar aquando da sua preparação e condução, como é o caso da seleção de tarefas matemáticas apropriadas para a promoção de ambientes de aprendizagem significativos e desafiantes para os alunos. (p. 1193)

Boavida (2005) indica que nos momentos de discussão coletiva o professor deve assegurar a participação de todos, orientando a discussão para que vá além da simples comparação de estratégias. O objetivo é que os alunos construam novas aprendizagens significativas, tanto sobre os conceitos e procedimentos envolvidos como sobre as formas válidas de produzir conhecimento matemático.

Complementando esta perspetiva, o NCTM (2000) enfatiza que são as ações do professor que encorajam os alunos a pensar, questionar, resolver problemas e discutir ideias, estratégias e soluções, criando um ambiente intelectual no qual o raciocínio matemático sério se torna a norma. Desta forma, as discussões e a colaboração entre alunos são estimuladas, e os alunos aprendem a formular conjecturas, experimentar diferentes abordagens, construir argumentos matemáticos e contra-argumentar, tornando a criação de um ambiente que favoreça este tipo de tarefa imperativa.

Ponte et al. (1998) ainda acrescenta que

Para promover o envolvimento dos alunos nas tarefas, o professor tem de criar um ambiente em que todos os alunos se sintam à vontade para apresentar as suas conjecturas, argumentar contra ou a favor das ideias dos outros, sabendo que o seu raciocínio será valorizado. (p.7)

Oliveira e Basniak (2021) ressaltam que no momento de discussão coletiva o foco não é a intervenção do professor, mas sim dos alunos e da partilha e discussão das suas estratégias e resoluções. Neste caso, as autoras explicam que

(...) o papel do professor é de mediar discussões, criar conexões entre os grupos que farão a explanação de suas estratégias, incentivar e valorizar as diferentes ideias e relações matemáticas estabelecidas, para que todos possam entender as diferentes formas de resolução. (p. 10)

Conforme Lampert (2001), durante as discussões coletivas, o papel do professor vai muito além de apenas respostas. É fundamental que ele esteja atento à participação de cada aluno, às suas estratégias e compreensões, bem como às ideias matemáticas que estão a emergir. De acordo com Franke et al. (2007), o professor deve criar oportunidades para que todos contribuam, encorajando os alunos a observar e construir ideias através do raciocínio dos colegas, enquanto orienta a turma em direção aos objetivos da aula. Para isso, é necessário tomar decisões sobre quando intervir, como lidar com respostas incorretas e explicitar semelhanças e diferenças entre as várias resoluções de forma compreensível para todos, garantindo que essas ações se encaixem no tempo disponível da aula, da unidade e do ano letivo.

Stein et al. (2008) destacam que um dos papéis centrais do professor, nos momentos de discussão coletiva, é transformar as ideias incompletas dos alunos em ideias matemáticas mais precisas. Ainda defendem que uma discussão rica deve apoiar-se no pensamento dos alunos e, simultaneamente, promover a evolução de conhecimentos matemáticos relevantes. Wood (1999) também refere que o professor deverá explorar estratégias diferentes entre os alunos, sendo que estas situações ajudam a desenvolver a capacidade de justificar.

Ball e Bass (2003) defendem que, nos momentos de discussão coletiva, o professor deve promover situações em que os alunos reflitam sobre as ideias dos

colegas e as analisem criticamente. Neste contexto, o papel do docente consiste em organizar e orientar as resoluções dos alunos, conduzindo a discussão de modo a levar a turma às concepções matemáticas desejadas (Stein et al. 2008).

Ainda, de acordo com Duarte et al. (2023), ao longo da própria discussão, o professor incentiva a criação de ligações entre as respostas dos alunos e entre as respostas e os principais conceitos da tarefa e da aula. Estas conexões favorecem a articulação de estratégias e possibilitam uma discussão produtiva e significativa, na qual se exploram e desenvolvem ideias matemáticas.

De modo a tornar as discussões coletivas mais ricas, Stein et al. (2008) apresentam cinco práticas essenciais a serem aplicadas pelo professor: 1) Antecipar; 2) monitorizar; 3) selecionar; 4) sequenciar; 5) estabelecer conexões e ideias. Descreve-se, em seguida, cada uma dessas práticas.

Antecipar

De acordo com Canavarro (2011) esta prática ocorre na fase de planificação e é uma das etapas mais importantes. Consiste em prever como os alunos irão interpretar e abordar a tarefa, identificando diferentes estratégias possíveis, que poderão estar corretas ou incorretas, relacionando-as com os objetivos matemáticos pretendidos. Para isso, o professor precisa de conhecer profundamente a tarefa, resolvendo-a de várias maneiras e explorando diferentes representações. Este trabalho prévio permite ao professor antecipar dificuldades, ganhar confiança para a condução da aula e preparar respostas para abordagens inesperadas dos alunos. A autora ainda acrescenta que,

Ao antecipar, o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos e a tomar decisões acerca de como estruturar as apresentações e gerir as discussões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática. (p.13)

No Programa de Formação Contínua em Matemática (2010) ainda é referido que esta antecipação pode ser facilitada consultando outros colegas, analisando resoluções de anos anteriores e consultando publicações relacionadas com a tarefa em questão.

Monitorizar

De acordo com Canavarro (2011) a monitorização ocorre durante o trabalho autónomo dos alunos e apoia-se na antecipação feita pelo professor. Consiste em observar e ouvir os alunos para compreender as suas estratégias e raciocínios, avaliar

a validade das ideias apresentadas e interpretar o seu pensamento matemático, mesmo quando surge de formas inesperadas. O professor recolhe informação relevante, incluindo erros ou ideias a discutir mais tarde, podendo registar breves notas para orientar a futura discussão coletiva. Mais do que dar respostas, importa perceber como os alunos estão a trabalhar e que conceitos estão a mobilizar. Esta recolha de informação permite ao professor decidir, com maior fundamento, quais os aspetos que deverão ser aprofundados na discussão coletiva.

Canavarro et al. (2013) acrescentam que “na monitorização, o professor analisa o trabalho dos alunos, particularmente as estratégias de resolução e as ideias matemáticas em jogo, tendo em vista a identificação do seu potencial para a discussão.” (p.32)

Segundo o Programa de Formação Contínua em Matemática (2010) “uma forma de o fazer é circular pela sala de aula, prestando muita atenção ao que fazem e dizem colocando questões que permitam tornar visível o seu raciocínio e os ajudem a clarificar o seu pensamento” (p.2).

Selecionar

Conforme refere Canavarro (2011) selecionar ocorre nos minutos finais do trabalho autónomo, apoiada pela monitorização prévia. Consiste em identificar quais as resoluções que devem ser selecionadas para a discussão coletiva, escolhendo as que promovam a compreensão e sirvam o propósito matemático da aula. Esta seleção não depende dos alunos que se oferecem para ir partilhar a sua estratégia, mas sim da relevância das ideias apresentadas. Os critérios de seleção podem incluir: erros frequentes a esclarecer, resoluções que acrescentam valor ao propósito matemático da tarefa, as estratégias matemáticas mais produtivas ou representações particularmente eficazes.

De acordo com o Programa de Formação Contínua em Matemática (2010) é essencial que “a escolha dos alunos particulares, e das respetivas estratégias de resolução, seja guiada pelos objetivos matemáticos que o professor estabeleceu para a aula e pela sua avaliação sobre o modo como cada apresentação contribuirá para alcançar estes objetivos” (p. 2).

Sequenciar

Para Canavarro (2011) a prática de sequenciar ocorre praticamente em simultâneo com a prática de selecionar e consiste em organizar a ordem das apresentações dos alunos para conduzir a discussão com vista ao propósito matemático

da aula. O professor decide a sequência que melhor apoia a construção do conhecimento, muitas vezes começando por resoluções mais simples ou informais, mesmo que incorretas, de forma a abrir caminho para ideias mais sofisticadas que se aproximam da generalização pretendida. Entre os critérios possíveis estão: iniciar com soluções que tornem a discussão acessível a todos, avançar do informal para o formal nas representações, e terminar com resoluções que permitam generalizar conceitos ou sistematizar procedimentos.

Conforme o Programa de Formação Contínua em Matemática (2010) sequenciar é a prática em que professor seleciona a ordem pela qual as resoluções dos alunos serão apresentadas de forma aumentar as hipóteses de se atingir os propósitos matemáticos da tarefa. Uma forma de fazê-lo é começar por uma estratégia mais concreta, recorrendo a desenhos ou materiais manipuláveis, e só depois passar para estruturas mais abstratas.

Estabelecer conexões

Segundo Canavarro (2011) estabelecer conexões ocorre no final da discussão, embora possa começar durante ela, e tem como objetivo relacionar as diferentes resoluções apresentadas, em vez de simplesmente as exibir de forma isolada. O propósito "(...) é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento colectivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos." (p.16), levando-os a comparar estratégias, identificar semelhanças e diferenças, analisar potencialidades e reconhecer mais valias úteis para problemas futuros. As conexões que o professor estabelece dependem do propósito da aula: se o foco é a resolução de problemas, importa comparar estratégias e perceber quais são mais eficazes; se o foco é o raciocínio matemático, é essencial sintetizar o percurso desde a formulação e análise de evidências, à produção, teste, justificação e eventual demonstração de conjecturas.

Neste sentido, e como referido no Programa de Formação Contínua em Matemática (2010), na prática de estabelecer conexões "o que se pretende é que a discussão não consista num conjunto de apresentações sequenciais sem relação entre si, mas antes, num encadeamento de apresentações que permitam ajudar os alunos a compreenderem ideias matemáticas poderosas." (p.3)

Cengiz et al. (2011) identificam que, durante a discussão coletiva, episódios de ampliação, que ocorrem quando o foco se direciona para uma ideia matemática distinta. Cada episódio começa com uma questão ou desafio lançado pelo professor e desenvolve-se em volta dessa ideia. Os autores distinguem três tipos de episódios: 1)

encorajar a reflexão matemática; 2) avançar nas ideias iniciais; 3) Promover o raciocínio matemático;

Em cada episódio, o professor recorre a três tipos de ações instrucionais: provocar, em que desafia os alunos a esclarecer ideias e estratégias; apoiar, em que ajuda a clarificar objetivos, interpretar argumentos, reforçar raciocínios ou introduzir diferentes representações; ampliar, em que promove a avaliação e comparação de argumentos, o uso de estratégias em novos contextos ou a formulação de argumentos contrários aos dos colegas.

Canavarro et al. (2013) ainda indicam que,

as ações instrucionais do professor e as intenções principais subjacentes a essas ações, considerando assim estas duas componentes das práticas. As intenções do professor têm dois objetivos principais distintos mas interrelacionados: (i) promover as aprendizagens matemáticas dos alunos; e (ii) gerir os alunos e a turma e o funcionamento da aula. Este quadro, que orienta a análise que fazemos neste artigo, é mais um passo na construção de um quadro de referência que relacione as intenções e ações do professor no ensino exploratório da Matemática. (p. 34)

Na Figura 2 é possível observar as várias ações que a professor deverá recorrer para desenvolver a sua prática de ensino exploratório, incluindo o momento de discussão coletiva, o qual é o foco deste capítulo.

Figura 2

Ações intencionais do professor num contexto de Ensino Exploratório

	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
INTRODUÇÃO DA TAREFA	<i>Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:</i> — Familiarizar com o contexto da tarefa — Esclarecer a interpretação da tarefa — Estabelecer objetivos <i>Promover a adesão dos alunos à tarefa:</i> — Estabelecer conexões com experiência anterior — Desafiar para o trabalho	<i>Organizar o trabalho dos alunos:</i> — Estipular tempos para o trabalho a desenvolver em cada uma das fases da aula — Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos, ...) — Organizar materiais da aula
REALIZAÇÃO DA TAREFA	<i>Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:</i> — Colocar questões e dar pistas — Sugerir representações — Focar ideias produtivas — Pedir clarificações e justificações <i>Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:</i> — Cuidar de promover o raciocínio dos alunos — Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos	<i>Promover o trabalho de pares/grupos:</i> — Regular as interações entre alunos — Providenciar materiais para o grupo <i>Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:</i> — Pedir registos escritos — Fornecer materiais a usar — Dar tempo para preparar a apresentação <i>Organizar a discussão a fazer:</i> — Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes) — Sequenciar as resoluções selecionadas
DISCUSSÃO DA TAREFA	<i>Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:</i> — Pedir explicações claras das resoluções — Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas — Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas <i>Regular as interações entre os alunos na discussão:</i> — Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas — Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções — Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções	<i>Criar ambiente propício à apresentação e discussão:</i> — Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos — Providenciar a reorganização dos lugares/ espaço para a discussão — Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados <i>Gerir relações entre os alunos:</i> — Definir a ordem das apresentações — Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções — Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS MATEMÁTICAS	<i>Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa:</i> — Identificar conceito(s) matemático(s), clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas — Identificar procedimento(s) matemático(s), clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização — Reconhecer o valor de uma regra com letras <i>Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa:</i> — Identificar e relacionar dimensões da(s) capacidade(s) transversal(ais) presentes — Reforçar aspetos-chave para o seu desenvolvimento <i>Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:</i> — Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos ou capacidades transversais anteriormente trabalhados	<i>Criar ambiente adequado à sistematização:</i> — Focar os alunos no momento de sistematização coletiva — Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada <i>Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:</i> — Fazer registo em suporte físico ou informático (quadro, QI, acetato, cartaz ...) por aluno ou professor — Pedir registo escrito nos cadernos dos alunos

Nota. Retirado de Oliveira et al., (2013)

Outro papel fundamental do professor é o questionamento. Segundo Ponte et al. (1998) formular questões desafiantes para os alunos envolve equilibrar o nível de dificuldade e a quantidade de informação fornecida. Questões demasiado difíceis podem intimidar, enquanto questões demasiado fáceis aborrecem. Dar pouca informação deixa os alunos perdidos; dar demasiada pode desviá-los do foco. A quantidade ideal de informação fornece pistas suficientes para orientar a resolução sem

simplificar a tarefa. Este equilíbrio é complexo, variando conforme o momento, a turma e cada aluno.

Nesta perspectiva, no livro *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2017) é explicado que um ensino eficaz da matemática se baseia em questões que incentivem os alunos a explicar e refletir sobre o seu pensamento, consideradas componentes essenciais do discurso matemático significativo. Questões bem formuladas ajudam os professores a avaliar conhecimentos, ajustar o ensino, promover conexões matemáticas e estimular a curiosidade dos alunos. No entanto, apenas colocar questões não garante compreensão; é crucial considerar o tipo de questão e o modelo de questionamento utilizado.

Neste sentido, no mesmo livro, são identificados dois tipos de padrões de questões: afunilamento e focagem. O padrão de afunilamento trata-se de um questionamento dirigido, em que o professor utiliza perguntas para conduzir os alunos a uma conclusão ou procedimento específico, prestando pouca atenção a respostas que se desviem desse caminho. Nesse modelo, os alunos não têm oportunidade de construir suas próprias conexões nem de desenvolver autonomamente o entendimento dos conceitos matemáticos. Por outro lado, o padrão de focagem incentiva o professor a valorizar o raciocínio dos alunos, pedindo que expliquem claramente suas ideias e reflitam sobre as dos colegas. Neste tipo de questionamento, o professor permanece aberto a múltiplas estratégias diferentes, construindo questões e pontos-chave com base tanto no conteúdo quanto no conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos. Este modelo de questionamento está mais alinhado com discussões coletivas em contextos de ensino exploratório, onde se pretende promover investigação, argumentação e construção conjunta de conhecimento.

Em síntese o papel do professor em discussões coletivas vai muito além de conduzir a aula: envolve mediar o pensamento dos alunos, organizar ideias dispersas, promover a capacidade de justificar, e garantir que conceitos e práticas matemáticas centrais sejam explorados de forma significativa, favorecendo aprendizagens profundas e reflexivas.

3.1. Ações do professor na condução de discussões coletivas

A condução de discussões coletivas representa um momento desafiante e central na prática do professor de Matemática, pois permite transformar as ideias iniciais dos alunos em conceitos matemáticos mais concretos e consistentes (Stein et al., 2008). Durante estas discussões, os alunos têm a oportunidade de confrontar diferentes

hipóteses, estratégias e justificações, sendo estimulados a esclarecer o seu raciocínio, contra-argumentar e questionar os colegas.

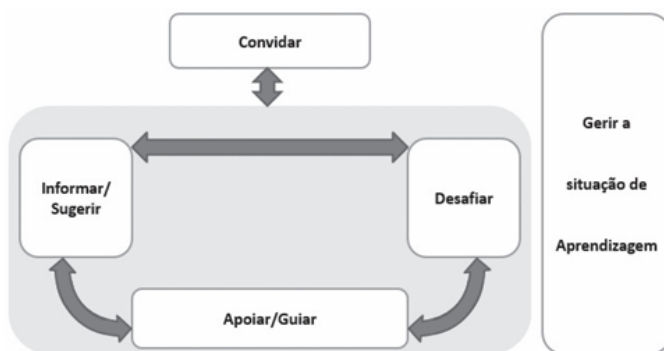
Segundo Brocardo et al. (2022) para analisar estas discussões é essencial considerar as ações do professor como intervenções intencionais, que podem ser únicas ou constituir um conjunto de ações interligadas. Cada intervenção tem uma intenção, seja orientar o pensamento dos alunos, sistematizar estratégias, clarificar conceitos ou reforçar noções matemáticas importantes. A eficiência das discussões depende da capacidade do professor de gerir estas ações de forma estruturada, ajustando-as às necessidades e ao nível de discernimento da turma.

Ponte et al. (2013) propõem que a análise dessas interações (ações) seja realizada por segmentos, em que cada segmento corresponde à resolução de uma questão da tarefa ou à exploração de um aspeto específico desta. Em cada segmento, é possível identificar os problemas que surgem para o professor e que motivam as ações analisadas. Assim, a análise segmentada das ações permite compreender como o professor intervém de forma intencional, ajustando suas estratégias às necessidades e respostas dos alunos ao longo da tarefa.

Deste modo o mesmo autor apresenta um modelo de análise (Figura 3) em que considera dois grandes tipos de ações: aquelas relacionadas diretamente com os conteúdos e processos matemáticos e aquelas ligadas à gestão da aprendizagem, sendo que o foco principal recai sobre as primeiras.

Figura 3

Modelo das ações do professor na condução de discussões matemáticas



Nota. Retirado de Ponte et al. (2013)

No que diz respeito às ações, “convidar”, as mesmas correspondem ao momento em que os alunos são convidados a participar no início de um segmento de discussão. As ações de “apoiar/guiar”, “desafiar” e “informar/sugerir” constituem o suporte central das discussões. Nas ações de “apoiar/guiar”, o professor orienta, de forma discreta ou explícita, o desenvolvimento das estratégias, enquanto em “informar/sugerir” o professor fornece informações, apresenta argumentos ou valida respostas. Já em “desafiar”, o papel do professor é de desafiar os alunos a explorarem novos caminhos matemáticos, incentivando-os a desenvolver autonomia e raciocínio próprio (Ponte et al., 2013).

Mata-Pereira e Ponte (2018b) utilizam este modelo para analisar episódios de discussões coletivas. Os autores verificaram, no estudo, que as ações do professor não seguem uma ordem fixa ou previamente estipulada, ao invés, dependem das respostas e iniciativas dos alunos, bem como das oportunidades que essas intervenções vão criando para o avanço da discussão e da própria aula.

Deste modo, Brocardo et al. (2022) realizaram a análise das ações da sua investigação através do modelo de análise de Ponte et al. (2013) e Mata-Pereira e Ponte (2017, 2018a, 2018b), surgindo, posteriormente, a necessidade de emergir novas subdivisões de categorias de ações. Assim sendo, “desta análise detalhada emergiu uma subdivisão de algumas das categorias inicialmente consideradas: (i) Convidar, (ii) Apoiar, (iii) Guiar, (iv) Desafiar, (v) Informar e (vi) Sugerir. “(Brocardo et al., 2022, p.110)

Desafiar

As ações de desafiar podem assumir diferentes funções, desde pedir esclarecimentos (“expliquem-se”), até promover processos complexos como justificar, classificar ou generalizar. Podem ainda ter como objetivo incentivar os alunos a refletir sobre o próprio processo de resolução, analisando condições do problema, estratégias usadas ou a formulação de conjecturas.

A ação de Desafiar consiste em propor aos alunos situações que os levam a ir além das estratégias que desenvolveram inicialmente ou apresentaram, estimulando, desta forma, a justificação e validação de conjecturas, a argumentação e a exploração de novas ideias. Estas ação do professor incluem: solicitar explicações detalhadas ou justificações do que os alunos realizaram; propor questões novas questões; incentivar a análise das estratégias utilizadas e das generalizações e regularidades encontradas; estimular a exemplificação, a classificação, a generalização e a análise de ideias.

Por fim, Desafiar tem como objetivo colocar os alunos em situações de maior autonomia e raciocínio, promovendo o aprofundamento e a estruturação do pensamento matemático (Brocardo et al., 2022).

Guiar

Guiar refere-se às intervenções do professor que orientam os alunos na clarificação, explicitação ou reformulação das suas ideias, estratégias ou justificações. Estas ações podem ajudar a estruturar o discurso dos alunos, apoiar na identificação de passos relevantes das tarefas ou promover a realização de métodos de raciocínio como exemplificar, justificar, conjecturar e generalizar. Embora nem sempre envolva diretamente um processo de raciocínio, a ação de Guiar tem como objetivo criar condições para que o pensamento matemático dos alunos se torne mais claro, estruturado e acessível à discussão coletiva.

Assim sendo, ação de Guiar refere-se às intervenções do professor que orientam os alunos no desenvolvimento de estratégias na resolução de uma tarefa, sem fornecer diretamente a resposta. Neste caso, essas ações incluem: pedir aos alunos que expliquem os passos que seguiram; ajudar a clarificar ou concretizar estratégias e justificações de conjecturas; incentivar a reflexão sobre exemplos desenvolvidos ou escolhas feitas durante a resolução da tarefa; auxiliar na formulação de generalizações ou conjecturas a partir das soluções encontradas.

Guiar foca-se, então, em apoiar o raciocínio dos alunos, levando-os a avançar nas suas ideias e processos matemáticos de forma estruturada, mantendo a autonomia no raciocínio matemático (Brocardo et al., 2022).

Informar

A ação de Informar em discussões coletivas consiste em descrever, clarificar ou recordar o caminho seguido pelos alunos no desenvolvimento de uma tarefa, corrigir interpretações incorretas ou validar ideias. Esta ação tem como objetivos principais: reforçar o raciocínio correto das estratégias utilizadas pelos alunos; destacar exemplos ou “não exemplos” para apoiar a compreensão de conceitos; apoiar a generalização de regularidades matemáticas identificadas; manter o foco da discussão nos objetivos da tarefa, suprir o raciocínio dos alunos, oferecendo, desta forma, sugestões ou correções quando necessário.

Neste sentido, informar não é simplesmente oferecer respostas, mas orientar a turma sobre o que foi feito, o que está correto ou incorreto, e quais ideias que merecem

atenção, contribuindo para que os alunos consolidem o seu raciocínio e compreensão matemática (Brocardo et al., 2022).

Sugerir

A ação de Sugerir tem como objetivo propor possíveis explicações, justificações ou críticas subtis às ideias ou estratégias apresentadas pelos alunos. Pode assumir dois propósitos principais: sugerir uma explicação ou justificação para o que os alunos desenvolveram ou afirmaram, ajudando-os a compreender o fundamento das suas escolhas ou estratégias; validar ou criticar, de forma concreta uma ideia ou estratégia, indicando alternativas ou sugerindo caminhos mais adequados. O objetivo é levar os alunos a refletir sobre as opções que tomaram e avançar na construção do seu raciocínio matemático (Brocardo et al., 2022).

Convidar

A ação de Convidar corresponde aos momentos em que o professor convida os alunos a participarem na discussão coletiva, chamando-os a intervir ou a partilhar as suas estratégias e resoluções. Algumas ações de Convidar têm como objetivo estimular os alunos ou os grupos de trabalho a apresentarem seus resultados ou estratégias. Outras ações de convidar destinam-se sobretudo a organizar e gerir a participação da turma, selecionando determinados alunos a intervir ou solicitando a intervenção da turma, sem necessariamente se focarem nos processos de raciocínio matemático.

Apoiar

A ação de Apoiar corresponde às intervenções do professor que validam, reforçam ou enfatizam os caminhos, opções, resoluções ou estratégias, que os alunos seguiram durante o desenvolvimento das tarefas. O objetivo desta ação é dar reconhecimento ao que os alunos disseram ou fizeram, mostrando concordância e encorajando a continuação da participação.

Estas ações não estão diretamente ligadas ao desenvolvimento de processos de raciocínio matemático, funcionando sobretudo como reforço e validação das estratégias, respostas e resoluções partilhadas pelos alunos (Brocardo et al., 2022).

As ações anteriormente descritas, segundo Brocardo et al. (2022), poderão aparecer interligadas e até seguir uma certa sequência. Por exemplo, nas ações de Apoiar e Guiar, quando o professor valida o que os alunos disseram, de seguida guia os alunos na explicitação das suas estratégias. No estudo feito por Brocardo et al. (2022), a professora reforçava a resposta (Apoiar) e depois colocava uma questão para que explicassem ou desenvolvessem o seu raciocínio (Guiar).

Nas ações de Apoiar e Desafiar, de acordo com Brocardo et al. (2022), o apoio serve como reconhecimento das estratégias e opções desenvolvidas e tomadas pelos alunos seguido da colocação de um novo desafio por parte do professor. O apoio funciona como um ponto de validação antes de introduzir um desafio que exige que os alunos avancem, por exemplo, na formulação de uma conjectura ou na exploração de regularidades.

Estas sequências mostram que as ações do professor não ocorrem de forma isolada, mas sim interligadas, permitindo validar, orientar e desafiar os alunos dentro de uma linha orientadora consistente. Essa sequência de ações favorece tanto a progressão do raciocínio matemático como a participação coletiva dos alunos. Esta ideia está em consonância com Cengiz et al. (2011), que defendem que a combinação de sequências de ações é essencial para desenvolver o raciocínio dos alunos e mostram a importância de criar um modelo que tenha em conta o benefício de um conjunto de ações, em vez de apenas ações isoladas.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

No presente capítulo são apresentadas as opções metodológicas para o desenvolvimento do meu projeto de investigação.

Em primeiro lugar, relembro as questões e objetivo de investigação. De seguida, menciono, caracterizo e fundamento a metodologia aplicada no estudo em causa. Por fim, refiro as técnicas e instrumentos utilizados na recolha e análise de dados.

Como tal, e atendendo ao que foi mencionado, o principal objetivo desta investigação é caracterizar as ações do professor na preparação e condução dos momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra. Deste modo surgiram as seguintes questões de investigação:

i) Como se caracterizam as ações do professor nos momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra?

ii) Quais os desafios e dificuldades sentidas pelo professor durante a condução dos momentos de discussão coletiva?

iii) De que modo a planificação das ações do professor contribuiu para a condução das discussões coletivas das tarefas?

Antes de passar aos próximos tópicos, considero essencial clarificar as questões de investigação para uma melhor compreensão do que pretendo investigar. Como tal, as duas primeiras questões são centradas na análise dos momentos de discussão coletiva que ocorreram durante a exploração das tarefas de Álgebra em aula, do ponto de vista do professor e das suas ações. Estas ações foram analisadas consoante categorias previamente definidas por Ponte (2013) e desenvolvidas por Brocardo et al. (2022). Tais ações são: desafiar, guiar, apoiar, sugerir, informar e convidar, já apresentadas e descritas no capítulo anterior. Por fim, a terceira questão pretende compreender como a previsão das diferentes ações do professor, feita no momento de planificação das tarefas, pode contribuir para a condução das discussões coletivas nas aulas.

1. Metodologia e investigação

Nesta secção começo por tornar claro o conceito de investigação. Ponte (2002) explica que

Se me ocupo de um problema semelhante a outro já trabalhado por outras pessoas, mas cujo trabalho eu desconheço, e produzo soluções (para mim) originais, estou certamente a realizar um trabalho de investigação. (p. 4)

Neste sentido, o autor pretende ressaltar que uma investigação assenta na premissa de que o investigador não se deve limitar apenas a reproduzir o que já foi feito. Para além disso um trabalho de investigação deve conter rigor. Ponte (2008) ainda cita três condições fundamentais para que uma atividade seja considerada uma investigação, condições essas que são sugeridas por Beillerot (2001): “(a) produz conhecimentos novos ou, pelo menos, novos para quem investiga, (b) segue uma metodologia rigorosa, e (c) é pública” (p. 156). Este autor também pretende esclarecer que uma investigação evolve sempre uma metodologia, mas também “(...) uma pergunta directora e uma actividade de divulgação e partilha” (p. 3).

Conforme aquilo que é apresentado anteriormente, considero que concretizei uma investigação, pois defini três questões de investigação que respondem a uma problemática, no caso deste estudo questões que pretendiam investigar a própria prática do professor, baseando-me em estudos previamente realizados, seguindo opções metodológicas adequadas ao estudo que serão explicitadas nos tópicos seguintes. Neste contexto, analisei as minhas ações em momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra de modo a refletir sobre a minha prática, partilhando o trabalho realizado, contribuindo desta maneira para o meu crescimento profissional e para a comunidade investigativa.

Como referido no parágrafo anterior, este estudo centrou-se nas ações do professor e por isso pode ser caracterizado como uma investigação sobre a prática, sendo que me centrei numa reflexão sobre essas ações em momentos de discussão coletiva, analisando, desta maneira, a minha própria prática. Consoante o exposto, Ponte (2008) explica que estamos perante uma investigação sobre a prática quando “o investigador tem uma relação muito particular com o objecto de estudo – ele estuda não um objecto qualquer mas um certo aspecto da sua prática profissional” (p. 156).

Tal como já mencionado, o trabalho desenvolvido por mim é considerado uma investigação, pois foi desenvolvido respeitando uma metodologia de investigação. Com efeito, Afonso (2005) define metodologia como uma

Discussão analítica e/ou justificativa do modo como a investigação é realizada, nomeadamente no que respeita à adequação e coerência entre estrutura

conceptual, as estratégias de investigação e as técnicas de recolha de dados e análise de informação empírica. (p. 134)

1.1. Abordagem Qualitativa

O estudo em causa seguiu uma abordagem qualitativa. O conceito de qualitativo “implica uma ênfase na qualidade das entidades estudadas e nos processos e significações que não são examináveis experimentalmente nem mensuráveis, em termos de quantidade, crescimento, intensidade ou frequência” (Denzin & Lincoln, 2003, citados por Amado, 2014, p. 40).

Neste contexto, Bogdan e Blikem (1994) apresentam cinco características que definem uma investigação qualitativa: 1) “a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p. 47); 2) “a investigação qualitativa é descritiva” (p.48); “3) os investigadores qualitativos dão mais atenção ao processo do que aos resultados”; 4) “os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma intuitiva” (p.50); 5) “o significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (p.50).

Sendo que a base deste tipo de investigação é “a compreensão das intenções e significações” (Afonso, 2014, p. 40) que os intervenientes “colocam nas suas próprias ações” (Afonso, 2014, p. 41), este tipo de investigação molda-se ao objetivo do projeto de investigação, pois analiso e procuro compreender a minha própria prática.

Para além destes aspetos, Bogdan e Blikem (1994) referem que a investigação qualitativa tem um carácter flexível o que permite “aos sujeitos responderem de acordo com a sua perspetiva pessoal, em vez de terem de se moldar a questões previamente elaboradas” (p. 17). No caso deste estudo, esta flexibilidade foi crucial.

1.2. Investigação sobre a prática

A investigação em questão é classificada como investigação sobre a prática, como mencionado anteriormente. Ponte (2002) refere que

A investigação sobre a prática pode ter dois tipos principais de objetivos. Por um lado, pode visar principalmente alterar algum aspecto da prática, uma vez estabelecida a necessidade dessa mudança e, por outro lado, pode procurar compreender a natureza dos problemas que afectam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior, de uma estratégia de acção. (p.3)

O autor ainda acrescenta que

A investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente. (p.3)

Posto isto, considero que o conceito mencionado por Ponte (2002), no que diz respeito à investigação sobre a prática, se adequa ao objetivo geral deste estudo, pois a preparação e condução de discussões coletivas de tarefas são momentos desafiantes para um professor e a reflexão sobre tal poderá contribuir para a construção e desenvolvimento da minha prática profissional.

1.3. Ética

Antes de passar a uma caracterização mais detalhada das opções metodológicas é importante mencionar que todos os dados recolhidos foram previamente autorizados pelos encarregados de educação dos alunos, como mostra o Anexo 1¹ pois é imprescindível que se sigam certos princípios éticos relativos à investigação.

Deste modo, Bogdan e Biklen (1994) indicam quatro princípios éticos a seguir, tendo em conta os sujeitos da investigação, os alunos:

1. As identidades dos sujeitos devem ser protegidas (...); 2. Os sujeitos devem ser tratados respeitosamente e de modo a obter a sua cooperação na investigação (...); 3. Ao negociar a autorização para efetuar um estudo, o investigador deve ser claro e explícito com todos os intervenientes; 4. Seja autêntico quando escrever os resultados. (p. 77)

Seguindo estes princípios, neste estudo, as identidades dos alunos foram mantidas em anonimato e todos foram informados do motivo da nossa presença a sua sala de aula e a natureza do estudo, levando a que aderissem voluntariamente ao projeto de investigação em causa (Ponte, 2002).

¹ A autorização foi construída pelo par de estágio.

Durante toda a investigação tentei manter uma relação de proximidade e de confiança com os alunos e a professora cooperante, pois

O acesso ao conhecimento construído em colaboração estreita com os outros requer relações de proximidade intensa, para as quais é necessário o envolvimento mútuo do investigador e do investigado, só possível se essas relações assentarem no pilar da confiança (Máximo-Esteves, 2008, p.106).

2. Recolha e tratamento de dados de dados

Os dados, segundo Bogdan e Biklen (1994), são os “materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar; são os elementos que formam a base da análise” (p. 149).

Para a recolha de dados foram seleccionadas várias técnicas, sendo que é importante fazer distinção entre técnica, método e instrumentos que muitas vezes são confundidos. A técnica, de acordo com os autores Baptista e Sousa (2011) citados por Batista et al. (2021), compreende “procedimentos operatórios rigorosos, bem definidos, transmissíveis, adaptados ao tipo de problema e aos fenómenos em estudo” (p.15) para chegar a um resultado. Por outro lado, o método corresponde ao “caminho ou ao conjunto de operações para se chegar a um determinado resultado em investigação” (Coutinho, 2011, citado por Batista et al., 2021, p.15). Já os instrumentos, segundo Batista et al. (2021), são os objetos concretos utilizados nas técnicas.

Com efeito, na recolha de dados existem várias técnicas e instrumentos que são seleccionadas consoante a natureza da investigação, que no caso deste estudo é uma investigação qualitativa, como referido anteriormente. Nesta secção serão apresentadas, em primeiro lugar as técnicas e instrumentos de recolha de dados e por fim a técnica de análise de dados.

2.1. Técnicas de recolha de dados

Tal como mencionado anteriormente, as técnicas e instrumentos de recolha de dados “dependem intrinsecamente dos objetivos do estudo, das questões e da situação concreta de investigação” (Batista et al., 2021, p.15). Desta forma, e tendo por base o objetivo da investigação que é centrado na minha prática, foram seleccionadas duas técnicas de recolha de dados, que serão apresentadas de seguida.

2.1.1. Observação participante

A principal técnica de recolha de dados deste estudo é a observação participante que é considerada por Pawlowski et al. (citados por Mónico et al., 2017) como uma técnica em que o investigador é um participante ativo na recolha dos dados e que consegue aceder ao contexto e a diversas situações que seriam difíceis de perceber através de entrevistas, por exemplo (Atkinson & Hammersley, 2005; Silverman, 2006; Strand, Olin, & Tidefors, 2015, citados por Mónico et al., 2017). Durante a investigação, conduzi os vários momentos de três tarefas de Álgebra, focando-me nos momentos de discussão coletiva, tendo em conta o objetivo do estudo, como já referido, de caracterizar as ações do professor nos momentos de condução da discussão coletiva de tarefas de Álgebra numa turma de 4.º ano de escolaridade.

Outros autores, como Máximo-Esteves (2008) reforçam a importância da observação. Este autor refere que “a observação permite o conhecimento direto dos fenómenos tal como eles acontecem num determinado contexto” (p. 87). Ainda acrescenta que “a observação ajuda a compreender os contextos, as pessoas que nele se movimentam e as suas interações” (p. 87). Como tal, através da observação foi possível entender o contexto da turma. Deste modo, utilizei como instrumento de recolha de dados algumas notas de campo, acerca da prática da professora cooperante, que surgiram dessa observação direta e de conversas informais.

Essas observações e conversas eram apontadas num caderno em forma de notas de campo, respeitando o que Bogdan e Biklen (1994) consideram como “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (p. 150).

Para além das notas de campo, recorri às gravações áudio e vídeo, que são instrumentos de registo da recolha de dados muito relevantes para a investigação. Estas gravações permitem que analise com detalhe as minhas ações na condução das tarefas, sem perder nenhuma informação significativa.

2.1.2. Recolha documental

As planificações das tarefas elaboradas por mim constituem documentos importantes neste estudo, visto são documentos que foram elaborados para apoiar as minhas ações na exploração em aula das tarefas de Álgebra, mais propriamente no que respeita à condução das discussões coletivas. Como tal, faz todo o sentido analisá-las, podendo ser uma fonte de informação significativa para o estudo.

Deste modo, a recolha documental “consiste na utilização de informação existente em documentos anteriormente elaborados, com o objetivo de obter dados relevantes para responder às questões de investigação” (Afonso, 2005, p. 88). Neste caso, e como mencionado anteriormente, as planificações permitiram-me entender como a antecipação das minhas ações contribuíram para a condução das discussões coletivas.

3. Técnica de análise de dados

Após a recolha dos dados, o passo seguinte é analisá-los e interpretá-los. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados envolve

o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. (p. 205)

Na análise dos dados selecionei a técnica de análise de conteúdo, estudando os dados recolhidos, mais concretamente os dados registados em formato de áudio e vídeo; e os dados registados nas planificações e nas notas de campo. Bardin (1977), refere a análise de conteúdo como

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (p. 42)

A autora indica ainda que a análise de conteúdo se baseia num sistema de categorização, em que os dados recolhidos devem ser organizados em categorias, qualificando assim a categorização como “uma operação de classificação de elementos construtivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o género (analogia), com critérios previamente definidos” (p. 117).

As categorias podem ser seleccionadas de duas formas diferentes, propostas por Bardin (1997). Na primeira hipótese, “é fornecido o sistema de categorias e repartem-se da melhor maneira possível os elementos, à medida que vão sendo encontrados”

(p.119). Nesta situação o investigador baseia-se em categorias já construídas por outros autores. Na segunda possibilidade, “o sistema de categorias não é fornecido, antes resultando da classificação analógica e progressiva dos elementos” (p.119). Neste caso, é o próprio investigador que define as categorias a trabalhar. Seguindo as ideias anteriores, as categorias deste estudo foram selecionadas a partir de outras já construídas por autores de referência e os dados repartidos pelas categorias, respetivamente. Assim sendo, apliquei as categorias do modelo de análise para as ações do professor sugerido por Ponte (2013), desenvolvido por Brocardo et al. (2022), mencionadas na Figura 3, anteriormente referida no Capítulo da Fundamentação Teórica.

Como tal, estas categorias parecem ser adequadas para o objetivo desta investigação, cujo o foco é analisar as ações do professor nos momentos de condução de discussões coletivas de uma tarefa algébrica, pois como indica Stein (2008) citado por Brocardo et al. (2022),

A condução das discussões coletivas é um aspeto importante da prática do professor em que se completam as ideias dos alunos, transformando-as em ideias matemáticas mais precisas e poderosas (Stein et al., 2008). A análise das discussões coletivas implica ter em atenção as ações do professor encaradas como uma intervenção ou conjunto de intervenções relacionadas entre si e realizadas com uma determinada intenção. (p. 103)

Deste modo, as categorias nomeadas têm como objetivo classificar as diferentes ações realizadas por mim em momentos de condução de discussões coletivas de três tarefas de Álgebra, aplicadas de acordo com uma metodologia de ensino aprendizagem de natureza exploratória.

Na análise dos excertos das ações realizadas por mim comecei por transcrevê-los, depois por assinalar as diversas ações, com cores diferentes, adotando assim um código de cores. De seguida, construí uma tabela onde coloquei as categorias, as descrições e exemplos de excertos que correspondessem à ação em questão. Por fim, elaborei uma tabela com a quantificação de cada ação realizada por mim, como se pode verificar no Anexo 2.

De modo a sintetizar o presente capítulo, apresenta-se a Tabela 2, que mostra as diferentes técnicas, métodos e instrumentos de recolha e análise de dados.

Tabela 2

Técnicas de recolha de dados, instrumentos de recolha e técnicas de análise de dados

Técnica de recolha de dados	Instrumentos	Técnica de análise de dados
Observação participante	Notas de campo Gravação áudio e vídeo	Análise de conteúdo
Recolha documental	Planificações elaboradas por mim (tarefas de Álgebra de carácter exploratório)	

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

1.Contexto e Participantes²

A presente investigação foi desenvolvida numa turma de 4.º ano, entre oito de janeiro e vinte oito de fevereiro de dois mil e vinte quatro. A investigação decorreu numa escola pertencente ao Concelho de Pamela. O Agrupamento a que pertence esta escola, é constituído por onze escolas.

O contexto educativo, em que decorreu a investigação, é reconhecido como público e está situado numa zona urbana, com fácil acesso a transportes públicos e um amplo parque de estacionamento na área circundante. A escola apresenta duas valências, a de Jardim de Infância e de 1.º Ciclo que conta com dezasseis turmas, três de Ensino Pré-Escolar e treze de 1.º Ciclo. No primeiro andar encontramos as salas de aula do 1.º Ciclo, que são contíguas, duas a duas, separadas por uma área que conta com um lavatório, uma mesa e armários para guardar material de expressão plástica, dos alunos.

A turma era constituída por vinte alunos, sendo 10 do sexo feminino e os restantes 10 do sexo masculino, com faixa etária compreendida entre os 9 e os 10 anos, apresentando diversidade étnica e cultural, em que 1 das crianças é paquistanesa e aluna de Português Língua Não Materna, outra de etnia cigana e 1 criança com dupla nacionalidade brasileira e portuguesa. Na turma, que se revela heterogénea, 8 crianças estão abrangidas pelo Decreto-Lei n.º 54, 7 com medidas seletivas e uma com medidas universais, tal informação que foi cedida pela professora cooperante. São alunos participativos, interessados, mas também muito conversadores e, alguns, conflituosos entre eles e com alunos de outras turmas. No geral, a turma demonstra interesse em realizar tarefas dinâmicas na área da Educação Artística, mais propriamente no âmbito das Artes Visuais e Expressão Dramática, revelando, em conversas informais, que gostariam de realizar mais vezes este tipo de tarefas. Por outro lado, apresentam muitas dificuldades no que concerne à aprendizagem de conteúdos específicos, principalmente, na área da matemática, demonstrando falta de interesse e desmotivação. Os alunos, no geral, mostraram-se sempre afetuosos, o que facilitou a

² Construído com o par de estágio

interação e o estabelecimento de uma relação de confiança com a turma, beneficiando o desenvolvimento da investigação.

A sala de aula da turma em questão está organizada da seguinte forma: as mesas estão colocadas em comboio, 6 do lado esquerdo encostadas à parede; no lado direito estão 4 encostadas à parede; no centro da sala estão dispostas 6 mesas individuais, 2 do lado esquerdo, e as restantes 4 do lado direito. A secretária da professora encontra-se de frente para as crianças, em frente do quadro de giz, onde também há uma tela branca para o projetor.

Relativamente à arrumação disponível, existe uma estante e um armário, destinados à arrumação de materiais das crianças e dossiês, bem como 4 mesas, no fundo da sala, nas quais se encontram alguns materiais utilizados durante as aulas e os alimentos disponibilizados pela escola. No diz respeito à dimensão da sala, esta é espaçosa tendo em conta o número de alunos da turma, possibilitando uma boa deslocação pela sala, bem como a alteração da mesma para determinadas atividades. Cada aluno tem os materiais de escrita, recorte, colagem, pintura e outros debaixo da sua mesa, juntamente com alguns cadernos que são utilizados todos os dias. Todos têm um computador portátil que apenas trazem para a escola quando pedido, fornecido pela mesma. No que concerne a materiais que possam ser utilizados por todos, observámos apenas alguns livros de histórias infantis, que até ao início da nossa intervenção não eram utilizados e estavam guardados no armário. Nas paredes existem alguns cartazes 4 oferecidos no kit do professor do livro Plim, uma cronologia sobre as dinastias e uma árvore da leitura com acesso a fichas de leitura, ambas construídas pelas crianças, em conjunto com o par de estágio.

A disposição da sala de aula, apresentada no Anexo 5, pode ser alterada sempre que necessário para o bom funcionamento da aula, bem como realizar outras atividades

No que se refere à dinâmica de trabalho é notório que a turma não está familiarizada com este tipo de dinâmica. Com base numa conversa informal tida com a professora cooperante, a docente refere que evita o trabalho em grupo, pois gera muita confusão e ruído. Para além disso, ao observar os alunos nesta dinâmica, é visível, efetivamente, que não estão acostumados a trabalhar cooperativamente, revelando-se na frustração de alguns alunos e tendo gerado, muitas vezes, conflitos nos grupos. Também, em conversa informal com uma aluna, a mesma revelou-me que apenas trabalham em grupo, muito esporadicamente, nas aulas de informática. Nas aulas de matemática, o processo de realização de tarefas adotado pela professora cooperante consiste em os alunos resolverem individualmente a tarefa e, posteriormente, a correção

da mesma no quadro, pela professora, sendo observado um ensino mais expositivo. Neste sentido, a turma apresenta pouca autonomia na resolução de tarefas, mostrando alguma resistência e dificuldade na partilha das suas estratégias e na maneira como pensam.

No que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico, o observado é que o trabalho formal de generalizações, com a turma, não tinha sido desenvolvido até ao momento, em que a professora cooperante apresenta, maioritariamente, as fórmulas e indica o processo e as estratégias que os alunos devem efetuar na resolução das tarefas. Deste modo, foi sendo evidenciado, muitas vezes, a dificuldade que os alunos apresentam no pensamento relacional.

Por fim, e em conversa informal, a professora cooperante refere que a maioria dos alunos sente dificuldades na área da matemática, em que a maioria dos alunos, também, em conversa informal manifestam a matemática como a área que menos gostam.

2. Descrição da Intervenção

Nesta secção será descrita a intervenção pedagógica realizada durante oito semanas de estágio que decorreram de 8 de janeiro a 28 de fevereiro de 2024. Contudo, por motivos pessoais, houve a necessidade de realizar a última tarefa uma semana depois do término do estágio, pelo que a intervenção terminou a 6 de março.

Com o propósito de recolher dados que ajudassem a compreender o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos no início da intervenção pedagógica, elaborei e apliquei duas fichas de diagnóstico (Anexos 6 e 7). Os resultados das fichas diagnósticas mostraram que a maioria dos alunos apresentava dificuldades consideráveis relacionadas com conceitos algébricos.

No que se refere à Ficha de Diagnóstico I alusiva às Relações Algébricas, a maioria dos alunos mostrou fragilidades nas estratégias de cálculo mental, nas igualdades das expressões numéricas e nas propriedades das operações, como se verifica, por exemplo na Figura 4.

Figura 4

Ficha de Diagnóstico de Relações Algébricas

3. Qual é o valor de cada símbolo?

$$(3 \times 13) + (5 \times 13) = \triangle \times 13 \quad \triangle = 13$$

$$(40 : 2) + (4 : 2) = 44 : \otimes \quad \otimes = 44$$

$$32 \times 11 = (32 \times 10) + \clubsuit \quad \clubsuit = 42$$

$$23 \times 15 = 23 \times (10 + \star) \quad \star = 10$$

Como correu a ficha?

	Correu bem 😊	Correu mais ou menos 😐	Correu mal 😞
--	--------------	------------------------	--------------

Em que exercícios sentiste mais dificuldades? Porquê?

Line mais dificuldade na 3. porque não sabia quanto valia os símbolos.

No que diz respeito à Ficha de Diagnóstico II relacionada com as sequências de repetição, a maioria dos alunos mostrou dificuldade em identificar uma regularidade que permitisse encontrar qualquer figura da sequência, recorrendo, grande parte, a contagens. Os alunos também apresentaram dificuldade em contar de forma correta quantos elementos tinha determinado termo da sequência, respeitando o grupo de repetição, como se identifica na Figura 5.

Figura 5

Ficha de Diagnóstico Sequências de Repetição

1.3. Explica como podes descobrir qualquer figura da sequência.

Para mim para descobrir qualquer figura é só contar.

Como correu a ficha?

	Correu bem 😊	Correu mais ou menos 😐	Correu mal 😞
--	--------------	------------------------	--------------

Em que exercícios sentiste mais dificuldades? Porquê?

Na 1.3, 1.1. e na 1.3 porque para mim é um pouco difícil explicar.

Nos Anexos 8 e 9, podem observar-se as grelhas de registo que elaborei, para analisar cada ficha de diagnóstico e compreender em que nível de desenvolvimento do pensamento algébrico os alunos se encontram.

Após a análise dos resultados das fichas de diagnóstico, comecei por planificar e construir as tarefas, de modo a promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, tendo em conta as suas dificuldades. No total foram implementadas cinco tarefas, explorando-se uma tarefa por sessão, resultando em cinco sessões de implementação, como se mostra na Tabela 3.

Tabela 3

Distribuição das Tarefas por Sessões

Tarefa	Descrição	Data da dinamização
1. ^a tarefa ³	V's Mágicos	23 de janeiro de 2024
2. ^a tarefa ⁴	Sequência dos múltiplos	1 de fevereiro de 2024
3. ^a tarefa ⁵	Jogo dos múltiplos	8 de fevereiro de 2024
4. ^a tarefa ⁶	Balança das igualdades	21 de fevereiro de 2024
5. ^a tarefa ⁷	Sequência de crescimento	6 de março de 2024

Durante toda a intervenção, segui um modelo de ensino exploratório, procurando dar oportunidade aos alunos de desenvolverem as suas próprias aprendizagens, considerando-os no centro do processo de ensino-aprendizagem e guiando-os nesse processo. De acordo com este modelo, a exploração das tarefas em sala de aula segue uma estrutura caracterizada pela existência de quatro momentos distintos, a saber: 1) introdução da tarefa; 2) trabalho autónomo dos alunos; 3) discussão coletiva; 4)

³ Tarefa adaptada de Mendes, F., Brocardo, J., & Delgado, C. (sem data). Formar professores visando promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma abordagem que articula teoria e prática. Em . (Eds.) C. Delgado, J. Brocardo, & F. Mendes, *Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos: Práticas e desafios* (1.^a). Instituto Politécnico de Setúbal.

⁴ Tarefa elaborada por mim e pela orientadora e adaptada de Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Elvira, S., Leonor, S., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais 4.º ano 1.º Ciclo do Ensino Básico Matemática*. Direção-Geral da Educação.

⁵ Tarefa cedida pela orientadora e adaptada de Mestre, C., & Gonçalves, H. (2022). *Plim! – Matemática 3º Ano*. Texto Editores.

⁶ Tarefa construída por mim tendo por base a aplicação [Pan Balance – Numbers](#).

⁷ Tarefa adaptada de Mestre, C. M. M. V. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino* [Dissertação de Doutoramento]. Universidade de Lisboa.

sistematização das aprendizagens. Em todas as tarefas, os alunos trabalharam em pares, organizados de acordo com níveis mais homogêneos de desempenho. A organização dos pares de alunos foi sugerida pela professora orientadora, de modo a diminuir discrepâncias consideráveis entre os alunos, procurando equilibrar o trabalho colaborativo para que todos os elementos se mantivessem envolvidos na tarefa. A escolha dos pares e grupos foi elaborada, antecipadamente, de forma a facilitar a gestão do tempo e a organização da sala.

No sentido de apoiar a minha prática e garantir que as dinamizações das tarefas seguissem uma estrutura que apoiasse as aprendizagens dos alunos, produzi, para cada tarefa, uma planificação detalhada e pormenorizada, nas quais antecipei as dificuldades dos alunos, as suas ações e as minhas. Esta antecipação permitiu-me realizar uma reflexão sobre os desafios que os alunos poderiam enfrentar e a maneira como deveria agir consoante as suas questões, afirmações e dúvidas, sendo estas planificações uma ferramenta de apoio às minhas ações, de forma a favorecerem o ambiente de aprendizagem. Como tal, as planificações serão objeto de reflexão no capítulo das conclusões.

Assim sendo, apresentarei, de seguida, a descrição da implementação de três tarefas - Tarefas 1, 2 e 5 - referindo o seu enquadramento curricular e descrevendo as ações dos alunos e as minhas, em cada sessão. A opção por analisar apenas estas três tarefas fundamenta-se no facto de estas já disponibilizarem um conjunto de dados suficientemente amplo e diversificado para responder aos objetivos da investigação. Estas tarefas, pela sua natureza e complexidade, foram as que revelaram maior potencial para observar diferentes tipos de interações e para identificar variações nas ações do professor ao longo das discussões coletivas. Além disso, constituíram momentos particularmente significativos do ponto de vista do pensamento algébrico dos alunos, permitindo recolher evidências consistentes e relevantes para a reflexão sobre a minha prática. Assim, a seleção destas três tarefas mostrou-se adequada, suficiente e metodologicamente justificável para a análise pretendida.

2.1. Descrição da implementação das tarefas

2.1.1. Tarefa 1 – “Vs mágicos”

A primeira tarefa denomina-se de V's Mágicos e foi planificada com a duração de uma hora e trinta minutos dividida nas seguintes etapas:

1. Apresentação da tarefa (15 minutos)
2. Trabalho autónomo (30 minutos);

3. Discussão coletiva (30 minutos);
4. Sistematização das aprendizagens (15 minutos);

O principal objetivo da tarefa era que os alunos estabelecessem relações entre a paridade das parcelas e a paridade da soma ($\text{par}+\text{par}=\text{par}$; $\text{par}+\text{ímpar}=\text{ímpar}$; $\text{ímpar}+\text{ímpar}=\text{par}$). A Tabela 4 apresenta os objetivos da tarefa segundo as Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática (Canavarro et al. 2021).

Tabela 4

“V’s mágicos”, de acordo com as AE de Matemática

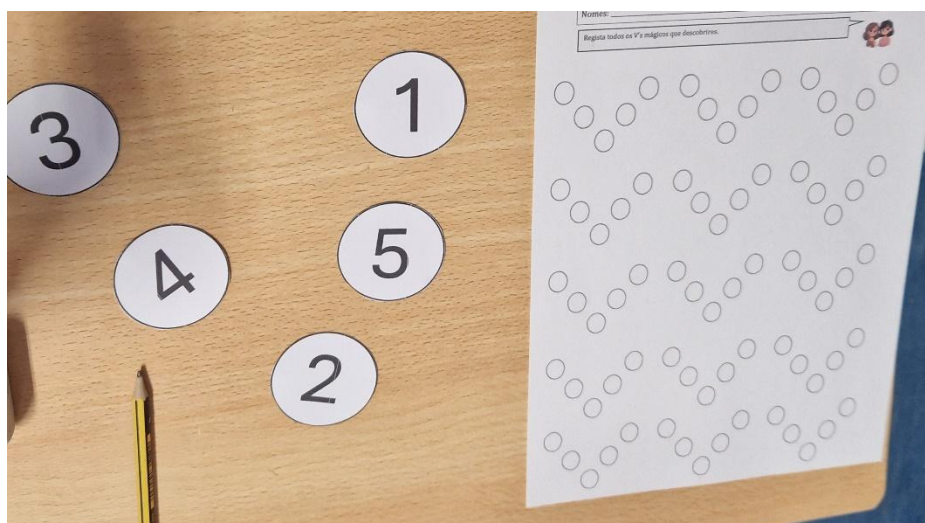
Domínio	Tópico	Subtópico	Objetivos de Aprendizagem
Capacidades Matemáticas Transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar	Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
		Justificar	Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
	Comunicação matemática	Expressão de ideias	Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
		Discussão de ideias	Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos
	Representações matemáticas	Representações múltiplas	Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
			Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas
		Linguagem simbólica matemática	Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
Álgebra	Expressões e relações	Igualdades aritméticas	Decidir sobre a correção de igualdades aritméticas e justificar as suas ideias.

		Relações numéricas e algébricas	Investigar, formular e justificar conjecturas sobre relações numéricas em contextos diversos.
			Estabelecer relações entre a paridade das parcelas e a paridade da soma na adição de números naturais.

Para a exploração desta tarefa, foram usados como recursos uma folha de registo e cartões numerados de 1 a 5, apresentados na Figura 6, assim como computador e projetor.

Figura 6

Folha de Registo e Cartões com números de 1 a 5

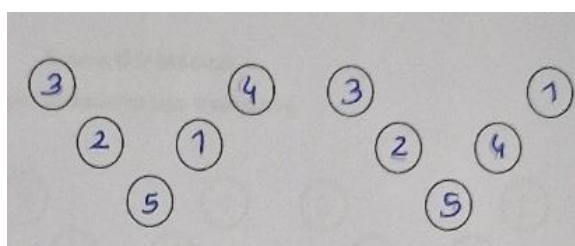


Nesta tarefa, os alunos teriam de utilizar números de 1 a 5 para formarem somas iguais nos dois braços de um V, formado por círculos, como exemplificado na Figura 7.

A utilização dos cartões com números permitiu aos alunos uma maior concretização, podendo manipulá-los, testando se, de facto, eram V's mágicos, antes de os registarem na folha de registo.

Figura 7

Exemplo de V's mágicos formados com os números de 1 a 5



Introdução da tarefa

Inicialmente, comecei por despertar a curiosidade dos alunos dizendo-lhes que tinha um desafio matemático para realizarem, e que precisariam ser investigadores para resolver esse desafio. De seguida, projetei no quadro duas figuras em forma de V - uma considerada “mágica” e outra não - formadas com os números de 1 a 5 - e questionei-os sobre o que estavam a ver (Figura 8). O objetivo era que os alunos descobrissem diferenças e semelhanças entre os V's apresentados.

Figura 8

V's mágicos projetados



O excerto seguinte mostra uma parte do diálogo que conduzi para introduzir a tarefa.

Professora Catarina: Ora bem, o que é que eu tenho aqui no quadro? O que é isto que eu tenho no quadro? Dedo no ar. É o quê, L.?

L.: Números.

Professora Catarina: Quais números?

T.: 1, 2, 3, 4, 5.

Professora Catarina: E é igual nas duas figuras?

Vários alunos: Não.

Professora Catarina: Há outros números, é?

Vários alunos: Não.

Professora Catarina: Então temos 1, 2, 3, 4 e 5. Na outra figura, temos outros números?

M.: Não, são iguais, só que estão baralhados.

Professora Catarina: Quer dizer que estão em posições...?

Vários alunos: Diferentes.

Rapidamente, levei os alunos a entenderem que os números seriam sempre os mesmos, mas que poderiam ocupar diferentes posições nos dois braços dos V's Mágicos, como podemos verificar na transcrição anterior. Embora na planificação tivesse antecipado que primeiro iriam verificar a forma do V (letra V), os alunos começaram por referir a posição que cada número ocupava. Deste modo, guiei a conversa no sentido de reconhecerem que as imagens se assemelhavam à forma da letra V e, depressa, um aluno referiu essa constatação, embora tenha feito uma analogia inapropriada com uma sequência de crescimento.

Professora Catarina: O que é que isto vos faz lembrar? Estas duas figuras. Qualquer coisa ou não? O quê, H.?

H.: Uma sequência de crescimento.

Professora Catarina: Uma sequência, achas que é isso?

Vários alunos: Não...

Professora Catarina: Aqui, a forma. O que é que vos faz lembrar?

A.: Uma seta.

J.: Um V!

Professora Catarina: Ok, um V. Não vos faz lembrar um V? Olhem lá, como é que é o V?

Seguidamente, desafiei-os a encontrarem outras regularidades no V, no entanto, nenhum aluno se aproximava da ideia de soma igual nos dois braços, tal como tinha antecipado na planificação, referindo coisas como: “se nós virássemos o outro V ao contrário e colocássemos debaixo do outro V ia ficar um X” ou “se juntarmos, fica um W”, centrando-se na forma produzida pela disposição dos números e não nos números em si. Neste sentido, conduzi-os à ideia de que poderíamos olhar para os V's de outra forma, por exemplo, efetuando adições com os números dos braços do V's.

Professora Catarina: Mas agora vamos esquecer a forma L., o que é que há assim mais igual? Não vamos olhar para a forma. Não me interessa a forma. Dentro do V, nos braços do V, o que é que nós podemos fazer? Com estes números, podemos pegar nestes números e fazer o quê?

L.: Letras.

Professora Catarina: Não, esqueçam as letras. E se eu vos falar em somas?

L.: Eu ia dizer isso. Contas.

Professora Catarina: Muito bem, eu concordo. Contas. Contas de quê? Diz T.

T.: Eu não fiz a figura da esquerda, mas na figura da direita. Se nós *somarmos* o braço esquerdo do V e o braço direito do V, dá o mesmo resultado.

Professora Catarina: Boa! Então diz lá. O que é que eu faço?

T.: 4 mais 2 mais 3 igual a 9.

Professora Catarina: E o outro braço?

T.: 5 mais 1 mais 3 igual a 9.

Professora Catarina: Uau! Isso é verdade. E agora se fizermos neste? Digam lá, neste.

T.: Hum... Naquele, já não dá...

Professora Catarina: Ok, mas vamos ver!

A partir deste momento, os alunos identificaram que, na figura considerada “mágica”, a soma dos números era igual a 9 em cada um dos dois braços. Foi discutida esta igualdade e levantada a hipótese de ser essa a razão pela qual o V seria considerado “mágico”.

Por fim, expliquei aos alunos que teriam de descobrir diferentes V’s Mágicos, a pares, com cartões numerados de 1 a 5 e que existiam inúmeras hipóteses.

Importa salientar que na planificação, nesta parte da tarefa, tinha a intenção de desafiar os alunos a pensarem nas características dos números, nomeadamente na sua paridade. No entanto, como nenhum deles se aproximou deste conceito, optei por esperar que fossem os próprios alunos a desenvolverem essa ideia na parte do trabalho autónomo.

Trabalho autónomo

Durante o trabalho autónomo, os alunos teriam de utilizar círculos de papel numerados de 1 a 5 para descobrirem os V’s Mágicos e deveriam registá-los na folha de registo, como referido anteriormente. Nesta fase, era expectante que os alunos ainda não tivessem a noção de que a paridade dos números poderia condicionar a formação dos V’s Mágicos. Assim sendo, circulei pelos diferentes pares de modo a selecionar e sequenciar as estratégias a serem apresentadas na discussão coletiva, priorizando-as de acordo com a sua relevância para alcançar a aprendizagem pretendida.

Nesta fase da planificação da tarefa, antecipei algumas resoluções possíveis a serem desenvolvidas pelos alunos e construí questões que apoiassem o pensamento dos alunos, no sentido de olharem para as características dos números, mais concretamente para as relações entre a paridade das parcelas e a paridade da soma (Par+Par=Par; Ímpar+Par=Ímpar; Ímpar+Ímpar= Ímpar)

Assim sendo, verifiquei que ao contrário do que antecipei, inicialmente na planificação, foi necessário voltar a esclarecer a alguns pares no que consistia o V

Mágico e que poderiam trocar os números de um braço do V para o outro, como mostra o excerto seguinte.

Professora Catarina: O que é que é o V mágico para ti, L.? C., o que é que é o V mágico? Diz lá à Catarina.

L.: É um V que forma contas.

Professora Catarina: Quais contas?

L.: As que estão aqui.

Professora Catarina: Como assim? Explica lá melhor.

L.: 4 mais 2 mais 3...

Professora Catarina: Dá?

L.: 9

Professora Catarina: Então um braço já está. Dá 9. E agora?

C.: 5 mais 1 dá 6. Mais 3

Professora Catarina: Podes contar pelos dedos, não faz mal.

C.: 9

Professora Catarina: Então, o que é que aconteceu aqui?

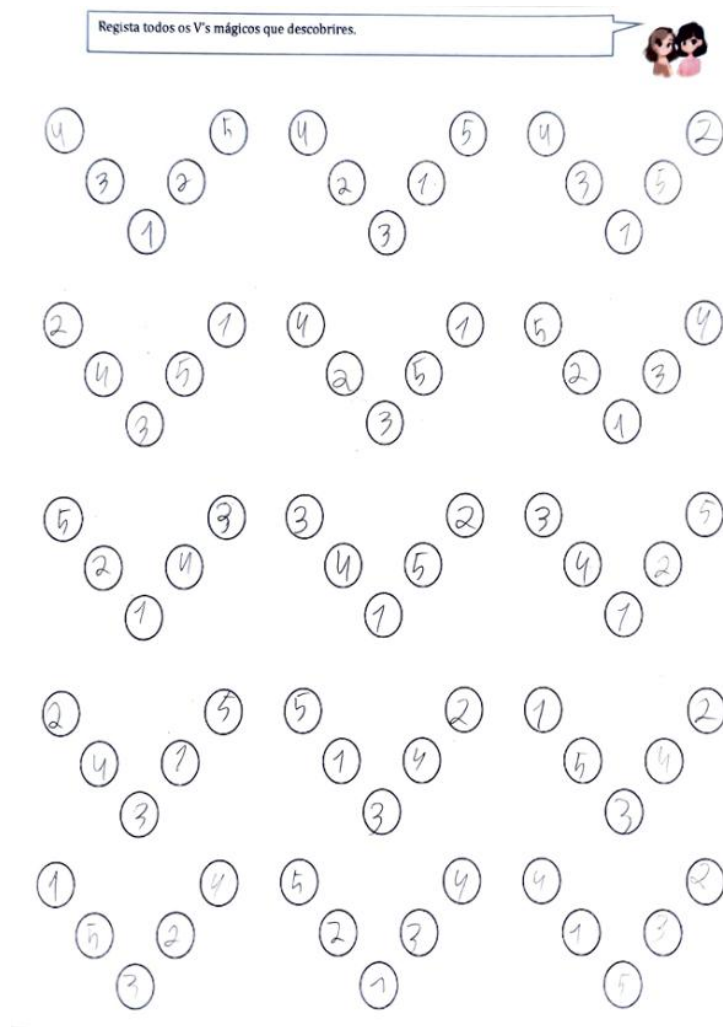
L: Tem o mesmo número.

Professora Catarina: Exato. Eu fiz este braço, deu 9. E este eu 9. E agora, eu tenho de descobrir o quê? Tenho de descobrir mais Vs mágicos, certo? Como é que eu faço isso? Tenta lá fazer outro V mágico.

Ao circular pelos grupos, fui-me apercebendo que, inicialmente, a estratégia que utilizavam para descobrir novos V's Mágicos era trocarem aleatoriamente qualquer número de posição até encontrarem as somas iguais em cada braço. No entanto, à medida que os pares continuavam a exploração, começaram a surgir novas estratégias. Neste sentido, e tal como tinha antecipado, alguns pares descobriram que quando trocavam a posição dos números do mesmo braço, obtinham outros V's mágicos e que se trocassem os números do braço direito com o braço esquerdo, obteriam, igualmente, novos V's Mágicos, como podemos observar na Figura 9.

Figura 9

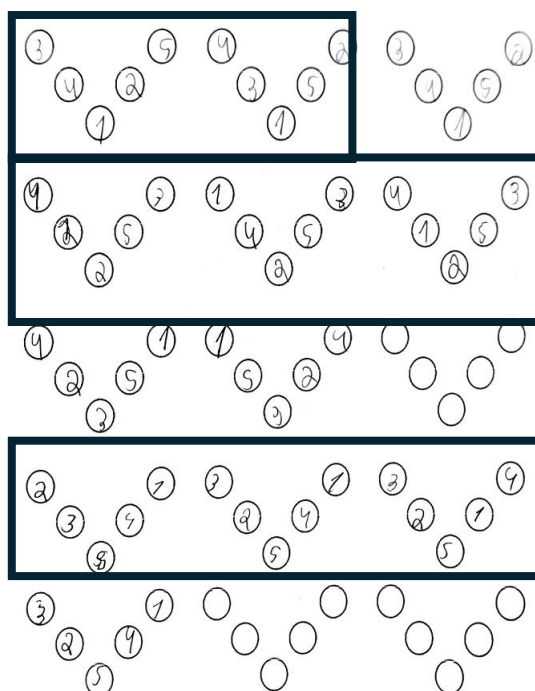
Resolução do Par SH. e A.



Outro par, tal como tinha previsto, utilizou a estratégia de ir fixando o vértice do V Mágico e ir trocando os números dos braços, de forma que a soma de um “braço” e do outro fosse igual, tal como podemos verificar na seguinte Figura 10.

Figura 10

Resolução Par L. e M.



Alguns pares, entretanto, começaram a reconhecer as questões relacionadas com a paridade dos números. O próximo excerto é um exemplo disso e onde, perante esse facto, desafio o par a verificar se com o número 2 no vértice o V resulta num V Mágico e o porquê de isso acontecer.

Professora Catarina: Que característica tem o dois?

L.S.: Ser o dobro.

Professora Catarina: É um número...?

M.A.: Par.

Professora Catarina: Pois é. Será que os números pares podem ficar aí no vértice? Pensem lá porquê.

Por fim, e tal como tinha antecipado, verifiquei que um dos pares tinha entendido que o 2 e o 4 no vértice não permitiam construir V's Mágicos. Deste modo, conduzi um diálogo de forma que percebessem que a paridade dos números das parcelas influencia a paridade da soma. O seguinte excerto mostra esse momento.

Professora Catarina: E já experimentaram com o 2?

M.L.: O 2 é impossível. Já tentámos tudo.

Professora Catarina: Com o 2 é impossível, porquê?

F.: Já tentámos tudo. Mas não sabemos.

Professora Catarina: Mas pensem lá. Porquê que é que o 2 não dá?

M.L.: Porque o 2 é par.

Professora Catarina: E isso influencia?

M.L.: Sim.

(...)

Professora Catarina: O 4 não dá porque é par. Ok. Porquê?

M.L.: Os outros são todos ímpares.

Professora Catarina: Os outros são ímpares. Isso quer dizer o quê?

M.L.: Dá para fazer com estes...

(...)

Professora Catarina: Dos dois lados dá o quê? 10? Certo, M.L.? Então aqui é ímpar, certo (vértice 5)? E vocês também têm outro com o 3 no vértice. Também é ímpar. E aqui (braço do V- 2) ? Par. E aqui (3)? Ímpar. E aqui (outro braço do V-1)? Ímpar. E aqui (4)? Par. Então vai lá olhando... M.L., vai olhando para isso e vai percebendo porque é que o 2 e o 4 não dão. (escrevo num papel)

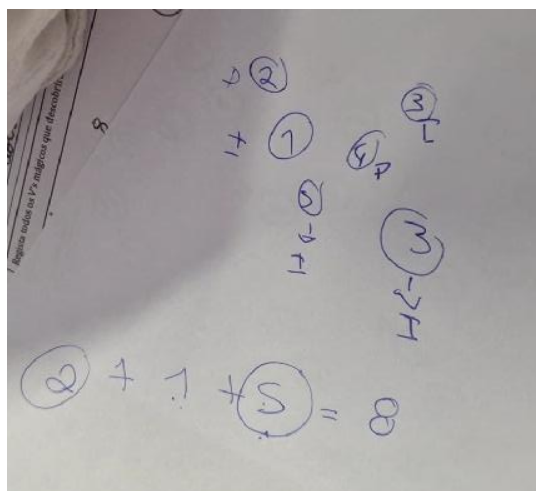
M.L.: Porque o par não dá para fazer. Depois são todos ímpares e os pares com os ímpares não dão....

Professora Catarina: Então depois tens de explicar isso, M.L.

Como se verifica, no final do excerto, houve a necessidade de passar do pensamento abstrato para o concreto, em que escrevi num papel, como mostra a Figura 11, a paridade de cada número de cada “braço”, de forma que os alunos concluíssem que existe uma relação entre a paridade das parcelas e a paridade da soma na adição.

Figura 11

Representação usada para explicar a paridade dos números dos braços e vértices dos V's Mágicos



O segundo par foi convidado, por mim, a partilhar com a turma a sua estratégia, revelando que encontraram 16 Vs mágicos. O L. explicou que, inicialmente, equilibraram as somas em cada braço do V, não referindo o vértice. Como tal, considerei importante perceber se tinha levado em conta o vértice nas somas. No próximo excerto verifica-se esta discussão.

Professora Catarina: Boa. Ok. Então, qual foi a vossa estratégia? Consegues explicar, como me explicaste há pouco, L?

L.: Pus aqui o 5 e 2 e deu-me 7 e o 3 mais 4 também dá 7.

Professora Catarina: Mas depois fizeste mais qualquer coisa aqui.... Realmente, aqui e aqui tem de dar igual, certo? Num lado e do outro. Mas, também temos de contar com este, com o 1, com o vértice. Então falta o quê?

L.: Mais 1 para cada lado.

Após este diálogo, questionei-os sobre a impossibilidade de utilizarem o 2 no vértice, levando a M.A. a concluir que isso se devia ao fato de o número 2 ser um número par. No entanto, não conseguiram encontrar uma justificação para esse número não poder estar no vértice.

De seguida, prossegui a discussão para a contagem de pares e ímpares dentro do conjunto utilizado, o que permitiu a alguns alunos, como o T., compreenderem que a distribuição dos números nos Vs, tendo em conta a sua paridade, afetava a possibilidade do equilíbrio das somas. Como tal, fui guiando a discussão, questionando os alunos se “(...) conseguiram perceber porque é que o [número] par não podia estar no vértice?” e desta maneira não conseguirem contruir um V Mágico. O L. referiu que não era possível porque com o número ímpar no vértice, sobravam dois pares e dois ímpares e no V com o número dois no vértice, apenas sobrava um número par, tornando as somas desequilibradas.

Professora Catarina: Vocês conseguiram perceber porque é que o [número] par não podia estar no vértice?

T.: Acho que sim.

Professora Catarina: Porquê?

L.: Porque havia ali 2 pares e aqui só um.

Professora Catarina: Porque aqui havia 2 pares e aqui só um deste lado. Ok. Estamos quase lá. Obrigada, amigos. Agora pode vir o grupo da M.L., explicar. Descobriram quantos Vs mágicos?

Assim sendo, validei a resposta do aluno e antes de passar para o próximo par, questionei os restantes alunos sobre se algum tinha conseguido fazer o V Mágico com

o 2 ou 4 no vértice. Como um dos pares assentiu positivamente, pedi que voltassem a efetuar as adições. Então, o par percebeu que as tinha resolvido incorretamente.

Seguidamente, pedi que o último par, a M.L. e o F., apresentasse a sua estratégia. O par referiu que a principal estratégia foi a troca de posições dos números. Como tal, pedi que mostrassem, no quadro como fizeram. No entanto, o F. ao exemplificar colocou o 4 e o 5 no mesmo braço e prontamente a H.C. apontou, que desta forma a soma dos braços ficava desequilibrada. A aluna explicou que era necessário misturar números grandes e pequenos para garantir o equilíbrio, consolidando a compreensão da necessidade de balanceamento numérico. O excerto a seguir mostra o questionamento feito por mim de maneira que os alunos entendessem o que é descrito anteriormente.

Professora Catarina: Eu tenho uma pergunta... Mais alguém colocou o 5 e 4 no mesmo braço?

H.C.: Não, não dá! Porque 4 e 5 são números muito grandes e o 2 e 1 são números muito pequenos.

Professora Catarina: Então a balança de um lado e do outro fica quê?

Vários alunos: Desequilibrada.

Professora Catarina: Olha F. o que fizeste foi interessante, porque conseguimos perceber o quê?

L.: O que não podia acontecer nos braços que é estar os números maiores num e estar os números menores noutro. Tinha de estar ali tudo misturado.

Professora Catarina: A “balança” tinha de estar o quê?

Vários alunos: Equilibrada.

Como podemos analisar no excerto anterior, validei a ação do aluno, pois, mesmo não tendo antecipado esta generalização, foi muito pertinente para as regularidades inerentes à construção dos V's Mágicos.

De seguida, continuei a discussão desafiando este par a explicar porque não é possível construir um V Mágico com o 2 no vértice. A M.L. referiu que isso devia-se ao facto de o 2 ser par. Até aqui todos os alunos tinham entendido esta ideia, no entanto havia a necessidade de explorar mais esta questão. Neste sentido, e como tinha antecipado, foi necessário guiar o pensamento dos alunos utilizando o questionamento. Comecei por dar um exemplo de um V (3-2-4-5-1) com o 4 (número par) no vértice. A M.L., rapidamente mencionou que não era possível. Desta forma, questioneei-a “porquê?” e a aluna continuava sem conseguir explicar. Assim sendo, conduzi a análise

da paridade de cada número do V e os alunos começaram a formular conjecturas, tal como podemos verificar no próximo excerto.

Professora Catarina: O que está aqui a acontecer? Nós temos $1+5+4$ e a seguir temos $2+3+4$. O 4 no vértice. Aqui temos ímpar+ímpar+par.

ML: Porque ímpar+ímpar é par...Hum

Professora Catarina: Então, o que dá ímpar + ímpar?

Vários alunos: Par.

F: E par+par é ímpar.

T: 4 mais 2 é 6, então é par.

Professora Catarina: E aqui? o 2 é?

Vários alunos: Par.

Professora Catarina: E o 3?

Vários alunos: Ímpar.

Professora Catarina: E o 4?

Vários Alunos: Par.

Professora Catarina: Quanto é que dá isto? Diz lá, T.

T.: Ímpar.

Professora Catarina: Porque Par + Ímpar dá?

T.: Ímpar. E ímpar mais par, dá ímpar.

De seguida, reforcei o que tinham acabado de descobrir.

Professora Catarina: Então...Eu tenho aqui um par (soma de um braço) e tenho aqui um ímpar (soma de outra braço). Isto é igual?

Vários alunos: Não.

Professora Catarina: Então dava com o 4?

Vários alunos: Não!

Depois, troquei os números dos “braços” (2-1-4-3-5) e efetuei a mesma dinâmica e alguns alunos continuaram sem entender a relação entre a paridade das parcelas e a paridade da soma na adição. Então, representei os números, no quadro, por pauzinhos e fui efetuando grupos de dois, por exemplo, $|||||$ (5) + $|$ (1) + $|||$ (3), em que , agrupando os pauzinhos das parcelas iria sobrar por serem número ímpar. Contudo, alguns alunos ainda não tinham percebido bem o significado de número par e de número ímpar. Deste modo, pedi a alguns alunos para irem à frente do quadro dançar a pares como é visível na Figura 13 e comecei o seguinte diálogo:

Professora Catarina: Ok. Se eu quiser agrupar as pessoas para dançar, como é que eu faço?

T.: Duas pessoas, dá um par.

Professora Catarina: Este vai-se juntar a quem?

T.: Ao do lado.

Professora Catarina: Mas este número é quê (2)?

Vários alunos: Par.

Professora Catarina: E este aqui (3)?

Vários alunos: Ímpar.

Professora Catarina: Mas se sobrou um aqui, eu posso juntar a quem?

Vários alunos: Ao do lado.

L.: Dá par!

Professora Catarina: E este número é quê (3)?

Vários alunos: Ímpar.

Professora Catarina: Mas olhem, o que é que aconteceu aqui?

T.: Sobrou mais dois.

Professora Catarina: Sobrou alguém para dançar?

Vários alunos: Não.

Professora Catarina: Toda a gente tem o quê?

Vários alunos: Par.

Professora Catarina: Então vocês acham que esta soma vai dar o quê?

Vários alunos: Par!

Figura 13

Alunos a representarem a noção de par e ímpar



Deste modo, a turma percebeu que sempre que o vértice era um número par, o equilíbrio das somas não era possível devido à distribuição de paridade nos braços e que existia uma relação entre a paridade das parcelas e a paridade da soma na adição.

Sistematização

Para a sistematização das aprendizagens, elaborei uma Ficha de Trabalho que realizei em conjunto com a turma, a qual os alunos coloram no caderno (Figura 14).

Figura 14

Ficha de Trabalho para sistematização das aprendizagens

Preenche os espaços com par ou ímpar:

par+ímpar+ímpar=_____

ímpar+ímpar+ímpar=_____

par+par+ímpar=_____

ímpar+ímpar+ímpar=_____

ímpar+ímpar+ímpar+ímpar=_____

par+ímpar+ímpar+ímpar+ímpar=_____

Concluindo....

A adição de dois números pares é um número par.

par+par=____

A adição de dois números ímpares é um número par.

ímpar+ímpar=____

A adição de um número par com um número ímpar é um número ímpar.

par+ímpar=____

Com a realização da ficha pude compreender que os alunos adquiriram a aprendizagem pretendida, no entanto foi necessário reforçar o conteúdo em questão.

2.1.2. Tarefa 2- Sequência dos Múltiplos

A segunda tarefa designa-se por Sequência dos Múltiplos e foi planeada com a duração de uma hora e cinquenta minutos dividida nas seguintes etapas:

1. Apresentação da tarefa (10 minutos)
2. Trabalho autónomo (40 minutos);
3. Discussão coletiva (30 minutos);
4. Sistematização das aprendizagens (30 minutos);

O principal objetivo da tarefa era que os alunos identificassem regularidades na sequência de repetição, mais concretamente, recorrendo a múltiplos de 2 e de 4. A Tabela 5 apresenta os objetivos da tarefa segundo as as Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática (Canavarro et al., 2021).

Tabela 5

“Sequência de múltiplos”, de acordo com as AE de Matemática

Domínio	Tópico	Subtópico	Objetivos de Aprendizagem
Capacidades Matemáticas Transversais	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar	Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
		Justificar	Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
	Comunicação matemática	Expressão de ideias	Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
		Discussão de ideias	Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos
	Representações matemáticas	Representações múltiplas	Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
			Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas
Álgebra (3.º ano)	Regularidades em sequências	Sequências de repetição	Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
			Identificar e descrever o grupo de repetição de uma sequência.
Números (2.º ano)	Relações numéricas	Factos básicos da multiplicação e sua relação com a divisão	Identificar e descrever o grupo de repetição de uma sequência.
			Descrever, em linguagem natural, a regra de formação de uma sequência de repetição, explicando as suas ideias
Números (2.º ano)	Relações numéricas	Factos básicos da multiplicação e sua relação com a divisão	Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuadas do 2 e do 4) e sua relação com a divisão. (múltiplos)
			Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuadas do 2 e do 4) e sua relação com a divisão. (múltiplos)

Para a realização desta tarefa, construí uma ficha de trabalho, tal como se pode verificar na Figura 15, em que as questões foram elaboradas de maneira a conduzir os alunos para a identificação da regra de formação da sequência de repetição. Neste caso, os alunos, teriam de recorrer aos múltiplos de 2 e de 4 utilizando a relação entre multiplicação e divisão, para encontrarem a lei de formação:

- Os círculos brancos são os múltiplos de 2, mas não são múltiplos de 4, e os círculos azuis são os múltiplos de 4, mas também são múltiplos de 2.

-Os triângulos brancos são os múltiplos de 2, mas não de 4, menos um (ex: figura 18 é múltiplo de 2 e não de 4, então a figura 17 é $18-1=17$)

- Os triângulos brancos são os múltiplos de 2 e de 4 mais um (ex: a figura 28 é múltiplo de dois e de quatro, logo a figura 29 é $28+1=29$)

-Os triângulos azuis são os múltiplos de 2 (apenas do 2 e não do 4) mais um (ex: a figura 26 é múltiplo de 2 e não de 4, logo a figura 27 é $26+1=27$)

- Os triângulos azuis são os múltiplos de 2 e de 4 menos um (ex: a figura 20 é múltiplo de 2 e de 4, logo a figura 19 é $20-1=19$)

Figura 15

Ficha de trabalho – tarefa sequência dos Múltiplos

Nomes: _____ N.º _____ Data ____/____/2024

Lê cada questão antes de responderes e verifica as tuas respostas.



1. Observa a sequência de repetição seguinte que continua sempre com a



1.1. Desenha a 11.ª figura da sequência.

1.2. Rodeia o grupo de repetição da sequência.

1.3. Indica qual será a 28.ª figura da sequência.

1.4. E qual será a 34.ª figura da sequência?

1.5. Indica a 47.ª figura da sequência.

1.6. Indica a 101.ª figura da sequência.

1.7. A figura número 135 pode ser um círculo? Justifica a tua resposta.

1.8. Como podes descobrir a posição de cada uma das figuras da sequência? Explica as tuas ideias.

Introdução

Na parte da introdução comecei por projetar a ficha de trabalho e questioneei a turma sobre aquilo que estavam a ver. O seguinte excerto, mostra essa interação

Professora Catarina: Já tinham visto isto ou não? O que é que é isto aqui?

A.: Sequência.

M.L.: Crescimento.

Professora Catarina: Crescimento ou será que é de repetição?

A.: Não, é sequência de repetição.

Professora Catarina: E porquê é que é uma sequência de repetição? Há aqui qualquer coisa que está sempre a...?

Vários alunos: Repetir.

De seguida, li as questões e esclareci as dúvidas dos alunos, sendo necessário guiar a conversa de forma que os alunos entendessem o que era o grupo de repetição. Ainda podemos verificar, no excerto a seguir, que o aluno T. questiona, pertinentemente, se as figuras coloridas contam como uma nova, e onde eu valido a sua questão e a esclareço.

Professora Catarina: Segunda questão “*Rodeia o grupo de repetição da sequência*”. O que é que é o grupo de repetição?

M.L.: É o grupo que repete.

Professora Catarina: É o grupo está a ...?

Vários alunos: Repetir.

Professora Catarina: Sim, diz lá, T..

T.: As figuras azuis também contam como outra figura?

Professora Catarina: Figura 1. Figura 2...

T.: O triângulo azul e o triângulo que não têm nada por dentro é como se fosse uma figura diferente?

Professora Catarina: Sim. Isto é a figura 1. Isto é a figura 2. Isto é a figura 3. Isto é a figura 4. Isto é a figura 5. Percebeste T.?

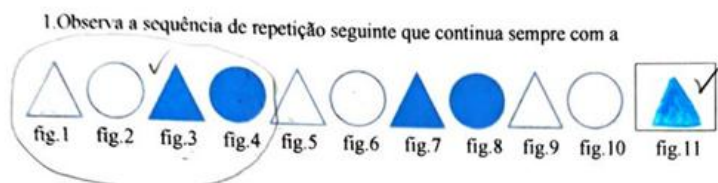
T.: Sim.

Trabalho autónomo

Durante o trabalho autónomo, fui circulando pelos vários pares ou grupos, colocando questões e procurando perceber os seus raciocínios. Inicialmente, verifiquei que todos responderam que a 11.^a Figura seria um triângulo azul e o grupo de repetição seria triângulo branco, círculo branco, triângulo azul e círculo azul, tal como podemos verificar na Figura 16.

Figura 16

Questão 1.1. da ficha de trabalho



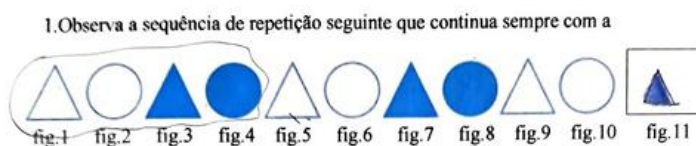
1.1. Desenha a 11.^a figura da sequência.

1.2. Rodeia o grupo de repetição da sequência.



1.1. Desenha a 11.^a figura da sequência.

1.2. Rodeia o grupo de repetição da sequência.



1.1. Desenha a 11.^a figura da sequência.

1.2. Rodeia o grupo de repetição da sequência.



1.1. Desenha a 11.^a figura da sequência.

1.2. Rodeia o grupo de repetição da sequência.

Nestas questões, não surgiram dúvidas, no entanto, nas seguintes questões os alunos demonstraram mais dificuldades, nomeadamente em encontrar uma lei de formação para esta sequência de repetição, recorrendo, de um modo geral, a contagens, tal como podemos analisar no excerto seguinte e na Figura 17.

Professora Catarina: Vá, então faz lá. Conta lá, como fizeste. Mas porquê é que chegaste aqui ao vinte?

I.: Nós nas outras contámos assim um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito...

Professora Catarina: Ah, foi assim?

L.E.: Sim, porque assim era mais fácil.

Professora Catarina: Ah, então vocês contaram. Ok. E como é que fizeste com o cem? É isso que eu não estou a perceber.

I.: O cem ela pegou no quarenta e sete e contou até o cem.

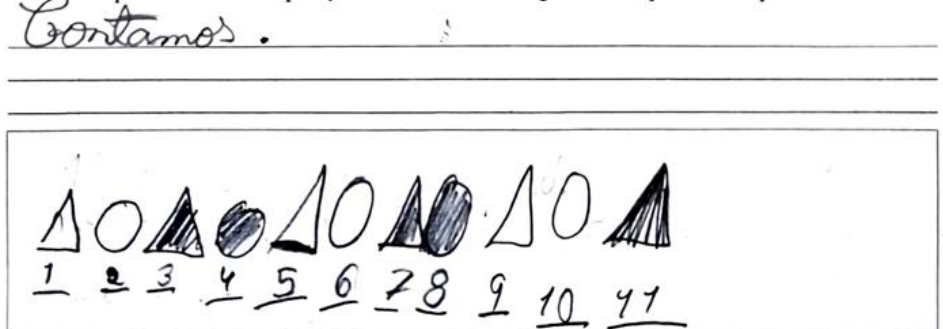
Professora Catarina: Ah, vocês contaram. Está bem, pronto, é isso. Foi isso que fizeste?

L.E.: Sim, mas imagina, nós vamos do vinte e oito e depois continuamos a contar, para o trinta e quatro e depois para o quarenta e seis.

Figura 17

Resolução da questão 1.8 pelo Par M.L. e F.

1.8. Como podes descobrir a posição de cada uma das figuras da sequência? Explica as tuas ideias.



Para além das contagens, e tal como tinha antecipado, alguns pares relacionaram as figuras pelo último algarismo, por exemplo relacionam a figura 28 com a 8, pois terminam no algarismo 8. O excerto a seguinte confirma essa ideia mostrando como tentei evidenciar que essa estratégia não funciona, dissuadindo o par da crença de que tudo o que fizeram estava errado, pois uma das alunas mostrava bastante

insegurança na área da matemática revelando, diversas vezes, frustração quando confrontada com o erro .

Professora Catarina: Boa. Então e porque é que a 28ª é um círculo azul?

H.C.: Porque termina em 8 e é o número par.

Professora Catarina: Ah! Ok. Mas e agora, por exemplo, tu dizes que termina em 8 e é o 28, é isso?

H.C.: Sim.

Professora Catarina: Ok, mas vamos à 34.ª. Vamos contar a partir do 28...29, 30. Começa de novo, não é (grupo de repetição)?

H.C.: Começa aqui (triângulo branco).

Professora Catarina: Ah...Qual é a seguir?

H.C.: Esta (círculo branco) .

Professora Catarina: Ah! 28, 29, 30.

H.C.: 31,32,33. Não estou a entender, para mim estava certo.

Professora Catarina: Então espera. H.C., tu dizes que termina em 8, é o 28. Vamos ver o 34.

H.C.: Então está errado... Temos de apagar tudo...

Professora Catarina: Não está errado, amor, ouve lá. É que essa estratégia é que não resulta. Não quer dizer que esteja tudo errado. Vamos ao 34, mas vamos partir da 28, certo? 28. Vamos ver se resulta a estratégia que estás a dizer. Termina em 4, supostamente é esta, não é? Mas vamos ver se é verdade. (contagem). Não é, H.C.

Outro par, conforme tinha previsto na planificação, estabeleceu uma relação entre a figura 20 e a figura 10, pelo último algarismo, que é 0. A partir dessa associação, contaram oito figuras para a frente, o que os levou a uma conclusão incorreta. No entanto, naquele momento, não percebi que era essa a lógica que estavam a seguir, como se pode verificar no excerto que se segue.

Professora Catarina: Então, como é que chegaram à figura 28?

A.: Estava aqui no 8...

Professora Catarina: Porque é que comesas daqui?

A.: Porque acaba em 8.

Professora Catarina: Ah, porque acaba em 8.

A.: Sim.

Professora Catarina: Mas isso não resulta sempre... E se eu disser que isso não resulta sempre?

A.: Depois eu ponho, depois eu conto mais 10 e dá uma sem nada (círculo branco). Depois mais 10.

Professora Catarina: Então conta lá mais 10... 18.

A.: Não, não é isso.

Professora Catarina: Ah.

A.: É que tu fazes mais 10...18.

Professora Catarina: Ah e o 18 é aqui?

A.: Não, o 18 é sem pintar (círculo branco).

Professora Catarina: Porquê? Porquê? É isso que eu não estou a perceber, SH., explica lá.

A.: O 8 foi mais 10 dá 18.

Professora Catarina: Porque é que mais 10 dá 18 que eu não estou a perceber?

A.: Porque 8 mais 10 dá 18.

Para além destas estratégias, começaram a surgir outras relacionadas com a paridade dos números (Figura 18), algo que não tinha antecipado e que foi trabalhado apenas na tarefa anterior.

Figura 18

Resolução da questão 1.7 pelo par M.F. e T.

1.7. A figura número 135 pode ser um círculo? Justifica a tua resposta.

A figura número 135 não pode ser um círculo porque os círculos são números pares

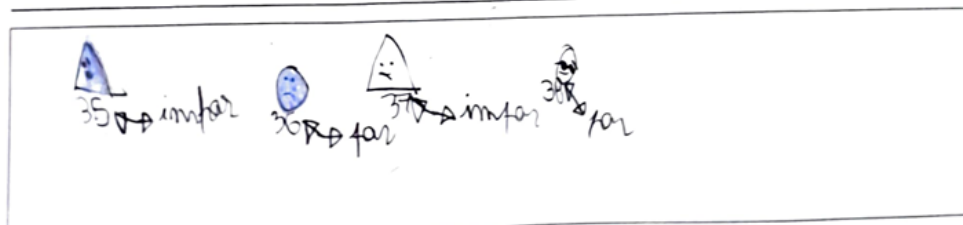
Na Figura 18 podemos perceber que o par reconhece que os círculos são sempre número par. Já na Figura 19, o par entendeu que os triângulos correspondem a números ímpares e os círculos a números pares, no entanto não têm em atenção que as figuras ímpares dependem das figuras que são múltiplos de 2 ou de 2 e de 4, para serem triângulo azul ou branco.

Figura 19

Resolução da questão 1.8 pelo par M.A. e L.S.

1.8. Como podes descobrir a posição de cada uma das figuras da sequência? Explica as tuas ideias.

Eu para descobrir mas depende se tá par ou ímpar, como a figura 35 é um triângulo azul e ímpar



No seguinte excerto, verifica-se um diálogo em que guio o pensamento dos alunos para a paridade dos números das figuras sendo que, como no exemplo anterior, existem pares que são apenas múltiplos de 2 e pares que são múltiplos de 2 e de 4.

Professora Catarina: Olhem lá para os números, o que é que eles têm em comum? Os triângulos são o quê? 1, 3, 2, 4. O que é que eles têm em comum, S.? Os triângulos são o quê? Números quê?

H.C.: Números pares.

Professora Catarina: Ah, e estes ?

H.C.: Mas foi esse que eu também fiz.

Professora Catarina: Está bem, amor, mas vamos pensar. Mas tu tens aqui mais do que um número par, certo? E mais do que um número ímpar. Portanto, eu não posso dizer qual é que é. Se eu tivesse assim, olha. Se eu tivesse assim, par e ímpar (triângulo branco e círculo branco). Eu podia dizer que qualquer bolinha, como vocês dizem, era ímpar, certo? Eu podia dizer que qualquer triângulo era par.

Ou ao contrário, ímpar, par, certo? O problema aqui é que eu tenho mais que um ímpar e um par. E agora eu tenho de distinguir estes ímpares e estes pares. Sabes como, H.C.? Posso te ajudar? Posso? Então olha para aqui. Pronto. Os ímpares é difícil, mas vamos olhar para os pares que temos aqui. Dois. Um, dois, três, quatro, cinco, seis. Sete, oito, nove, dez. Onze, doze, treze, catorze. Olha lá para o dois, para estes pares. Se for à tabuada do dois...

H.C.: Não sei.

Professora Catarina: Sabes sim. S., pensa lá comigo. E se eu for à tabuada do dois e do quatro? Assim já consigo descobrir qualquer coisa, ou não? Pensa lá.

S., ajuda lá a H.C. Aqui serão que números? Que números serão aqui? Os pares, o quê? Que números serão aqui? E aqui? Aqui é o quê? Aqui é a tabuada do quê?

S.: Do 2.

Professora Catarina: E aqui?

S.: Do 4.

Ao continuar a circular pelos pares, e tal como antecipado, compreendi que duas alunas começaram a aproximar-se do conceito de múltiplo, ao referirem que contaram de 4 em 4, uma vez que o grupo de repetição era constituído por quatro figuras. No entanto, a aluna não conhecia formalmente o conceito de múltiplo, o que evidenciou a necessidade de o clarificar, sobretudo tendo em conta as fragilidades da turma na área da Matemática. O seguinte excerto reflete esse momento.

H.: A nossa estratégia... Não foi contar isto tudo

Professora Catarina: Sim.

H.: Foi contar pelo menos 4.

S.: Sim. Pelo menos na tabuada do 4 até chegarmos ao resultado.

Professora Catarina: Uau, a tabuada do 4 porquê?

H.: Porque a tabuada do 4... porquê? Isto aqui termina em 4 (grupo de repetição).

Professora Catarina: Certo, certo.

H.: Então, é a tabuada. Então, podes contar de 4, 8, 12, 16.

Professora Catarina: Ok, então estes vão ser o quê do 4? Sabes o que é que são múltiplos?

H.: Os múltiplos, é a multiplicação.

Professora Catarina: Está na tabuada do 4, certo? Estes são todos os números que estão na tabuada do... 4. Os produtos do 4...1 vezes 4, 4. 2 vezes 4, 8. Vai ser o 8...

H.: 16, 24...

Professora Catarina: Exato, é isso que estás a dizer.

Mais tarde, com o mesmo par, guiei o diálogo seguinte no sentido de compreenderem que os círculos seriam os múltiplos de 2, mas que apenas os círculos brancos seriam múltiplos de 2 e os azuis de 2 e de 4.

Professora Catarina: Isso é um bocado difícil assim. Tu estás-me a dizer que estes são todos os que?

H.: São os múltiplos.

Professora Catarina: De...?

H.: Do 4.

Professora Catarina: Do 4. Ok. E aqui?

H.: Do 2.

Professora Catarina: Eu às vezes tenho, por exemplo, aqui do 2 é o 6, certo?

H.: Sim.

Professora Catarina: E aqui? É do 4 também? É o 8. Mas olha lá, esta também está na tabuada do 2?

H.: Está.

Professora Catarina: Ah. Ok.

H.: Dois, um dois, três quatro, seis, dois, quatro, seis, oito. Já do 4 não. A do 4, como é um valor maior do que o 2, não dá o mesmo resultado que o do outro.

Por fim, observei que um dos pares verificou que os múltiplos de 2 com 0 no algarismo das unidades (10,30,50,70, etc.) correspondiam aos círculos brancos e que os que os múltiplos dos números 2 e 4 com 0 no algarismo das unidades (10,30,50,70,etc.) correspondiam ao círculo azul, como mostra a Figura 20.

Figura 20

Resolução da questão 1.8 pelo par M.A. e L.S

1.8. Como podes descobrir a posição de cada uma das figuras da sequência? Explica as tuas ideias.

A saber que 20, 40, 60, 80, 100, 200 + 100
repete + 100 por círculo branco e 10, 30, 50, 70, 90, 150 + 100
repete + 100 por círculo branco.

fig 10 0	fig 30 0	etc
fig 200	fig 400	

fig 100	1000
1500	2500
fig 200	2000

Esta foi uma estratégia que não tinha previsto, e por isso revelei alguma dificuldade em entender o raciocínio dos alunos. De seguida, validei a estratégia, pois referiam-se a múltiplos, embora, como no par anterior, não estivessem cientes do conceito de múltiplo. Contudo, guiei a conversa, sem ter previsto esta ideia e recorri aos divisores, tentando que os alunos chegassem ao conceito de múltiplo através da operação inversa da multiplicação, tal como podemos constatar no seguinte excerto, porém, a abordagem adotada não produziu os resultados esperados.

Professora Catarina: Este é par, este é par. Estes não pares? Acabam em zero. É que tu tens uma coisa bem. Só que é assim, estes números pares (círculos azuis), se dividimos, por exemplo, por 2, dá? E se dividimos por 4 também?

T.: Dá.

Professora Catarina: Resto zero. E estes (círculos brancos)? Dividimos por 2?

T.: Resto 0.

Professora Catarina: E por 4?

T.: Já não dá resto zero.

(...)

Professora Catarina: E agora? E agora? Quais são aqui os que dão pelo 2 e os que dão pelo 4 e pelo 2?

T.: Estes. Os que estão pintados dão pelo 4 e pelo 2. Os que não estão, só dão pelo 2?

(...)

Professora Catarina: Então, o 20 é o quê da tabuada do 2? Sabes o que é um múltiplo? O que é que são os múltiplos? Já percebemos que há uns que dão para dividir só por...

T.: 2.

Professora Catarina: Então o círculo branco é só...

T.: Por 2.

Professora Catarina: E este?

T.: Por 2 e por 4.

Discussão coletiva

Nesta fase da tarefa, e após ter selecionado, com base numa grelha (Figura 21), a ordem dos pares que iriam apresentar, convidei-os a partilharem as suas estratégias. Como tal, pedi ao par H. e S. que identificasse o grupo de repetição e as figuras 11 e a 28 da sequência. Entre cada resposta das alunas, senti necessidade de questionar a turma se concordavam com as colegas, sendo que alguns alunos responderam negativamente, dando oportunidade para esclarecer dúvidas e corrigir eventuais erros dos pares, tal como podemos verificar no próximo excerto.

Professora Catarina: Toda a gente concorda que a figura 11 é o triângulo com cor?

Alguns alunos: Sim.

Outros alunos: Não.

Professora Catarina: Não? Então qual é que é?

T: Eu acho que é o triângulo sem cor.

Professora Catarina: Esta aqui não é o triângulo com cor? É qual?

Turma: É o triângulo com cor... enganei-me.

Professora Catarina: Ah, então tomem atenção.

Figura 21

Grelha de identificação de estratégias de resolução para seleção dos grupos

	Luc e Mada	José e Hen	Mia e Francis	Lena e Sofi	Lour e Camil	Shree e Ale	Leon e Inês	Migu e Tia	Gon e Dinis	Marg e Alana
Os alunos contam as figuras.	X						X			
Os alunos relacionam a figura 28 com a 8, pois terminam no algarismo 8.				X		X				
Os alunos relacionam a figura 20 com a 10, pelo último algarismo ser 0, erradamente, e contam mais 8 figuras para a frente.			X							
Recorrem à regularidade										
						De 1 a 10 por				
										Contam a 10 por

No decorrer da discussão dei liberdade aos alunos para participarem e interagirem com os pares que estavam a apresentar as suas estratégias, contudo senti necessidade de explicar à turma que não seria adequado desvalorizar as estratégias, mas sim tentar mostrar o seu ponto de vista de forma respeitosa. No próximo excerto podemos constatar esse facto.

Professora Catarina: Então, meninas, e a figura 28, qual é?

HC: É...

Professora Catarina: Podem dizer sem medo, vá.

HC: A gente fez 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Vários alunos: Está errado.

Professora Catarina: Não digam que está errado. Expliquem só porque é que não concordam. Olha, elas não concordam.

De seguida, continuei a discussão pedindo a uma aluna que explicasse o motivo de a maioria da turma não ter concordado com a maneira como o par estava a contar a

sequência até chegar à figura 28 não respeitando o grupo de repetição, tal como podemos verificar no seguinte excerto.

Professora Catarina: Ah, mas calhou. Mas elas contaram bem a sequência?

Turma: Não.

H.C: Mas afinal a S. não fez assim.

Professora Catarina: Não faz mal. Enganaste-te. Porquê? Quem é que quer explicar porquê? M.L., porquê que é que daqui não podemos passar para aqui (do triângulo azul para o triângulo branco)?

M.L.: Porque é um triângulo azul.

Professora Catarina: Porquê?

M.L.: Depois do triângulo azul é um círculo azul.

Professora Catarina: Ou seja, a seguir ao triângulo...?

M.L.: Azul.

Depois, sugeri aos alunos que a estratégia de contar, como o par anterior fez, não seria a mais adequada, apesar de ser válida e mais fácil para números menores, como se pode verificar no seguinte excerto.

Professora Catarina: Olhem a contar está certo, mas tinham de contar bem. Porque senão estavam a fazer mal o grupo de repetição.

HC: Eu tinha-me enganado, mas a gente fez bem.

Professora Catarina: Olha, assim está bem, a contar. Certo? Mas é mais quê?

A: Fácil

Professora Catarina: Então e se eu quiser a figura 300 e 40 e qualquer coisa, a contar...

HC: 1, 2, 3, 4.....

T: Ia demorar uma eternidade.

Professora Catarina: Ah, então olhem, contar é uma estratégia, mas é mais difícil se eu quiser números grandes, certo? Obrigada. Podem ir. Obrigada, mas isso é uma estratégia.

Após apoiar a estratégia apresentada pelas alunas, pedi a outros pares que partilhassem as suas, apesar de ter percebido que não conduziam à solução adequada. Fi-lo com o intuito de os levar a compreender a importância de explicitar os seus raciocínios e de perceberem por que motivo certas estratégias não resultam como esperado. No caso do par M.L. e F. contaram de 10 em 10 a partir da figura 10 e no caso do par SH. e A. recorreram aos números com o mesmo algarismo no final, como se pode constatar no seguinte excerto.

F: Nós fizemos 10 mais 10 é 20 e 10 mais 20 é 30. E depois, já que o 10 é o número par e é uma bolinha sem nada, nós fizemos, contar 10 mais 10 é 20. Depois nós viemos aqui e acrescentámos 8 e fica uma bolinha azul.

Professora Catarina: Ok. E agora vamos para o 34.

F: 34. 10 mais 10 e mais 10, mais 4.

M.L: E dá o quê?

F: Nós tínhamos visto que era uma bolinha azul, mas estava errado.

Professora Catarina: Ah. Então, a vossa estratégia de 10 mais 10 funciona?

F: Não funciona.

(...)

Professora Catarina: Não funciona. E aquela estratégia de, por exemplo, o A e SH estavam a dizer e outros amigos também disseram? O 34 é porque a figura 4 acaba em 4. Resultou?

A: Não.

Professora Catarina: Pronto. E depois contaram e perceberam que estava...?

F: Errado.

Professora Catarina: Pois. Pronto, já percebemos que aquela estratégia também não resulta. Obrigada, amigos. Pronto. É só para vermos que esta não resultou, não foi?

A seguir, convidei um par a apresentar a sua estratégia de contar de 4 em 4, pois este par aproximava-se do conceito de múltiplos, que era o objetivo da tarefa, e como tal guiei a conversa nesse sentido sendo necessário relembrar que contar de 4 em 4 correspondia ao grupo de repetição, tal como se verifica no seguinte excerto.

H: A minha estratégia era dos múltiplos. A sequência era esta (grupo de repetição), estava certa.

Professora Catarina: Era o grupo de?

H: Repetição.

Professora Catarina: Repetição. Está tudo de acordo, certo?

Turma: Certo.

Professora Catarina: Certo.

H: Então, nós podemos, por exemplo, chegar ao 28. Nós podemos contar assim, 4, 8, 12, 16, 20, 24.

Professora Catarina: Esses números que tu estás a dizer, onde é que os encontras?

H: Nos múltiplos do 4.

Professora Catarina: O que é que são os múltiplos do 4?

H: Os resultados do 4.

Professora Catarina: Da?

H: Da multiplicação do 4.

Em seguida, convidei outro par a apresentar a sua estratégia, que consistia em reconhecer que os triângulos correspondiam sempre a números ímpares e os círculos a números pares. Com esta partilha, procurava conduzir os alunos à ideia de que, sendo dois os elementos pares e dois os ímpares, seria necessário encontrar uma forma de identificá-los corretamente na sequência. Deste modo, conduzi o pensamento dos alunos nesse sentido, como mostra o excerto a seguir.

Professora Catarina: Pronto. Está-nos a faltar aqui qualquer coisa. Não está? Mas tu já estás a chegar ao caminho H., muito bem. Obrigada pela tua estratégia. Aqui o L.S. e a M.A. também querem partilhar alguma coisa, ou não? O que é que descobriram aqui nas figuras?

LS: O triângulo é sempre par e o círculo é sempre ímpar.

Professora Catarina: Pois, mas temos aqui um problema, ou não? Imaginem que eu quero o número 39. Ups, tenho aqui dois ímpares. Como é que eu sei que destes dois é o 39? Como é que eu sei? 48. Como é que eu sei? Tenho aqui dois pares. Como é que eu sei qual destes dois qual é o 48? T. tu consegues ajudar-nos? Então chega aqui. Ouçam o T. O T. vai ajudar-nos. Ai M. desculpa. Tu também. Tu também, M. Tu sabes o que aconteceu aí... Desta sequência, ou não?

Como se pode verificar no excerto anterior, e tal como tinha selecionado, convidei o par que mais se aproximou do conceito de múltiplo, embora eu tivesse levado os alunos a pensarem na operação inversa da multiplicação. O par explicou que inicialmente tinha contado, mas que a partir do 101 iria demorar muito até ao 135 e como tal tentaram encontrar outra estratégia. No entanto, essa estratégia também iria demorar e por isso tentaram utilizar a estratégia que lhes sugeri de dividir os números pares por 2 e por 4. Neste caso, pedi ao aluno T. que desse um exemplo para ficar mais claro para a turma, como se pode observar no próximo excerto.

Professora Catarina: Então dá lá um exemplo. Ouçam. O T. está a dizer que todos estes números aqui são pares, certo?

T: Sim.

Professora Catarina: E o que é que acontece a estes números?

T: Este só dá para dividir por dois (36) , mas este dá para dividir por dois e por quatro.

Professora Catarina: E este dá para dividir por dois e por quatro?

T: Sim.

Professora Catarina: O que é que é este dividir por dois e por quatro? Qual é o resultado da divisão? O resto? Tem de dar sempre?

T: Zero.

Professora Catarina: E nestes realmente dá, certo?

T: Sim.

T: Só que se fores tenta dividir este por quatro (38) já não vai dar. Este zero.

Professora Catarina: Sim, amor. Tem de ser sempre a dividir por?

T: Dois.

Professora Catarina: E aqui é por dois e?

T: Por quatro.

De seguida, perguntei se a turma estava a perceber e ficaram todos em silêncio o que me levou a desafiar os alunos a testarem um exemplo, em conjunto. Neste caso, apenas o aluno T. foi respondendo às minhas perguntas. Dei o exemplo do número 39 perguntado qual o número par mais próximo, que seria o 38 e o aluno T. respondeu corretamente referindo que de seguida iria procurar na tabuada do 2 o número 38. Assim, o aluno referiu que como o número 38 se encontrava na tabuada do 2 e o resto da divisão por 2 seria 0. Depois, guiei a discussão no sentido de o aluno T. entender que faltava verificar a divisão pelo número quatro e lembrei que queríamos encontrar a 39.^a figura, sendo que o T. muito prontamente entendeu que *“era andar uma figura para a frente”*, como se verifica no seguinte excerto.

Professora Catarina: Ok, então este 38 vai estar aqui... Olhem, o 38 dá para dividir pelo dois e pelo quatro. Quer dizer que ele está na tabuada de que números?

T: Do 4 e do 2.

Professora Catarina: Do 4 e do 2.

T: Sim.

(....)

Professora Catarina:Então o 38 é aqui?

T: Sim.

Professora Catarina: Ok. Mas eu quero o 39?

T: Andas um para a frente.

A seguir, testei com os alunos a figura 34 e procurei explorar a ideia de múltiplos, pedindo ao T. que explicasse o conceito, ao qual referiu que *“um múltiplo é o resultado*

da tabuada”. No seguimento da discussão, perguntei ao T. se a 34.^a figura seria um múltiplo de 4, o qual respondeu negativamente dizendo que na tabuada do 4 não existe o 34 e que por isso a figura seria um círculo branco. De seguida, perguntei à turma se concordavam que a 34.^a corresponde ao círculo branco e alguns alunos responderam positivamente.

Nesta fase da discussão coletiva, senti que a turma ainda não tinha percebido as regularidades da sequência e como tal pedi ao aluno M. que explicasse como encontrou a figura 47. Alguns alunos sugeriram começar a contar a partir da 34.^a figura, no entanto, o aluno T. referiu que seria mais fácil ir pelo número par 46. O seguinte excerto verifica essa interação.

T: Eu até concordo em fazermos com o triângulo, mas acho mais fácil começarmos pelo par. Que é este (46).

Professora Catarina: Ok. Qual é?

T: É um dos dois. É o número quarenta e sete... Fingimos que é quarenta e seis..

Professora Catarina: Quarenta e seis. Ok. O que é que eu vou fazer agora com o quarenta e seis?

T.: Vais procurar nas tabuadas do dois e do....

M.: quatro.

Professora Catarina: Sim, então... Ajudem os amigos.

T.: Na tabuada do quatro não aparece.

Professora Catarina: Então digam-me o que é que eu vou fazer?

T.: Então tem de ser aqui (círculo branco).

Professora Catarina: Tem de ser aqui, concordam, tem de ser aqui?

T.: É o quarenta e seis. Depois pomos mais um.

Depois, perguntei à turma quais as restantes figuras que teriam de descobrir e responderam a figura 101. A aluna M.A. voluntariou-se para apresentar uma estratégia, no entanto continuava sem entender a regra dos múltiplos, sendo que os alunos M. e T. ajudaram-na, com o meu auxílio, pois confundiram os múltiplos com fatores da multiplicação referindo que “*dá para multiplicar por quatro e também dá para multiplicar por dois*”. Novamente, recorri aos divisores e desta forma os alunos lembraram o conceito de múltiplo através da operação inversa da multiplicação.

De seguida, desafiei os alunos a encontrarem a 135.^a figura e a aluna H.C. sugeriu “imaginarmos” a figura 130. Validei a sua resposta e o aluno A. referiu que a figura seria um círculo branco, pois não aparece na tabuada do 4. De seguida questionei

a aluna H.C. se concordava com a afirmação do colega, a qual respondeu positivamente referindo que *“Sim. Porque na tabuada do dois há trinta.”*

Nesta fase da discussão, compreendi que os alunos já começavam a entender as regularidades da sequência, no entanto o aluno A. ainda fez contagens para encontrar a figura número 135, a partir da 130.^a. Como tal, questionei-o se existiria outra forma mais fácil de encontrar essa figura sem ser pela contagem e foi necessário, mais uma vez, guiar o pensamento dos alunos, e referi que poderíamos recorrer a um número par mais próximo do 135, como o 134. O aluno T. recorreu novamente à regularidade dos múltiplos, no entanto a aluna H.C. revelou que não tinha compreendido esta regularidade.

Como tal, decidi questionar se mais alguém teria dúvidas, iniciando um diálogo com a aluna H.C., tal como se observa no seguinte excerto.

Professora Catarina: Quem é que não percebeu como é que se descobre as figuras? Qual é a regularidade para descobrir as figuras? Sem ser contar. HC, aqui. Nós sabemos que estes números são sempre o quê? Os círculos são sempre o quê?

HC: Pares.

Professora Catarina: Pares. Mas são números pares específicos. Porquê? Daqui a aqui eu ando quanto? Um?

HC: Dois.

Professora Catarina: Dois. Aqui vão ser os múltiplos de?

Vários alunos: Dois.

Professora Catarina: O que é que são os múltiplos?

T: É o resultado da tabuada dos dois.

Professora Catarina: Daqui aqui eu ando quanto?

T: Quatro.

Professora Catarina: Quatro. Portanto, também vão ser os múltiplos de?

Vários alunos: Quatro.

Professora Catarina: Quatro. Mas são só os múltiplos de quatro aqui?

Vários alunos: Não, dois e quatro.

Professora Catarina: Porquê? Porque isto é?

Vários alunos: Par.

Professora Catarina: E qualquer número par está na tabuada do?

Vários alunos: Dois. Dois.

Professora Catarina: Portanto, também têm de ser múltiplos de?

Vários alunos: De dois.

Posto isto, questionei os alunos como poderiam descobrir se um número é múltiplo de 2 ou de 4 e o aluno T. sugeriu a divisão. Validei a sua resposta e conduzi o pensamento dos alunos para a operação inversa, a multiplicação, como se verifica no seguinte excerto, sendo que o aluno T. entendeu que a multiplicação é o inverso da divisão.

Professora Catarina: Mas como é que eu descubro?

A: Contando.

ML: Fazendo a tua tabuada.

T: Não é contando.

H: É pela... Não é pela contagem. É pela...

T: Divisão.

H: Sim!

Professora Catarina: Ah! Se eu quiser saber se é múltiplo de dois, o que é que eu faço? Se está na tabuada do dois. Divido por?

Vários alunos: Dois.

Professora Catarina: Dois. É fácil.

T: Claro. Dois... é seis.

Professora Catarina: Olhem aqui. Olhem como isto faz sentido. Seis vezes dois. Isto é vezes. Seis vezes dois dá?

Vários alunos: Doze.

Professora Catarina: Não está na tabuada do dois?

Vários alunos: Está

Professora Catarina: Seis vezes o dois. Já viram como a divisão e a multiplicação estão relacionadas?

Vários alunos: Sim.

Professora Catarina: Já viram? E agora?

T: Divisão e a multiplicação são o contrário

Por fim, voltei a questionar se alguém tinha dúvidas e a aluna H.C. voltou a referir que não tinha percebido. Neste caso, decidi que seria mais produtivo se os alunos fossem lanchar e depois do recreio, na parte da sistematização voltaria a recordar a lei de formação desta sequência.

Sistematização

Após o intervalo, retomei a discussão com a turma e, conforme planeado, procedi à revisão das regularidades e da lei de formação da sequência. Discutimos novamente os conceitos e apresentei exemplos no quadro, procurando envolver os alunos na identificação dos padrões. No entanto, apenas alguns participaram ativamente, respondendo às perguntas colocadas, o que me deixou com dúvidas quanto à compreensão generalizada do que estava a ser explicado.

De seguida, distribuí uma ficha com diversos números (Figura 22). A tarefa consistia em rodear os múltiplos de 2 e de 4. Esta tarefa foi realizada coletivamente e os alunos iam indicando as respostas oralmente e eu ia corrigindo no quadro. Nesta fase, a maioria da turma mostrou-se mais envolvida, participando com entusiasmo e identificando corretamente os múltiplos pedidos.

Figura 22

Tarefa de sistematização sobre múltiplos

Rodeia a amarelo os múltiplos de 2 e a verde os múltiplos de 4.

24	38	100	34	124
12	64	54	184	32

A tarefa estendeu-se e o período para realizá-la ultrapassou o planeado.

2.1.3. Tarefa 3- Sequência de Crescimento

A terceira tarefa designa-se por Sequência de Crescimento e foi planeada com a duração de uma hora e cinquenta minutos dividida nas seguintes etapas:

1.ª Parte

1. Apresentação da tarefa (10 minutos)
2. Trabalho autónomo (40 minutos);
3. Discussão coletiva (30 minutos);

O principal objetivo da tarefa era que os alunos alcançassem os factos básicos da multiplicação, concretamente por 4 e a sua operação inversa, a divisão. A Tabela 6

apresenta os objetivos da tarefa segundo as Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática (Canavarro et al., 2021).

Tabela 6

“Sequência de Crescimento”, de acordo com as AE de Matemática

Domínio	Tópico	Subtópico	Objetivos de Aprendizagem
	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar	Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
		Justificar	Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
	Comunicação matemática	Expressão de ideias	Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
		Discussão de ideias	Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos
	Representações matemáticas	Representações múltiplas	Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
			Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas
		Linguagem simbólica matemática	Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
	Álgebra-(4.º ano)	Regularidades em sequências	Sequências de crescimento
Identificar e descrever regularidades em sequências de crescimento, explicando as suas ideias.			
Continuar uma sequência de crescimento respeitando uma regra de formação dada ou regularidades identificadas.			
Descrever em linguagem natural a regra de formação de uma sequência de crescimento, explicando as suas ideias.			

Números - (2.º ano)	Relações numéricas	Factos básicos da multiplicação e sua relação com a divisão	Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuada do 4) e sua relação com a divisão. (múltiplos)
------------------------	--------------------	---	--

Para a realização da tarefa, o material disponibilizado foi uma folha de registo, construída por mim, como se observa na Figura 23.

Figura 23

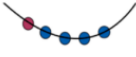
Folha de registo da tarefa Sequência dos Múltiplos

Nomes: _____ N.º _____ Data ____/____/2024

Lê cada questão antes de responderes e verifica as tuas respostas.

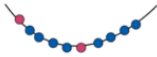


A Joana está a fazer colares para oferecer aos amigos. Só tem contas de duas cores – azuis e vermelhas. Construiu o primeiro colar:



1.º colar

Depois, fez o segundo e terceiro colares:



2.º colar



3.º colar

1. Desenha o 4.º colar construído pela Joana.

2. Preenche a tabela:

	Número de contas vermelhas	Número de contas azuis
1.º colar		
2.º colar		
3.º colar		
4.º colar		
5.º colar		
6.º colar		
20º colar		

3. – Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste.

4. Se o colar tiver 8 contas vermelhas, quantos azuis terá? Mostra como pensaste.

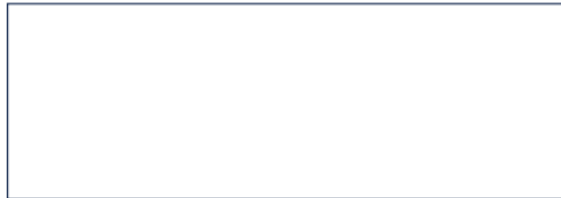
5. Se o colar tiver 48 contas azuis, quantos vermelhas terá? Mostra como pensaste.

89

6. Descobre uma regra que permita encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas vermelhas desse colar. Mostra como pensaste.



7 - Se o total de contas do colar for 60, quantas contas vermelhas tem o colar? E azuis? Mostra como pensaste.



A tarefa foi realizada a pares e as questões colocadas na ficha de registo foram produzidas de forma a guiar os alunos para as regularidades encontradas nesta sequência. Neste sentido, os alunos teriam de reconhecer as seguintes generalizações:

- O número de contas azuis é o quádruplo ($\times 4$) do número de contas vermelhas.
- O número de contas vermelhas é a quarta parte ($: 4$) do número de contas azuis.
- O número total de contas é sempre o quádruplo ($\times 5$) do n.º de contas vermelhas.

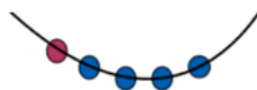
Introdução

Na primeira fase da tarefa - a introdução - projetei no quadro a sequência (Figura 24) e perguntei aos alunos do que se tratavam aquelas imagens, com o intuito de que entendessem que era uma sequência de crescimento. Assim sendo, foi necessário colocar algumas questões, previamente antecipadas na planificação, que guiassem o pensamento dos alunos como: *“Então, mas o que acontece de um colar para o outro?”*, *“Há alguma coisa que muda? Aumenta? Ou diminui?”*, *“Será que é como a sequência que fizemos dos triângulos dos círculos? O que é diferente?”*.

Figura 24

Projeção da sequência de crescimento

A Joana está a fazer colares para oferecer aos amigos. Só tem contas de duas cores – azuis e vermelhas. Construiu o primeiro colar:

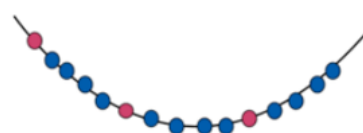


1.º colar

Depois, fez o segundo e terceiro colares:



2.º colar



3.º colar

Depois, apresentei, à turma, as questões da tarefa, referentes à sequência, realçando a importância de preencherem corretamente a tabela de registo (Figura 25) da Questão 2. Esta tabela serviu de apoio aos alunos para que identificassem a relação entre o número de contas vermelhas e o número de contas azuis e reconhecessem a lei de formação da sequência. Desta forma, permitiu que os alunos explorassem essas regularidades de forma mais eficaz.

Figura 25

Tabela de registo- Sequência de crescimento (Questão 2)

2. Preenche a tabela:

	Número de contas vermelhas	Número de contas azuis
1.º colar		
2.º colar		
3.º colar		
4.º colar		
5.º colar		
6.º colar		
20º colar		

Por fim, retirei as dúvidas dos alunos sobre o enunciado da tarefa. Foi necessário esclarecer a questão 7- *Descobre uma regra que permita encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas vermelhas desse colar. Mostra como pensaste.* - ao nível da interpretação da questão. Assim, expliquei que “o que estou a pedir é que me encontrem uma maneira de eu saber o número de todas as contas do colar se eu olhar para as contas vermelhas.”

Contudo, nenhum aluno fez as questões 6 e 7, por falta de tempo.

Trabalho autónomo

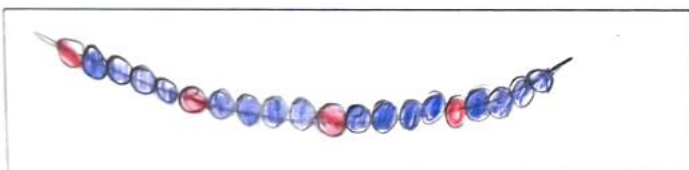
Durante o trabalho autónomo, fui percorrendo os vários pares, verificando e analisando as estratégias desenvolvidas.

Confirmei que quase todos os pares tinham conseguido construir o colar seguindo a lei formação: bolas vermelhas = n e bolas azuis = $4n$. Na Figura 26 podemos observar a representação pictórica do 4.º colar e a tabela com o registo do número de contas vermelhas e azuis do 1.º ao 6.º colar, avançando para o 20.º colar. Esta tabela tinha como objetivo que os alunos pensassem sobre a lei de formação da sequência, para o número de contas vermelhas e de contas azuis, explorando as regularidades.

Figura 26

Representação pictórica da sequência de crescimento

1. Desenha o 4.º colar construído pela Joana.



2. Preenche a tabela:

	Número de contas vermelhas	Número de contas azuis
1.º colar	1	4
2.º colar	2	8
3.º colar	3	12
4.º colar	4	16
5.º colar	5	20
6.º colar	6	24
20.º colar	20	80

Depois de verificar que todos os pares tinham preenchido a tabela, fui pedindo aos alunos que explicassem quais as estratégias que estavam a utilizar para descobrirem o número de contas em cada colar. A maioria percebeu que de um colar para o outro se acrescentava mais uma conta vermelha e mais quatro contas azuis, tal como tinha previsto na planificação e como se verifica no próximo excerto.

Professora Catarina: Então, expliquem lá. É sempre mais quatro. Vocês dizem que daqui para aqui é mais um e daqui para aqui é mais quatro.

L.E.: Sim.

(...)

Professora Catarina: Explica lá. Primeiro quero saber como é que chegaram a estes números aqui.

SH.: Porque os vermelhos têm sempre mais um.

Professora Catarina: Mais um. E aqui?

SH.: E os azuis têm sempre mais quatro.

Professora Catarina: Mais quatro, ok. Certo. Está bem. Não é mentira, pois não?

Par: Não.

Outros pares, mais tarde, foram encontrando outras regularidades sobre a lei de formação da sequência. Neste sentido, fui desafiando-os a descobrirem relações entre as contas, como se observa no próximo exemplo.

Professora Catarina: Amigos. Contas vermelhas é vezes quatro. Meus queridos, então expliquem lá. Então, as contas vermelhas?

T.: É o número que tem... é o número do colar.

Professora Catarina: Mas qual é a relação entre as contas vermelhas e as azuis?

T.: É que as contas azuis podes descobrir com as contas vermelhas vezes quatro.

Professora Catarina: Ah, esta é a relação. Então. E é ao contrário?

T.: Podes descobrir as contas... As contas vermelhas com as contas azuis a dividir por quatro.

Contudo, alguns alunos estavam com dificuldades em encontrar regularidades na sequência, recorrendo a desenhos. Como tal, sugeri que desenhar seria uma estratégia pouco adequada ajudando-os a pensar sobre a lei de formação da sequência de crescimento, como se pode ler no seguinte excerto.

Professora Catarina: Olha, uma coisa, uma coisa. Vocês estão a desenhar, certo?

J.: Sim, estamos a desenhar.

Professora Catarina: Ai, mas isto custa muito. Como é que vocês vão fazer isto? Olha, como é que chegaram aqui a isto (tabela)?

Professora Catarina: Então vamos lá pensar. Vocês dizem que aqui tem quantas azuis?

Par: 12.

Professora Catarina: 12... A primeira tem 4, a segunda tem 8.

J.: Multiplicar.

Professora Catarina: Sim, multiplicar o quê?

(...)

Professora Catarina: Como é que se vai descobrindo? As contas vermelhas são fáceis de saber?

J.: Sim.

Professora Catarina: Então?

G.: Só tem uma aqui. (vermelha)

Professora Catarina: E depois?

G.: Duas, só tem duas aqui, três, tem três aqui, quatro.

Professora Catarina: O que é que está a acontecer de colar para colar às contas

G.: Não sei... Está a adicionar mais uma...

No seguimento do trabalho autónomo, verifiquei que alguns pares recorreram aos múltiplos de 1 e de 4, sem referirem o conceito em concreto, explicando que as contas vermelhas “são a tabuada do 1” e as contas azuis “são a tabuada do 4”, pretendendo referir-se aos produtos da tabuada do 1 e da tabuada do 4, respetivamente, como se verifica no próximo exemplo.

H.C.: A gente descobriu uma coisa. Que é só olhar para a tabuada do 4.

Professora Catarina: Olhar para a tabuada do 4. Então?

H.C.: Porque é sempre de 4 em 4. Imagina. Depois aqui tinha as 12. Aqui é 16. Depois será 20. Depois será 24, 28.

Professora Catarina: Mas isto é em relação ao quê? A que contas?

H.C.: Os colares. Vai sempre de 4 em 4.

Professora Catarina: Mas de 4 em 4 o quê?

H.C.: As azuis. E a outra é só olhar para a tabuada do 1. Ou contares de 1 em 1. E esta aqui é só olhar para a tabuada do 4. De 4 em 4. Tabuada são somas.

No entanto, outros pares aplicaram, efetivamente, o conceito de múltiplo, tal como antecipado por mim, trabalhado em tarefas anteriores (Figura 27). O seguinte excerto retrata a afirmação anterior.

H.C.: É múltiplo que se diz?

Professora Catarina: Múltiplo. O que é que está a acontecer daqui para aqui?

G.: Está a dobrar? Não, está a dobrar. Está a multiplicar.

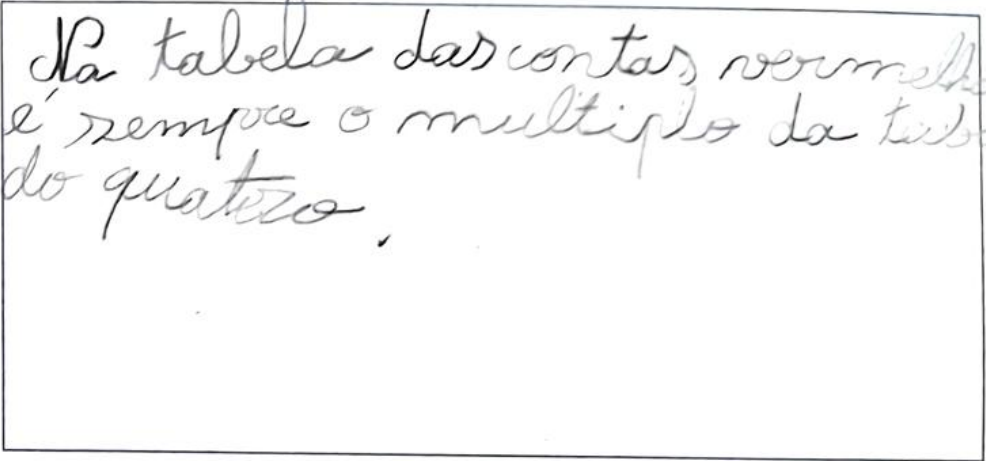
Professora Catarina: Por quanto? Daqui para aqui, nas contas azuis, está a acontecer o quê? Aqui tinha quatro, aqui tem mais...?

G.: Quatro.

Figura 27

Resolução da Questão 2

3. Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste.



Na tabela das contas vermelhas é sempre o múltiplo da tabela do quatro.

No que diz respeito à identificação de regularidades na relação entre as contas do colar, um dos pares, constituído por duas alunas que demonstravam fragilidades na área da Matemática, conseguiu estabelecer conexões entre as contas vermelhas e as contas azuis. Neste sentido e para tornar o seu pensamento mais claro, foi necessário recorrer ao questionamento, o que permitiu esclarecer a forma de raciocínio das alunas. O seguinte excerto mostra o entusiasmo sentido por mim, ao perceber que o par estava a formular conjecturas adequadas à tarefa.

Professora Catarina: Ah! A C. encontrou aqui uma relação. Ela encontrou uma relação entre o número de contas vermelhas e azuis. Como é que tu descobres o número de contas azuis?

C.: Fazendo um vezes o número quatro.

Professora Catarina: Aqui são o quê as contas? Aqui neste lado são as contas o quê? Qual é a cor das contas?

C.: Vermelhas.

Professora Catarina: Vermelhas. E como é que tu estás a descobrir as contas azuis?

C.: Fazendo um vezes o número quatro.

Professora Catarina: Mas um é o quê? Um é o quê?

C.: É o número de contas vermelhas.

Professora Catarina: Então tu fazes o número de contas vermelhas vezes quanto?

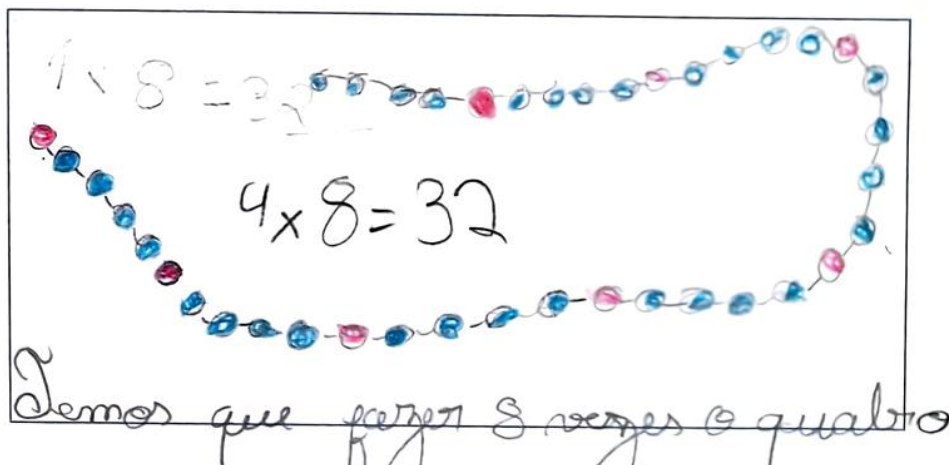
C.: O número quatro.

A Figura 28 mostra a resolução da questão 4 pelo par anteriormente referido.

Figura 28

Resolução da Questão 4 pelo par H.C. e C.

4. Se o colar tiver 8 contas vermelhas, quantos azuis terá? Mostra como pensaste.



Posteriormente, começaram a surgir conjeturas alusivas à operação inversa da multiplicação. Para apoiar o pensamento dos alunos, recorri ao questionamento, como se evidencia no excerto que se segue.

Professora Catarina: Ok. E agora aqui, se o colar tiver quarenta e oito contas, portanto são deste lado, quarenta e oito, vocês não sabem estas (vermelhas). Só sabem as azuis, certo? Ok. Quantas terá?

M.L.: Doze vezes quatro é igual a quarenta e oito. Então o resultado é doze.

Professora Catarina: Como é que vocês chegaram ao doze?

M.L.: Porque o doze vezes o quatro é quarenta e oito, que é o número de contas azuis.

D.: Não, a gente foi pensar como é que se chega ao número quarenta e oito. E fizemos doze vezes quatro e deu quarenta e oito. Então o doze é o número totalizado para...

Professora Catarina: Olhem lá, e não há uma maneira mais fácil do que essa? Vocês daqui para aqui fizeram vezes quatro, certo? E daqui para aqui não há uma maneira mais fácil de descobrir? Vocês estão aqui a dizer que doze mais doze mais doze mais doze é igual a?

Par: Quarenta e oito.

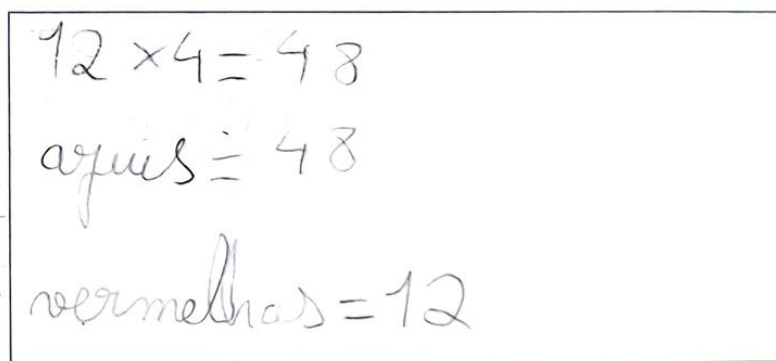
Professora Catarina: Vocês estão a dizer que dividindo o quarenta e oito em quatro partes fica doze em cada parte.

Par: Sim.

Na Figura 29, podemos observar um exemplo do que retrata o excerto anterior.

Figura 29

Resolução da Questão 5



Handwritten mathematical work showing the calculation of 48 divided by 4 to get 12, and then 12 multiplied by 4 to get 48.

$$12 \times 4 = 48$$
$$48 \div 4 = 12$$
$$12 \times 4 = 48$$

Contudo, outro par recorreu de forma imediata à divisão como inverso da multiplicação, como mostra o próximo exemplo e a Figura 30.

Professora Catarina: Ok, tu encontraste que o número de contas vermelhas vezes 4 vai dar o número de contas azuis. Então e ao contrário?

T.: Isso também acontece...

Professora Catarina: Espera aí Tiago, espera, espera. E ao contrário?

T.: Também dá.

Professora Catarina: Sim, como é que faz?

T.: É a dividir por 4. divisão

Figura 30

Resolução da questão 5- Divisão

5. Se o colar tiver 48 contas azuis, quantos vermelhas terá? Mostra como pensaste.

Handwritten mathematical work showing a division problem. At the top left, "48" is written. To its right, "21 = 2" is written. Below these, a long division is shown: 48 divided by 12. The quotient "4" is written above the 8, and "12" is written below the 48. A horizontal line separates the quotient from the remainder, which is "00". To the right of the division, "54" is written above a horizontal line, and "12" is written below it.

Numa fase mais avançada do trabalho autónomo, um dos pares estabeleceu a relação entre o número de contas vermelhas e o número do colar, relação antecipada por mim na planificação, como se evidencia a seguir.

Professora Catarina: O número de colares, que é igual ao quê?

M.L.: É igual ao número de contas vermelhas.

Professora Catarina: Então fizeram uma relação entre as contas vermelhas e o número de colares.

Ainda durante o trabalho autónomo, um dos alunos fez um comentário que revela ter-se apercebido da intencionalidade da abordagem de ensino exploratório que apliquei em todas as tarefas: a ideia de que a aprendizagem surge da própria exploração da tarefa, promovendo o pensamento autónomo e a construção de conhecimento através das suas próprias descobertas. O próximo excerto mostra a afirmação do aluno referido acima.

F.: Ah. Porque é que eu sinto que tu estás a fazer aquelas coisas que depois no final tu vais perguntar tipo “E qual é que é a lógica do universo atrás desta ficha”?

Professora Catarina: E vocês têm pensado muito bem.

Outro aluno, por sua vez, revelou ter compreendido uma das aprendizagens que transmiti, numa sessão onde foi necessário explicar em que consistem as tabuadas, ou seja, a ideia de que representam sucessivas adições, como se observa no próximo excerto.

L.S.: Então vai dar quatro. Depois vou fazer quatro vezes dois, quatro vezes três, quatro vezes quatro, quatro vezes cinco, quatro vezes seis e finalmente quatro vezes vinte, que eu já sei quanto é que é.

Professora Catarina: Olha, e porquê que tu dizes que isso é assim, L.S.? Explica lá à Catarina.

L.S.: Por causa que... não sei explicar.

Professora Catarina: Explica, como é que tu chegaste aos vezes quatro?

L.S.: É, mais ou menos assim: as contas de vezes são o mesmo que contas de mais, só que ajudam, porque chegas lá mais rápido. Então, eu estava a pensar fazer contas de mais, só que depois eu pensei, contas de vezes ajudam mais, porque vais chegar lá mais rápido.

Por fim, a maioria dos grupos demonstrou entender as regularidades da sequência, tal como se verifica na Figura 31 e no seguinte excerto.

Professora Catarina: Se eu quisesse encontrar as vermelhas eu fazia...?

T.: Mas as vermelhas é só ver o número do colar.

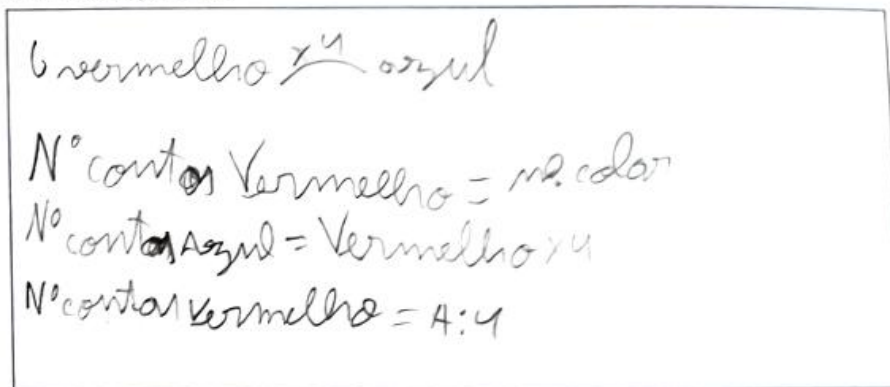
Professora Catarina: As vermelhas é só?

T.: Ver o número do colar. E as azuis 4 é o número do colar vezes 4.

Figura 31

Regularidades da sequência

3. Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste.



Discussão coletiva e sistematização

Na fase da discussão coletiva fui pedindo aos alunos para partilharem as suas estratégias, sequenciando os pares com as estratégias mais simples para as mais complexas.

Comecei por convidar o par M.A. e L.S. a indicar quantas contas vermelhas desenharam no 4.º colar. O par respondeu 4 e de seguida questionei a turma se todos tinham colocado as 4 contas vermelhas. Todos os alunos responderam que sim e, neste sentido, segui para o número de contas azuis. Prontamente, os alunos responderam que o 4.º colar teria 16 contas azuis. Novamente, perguntei se todos tinham desenhado as 16 contas azuis e a resposta foi afirmativa.

Depois, desafiei o par M.L. e S.H. a explicar qual a estratégia que utilizou para calcular o número de contas vermelhas e azuis. As alunas mostraram a sua folha registo e responderam que o número de contas vermelhas “é sempre mais um” e as azuis “é sempre mais quatro”. No entanto, um dos alunos manifestou que não estava a conseguir ver o que as colegas tinham escrito. Assim sendo, decidi que seria pertinente construir a tabela de registo no quadro com a identificação das colunas com o número do colar, o número das contas vermelhas e o número das contas azuis, com a ajuda dos alunos, de forma a facilitar a explicação das alunas e a respetiva compreensão da turma, como mostra o próximo excerto.

Professora Catarina: Então como é que tu fizeste, ML e SH? Como é que fizeram? Digam lá outra vez, porque eu não sei se os vossos colegas ouviram.

A: Não estou a ver...

Professora Catarina: Eu vou fazer aqui o... Acende lá aí a luz, se fazes favor. Então. Então. Vou desenhar que é para ser mais fácil. Aqui são as...?

Desta forma, fui perguntando ao par, a quantidade de contas azuis e vermelhas que colocaram em cada colar. Os restantes alunos foram respondendo também, tornando, assim, a discussão mais participada, como se verifica no próximo excerto.

Vários alunos: Vermelhas

Professora Catarina: Ok. E aqui são as?

Vários alunos: Azuis.

Professora Catarina: Ok. Ou seja, no primeiro colar temos o quê? Quantas vermelhas temos no primeiro colar?

ML: Uma.

Professora Catarina: Nas azuis temos?

T: Quatro.

Professora Catarina: Vermelhas, no segundo?

ML: Dois.

Professora Catarina: Dois. E aqui (azuis) ?

Vários alunos: Oito.

Professora Catarina: Oito. E aqui (vermelhas)?

Vários alunos: Três.

(...)

De seguida, voltei a desafiar as alunas a explicarem a estratégia que utilizaram para descobrir o número de contas vermelhas e de contas azuis, como mostra o próximo excerto.

Professora Catarina: Ok. E aqui? Então, como é que vocês chegaram aqui a estes números? O que é que foram fazendo?

ML: Aqui fomos acrescentando sempre mais.

Professora Catarina: Mais um.

ML: Até aos seis

Professora Catarina: Mais um, mais um, mais um. Sempre mais um. Ok. Sempre mais um.

E aqui? Daqui, como é que foram fazendo daqui?

ML: Quatro mais quatro.

Professora Catarina: Mais quatro, mais quatro, mais quatro, mais quatro. Sim.

Contudo, as alunas indicaram que o 20.º colar teria 14 contas vermelhas e 80 azuis. A aluna M.L. referiu que a partir do 6.º colar não conseguiram acrescentar mais quatro. Questionei-lhes de que forma chegaram ao oitenta e o par respondeu que *pusemos aqui o catorze (vermelhas). E depois, o seis e acrescentámos sempre mais quatro até chegar. Fizemos catorze vezes seis que deu oitenta.* Com esta ideia partilhada, questionei a turma se concordavam com esta estratégia e alguns alunos responderam que não. Contudo, o aluno T. indicou que com as azuis é possível utilizar aquela estratégia. Desta forma, sugeri aos alunos que utilizassem outra estratégia, pois aquela não era a mais adequada visto que teriam de contar de um em um e de quatro em quatro, podendo perder-se na contagem, como aconteceu. O seguinte exemplo ilustra o momento descrito anteriormente.

Professora Catarina: É sempre quatro mais quatro. Aqui está certo. E aqui também. Um mais um, mais um. Mas se tu fores fazendo mais um, mais um,

mais um, até vinte, não dá catorze. Pois, dá o quê, ML? Se nós estivemos a contar de um em um. Ah, se nós estivemos a contar de um em um, dá o quê? Eu não posso saltar.. Aqui faltam números pelo meio. Se é de um em um, faltou aqui qualquer coisa.

ML: É vinte.

Professora Catarina: É?

ML: Vinte.

Professora Catarina: É vinte. Já concordam que seja vinte aqui?

Vários alunos: Sim.

Professora Catarina: Pronto. Então, elas foram de um em um para descobrir e aqui de quatro em quatro. Não está errado, pois não? Deu igual ao que vocês têm, não tem?

Vários alunos: Sim.

Professora Catarina: Mas eu acho que há maneiras mais fáceis de lá chegarmos, ou não?

T: Há maneiras mais fáceis.

Deste modo, as alunas corrigiram a tabela, tal como podemos verificar na Figura

32.

Figura 32

Estratégia das alunas M.L. e S.H. apresentada no quadro

mulhas	Azuiz
$1 \times 4 = 4$	4
$2 \times 4 = 8$	8
$3 \times 4 = 12$	12
$4 \times 4 = 16$	16
$5 \times 4 = 20$	20
$6 \times 4 = 24$	24
$7 \times 4 = 28$	28

A seguir, convidei o par da H.C. e C. para partilharem a sua estratégia pedindo que a explicassem. A H.C. referiu que a C *reparou que* “o um vezes o quatro é quatro. Dois vezes o quatro é oito. Três vezes o quatro é doze. Quatro vezes o quatro é dezasseis. Cinco vezes o quatro é vinte. Seis vezes o quatro é vinte e quatro. Vinte vezes o quatro é oitenta”. A aluna estava a referir-se à estratégia para descobrir o número de contas azuis, no entanto não soube explicá-la. A mesma aluna ainda escreveu no quadro as multiplicações que efetuaram, como se pode analisar na Figura 33.

Figura 33

Estratégia do par H.C. e C. apresentada no quadro

	Vermelhas	Azuis
1º color	1	4) +4
2º color	2) +1	8) +4
3º color	3) +1	12) +4
4º color	4) +1	16) +4
5º color	5)	20) +4
6º color	6)	24) +4
20º color	20	80) +4

Neste caso, foi necessário guiar o raciocínio das alunas, tal como se analisa no seguinte excerto.

Professora Catarina: Então vá. Este aqui fomos de um em um e de quatro em quatro. E vocês fizeram o quê?

HC: Um vezes o quatro é igual a quatro.

Professora Catarina: Ok.

HC: Dois vezes o quatro é igual a oito.

Professora Catarina: Sim.

(...)

Professora Catarina: Vocês estão a perceber o que a HC está a fazer? Mas agora têm de explicar. Vocês fizeram vezes quatro porquê?

HC: Porque vai sempre de quatro em quatro. Na tabuada do quatro vai sempre de quatro em quatro.

Professora Catarina: Ok. A tabuada do quatro é sempre de quatro em quatro, olha. Ok.

HC: Quatro, oito, doze, seis, vinte, vinte e quatro, oitenta.

De seguida, desafiei as alunas a pensarem sobre as contas vermelhas e a aluna C. indicou que realizou multiplicações por 1, para obtê-las. Mais uma vez foi necessário recorrer ao questionamento para clarificar o pensamento da aluna, como é evidenciado no exemplo a seguir.

Professora Catarina: Sim, amor. Mas porque é que tu dizes que a conta vermelha é de um em um?

C: Porque é sempre uma vezes um, vezes um, vezes um.

Professora Catarina: Ah, tu fizeste de um colar para o outro. Vai aumentando o quê?

C: Um.

Após perguntar se todos os alunos concordavam com esta estratégia e ter obtido resposta afirmativa, desafiei o par D. e M.F. a partilharem a sua estratégia. Contudo, antes de iniciarem questionei-os se concordavam que para se obter as contas azuis se multiplicava as vermelhas por 4, para ficar esclarecido. O par concordou e de seguida questionei-os sobre a forma como descobriram as contas vermelhas, pois durante o trabalho autónomo tinham indicado que estas contas estavam relacionadas com o número do colar. No entanto, no momento da discussão coletiva o par não estava a conseguir explicar esta ideia, e como tal, foi necessário guiar o pensamento destes alunos, tal como se observa no próximo excerto.

M.F.: Nós descobrimos as contas vermelhas, porque aqui, por exemplo, o um... Não, o quatro é um quádruplo do...

Professora Catarina: Não, espera. Aqui as vermelhas, M.F. Aqui. Vamos só para as vermelhas. Já vamos para aí. Já vamos para aí. O primeiro colar tem uma vermelha. O segundo colar tem duas vermelhas. O que é que está a acontecer?

M: Está a acontecer uma relação.

Professora Catarina: Neste caso, as vermelhas entre o quê? A relação entre o quê?

M: Entre o número dos colares e as vermelhas.

Professora Catarina: São iguais ao quê? Olha, as vermelhas são iguais ao quê? Ninguém achou esta relação. São o quê?

D: As vermelhas são iguais ao número colar.

Depois, perguntei aos alunos como descobriram as contas azuis e verifiquei que utilizaram a estratégia de multiplicar as contas vermelhas por quatro. Contudo, os alunos tinham referido o conceito de quádruplo, no momento de trabalho autónomo e, neste sentido, considerei oportuno introduzir esta a ideia na discussão, tal como se analisa no seguinte diálogo.

Professora Catarina: Que é o mesmo do número dos colares. Ok. Mas vocês encontraram aqui uma relação. Entre o número das contas vermelhas e as azuis, não encontraram? O que é que vocês disseram? Qual foi a relação que vocês encontraram?

MF: Foi que o quatro é o quádruplo do um, que o oito é o quádruplo do dois, que o doze é o quádruplo do três, o dezasseis do quatro, o vinte do cinco, o vinte e quatro do seis e o oitenta do vinte.

Professora Catarina: Ok. Então, qual é a relação entre as azuis e as vermelhas? Agora falem de contas. Vocês disseram que as azuis são o quê das vermelhas?

MF: O quádruplo.

(...)

Professora Catarina: Tá? Concordam? Concordam ou não? O que é que é o quádruplo?

Vários alunos: É vezes quatro.

Após o conceito de quádruplo, ainda pedi a um dos pares que mencionasse a regularidade que tinham descoberto relacionada com os múltiplos. Este par descobriu que as contas azuis são os múltiplos de 4. É possível observar este momento no próximo diálogo.

Professora Catarina: Obrigada, uma relação. HC, agora estou aqui a pensar. Vocês também acharam uma relação. As azuis são o quê? Podem sentar, amor.

HC: As azuis?

Professora Catarina: Sim, eu lembro de vocês falarem da qualquer coisa. Começado com M. **HC:** Múltiplo.

Professora Catarina: As azuis são o quê, HC?

HC: Múltiplos

Professora Catarina: Múltiplos de que número?

HC: Quatro.

De seguida, desafiei os alunos a aplicarem a conjectura que tínhamos estado a explorar, no que diz respeito à relação entre as contas vermelhas e azuis, tal como se verifica no próximo excerto.

Professora Catarina: Então nós estivemos a dizer o quê? Se tivemos vermelhas, como é que nós descobrimos as azuis? De uma para a outra fazemos o quê? Fazemos o quê, meninas aí? O que é que fazemos? Nós temos as vermelhas, certo? Daqui para aqui, o que é que acontece? Das vermelhas para as azuis, o que é que nós tivemos a ver?

I: Mais quatro?

Professora Catarina: Não. Daqui para aqui.

H: Não sei.

A: Vezes quatro?

I: Vezes quatro.

Professora Catarina: Vezes?

I: Quatro.

Professora Catarina: Porquê?

I: Porque as vermelhas fazendo com as azuis, são o quádruplo das vermelhas.

Nesta fase da discussão coletiva, voltei a relembrar as várias regularidades encontradas e conjecturas exploradas e decidi desafiar os pares partilharem as suas estratégias para o inverso, ou seja, como encontraram as contas vermelhas através das azuis, tal como é visível no excerto a seguir.

Professora Catarina: Olhem, o próximo. E se eu tiver contas azuis e eu não souber as vermelhas? Como é que eu descubro as vermelhas? H.C., toma atenção. Como é que eu descubro as vermelhas?

A: Fazemos uma conta de dividir.

Professora Catarina: Conta de?

A: Dividir.

Professora Catarina: Porquê?

A: Por causa se é 48, eu divido por 4.

Professora Catarina: Explica lá, T.

T: Imagina, se as azuis é o quádruplo das vermelhas, e a operação inversa à multiplicação é a divisão, e nós não queremos descobrir agora as vermelhas e sim as azuis, vamos usar a operação inversa.

(...)

Professora Catarina: T, então, tu dizes que daqui para aqui nós fizemos vezes?

T: Quatro.

Professora Catarina: Das vermelhas para as azuis, então e daqui para aqui?

T: A dividir por 4.

Como é visível no excerto anterior, o aluno T. compreendeu que a operação inversa da multiplicação é a divisão, tal como podemos observar na Figura 34, em que pedi ao aluno que escrevesse no quadro a resolução da questão 5.

Figura 34

Resolução do aluno T. apresentada no quadro

The image shows a chalkboard with handwritten work. At the top, there is a diagram with 'Vermelhas' (Red) and 'Azuis' (Blue) connected by an arrow labeled 'x 4'. Below this is a table with two columns: 'Vermelhas' and 'Azuis'. The table has 7 rows, labeled '1º color' to '7º color' on the left. The 'Vermelhas' column contains the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, and 20. The 'Azuis' column contains the numbers 4, 8, 12, 16, 20, 24, and 80. To the right of the table, there are calculations: '48 A' and '12 V' are written, followed by '48 : 4 = 12'. Below this is a vertical multiplication problem: '48 x 4 = 192'. At the bottom of the table, there is a red arrow pointing from the 'Azuis' column to the 'Vermelhas' column, labeled ': 4'.

	Vermelhas	Azuis
1º color	1	4
2º color	2	8
3º color	3	12
4º color	4	16
5º color	5	20
6º color	6	24
7º color	20	80

48 A
12 V
 $48 : 4 = 12$

$48 \times 4 = 192$

$: 4$

Contudo, um dos pares utilizou a multiplicação para descobrir qual o número que multiplicado por 4 dava o 48. Desta forma, sugeri aos alunos que esta estratégia não seria a mais adequada e perguntei a uma aluna se concordava com o que estava a sugerir. A aluna assentiu, tal como podemos verificar no próximo excerto.

Professora Catarina: Mas ali o M e o D, eles foram fazer uma coisa mais difícil, o que é que vocês fizeram? Vocês foram descobrir o quê? Foram descobrir números que vezes 4 desse o 48. Acham mais fácil assim ou como vocês fizeram?

M.F: Para nós, eu acho que a nossa estratégia, para nós é um bocadinho mais fácil.

Professora Catarina: Achas? Andar a descobrir números, ou chegar aqui e fazer dividir por 4. O que é que achas que é mais fácil? Andar a descobrir números que vezes 4 dá 48.C, o que é que achas que é mais fácil?

HC: Eu acho que é a conta de dividir por quatro.

Por fim, passei para a sistematização da tarefa, pois estendeu-se, e revi com os alunos todas as regularidades encontradas na sequência, tal como se observa no excerto seguinte e na Figura 35.

Professora Catarina: Ok. Então agora, vamos ver a conclusão a que chegámos. Então, como é que eu posso descobrir contas vermelhas? Ou melhor...Então, olhando só para os colares, como é que eu posso descobrir o número de contas vermelhas? Como é que eu descubro o número de contas vermelhas?

T: É o número do colar.

Professora Catarina: O número de contas vermelhas é o V, está bem? É igual ao quê?

T: O número do colar.

Professora Catarina: É igual ao número do? M, toma atenção. É igual ao número do?

Vários alunos: Colar.

Professora Catarina: É igual ao número do colar. E se e eu tiver o número de contas azuis? Como é que eu descubro? Como é que eu descubro o número de contas azuis se tiver as vermelhas? Diz? Como é que eu descubro o número de contas azuis se tiver as vermelhas? Então? Fizemos...

T: As vermelhas vezes quatro.

Professora Catarina: As vermelhas vezes quatro.

MF: Usando a operação inversa.

Figura 35

Sistematização feita no quadro

Handwritten mathematical formulas on a chalkboard:

- $N^{\circ} \text{ contas } V = n^{\circ} \text{ colar}$
- $n^{\circ} \text{ contas } A = V \times 4$
- $N^{\circ} \text{ contas } V = A \div 4$

Below these, three examples are shown with variables V and A above the numbers:

- $\overset{V}{1} \times 4 = \overset{A}{4}$
- $\overset{A}{8} \div 4 = \overset{V}{2}$
- $\overset{V}{2} \times 4 = \overset{A}{8}$
- $\overset{A}{24} \div 4 = 6$

CAPÍTULO 4

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

1. Análise global das ações

No atual capítulo, apresento a análise dos dados recolhidos, com base nos procedimentos metodológicos anteriormente referidos. Para garantir uma análise organizada e coerente, que possibilite responder às questões de investigação, optei por, primeiramente apresentar uma tabela quantitativa, que contabiliza as ações por mim realizadas, nos momentos de discussão coletiva, em cada tarefa. De seguida, essas ações serão analisadas de forma comparativa e detalhada. Esta análise tem como objetivo identificar variações e possíveis razões para a predominância ou diminuição de determinadas ações. Para além do estudo quantitativo, será também feita uma análise qualitativa das ações, procurando compreender como cada ação foi concretizada, identificando não apenas quantas vezes uma ação ocorreu, mas como e com que intencionalidade foi utilizada em cada tarefa e contexto.

Tal como descrito anteriormente, no capítulo da metodologia e desenvolvido na fundamentação teórica, as categorias foram baseadas no modelo de análise para as ações do professor sugerido por Ponte (2013) e desenvolvidas por Brocardo et. al (2022), que organiza as intervenções do professor em discussões coletivas em seis tipos de ações: Convidar, Apoiar, Guiar, Desafiar, Informar e Sugerir.

A Tabela 7, quantifica as ações realizadas, por mim, na Tarefa dos V's Mágicos, na Tarefa da Sequência dos múltiplos e na Tarefa da Sequência de Crescimento.

Tabela 7

Tipo de ações nas tarefas

Tipo de ação	V's mágicos	Sequência dos Múltiplos	Sequência de Crescimento
Desafiar	63	70	68
Guiar	101	121	106
Informar	7	16	25

Sugerir	3	14	13
Convidar	27	28	18
Apoiar	35	92	86
Total	236	341	316

Pode constatar-se pela análise da Tabela 7 que a discussão coletiva da tarefa “Vs mágicos” teve um total de 236 ações, na tarefa “Sequência de múltiplos” as ações foram em maior número, num total de 341 e, por fim, na discussão coletiva da tarefa “Sequência de crescimento” o número de ações foi de 316. Em seguida, apresentarei a análise por ação.

2. Análise por ação

2.1. Ação de Desafiar

As ações de **Desafiar** foram realizadas, por mim, no momento de discussão coletiva, com o intuito de colocar questões que desafiavam os alunos a justificarem e explicarem as suas estratégias e raciocínios, a testarem conjecturas, a formularem, criticarem e reformularem generalizações e refletirem sobre as estratégias utilizadas (Brocardo et al., 2022).

Tabela 8

Contagem das ações de Desafiar por tarefa

Tarefa	V's Mágicos	Sequência dos Múltiplos	Sequência de Crescimento
Total de ações de desafiar	63	70	68

Segundo se observa na Tabela 8 as ações de *Desafiar* mantêm-se com os valores consideravelmente estáveis, de tarefa para tarefa, mostrando que existe uma consistência nas minhas ações em desafiar os alunos a refletirem, por exemplo, sobre uma generalização ou conjectura, questionando-os e pedindo justificações.

Contudo existe uma ligeira oscilação entre a tarefa dos *V's Mágicos* e da *Sequência dos Múltiplos*. Estas ações assumem um papel relevante na prática do professor, uma vez que envolvem pedidos de justificação, generalização e classificação colocando os alunos perante a necessidade de refletir, argumentar e construir significado.

O maior número de ações de Desafiar verifica-se na tarefa da *Sequência dos Múltiplos* (70 ações). Este aumento em relação à tarefa anterior pode estar relacionado com a complexidade da tarefa, sendo que a turma mostrou dificuldades em encontrar regularidades não imediatas, presentes nesta sequência. Na minha perspetiva, a própria tarefa parece permitir que o professor incentive a verbalização do raciocínio e a explicação das estratégias, pois é uma tarefa centrada na identificação e extensão de padrões. Outro motivo poderá estar relacionado com o facto de que na tarefa anterior, os alunos já conheciam, previamente, o conceito de números pares e neste caso ainda não tinham sido desafiados a pensar em regularidades e conjeturas de forma exploratória, tornando necessário desafiá-los a tal. Na perspetiva das ações do professor, este aumento pode estar relacionado com vários fatores. Em primeiro lugar, na tarefa inicial foi a primeira vez que experimentei o ensino exploratório, sendo que na segunda tarefa já seria a segunda vez que explorava esta abordagem o que me permitiu atuar com mais segurança e naturalidade. Outro aspeto que pode justificar este aumento é o facto de eu própria ter começado a estar mais desperta para aquilo que os alunos me ofereciam durante a discussão, aproveitando melhor as suas intervenções para os desafiar e fazer avançar o raciocínio. Por outro lado, os alunos apresentaram mais estratégias que não tinha antecipado, em comparação com a tarefa anterior e com a última, e por isso desafie-os a explicarem-nas e a justificarem-nas, podendo também justificar esse aumento. Por fim, na tarefa da *Sequência dos Múltiplos* ocorreu o maior número de ações, o que poderá também explicar o aumento.

Assim sendo, no início da discussão coletiva, da Tarefa *Sequência dos Múltiplos* desafiei os alunos a pensarem sobre o tipo de repetição que estavam a trabalhar. No excerto seguinte, antes da ação de desafiar, surge a ação de apoiar, como mostra o próximo exemplo.

H: Repetição.

Professora Catarina: Repetição. (Apoiar) Está tudo de acordo, certo? (Desafiar)

Durante a discussão coletiva, e como se verifica nos excertos a seguir, desafiei os alunos a explicarem e justificarem as suas estratégias e conjeturas que surgiram.

Como se averigua, as ações de desafiar também surgem com ações de apoiar, convidar e guiar.

Professora Catarina: É o triângulo sem cor. (Apoiar) Porquê?(Desafiar) Como é que tu fizeste? Como é que fizeste, HC? Quem quer ajudar a H.C.? Quem quer ajudar a H.C.? (Convidar) Não? Então explica lá. (Desafiar) Temos a cento e trinta, queremos a...(Guiar).

No decorrer da discussão, também desafiei os alunos a criarem uma generalização para identificação de um múltiplo de um número. No excerto seguinte, podemos verificar esta situação e analisar que as ações de guiar surgem depois das ações de desafiar.

Professora Catarina: Quatro. Perceberam até aqui? (Convidar) Como é que eu posso descobrir se um número é múltiplo ou não? (Desafiar)Trinta. Vá, um mais fácil. Doze. Como é que eu sei se está na tabuada do dois e se está na tabuada do quatro? (Guiar) Como é que eu posso descobrir isso? (Desafiar) (...)

T: Não, os números da tabuada do 2 é que não estão na tabuada do 4.

Professora Catarina: Não estão na tabuada do 4, porquê? (Desafiar) Olhem lá, aqui não se encontram. E este aqui? Este é dos 2, ou não? (Guiar)

Outra ação associada à de desafiar, foi pedir aos alunos que explicassem e pensassem sobre as regularidades da sequência, como se verifica no seguinte excerto.

Professora Catarina: Não. Quem é que não percebeu como é que se descobre as figuras? (Apoiar) Qual é a regularidade para descobrir as figuras? (Desafiar) Sem ser contar. (Sugerir) HC, aqui. Nós sabemos que estes números são sempre o quê? Os círculos são sempre o quê? (Guiar)

H.C.: Pares

Na tarefa da *Sequência de Crescimento* (68 ações), o número mantém-se bastante próximo da anterior. Esta tarefa exigia observar a evolução de uma sequência de figuras geométricas, explorar diferentes formas de representação e procurar generalizações. Assim, a ação de Desafiar surge como essencial para que os alunos passem de observações menos estruturadas para afirmações mais concretas e generalizáveis, apoiando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nesta última tarefa os alunos já estavam familiarizados com esta abordagem exploratória, não sendo necessário desafiar tantas vezes, podendo justificar o decréscimo das ações de desafiar, como podemos verificar no próximo excerto.

F.: Ah. Porque é que eu sinto que tu estás a fazer aquelas coisas que depois no final tu vais perguntar tipo “E qual é que é a lógica do universo atrás desta ficha”?

Professora Catarina: E vocês têm pensado muito bem.

Outro motivo para justificar a diminuição das ações de desafiar é que os conteúdos trabalhados de uma tarefa para outra iam ajudando os alunos a resolver as tarefas seguintes, não sendo tão necessário desafiá-los a pensar na justificação das suas estratégias, surgindo de forma natural e espontânea.

Ainda nesta tarefa, foi visível que os alunos entenderam bem a lei de formação, contudo foi necessário desafiá-los descobrirem outras regularidades, outro motivo para este número de ações ter diminuído de uma da tarefa para a outra, mas que continua próximo da anterior.

Nesta tarefa, desafiei os alunos a explicarem as suas estratégias, em relação ao número de contas que apresentaram, como podemos verificar nos excertos seguintes, em que surgem outras ações como apoiar e guiar.

Professora Catarina: Ok. (Apoiar) E aqui? Então, como é que vocês chegaram aqui a estes números? O que é que foram fazendo?

(...)

Professora Catarina: Olha, mas agora vamos olhar para os colares. (Guiar) Agora vocês têm de explicar. Porquê que é sempre de um em um aqui? Porquê que eu tenho contas vermelhas no primeiro colar um, no segundo duas? É porquê? Deixa lá a C. explicar. Porquê? (Desafiar)

No decorrer da discussão, também desafiei os alunos a pensarem sobre as estratégias e conjecturas formadas pelos colegas, como se verifica no excerto seguinte.

Professora Catarina: Catorze, fizeram catorze vezes seis que deu oitenta. Ok(Apoiar). Concordam? (Desafiar)

T.: Não.

Professora Catarina: Concordam?

Vários alunos: Não.

Para além disso, alguns alunos queriam apresentar as suas estratégias, no entanto, tive de desafiá-los a fazê-lo noutro momento da discussão, pois a sua estratégia era mais avançada, como podemos verificar no próximo excerto.

T: Podemos?

Professora Catarina: Vocês já vão fazer outra, mais difícil...

Nas ações de desafiar, na tarefa da *Sequência de Crescimento*, também procurei que os alunos justificassem os seus raciocínios, como no exemplo a seguir.

Professora Catarina: Olha, mas agora vamos olhar para os colares. (Guiar) Agora vocês têm de explicar. Porquê que é sempre de um em um aqui? Porquê que eu tenho contas vermelhas no primeiro colar um, no segundo duas? É porquê? Deixa lá a C. explicar. Porquê? (Desafiar)

Igualmente relevante, incitei os alunos a formularem e a pensarem nas regularidades das sequências, desafiando-os a explorarem as relações entre as contas vermelhas e azuis e vice-versa. Nos excertos seguintes, podemos verificar que surgem outras ações como informar, apoiar e guiar.

Professora Catarina: Não, espera. Aqui as vermelhas, MF. Aqui. Vamos só para as vermelhas. Já vamos para aí. Já vamos para aí. O primeiro colar tem uma vermelha. O segundo colar tem duas vermelhas (Informar). O que é que está a acontecer? (Desafiar)
(...)

Professora Catarina: Ok. (Apoiar) Então, qual é a relação entre as azuis e as vermelhas? (Desafiar) Agora falem de contas. Vocês disseram que as azuis são o quê das vermelhas? (Guiar)

Na tarefa dos *V's Mágicos*, apesar de o número ser ligeiramente inferior (63 ações), esta ação continua a ter um peso significativo. A tarefa, de natureza mais concreta, com material exploratório pode ter oferecido menos ocasiões para formulações verbais extensas, mas ainda assim proporcionou oportunidades para desafiar os alunos a explicar relações numéricas e justificar os seus raciocínios.

Surgiram, também, algumas regularidades que eu não tinha antecipado e, por isso, procurei guiar o pensamento dos alunos. Como não me sentia totalmente segura em relação ao que estavam a transmitir, acabava por hesitar em desafiá-los. Essa insegurança poderá ter levado, em vários momentos, a orientar mais do que a explorar ou aprofundar as ideias que os alunos estavam a construir.

No que diz respeito às ações de *desafiar* nesta tarefa, no decorrer da discussão, desafiei os alunos a formularem hipóteses, como o facto de os números pares não permitirem formar V'S Mágicos e ainda procurei que justificassem as conjecturas que elaboraram, como se verifica no próximo excerto.

Professora Catarina: Isso mesmo (Apoiar), e porque é que não conseguiram com o 2? (Desafiar)

M.: Porque é um número par.

Professora Catarina: Porque é que o par não dá? (Desafiar)

(...)

Professora Catarina: Olha F. o que fizeste foi interessante (Apoiar), porque conseguimos perceber o quê? (Desafiar)

H.C.: O que não podia acontecer nos braços é estar os números maiores num e estar os números menores noutro. Tinha de estar ali tudo misturado.

No excerto anterior, pode verificar-se que as ações de Apoiar *“Isso mesmo”* e *“Olha F. o que fizeste foi interessante”*, surgem ligadas às ações de Desafiar. Primeiro validava a ação dos alunos e depois desafiava-os com novas questões que permitissem atingir a aprendizagem pretendida.

Outra ação de desafiar que realizei foi procurar que os alunos testassem as suas conjecturas e verificassem que algumas não funcionavam, como o exemplo de terem referido que conseguiam construir V's Mágicos com os pares no vértice.

Procurei também que os alunos refletissem sobre conceitos matemáticos, como o conceito de número par e ímpar. No excerto que se segue, para além da ação desafiar, estão igualmente presentes ações de Apoiar *“Não, pois não.”*, de Guiar *“Vamos imaginar que isto são pessoas que querem dançar umas com as outras. Temos de ter pares de dança. Pode ser? Então, esta pessoa dança com esta. Certo? Isto é um?”* e de Sugerir *“Teria de ser sempre ímpar e ímpar ou par e par.”*. Estas intervenções tinham como objetivo facilitar a compreensão do conceito de paridade de maneira mais concreta, recorrendo a analogias. O próximo excerto ilustra esse momento.

Professora Catarina: Não, pois não. Teria de ser sempre ímpar e ímpar ou par e par. Mas agora fiquei confusa. Mas o que é isto do par e ímpar? Que confusão. Se eu tiver $||||| (5) + | (1) + ||| (3)$. E se eu quiser agrupar estes números? (Desafiar) Vamos imaginar que isto são pessoas que querem dançar umas com as outras (representei cada número por pauzinho, para representar as pessoas). Temos de ter pares de dança. Pode ser? Então, esta pessoa dança com esta. Certo? Isto é um?

Vários alunos: Par.

Para além de promover a exploração de conceitos, também desafiei os alunos a pensarem e refletirem sobre possíveis generalizações, incentivando-os, posteriormente, a justificarem ou explicarem essas mesmas generalizações.

Professora Catarina: E se fossem mais números pares. Por exemplo, 2-3-4-5-6. Achas que já dava com os pares? (Desafiar)

L.: Não, porque aqui tem menos ímpares.

(...)

Professora Catarina: É ímpar. (Apoiar) Vocês acham que a soma destes números vai dar ímpar ou par? (Desafiar)

(...)

Professora Catarina: Vocês acham que um par mais um par, mais um par vai dar o quê? (Desafiar)

Vários alunos: Par.

Professora Catarina: Porquê que vai dar par? (Desafiar)

Por fim, no geral, a frequência estável das ações de Desafiar poderá mostrar uma intenção pedagógica clara de promover o raciocínio matemático dos alunos, incentivando-os a ir além da resposta imediata e a envolver-se em processos de pensamento mais elaborados, embora as ações de Guiar surjam em maior quantidade.

2.2. Ação de Guiar

Estas ações de **Guiar** tinham como objetivo conduzir os alunos no progresso dos seus pensamentos, auxiliando, por exemplo, na explicação das suas estratégias e justificação das suas conjecturas para que fossem evoluindo no seu raciocínio. As questões colocadas por mim, referentes a esta ação de guiar, também levaram os alunos “a concretizar[em] a formulação de generalizações” e a explicitarem as conjecturas que formularam (Brocardo et al, 2022, p.117).

Tabela 9

Contagem das ações de Guiar por tarefa

Tarefa	V's Mágicos	Sequência dos Múltiplos	Sequência de Crescimento
Total de ações de guiar	101	121	106

As ações de Guiar, representam as mais realizadas por mim em todas as tarefas. Este facto pode dever-se a vários fatores como, por um lado, muitos alunos ainda não estavam habituados a justificar ou explicar as suas estratégias, o que tornava necessário apoiar e orientar o seu pensamento para que conseguissem avançar no raciocínio. Por outro lado, eu própria ainda não me encontrava totalmente familiarizada

com esta abordagem de ensino e, por isso, tendia a guiar em excesso, em vez de desafiar mais. Em alguns momentos, não aproveitava plenamente aquilo que os alunos estavam a tentar comunicar sobre as suas estratégias, o que me levava a orientar o pensamento deles em vez de explorar e aprofundar as suas ideias.

Na Tabela 9, verifica-se que as ações de Guiar que aparecem em maior quantidade são na tarefa da *Sequência dos Múltiplos* (121), o que pode estar relacionado com o nível de complexidade da tarefa, que envolvia múltiplas estratégias e exigia uma gestão mais cuidada e estruturada das intervenções dos alunos.

A maioria das ações de guiar, no momento de discussão coletiva, na Tarefa de *Sequência dos Múltiplos*, relacionou-se com o orientar os alunos no seu raciocínio em relação à explicitação e fundamentação das estratégias utilizadas, das conjecturas ou das regularidades da sequência.

No excerto a seguir podemos observar a minha ação de guiar os alunos na formulação de uma conjectura, em que surgem outras ações como Apoiar “Ok” e Desafiar “E agora, desenha a figura 11 da sequência. Qual vai ser a figura 11 da sequência?”.

S: O triângulo e o círculo sem cor e o triângulo e o círculo com cor.

Professora Catarina: Isto está sempre a repetir-se, ou não? (Guiar) Ok. (Apoiar) E agora, desenha a figura 11 da sequência. Qual vai ser a figura 11 da sequência? (Desafiar)

S: É um triângulo azul.

Outra ação relacionada com guiar, destaca-se na palavra “depois” quando guio o raciocínio dos alunos, para entenderem que os números na sequência se apresentam como ímpar e par, como se observa no seguinte excerto.

Vários alunos: Par.

Professora Catarina: E depois? (Guiar)

Vários alunos: Ímpar.

Professora Catarina: E depois? (Guiar)

Vários alunos: Par.

No seguimento da discussão, também guio o pensamento dos alunos no sentido de entenderem que alguma figuras apenas poderiam ser múltiplos de 2 e outras que seriam múltiplos de 2 e de 4, como ilustram os próximos exemplos.

Professora Catarina: E o que é que acontece a estes números? (Guiar)

T: Este só dá para dividir por dois, mas este dá para dividir por dois e por quatro.

Professora Catarina: E este dá para dividir por dois e por quatro? (Guiar)

T: Sim.

Professora Catarina: O que é que é este dividir por dois e por quatro? (Desafiar)

Qual é o resultado da divisão? O resto? Tem de dar sempre? (Guiar)

T: Zero.

(...)

Professora Catarina: Ok (Apiar), então este 38 vai estar aqui... Olhem, o 38 dá para dividir pelo dois e pelo quatro. (Informar) Quer dizer que ele está na tabuada de que números? (Guiar)

T: Do 4 e do 2.

T: Aqui neste par.

Dentro das ações de guiar surgiram, também, ações de validar ou enfatizar as respostas dos alunos (Apoiar) e de seguida colocar perguntas que guiavam o pensamento dos alunos, aparecendo assim, diversas vezes a ação de guiar seguida da ação de apoiar, como se pode verificar no excerto seguinte.

T: Aqui neste par.

Professora Catarina: Aqui. (Apoiar) Mas é aqui. Então o 38 é aqui? (Guiar)

T: Sim.

Professora Catarina: Ok.(Apoiar) Mas eu quero o 39? (Guiar)

T: Andas um para a frente.

Professora Catarina: Ando?

T: Um para a frente.

Professora Catarina: Um para a frente. (Apoiar) Qual é que é? A seguir? (Guiar)

No decorrer da discussão, também fui orientando os alunos para que formulassem a conjectura de que os círculos seriam sempre números pares, mas que qualquer número par aparece na tabuada do 2 e do 4. No excerto seguinte verificamos esta afirmação e podemos observar que surgem ainda ações de Apoiar “*Quatro*”, Sugerir “*Sem ser contar*” e Desafiar “*Qual é a regularidade para descobrir as figuras?*”.

Professora Catarina: Não, amor. Quem é que não percebeu como é que se descobre as figuras? Qual é a regularidade para descobrir as figuras? (Desafiar) Sem ser contar. HC, aqui. (Sugerir) Nós sabemos que estes números são sempre o quê? Os círculos são sempre o quê? (Guiar)

HC: Pares.

(...)

Professora Catarina: Quatro. (Apoiar) Mas são só os múltiplos de quatro aqui? (Guiar)

Vários alunos: Não, dois e quatro.

Professora Catarina: Porquê? Porque isto é? (Guiar)

Vários alunos: Par.

Professora Catarina: E qualquer número par está na tabuada do? (Guiar)

Vários alunos: Dois. Dois.

Professora Catarina: Portanto, também têm de ser múltiplos de? (Guiar)

Vários alunos: De dois.

T: E de quatro.

Na tarefa dos *V's Mágicos* (101 ações), apesar de ser a que regista o número mais baixo entre as três, o valor continua a ser bastante elevado, o que indica que, mesmo numa tarefa mais visual e exploratória, foi necessário guiar os alunos na leitura da informação e na estruturação do raciocínio. Este valor mais baixo em relação aos outros, tal como referido anteriormente, pode dever-se à minha inexperiência na abordagem do ensino exploratório e por outro lado, o pouco à vontade que tinha, inicialmente com os conteúdos abordados, embora os estudasse para o planeamento das tarefas, guiando excessivamente os alunos.

Durante estas ações, nesta tarefa, fui questionando os alunos de modo a guiá-los nas suas estratégias e modo de pensar.

No excerto seguinte pode observar-se que uma das ações de guiar, efetuadas por mim, se relaciona com validar ou enfatizar as respostas dos alunos (Apoiar “Boa. Ok.”) e de seguida colocar perguntas que guiassem o pensamento dos alunos, na explicação da sua estratégia, aparecendo assim, diversas vezes a ação de guiar seguida da ação de Apoiar.

G.: Então, nós fizemos primeiro número maior em baixo e depois fizemos a soma dele em cima. Por exemplo, o 5 em baixo, o 3 e o 2 em cima, que dá 5, e o 4 e o 1 em cima, que dá 5 também.

Professora Catarina: Então, o que é vocês foram ver primeiro? (Guiar)

G.: Nós começámos por ver o 5.

Professora Catarina: E depois? (Guiar)

G.: Fomos ver a soma e fizemos os dois braços. 3 mais 2 igual a 5. 5 mais 5, 10. 4 mais 1 cinco. 5 mais 5, 10

Professora Catarina: E depois foram trocando os números? Como é que fizeram isso? (Guiar)

Por outro lado, também apoiei o raciocínio dos alunos na maneira como poderiam testar uma conjectura, tal como se pode verificar no excerto seguinte.

Professora Catarina: Então os dois agora vejam lá se dá realmente (Desfiar).
Façam lá a soma dos braços. (Guiar)

Associado à ação de Guiar, coloquei também questões que ajudassem os alunos no esclarecimento de certas expressões que utilizaram para explicarem as suas estratégias, como o exemplo a seguir.

Francisco: A estratégia foi só mudar os números do lugar e colocar as contas e mudar as coisas do lugar.

Professora Catarina: Como assim do lugar? (Guiar)

Francisco: Posso desenhar?

Professora Catarina: Sim.

No final da discussão coletiva, pedi aos alunos que formassem pares de dança com o intuito de entenderem a relação entre o número de parcelas e a paridade dos números. Deste modo, outras ações de Guiar, realizadas por mim, relacionaram-se com apoiar o pensamento dos alunos no sentido de formularem a generalizações, como o excerto seguinte demonstra.

Professora Catarina: Ok... M., (Apoiar) vamos fazer aqui. Quais são os números que estamos a utilizar? 1, 2, 3, 4 e 5, certo? O 4 no vértice. Por exemplo, 3-2-4-5-1. (guiar)

M.: Impossível.

Professora Catarina: Porque é impossível? Explica lá. Se tivéssemos o 4 no vértice. (Desafiar)

(...)

Professora Catarina: Boa! (Apoiar) Vocês já repararam o que temos aqui? Um ímpar, um ímpar, mais um ímpar. São quantos ímpares? (Guiar)

Vários alunos: Três.

Professora Catarina: São três ímpares. (Apoiar) E três é número quê? (Guiar)

Vários alunos: Ímpar.

Professora Catarina: Logo vai dar? (Guiar)

(...)

Vários alunos: Ímpar.

Professora Catarina: Sobrou alguém para dançar? (Guiar)

Vários alunos: Não.

Professora Catarina: Toda a gente tem o quê? (Guiar)

Vários alunos: Par.

Professora Catarina: Então vocês acham que este número vai dar o quê?
(Guiar)

Vários alunos: Par!

Já na tarefa da *Sequência de Crescimento* (106 ações), observa-se uma ligeira diminuição face à tarefa anterior. Este valor poderá refletir um maior envolvimento dos alunos na exploração da tarefa ou, em alternativa, uma tarefa que permitia mais autonomia na resolução, exigindo menos intervenções de orientação da minha parte. Para além disso, os conteúdos trabalhados de uma tarefa para outra iam ajudando os alunos a resolver as tarefas seguintes, não sendo tão necessário desafiá-los a pensar na justificação das suas estratégias, surgindo de forma natural e espontânea. Contudo, as ações de guiar, nesta tarefa continuam a ser mais altas que as de Desafiar, podendo dever-se ao facto de que os alunos, embora participassem cada vez mais de tarefa para tarefa, não conseguissem explicar e justificar de forma clara os seus raciocínios, sendo necessário guiá-los mais vezes.

No início da discussão coletiva, na tarefa de *Sequência de Crescimento*, comecei por levar os alunos a pensarem sobre o que acontecia de um colar para o outro, orientando assim os alunos para a lei de formação da sequência, tal como se observa no próximo exemplo.

Professora Catarina: Eu vou fazer aqui o... Acende lá aí a luz, faz favor. Então. Então. Vou desenhar que é para ser mais fácil. Aqui são as? (Guiar)

Vários alunos: Vermelhas.

Professora Catarina: Ok. (Apoiar) E aqui são as? (Guiar)

Vários alunos: Azuis.

Professora Catarina: Ok. (Apoiar) Ou seja, no primeiro colar temos o quê?
(Guiar) Quantas vermelhas temos no primeiro colar?

ML: Uma.

Professora Catarina: No segundo temos? (Guiar)

T: Quatro.

Professora Catarina: Vermelhas, no segundo? (Guiar)

ML: Dois.

No excerto anterior é possível entender que validei as respostas dos alunos apoiando-as com a palavra “Ok” seguidas das ações de Guiar. Estas intervenções surgiram mais vezes durante a discussão.

Outra ação que realizei foi guiar o raciocínio dos alunos na explicação das suas estratégias, tal como se verifica no exemplo seguinte.

Professora Catarina: Ah, tu fizeste de um colar para o outro. Vai aumentando o quê? (Guiar)

C: Um.

Ligada à ação de guiar, realizei outra relacionada com o facto de levar os alunos a entenderem a relação entre os colares e as contas vermelhas, tal como se verifica no excerto seguinte, sendo que podemos perceber, novamente, que surgem ações de Apoiar antes das ações de guiar.

Professora Catarina: Mais uma. (Apoiar) Mas qual é a relação entre os colares e as contas vermelhas? Era isso que vocês estavam a dizer. As vermelhas são o quê? São iguais ao quê? (Guiar)
(...)

Professora Catarina: É sempre mais quatro. (Apoiar) Então vamos multiplicando por... (Guiar)

D e MF: Quatro.

Professora Catarina: O quê? O que é que multiplicamos por quatro? (Guiar)

MF: O um.

Professora Catarina: Um é o quê? (Guiar)

MF: É uma vermelha...

No seguimento da discussão, também guiei o pensamento dos alunos para encontrarem relações entre as contas, surgindo o conceito de quádruplo, como se verifica no excerto seguinte, em que surgem outras ações como Apoiar “Ok” e Desfiar “Então, qual é a relação entre as azuis e as vermelhas?”.

Professora Catarina: Ok. (Apoiar) Então, qual é a relação entre as azuis e as vermelhas? (Desafiar) Agora falem de contas. Vocês disseram que as azuis são o quê das vermelhas? (Guiar)

MF: O quádruplo.

Outra ação de guiar, foi recordar os múltiplos, como se verifica no exceto seguinte.

Professora Catarina: Sim, eu lembro de vocês falarem da qualquer coisa. Começado com M. (Guiar)

HC: Múltiplo.

Por sua vez, também guiei a discussão no sentido de formularem uma conjectura para identificarem as contas azuis e as vermelhas, como ilustra o exemplo seguinte.

Professora Catarina: Sim, e nós para descobrir as azuis, o que é que fazemos? (Guiar)

H: Multiplicamos.

Professora Catarina: Por quanto? (Guiar)

A: Quatro.

Professora Catarina: Estão ali quantas vezes as vermelhas? (Guiar)

H e A: Três.

(...)

Professora Catarina: Que é igual ao número do quê? (Guiar)

A: Igual ao número das quatro vermelhas.

Professora Catarina: É igual ao número do quê? Do... ? (Guiar)

H: Do... Ai, do...

Professora Catarina: Co...? Colar. Então não é? O colar também não vai de um em um? (Sugerir)

Por fim, guiei a discussão no sentido de levar os alunos a identificarem o número de contas azuis através das vermelhas e vice-versa, como se verifica nos próximos excertos.

Professora Catarina: É vezes quatro. (Apoiar) Então e se eu tiver contas azuis, como é que eu descubro as vermelhas? (Guiar)

T: A dividir por quatro. As contas azuis a dividir por quatro.

Professora Catarina: HC, se eu tiver as azuis que estavam deste lado, como é que eu descubro as vermelhas? A dividir por? (Guiar)

HC: São as azuis a dividir por quatro. Então é quarenta e oito a dividir por quatro.

Professora Catarina: Olha o que está ali. O número de contas azuis é igual ao número de contas vermelhas vezes 4. (Informar) HC, se eu tiver contas... Olha, se eu tiver uma conta vermelha que é dois, se eu tiver a conta vermelha dois, como é que eu descubro a azul? Se eu tiver a vermelha que é dois, como é que eu descubro a azul? O que é que eu faço? LS? (Guiar)

Por fim, a análise das ações de Guiar mostra que estas foram essenciais para estruturar o discurso matemático dos alunos, permitindo que a discussão coletiva fosse produtiva, coerente e compreensível para todos os alunos. O facto de ser a ação com mais número em todas as tarefas, revela que estive atenta à construção progressiva do conhecimento, com apoio constante, mas sem substituição do pensamento dos alunos.

Contudo, poderei ter guiado demasiado o pensamento dos alunos, devido à minha falta de bases em relação aos conteúdos de Álgebra, não percebendo automaticamente aquilo que os alunos me transmitiam precisando que me explicassem mais detalhadamente o seu pensamento.

2.3. Ação de Informar

As ações de Informar tiveram o papel de recordar, descrever, corrigir e/ou reforçar estratégias e ideias utilizadas e formadas pelos alunos e fornecer informações sobre a tarefa (Brocardo et al, 2022).

Tabela 10

Contagem das ações de Informar por tarefa

Tarefa	V's Mágicos	Sequência dos Múltiplos	Sequência de Crescimento
Total de de informar	7	16	25

Segundo se observa na Tabela 10, descrita acima, as ações de Informar mostram um aumento progressivo ao longo das tarefas.

Na tarefa dos *V's Mágicos*, o número reduzido de ações de Informar (7) pode estar relacionado com vários fatores. O primeiro poderá indicar que à medida que as tarefas se foram tornando mais complexas, surgiu a necessidade de clarificar e relembrar aspetos essenciais da tarefa e desconstruir conjecturas que poderiam comprometer o avanço da discussão, evitando que os alunos se dispersassem no raciocínio matemático da tarefa. Outro fator pode estar relacionado com o facto de que muitos alunos ainda não dominavam processos como justificar, explicar ou generalizar, embora na primeira tarefa conhecessem o conceito de número par e ímpar, não tinham ainda experiência com sequências, tanto de repetição como de crescimento o que poderá ter levado a intervenções mais frequentes para apoiar o desenvolvimento de estratégias. O aumento das ações de Informar poderá também refletir a minha própria atuação. À medida que as tarefas se tornavam mais complexas, é possível que, em alguns momentos, tenha assumido uma postura mais transmissiva, fornecendo informação e esclarecimentos que julgava necessários. Esta opção pode ter surgido da percepção de que os alunos poderiam não conseguir responder plenamente aos desafios que lhes colocava através das ações de Desafiar.

No exemplo seguinte, pode verificar-se que recordei uma ideia que foi construída em grupo turma, iniciando o excerto com uma ação de desafiar, na tarefa dos V's Mágicos.

Professora Catarina: O que está aqui a acontecer? (Desafiar) Nós temos $1+5+4$ e a seguir temos $2+3+4$. O 4 no vértice. Aqui temos ímpar+ímpar+par. (Informar)

Também, no excerto seguinte, saliento uma estratégia realizada por um par, finalizando o diálogo com uma ação de convidar.

G.: Fomos trocando a ordem dos números.

D.: Temos estes números iguais (o número do vértice) e fomos trocando estes (os dos braços).

(...)

Professora Catarina: Então, vocês foram trocando os números de cima. (Informar) E encontraram, quantos V's mágicos? (Convidar)

No momento de discussão coletiva, recordei os caminhos seguidos pelos pares, como podemos observar no excerto seguinte, finalizando com uma questão associada a uma ação de guiar.

Professora Catarina: Então...Eu tenho aqui um par (soma de um braço) e tenho aqui um ímpar (soma de outro braço). (Informar) Isto é igual? (Desafiar)

Na tarefa da *Sequência dos Múltiplos*, o número de ações de Informar mais do que duplica (16), o que poderá indicar que a tarefa exigiu maior domínio de vocabulário matemático, compreensão de conceitos ligados à multiplicação ou à divisibilidade, ou ainda o esclarecimento de dúvidas quanto à lei de formação da sequência. Estas ações podem ter sido necessárias para garantir que todos os alunos compreendiam as conjecturas inerentes à tarefa e que podiam participar de forma equitativa.

Durante a discussão coletiva, no que diz respeito a ações de informar, recordei estratégias que os pares realizaram e conjecturas formuladas pelo grupo turma, como ilustram os seguintes excertos

Professora Catarina: E tu fizeste assim, HC. Assim, assim, assim. (Informar)
(...)

Professora Catarina: Pois. Pronto, já percebemos que aquela estratégia também não resulta. Obrigada, amigos. (Apoiar) Pronto. É só para vermos que esta não resultou, não foi? (Informar)

(...)

Professora Catarina: Ah, foi o que vimos à bocado, ou não? Vejam lá. De dois em dois. Eu tenho dois... (Informar)

Outra ação de informar realizada por mim foi esclarecer os alunos de que existem várias estratégias válidas e que a estratégia de um par não invalida outra, como se lê no seguinte excerto.

Professora Catarina: Mas isto é para nós descobrirmos. Não estava errado nem certo. Isto era para nós descobrirmos, H.C. (Informar)

Por fim, na tarefa da *Sequência de Crescimento*, observa-se o maior número de ações de Informar (25). Este aumento pode estar relacionado com o nível de abstração envolvido nas sequências, que exige frequentemente passar de um pensamento concreto para o abstrato. Também poderei ter sentido necessidade de apoiar os alunos com esclarecimentos ou recordar conceitos como os termos da sequência, e ainda ajudar os alunos na representação em tabelas ou outras formas de registo matemático.

As ações de informar, realizadas por mim, surgiram em grande parte relacionadas com o recordar as estratégias utilizadas pelos pares, neste caso para descobrirem o número de contas. Os próximos excertos mostram essas ações e outras que surgem como ações de Apoiar “*Pronto*”, Sugerir “*Acham mais fácil assim ou como vocês fizeram?*”, Desafiar “*Não está errado, pois não?*” e Convidar “*Deu igual ao que vocês têm?*”.

Professora Catarina: Pronto. (Apoiar) Então, elas foram de um em um para descobrir e aqui de quatro em quatro. (Informar) Não está errado, pois não? (Desafiar) Deu igual ao que vocês têm, não deu? (Convidar)
(....)

Professora Catarina: Mas ali o M. e o D., eles foram fazer uma coisa mais difícil, o que é que vocês fizeram? Vocês foram descobrir o quê? Foram descobrir números que vezes 4 desse o 48. (Informar) Acham mais fácil assim ou como vocês fizeram? (Sugerir)

No seguimento da discussão, também relembrei os alunos das conjecturas que formulámos em grupo turma, como nos exemplos a seguir, revelando outras ações como Guiar “*Para descobrirmos as azuis fazemos vezes quatro o quê?*” e Desafiar “*Então A, agora explica lá à Catarina porque é que fizeste oito vezes quatro.*”.

Professora Catarina: Dissemos que para descobrir as azuis era vezes quatro as... Para descobrirmos as azuis era vezes quatro as... (Informar) Para descobrirmos as azuis fazemos vezes quatro o quê? (Guiar)

(...)

Professora Catarina: Tu sabes, C? Fizeste uma conta. Então, nós já sabemos a relação. Até está ali. (Informar)

(...)

Professora Catarina: O primeiro colar tem uma, o segundo colar tem duas, o terceiro colar... (Informar) Então A, agora explica lá à Catarina porque é que fizeste oito vezes quatro. (Desafiar)

Para além das conjecturas, também descrevi as generalizações que os alunos construíram, no que diz respeito às relações entre as contas. Os próximos excertos ilustram essas ações, surgindo outras ações como apoiar e desafiar.

Professora Catarina: Que é o mesmo do número dos colares. Ok (Apoiar). Mas vocês encontraram aqui uma relação. Entre o número das contas vermelhas e as azuis, não encontraram? (Informar) O que é que vocês disseram? Qual foi a relação que vocês encontraram? (Desafiar)

(...)

Professora Catarina: Vezes quatro e descubro a azul. (Apoiar) Então, se eu agora tiver vinte e quatro azuis, como é que eu descubro as vermelhas? É o contrário. Divido por quatro, que é seis. (Informar) HC, se eu tiver uma conta vermelha, como é que eu descubro a azul? Como é que eu descubro? Tu disseste. Tu fizeste a tabela. (Desafiar)

O crescimento contínuo das ações de Informar sugere que, à medida que as tarefas se foram tornando mais exigentes ou abstratas, intervim com um papel mais ativo em momentos-chave, de forma a apoiar o pensamento dos alunos e avançar dessa maneira com a discussão. Por outro lado, em certos momentos poderei ter recorrido à ação de informar evitando desafiar, pois tive dificuldade em entender o raciocínio dos alunos. Ainda assim, o número de ações desta categoria continua a ser relativamente baixo face a outras, o que poderá indicar que tentei evitar um ensino mais expositivo, privilegiando a participação dos alunos, embora tenha acontecido pontualmente.

2.4. Ação de Sugerir

As ações de Sugerir foram as que se manifestaram menos vezes, contudo estas ações surgiram com objetivo de comentar uma ideia ou estratégia, válida ou não, dos alunos, de forma subtil ou apresentar uma justificação para o que os alunos fizeram. Ao contrário das ações de Informar, que pretendem transmitir uma informação clara, as

ações de Sugerir focam-se em sugerir uma direção ao aluno, contudo, mantém o desenvolvimento do raciocínio ativo (Brocardo et al., 2022).

Tabela 11

Contagem das ações de Sugerir por tarefa

Tarefa	V's Mágicos	Sequência dos Múltiplos	Sequência de Crescimento
Total de ações de sugerir	3	12	13

As ações de Sugerir, tal como se observa na Tabela 11, aumentam substancialmente da primeira para a segunda tarefa e, de forma menos acentuada, da segunda para a última tarefa.

Sugerir, praticamente inexistente na primeira discussão, aumenta de forma expressiva nas duas seguintes. Este aumento poderá refletir uma estratégia de intervenção mais ativa da minha parte, propondo ideias ou abordagens sem resolver diretamente as tarefas, pois na segunda tarefa e na última já me sentia mais segura a intervir e a encontrar os momentos certos para sugerir. Outro fator para este aumento, poderá estar relacionado com a participação mais ativa e progressiva dos alunos de tarefa para tarefa. Ao se sentirem mais familiarizados com a abordagem participavam com mais estratégias, contudo com a complexidade crescente das tarefas, poderá ter sido necessário a validação ou não das conjecturas partilhadas, por exemplo.

Na tarefa dos *V's Mágicos*, o número reduzido de ações de Sugerir (3 ações) poderá indicar que privilegiei mais ações de Guiar ou Desafiar. É possível também que o trabalho mais visual e exploratório da tarefa tenha permitido que os alunos testassem as suas ideias com maior autonomia, através de materiais manipuláveis

No seguinte excerto, pode verificar-se que sugeri que os alunos verificassem a paridade dos números através de pares de dança. As ações de Apoiar, Guiar e Desafiar também aparecem associadas à de Sugerir.

Professora Catarina: Não, pois não. (Apoiar) Teria de ser sempre ímpar e ímpar ou par e par.(Sugerir) Mas agora fiquei confusa. Mas o que é isto do par e ímpar? Que confusão. Se eu tiver I I I I I (5) + I (1) + I I I (3) . E se eu quiser agrupar estes números? (Desafiar)Vamos imaginar que isto são pessoas que querem dançar umas com as outras (representei cada número por pauzinho, para

representar as pessoas). (Guiar) Temos de ter pares de dança. Pode ser? (Sugerir) Então, esta pessoa dança com esta. Certo? Isto é um? (Guiar)

Na *Sequência dos Múltiplos*, observa-se um aumento significativo (12 ações), o que pode estar relacionado com a complexidade da tarefa em que os alunos não estavam seguros a trabalhar as sequências, sendo necessário sugerir outras maneiras de desenvolver as suas estratégias. Ainda posso ter recorrido a sugestões para resolver dificuldades, orientar a atenção dos alunos para certos aspetos da sequência ou convidar à experimentação de estratégias.

No decorrer da discussão coletiva, da Tarefa 3, a maioria das ações de sugerir estão relacionadas com a minha ação de notar as estratégias pouco adequadas dos pares e sugerir que utilizem outras. Os exemplos seguintes verificam essas ações.

Professora Catarina: Pois, Olha a contar está certo, mas tinham de contar assim. Porque senão estavas a fazer mal o grupo de repetição. (Sugerir)
(...)

Professora Catarina: Ah. Mas se eu não quisesse contar, havia uma maneira mais fácil. (Sugerir)
(...)

Professora Catarina: Seis vezes o dois. Já viram como a divisão e a multiplicação estão relacionadas? (Sugerir)

As ações de sugerir realizadas por mim, surgiram também, posteriormente a ações de Apoiar “*Obrigada. Podem ir. Obrigada, mas isso é uma estratégia.*” e Guiar “*Oh, ML e F vocês disseram outra estratégia que agora eu quero ver se está certa. A do 25, o quê que é que vocês disseram?*”, como mostra o próximo excerto

Professora Catarina: Ah, então olhem, amigas, contar.... Oh, amigos, contar é uma estratégia, mas é mais difícil se eu quiser números grandes, certo? (Sugerir) Obrigada. Podem ir. Obrigada, mas isso é uma estratégia. (Apoiar) Oh, ML e F vocês disseram outra estratégia que agora eu quero ver se está certa. A do 25, o quê que é que vocês disseram? (Guiar)

Na *Sequência de Crescimento*, as ações de Sugerir foram contabilizadas 13 vezes. Tendo em conta que esta tarefa envolve várias regularidades, é natural que tenham surgido momentos em que senti necessidade de sugerir formas de desenvolver as estratégias, por exemplo, sugerindo o uso de tabelas que ajudassem os alunos a avançar na resolução.

As ações de sugerir, tal como nas restantes tarefas, surgiram em forma de reparo subtil para estratégias menos significativas para a aprendizagem em questão sugerindo outros caminhos, como nos exemplos seguintes.

Professora Catarina: É sempre quatro mais quatro. Aqui está certo. E aqui também. (Apoiar) Um mais um, mais um. Mas se tu fores fazendo mais um, mais um, mais um, até vinte, não dá catorze. Pois, dá o quê, ML? Se nós estivemos a contar de um em um. Ah, se nós estivemos a contar de um em um, dá o quê? Eu não posso saltar. Aqui nem saltaste. Aqui faltam números pelo meio. Se é de um em um, faltou aqui qualquer coisa. (Sugerir)

(...)

Professora Catarina: Mas eu acho que há maneiras mais fáceis de lá chegarmos, ou não? (Sugerir)

(...)

Professora Catarina: Fizeste quatro vezes vinte e deu-te cento e trinta? Precisas fazer de novo. (Sugerir)

As ações de sugerir apareceram também articuladas com outras, como a ação de Apoiar “*Sim*” e de Desafiar “*T e F. Expliquem lá porquê que fazemos se tivermos oito vermelhas, como é que nós descobrimos as azuis?*”. O excerto seguinte ilustra essas ações.

Professora Catarina: Sim, mas vocês não estão a saber explicar. (Sugerir) Sentem lá. T e F. Expliquem lá porquê que fazemos se tivermos oito vermelhas, como é que nós descobrimos as azuis? (Desafiar)

Este crescimento das ações de Sugerir poderá demonstrar uma evolução na minha prática. Recorri a este tipo de intervenção de forma mais frequente à medida que as tarefas exigem raciocínios mais abstratos, estratégias diversificadas ou formas mais sofisticadas de representação.

2.5. Ação de Convidar

As ações de Convidar tiveram como intenção promover e/ou convidar o envolvimento direto dos alunos, nos momentos de discussão coletiva (Brocardo et al., 2022).

Tabela 12

Contagem das ações de Convidar por tarefa

Tarefa	V's Mágicos	Sequência dos Múltiplos	Sequência de Crescimento
Total de ações de convidar	27	28	18

Como se verifica na Tabela 12, nas tarefas dos *V's Mágicos* e da *Sequência dos Múltiplos*, o número de ações de Convidar é muito semelhante (27 e 28, respetivamente), o que revela uma forte intenção de fomentar a participação ativa dos alunos. Em ambas as discussões, poderá demonstrar que assumi uma postura promotora do diálogo, recorrendo com frequência a perguntas abertas e a convites à partilha de estratégias. O decréscimo na última tarefa poderá estar ligado à participação espontânea dos alunos, sem ser necessário convidá-los para tal. Por outro lado, também poderei ter assumido um papel mais transmissivo. Ainda noutra perspetiva, este decréscimo pode dever-se ao facto de me sentir mais confortável em desafiar os alunos com questões que os incitavam a participar em vez de pedir-lhes diretamente para tal. Os alunos também poderão estar mais abertos a participar sendo que nesta última tarefa já estão mais familiarizados com a abordagem de ensino exploratório.

Nos exemplos a seguir, convidei os alunos a partilharem as suas resoluções ou a participarem na discussão.

Professora Catarina: Quero saber aquilo que descobriram. O G. e o D. descobriram quantos Vs mágicos? (Convidar)
(...)

Professora Catarina: G. e D. venham explicar como descobriram os Vs mágicos. (Convidar)

No momento de discussão coletiva, da Tarefa de *Sequência dos Múltiplos*, foram contabilizadas 12 ações de convidar que tinham como propósito incentivar os pares a envolverem-se na discussão e a partilharem as suas ideias. Os seguintes excertos mostram essas ações.

Professora Catarina: De contar funcionou. (Apoiar) Ali o H. O H e o C, podem chegar aqui, se faz favor. (Convidar) O H contou de outra maneira. Também é difícil de contar, já sabemos. Mas ele arranjou assim uma maneira mais fácil de contar. (Sugerir)

(...)

Professora Catarina: Pronto. (Apoiar) Está-nos a faltar aqui qualquer coisa. Não está? (Desafiar) Mas tu já estás a chegar ao caminho. H, muito bem. Obrigada pela tua estratégia. Aqui o L.S e a MA também querem partilhar alguma coisa, ou não? (Convidar) O que é que tu descobriste aqui nas figuras? E a M também. (Desafiar)

(...)

Professora Catarina: Pois, mas temos aqui um problema, ou não? (Desafiar) Se calhar o T já resolveu, mas ele já vem dizer. (Convidar) Nós temos sempre ímpar, (Informar) e depois? (Desafiar)

Como podemos observar nos exemplos anteriores, as ações de convidar surgiram na sequência de outras ações: informar, sugerir, desafiar e apoiar.

Na *Sequência de Crescimento*, porém, observa-se uma diminuição desta ação (18 ações). Esta descida pode ter várias explicações possíveis, tal como indicado anteriormente:

-A tarefa pode ter promovido uma participação mais espontânea e autónoma, reduzindo a necessidade de convites explícitos;

-Eu poderei poder ter priorizado outras ações, como Guia, Apoiar ou Desafiar, por considerar que os alunos já estavam suficientemente envolvidos;

-Esta quebra pode indicar que os alunos passaram a intervir de forma mais espontânea, tornando desnecessárias muitas ações de convite à participação. Tal pode ser visto como um sinal de progresso na dinâmica da discussão coletiva

As ações de convidar, foram realizadas com o objetivo de incitar os alunos a participarem no momento de discussão coletiva partilhando as suas estratégias e ideias, tal como nas restantes tarefas. Nos seguintes excertos analisa-se estas ações.

Professora Catarina: Toda a gente tem dezasseis ou pôs diferente? Dezasseis contas (escreve no quadro). ML e SH, fizeram isto, certo? Disseram que tinham quatro contas vermelhas e dezasseis contas azuis. Como é que vocês lá chegaram? Podem vir aqui. (Convidar) Como é que vocês chegaram? Quatro contas vermelhas no quarto colar e dezasseis contas azuis. Como é que vocês descobriram? (Desafiar) Contaram o que é que vocês fizeram? (escrevem no quadro) (Convidar)

(...)

Professora Catarina: Estão? Então como é que tu fizeste, ML e SH? Como é que fizeram? Digam lá outra vez, porque eu não sei se os vossos colegas ouviram. (Convidar)

(...)

Professora Catarina: Quem que é que fez diferente? (Convidar)

As ações de convidar também apareceram interligadas com outras ações como: Apoiar e Guiar, como se verifica no próximo excerto.

Professora Catarina: Ok, (Apoiar) MF, D, venham cá. Mas eu agora preciso que me expliquem porque é que é de... o M se calhar agora consegue explicar. (Convidar) Que eu acho que ele conseguiu. (Apoiar) M, explica lá agora à Catarina. Agora vou apagar, desculpem. Vocês concordam? Concordaram ou não concordaram que é das azuis para as vermelhas fazemos o quê? Vezes? (Guiar)

Apesar da descida na terceira discussão, o número total de ações de Convidar mantém-se considerável, o que poderá confirmar a minha preocupação com o envolvimento dos alunos nos momentos de discussão coletiva. Esta ação é fundamental para garantir a envolvimento de diferentes estratégias e ideias e a construção coletiva do conhecimento matemático em questão.

2.6. Ação de Apoiar

As ações de Apoiar, no momento de discussão coletiva, apareceram relacionadas com validações ou reforços positivos das estratégias ou afirmações feitas pelos alunos, de forma a encorajá-los na partilha de ideias ou no desenvolvimento das suas estratégias ou conjecturas (Brocardo et al., 2022).

Tabela 13

Contagem das ações de Apoiar por tarefa

Tarefa	V's Mágicos	Sequência dos Múltiplos	Sequência de Crescimento
Total de ações de apoiar	35	92	86

Apoiar é a ação que mais cresce entre a primeira e a segunda tarefa, como se verifica na Tabela 13, mantendo valores elevados na terceira. Isto pode dever-se à necessidade de dar segurança e valorizar os contributos dos alunos, principalmente em

momentos em que demonstram maior fragilidade. O aumento das ações de Sugerir também pode estar associado à participação mais ativa, sobretudo por parte dos alunos com maiores fragilidades. Nestes casos, a minha intervenção procurou valorizar e reforçar positivamente as contribuições destes alunos, incentivando-os a continuar a participar.

Na tarefa dos *V's Mágicos*, com 35 ações de Apoiar, pode verificar-se que as ações tiveram como objetivo reconhecer os esforços dos alunos e reforçar positivamente as suas intervenções. O valor mais baixo observado nesta tarefa poderá estar relacionado com o facto de ter sido a primeira vez em que tive contato este tipo de abordagem com esta turma e qualquer uma. Por não conhecer ainda como os alunos iriam reagir, nem se necessitariam de muito *feedback*, sobretudo positivo, a minha intervenção foi mais cautelosa e menos consistente. Só posteriormente se revelou que, de facto, estes alunos beneficiavam bastante desse tipo de apoio. Ainda neste sentido, a menor participação dos alunos nesta primeira tarefa poderá também ter contribuído para a reduzida ocorrência destas ações, uma vez que menos interações significam menos oportunidades para reforçar as ideias apresentadas.

Assim sendo, pode verificar-se, ao longo da discussão coletiva, a palavra “Ok” e “Boa” para validar ou apoiar a resposta dos alunos. O seguinte excerto mostra essas ações.

Professora Catarina: Boa! Ok. (Apoiar) Então, qual foi a vossa estratégia? (Convidar)

Por vezes, também enfatizava a resposta dos alunos, repetindo-a, como mostra o exemplo seguinte.

Lucas: Porque havia ali 2 pares e aqui só um.

Professora Catarina: Porque aqui havia 2 pares e aqui só um deste lado. Ok. Estamos quase lá. Obrigada, amigos. (Apoiar) Agora pode vir o grupo da M., explicar. Descobriram quantos Vs mágicos? (Convidar)

As ações de apoiar, surgiram, também, muitas vezes posteriores às ações de Sugerir, Guiar, Desafiar e Convidar, como se pode observar nos seguintes excertos.

Professora Catarina: Boa. (Apoiar) Agora o L. vai se juntar ali à M. e ao T.. Vai lá, L.. Vocês ficam juntos. (Convidar) Vocês são um número (n.º3). (Informar) Então, que números é que temos ali? A M. o T. e o L., são um número..?? (Guiar) (...)

Professora Catarina: Boa. Boa estratégia. (Apoiar) E conseguiram com o número 2 e com o número 4 no vértice? com o número 4? Tentaram? (Desafiar)

A tarefa da *Sequência dos Múltiplos* (92 ações), mostra um aumento muito significativo o que pode ser interpretado de várias formas, tal como descrito anteriormente. A participação dos alunos foi aumentando e por isso poderá ter ocorrido uma maior necessidade de Apoiar e dar-lhes *feedback*. Outro aspeto é que nesta tarefa foram contabilizadas mais ações no total e isso poderá influenciar o aumento das ações de Apoiar. Em relação à minha atuação, também estava mais desperta para as necessidades do grupo, como ser essencial Apoiar as ações dos alunos de modo a incentivá-los a continuarem a participar.

Durante a discussão coletiva utilizei várias vezes a palavra “Ok” e “Boa” para validar a resposta dos alunos. Também enfatizei a resposta dos alunos, repetindo-a, como mostra o seguinte exemplo.

Professora Catarina: Ok. É verdade (Apoiar), porquê? Porquê o que está sempre a repetir-se, amigas? Expliquem lá. (Desafiar)

(...)

Professora Catarina: Era o grupo de? (Guiar)

H: Repetição.

Professora Catarina: Repetição. (Apoiar) Está tudo de acordo, certo? (Desafiar)

Turma: Certo.

(...)

T: Então dá para fazer uma divisão do resto de zero.

Professora Catarina: Boa. (Apoiar) Mas temos de ver mais do que? Temos aqui outro? (Guiar)

Na tarefa da *Sequência de Crescimento*, apesar de uma ligeira diminuição (86 ações), os valores continuam muito elevados. Este dado sugere que o continuei a Apoiar as ações os alunos. Ainda este apoio pode ter sido essencial para manter os alunos envolvidos e confiantes perante um desafio mais abstrato. Pode ter diminuído, pois nesta tarefa ocorreram menos ações no total.

Neste caso, e como em todas as tarefas recorri às palavras “Ok” e “Boa” para validar a resposta dos alunos e repeti as suas respostas reforçando-as, como ilustra o seguinte excerto.

Professora Catarina: Ok. (Apoiar) E aqui são as? (Guiar)

Vários alunos: Azuis.

Professora Catarina: Ok. (Apoiar) Ou seja, no primeiro colar temos o quê? Quantas vermelhas temos no primeiro colar?(Guiar)
(...)

Professora Catarina: Boa! (Apoiar) Então, como é que nós descobrimos as azuis se tivermos as vermelhas? (Guiar)

De um modo geral, as ações de Apoiar revelaram uma prática inclusiva, que valorizou não apenas as respostas corretas dos alunos, mas o esforço, o progresso e a participação ativa dos mesmos. O aumento desta ação ao longo das tarefas teve como objetivo visível a atenção que tentei dar às exigências emocionais e cognitivas dos alunos, especialmente quando as tarefas apresentavam maior complexidade ou quando o raciocínio se tornou mais exigente.

Síntese

A análise revela uma evolução consistente da minha ação enquanto facilitadora da discussão coletiva, tal como se verifica com as ações de Guiar que aparecem em maior quantidade. Fui, também, adaptando as minhas ações às exigências das tarefas e ao desenvolvimento do grupo, beneficiando sempre das planificações que me ajudaram a prever algumas ações dos alunos.

As ações de Guiar e Desafiar destacam-se, mostrando uma prática de construção partilhada do conhecimento, em que tentei sair de um registo de ensino direto, desafiando os alunos a desenvolverem o seu raciocínio matemático e a serem o centro da sua aprendizagem. O aumento das ações de Apoiar, Informar e Sugerir sugere um ajuste da minha intervenção face às dificuldades observadas, procurando garantir a inclusão de todos os alunos na discussão. Já a diminuição das ações de Convidar pode indicar um desenvolvimento positivo na espontaneidade e envolvimento dos alunos e um à-vontade com a abordagem exploratória.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente capítulo, irei responder às questões de investigação, sendo, em primeiro lugar, essencial lembrar que o tema deste relatório que se designa como *ações do professor na condução de discussões coletivas em tarefas de Álgebra: um estudo no 4.º ano*.

Partindo do objetivo central do estudo, que consiste em caracterizar as ações do professor nos momentos de discussão coletiva em tarefas de Álgebra, surgiram as seguintes questões de investigação:

- i. Como se caracterizam as ações do professor nos momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra?
- ii. Quais os desafios e dificuldades sentidas pelo professor durante a condução dos momentos de discussão coletiva?
- iii. De que modo a planificação das ações do professor contribuiu para a condução das discussões coletivas das tarefas?

Esta investigação permitiu responder às questões propostas, tendo por base a dinamização de três tarefas de Álgebra em contexto de ensino exploratório. Cada sessão foi organizada em quatro momentos referentes ao ensino exploratório: a introdução da tarefa, o trabalho autónomo dos alunos, a discussão coletiva e a sistematização das aprendizagens. O foco desta análise incidiu sobre os momentos de discussão coletiva, com o objetivo de analisar e caracterizar as minhas ações, nos momentos de discussão coletiva.

Como foi descrito ao longo deste relatório, as ações realizadas por mim decorreram num contexto de ensino exploratório em que a minha prática tinha como objetivo desenvolver o raciocínio matemático mais propriamente o pensamento algébrico dos alunos. As ações decorrentes dessa prática foram categorizadas através de um modelo proposto por Ponte (2013) e desenvolvido por Brocardo et al. (2022). Estes autores, que apresentam investigações nesta vertente, foram inspiração para desenvolver a minha investigação. As ações foram analisadas de forma quantitativa e qualitativa, sendo posteriormente comparadas de forma global e depois analisadas de forma individual comparando-as de forma quantitativa e qualitativa. Também, as planificações revelaram-se um apoio essencial, permitindo que as minhas intervenções

fossem mais estruturadas, objetivas e precisas, favorecendo a condução eficaz das discussões.

Importa ainda referir que o facto de a Álgebra ter sido recentemente introduzida nas Aprendizagens Essenciais como tema autónomo contribuiu para enriquecer o estudo, permitindo observar como os alunos desenvolvem o seu pensamento algébrico em contextos de ensino exploratório.

Como se caracterizam as ações do professor nos momentos de discussão coletiva de tarefas de Álgebra?

Para responder à questão ‘Como se caracterizam as ações do professor nos momentos de discussão coletiva de tarefas de ?’, como dito anteriormente, foi realizada uma análise detalhada das ações do professor em três tarefas distintas, num contexto de ensino exploratório. Nesta secção, apresento, em primeiro lugar, as ações realizadas por mim em momentos de discussão coletiva, caracterizando-as e relatando como foram dinamizadas no contexto da discussão coletiva, identificando padrões recorrentes na sua articulação. As ações em questão são: Guiar, Desafiar, Informar, Sugerir, Convidar e Apoiar.

As ações de **Guiar** constituem um conjunto de intervenções do professor que têm como objetivo principal guiar os alunos no progresso dos seus pensamentos matemáticos, ajudando-os a avançar gradualmente na construção dos conhecimentos. Estas ações ocorrem através de questões que incentivam e orientam os alunos a explicarem as suas estratégias, a justificarem as suas conjecturas, a testarem hipóteses e a formularem, criticarem ou reformularem generalizações. Ao recorrer a este tipo de questionamento, o professor constrói oportunidades para que os alunos não apenas manifestem as suas ideias, mas também reflitam sobre elas, confrontem diferentes pontos de vista e desenvolvam um raciocínio cada vez mais estruturado e fundamentado (Brocardo et al., 2022).

Na minha prática, durante as discussões coletivas, recorri frequentemente às ações de Guiar como forma de orientar o raciocínio dos alunos em relação à explicação e justificação das estratégias que utilizavam, das conjecturas formuladas e das regularidades identificadas nas tarefas. Estas ações revelaram-se essenciais para apoiar os alunos na construção progressiva do conhecimento, permitindo que fossem além da simples partilha de estratégias e refletissem sobre as opções tomadas no desenvolvimento do seu raciocínio e resoluções.

Um recurso linguístico que utilizei com frequência foi a palavra “depois”, que funcionava como incentivo para os alunos progredirem no seu raciocínio.

Importa ainda destacar que a ação de Guiar muitas vezes esteve associada a outras ações, como Apoiar e Desafiar. Por exemplo, em diversos momentos, primeiro validava ou apoiava a intervenção de um aluno e de seguida guiava-o no seu raciocínio. Noutras situações, após desafiar os alunos com uma questão mais complexa, recorria à ação de Guiar para os ajudar a estruturar o pensamento.

A ação de **Desafiar** corresponde ao conjunto de intervenções do professor que têm como intuito de incitar os alunos a justificarem e explicarem as suas estratégias e raciocínios, a testarem conjecturas, a formularem, criticarem e reformularem generalizações e a refletirem sobre as estratégias utilizadas. Trata-se de uma ação pedagógica que visa colocar os alunos perante questões que os obrigam a ir além da resposta imediata, incentivando-os a envolver-se em processos de pensamento mais elaborados e críticos (Brocardo et al., 2022).

Na minha prática, recorri frequentemente à ação de Desafiar para provocar os alunos a explicitarem e justificarem as suas conjecturas e estratégias, bem como criarem generalizações e a pensarem sobre regularidades que surgiam das tarefas. Muitas vezes, estas regularidades não tinham sido antecipadas por mim, o que me levou a recorrer, algumas vezes, à ação de Guiar para apoiar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

Um recurso que utilizei muitas vezes foi o uso da pergunta “porquê”, que funcionava como incentivo para que os alunos fundamentassem as suas ideias e refletissem sobre que estratégia adotar e que caminhos seguirem. Além disso, desafiei-os a pensarem nas estratégias dos colegas, promovendo o desenvolvimento da análise crítica e o confronto de diferentes estratégias. Em diversos momentos, primeiro validava a intervenção dos alunos e, em seguida, desafiava-os com novas questões que permitissem atingir a aprendizagem pretendida.

A ação de Desafiar esteve frequentemente articulada com a ação de Guiar, surgindo muitas vezes em sequência: após desafiar os alunos com uma questão mais complicada, recorria à ação de Guiar para apoiar o desenvolvimento das ideias dos alunos.

Apesar da importância da ação de Desafiar, percebo que em alguns momentos hesitei em utilizá-la, sobretudo quando não me sentia totalmente segura em relação ao que os alunos me estavam a transmitir. Nessas situações, optei por recorrer mais à ação de Guiar, que me permitia acompanhar o raciocínio dos alunos de forma mais próxima.

As ações de **Informar** desempenham um papel essencial na prática docente, pois permitem ao professor recordar, descrever, corrigir e/ou reforçar estratégias e ideias que foram utilizadas ou construídas pelos alunos, bem como transmitir informações importantes sobre a tarefa em questão. Esta ação contribui para consolidar aprendizagens, clarificar conceitos e assegurar que todos os alunos compreendem as opções tomadas na construção da aprendizagem em questão. (Brocardo et al., 2022).

Na minha prática, recorri às ações de Informar em diferentes momentos das discussões coletivas: recordei ideias desenvolvidas anteriormente pelos alunos, ajudando-os a retomar o fio condutor da tarefa; relembrei os caminhos seguidos pelos pares, destacando estratégias que tinham sido realizadas e conjecturas formuladas pela turma; esclareci os alunos de que existem várias estratégias válidas, reforçando que a escolha de uma não invalida outra; relembrei as conjecturas formuladas em grupo, permitindo que os alunos não se perdessem do progresso da investigação/tarefa em questão; descrevi as generalizações construídas pela turma, ajudando-os a compreender como as suas ideias individuais eram essenciais para a construção do conhecimento de todos.

Tal como aconteceu com as ações de Guiar e Desafiar, também as de Informar surgiram ligadas a outras. Muitas vezes, após informar os alunos sobre uma ideia ou estratégia, seguia-se uma ação de Guiar ou de Desafiar, com o objetivo de aprofundar o raciocínio ou para incitar novas reflexões e generalizações.

As ações de **Sugerir** têm como objetivo comentar uma ideia ou estratégia dos alunos, válida ou não, de forma ténue, ou apresentar uma justificação para aquilo que os alunos fizeram. Ao contrário das ações de Informar, que têm como objetivo transmitir uma informação clara e direta, as ações de Sugerir focam-se em indicar um caminho possível, não descurando do desenvolvimento do raciocínio dos alunos e incentivando-os a refletirem sobre as suas próprias estratégias (Brocardo et al., 2022).

Na minha prática, recorri às ações de Sugerir, por exemplo, para sugerir que aos alunos que verificassem as suas conjecturas, com exemplos práticos, de forma a tornar o seu raciocínio mais concreto. Também, por vezes, notava que as estratégias eram pouco adequadas, e por isso sugeria que explorassem outras.

Algumas das minhas ações de Sugerir ocorreram também em forma de chamada de atenção discreta para estratégias não válidas, sugerindo outros caminhos sem invalidar o esforço ou a ideia dos alunos.

A ação de Sugerir apareceu ligada, muitas vezes, às ações de Apoiar, Guiar e Desafiar. Após apoiar ou validar uma intervenção, sugeria um novo caminho ou estratégia para que os alunos pudessem avançar no seu raciocínio. Depois de guiar os alunos na explicitação de uma estratégia, também, sugeria que verificassem ou reformulassem a sua estratégia.

As ações de **Convidar** têm como objetivo incentivar a participação direta dos alunos nos momentos de discussão coletiva. Estas ações procuram criar oportunidades para que os alunos participem ativamente, partilhem as suas estratégias e expliquem as suas ideias, contribuindo para a construção coletiva do conhecimento (Brocardo et al., 2022).

Na minha prática, recorri às ações de Convidar para incentivar os alunos a partilharem as suas estratégias e resoluções e a participarem ativamente nas discussões coletivas. Durante as discussões coletivas procurei estimular a participação dos pares, procurando reforçar a importância da partilha dos seus raciocínios.

Tal como aconteceu com as outras ações, estas surgiram na sequência das anteriores, como Informar, Sugerir, Desafiar e Apoiar. Em diversos momentos, após apoiar a intervenção de um aluno ou guiá-lo no raciocínio, convidava-o a partilhar a sua ideia com o grupo. Assim, o convite não aparecia isolado, mas no seguimento de uma ação anterior que tinha como objetivo criar um contexto para a participação dos alunos.

As ações de **Apoiar** no momento de discussão coletiva relacionam-se com validações e reforços positivos das estratégias ou afirmações feitas pelos alunos, tendo como principal objetivo motivá-los na partilha de ideias e no desenvolvimento das suas estratégias ou conjecturas (Brocardo et al., 2022). Estas ações mostram a intenção de validar os esforços dos alunos e de reforçar positivamente as suas intervenções, criando um ambiente de aprendizagem de confiança e valorização das partilhas dos alunos.

Na minha prática, as ações de Apoiar manifestaram-se de diferentes formas: umas vezes através de expressões como “Ok” e “Boa” para validar ou apoiar as respostas dos alunos; outras vezes enfatizava a resposta dos alunos repetindo-a, o que reforçava a importância daquilo que estavam a partilhar;

A ação de Apoiar, também, raramente surgiu isolada. Muitas vezes esteve ligada a outras ações como: após Sugerir uma nova direção, apoiava os alunos para que se sentissem confiantes; depois de Guiar o raciocínio dos alunos, validava as ideias apresentadas para reforçá-las; nos momentos de Desafiar, apoiava os alunos após a sua resposta, reconhecendo o esforço e incentivando-os a continuar a refletir sobre o

seu trabalho; quando Convidava os alunos a partilharem as suas estratégias, apoiava as suas intervenções para valorizar a participação e incentivar à participação coletiva.

A Tabela 14 mostra claramente como cada ação tem um propósito distinto, mas todas se articulam entre si para promover o raciocínio matemático, a participação e a construção coletiva do conhecimento.

Tabela 14

Relação entre ações

Ação	Objetivo principal	Como se manifestou na prática	Relação com outras ações
Guiar	Conduzir o raciocínio dos alunos, incentivando explicitação, justificação e teste de conjecturas.	Colocação de questões para fundamentar estratégias e generalizações; uso frequente da palavra “depois” para estimular continuidade.	Frequentemente associada a Apoiar e Desafiar; surgia após validar ou desafiar os alunos.
Desafiar	Provocar os alunos a justificar, explicar e reformular raciocínios, indo além da resposta imediata.	Perguntas como “porquê”; incentivo a pensar sobre estratégias dos colegas; sequenciamento das apresentações para promover generalizações.	Muitas vezes seguida de Guiar para apoiar o desenvolvimento das ideias; articulada com Apoiar.
Informar	Recordar, descrever, corrigir ou reforçar estratégias e ideias; fornecer informações sobre a tarefa.	Recordei ideias construídas, caminhos seguidos pelos pares, conjecturas formuladas e generalizações da turma.	Surgia ligada a Guiar e Desafiar, funcionando como suporte para novas aprendizagens.
Sugerir	Indicar subtilmente uma direção ou alternativa,	Sugestões discretas para verificar paridade (ex.: pares de dança); reparos	Associada a Apoiar, Guiar e Desafiar; muitas vezes surgia

	mantendo o raciocínio ativo.	subtis para estratégias pouco adequadas.	após apoiar ou guiar.
Convidar	Promover o envolvimento direto dos alunos na discussão coletiva.	Convidei os alunos a partilharem resoluções e ideias; incitei pares a participarem.	Surgia na sequência de Informar, Sugerir, Desafiar e Apoiar; interligada com Apoiar e Guiar.
Apoiar	Validar e reforçar positivamente as intervenções dos alunos, encorajando a participação.	Uso de expressões como “Ok” e “Boa”; repetição das respostas dos alunos para dar ênfase.	Frequentemente posterior a Sugerir, Guiar, Desafiar e Convidar; reforçava confiança e motivação.

Em síntese, e à semelhança do que é descrito por Ponte et al. (2013), as ações decorreram intercaladas e sequenciadas, por exemplo, que primeiro apoiava as ideias dos alunos, depois convidava a que partilhassem essas ideias e de seguida guiava o raciocínio dos alunos para que conseguissem explicar as suas estratégias, outras vezes desafiava os alunos a pensarem mais além ou a explicitarem as suas estratégias, e por fim, sintetizava o que os alunos partilhavam, utilizando ações de informar, ou sugeria novos caminhos, quando as ideias eram incorretas ou incompletas. Como tal, considero que estas ações embora sejam analisadas individualmente devem ser tidas em conta com um conjunto que ajuda a promover o raciocínio dos alunos (Cengiz et al. 2011).

Importa salientar que em todas as tarefas realizei uma planificação estruturada com as antecipações das ações dos alunos e as minhas. Contudo, durante as discussões coletivas, também surgiram estratégias, resoluções e ideias dos alunos que não tinha antecipado e que por isso recorri a ações que não tinha previsto, mostrando que nestes momentos os professores até podem antecipar algumas respostas ou dificuldades, mas a dinâmica da turma é imprevisível (Lampert, 2001).

Assim sendo, este padrão confirma que a condução da discussão coletiva exige simultaneamente preparação prévia e capacidade de responder de forma flexível a situações inesperadas (Stein et al., 2008).

Quais os desafios e dificuldades sentidas pelo professor durante a condução dos momentos de discussão coletiva?

Para responder à segunda questão, importa salientar que a condução da discussão coletiva constitui, por si só, um desafio para o professor. Mesmo quando se planifica cuidadosamente a tarefa e se antecipam possíveis respostas ou dificuldades dos alunos, surgem sempre situações imprevistas que exigem flexibilidade e capacidade de adaptação (Lampert, 2001). No meu caso, identifiquei três desafios principais: a gestão do tempo, a limitação das minhas próprias bases em Álgebra e o tempo de espera às respostas dos alunos. Estes fatores influenciaram a forma como medi o diálogo e procurei orientar o pensamento da turma.

Gestão do Tempo

A gestão do tempo revelou-se um dos maiores desafios durante a condução das discussões coletivas. Apesar de planejar antecipadamente cada tarefa, dedicando normalmente cerca de 30 minutos à realização da tarefa, a minha preocupação em garantir a participação ativa de todos os alunos, em assegurar que cada um adquirisse a aprendizagem pretendida e que terminasse o trabalho autónomo fazia com que muitas vezes a tarefa se prolongasse além do tempo previsto. Esta situação demonstrou o desequilíbrio entre o planeamento e a prática efetiva: querer valorizar todas as contribuições dos alunos e permitir que cada aluno explorasse as suas ideias implicava, naturalmente, um investimento de tempo maior do que o inicialmente programado.

Para além disso, fatores externos à aula, como interrupções, contribuíram para a redução do tempo efetivo disponível para a discussão, exigindo reajustamentos constantes. A gestão do comportamento da turma também interferia com o ritmo da aula, obrigando-me a dedicar tempo ao retorno da atenção e da disciplina, o que, por vezes, prejudicava o desenrolar da discussão coletiva. Ao prolongar estes momentos, levava a que os alunos fossem dispersando o foco naquilo que os colegas estavam a partilhar e se dispersassem da aprendizagem em questão. Estes desafios reforçam a complexidade do ensino exploratório. Este tipo de abordagem exige que o professor dê atenção à duração de cada momento da aula, pois ao prolongar-se a tarefa poderá afetar a participação e o envolvimento dos alunos e a aprendizagem pretendida (Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

Na gestão do tempo, enfrentei também dificuldades na seleção das estratégias e respostas mais adequadas para a aprendizagem da turma. Nem sempre era fácil decidir quais as estratégias a explorar, e a escolha inconveniente podia levar à dispersão do grupo, prolongando o tempo necessário para a discussão. Como destacam Stein et al. (2008), a orquestração de discussões matemáticas exige gerir cuidadosamente o tempo, selecionando estratégias que permitam maximizar a aprendizagem sem

dispersão. Esta experiência evidencia a complexidade de equilibrar a valorização das estratégias dos alunos com o cumprimento dos objetivos da aula e a gestão do ritmo da discussão.

Conhecimento do professor

Outro desafio significativo relacionou-se com o conhecimento do professor sobre os conteúdos matemáticos. Embora eu planificasse cuidadosamente as aulas e antecipasse estratégias e dificuldades, a minha limitação nas bases de matemática, ou seja, em alguns conteúdos de Álgebra, fazia com que, por vezes, não conseguisse reconhecer de imediato ideias, estratégias ou intervenções importantes trazidas pelos alunos. Como consequência, deixava escapar oportunidades valiosas para aprofundar a discussão e promover a aprendizagem pretendida. Esta situação mostra que, no ensino exploratório e na condução de discussões coletivas, o domínio do conteúdo pelo professor é essencial. Só assim é possível interpretar adequadamente as contribuições inesperadas, selecionar respostas estratégicas e orientar o raciocínio coletivo de forma eficaz (Brocardo et al. (2022); Ponte, 2005; Stein et al., 2008). Estas lacunas podem influenciar negativamente a qualidade do ensino e a da orquestração das discussões coletivas comprometendo a aprendizagem em causa e as escolhas das ações a tomar (Ponte & Chapman, 2006).

Tempo de espera

Uma outra dificuldade teve a ver com o tempo de espera após os alunos colocarem uma pergunta. Apesar de saber, teoricamente, que os alunos precisam de alguns segundos para formular ideias, muitas vezes, de forma ansiosa, apresentei novas pistas ou avancei para outra intervenção demasiado cedo. Esta pressa pode ter limitado a qualidade das respostas e a profundidade do raciocínio dos alunos.

Segundo Rowe (1972), o tempo de espera, é entendido como o intervalo entre a formulação de uma pergunta e o momento em que o professor retoma a palavra. Esta dinâmica tem impacto direto na qualidade do pensamento dos alunos. Nos seus estudos, a autora demonstrou que a média de tempo de espera utilizada pelos professores para obter uma resposta do aluno era inferior a um segundo, um valor tão reduzido que praticamente não permite aos alunos organizar ideias, recuperar conhecimentos prévios ou formular explicações. Ao dar mais tempo para o aluno pensar, o professor interrompe menos, escuta mais atentamente, reformula perguntas com maior rigor e valoriza a diversidade de raciocínios e estratégias que surgem.

Assim, percebo que esta dificuldade, não é apenas uma questão de gestão do ritmo da aula, mas sim um elemento fundamental da minha prática docente que preciso de continuar a desenvolver.

De que modo a planificação das ações do professor contribuiu para a condução das discussões coletivas das tarefas?

A planificação das ações do professor contribuiu de forma decisiva para a condução das discussões coletivas, uma vez que as tarefas estavam estruturadas de forma detalhada, permitindo-me antecipar resoluções, prever possíveis dificuldades e organizar as intervenções sempre com intencionalidade (Ponte et al. 2013; Stein et al., 2008) e de estudar os conteúdos. Apesar de toda a antecipação e planeamento, surgiram momentos em que a diversidade de estratégias e a necessidade de responder a ideias não antecipadas exigiram flexibilidade da minha parte. Se não tivesse elaborado planificações tão estruturadas, teria sido mais difícil orientar a discussão de forma eficaz e aproveitar as oportunidades de raciocínio que emergiram durante a interação com os alunos.

Nesta linha de ideias, o ensino exploratório destaca que a planificação não se limita a preparar materiais, mas também antecipar resoluções possíveis e dificuldades possíveis (Ponte et al. 2013; Stein et al., 2008). Sempre que consegui antecipar estratégias de resolução e ações dos alunos senti-me mais capaz de orientar as intervenções com intencionalidade e clareza.

A planificação também influenciou a seleção das ações que utilizei durante a discussão. Quando tinha a intencionalidade definida, conseguia articular melhor ações de Guiar, apoiar e Desafiar, mantendo o equilíbrio entre permitir a autonomia dos alunos e promover o raciocínio matemático (Brodie, 2010; Mata-Pereira & Ponte, 2017).

Assim, concluo que a planificação contribuiu positivamente para a condução das discussões, mas que este processo deve ser continuamente aperfeiçoado.

REFLEXÕES SOBRE O ESTUDO

Ao longo deste estudo e do meu percurso académico fui sempre refletindo sobre a minha prática. Esta ação permitiu-me ir ajustando e melhorando a minha experiência, favorecendo o ambiente de aprendizagem. Como referem Formosinho e Formosinho (2015), o professor

(...) dirige a sua reflexão aos saberes que o constituem como profissional (...) passa, com frequência, de uma reflexão na acção dirigida para o seu êxito, para uma reflexão sobre as práticas, fazendo uma releitura da experiência e a sua transformação em conhecimento. (p. 10)

Através desta investigação, uma das aprendizagens mais significativas que tiro é a necessidade de antecipar possíveis resoluções, pois facilita muito a condução da discussão coletiva, tal como defendem Ponte et al. (2013). Além disso, percebi a importância de gerir melhor o tempo de espera. Os estudos de Rowe (1972) mostram que aumentar o tempo antes de reagir às respostas dos alunos melhora a clareza e o rigor das suas justificações dos alunos.

Ao longo do estudo deparei-me igualmente com desafios na categorização das ações. Por vezes, a mesma ação parecia encaixar em várias categorias, exigindo releituras das referências selecionadas e decisões difíceis, mas ponderadas. Esta dificuldade reforça a necessidade de mais investigações sobre as ações do professor, tanto pela escassez de estudos que as abordem de forma sistemática como pela própria complexidade da prática, sendo que as ações não se organizam em compartimentos isolados. Investigações futuras que analisem estas ações de modo integrado poderão contribuir para uma compreensão mais profunda da dinâmica das discussões coletivas e do papel do professor na promoção do raciocínio matemático.

Reconheço, ainda, que mudaria algumas ações durante os momentos de discussão coletiva. Por exemplo, em certos momentos poderia ter promovido mais conexões entre as diferentes estratégias, mais oportunidades para formular e testar conjecturas, aspetos essenciais numa discussão matemática (Stein et al., 2008).

Esta investigação contribuiu muito para o meu desenvolvimento profissional. Para além de compreender melhor as ações do professor descritas por Brocardo et al. (2022) e Ponte et al. (2013), tornei-me mais consciente de que cada intervenção pode ampliar ou limitar o raciocínio dos alunos, uma ideia que está alinhada com a visão de que o professor é um intermediário da aprendizagem que oferece condições para que os alunos produzam e validem as suas próprias ideias (Ponte, 2005).

Durante a condução das discussões coletivas, percebi que as perguntas certas têm um papel decisivo no progresso do pensamento dos alunos. Como referem Ponte e Quaresma (2016), “um aspeto fundamental da comunicação reside nas perguntas colocadas pelo professor. Entre estas, assumem particular utilidade as perguntas de indagação, que admitem um leque de respostas legítimas, algumas das quais podem revelar-se bastante interessantes” (p. 53). Os mesmos autores indicam que a formulação

intencional de perguntas permite ao professor promover o raciocínio, explorar diversas estratégias diversas e apoiar a construção de sentidos matemáticos. Ao refletir sobre a minha prática, percebi que, quando planeava cuidadosamente as questões e as articulava com os objetivos da tarefa, os alunos conseguiam avançar mais verdadeiramente no seu pensamento e desenvolver conexões entre diferentes ideias matemáticas.

Considero ainda pertinente o desenvolvimento de estudos que aprofundem o ensino exploratório. Ao ler sobre o assunto, a literatura e a minha própria experiência e prática, mostram que não se trata de uma abordagem a dinamizar esporadicamente, mas de uma prática que exige continuidade, tempo e intencionalidade. Como refere Canavarro (2011), o ensino exploratório requer persistência e compromisso da parte dos professores e dos alunos, permitindo que estes últimos aprendam não apenas conteúdos matemáticos, mas também maneiras de produzir o seu próprio conhecimento e da comunidade de aprendizagem.

Durante a implementação de tarefas de carácter exploratório, percebi, também, que este tipo de abordagem favoreceu alguns alunos que mostravam interesse e motivação quando conseguiam adquirir a aprendizagem de forma ativa, com esta prática. Esta motivação foi especialmente notada em alunos que, normalmente, enfrentavam maiores dificuldades, demonstrando que a participação ativa e a exploração autónoma das tarefas contribuem para aumentar a confiança e o envolvimento destes alunos no processo de aprendizagem.

Uma situação que me surpreendeu positivamente foi a constituição dos grupos, sugerida pela orientadora deste estudo, tendo em conta alunos com níveis de raciocínio semelhantes. Esta estratégia revelou-se muito eficaz, pois os alunos não se sentiram diminuídos ou comparados negativamente com outros colegas, o que promoveu a motivação e o empenho de todos os elementos do grupo. Desta forma, mostrou-se um recurso valioso para promover tanto a participação ativa como o desenvolvimento do raciocínio matemático de forma inclusiva e estimulante.

Ao longo do meu percurso académico fui construindo progressivamente a minha prática docente, percebendo a importância de olhar criticamente para a própria ação e refletir sobre ela. Essa reflexão constante permite ajustar estratégias, identificar aspetos a melhorar e desenvolver uma prática mais intencional e significativa.

Por fim, prevejo que na minha prática darei especial destaque à criação de um ambiente de confiança e segurança, onde os alunos se sintam à vontade para errar, experimentar e partilhar ideias. Acredito que esta segurança é fundamental para que o

pensamento matemático se desenvolva de forma natural. Da mesma forma, defendo que o ensino deve partir dos interesses dos alunos, promovendo aprendizagens motivadoras e significativas, e que a aprendizagem deve, sempre que possível, ser estendida à família e à comunidade educativa, reforçando a importância dos conteúdos ligados ao contexto social em que os alunos se inserem.

Considero igualmente essencial o planeamento de tarefas estruturadas, uma característica da minha prática, que me permite antecipar desafios, organizar intervenções e apoiar os alunos de forma consistente. Por fim, não menos importante, entendo que o papel da professora vai além da transmissão de conhecimentos. Um docente é também construtor de valores. Sem valores sólidos, o conhecimento adquirido pelos alunos corre o risco de não se traduzir em ações construtivas na sociedade. Ensinar matemática e conteúdos académicos é, assim, indissociável de ensinar respeito, ética e cidadania, de maneira que a aprendizagem realmente faça a diferença, de forma positiva, na nossa sociedade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação*. Asa.
- Afonso, N. (2014). *Investigação Naturalista em Educação*. Fundação Manuel Leão.
- Amado, J. (2014). A investigação em educação e seus paradigmas. In J. Amado, *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.
[URI:http://hdl.handle.net/10316.2/35271](http://hdl.handle.net/10316.2/35271)
- Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). NCTM.
https://www.researchgate.net/publication/312532588_Making_mathematics_reasonable_in_school
- Bardin, L. (1997). *Análise de Conteúdo*. EDIÇÕES 70, LDA.
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7684991/mod_resource/content/1/BARDIN_L_1977_Analise_de_conteudo_Lisboa_edicoes_70_225.20191102-5693-11evk0e-with-cover-page-v2.pdf
- Batista, B. F., Rodrigues, D., Moreira, E., & Silva, F. (2021). Técnicas de recolha de dados em investigação: Inquirir por questionário e/ou inquirir por entrevista? In P. Sá, A. P. Costa, & A. Moreira, *Reflexões em torno de Metodologias de Investigação: Recolha de dados* (Vol. 2). Universidade de Aveiro.
https://moodle.ips.pt/2324/pluginfile.php/129411/mod_resource/content/1/Metodologiasinvestigacao_Vol2_Digital.pdf
- Blanton, M. L. (2008). Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (pp. 361–388). Lawrence Erlbaum Associates.
<https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17765/Algebra%20in%20the%20Early%20Grades.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Blanton, M. L., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N., & Stylianou, D. A. (2017). Implementing a Framework for Early Algebra. In C. Kieran, *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. (pp. 27–49). Springer International Publishing. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED593617.pdf>

- Blanton, M. L., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E., & Gardiner, A. M. (2019a). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 193–219.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). ELEMENTARY GRADES STUDENTS' CAPACITY FOR FUNCTIONAL THINKING. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 135–142.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.
- Blanton, M. L., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I., & Strachota, S. (2019b). Does Early Algebra Matter? The Effectiveness of an Early Algebra Intervention in Grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, 56(5), 1930–1972.
- Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* [Tese de Doutoramento]. Universidade de Lisboa.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Booth, L. R. (sem data). Children's difficulties in beginning algebra. *The Ideas of Algebra*, K–12, 299–306.
- Borrvalho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193–211). SEM-SPCE.
<https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Ca%20minha.pdf>
- Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., & Ponte, J. P. (2022a). Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa. *Educación Matemática*, 34(2), 101–133.
- Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2).
<https://quadrante.apm.pt/article/view/22816/16882>

- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática* 115, 11–17.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Elvira, S., Leonor, S., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais 4.º ano 1.º Ciclo do Ensino Básico Matemática*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_4.o_ano.pdf
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Orgs.) *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 255–266). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/7041>
- Carraher, D., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. (2001). Can young students operate on variables? In M. van den Heuvel-Panhuizen, *25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 130–141). https://www.researchgate.net/profile/David-Carraher/publication/333245609_Can_young_students_operate_on_unknowns/links/5ce41f07299bf14d95af27f8/Can-young-students-operate-on-unknowns.pdf
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). *Early algebra and algebraic reasoning*. https://www.researchgate.net/publication/292696143_Early_algebra_and_algebraic_reasoning
- Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 355–374.
- Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(6), 445–458.
- Cusi, A., & Malara, N. A. (2007). Approaching Early Algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante*, 16(1), 57–80.
- Direção-Geral da Educação. (s.d.). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico*. Ministério da Educação.

https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/documento_orientador-ensino_basico.pdf

Direção-Geral da Educação. (2018). *Aprendizagens Essenciais 6º ano 2.º Ciclo do Ensino Básico Ciências Naturais*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/6_ciencias_naturais.pdf

Duarte, N. G., Ponte, J. P., & Pinto H. G. (2023). O contributo do estudo de aula na preparação e condução da discussão coletiva: Perspetivas e dificuldades de duas futuras professoras dos anos iniciais. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 37(77), 1192–1213.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 232–236.

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). *As Atividades de Investigação, o Professor e a Aula de Matemática*. https://www.researchgate.net/publication/254647012_As_actividades_de_investigacao_o_professor_e_a_aula_de_Matematica

Formosinho, J. O., & Formosinho, J. (2015). *Pedagogia em Participação: A perspectiva Educativa da Associação Criança*. Porto Editora.

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225–356). Charlotte, NC: Information Age Publishing. https://www.researchgate.net/publication/285328217_Mathematics_teaching_and_classroom_practice

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? In J. j Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17765/Algebra%20in%20the%20Early%20Grades.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra From a Symbolization Point of View. In J. j Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (pp. 19–55). Lawrence Erlbaum Associates. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17765/Algebra%20in%20the%20Early%20Grades.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Knuth, Eric J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297–312.
- Küchemann, D. (1978). *Children's understanding of numerical variables*. 24–27.
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University. <https://www.jstor.org/stable/j.ctt32bpsx>
- Manson, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. *Approaches to Algebra*, 18, 1–27.
- Manson, J. (2008). Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (pp. 57–94). Lawrence Erlbaum Associates. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17765/Algebra%20in%20the%20Early%20Grades.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). *Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification*.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018a). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: Uma investigação baseada em design. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 781–801.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018b). Teacher's Actions to Promote Students' Justifications. *Acta Scientiae*, 20(3), 487–505.
- Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Ação*. Porto Editora.
- MEC. (2018). *Aprendizagens Essenciais de Ciências Naturais—Ensino Básico- 2.º Ciclo*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/5_ciencias_naturais.pdf
- Mendes, F., Brocardo, J., & Delgado, C. (sem data). Formar professores visando promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma abordagem que articula teoria e prática. In C. Delgado, J. Brocardo, & F. Mendes (Eds.), *Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos: Práticas e desafios* (1.ª). Instituto Politécnico de Setúbal.

- Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Descrevendo as práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso da professora Fernanda. *In Atas do VII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática*. Práctica Profesional del Profesorado de Matemática.
- Menezes, L., & Oliveira, H. (2013). Descrevendo as práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso da professora Fernanda. *In Actas do VII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática*, 5795–5803.
- Mestre, C. M. M. V. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino* [Dissestação de Doutoramento]. Universidade de Lisboa.
- Mestre, C., & Oliveira, H. (2014). A construção coletiva da generalização num contexto de ensino exploratório com alunos do 4.º ano. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 283–309). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
<http://www.ie.ulisboa.pt/publicacoes/ebooks/praticas-profissionais-dos-professores-de-matematica>
- Mónico, L. S., Alferes, V. R., Castro, P. A., & Parreira, P. (2017). A Observação Participante enquanto metodologia de investigação qualitativa. *Atas CIAIQ2017*, 3.
https://www.researchgate.net/publication/318702823_A_Observacao_Participante_enquanto_metodologia_de_investigacao_qualitativa
- National Center for Improving & Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. (2003). Algebraic Skills and Strategies for Elementary Teachers and Students. *In Brief*, 3(1), 2–12.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática . (Tradução portuguesa da edição original de 2000).
- NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. APM.
- NCTM. (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29–53.

- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29–53.
- Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). *A reflexão e o professor como investigador*. https://www.researchgate.net/publication/260942853_A_reflexao_e_o_professor_como_investigador
- Oliveira, V. S. D., & Basniak, M. I. (2021). O planeamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. *Educação Matemática Debate*, 5(11), 1–29.
- Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante*, XXI(2).
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5–28). APM. https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7493006/mod_resource/content/1/Investigar_a_pr%C3%A1tica.pdf
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3008>
- Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA*, 2(4), 153–180.
- Ponte, J. P. (2014a). Apresentação. Em J. P. Ponte(Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (1.ª, pp. 5–8). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. <http://www.ie.ulisboa.pt/publicacoes/ebooks/praticas-profissionais-dos-professores-de-matematica>
- Ponte, J. P. (2014b). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. Em J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 283–309). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. <http://www.ie.ulisboa.pt/publicacoes/ebooks/praticas-profissionais-dos-professores-de-matematica>
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, 100, 89–96.

- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). *Mathematics teachers' knowledge and practices*. Roterdham: Sense. https://www.researchgate.net/profile/Joao-Ponte-2/publication/260987281_Mathematics_teachers'_knowledge_and_practices/links/0deec532ec2c1ac105000000/Mathematics-Teachers-Knowledge-and-Practices.pdf
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55–82.
- Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (2012). *Explorar, investigar, interagir na aula de matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem*.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41–70.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 51–66.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática*, 133. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2292>
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (sem data). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, 105, 2–6.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, M. H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/progrmamatematica_2007.pdf
- Ponte, J., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *Educação Matemática em Foco*, 1(1), 9–29.
- Programa de Formação Contínua em Matemática. (sem data). *Pensamento algébrico nos primeiros anos*. Escola Superior de Educação de Lisboa. <https://recupera.dge.mec.pt/sites/default/files/2023-01/550.pdf>

- Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores. (2010). *Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.
- Programa de Formação Contínua em Matemática para & Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores. (2010). *Orquestrar discussões colectivas: Cinco práticas essenciais*. Escola Superior de Educação de Setúbal.
- Rowe, M. B. (1972). Wait-time and rewards as instructional variables, their influence on language, logic, and fate control: Part one—Wait-time. *Journal of Research in Science Teaching*, 11(2), 81–94.
- Ruthven, K. (1989). Uma abordagem exploratória para a matemática avançada. *Estudos Educacionais em Matemática*. Doi:10.1007/BF00315610.
- Sanches, I. (2005). Compreender, Agir, Mudar, Incluir. Da investigação acção à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação*, 5, 127–142.
- Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in light of theories of learning mathematics. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 353–392). National Council of Teachers of Mathematics. [https://www.academia.edu/19960246/Balancing the Unbalanceable The NCTM Standards in the Light of Theories of Learning Mathematics](https://www.academia.edu/19960246/Balancing_the_Unbalanceable_The_NCTM_Standards_in_the_Light_of_Theories_of_Learning_Mathematics)
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about Symbolism That Students Bring to Algebra. *Mathematics Teacher Learning and Teaching PK-12*, 90(2), 308–312.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
- Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2). [https://www.researchgate.net/publication/27472757_Introducing Functional Thinking in Year 2 A Case Study of Early Algebra Teaching#fullTextFileContent](https://www.researchgate.net/publication/27472757_Introducing_Functional_Thinking_in_Year_2_A_Case_Study_of_Early_Algebra_Teaching#fullTextFileContent)
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171–191.

ANEXOS

Anexo 1: Modelo de Autorização

Autorização

Exmo. Sr. Encarregado de Educação,

Através deste documento, informamos (as estagiárias) que iremos desenvolver uma investigação na turma do 4.º [REDACTED] da Professora [REDACTED] no âmbito da Investigação da Dissertação de Mestrado em Educação, mais propriamente nas áreas da Matemática e do Desenvolvimento da Cidadania pela Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

Como tal, vimos por este meio, solicitar a autorização de gravação áudio, vídeo e fotografia, do seu/sua educando(a) e das suas produções para efeito de recolha de dados, declarando que as imagens e sons, serão para fins de investigação académica e não para outros fins e que se preservará o anonimato dos alunos envolvidos.

Informamos ainda que nos encontramos disponíveis para qualquer esclarecimento.

Com os melhores cumprimentos,

A estagiária

A estagiária

Catarina Mares

Margarida Pombo

10 de janeiro de 2024

Eu, _____, encarregado de educação do aluno(a) _____ da turma do 4.º [REDACTED] declaro que autorizo a realização de gravações áudio, vídeo e fotografia do meu/minha educando(a) para fins da investigação conduzida pelas estagiárias Catarina Mares e Margarida Pombo.

____/____/2024

Anexo 2: Análise das ações por categorias – V's Mágicos

Análise da discussão da tarefa dos Vs mágicos

Tipo de ação	Total (discussão V's mágicos)
Desafiar	63
Guiar	101
Informar	7
Sugerir	3
Convidar	27
Apoiar	35

Tipo de ação	Descrição	Excerto
Desafiar	A professora desafia a testarem se a conjectura verificada para os números ímpares funciona para os números pares.	Professora Catarina: Quem é que não concorda? Quem concorda? Porque é que é ímpar? H.C.: Porque o três é ímpar. Professora Catarina: Olha, mas será que isto funciona para os pares? Vários alunos: Não. Professora Catarina: Porque que não funciona para os pares, H.C.?
Guiar	A professora questiona os alunos de modo a guiá-los nas suas estratégias e modo de pensar. A professora valida ou enfatiza as respostas dos alunos (apoiar) e de seguida coloca perguntas que guiassem o pensamento dos alunos, aparecendo assim, diversas vezes a ação de guiar seguida da ação de apoiar.	G.: Então, nós fizemos primeiro número maior em baixo e depois fizemos a soma dele em cima. Por exemplo, o 5 em baixo, o 3 e o 2 em cima, que dá 5, e o 4 e o 1 em cima, que dá 5 também. Professora Catarina: Então, o que é vocês foram ver primeiro? G.: Nós começámos por ver o 5. Professora Catarina: E depois? G. Fomos ver a soma e fizemos os dois braços. 3 mais 2 igual a 5. 5 mais 5, 10. 4 mais 1 cinco. 5 mais 5, 10 Professora Catarina: E depois foram trocando os números? Como é que fizeram isso? Professora Catarina: Boa! Vocês já repararam o que temos aqui? Um ímpar, um ímpar, mais um ímpar. São quantos ímpares? Vários alunos: Três. Professora Catarina: São três ímpares. E três é número quê? Vários alunos: Ímpar.

Informar	A professora recorda os números que constituem os dois braços dos Vs.	Professora Catarina: Eu ajudo M.L., O 1 é par ou ímpar? Vários alunos: Ímpar Professora Catarina: E o 5? Vários alunos: Ímpar. Professora Catarina: E o 2? Professora Catarina: E o 3? Vários alunos: Ímpar. Professora Catarina: fomos aqui a acontecer? Nós temos 1+5+4 e a seguir temos 2+3+4. O 4 no vértice. Aqui temos ímpar+ímpar+par.
Sugerir	A professora sugere que os alunos verifiquem a paridade dos números através de pares de dança.	Professora Catarina: Não, pois não. Teria de ser sempre ímpar e ímpar ou par e par. Mas agora fiquei confusa. Mas o que é isto do par e ímpar? Que confusão. Se eu tiver $1 \downarrow 1 \downarrow (5) \pm 1 (1) + 1 \downarrow (3)$. E se eu quiser agrupar estes números? Vamos imaginar que isto são pessoas que querem dançar umas com as outras (representei cada número por pauzinho, para representar as pessoas). Temos de ter pares de dança. Pode ser? Então, esta pessoa dança com esta. Certo? Isto é um?
Convidar	A professora convida os alunos a partilharem as suas resoluções ou a participarem na discussão.	Professora Catarina: Quero saber aquilo que descobriram. O G. e o D. descobriram quantos Vs mágicos? Professora Catarina: G. e D. venham explicar como descobriram os Vs mágicos.

Apoiar	A professora utiliza várias vezes a palavra “Ok” e “Boa” para validar a resposta dos alunos. Também enfatiza a resposta dos alunos, repetindo-a.	Professora Catarina: Boa. Ok. Então, qual foi a vossa estratégia? Consegues explicar, como me explicaste há pouco, L.? Professora Catarina: Já entendeste, T.? Boa. Professora Catarina: Porque aqui havia 2 pares e aqui só um deste lado. Ok. Estamos quase lá. Obrigada, amigos. Agora pode vir o grupo da Mia, explicar. Descobriram quantos Vs mágicos? Professora Catarina: Ok. E este número é o quê (3)?
--------	--	--

Anexo 3: Análise das ações por categorias – Sequência dos Múltiplos

Análise das ações da discussão da tarefa da Sequência dos Múltiplos

Tipo de ação	Total (discussão sequência de repetição)
Desafiar	70
Guiar	121
Informar	16
Sugerir	14
Convidar	28
Apoiar	92

Tipo de ação	Descrição	Excerto
Desafiar	A professora desafia os alunos a pensarem numa regularidade para descobrirem as figuras excluindo a estratégia de contar. Muitas vezes as ações de desafiar aparecem associadas às ações de guiar.	Professora Catarina: Não, amor. Quem é que não percebeu como é que se descobre as figuras? Qual é a regularidade para descobrir as figuras? Sem ser contar. HC, aqui. Nós sabemos que estes números são sempre o quê? Os círculos são sempre o quê?
Guiar	A professora orienta os alunos a formular uma regularidade para encontrarem qualquer figura da sequência. A professora valida ou enfatiza as respostas dos alunos (apoiar) e de seguida coloca perguntas que guiam o pensamento dos alunos, aparecendo assim, diversas vezes a ação de guiar seguida da ação de apoiar.	Professora Catarina: Então agora vamos ver aqui uma coisa. Então agora eu quero o 34. Vamos tentar descobrir o 34. Ok? Todos juntos. Com a estratégia do... Aqui do Ti e do M. M, agora ajudas tu. Tu também sabes, M. Certo? Então vá. (escrevem no quadro) Conseguem ver? Conseguem ver ou não? Ok. Aqui vai ser um número quê? (silêncio) Par ou ímpar... E aqui? Vários alunos: Par. Professora Catarina: E aqui? Vários alunos: Ímpar. Professora Catarina: E aqui? Vários alunos: Par. Professora Catarina: Mas aqui o T já disse outra coisa. Estes pares têm aqui uma especificidade. Qualquer coisa. T: Então dá para fazer uma divisão do resto de zero. Professora Catarina: Boa. Mas temos de ver mais do que? Temos aqui outro? T: Outro par. Professora Catarina: Sim, e aqui?

Informar	A professora relembra a estratégia da aluna.	Professora Catarina: E tu fizeste assim, HC. Assim, assim, assim.
Sugerir	A professora sugere que utilizem a estratégia de contar, mas que revejam a forma de contar tendo em conta o grupo de repetição.	Professora Catarina: Pois, Olha a contar está certo, mas tinham de contar assim. Porque senão estavas a fazer mal o grupo de repetição.

Convidar	A professora convida a turma a descobrir o termo 34, em conjunto, com os alunos que estão no quadro.	Professora Catarina: Então agora vamos ver aqui uma coisa. Então agora eu quero o 34. Vamos tentar descobrir o 34. Ok? Todos juntos. Com a estratégia do... Aqui do T e do M. M, agora ajudas tu. Tu também sabes, M. Certo? Então vá. (escrevem no quadro) Conseguem ver? Conseguem ver ou não? Ok. Aqui vai ser um número quê? (silêncio) Par ou ímpar... E aqui?
Apoiar	A professora utiliza várias vezes a palavra "Ok" e "Boa" para validar a resposta dos alunos. Também enfatiza a resposta dos alunos, repetindo-a.	Professora Catarina: Ok. É verdade, porquê? Porquê o que está sempre a repetir-se, amigas? Expliquem lá. Professora Catarina: Era o grupo de? H: Repetição. Professora Catarina: Repetição. Está tudo de acordo, certo? Turma: Certo. T: Então dá para fazer uma divisão do resto de zero. Professora Catarina: Boa. Mas temos de ver mais do que? Temos aqui outro?

Anexo 4: Análise das ações por categorias – Sequência de Crescimento

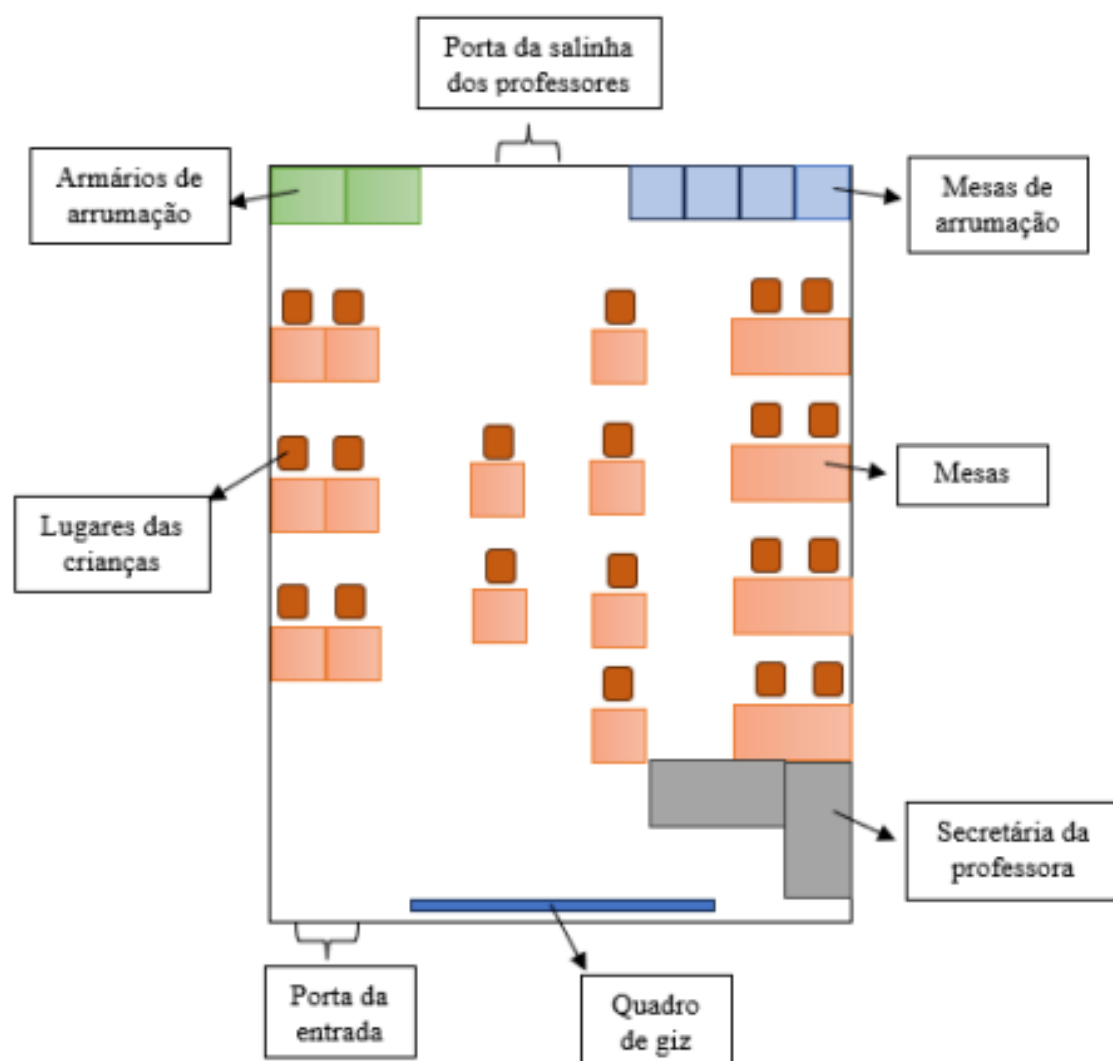
Análise das ações da discussão da tarefa da sequência de crescimento

Tipo de ação	Total (discussão sequência de crescimento)
Desafiar	68
Guiar	106
Informar	25
Sugerir	12
Convidar	18
Apoiar	86

Tipo de ação	Descrição	Excerto
Desafiar	A professora desafia os alunos a encontrarem a regularidade que permite encontrar o número de contas azuis a partir das contas vermelhas.	Professora Catarina: Ah... Se eu tiver as vermelhas, como é que eu descubro as azuis? Amigos, se eu tiver as vermelhas, como é que eu descubro as azuis? Se eu tiver uma vermelha, são quantas azuis? C: Se nós tivermos uma vermelha é quatro azuis. Professora Catarina: Porquê? O que é que tu fizeste, C? C: Porque um vezes quatro é quatro. Professora Catarina: Boa! Então, como é que nós descobrimos as azuis se tivermos as vermelhas?
Guiar	A professora orienta os alunos a justificarem e explicitarem a sua estratégia. A professora valida ou enfatiza as respostas dos alunos (apoiar) e de seguida coloca perguntas que guiassem o pensamento dos alunos, aparecendo assim, diversas vezes a ação de guiar seguida da ação de apoiar.	Professora Catarina: Amigas, obrigada. Vocês dizem que daqui para aqui é vezes quatro, mas vocês foram olhar para os colares ou vocês viram que daqui para aqui era mesmo vezes quatro? Professora Catarina: Eu vou fazer aqui o... Acende lá aí a luz, faz favor. Então. Então. Vou desenhar que é para ser mais fácil. Aqui são as? Vários alunos: Vermelhas. Professora Catarina: Ok. E aqui são as? Vários alunos: Azuis. Professora Catarina: Ok. Ou seja, no primeiro colar temos o quê? Quantas vermelhas temos no primeiro colar?
Informar	A professora recorda a estratégia utilizada por um dos pares para descobrir o número de contas vermelhas.	Professora Catarina: Pronto! Então, elas foram de um em um para descobrir e aqui de quatro em quatro. Não está errado, pois não? Deu igual ao que vocês têm, não deu?

Sugerir	A professora sugere que a estratégia que estão a utilizar para encontrar uma regularidade para o número de contas vermelhas tem lacunas.	Professora Catarina: É sempre quatro mais quatro. Aqui está certo. E aqui também. Um mais um, mais um. Mas se tu fores fazendo mais um, mais um, mais um, até vinte, não dá catorze. Pois, dá o quê, ML? Se nós estivemos a contar de um em um. Ah, se nós estivemos a contar de um em um, dá o quê? Eu não posso saltar. Aqui nem saltaste. Aqui faltam números pelo meio. Se é de um em um, faltou aqui qualquer coisa.
Convidar	A professora convida o aluno a partilhar a sua estratégia para descobrir as contas vermelhas a partir das azuis.	Professora Catarina: Ok MF, D, venham cá. Mas eu agora preciso que me expliquem porque é que é de... o M se calhar agora consegue explicar. Que eu acho que ele conseguiu. M, explica lá agora à Catarina. Agora vou apagar, desculpem. Vocês concordam? Concordaram ou não concordaram que das azuis para as vermelhas fazemos o quê? Vezes?
Apoiar	A professora utiliza várias vezes a palavra "Ok" e "Boa" para validar a resposta dos alunos. Também enfatiza a resposta dos alunos, repetindo-a.	Professora Catarina: Ok. E aqui são as? Vários alunos: Azuis. Professora Catarina: Ok. Ou seja, no primeiro colar temos o quê? Quantas vermelhas temos no primeiro colar? Professora Catarina: Boa! Então, como é que nós descobrimos as azuis se tivermos as vermelhas? Professora Catarina: É? ML: Vinte. Professora Catarina: É vinte. Já concordam que seja vinte aqui?

Anexo 5: Organização e disposição da sala



Anexo 6: Ficha de Diagnóstico I

Ficha de Diagnóstico I – 4.ºB

Nome: _____ N.º _____ Data __/__/2023

Lê cada questão antes de responderes e verifica as tuas respostas.



1. Observa a forma como o João resolveu as expressões numéricas seguintes:

$$147 + 9 = 147 + 10 - 1 = 157 - 1 = 156$$

$$283 + 99 = 283 + 100 - 1 = 383 - 1 = 382$$

$$1792 + 999 = 1792 + 1000 - 1 = 2792 - 1 = 2791$$

- 1.1. Explica a estratégia do João.

- 1.2. Usa a estratégia do João para resolveres as expressões numéricas seguintes:

$$783 + 99 =$$

$$3786 + 999 =$$

$$5999 + 1274 =$$

2. Assinala com V (Verdadeiro) ou F (Falso) e justifica.

	V	F	Justificação
$234 + 249 = 249 + 234$			
$37\,890 \times 0 = 1$			
$1 \times 345 = 345$			
$234 - 122 = 122 - 234$			

3. Qual é o valor de cada símbolo?

$$(3 \times 13) + (5 \times 13) = \blacktriangle \times 13 \quad \blacktriangle = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(\underline{40 : 2}) + (\underline{4 : 2}) = \underline{44 : \textcircled{*}} \quad \textcircled{*} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$32 \times 11 = (32 \times 10) + \clubsuit \quad \clubsuit = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$23 \times 15 = 23 \times (10 + \underline{\star}) \quad \star = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. **Resolve** o problema seguinte e **mostra** como pensaste.

A Marta já tem alguns cromos da sua coleção preferida.

Para ajudar a completar a coleção, o pai ofereceu-lhe mais 18 e a mãe mais 25.

Agora a Marta tem 130 cromos.

Quantos cromos tinha inicialmente?



Como correu a ficha?

	Correu bem 😊		Correu mais ou menos 😐		Correu mal 😞
--	--------------	--	------------------------	--	--------------

Em que exercícios sentiste mais dificuldades? Porquê?

Bom trabalho!



Anexo 7: Ficha de Diagnóstico II

Ficha de Diagnóstico II – 4.ºB		
Nome: _____	N.º _____	Data __/__/2023

Lê cada questão antes de responderes e verifica as tuas respostas.



1. Observa a sequência de repetição seguinte, que continua sempre da mesma forma.



- 1.1. Desenha a 9.ª figura da sequência.
- 1.2. Rodeia o grupo de repetição da sequência.
- 1.3. Indica qual será a 99.ª figura da sequência e explica como pensaste.

- 1.1. Indica qual será a 100.ª figura da sequência e explica como pensaste.

1.2. Assinala com X a opção que corresponderá a cada uma das figuras seguintes.

N.º da figura		
41		
28		
65		
102		
73		
500		

1.3. Explica como podes saber qual é qualquer figura da sequência.

2. Observa a sequência de crescimento seguinte.



Fig. 1

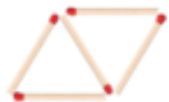


Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4

4.1. Desenha a 4.ª figura.

4.2 Completa a tabela, tendo em conta que um fósforo corresponde à unidade de medida de comprimento:

N.º da figura	N.º de triângulos	N.º de fósforos	Perímetro da figura
1	1	3	3
2			
3			
4			
5			

4.3. Quantos fósforos são necessários para construir uma figura com 10 triângulos? Mostra como pensaste.

Como correu a ficha?

	Correu bem 😊		Correu mais ou menos 😐		Correu mal 😞
--	--------------	--	------------------------	--	--------------

Em que exercícios sentiste mais dificuldades? Porquê?

Bom trabalho!



Anexo 8- Grelha de Registo da avaliação da Ficha de Diagnóstico I



Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo do Ensino Básico

Ano Letivo: 2023/2024

Grelha de registo

Ficha de diagnóstico I

	Sim	Não	Observações
Reconhecem a igualdade como uma relação $147=147+10-1=157-1=156$ (equivalência)		✓	
Reconhecem a igualdade apenas como resultado de um cálculo	✗		
Usam maioritariamente o algoritmo	✗		
Recorrem a estruturas de cálculo mental		✗	
Identificam a estratégia de cálculo mental do João		✓	
Conseguem aplicar a estratégia anterior		✓	
Reconhecem as relações entre os números e as propriedades das operações		✓	
Aplicam a propriedade distributiva em relação à adição da divisão e da multiplicação			
Reconhecem o elemento neutro (1)			
Reconhecem o elemento absorvente (0)			
Reconhecem a comutatividade na adição	✗		
Percebem que na subtração a comutatividade não é válida		✗	

Anexo 9- Grelha de Registo da avaliação da Ficha de Diagnóstico II



Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo do Ensino Básico

Ano Letivo: 2023/2024

Ficha de diagnóstico II

	Sim	Não	Observações
Identificam o grupo de repetição	16	1	
Continuam a sequência respeitando a regra de formação dada ou regularidades identificadas	Todos		Multiplicação $90 + 10 = 100$ Tabuada $9 = 90$
Identificam e descrevem a regularidade (ímpar e par)	11	13	
Continuam a sequência respeitando a regra de formação dada ou regularidades identificadas			
Identificam e descrevem a regularidade $(2n + 1)$		x	Desenham o com o m d 2 cm?
Identificam e descrevem o termo não visível de uma sequência pictórica de crescimento	x		
Continuam a sequência respeitando a regra de formação dada ou regularidades identificadas	x		

Anexo 10: Planificação da tarefa dos V's Mágicos

Planificação

Designação da tarefa: V mágico

Duração: 9h15m-10h45m (1h30m)

Turma: 20 alunos (seis alunos com medidas seletivas e dois com medidas universais)

	Objetivos	AE de Matemática – 1.º ciclo	Etapas
Domínio: Álgebra	-Investigar, formular e justificar conjecturas -Identificar regularidades e propriedades numéricas -Formular generalizações (par + par=par; par + ímpar=ímpar; ímpar + ímpar= par)	-Investigar, formular e justificar conjecturas sobre 2-relações numéricas em contextos diversos. (3.º e 4.º anos) -Estabelecer relações entre a paridade das parcelas e a paridade da soma na adição de dois números naturais. (3.º ano)	1. Apresentação da tarefa (15 minutos) 2.Trabalho autónomo (30 minutos); 3-Discussão coletiva (30 minutos) 4- Sistematização das aprendizagens (15 minutos);

Materiais:

- Folha de registo (Anexo 1);
- Cartões com números (1,2,3,4 e 5) (Anexo 2);
- Quadro de ardósia;
- Giz;

Organização dos alunos: pares/grupos (heterogéneos)

Propostas de trabalho e atividade esperada:

1. Apresentação da tarefa

Ação/questões (professora)	Ação/Resposta esperada (Alunos)	Objetivo
A professora começa por projetar no quadro os dois "V's". 		
-O que é isto que está projetado? Faz-vos lembrar alguma letra?	São dois V's formados por números.	-Identifiquem a forma dos V's
-Olhando para os dois V's, consideram que são iguais ou diferentes? -O há de diferente? E de igual? -Há alguma característica que distinga os números entre eles? Ou Podemos agrupar os números consoante alguma característica que os caracterizem? (caso não consigam perceber que são pares e ímpares)	Os dois V's são iguais porque têm a mesma forma e os mesmos números, mas a posição dos números difere. Os números 1,3, e 5 são ímpares e os números 2 e 4 são pares.	-Identifiquem que em ambos os V's se encontram os números de 1 a 5 -Identifiquem que os números 2, 3 e 5 se encontram na mesma posição e que os números 1 e 4 se encontram em posições diferentes; -Reconheçam os números pares e ímpares;
-Então e se olharmos para os números de outra forma, não pensarmos neles sozinhos? O que podemos fazer? -E se formos adicionar os números?	Adicionam $1+2+3+4+5=15$	
-Será que podemos adicionar os números de outra forma? E se olharmos para os braços dos V's?	Adicionam três números de um braço e dois noutro (ex: $1+2+3=6$ e $4+5=9$) Adicionam os números de cada braço e ignoram o vértice (no primeiro vértice o resultado de um lado é 3 e do outro é 6 e no segundo vértice o resultado é igual para os dois braços, 9 cada lado)	-Identifiquem que as somas de cada braço do primeiro V são diferentes e que as somas de cada braço do segundo V são iguais.
-E se adicionarmos os vértices a cada lado? - O que está a acontecer? Notam alguma semelhança entre os V's? E diferenças? - O 2.º V é mágico, porquê?	Referem que no primeiro V a soma dos dois lados é diferente e no segundo é igual e por isso o segundo é mágico.	-Entendam o porquê de o 2.º V ser mágico (as somas dos dois lados do 2.º V são iguais)

2. Trabalho autónomo

De seguida a professora:

- Organiza os alunos a pares/grupos;
- Relembra/discute as regras de trabalho a pares/grupo
- Propõe que os pares/grupos descubram novos V's mágico com o auxílio de cartões numerados e registam as descobertas numa folha de registo.
- Distribui folhas de registo e os cartões numerados

Durante o trabalho autónomo a professora observa as diferentes conjecturas dos alunos e seleciona os pares/grupos que apresentam mais V's mágicos descobertos.

Possíveis resoluções (alunos)	Possíveis conjecturas (alunos)	Questionamento(professora)
Colocam os cartões com números dispostos de maneira a formarem um V mágico e vão registando na folha. 1.º adicionam os dois números do braço 2.º somam o vértice Ex: 4-3-1-5-2 4+3= 7 5+2=7 7+1=8 7+1=8 Ou Adicionam os números do braço e o vértice 4+3+1=8 5+2+1=8	1. Se trocarmos a posição dos números do mesmo braço, obtemos outro V mágico; 2. Se trocarmos os números do braço direito com o braço esquerdo, obtemos um novo V mágico; 3. Não é possível juntar os números maiores num braço e os números menores noutro. 4. Se o vértice for 2 ou 4 não conseguimos formar o V mágico; 5. Se colocarmos só números pares num braço e adicionarmos vai dar sempre um número par, se for só números ímpares a soma é ímpar e se for um número ímpar e par a soma será um número ímpar.	Se analisarem bem as somas dos braços o que podem concluir em relação às parcelas das somas e aos resultados ? Existe alguma relação? 3. Porque não podemos juntar os números maiores num braço? 4. Porque é que com os números 2 e 4 no vértice não conseguem formar o V mágico? Que números podemos colocar no vértice? E esses números que características têm? São números pares ou ímpares? Que concluem? 5. Porquê?
Generalizações	Se utilizarmos números de 1 a 5, os vértices só podem ser 1, 3 e 5 Relações entre a paridade das parcelas e a paridade da soma na adição: $P+P=P$; $Í+P=Í$; $Í+Í=Í$	

3. Discussão coletiva

Para a discussão a professora seleciona os pares/grupos que tenham descoberto mais V's mágicos, fotografa e projeta no quadro no momento da apresentação.

No momento da apresentação dos V's mágicos:

Apresentação (alunos)	Ação/Questionamento(professora)
Par apresenta os V's que descobriram.	Algum par/grupo descobriu mais V's mágicos?
Par/grupo apresenta a sua proposta	Como podemos ter a certeza de que temos os V's mágicos todos?
Pares/grupos apresentam as suas propostas	Caso não apresentem propostas que permitam descobrir todos os V's mágicos a professora continua o questionamento: Como podemos fazer para organizar os números? E se colocarmos começarmos pelo número que está no vértice? Começemos pelo 1. É possível fazer outro V com o número 1 no vértice? O que mudamos? O que mantemos? Como dispomos os outros números?
	Propõe o procedimento anterior para o 3 e o 5 e verifica com os alunos que são 24 V's mágicos

Existem 24 casos possíveis, 8 para cada vértice (1, 3 e 5).

Quando o vértice é 1 a soma de cada braço é:

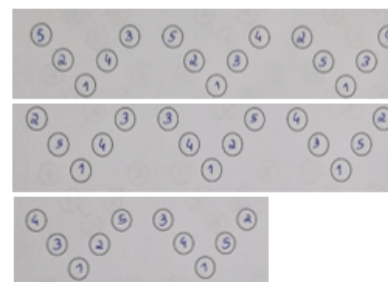
$$2+3+4+5=14$$

$$14:2=7$$

$$7+1=8$$

$$8$$

Casos possíveis:



Quando o vértice é 3 a soma de cada braço é:

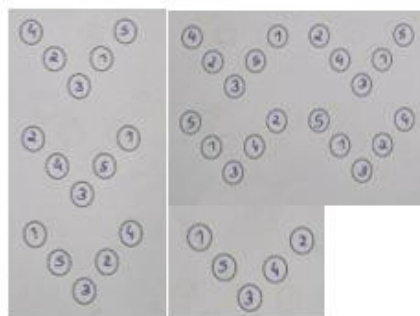
$$1+2+4+5=12$$

$$12:2=6$$

$$6+3=9$$

9

Casos possíveis:



Quando o vértice é 5 a soma de cada braço é:

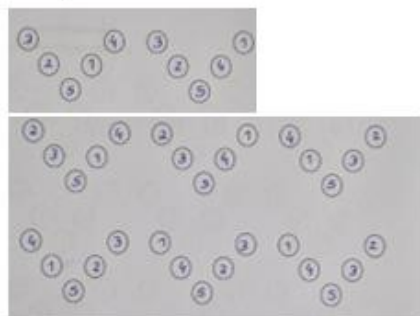
$$1+2+3+4=10$$

$$10:2=5$$

$$5+5=10$$

10

Casos possíveis:



Depois, a professora continua a discussão da seguinte maneira:

Ação/Questionamento(professora)	Ação/resposta (alunos)
O que têm em comum todos os V's mágicos?	Todos os V's mágicos têm números de 1 a 5. Os vértices só podem ser 1,3 e 5, excluindo 2 e o 4 que nunca podem ser.
Caso não refiram que o 2 e o 4 não podem estar nos vértices: Todos os números ocupam todas as posições? Que números ficaram nos vértices? Ficaram todos? Quais ficaram de fora? Porquê? Que características têm que não os permitem estar nos vértices?	O 2 e 4 não aparecem nos vértices porque são números pares.
Caso não entendam a razão pela qual o 2 e o 4 não podem estar nos vértices: Propõe que um aluno vá ao quadro construir um V mágico com o 2 no vértice.	1-5-2-3-4 1+5=6 ou 1+5+2=8 3+4=7 ou 3+4+2=9 As somas não iguais.
Porque é que as somas não são iguais? Caso não entendam: Vamos olhar para a adição de cada braço do V com o 2 no vértice e para a adição do outro com o 1 no vértice. O que observam de diferente nos números? E se formos colocar por baixo de cada número se são pares ou ímpares? O que concluímos?	1-5-2-3-4 1+5=6 ou 1+5+2=8 i+i =p ou i+i =p 3+4=7 ou 3+4+2=9 i+p =í ou i+p =í 4-3-1-5-2 4+3=7 ou 4+3+1=8 p+i =í ou p+i =p 5+2=7 ou 5+2+1=8 i+p =í ou i+p =p No caso do primeiro V não dá porque adicionamos ímpar com ímpar que dá par e depois adicionamos par com ímpar que dá ímpar e por isso dá um resultado diferente. No segundo v, o mágico, em ambos os braços adicionamos ímpar com par que dá ímpar, depois adicionamos mais um ímpar que dá par, porque ímpar com ímpar dá par e para mais par dá ímpar.
Conclusões que a professora regista no quadro: p+p =p; i+p =i; i+i =p (p+p =i; i+i =i; p+i =p; p+p =p)	

4. Sistematização

A professora entrega a cada aluno uma folha para preencherem e colarem no caderno, resolvendo-a em turma.

Preenche os espaços com par ou ímpar:

$\text{par} + \text{ímpar} + \text{ímpar} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\text{par} + \text{par} + \text{ímpar} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\text{par} + \text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} = \underline{\hspace{2cm}}$

Concluindo....

A adição de dois números pares é um número par.

$\text{par} + \text{par} = \underline{\hspace{2cm}}$

A adição de dois números ímpares é um número par.

$\text{ímpar} + \text{ímpar} = \underline{\hspace{2cm}}$

A adição de um número par com um número ímpar é um número ímpar.

$\text{par} + \text{ímpar} = \underline{\hspace{2cm}}$

Anexos:

Anexo 1- Obtido de [Brochuras Bazar - Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º ciclos - Números](#)



Anexo2- Cartões numerados



Anexo 11: Planificação da tarefa da Sequência dos Múltiplos

Planificação

Designação da tarefa: Sequência dos múltiplos

Duração: 1h50m

Turma: 20 alunos (seis alunos com medidas seletivas e dois com medidas universais)

Objetivos

Aprendizagens Essenciais

Domínio	Tópico	Subtópico	Objetivos de Aprendizagem
	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar	Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
		Justificar	Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
	Comunicação matemática	Expressão de ideias	Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
		Discussão de ideias	Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos
	Representações matemáticas	Representações múltiplas	Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas. Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas
		Linguagem simbólica matemática	Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
Álgebra (3.º ano)	Regularidades em sequências	Sequências de repetição	Identificar e descrever o grupo de repetição de uma sequência. Descrever, em linguagem natural, a regra de formação de uma sequência de repetição, explicando as suas ideias
Números (2.º ano)	Relações numéricas	Factos básicos da multiplicação e sua relação com a divisão	Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuadas do 2 e do 4) e sua relação com a divisão. (múltiplos)

Materiais:

- Folha de registo (Anexo 1);
- Quadro de ardósia;
- Giz;
- Lápis de carvão;
- Borracha;

Organização dos alunos: pares

Propostas de trabalho e atividade esperada

1. Apresentação da tarefa. (10 minutos)

Ação/questões (professora)	Ação/Resposta esperada (Alunos)	Objetivo
A professora começa por projetar no quadro a sequência de repetição: 		
-O que é isto que está projetado?	Uma sequência de repetição.	-Identifiquem como sequência de repetição.
-O que é um sequência de repetição?	Sequência em que se repete as imagens (grupo de repetição)	-Identifiquem o que é uma sequência de repetição.

2. Trabalho autónomo (40 minutos).

De seguida a professora:

- Organiza os alunos a pares/grupos;
- Lembra/discute as regras de trabalho a pares/grupo
- Lê as perguntas e esclarece as dúvidas
- Desafia os pares a realizarem a ficha de trabalho.
- Distribui fichas de trabalho.

Durante o trabalho autónomo a professora observa as diferentes estratégias dos pares a seleciona-as pela sua complexidade/coerência/assertividade.

Questões e Resposta	Possíveis Resoluções dos alunos	Questionamento(professora)
1.1. Desenha a 11.ª figura da sequência. 	Percebem que a seguir ao círculo branco vem o triângulo azul. Ou Não entendem qual o grupo de repetição e pensam que esse grupo termina no círculo branco e que a figura 11 será o triângulo branco.	Qual é a figura 12? Será que o grupo de repetição termina na figura 10? Então qual o grupo de repetição? O que se está sempre a repetir?
1.2. Rodeia o grupo de repetição da sequência. 	Posso dividir o 12 por 2 e dar resto 0? E por 4? E o número 24 por 2 e por 4? E por 26? E por 34? Continua a sequência até ao 20.º termo. (até que os alunos identifiquem a regularidade dos múltiplos de 4, relacionando com os 4 elementos do grupo de repetição.)	
1.3. Indica qual será a 28.ª figura da sequência. A figura 28.ª é o círculo azul. 	Os alunos contam as figuras. Os alunos relacionam a figura 28 com a 8, pois terminam no algarismo 8. Os alunos relacionam a figura 20 com a 10, porque último algarismo é 0, erradamente, e contam mais 8 figuras para a frente. Recorrem à regularidade*	
1.4. E qual será a 34.ª figura da sequência? A figura 34.ª é o círculo branco. 	Os alunos contam as figuras. Os alunos relacionam a figura 34 com a 4, erradamente, pois terminam no algarismo 4. Os alunos relacionam a figura 30 com a 10, pelo último algarismo ser 0, erradamente, e contam mais 4 figuras para a frente. Recorrem à regularidade*	
1.5. Indica a 47.ª figura da sequência. A figura 47.ª é o triângulo branco. 	Os alunos contam as figuras. Os alunos relacionam a figura 47 com a 7, erradamente, pois terminam no algarismo 7.	O 48 é múltiplo de 4? E de 2? O 34 é múltiplo de 4? E de 2? O 100 é múltiplo de 4? E de 2?

	Os alunos relacionam a figura 40 com a 10, pelo último algarismo ser 0, erradamente, e contam mais 7 figuras para a frente. Recorrem à regularidade**	Qual será a figura que representa os múltiplos de 2 e de 4? Qual será a figura que representa apenas os múltiplos de 2 e não de 4?
1.6. Indica a 101.ª figura da sequência A figura 101 é o triângulo branco. 	Os alunos contam as figuras. Os alunos relacionam a figura 100 com a 10, erradamente, pois terminam no algarismo 0 e contam mais 1 figura para a frente. Recorrem à regularidade**	Qual será a figura a seguir à figura que representa os múltiplos de 2 e não de 4? E a figura a seguir à figura que representa os múltiplos de 2 e de 4?
1.7. A figura número 135 pode ser um círculo? Justifica a tua resposta. A figura 135 não pode ser um círculo, porque não é um múltiplo de 2 nem de 4.	Os alunos relacionam a figura 135 com a 5, erradamente, pois terminam no algarismo 5 e esta figura é um triângulo. Os alunos relacionam a figura 100 com a 10, erradamente, pois terminam no algarismo 0 e contam mais 35 figuras para a frente que é referente ao triângulo. Recorrem à regularidade. *	
1.8. Como podes descobrir a posição de cada uma das figuras da sequência? Explica as tuas ideias.	Referem a contagem de imagens. Fazem a relação entre os algarismos das figuras, erradamente (ex: fig. 7=47, fig.8=78). Explicam as regularidades (indicadas na linha seguinte).	
Regularidades	*Os círculos brancos são os múltiplos de 2 que não são múltiplos de 4, e os círculos azuis são os múltiplos de 4, mas também são múltiplos de 2. **Os triângulos brancos são os múltiplos de 2, mas não de 4, menos um (ex: figura 18 é múltiplo de 2 e não de 4, então a figura 17 é 18-1=17) Ou	

	Os triângulos brancos são os múltiplos de 2 e de 4 mais um (ex: a figura 28 é múltiplo de dois e de quatro, logo a figura 29 é $28+1=29$) ***Os triângulos azuis são os múltiplos de 2 (apenas do 2 e não do 4) mais um (ex: a figura 26 é múltiplo de 2 e não de 4, logo a figura 27 é $26+1=27$) Ou Os triângulos pintados são os múltiplos de 2 e de 4 menos um (ex: a figura 20 é múltiplo de 2 e de 4, logo a figura 19 é $20-1=2$)
--	---

3. Discussão coletiva (30 minutos)

Para a discussão a professora seleciona os pares/grupos pela complexidade/coerência/assertividade das estratégias:

- 1.º- aqueles pares que tenham recorrido a estratégias que os levaram a soluções incorretas;
- 2.º- aqueles pares que recorreram a contagens;
- 3.º- outras estratégias;
- 4.º- aqueles pares que recorreram às regularidades apresentadas acima;

No momento da discussão a professora pede que cada par apresente as suas respostas e foca-se na última:

Ação professora e alunos	Questionamento(professora)
Professora pede ao par que não foi assertivo nas suas estratégias que as partilhem	Os outros pares concordam com as respostas dos colegas?
Professora seleciona o par das contagens ou outra estratégia intermédia (descritas na tabela anterior)	Porque dizem que está errado? (seleciona a resposta do par das contagens ou do par com a estratégia intermédia)
Par/pares apresentam as suas propostas	
Professora questiona com o objetivo de que os par/pares que seguiu/seguiram as regularidades apresentem as suas estratégias	Existem outras formas de descobrir as posições das figuras?

4. Sistematização (30 minutos)

Ação professora e alunos	Questionamento(professora)
Qual/quais as regularidades que encontrámos?	Os círculos brancos são os múltiplos de 2, mas não são múltiplos de 4, e os círculos azuis são os múltiplos de 4, mas também são múltiplos de 2. Os triângulos brancos são os múltiplos de 2, mas não de 4, menos um (ex: figura 18 é múltiplo de 2 e não de 4, então a figura 17 é $18-1=17$) Ou Os triângulos brancos são os múltiplos de 2 e de 4 mais um (ex: a figura 28 é múltiplo de dois e de quatro, logo a figura 29 é $28+1=29$) Os triângulos azuis são os múltiplos de 2 (apenas do 2 e não do 4) mais um (ex: a figura 26 é múltiplo de 2 e não de 4, logo a figura 27 é $26+1=27$) Ou Os triângulos pintados são os múltiplos de 2 e de 4 menos um (ex: a figura 20 é múltiplo de 2 e de 4, logo a figura 19 é $20-1=2$)
O que são os múltiplos de 2? E de 4?	Os múltiplos de dois são os resultados possíveis da multiplicação do 2, e esses números são sempre pares e o mesmo acontece com os múltiplos de 4, no entanto, nem todos os números pares são múltiplos de 4.
Como podemos confirmar?	Dividindo o número em questão pelo 2 ou pelo 4, em que o resto tem de ser 0.

A seguir a professora resolve os seguintes exercícios com a turma:

Rodeia a amarelo os múltiplos de 2 e a verde os múltiplos de 4.

24 38 100 34 124
12 64 54 184 32

Anexo 12: Planificação da tarefa de Sequência de Crescimento

Planificação

Designação da tarefa: Sequência de crescimento

Duração: 1h50m

Turma: 20 alunos (seis alunos com medidas seletivas e dois com medidas universais)

Objetivos

Aprendizagens Essenciais

Domínio	Tópico	Subtópico	Objetivos de Aprendizagem
	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar	Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
		Justificar	Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
	Comunicação matemática	Expressão de ideias	Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
		Discussão de ideias	Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos
	Representações matemáticas	Representações múltiplas	Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas. Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas
		Linguagem simbólica matemática	Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
Álgebra (4.º ano)	Regularidades em sequências	Sequências de crescimento	Formular conjeturas sobre a estrutura de uma sequência de crescimento e testar essas conjeturas, explicando o raciocínio usado.
			Identificar e descrever regularidades em sequências de crescimento, explicando as suas ideias.
			Continuar uma sequência de crescimento respeitando uma regra de formação dada ou regularidades identificadas.
			Descrever em linguagem natural a regra de formação de uma sequência de crescimento, explicando as suas ideias.
Números (2.º ano)	Relações numéricas	Factos básicos da multiplicação e sua relação com a divisão	Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuada do 4) e sua relação com a divisão. (múltiplos)

Materiais:

-Folha de registo (Anexo 1);

-Quadro de ardósia;

-Giz;

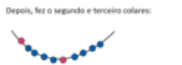
-Lápis de carvão;

-Borracha;

Organização dos alunos: pares

Propostas de trabalho e atividade esperada

1. Apresentação da tarefa. (10 minutos)

Ação/questions (professora)	Ação/Resposta esperada (Alunos)	Objetivo
A professora começa por projetar a sequência de crescimento: A Joana está a fazer colares para oferecer aos amigos. 56 tem contas de duas cores – azuis e vermelhas. Construa o primeiro colar:  3.º colar Depois, faz o segundo e terceiro colares:  2.º colar  3.º colar		
-O que é isto que está projetado?	Uma sequência de crescimento/ uma sequência em que o número de contas está a aumentar.	-Identifiquem como sequência de crescimento.

2. Trabalho autónomo (40 minutos).

De seguida a professora:

- Organiza os alunos a pares/grupos;
- Relembra/discute as regras de trabalho a pares/grupo
- Lê as perguntas e esclarece as dúvidas
- Desafia os pares a realizarem a ficha de trabalho.
- Distribui fichas de trabalho.

Durante o trabalho autónomo a professora observa as diferentes estratégias dos pares a seleciona-as pela sua complexidade.

Questões e Resposta	Possíveis Resoluções dos alunos	Questionamento(professora)																					
1. Desenha o 4.º colar construído pela Joana. 4 contas vermelhas e 16 contas azuis	Percebem que de colar para colar o número de contas vermelhas aumenta 1 e que o número de contas azuis aumenta 4.	Quantas contas vermelhas adiciona a Joana de colar para colar? E azuis?																					
2. Preenche a tabela: <table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>Número de contas azuis</th><th>Número de contas vermelhas</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1.º colar</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr> <td>2.º colar</td><td>8</td><td>2</td></tr> <tr> <td>3.º colar</td><td>12</td><td>3</td></tr> <tr> <td>4.º colar</td><td>16</td><td>4</td></tr> <tr> <td>5.º colar</td><td>20</td><td>5</td></tr> <tr> <td>6.º colar</td><td>24</td><td>6</td></tr> </tbody> </table>		Número de contas azuis	Número de contas vermelhas	1.º colar	4	1	2.º colar	8	2	3.º colar	12	3	4.º colar	16	4	5.º colar	20	5	6.º colar	24	6	Percebem que de colar para colar a ordem do termo é igual ao número de contas vermelhas e a ordem do termo vezes quatro corresponde ao número de contas azuis. Percebem que o número de contas azuis corresponde aos múltiplos de 4.	No primeiro colar quantas contas vermelhas tem? E no segundo colar? E no terceiro? O que está a acontecer de colar para colar em relação às contas vermelhas? No primeiro colar quantas contas azuis existem? E no segundo colar? E no terceiro? O que está a acontecer de colar para colar em relação às contas azuis?
	Número de contas azuis	Número de contas vermelhas																					
1.º colar	4	1																					
2.º colar	8	2																					
3.º colar	12	3																					
4.º colar	16	4																					
5.º colar	20	5																					
6.º colar	24	6																					
3. Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste. O número de contas azuis é o quádruplo (x4) do número de contas vermelhas. O número de contas vermelhas é a quarta parte do número de contas azuis (:4).	Percebem que o número de contas vermelhas obtém-se dividindo o número de contas azuis por 4. O número de contas azuis obtém-se multiplicando o número de contas vermelhas por 4. Percebem que o número de contas número de contas azuis é o quádruplo e por isso do número de contas vermelhas e por isso multiplica-se por quatro. O número de contas vermelhas é a quarta parte do número de contas azuis e por isso divide-se por 4.	Se na tabela, verificamos que o número de contas azuis obtém adicionando 4, que número temos nessa coluna? Faz-te lembrar alguma tabuada? Qual? E esses números são o quê dessa tabuada? Já trabalhamos antes, estes números. Então como posso descobrir o número de contas azuis se só souber as contas vermelhas? Que relação encontras das vermelhas para as azuis? Consegues descobrir utilizando alguma operação? Qual?																					
4. Se o colar tiver 8 contas vermelhas, quantas azuis terá? Mostra como pensaste. O colar terá 32 contas vermelhas pois, $8 \times 4 = 32$.																							
5. Se o colar tiver 40 contas azuis, quantos vermelhas terá? Mostra como pensaste. O colar terá 10 contas vermelhas, pois $40 : 4 = 10$.	Percebem que o número total de contas é sempre x5 o número de contas vermelhas, através da tabela da ficha.	E se tivesse só o número de contas azuis, como chegaria ao número de contas vermelhas? Olhando para a																					

6. Se o total de contas do colar for 60, quantas contas vermelhas tem o colar? E azuis? Mostra como pensaste. O número total de contas é sempre x5 o n.º de contas vermelhas. Logo, o número de contas vermelhas é $60 : 5 = 12$. O n.º de contas azuis é $x4$ o n.º de contas vermelhas, logo $12 \times 4 = 48$	Percebem que se o número de contas azuis são os múltiplos de 4, o número de contas vermelhas são a quarta parte. Ou seja, que o número de contas azuis é quatro vezes o número de contas vermelhas. Então, o número total de contas, sabendo o número de contas vermelhas, será o número de contas vermelhas mais quatro vezes o número de contas vermelhas.	tabela, se para achar o número de contas azuis multiplico por 4, ao contrário faço o quê? Qual a operação inversa da multiplicação? Se já sabemos que para descobrir as contas azuis temos de multiplicar as vermelhas por quatro, como faço para descobrir o total de contas? Tenho de efetuar mais alguma operação? Qual? Com que dados? $(N.º \text{ de contas azuis} = n.º \text{ de contas vermelhas} \times 4)$ Logo $N.º \text{ total de contas} = n.º \text{ de contas vermelhas} + (n.º \text{ de contas vermelhas} \times 4)$
7 - Descobre uma regra que permita encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas vermelhas desse colar. Mostra como pensaste. $N.º \text{ de contas azuis} = n.º \text{ de contas vermelhas} \times 4$ Logo $N.º \text{ total de contas} = n.º \text{ de contas vermelhas} + (n.º \text{ de contas vermelhas} \times 4)$ Ou O número total de contas é sempre x5 do n.º de contas vermelhas.		

3. Discussão coletiva (30 minutos)

Para a discussão a professora seleciona os pares pela complexidade das estratégias:

Ação professora e alunos	Questionamento(professora)
Professora pede ao par que recorreu a contagens para apresentar as suas estratégias	Os outros pares concordam com as respostas dos colegas? Há outra maneira mais fácil de apresentar as estratégias?
Professora pede ao par que recorreu a desenhos para apresentar as suas estratégias	Os outros pares concordam com as respostas dos colegas? Há outra maneira mais fácil de apresentar as estratégias sem ser com desenhos? Alguém utilizou símbolos?
Professora pede ao par que recorreu a representações simbólicas para apresentar as suas estratégias	Os outros pares concordam com as respostas dos colegas? Algum par utilizou operações? Quais?
Professora pede ao par que recorreu à operação inversa da multiplicação para apresentar as suas estratégias	

4. Sistematização (30 minutos)

Ação professora e alunos	Questionamento(professora)
	Qual a regra que permite, então, encontrar número de total de contas, sabendo as vermelhas?
Professora escreve no quadro a regularidade:	$N.^{\circ}$ de contas azuis = $n.^{\circ}$ de contas vermelhas x 4 Logo $N.^{\circ}$ total de contas = $n.^{\circ}$ de contas vermelhas + ($n.^{\circ}$ de contas vermelhas x4) ou O número total de contas é sempre x5 do $n.^{\circ}$ de contas vermelhas.