



Lara Filipa Marques da Rocha

**Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática –  
Caso aplicado a empresa de condomínios**





Lara Filipa Marques da Rocha

## **Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios**

Trabalho de projeto submetido ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Análise de Dados e Sistemas de Apoio à Decisão**, realizado sob a orientação do Professor Pedro João Coimbra Martins.

Coimbra, outubro de 2025



*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

## **TERMO DE RESPONSABILIDADE**

Declaro ser a autora deste projeto, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido a outra Instituição de ensino superior para obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas e que tenho consciência de que o plágio constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação do presente projeto.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Martins, pela sua disponibilidade, paciência e apoio ao longo de todo este projeto. Independentemente das restantes pessoas a quem sou grata, este reconhecimento é, sem dúvida, imprescindível. Sem a sua orientação, este trabalho não teria sido possível.

Agradeço profundamente aos meus pais, pelo esforço incansável que sempre fizeram para me proporcionar uma educação de qualidade, bem como pelo apoio incondicional e por acreditarem sempre em mim.

Expresso também a minha gratidão ao meu irmão e ao meu namorado, pela dedicação, pela presença constante e por estarem sempre disponíveis para me ouvir e encorajar, especialmente nos momentos mais desafiantes.

Por fim, deixo uma palavra de agradecimento à minha família e aos meus amigos, que, com o seu carinho e apoio, contribuíram para que este percurso fosse mais leve e possível. A todos, o meu muito obrigada.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

## RESUMO

Este estudo incide no planeamento de rotas diárias para um conjunto limitado de colaboradores de uma empresa de gestão de condomínios, com visitas pré-agendadas. Pretende-se determinar uma solução para o planeamento das rotas de forma a garantir que sejam geograficamente coerentes, visitando todos os clientes que solicitaram serviços e respeitando as condições do problema. Considera-se que alguns colaboradores são subcontratados de acordo com as suas competências técnicas. Por este motivo, considerando as solicitações específicas de cada condomínio, cada colaborador poderá cobrir apenas um subconjunto da totalidade dos clientes. Adicionalmente, as rotas são duplamente abertas; e o instante de início da visita a cada condomínio deve ocorrer dentro de uma janela de tempo especificada pelo cliente. Além disso, se a rota se estender da manhã para a tarde, esta deverá incluir uma pausa para o almoço do colaborador. Considera-se também que a duração total de cada rota não pode exceder o período de laboração diário da empresa e um tempo limite de laboração específico de cada colaborador. Atendendo a estas condições, pretendem-se obter rotas sequencialmente coerentes e que evitem estender-se do período da manhã para a tarde, ou seja, atendendo às características dos colaboradores, estes preferem que as rotas ocorram integralmente de manhã ou integralmente de tarde. A abordagem adotada é baseada em programação linear inteira mista, utilizando o *solver* Gurobi para a resolução do modelo. Os testes computacionais foram conduzidos em duas direções: i) na análise da eficiência computacional do modelo e sensibilidade de alguns dos seus parâmetros; e ii) na aplicabilidade prática do problema, no âmbito da empresa objeto do estudo. Destacando a aplicabilidade prática do estudo, a eficiência no planeamento das rotas é crucial para garantir a pontualidade nas visitas, a satisfação dos condóminos, reduzir os custos operacionais e aumentar a produtividade. Entre os principais resultados, destaca-se a redução do número de rotas longas (com manhã e tarde), permitindo que os colaboradores realizem todas as visitas de forma concentrada, seja no período matinal ou no período da tarde, permitindo que o colaborador possa exercer funções noutra empresa ou noutra atividade na outra metade do dia. As conclusões destacam ainda a relevância da modelação de rotas no contexto da administração de condomínios, contribuindo para a melhoria da eficiência operacional das

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

empresas. O modelo proposto também pode ser adaptado para outras empresas prestadoras de serviços.

Palavras-chave: Administração de condomínios; pausas para almoço; planeamento de rotas; programação linear inteira mista.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

## ABSTRACT

This study focuses on planning daily routes for a limited number of employees of a condominium management company, with pre-scheduled visits. The aim is to determine a solution for routes planning in order to ensure that they are geographically consistent, visiting all customers who have requested services and respecting the conditions of the problem. Employees are considered subcontracted based on their technical skills. For this reason, considering the specific requests of each condominium, each employee may only cover a subset of all customers. Additionally, routes are doubly open, and the start time at each condominium visit must occur within a time window specified by the customer. Furthermore, if the route extends from morning to afternoon, it must include a lunch break for the employee. It is also considered that the total duration of each route cannot exceed the company's daily working period and a specific working time limit of each employee. Given these conditions, the aim is to obtain sequentially coherent routes that avoid extending from the morning to the afternoon, i.e., given the characteristics of the employees, they prefer that the routes take place entirely in the morning or entirely in the afternoon. The approach adopted is based on mixed integer linear programming, using Gurobi to solve the model. The computational tests were conducted in two directions: i) analysing the computational efficiency of the model and the sensitivity of some of its parameters; and ii) the practical applicability of the problem within the scope of the company under study. Highlighting the practical applicability of the study, efficiency in routes planning is crucial to ensure punctuality in visits, condominium owner satisfaction, reduce operating costs and increase productivity. Among the main results, we highlight the reduction in the need for entire day routes, allowing employees to carry out all visits in a concentrated manner, either in the morning or in the afternoon, letting the employee to perform duties at another company or in another activity in the other half of the day. The conclusions also highlight the importance of route modelling in the context of condominium management, contributing to improving the operational efficiency of companies. The proposed model can also be adapted for other service providers.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Keywords: Condominium management; lunch breaks; route planning; mixed-integer linear programming.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

## ÍNDICE GERAL

|       |                                                                    |    |
|-------|--------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO.....                                                    | 1  |
| 2     | DESCRIÇÃO DO PROBLEMA .....                                        | 5  |
| 2.1   | Especificidades da Empresa em Análise .....                        | 9  |
| 3     | REVISÃO DE LITERATURA .....                                        | 12 |
| 4     | METODOLOGIA.....                                                   | 26 |
| 5     | FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....                                        | 30 |
| 6     | TESTES COMPUTACIONAIS .....                                        | 40 |
| 6.1   | Recolha e tratamento dos dados .....                               | 41 |
| 6.2   | Desempenho Computacional da Formulação .....                       | 45 |
| 6.2.1 | Testes Computacionais com Instâncias de Solomon para o VRPTW ..... | 45 |
| 6.2.2 | Análise do Impacto das Restrições Redundantes .....                | 48 |
| 6.2.3 | Variação do número de colaboradores .....                          | 51 |
| 6.2.4 | Diversas configurações de janelas de tempo .....                   | 54 |
| 6.3   | Discussão de Casos Aplicados .....                                 | 57 |
| 6.3.1 | Instância com $n = 10$ e $m = 2$ .....                             | 58 |
| 6.3.2 | Instância com $n = 12$ e $m = 2$ .....                             | 63 |
| 6.3.3 | Instância com $n = 15$ e $m = 2$ .....                             | 69 |
| 6.3.4 | Análise de casos com <i>gap</i> muito elevado.....                 | 75 |
| 6.3.5 | Discussão das janelas de tempo em caso prático.....                | 83 |
| 7     | CONCLUSÃO.....                                                     | 89 |
|       | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                                   | 91 |
|       | APÊNDICES .....                                                    | 96 |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| APÊNDICE 1. Documento de Apoio à Otimização de Rotas para a Empresa .....                    | 97  |
| APÊNDICE 2. Descrição Pormenorizada das Instâncias Reais Utilizadas .....                    | 99  |
| APÊNDICE 3. Testes com Instâncias de Solomon sem Pausa para Almoço.....                      | 112 |
| APÊNDICE 4. Janelas de Tempo por instância nas Formulações F2_c e F2_p .....                 | 114 |
| APÊNDICE 5. Janelas de Tempo das Instâncias Reais Utilizadas nos Casos Aplicados .....       | 123 |
| APÊNDICE 6. Visualização Detalhada das Rotas referentes ao colaborador A e 15 clientes ..... | 125 |
| APÊNDICE 7. Visualização das Rotas com Diferentes Cenários de Janelas de Tempo .....         | 127 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 4.1 - Quatro níveis da metodologia CRISP-DM .....                                                     | 27 |
| Figura 4.2 - Fases do Modelo de Referência CRISP-DM .....                                                    | 27 |
| Figura 6.3.1.1 - Mapa dos 10 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b) .....              | 59 |
| Figura 6.3.1.2 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador A ..... | 60 |
| Figura 6.3.1.3 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador B ..... | 62 |
| Figura 6.3.2.1 - Mapa dos 12 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b) .....              | 64 |
| Figura 6.3.2.2 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador A ..... | 65 |
| Figura 6.3.2.3 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador B ..... | 67 |
| Figura 6.3.3.1 - Mapa dos 15 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b) .....              | 70 |
| Figura 6.3.3.2 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador A ..... | 71 |
| Figura 6.3.3.3 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador B ..... | 72 |
| Figura 6.3.4.1 - Mapa dos 20 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b) .....              | 76 |
| Figura 6.3.4.2 - Mapa dos 96 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b) .....              | 79 |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

|                                                                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 6.3.5.1 - Mapa dos 40 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b) .....                                                                           | 83  |
| Figura 6.3.5.2 - Rota do colaborador A sem janelas de tempo.....                                                                                                          | 86  |
| Figura 6.3.5.3 - Rota do colaborador A com janelas de tempo regulares .....                                                                                               | 86  |
| Figura 6.3.5.4 - Rota do colaborador A com janelas de tempo apertadas .....                                                                                               | 87  |
| Figura A1.1 - Excerto do documento Excel .....                                                                                                                            | 97  |
| Figura A1.2 - Excerto do documento Excel .....                                                                                                                            | 98  |
| Figura A6.1 - Visualização da rota manual do colaborador A (a), com ampliação do local onde a rota começa (cliente 12) e termina (cliente 42).....                        | 125 |
| Figura A6.2 - Visualização da rota obtida através da formulação do colaborador A (a), com ampliação do local onde a rota começa (cliente 49) e termina (cliente 41) ..... | 126 |
| Figura A7.1 - Rota do colaborador B sem janelas de tempo.....                                                                                                             | 127 |
| Figura A7.2 - Rota do colaborador B com janelas de tempo regulares.....                                                                                                   | 128 |
| Figura A7.3 - Rota do colaborador B com janelas de tempo apertadas .....                                                                                                  | 128 |
| Figura A7.4 - Rota do colaborador C sem janelas de tempo.....                                                                                                             | 129 |
| Figura A7.5 - Rota do colaborador C com janelas de tempo regulares.....                                                                                                   | 129 |
| Figura A7.6 - Rota do colaborador C com janelas de tempo apertadas .....                                                                                                  | 130 |
| Figura A7.7 - Rota do colaborador D sem janelas de tempo.....                                                                                                             | 130 |
| Figura A7.8 - Rota do colaborador D com janelas de tempo regulares.....                                                                                                   | 131 |
| Figura A7.9 - Rota do colaborador D com janelas de tempo apertadas .....                                                                                                  | 131 |
| Figura A7.10 - Rota do colaborador E sem janelas de tempo .....                                                                                                           | 132 |
| Figura A7.11 - Rota do colaborador E com janelas de tempo regulares .....                                                                                                 | 132 |
| Figura A7.12 - Rota do colaborador E com janelas de tempo apertadas.....                                                                                                  | 133 |
| Figura A7.13 - Rota do colaborador F sem janelas de tempo .....                                                                                                           | 133 |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

|                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura A7.14 - Rota do colaborador F com janelas de tempo regulares ..... | 134 |
| Figura A7.15 - Rota do colaborador F com janelas de tempo apertadas.....  | 134 |
| Figura A7.16 - Rota do colaborador G sem janelas de tempo.....            | 135 |
| Figura A7.17 - Rota do colaborador G com janelas de tempo regulares.....  | 135 |
| Figura A7.18 - Rota do colaborador G com janelas de tempo apertadas ..... | 136 |

## ÍNDICE DE TABELAS

|                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 6.2.1.1 - Desempenho das Instâncias de Solomon adaptadas ao problema proposto .....                                    | 46 |
| Tabela 6.2.2.1 - Comparação e desempenho entre as Formulações F0, F1 e F2 .....                                               | 49 |
| Tabela 6.2.3.1 - Comparação e desempenho entre as Formulações F2_a e F2_b .....                                               | 52 |
| Tabela 6.2.4.1 - Comparação e desempenho entre as Formulações F2_s, F2_c e F2_p .....                                         | 55 |
| Tabela 6.3.1.1 - Comparação entre as rotas manuais e as rotas obtidas pela formulação ...                                     | 60 |
| Tabela 6.3.1.2 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador A .....    | 61 |
| Tabela 6.3.1.3 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador B .....    | 62 |
| Tabela 6.3.1.4 - Comparação entre a distância e o tempo obtidos manualmente e através da formulação para ambas as rotas ..... | 63 |
| Tabela 6.3.2.1 - Comparação entre as rotas manuais e as rotas obtidas pela formulação ...                                     | 65 |
| Tabela 6.3.2.2 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador A .....    | 66 |
| Tabela 6.3.2.3 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador B .....    | 67 |
| Tabela 6.3.2.4 - Comparação entre a distância e o tempo obtidos manualmente e através da formulação para ambas as rotas ..... | 68 |
| Tabela 6.3.3.1 - Comparação entre as rotas manuais e as rotas obtidas pela formulação ...                                     | 70 |
| Tabela 6.3.3.2 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador A .....    | 72 |
| Tabela 6.3.3.3 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador B .....    | 73 |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

|                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 6.3.3.4 - Comparação entre a distância e o tempo obtidos manualmente e através da formulação para ambas as rotas..... | 73  |
| Tabela 6.3.4.1 - Dados das instâncias com os maiores gaps (20 e 96 clientes).....                                            | 75  |
| Tabela 6.3.4.2 - Rotas obtidas pela formulação para 20 clientes .....                                                        | 77  |
| Tabela 6.3.4.3 - Rotas obtidas pela formulação para 96 clientes .....                                                        | 80  |
| Tabela 6.3.5.1 - Rotas obtidas pela formulação para 40 clientes para os diferentes cenários de janelas de tempo.....         | 84  |
| Tabela 6.3.5.2 - Comparação entre os três casos referentes à penalização do almoço.....                                      | 85  |
| Tabela A2.1 - Tempo de serviço de cada cliente.....                                                                          | 99  |
| Tabela A2.2 - Descrição da Instância r_10_2.....                                                                             | 100 |
| Tabela A2.3 - Descrição da Instância r_12_2.....                                                                             | 100 |
| Tabela A2.4 - Descrição da Instância r_15_2.....                                                                             | 100 |
| Tabela A2.5 - Descrição da Instância r_20_3.....                                                                             | 101 |
| Tabela A2.6 - Descrição da Instância r_25_3.....                                                                             | 101 |
| Tabela A2.7 - Descrição da Instância r_30_4.....                                                                             | 102 |
| Tabela A2.8 - Descrição da Instância r_40_7.....                                                                             | 102 |
| Tabela A2.9 - Descrição da Instância r_50_7.....                                                                             | 103 |
| Tabela A2.10 - Descrição da Instância r_60_9.....                                                                            | 104 |
| Tabela A2.11 - Descrição da Instância r_70_12.....                                                                           | 105 |
| Tabela A2.12 - Descrição da Instância r_80_18.....                                                                           | 106 |
| Tabela A2.13 - Descrição da Instância r_90_22.....                                                                           | 107 |
| Tabela A2.14 - Descrição da Instância r_96_24.....                                                                           | 109 |
| Tabela A3.1 - Desempenho das Instâncias de Solomon sem pausa para almoço .....                                               | 112 |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela A4.1 - Janelas de Tempo para a Instância r_10_2 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 114 |
| Tabela A4.2 - Janelas de Tempo para a Instância r_12_2 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 114 |
| Tabela A4.3 - Janelas de Tempo para a Instância r_15_2 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 114 |
| Tabela A4.4 - Janelas de Tempo para a Instância r_20_3 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 115 |
| Tabela A4.5 - Janelas de Tempo para a Instância r_25_3 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 115 |
| Tabela A4.6 - Janelas de Tempo para a Instância r_30_4 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 116 |
| Tabela A4.7 - Janelas de Tempo para a Instância r_40_7 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 116 |
| Tabela A4.8 - Janelas de Tempo para a Instância r_50_7 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 117 |
| Tabela A4.9 - Janelas de Tempo para a Instância r_60_9 e para as formulações F2_c e F2_p .....   | 118 |
| Tabela A4.10 - Janelas de Tempo para a Instância r_70_12 e para as formulações F2_c e F2_p ..... | 119 |
| Tabela A4.11 - Janelas de Tempo para a Instância r_80_18 e para as formulações F2_c e F2_p ..... | 120 |
| Tabela A4.12 - Janelas de Tempo para a Instância r_90_22 e para as formulações F2_c e F2_p ..... | 120 |
| Tabela A4.13 - Janelas de Tempo para a Instância r_96_24 e para as formulações F2_c e F2_p ..... | 121 |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

|                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela A5.1 - Janelas de Tempo da Instância r_10_2 do caso aplicado ..... | 123 |
| Tabela A5.2 - Janelas de Tempo da Instância r_12_2 do caso aplicado ..... | 123 |
| Tabela A5.3 - Janelas de Tempo da Instância r_15_2 do caso aplicado ..... | 124 |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

## **Lista de siglas**

API (*Application Programming Interface*) - Interface de Programação de Aplicações

CRISP-DM (*Cross-Industry Standard Process for Data Mining*) - Processo Padrão Intersectorial para Mineração de Dados

DVRP (*Dynamic Vehicle Routing Problem*) - Problema Dinâmico de Rotas de Veículos

EVRP (*Electric Vehicle Routing Problem*) - Problema de Rotas de Veículos Elétricos

Green-VRP (*Green Vehicle Routing Problem*) - Problema de Rotas de Veículos Verdes

GVRP (*Generalized Vehicle Routing Problem*) - Problema de Rotas de Veículos Generalizado

MTVRP (*Multiple Trip Vehicle Routing Problem*) - Problema de Rotas de Veículos com Múltiplas Viagens

MTVRP -VW -TW (*Multiple Trip Vehicle Routing Problem with Variable Wagons and Time Windows*) -Problema de Rotas de Veículos com Múltiplas Viagens, Vagões Variáveis e Janelas de Tempo

OVRP (*Open Vehicle Routing Problem*) - Problema de Rotas de Veículos Aberto

SVRP (*Static Vehicle Routing Problem*) - Problema de Rotas de Veículos Estático

TDVRP (*Time Dependent Vehicle Routing Problem*) - Problema de Rotas de Veículos Dependentes do Tempo

TSP (*Traveling Salesman Problem*) - Problema do Caixeiro Viajante

VRP (*Vehicle Routing Problem*) - Problema de Rotas de Veículos

VRPDWH (*Vehicle Routing Problem with Drivers' Working Hours*) - Problema de Rotas de Veículos com Horas de Trabalho dos Motoristas

VRPHTW (*Vehicle Routing Problem with Hard Time Windows*) - Problema de Rotas de Veículos com Janelas de Tempo Difíceis

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

VRPSTW (*Vehicle Routing Problem with Soft Time Windows*) - Problema de Rotas de Veículos com Janelas de Tempo Flexíveis

VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*) - Problema de Rotas de Veículos com Janelas Temporais

VRPTW-LB (*Vehicle Routing Problem with Time Windows and Lunch Breaks*) - Problema de Rotas de Veículos com Janelas de Tempo e Pausas para Almoço

VSP (*Vehicle Scheduling Problem*) - Problema de Escalonamento de Veículos

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

## 1 INTRODUÇÃO

A construção e gestão eficiente de rotas de veículos é um desafio crucial para as organizações que dependem deste tipo de operações no seu quotidiano. As empresas têm, cada vez mais, beneficiado dos avanços da otimização matemática para resolver esses problemas. Este estudo foca-se no problema do planeamento de rotas diárias, com visitas pré-agendas, considerando a possibilidade de inclusão do almoço, no caso da rota se estender da manhã para a tarde. Além disso, é abordado no contexto de uma empresa de administração de imóveis, que deve atender às necessidades diárias de manutenção dos edifícios, respeitando tanto os requisitos operacionais quanto os tempos de deslocação e serviço.

No contexto dos serviços de condomínio, o planeamento eficiente das rotas é essencial para garantir uma manutenção pontual e consistente dos edifícios, ao mesmo tempo que contribui para os níveis de satisfação dos condóminos. Um planeamento ineficaz pode resultar em deslocações desnecessárias, desequilíbrio nas cargas de trabalho e aumento dos custos operacionais. Em contrapartida, a otimização das rotas contribui para a redução desses custos e para o aumento da produtividade, melhorando a qualidade do serviço prestado e tornando a empresa mais competitiva a longo prazo, aspetos fundamentais no mercado atual.

A administração de condomínios abrange uma vasta gama de operações essenciais para o bom funcionamento dos edifícios. Para corresponder às expectativas dos clientes, as atividades de manutenção devem ser realizadas de forma eficiente e com o mínimo de atraso, garantindo uma resposta rápida às necessidades dos condóminos. Um desafio operacional recorrente neste setor envolve a organização de rotas diárias de veículos para atender às visitas programadas e às tarefas de manutenção. Este é um desafio constante, dado que as empresas têm de atender diariamente vários clientes, cada um com requisitos de serviço específicos e restrições de tempo. Isso exige equilíbrio entre diversos fatores, incluindo as competências dos colaboradores, as distâncias percorridas, os limites de tempo de trabalho e as janelas de tempo para as visitas pré-agendadas.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

As rotas que se pretendem obter, resultarão em sequências de visitas que irão ser prestadas pelos colaboradores, respondendo aos serviços previamente agendados pelos clientes, sem incluir serviços de emergência. Quando solicitado um serviço urgente, a empresa recorre a colaboradores para o efeito ou desencadeia um novo processo de otimização das rotas, com impacto e possível prejuízo no serviço já programado, mas que ainda não foi prestado. Os problemas que incluem serviços de emergência são igualmente muito interessantes e desafiantes, mas envolvem outros aspetos que vão para além das questões de otimização do planeamento de serviços. Por este motivo, o problema em estudo não considerará a inclusão de serviços de urgência, centrando-se apenas no planeamento de pedidos pré-agendados.

Apesar da importância operacional do planeamento de rotas, muitas empresas ainda dependem do agendamento manual ou, em alguns casos, nem sequer o planeiam, o que pode prejudicar a eficiência e escalabilidade do serviço. A falta de planeamento compromete a qualidade e a consistência das operações, dificultando o crescimento sustentável da empresa.

Este estudo tem como objetivo encontrar rotas viáveis e eficientes para o planeamento das rotas diárias dos colaboradores de uma empresa de gestão de condomínios. Pretendem-se construir rotas que respeitem as condições do problema e que considerem uma sequência lógica das visitas aos clientes, penalizando rotas de dia inteiro, isto é, rotas que envolvam manhã e tarde. As rotas que se realizem exclusivamente de manhã ou exclusivamente de tarde, não incluirão pausa de almoço. Além disso, as rotas são duplamente abertas, iniciando-se no primeiro cliente e terminando no último. De facto, não precisando de passar por instalações da empresa, a contagem de tempo das rotas envolve apenas o percurso entre o primeiro e o último cliente, sem incluir atividades dos colaboradores antes e depois das rotas.

No problema em análise consideram-se janelas de tempo para o início da visita a cada cliente. A utilização de janelas de tempo é um aspeto importante que muitas empresas de condomínio procuram adotar, visando prestar um serviço de melhor qualidade e obter vantagem competitiva sobre as empresas concorrentes. Além disso, a inclusão do

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

intervalo para almoço é também inevitável quando os percursos se estendem por longos períodos, abrangendo a manhã e a tarde. Este é um aspeto protegido pela legislação laboral e, como mencionado anteriormente, está também presente no problema em estudo.

Este trabalho recorre a uma formulação em programação linear inteira mista para modelizar o problema de rotas em análise. O *solver* Gurobi será utilizado para encontrar as melhores soluções possíveis, dentro de um determinado tempo máximo de execução.

As principais contribuições deste estudo envolvem:

- i) A construção de uma formulação linear inteira mista para o problema de rotas com as condições específicas, requerendo menos variáveis para a modelação das pausas de almoço comparativamente com formulações semelhantes descritas na literatura.
- ii) Discussão do desempenho da formulação em relação a alterações em alguns dos parâmetros do problema.
- iii) Discussão sobre a aplicabilidade prática do problema, nomeadamente do planeamento das rotas diárias de condomínios para operações de prestação de serviços a clientes.
- iv) Destaca-se ainda a exclusão da pausa para almoço em rotas exclusivamente de manhã ou de tarde. Tendo em conta a literatura científica consultada para o presente projeto, o aspeto facultativo da pausa do almoço não foi anteriormente considerado.

A estrutura deste trabalho é composta por sete capítulos. O Capítulo 2 descreve o problema em análise, e serve como alicerce para os capítulos subsequentes. Além disso, procura apresentar de forma clara e objetiva o problema a ser resolvido, estabelecendo as bases para a compreensão do trabalho desenvolvido.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão da literatura sobre algumas variantes do problema de rotas de veículos, sobretudo as variantes que incluem alguns dos requisitos que envolvem o problema em estudo. Este capítulo servirá para contextualizar o problema dentro da literatura existente.

O Capítulo 4 detalha a metodologia utilizada para o desenvolvimento do trabalho, explicando as abordagens adotadas na resolução do problema. Além disso, aborda a adaptação da metodologia ao contexto específico do estudo.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado  
a empresa de condomínios*

---

O Capítulo 5 apresenta a formulação matemática do problema, incluindo todos os parâmetros, variáveis e restrições necessárias.

O Capítulo 6 é dedicado aos testes computacionais realizados. Este capítulo inclui um subcapítulo sobre o processo de recolha de dados, seguido de uma análise e discussão detalhada dos resultados obtidos.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões do estudo, refletindo sobre os resultados alcançados, os principais contributos, as limitações encontradas e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Uma empresa de administração de condomínios é responsável por diversas tarefas e serviços essenciais para assegurar o bom funcionamento dos edifícios que estão sob a sua gestão. Para garantir a satisfação dos clientes, é necessário que a manutenção seja realizada de forma eficiente, assegurando respostas aos serviços requeridos pelos condóminos.

Um dos principais desafios frequentemente enfrentados por este tipo de empresas é a organização das rotas diárias dos veículos para cumprir com as visitas agendadas e com os serviços de manutenção. Este problema é particularmente exigente, pois obriga que a empresa atenda diversos clientes diariamente, cada um com requisitos específicos de serviço e horários distintos. Além disso, em muitas organizações, as rotas ainda são construídas manualmente, ou nem sequer são planeadas com antecedência, o que compromete a eficácia operacional e pode prejudicar o crescimento da empresa.

Assim, este problema é transversal a várias empresas e, neste caso específico, será analisado no contexto da empresa em estudo, servindo não só de base para a análise e teste de soluções futuras, mas também como referência para possíveis adaptações noutras organizações com necessidades logísticas semelhantes.

As rotas, neste tipo de empresas, são geralmente planeadas no próprio dia e tendem a ser relativamente curtas. Além disso, é essencial que cada rota considere diversas características, tanto em termos de rotas, como de colaboradores e clientes. Essas características serão agrupadas e detalhadas de seguida.

As especificidades associadas a cada rota incluem:

- uma rota por colaborador;
- a execução das rotas deve ocorrer integralmente dentro do horário laboral da empresa;
- a contagem do tempo de cada rota inicia-se no primeiro cliente e termina após o final da visita ao último, podendo, por isso, ser consideradas rotas duplamente abertas; e

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

- pausa para almoço, caso a rota se estenda da manhã para a tarde.

As especificidades referentes aos colaboradores são as seguintes:

- número máximo de colaboradores disponíveis;
- cada colaborador pode cobrir um conjunto pré-definido de clientes, de acordo com as características do serviço requerido; e
- cada rota está sujeita a um limite de tempo máximo, definido em função do contrato de trabalho do colaborador.

As características específicas dos clientes podem ser resumidas da seguinte forma:

- cada cliente é servido por um único colaborador de entre um conjunto de colaboradores (pré-definido) com competências para o serviço requerido;
- cada cliente possui uma janela de tempo para o início da visita; e
- cada cliente tem um tempo de atendimento definido, dependendo do tipo de serviço requerido.

Cada uma das especificidades consideradas é importante para o perfil da empresa em análise, assim como para empresas de natureza semelhante.

São ainda conhecidas as distâncias e os tempos de viagem entre todos os pares de clientes que possam ser servidos por pelo menos um colaborador. Esses dados são recolhidos através de uma Interface de Programação de Aplicações (API - *Application Programming Interface*) do Microsoft Azure, permitindo a obtenção em tempo real das distâncias e tempos de viagem.

Neste tipo de organizações é usual os colaboradores usarem veículo próprio ou cedido pela empresa, usando esse veículo também para fins pessoais. Nesse sentido, as rotas não têm um ponto único de início nem de fim, começando no primeiro cliente que visitam e terminando após o serviço prestado no último cliente. Assim, as rotas devem ser consideradas como duplamente abertas, pelo que o tempo de deslocação até ao primeiro cliente e do último cliente até casa não deve ser contabilizado como tempo de trabalho. Este modelo é muito usual neste setor de atividade, estando mais alinhado com a realidade e proporcionando maior flexibilidade e eficiência no planeamento.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Neste setor, o serviço é fortemente dependente das competências dos colaboradores, e não apenas da logística de transporte. Muitos clientes apenas podem ser atendidos por colaboradores específicos devido à natureza dos serviços solicitados. Por isso, faz mais sentido definir rotas individuais para cada colaborador, ao invés de rotas por veículo, como é comum noutros contextos logísticos. Ainda na ótica das competências de cada colaborador, existem serviços que podem ser realizados apenas por determinados colaboradores e outros que, por serem mais simples e comuns, podem ser atribuídos a qualquer um. Nestes casos, os trabalhadores apenas são associados a clientes específicos quando a natureza do serviço o exige.

Um dos desafios relevantes na construção de rotas diárias está relacionado com a necessidade de respeitar as janelas de tempo definidas pelos clientes. Muitos serviços, como intervenções no interior dos apartamentos, exigem a presença do cliente, o que implica que a visita só possa ocorrer dentro do período de disponibilidade do mesmo. Ignorar este aspeto poderia resultar em visitas falhadas, causando insatisfação dos clientes e comprometendo a qualidade do serviço prestado. De facto, a possibilidade dos clientes poderem definir janelas de tempo permite-lhes organizar melhor a sua vida pessoal; mas limita bastante o agendamento de visitas por parte da empresa na construção de rotas para os seus colaboradores.

Além disso, é comum existirem diferentes tipos de contratos de trabalho dentro da empresa, como colaboradores a tempo integral, a tempo parcial ou até prestadores de serviços externos. Por esse motivo, os colaboradores poderão ter jornadas de laboração distintas, devendo este aspeto ser considerado no planeamento das rotas. Todos estes colaboradores têm preferência por rotas que se inscrevam integralmente no período da manhã ou integralmente no período da tarde, permitindo que realizem outras atividades na outra metade do dia. Em especial, os trabalhadores em regime de prestação de serviços, que colaboram também com outras empresas, são particularmente sensíveis a este aspeto, preferindo que o agendamento das suas rotas seja o mais concentrado possível. Para este tipo de trabalhadores, é fortemente penalizador cumprir uma rota que se inicie a meio da manhã e/ou que termine a meio da tarde, impedindo-os de prestar serviços em outras empresas. Procurar construir rotas que respeitem estas preferências, não só contribui para

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

a satisfação dos colaboradores, mas também ajuda a manter uma boa relação com os mesmos, incentivando a continuidade de colaboração com a empresa.

A empresa também possui um horário de funcionamento que deve ser respeitado, devendo limitar o tempo total de cada rota. Adicionalmente, é importante considerar a pausa para o almoço, que também deve estar integrada na gestão do tempo total.

O tempo de execução do serviço em cada cliente é igualmente crucial, pois impacta diretamente na duração total da rota e no cumprimento dos limites de tempo estabelecidos.

Atendendo a todas estas características, pretendem-se construir rotas que correspondam a sequências lógicas na visita aos clientes, procurando simultaneamente concentrar essas rotas apenas na parte da manhã ou apenas na parte da tarde, desde que possível. Para garantir a sequência lógica das visitas, considera-se na função objetivo a minimização da distância total percorrida pelas rotas. Para favorecer as rotas de meio-dia, inclui-se na função objetivo uma penalização de rotas que tenham necessidade de incluir a pausa de almoço (rotas que se estendam da manhã para a tarde). Essa penalização irá privilegiar a construção de rotas integralmente de manhã ou integralmente de tarde.

Como referido anteriormente, este tipo de problema pode ser adaptado a diferentes contextos empresariais que envolvam a construção e planeamento de rotas, especialmente na prestação de serviços domiciliários, como apoio doméstico, manutenção de equipamentos, serviços de limpeza, cuidados de saúde, entre outros. Exemplos práticos incluem empresas de instalação e manutenção de sistemas de ar condicionado, assistência técnica a elevadores, jardinagem, bem como centros de dia que prestam apoio domiciliário a idosos, empresas que realizam a entrega e montagem de equipamentos médicos, serviços especializados na entrega, montagem ou reparação de eletrodomésticos, e outras organizações que realizam visitas técnicas programadas. Também nestes casos, o planeamento eficiente das rotas é essencial para otimizar os recursos, reduzir custos operacionais e melhorar a qualidade e a pontualidade dos serviços prestados.

## **2.1 Especificidades da Empresa em Análise**

A empresa em análise apresenta uma estrutura operacional que, em termos gerais, reflete as características descritas previamente. Nesta fase, serão detalhadas informações concretas da empresa, como número de colaboradores, horário de funcionamento, entre outros aspetos relevantes.

Atualmente, os trabalhos na empresa são realizados conforme a capacidade disponível, sem qualquer tipo de planeamento prévio. Como resultado, muitas vezes as atividades planeadas para o dia não são executadas, e as visitas aos clientes com pré-agendamento acabam por ser impossíveis de realizar devido à falta de organização e planeamento.

De forma similar ao que foi apresentado anteriormente, é possível organizar as características da empresa por colaboradores, rotas e clientes. Essas características são de seguida analisadas de forma detalhada, permitindo uma compreensão mais clara da empresa.

Relativamente aos colaboradores, a empresa apresenta:

- Um total de dois colaboradores, um com contrato a tempo integral e outro com contrato a tempo parcial. Além disso, a empresa recorre a prestadores de serviços externos, que são recrutados de acordo com eventuais serviços especializados requeridos pelos clientes.
- Um dos colaboradores possui maior especialização na área da eletricidade (colaborador a tempo parcial), enquanto o outro se dedica às restantes áreas de serviço. Isto condiciona a alocação dos clientes, uma vez que alguns precisam de ser atendidos obrigatoriamente pelo colaborador especializado em eletricidade, por exemplo. O mesmo se aplica a eventuais colaboradores adicionais que sejam subcontratados para serviços especializados.
- Os horários de trabalho variam consoante o tipo de contrato celebrado. O colaborador a tempo integral cumpre 8 horas diárias, enquanto o colaborador a tempo parcial trabalha o número de horas necessárias, de acordo com as necessidades da empresa, sem ultrapassar as 8 horas diárias e totalizando, normalmente, 20 horas semanais.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

- No caso do colaborador a tempo integral, a empresa prefere que as rotas sejam realizadas integralmente durante a manhã ou durante a tarde, permitindo que o serviço externo fique concentrado nessa parte do dia. Assim, o restante período pode ser utilizado para a realização de tarefas administrativas ou para a aquisição de materiais necessários às visitas aos clientes. Relativamente ao colaborador a tempo parcial, se num determinado dia for necessário trabalhar apenas 3 horas, este prefere que essas horas sejam concentradas numa única parte do dia, seja de manhã ou à tarde. Esta preferência prende-se com a necessidade de uma melhor organização pessoal e otimização do tempo, permitindo-lhe dedicar-se exclusivamente ao trabalho durante o período escolhido, evitando a fragmentação do dia. Esta organização também contribui para um maior foco na execução das tarefas e para o aumento da satisfação profissional do colaborador, promovendo, assim, um ambiente de trabalho mais positivo. Desta forma, esta abordagem beneficia tanto o colaborador como a empresa.
- No caso dos prestadores de serviços externos, podem ocorrer duas situações distintas. No primeiro caso, por exemplo nas reparações de elevadores, a avaria é reportada e o prestador de serviço comparece quando possível, ou seja, de forma independente da empresa de condomínios. Neste cenário, os horários de trabalho não são definidos pela empresa e dependem da disponibilidade do prestador. No segundo caso, os prestadores de serviços externos são contratados pela empresa, sendo esta responsável por determinar a que horas devem comparecer no local, como acontece, por exemplo, com os serviços de jardinagem ou limpeza. Neste contexto, os prestadores de serviço preferem que as suas atividades sejam também agendadas de forma concentrada, ou seja, apenas durante a manhã ou apenas à tarde. Esta organização permite-lhes uma melhor gestão do tempo, otimização dos seus recursos e maior satisfação no trabalho, o que contribui para manter boas relações com a empresa.

No que diz respeito aos clientes, a empresa:

- presta serviços a um total de 96 clientes, com necessidades diversas;

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

- alguns clientes exigem visitas dentro de janelas de tempo pré-definidas;
- o tempo de atendimento por cliente varia conforme o tipo de serviço a efetuar.

No contexto das rotas:

- cada colaborador realiza uma única rota por dia;
- são rotas duplamente abertas, ou seja, começam e terminam nos clientes;
- é necessário considerar uma pausa para almoço sempre que a rota transponha o período compreendido entre as 12:30 e as 14:00 horas;
- as rotas e os serviços devem decorrer entre as 9:00 horas e as 18:30 horas, que corresponde ao horário de funcionamento da empresa.

### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Um bom planeamento das rotas dos colaboradores é fundamental na gestão de condomínios para garantir a manutenção dos edifícios e a satisfação dos condóminos. Evitar deslocações desnecessárias e otimizar a distribuição das tarefas ajuda a reduzir custos e melhorar a produtividade.

Neste sentido, diversos autores têm-se debruçado sobre o tema da otimização de rotas, apresentando modelos, técnicas e ferramentas informáticas que visam melhorar o desempenho logístico das organizações. A revisão de literatura a seguir apresentada contempla as várias variantes do Problema de Rotas de Veículos (VRP - *Vehicle Routing Problem*), destacando-se aquelas com maior afinidade com o caso em estudo.

Antes de explorar o VRP propriamente dito, é importante referir o Problema do Caixeiro Viajante (TSP - *Traveling Salesman Problem*), um dos primeiros problemas a ser estudado no âmbito do planeamento de rotas. Este problema consiste em determinar o percurso mais curto que permita a um viajante visitar um conjunto de cidades, passando por cada uma delas apenas uma vez e regressando ao ponto de partida, formando assim um ciclo hamiltoniano. Na década de cinquenta, Dantzig et al. (1954) utilizaram a programação linear inteira para resolver instâncias deste problema. O objetivo era determinar a rota mais curta com início em Washington, D.C., que passava por 48 cidades dos restantes estados e retornava à cidade inicial. Este estudo tornou-se um exemplo emblemático da dificuldade e da relevância prática deste tipo de problemas.

O VRP surge posteriormente como uma extensão do TSP, considerando a possibilidade do conjunto de clientes ser visitado por diversas rotas (veículos), incluindo algumas restrições práticas. Este problema remonta ao final da década de cinquenta do século passado, onde foi proposta uma formulação em programação linear inteira e uma abordagem algorítmica para resolver o problema de entrega de combustível em postos de distribuição de gasolina. Desde então que o interesse por este problema cresceu de forma notável, conduzido por uma ampla comunidade de investigadores e profissionais de diferentes áreas disciplinares (Caric & Gold, 2008).

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Na sua versão base ou clássica, este problema caracteriza-se por determinar um conjunto de rotas com um custo total mínimo, sendo que as rotas começam e terminam no depósito e todos os clientes são atendidos. Cada cliente é visitado apenas uma vez, por apenas uma rota, e cada rota tem capacidade limitada (Zhang et al., 2022). A capacidade da rota pode referir-se a diferentes aspetos, como carga, peso, número de pessoas que o veículo pode transportar, ou mesmo um limite de tempo disponível para completar cada rota, entre outros.

Na prática, a maioria dos problemas são, quase sempre, mais abrangentes do que o VRP clássico, podendo incluir outras características. A literatura do VRP apresenta uma extensa variedade de artigos que procuram responder a casos práticos concretos. Além disso, os problemas de rotas são frequentemente abordados com diferentes objetivos. Na maioria dos casos, os problemas são mono-objetivo, isto é, focam apenas num único objetivo, geralmente relacionado com a minimização de custos, distância total percorrida, tempo total das rotas, número de rotas, número de veículos, entre outros. No entanto, também existem versões multiobjectivo, nomeadamente as discutidas por Molina et al. (2014), que consideram três objetivos: minimizar os custos internos totais, ao mesmo tempo que minimizam as emissões de CO<sub>2</sub> e de poluentes atmosféricos. Outro exemplo é o trabalho de Ghoseiri and Ghannadpour (2010), que considera dois objetivos em simultâneo: a minimização da frota necessária e a distância total de viagem.

Neste trabalho, o problema a ser tratado é mono-objetivo, incidindo na minimização da soma total das distâncias das rotas e na penalização da inclusão de pausas para almoço. Tendo duas componentes distintas, o problema poderia também ser discutido como bi-objetivo. Porém, tendo em conta que se pretendem prioritariamente rotas concentradas de manhã ou de tarde e adicionalmente com sequências coerentes de visitas, optou-se por otimização mono-objetivo de forma a evitar uma potencial diversidade de soluções eficientes e favorecer a complexidade de resolução.

Com a crescente consciencialização global sobre o impacto ambiental causado pelos veículos tradicionais, o Problema de Rotas de Veículos Elétricos (EVRP - *Electric Vehicle Routing Problem*) e o Problema de Rotas de Veículos Verdes (Green-VRP -

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

*Green Vehicle Routing Problem*) são duas variantes amplamente estudadas atualmente. O EVRP é uma abordagem que se concentra exclusivamente nos veículos elétricos, enquanto o Green-VRP é mais abrangente, podendo incluir veículos que utilizem combustíveis alternativos, incluindo veículos convencionais movidos através de combustíveis fósseis (Sabet & Farooq, 2022).

Ambos os problemas garantem a redução dos custos de transporte e dos efeitos da poluição. No caso do EVRP, este trata especificamente de otimizar as rotas para os veículos elétricos, visando reduzir os custos de transporte ao mesmo tempo que satisfaz as restrições de capacidade da bateria, duração do carregamento e a disponibilidade dos postos de carregamento. Considerar que um posto de carregamento estará disponível e operacional a qualquer momento não é realista atualmente, o que torna o carregamento uma questão crítica em comparação com os restantes veículos que têm uma ampla oferta de reabastecimento (Kucukoglu et al., 2021).

Por outro lado, o Green-VRP visa minimizar o consumo de combustível e, consequentemente, as emissões de gases de efeito de estufa, sendo a otimização do tempo de viagem e das rotas um fator crucial para atingir esses objetivos. Este tipo de problema pode envolver a utilização tanto de veículos convencionais movidos a gasolina ou a gasóleo, como de veículos com combustíveis alternativos, tendo também em consideração a sustentabilidade ambiental associada à carga transportada (Asghari et al., 2020; Sabet & Farooq, 2022).

Alguns autores como Asghari et al. (2020) indicam que, em muitos casos, optar por rotas que evitem congestionamentos pode resultar em reduções significativas nas emissões, mesmo que as rotas sejam mais longas. Sendo assim, a adaptação contínua da rota às eventualidades do dia a dia é mais vantajosa do que mantê-la estática e inalterada.

Na prática, o planeamento das rotas é frequentemente afetado por vários fatores dinâmicos, como condições de trânsito, clima, disponibilidade de pessoal e veículos, entre outros, podendo causar atrasos. Neste âmbito surge o Problema Dinâmico de Rotas de Veículos (DVRP - *Dynamic Vehicle Routing Problem*). Este problema, tem-se tornado cada vez mais relevante ao longo dos anos, uma vez que se adapta às circunstâncias do

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

quotidiano e aproveita a crescente disponibilidade de acesso à informação, incluindo a disponibilidade de acesso a dados em tempo real. Assim, o DVRP planeia a rota do veículo, mas à medida que novas informações são recebidas, como condições de trânsito ou a disponibilidade dos clientes, a rota pode ser atualizada. Desta forma, é possível evitar atrasos causados por obras, acidentes ou outras interrupções, tornando o processo mais flexível e eficiente (Braekers et al., 2016; Zhang et al., 2022).

Por outro lado, quando todas as informações relevantes para o planeamento da rota são conhecidas antecipadamente, como os dados do veículo, tempos de viagem e outros parâmetros, a rota é determinada de forma estática e permanece inalterada durante todo o processo. Este cenário corresponde ao Problema de Rotas de Veículos Estático (SVRP - *Static Vehicle Routing Problem*) sendo especialmente importante para efeitos de planeamento (Braekers et al., 2016; Zhang et al., 2022).

No âmbito deste estudo, todos os dados necessários para o planeamento das rotas são conhecidos antecipadamente. Assim, a rota é planeada de forma estática e permanece inalterada durante o processo, tendo, nesse aspeto, características de um SVRP.

Na maioria dos casos, é fundamental considerar as restrições de tempo no VRP, uma vez que estas impactam diretamente o planeamento das rotas. Nesse sentido, é comum que tais restrições estejam associadas às jornadas de trabalho dos motoristas, frequentemente motivadas por limitações legais. Essas limitações são cruciais para garantir a segurança e a conformidade com as normas laborais, como o tempo máximo de condução diária e semanal, assim como os períodos de descanso obrigatórios. Tais aspetos surgem em variantes do VRP, como o Problema de Rotas de Veículos com Horas de Trabalho dos Motoristas (VRPDWH - *Vehicle Routing Problem with Drivers' Working Hours*), que estende o VRP ao incluir essas limitações. Nesse caso, cada veículo, além de atender às restrições de capacidade, deve também respeitar os limites de tempo de condução e as pausas necessárias durante o percurso (Goel & Gruhn, 2006). Estas restrições, muitas vezes associadas a questões de segurança e regulamentações, não afetam apenas a eficiência do sistema de transporte, mas também impõem desafios significativos ao planeamento e à otimização das rotas, uma vez que as pausas e períodos de descanso não

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

podem comprometer o atendimento ao cliente. Para além destes casos, existem ainda outras restrições temporais, como garantir que o tempo total de viagem, incluindo tanto o tempo de deslocamento como o tempo de serviço não ultrapasse o tempo predefinido (Cokyasar et al., 2023).

Neste sentido, surge ainda outra variante do VRP, o Problema de Rotas de Veículos com Janelas Temporais (VRPTW - *Vehicle Routing Problem with Time Windows*). Neste caso, cada cliente deve ser atendido dentro de um intervalo de tempo específico, previamente definido e não são admitidas exceções. No entanto, existem outras variantes como o Problema de Rotas de Veículos com Janelas de Tempo Flexíveis (VRPSTW - *Vehicle Routing Problem with Soft Time Windows*) e o Problema de Rotas de Veículos com Janelas de Tempo Difíceis (VRPHTW - *Vehicle Routing Problem with Hard Time Windows*), que permitem flexibilidade nas janelas de tempo, admitindo exceções.

No caso do VRPSTW, é permitido que o veículo atenda o cliente fora do intervalo estipulado, no entanto nesse caso existe um custo associado ao incumprimento da janela de tempo. Por outro lado, no VRPHTW, o veículo deve chegar dentro do intervalo de tempo agendado e caso não o faça, se chegar antes, terá de aguardar e se chegar após o tempo limite o cliente rejeitará o serviço (Elshaer & Awad, 2020; Zhang et al., 2022).

Por outras palavras, no caso do VRPTW as janelas de tempo são rígidas, ou seja, o veículo deve cumprir exatamente o intervalo de tempo definido, e o não cumprimento dessa janela torna a solução não admissível. Por outro lado, no VRPHTW, o serviço deve ser obrigatoriamente realizado dentro do intervalo estabelecido, mas é permitido que o veículo chegue antes da janela de tempo, desde que o serviço seja realizado dentro do limite. Já no VRPSTW, embora também haja flexibilidade, o não cumprimento das janelas tem implicações financeiras.

Estas variantes do VRP com janelas de tempo são amplamente aplicadas em empresas de prestação de serviços que necessitam de interagir diretamente com os clientes, onde o cumprimento dos horários é essencial, tanto para a satisfação dos mesmos como para a eficiência das operações. A utilização de janelas de tempo permite oferecer um serviço mais personalizado, ajustando as entregas ou serviços a horários específicos. Todavia,

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

este tipo de restrições pode limitar significativamente o espaço de soluções disponíveis para a empresa planear as rotas, podendo pôr em causa a admissibilidade do problema.

No presente trabalho será adotado o VRPTW, que, conforme referido anteriormente, se caracteriza pela existência de janelas de tempo rígidas. Isto significa que apenas serão consideradas admissíveis as soluções que respeitem integralmente os intervalos de tempo estipulados, não sendo permitido efetuar o serviço fora das janelas definidas. Assim, o cumprimento rigoroso das janelas de tempo é um critério fundamental para a validação das soluções do problema. No caso do presente trabalho, a janela de tempo incide apenas no instante de início do serviço.

A variante do Problema de Rotas de Veículos com Janelas de Tempo e Pausas para Almoço (VRPTW-LB - *Vehicle Routing Problem with Time Windows and Lunch Breaks*) tem sido menos abordada na literatura em comparação com o VRPTW e outras variantes, embora se trate de um problema realista. A maioria dos artigos que abordam pausas para almoço focam na questão das paragens obrigatórias para descanso dos motoristas, que, após um determinado período de tempo, são obrigados pela legislação a fazer uma pausa e descansar para evitar turnos de trabalho excessivamente longos ou para realizar refeições, como foi anteriormente mencionado (Bazirha, 2023; Coelho et al., 2016; Khanna et al., 2025) .

Apesar de ser uma questão relevante na prática, a complexidade adicional que as pausas para almoço introduzem ao VRPTW faz com que apenas alguns artigos se dediquem a modelar esta variante. De facto, na maioria dos casos, as rotas são inicialmente planeadas sem considerar a pausa, sendo esta adicionada posteriormente à solução. Contudo, Coelho et al. (2016) destaca que essa abordagem pode comprometer a qualidade da solução final. Além disso, o estudo de Karademir et al. (2020) revela que criar as rotas sem considerar as pausas diretamente na formulação e inseri-las depois pode resultar em soluções de baixa qualidade, como entregas atrasadas, rotas inviáveis ou clientes não atendidos a tempo. Segundo esses autores, é essencial considerar as pausas logo na fase de otimização para evitar esse tipo de problemas.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Na literatura, as pausas para almoço são frequentemente modeladas através da duplicação das variáveis de decisão, utilizando variáveis binárias adicionais para definir se a pausa ocorre entre os clientes ou não, para além das habituais variáveis topológicas. Em alguns casos, é permitido que a pausa inicie dentro da janela de tempo definida para o almoço e termine fora dela, o que pode levantar a questão sobre o realismo da solução. Isto acontece porque, nesses casos, os estudos frequentemente recorrem a janelas de tempo muito alargadas, o que faz com que a pausa para o almoço termine muito depois da hora suposta (Bazirha, 2023; Buhrkal et al., 2012). Outros modelos, no entanto, restringem a pausa a momentos específicos, como no início da rota ou antes de visitar o cliente, sem permitir que a solução do modelo escolha livremente onde alocar a pausa. Essa abordagem pode ser irrealista, pois depende da posição dos clientes e não do horário específico, como, por exemplo, alocar a pausa para almoço às nove da manhã (Bazirha, 2023; Liu et al., 2017).

Por outro lado, estudos como os de Coelho et al. (2016) e Sahoo et al. (2005) modelam a pausa de forma indireta, utilizando nós fictícios para transformar o VRPTW-LB num problema do tipo VRPTW, mas com uma matriz maior. No entanto, nesses modelos, sempre que um veículo for utilizado, um nó de pausa será obrigatoriamente incluído, assumindo-se também que a pausa ocorra no local do cliente. Esta abordagem obriga à afetação obrigatória de uma pausa a cada rota.

Formulações que permitem que a pausa seja realizada entre clientes tendem a resultar em soluções mais eficientes e realistas do que aquelas que não o permitem (Bazirha, 2023).

Com base no exposto, neste trabalho optou-se por utilizar nós fictícios, tal como nos artigos mencionados, dado que são utilizados métodos exatos. No entanto, diferentemente da generalidade dos artigos sobre o VRPTW-LB consultados, foi adotada uma abordagem diferente das utilizadas até então. Especificamente, a pausa, quando necessária, será realizada entre clientes e onde o colaborador entender (o local exato das pausas para almoço é desconhecido), não sendo obrigatória em todas as rotas. Se a rota for realizada integralmente de manhã ou à tarde, a pausa não será considerada. A pausa será incluída apenas quando a rota se estenda da manhã para a tarde. Além disso, o almoço deverá iniciar dentro de uma janela de tempo reduzida e terminar fora dela. Este modelo não é

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

irrealista, pois a janela de tempo é pequena e a pausa terminará sempre dentro dos horários aceitáveis pela empresa. Adicionalmente, será considerado um tempo de duração total para a realização da pausa de almoço. Fazendo a analogia do nó fictício (pausa de almoço) com os nós clientes, a duração da pausa de almoço corresponde ao tempo de serviço nos clientes; e a janela de tempo para início da pausa de almoço corresponde à janela de tempo para início do serviço nos clientes.

Uma outra variante dos problemas de rotas de veículos integra o Problema de Rotas de Veículos Generalizado (GVRP - *Generalized Vehicle Routing Problem*), que envolve o agrupamento de clientes. Neste caso, é necessário que os veículos visitem pelo menos um cliente em cada *cluster* durante a rota, constituindo uma perspectiva diferente comparativamente com outras variantes do VRP (Freitas et al., 2023).

A maioria das variantes mencionadas anteriormente considera o custo como o principal objetivo, porém, essa abordagem nem sempre engloba todas as situações que surgem na prática. Muitas vezes, estratégias que priorizam apenas a minimização dos custos revelam-se desadequadas (Vidal et al., 2019). Nesse sentido, existem problemas que focam na minimização do tempo total das rotas, como é o caso do Problema de Rotas de Veículos Dependentes do Tempo (TDVRP - *Time Dependent Vehicle Routing Problem*). Neste tipo de problema, não se considera apenas o tempo de viagem, mas também o tempo de serviço e o tempo de espera, se tal se verificar.

O TDVRP é um problema assimétrico, ou seja, o tempo de viagem entre os nós  $i$  e  $j$  não é necessariamente o mesmo em ambas as direções. Além disso, o tempo de viagem entre os pontos não é fixo, uma vez que varia de acordo com o horário em que a rota é efetuada. Este tipo de problema reflete de forma mais fiel a realidade das áreas urbanas congestionadas, mas, devido à sua complexidade, é um problema difícil de resolver (Malandraki & Daskin, 1992). Existem também outros estudos que abordam problemas mais específicos, como a minimização do consumo de combustível dos veículos (Gaur et al., 2013), a minimização dos custos ambientais (Kramer et al., 2015), entre outros.

É igualmente relevante considerar que rotas mais rápidas, ou seja, com menor tempo de viagem, nem sempre coincidem com rotas mais curtas em termos de distância. Na

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

verdade, as rotas mais curtas, em muitos casos, incluem locais onde a velocidade máxima permitida é mais baixa, resultando, consequentemente, num tempo total mais elevado. Assim, cabe à empresa avaliar que objetivo considera mais relevante no seu contexto, isto é, se é mais pertinente minimizar a distância total percorrida ou minimizar o tempo total da rota.

No contexto do presente estudo, optou-se pela minimização da distância total percorrida nas rotas, e essa escolha está diretamente relacionada com o que a empresa prioriza e com uma série de restrições práticas e operacionais. A principal razão para não se priorizar a minimização do tempo total das rotas reside no facto de que, neste cenário específico, o tempo de viagem e outros fatores temporais já estão integrados nas restrições do problema, para além de que os tempos de viagem são mais suscetíveis a variações (trânsito ao longo do dia) quando comparados com as distâncias entre locais. Adicionalmente, ao definir a função objetivo como a minimização da distância, garante-se a coerência lógica na sequência das visitas aos clientes, o que juntamente com as restrições temporais, corresponde ao que a empresa valoriza.

Todas as variantes podem englobar rotas abertas ou rotas fechadas. As rotas fechadas implicam que um veículo inicie e termine a sua viagem no depósito. Por outro lado, nas rotas abertas, o veículo pode iniciar a sua rota no primeiro cliente e terminá-la no depósito ou, iniciar a rota no depósito e após atender o último cliente, terminar a rota sem necessidade de retornar ao depósito (Braekers et al., 2016). Esta abordagem, em comparação com as rotas fechadas, permite uma maior flexibilidade no planeamento das rotas e permite a redução dos custos totais, sendo conhecida como o Problema de Rotas de Veículos Aberto (OVRP - *Open Vehicle Routing Problem*). O objetivo consiste em estabelecer um conjunto de rotas abertas com origem ou término no depósito, satisfazendo as restrições de capacidade e distância, minimizando o custo total (Ruiz et al., 2019). As versões de rotas abertas correspondem a situações com grande adesão à realidade, quando o colaborador usa veículo próprio ou quando usa um veículo da empresa do qual também usufrui para a sua vida pessoal.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

No presente estudo, o colaborador inicia e termina a rota nos clientes, sem necessitar de passar pelo depósito, sendo que o tempo e a distância são contabilizados apenas a partir do momento em que chega ao primeiro cliente e até atender o último. Assim, o tempo e a distância anterior ao primeiro cliente e posterior ao último não são considerados no cálculo da rota, focando-se apenas no intervalo efetivo de serviço entre clientes. Desta forma, cada rota representará um caminho hamiltoniano e a solução envolve uma partição do conjunto de clientes em caminhos hamiltonianos.

Nas diversas variantes do VRP, tanto podem ser consideradas frotas homogéneas como frotas heterogéneas. As frotas homogéneas, consideradas no problema clássico do VRP, consistem na utilização exclusiva de veículos idênticos para as rotas, enquanto as frotas heterogéneas envolvem diferentes tipos de veículos. Nos diversos problemas existentes, e, em geral, as versões com frotas heterogéneas aumentam a complexidade do problema, tanto para abordagens exatas quanto heurísticas. Todavia, frotas heterogéneas têm o potencial de reduzir o custo total de transporte ou o consumo de energia, ao selecionar os veículos mais adequados para cada rota (Kucukoglu et al., 2021).

Existem problemas de rotas de veículos em que é necessário discriminar as rotas, dado que estas apresentam características distintas, seja devido à variedade de veículos, seja por causa das diferentes competências dos colaboradores, ou então devido a outros fatores. Neste contexto, considera-se o Problema de Rotas de Veículos com Múltiplas Viagens (MTVRP - *Multiple Trip Vehicle Routing Problem*). Neste caso, o veículo pode regressar ao depósito sempre que necessário, por exemplo, para reabastecimento, manutenção ou outras necessidades. Deste modo, o mesmo veículo pode realizar várias rotas consecutivas ao longo do dia, permitindo atender a um maior número de clientes com um conjunto reduzido de veículos (Zhang et al., 2022).

Para além dos aspetos anteriormente referidos, pode-se considerar que o presente trabalho usa uma frota heterogénea, não em termos do tipo de veículo utilizado, mas sim do perfil dos colaboradores que vão executar as rotas. Esta heterogeneidade resulta das diferentes jornadas de trabalho associadas a cada colaborador, ou seja, cada um dispõe de um tempo máximo distinto para a execução da rota, em função do respetivo contrato de trabalho.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Assim, é como se os colaboradores correspondessem a veículos com capacidades distintas, sendo essas capacidades, neste caso, representadas pelo tempo máximo disponível para a execução da rota. Adicionalmente, considera-se que cada colaborador realiza apenas uma rota por dia, não se tratando, portanto, do MTVRP.

Em geral, à medida que o número de restrições e a complexidade do problema aumentam, mais tempo é necessário para encontrar uma solução ótima. Portanto, para resolver este tipo de problemas, é necessário escolher o melhor equilíbrio entre tempo de computação e a adequabilidade prática da melhor solução a alcançar (Kucukoglu et al., 2021). Nesta perspetiva, coloca-se uma decisão importante, envolvendo a opção por métodos exatos ou métodos aproximativos.

Métodos exatos comuns incluem técnicas de decomposição, técnicas de programação dinâmica, técnicas baseadas em programação linear inteira, entre outras (Sabet & Farooq, 2022). As técnicas de resolução exatas mais comuns recorrem a programação linear inteira ou inteira mista, cuja resolução é, quase sempre, baseada em algoritmos de Branch-and-Bound. Estas técnicas, que utilizam a programação matemática, encontram forte limitação na escalabilidade do problema (Corona-Gutiérrez et al., 2022).

Em geral, quanto maior o número de restrições e variáveis, mais difícil se torna a sua resolução exata. Como tal, surgem as técnicas aproximativas baseadas em métodos heurísticos e meta-heurísticos. Os primeiros são usados para resolver o problema com o conhecimento específico do mesmo, o que na maioria dos casos leva a uma solução distante da ótima ou próxima o suficiente de uma solução de boa qualidade. Por outro lado, as meta-heurísticas apresentam um perfil mais global, podendo em alguns casos ser definidas, de uma forma muito genérica, como heurísticas que orientam outras heurísticas. Os algoritmos mais populares na literatura são os algoritmos genéticos, os algoritmos baseados em pesquisa Tabu, o Iterated Local Search, o Variable Neighbourhood Search, os algoritmos com inspiração em fenómenos e comportamentos da natureza (nomeadamente, os algoritmos de colónias de formigas), entre outros (Sabet & Farooq, 2022).

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Por outras palavras, inicialmente, eram utilizados algoritmos exatos devido à alta qualidade das soluções que produziam. No entanto, quando a dimensão do problema aumenta, em geral, o esforço computacional de resolução do VRP cresce de forma muito significativa. Efetivamente, atendendo ao facto do VRP pertencer à classe de problemas classificados como NP-difíceis, assim como grande parte das suas variantes, então, em regra, o tempo computacional necessário para encontrar a solução ótima pode aumentar exponencialmente com a dimensão do problema, tornando-se impraticável, em problemas reais, alcançar a solução ótima para problemas com dimensão relativamente reduzida. Como resultado, foram desenvolvidos algoritmos heurísticos e meta-heurísticos que oferecem um equilíbrio entre a qualidade da solução e o tempo computacional. Estas abordagens aproximativas são amplamente utilizadas na literatura, sendo particularmente eficazes para problemas de grande dimensão. Contudo, é importante notar que, embora heurísticas possam fornecer soluções de alta qualidade, nenhuma, em relação à solução ótima, será melhor do que a solução de um método exato (Konstantakopoulos et al., 2022; Ruiz et al., 2019).

Neste estudo em particular e para o problema que foi anteriormente descrito, serão utilizados métodos exatos, com formulações em programação linear inteira mista, que serão resolvidos utilizando *solvers* disponíveis.

Os problemas mencionados fazem parte do dia a dia de muitas empresas e têm impacto direto no trabalho de diversas pessoas. Estão presentes em áreas como a assistência social e de saúde domiciliária, logística, prestação de serviços, entre outras. Alguns artigos destacam casos específicos que exemplificam a aplicação prática destes problemas de otimização.

Por exemplo, Liu et al. (2013) abordam o planeamento de rotas no contexto da logística de assistência médica domiciliária, focando especificamente na otimização do escalonamento de veículos para realizar entregas e recolhas em simultâneo, respeitando, ainda, restrições de janelas de tempo. Este problema logístico engloba diferentes etapas, como a entrega de medicamentos e dispositivos médicos de uma farmácia (depósito) para os pacientes, a entrega de medicamentos de um hospital para os pacientes, a recolha de

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

amostras biológicas e dispositivos médicos dos pacientes para um laboratório e a recolha de materiais não utilizados das casas dos pacientes para o depósito. O estudo propõe dois modelos de programação linear inteira mista, além de dois algoritmos heurísticos: um algoritmo genético e um método de pesquisa tabu, ambos com o objetivo de reduzir os custos operacionais e, ao mesmo tempo, melhorar a qualidade do serviço aos pacientes. Outro exemplo é o trabalho de Farzadnia and Lysgaard (2021), que explora a otimização das rotas de autocarros escolares com o objetivo de minimizar a distância total percorrida pelos alunos, desde as suas casas até às respetivas escolas, garantindo que os alunos são recolhidos o mais eficientemente possível. Neste estudo, são propostos dois métodos para resolver o problema, um exato e um heurístico. Os autores concluíram que o algoritmo exato nem sempre fornecia soluções num tempo razoável, enquanto o algoritmo heurístico era capaz de resolver instâncias com até 200 alunos.

Ainda noutra aplicação prática, Prins (2002) analisa um caso de um fabricante de móveis com 775 clientes, focando-se no MTVRP. Por fim, Rizzoli et al. (2007) aplicam algoritmos de otimização baseados em colónias de formigas para resolver (de forma aproximada) problemas reais, como a gestão de uma rede de supermercados na Suíça considerando o VRPTW. O mesmo artigo discute também um problema de rotas de veículos de recolha e entrega numa empresa de distribuição italiana.

No âmbito deste trabalho, não foi possível encontrar, na literatura, qualquer referência específica relacionada com condomínios, nomeadamente em situações em que o tempo de permanência nos clientes é significativamente superior ao tempo de deslocação entre eles. Este cenário contrasta com os casos mais comum abordados na literatura sobre o VRP, em que o tempo total em trânsito tende a ser superior ao tempo despendido em cada cliente.

Contudo, é possível encontrar situações semelhantes utilizando o termo “serviço de campo” (reconhecido na literatura como “*field service*”), que engloba todos os locais específicos que os colaboradores precisam de se deslocar para prestar um serviço. Nestes casos, cada tarefa deve ser atribuída a um grupo específico de trabalhadores, de acordo com as necessidades do serviço. Normalmente, no contexto de serviço de campo, as

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

tarefas a realizar superam o número de colaboradores disponíveis para as executar. Além disso, o tempo de deslocação entre os clientes é frequentemente considerado tempo de trabalho remunerado, o que torna a redução desse tempo uma estratégia valiosa para a empresa (Frits & Bertok, 2021).

Quando o problema se concentra na otimização da rota do veículo, as distâncias e os tempos de deslocação entre os pontos de visita são frequentemente os fatores mais relevantes. Nestas situações, o objetivo principal, é, geralmente, minimizar o custo total da operação, tendo em consideração as distâncias e/ou os tempos de deslocação. Como resultado, dá-se maior ênfase às distâncias do que ao tempo de serviço prestado.

Por outro lado, quando o foco do problema é a prestação de serviços aos clientes, o tempo dedicado a cada visita torna-se muito mais relevante do que as distâncias entre os pontos de visita. Neste caso, o objetivo não é tanto minimizar a distância percorrida, mas garantir que os serviços prestados sejam realizados de forma eficiente e dentro do tempo necessário.

Em suma, quando o problema está centrado na rota do veículo, as distâncias percorridas são geralmente mais relevantes do que o tempo dedicado às visitas. No entanto, quando o objetivo principal é a prestação de serviços, o tempo dedicado ao atendimento torna-se significativamente mais importante do que a distância percorrida. Ainda assim, conforme referido anteriormente, neste caso optou-se por priorizar a minimização das distâncias, uma vez que os tempos são devidamente contemplados nas restrições do problema, garantindo que sejam respeitados.

## 4 METODOLOGIA

O presente trabalho foi estruturado de acordo com a metodologia Processo Padrão Intersectorial para Mineração de Dados (CRISP-DM - *Cross-Industry Standard Process for Data Mining*). A metodologia CRISP-DM foi desenvolvida no final de 1996, numa altura em que o mercado de mineração de dados estava em plena ascensão. O crescimento deste mercado suscitava tanto entusiasmo quanto apreensão, uma vez que, apesar do grande interesse na área, persistia a dúvida sobre se a mineração de dados estava suficientemente desenvolvida para ser integrada nos processos empresariais. Para dissipar essa dúvida, surgiu a ideia de desenvolver uma abordagem padrão, flexível e aplicável a diferentes setores e tipos de dados, com o objetivo de demonstrar que a mineração de dados podia ser uma prática sólida e eficaz. Assim, foi formado um consórcio de empresas que colaboraram na criação da metodologia CRISP-DM, que se viria a tornar uma das mais adotadas na ciência de dados. A CRISP-DM continua a ser amplamente utilizada devido à sua base sólida, construída a partir da experiência prática e real de como os projetos de mineração de dados realmente acontecem (Chapman et al., 1999; Schröer et al., 2021).

Esta metodologia será adaptada para o desenvolvimento de uma aplicação baseada num modelo de otimização, seguindo uma sequência de etapas semelhantes às previstas no CRISP-DM. Tendo em conta que o trabalho se baseia num problema real, que poderá eventualmente ser implementado numa organização, considera-se que a estrutura do CRISP-DM se adequa ao enquadramento pretendido, proporcionando uma abordagem flexível e eficaz para a análise e resolução do problema, alinhando-se com as necessidades específicas do contexto organizacional.

A metodologia CRISP-DM funciona como um processo hierárquico, estruturado em quatro níveis, que incluem diversas tarefas, desde as mais gerais até as mais específicas. O processo inclui fases, tarefas genéricas, tarefas especializadas e, por fim, a instância do projeto, representando uma abordagem clara e pormenorizada (Chapman et al., 1999; Wirth & Hipp, 2000). Estes quatro níveis da metodologia CRISP-DM são apresentados de seguida na Figura 4.1.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*



Figura 4.1 - Quatro níveis da metodologia CRISP-DM

Fonte: Adaptado de Chapman et al. (1999)

O modelo de processo atual de mineração de dados, aqui adaptado ao desenvolvimento e aplicação de um modelo de otimização, oferece uma visão geral do ciclo de vida de um projeto dessa natureza. No entanto, a sequência dessas fases não é rígida e muitas vezes é aconselhável e necessário voltar a etapas anteriores. A ordem das fases vai depender dos resultados obtidos em cada uma delas e das especificidades de cada projeto. A seguir, está apresentado o ciclo geral composto por seis fases, com as setas a indicar as dependências mais relevantes e frequentes, uma vez que seria impraticável identificar todos os possíveis relacionamentos entre as fases. É também importante salientar que cada uma das fases é adaptada às especificidades do problema em estudo, garantindo uma abordagem sistemática e coerente.

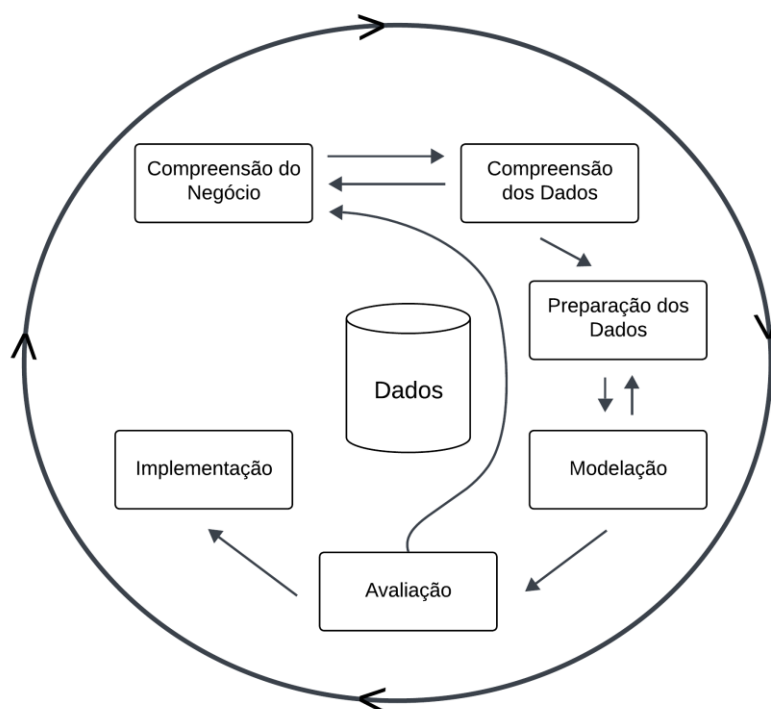


Figura 4.2 - Fases do Modelo de Referência CRISP-DM

Fonte: Adaptado de Chapman et al. (1999)

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

As seis fases do processo que serão utilizadas como orientação para estruturar o desenvolvimento do projeto são as seguintes:

- **Compreensão do Negócio:** Esta fase inicial foca na compreensão dos objetivos e requisitos do projeto. Aqui, o problema é definido e descrito, sendo feita também uma breve revisão de literatura, que explora as abordagens existentes para o problema em questão, com o objetivo de entender as metodologias atuais.
- **Compreensão dos Dados:** Nesta fase do presente projeto, serão recolhidos dados e características organizacionais concretas da empresa em análise, bem como dados gerais relacionados com o problema em estudo. Pretende-se, assim, caracterizar toda a dinâmica organizacional que envolve o problema em estudo, assim como os dados que a caracterizam.
- **Preparação dos Dados:** Aqui, são realizadas todas as transformações necessárias para preparar o conjunto de dados que será utilizado nas etapas seguintes. As atividades de preparação de dados são frequentemente realizadas de forma iterativa.
- **Modelação:** Nesta fase, será desenvolvida uma formulação matemática com o objetivo de resolver o problema proposto. Para a resolução do modelo matemático apresentado, recorrer-se-á a um *solver* específico, que será aplicado a várias instâncias do problema.
- **Avaliação:** Após a construção do modelo, é necessário avaliá-lo de forma mais profunda e testar cenários alternativos no âmbito do problema em análise. A validação da adequabilidade do modelo para o problema em estudo é uma etapa importante no processo de validação. Essa validação deverá incluir também a análise das soluções produzidas em diversos contextos, isto é, para diferentes instâncias dos respetivos parâmetros, correspondendo a cenários operacionais alternativos.
- **Implementação:** A fase final do ciclo consiste na aplicação do modelo na organização e a comunicação do conhecimento adquirido, para que a empresa

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado  
a empresa de condomínios*

---

possa utilizá-lo efetivamente. Além disso, inclui uma avaliação constante para garantir que os resultados atendem às expectativas estabelecidas.

O ciclo externo simboliza a natureza cíclica do projeto, mas, embora o projeto geralmente seja considerado concluído após a implementação de uma solução, novas questões de negócio podem surgir ao longo do tempo, muitas vezes mais focadas. Dessa forma, projetos futuros poderão vir a beneficiar da experiência do anterior, criando assim uma evolução contínua dos processos que utilizam esta metodologia.

No âmbito do presente trabalho, as cinco fases iniciais foram integralmente concluídas. Contudo, a fase de implementação, correspondente à etapa final do ciclo, não foi totalmente finalizada. Foram, no entanto, realizados testes preliminares que permitiram uma primeira validação das funcionalidades desenvolvidas, bem como uma análise inicial do que poderá ser a implementação completa e a aplicação no contexto real da empresa.

## 5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

No âmbito do problema descrito anteriormente, o presente capítulo apresenta uma formulação matemática para o problema em questão. A formulação proposta utiliza programação linear inteira mista, incorporando um conjunto de variáveis adicionais de fluxo, com o objetivo de construir restrições de conservação e limites de fluxo. Estas restrições permitem prevenir a existência de sub-circuitos nas soluções. A utilização de condições de eliminação de sub-circuitos por meio de variáveis de fluxo permite a construção de uma formulação com um número polinomial de variáveis e restrições para o problema de rotas de veículos abordado no presente trabalho (Gavish & Graves, 1978). Além disso, serão consideradas restrições adicionais que visam fortalecer a respetiva relaxação linear, podendo isso refletir-se nos resultados computacionais, facto que será objeto de análise no Capítulo 6.

Assim, o parâmetro  $n$  representa o número de clientes a visitar num determinado dia. Por sua vez, o parâmetro  $m$  representa o número de colaboradores disponíveis, sendo  $M$  o conjunto de todos os colaboradores e  $|M| = m$  e  $k$  o índice que será utilizado para representar os colaboradores, nomeadamente  $k \in M$ .

A base de dados inicialmente constituída para as instâncias de índole real considera a totalidade dos clientes. No entanto, cada instância do problema utiliza apenas um subconjunto desses clientes, podendo variar consoante a instância em análise.

O problema de rotas de veículos em análise será definido no grafo  $G_0 = (V_0, A_0)$ , em que os conjuntos de nós e arcos são definidos especificamente para cada instância considerada. Posto isto, os conjuntos necessários para a construção da formulação são apresentados de seguida:

- $V1 = \{1, \dots, n\}$ , conjunto de clientes a visitar<sup>1</sup>;

---

<sup>1</sup> Os clientes a visitar correspondem aos que constam na base de dados da empresa, excluindo quaisquer clientes fictícios (almoço).

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

- $V2 = \{n + 1, \dots, n + m\}$ , conjunto de clientes fictícios que representam a pausa para almoço, sendo que o cliente fictício  $n + k$  representa o cliente pausa de almoço associado ao colaborador  $k$ , para todo  $k \in M$ ;
- $V = V1 \cup V2$ , conjunto de todos os clientes, excluindo o depósito (nodo 0), mas incluindo os clientes fictícios;
- $V_0 = \{0\} \cup V$ , representa o conjunto de todos os clientes, incluindo o depósito (nodo 0), os clientes a visitar ( $V1$ ) e os clientes fictícios ( $V2$ ) que representam a pausa de almoço;
- $V1^k \subseteq V1$ , para todo  $k \in M$ , conjunto de clientes a visitar que o colaborador  $k$  pode cobrir, excluindo o depósito e o respetivo cliente fictício;
- $V^k = V1^k \cup \{n + k\}$ , para todo  $k \in M$ , conjunto de clientes que o colaborador  $k$  pode visitar, excluindo o depósito, mas incluindo o respetivo cliente fictício;
- $V_0^k = V^k \cup \{0\}$ , para todo  $k \in M$ , conjunto de clientes que o colaborador  $k$  pode cobrir, incluindo o depósito e o respetivo cliente fictício;
- $A1 = \{(i, j) \in V1 \times V1 : i \neq j\}$  representa os arcos entre clientes a visitar, ou seja, considera todos os arcos do grafo exceto os arcos incidentes, quer no depósito, quer nos clientes fictícios;
- $A2 = \{(i, j) \in V2 \times V2 : i \neq j\} \cup \{(0, j) : j \in V2\} \cup \{(i, 0) : i \in V2\}$ , conjunto de arcos apenas entre clientes fictícios e entre o depósito e os clientes fictícios. Estes não são incluídos em  $A_0$ , uma vez que não existem ligações entre os clientes fictícios nem entre o depósito e os clientes fictícios;
- $A_0 = \{(i, j) \in V_0 \times V_0 : i \neq j\} \setminus A2$ , conjunto de arcos, ou seja, as conexões possíveis entre os diversos clientes, exceto os arcos entre o depósito e os clientes fictícios e os arcos entre clientes fictícios ( $A2$ );
- $A = A_0 \setminus (\{(0, j) \in A_0 : j \in V\} \cup \{(i, 0) \in A_0 : i \in V\})$ , considera os arcos do grafo exceto os arcos incidentes no depósito;
- $A1^k = (\{(i, j) \in A1 : i, j \in V1^k \text{ e } i \neq j\})$ , conjunto de arcos que o colaborador  $k$  pode percorrer, envolvendo apenas clientes a visitar, isto é, sem os arcos incidentes no depósito e sem o cliente que representa a pausa para almoço (cliente fictício);

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

- $A^k = \{(i, j) \in A: i, j \in V^k \text{ e } i \neq j\}$ , conjunto de arcos que o colaborador  $k$  pode percorrer, excluindo os arcos incidentes no depósito; e
- $A_0^k = \{(i, j) \in A_0: i, j \in V_0^k \text{ e } i \neq j\}$ , conjunto de arcos que o colaborador  $k$  pode percorrer, incluindo o depósito e o cliente fictício, mas excluindo as ligações entre o depósito e o cliente fictício.

De forma resumida e simplificada, os conjuntos que incluem o zero referem-se, de forma geral, a conjuntos que englobam tanto o depósito como os clientes fictícios. Os conjuntos que são representados apenas por letras (sem incluir qualquer número), como é o caso de  $V$  ou  $A$ , excluem o depósito, mas incluem os clientes fictícios. Por outro lado, os conjuntos que contêm o número um referem-se exclusivamente aos clientes a visitar, ou seja, excluem tanto o depósito como os clientes fictícios. Por fim, os conjuntos que apresentam o número dois dizem respeito apenas aos clientes fictícios, estando excluídos tanto os clientes a visitar como o depósito.

Para além dos conjuntos previamente definidos, consideram-se também os seguintes:

- $M_j$ : conjunto de colaboradores que podem servir o cliente  $j$ , para todo  $j \in V_1$ ; e
- $M_{ij}$ : conjunto de colaboradores  $k$  que podem fazer ambos os clientes  $i$  e  $j$ , tal que  $i, j \in V_0$ .

Considerando todos estes conjuntos, definem-se os seguintes parâmetros e variáveis de decisão que integrarão a formulação de fluxos que modela o problema de rotas de veículos/colaboradores para o problema proposto:

- $d_{ij}$ : distância (por estrada) do nodo  $i$  para o nodo  $j$ , para todo  $(i, j) \in A$ ;
- $s_i$ : tempo de serviço no nodo  $i$ , para todo  $i \in V$ ;
- $t_{ij}$ : tempo de deslocação do nodo  $i$  ao nodo  $j$ , para todo  $(i, j) \in A$ ;
- $T^k$ : tempo máximo diário disponível para o colaborador  $k$ , para todo  $k \in M$ ;
- $n^k$ : número máximo de clientes que o colaborador  $k$  pode visitar, para todo  $k \in M$ , isto é,  $n^k = |V^k|$ ;
- $a'_j$ : início da janela de tempo no nodo  $j$ , para todo  $j \in V$ ;

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

- $a_j''$ : fim da janela de tempo no nodo  $j$ , para todo  $j \in V$ ;
- $H$ : hora de encerramento da empresa;
- $L1$ : início da hora de almoço; e
- $L2$ : fim da hora de almoço.

O tempo de serviço  $s_i$  é para todo  $i \in V$ , ou seja, incluindo os clientes fictícios, neste contexto o tempo de serviço dos clientes fictícios corresponde à pausa para almoço. A hora de encerramento da empresa ( $H$ ) é fornecida pela empresa em horas e, posteriormente, convertida para minutos no Python, tendo em conta que o zero corresponde à hora de início de funcionamento da empresa, também fornecida pela mesma. O mesmo processo é realizado para os horários de início ( $L1$ ) e fim ( $L2$ ) de almoço e para as janelas de tempo ( $a_j'$  e  $a_j''$ ), isto é, a empresa fornece os horários em horas, os quais são transformados para minutos, considerando sempre que o zero corresponde à hora de início de funcionamento da empresa. Além disso, a constante  $H$ , no contexto das restrições (12), funciona como um número grande que permite tornar a restrição redundante quando a ligação entre os nós  $i$  e  $j$  não está ativa, ou seja, quando  $x_{ij}^k = 0$ .

Para simplificar a construção e a indexação da formulação, assume-se que a distância entre o cliente fictício e qualquer outro cliente, em ambos os sentidos, é nula, ou seja,  $d_{i,n+k} = 0$  e  $d_{n+k,j} = 0$ , para todo  $i, j \in V1$  e  $k \in M$ . De forma semelhante, o tempo de deslocação entre qualquer cliente e o cliente fictício, também em ambos os sentidos, é nulo, isto é,  $t_{i,n+k} = 0$  e  $t_{n+k,j} = 0$ , para todo  $i, j \in V1$  e  $k \in M$ . Além disso, considera-se que o tempo de serviço no depósito é igualmente nulo ( $s_0 = 0$ ).

As variáveis de decisão são as seguintes:

- $x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se a rota do colaborador } k \text{ percorre o arco } (i,j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (i,j) \in A_0^k, k \in M$
- $y_{ij}^k \equiv$  número de clientes já visitados quando o colaborador  $k$  percorre o arco  $(i,j)$ , incluindo, eventualmente, o cliente fictício,  $(i,j) \in A_0^k, k \in M$

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

- $a_j \equiv$  instante, em minutos, em que o cliente  $j$  é visitado, para todo  $j \in V$
- $w^k = \begin{cases} 1 & \text{se a rota do colaborador } k \text{ incluir o almoço} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, k \in M$
- $b1^k = \begin{cases} 1 & \text{se o colaborador } k \text{ tem apenas serviço de manhã} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, k \in M$
- $b2^k = \begin{cases} 1 & \text{se o colaborador } k \text{ tem apenas serviço de tarde} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, k \in M$

A função objetivo do problema proposto incide na minimização da distância total percorrida pelos colaboradores. A função objetivo inclui também uma componente para penalização da inclusão do cliente fictício (almoço), procurando dessa forma privilegiar rotas que se realizam integralmente de manhã ou integralmente de tarde. Assim, a função objetivo é dada por:

$$\min z = \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in A^k} d_{ij} x_{ij}^k + \sum_{k \in M} \max_{(i,j) \in A} \{d_{ij}\} w^k \quad (1)$$

Além disso, existem diversas restrições que as soluções devem satisfazer, às quais a função objetivo está sujeita, sendo estas as seguintes:

$$\sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in A_0^k} x_{ij}^k = 1, \quad j \in V1 \quad (2)$$

$$\sum_{(i,n+k) \in A_0^k} x_{i,n+k}^k = w^k, \quad k \in M \quad (3)$$

$$\sum_{j: (i,j) \in A_0^k} x_{ij}^k - \sum_{j: (j,i) \in A_0^k} x_{ji}^k = 0, \quad i \in V^k, \quad k \in M \quad (4)$$

$$\sum_{j \in V1^k} x_{0j}^k \leq 1, \quad k \in M \quad (5)$$

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

$$- \sum_{i:(i,j) \in A^k} y_{ij}^k + \left( \sum_{i:(j,i) \in A^k} y_{ji}^k \right) + y_{j0}^k = \sum_{i:(j,i) \in A_0^k} x_{ji}^k, \quad j \in V^k, k \in M \quad (6)$$

$$y_{ij}^k \leq (n^k - 1)x_{ij}^k, \quad (i,j) \in A^k, \quad k \in M \quad (7a)$$

$$y_{i0}^k \leq n^k x_{i0}^k, \quad i \in V1^k, \quad k \in M \quad (7b)$$

$$y_{ij}^k \geq x_{ij}^k, \quad (i,j) \in A_0^k \setminus \{(0,j): j \in V1^k\}, \quad k \in M \quad (8)$$

$$\sum_{(i,j) \in A_0^k \wedge (i \neq n+k)} s_i x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A1^k} t_{ij} x_{ij}^k \leq T^k, \quad k \in M \quad (9)$$

$$a_j + s_j \leq H, \quad j \in V1 \quad (10)$$

$$a'_j \leq a_j \leq a''_j, \quad j \in V \quad (11)$$

$$a_j \geq (a_i + s_i + t_{ij}) - (1 - x_{ij}^k) H, \quad (i,j) \in A^k, \quad i \neq j, \quad k \in M \quad (12)$$

$$\sum_{i \in V1^k} x_{i,n+k}^k + \sum_{j \in V1^k} x_{n+k,j}^k \leq 2w^k, \quad k \in M \quad (13)$$

$$a_j + s_j \leq L1 + T^k(1 - b1^k) + T^k \left( 1 - \sum_{i \in V_0^k} x_{ij}^k \right), \quad j \in V1^k, \quad k \in M \quad (14a)$$

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

$$a_j \geq L2 - T^k(1 - b2^k) - T^k \left( 1 - \sum_{i \in V_0^k} x_{ij}^k \right), \quad j \in V1^k, \quad k \in M \quad (14b)$$

$$w^k = 1 - b1^k - b2^k, \quad k \in M \quad (15)$$

$$\sum_{k \in M_{ij}} x_{ij}^k + \sum_{k \in M_{ij}} x_{ji}^k \leq 1, \quad (i, j) \in A_0, \text{ com } i < j, |M_{ij}| \geq 1 \quad (16)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad (i, j) \in A_0^k, \quad k \in M \quad (17a)$$

$$y_{ij}^k \geq 0, \quad (i, j) \in A_0^k \setminus \{(0, i) : i \in V1^k\}, \quad k \in M \quad (17b)$$

$$a_j \geq 0, \quad j \in V_0 \quad (17c)$$

$$w^k \in \{0,1\}, \quad k \in M \quad (17d)$$

$$b1^k \in \{0,1\}, \quad k \in M \quad (17e)$$

$$b2^k \in \{0,1\}, \quad k \in M \quad (17f)$$

As restrições (2) asseguram que cada cliente  $j$  seja visitado exatamente uma vez e por um único colaborador, vindo de um outro cliente ou do depósito. Já a restrição (3) impõe que, se o colaborador  $k$  fizer o trajeto do cliente  $i$  para o respetivo cliente fictício então a variável  $w^k$  deverá assumir o valor um, assinalando que a rota do colaborador  $k$  irá incluir almoço.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Em conjunto, as restrições (2) e (3) garantem que cada cliente, incluindo o cliente fictício, quando aplicável, seja visitado uma única vez e por um único colaborador. Adicionalmente, caso exista ligação de algum cliente para o cliente fictício, então é imposta a obrigatoriedade de incluir o almoço na rota do colaborador  $k$ , ou seja,  $w^k = 1$ .

As restrições (4) garantem a sequência da rota, ou seja, se um colaborador chega ao cliente  $j$ , então esse mesmo colaborador deverá necessariamente sair de  $j$  para outro cliente, impedindo a existência de sub-circuitos.

As restrições (5) impõem que cada colaborador inicie, no máximo, uma única rota.

As restrições (6) asseguram a contagem correta dos clientes visitados por cada colaborador, acrescentando os clientes à medida que a rota avança. Para este efeito, usam as variáveis de fluxo ( $y_{ij}^k$ ) que contabilizam o número de clientes visitados, incluindo o cliente fictício.

As restrições (7a) e (7b) são restrições de ligação, ligando as variáveis de fluxo ( $y_{ij}^k$ ) às variáveis topológicas ( $x_{ij}^k$ ). As inequações (7a) aplicam-se a todos os arcos  $(i, j) \in A^k$ , permitindo que o limite superior do fluxo em  $y_{ij}^k$  seja  $(n^k - 1)$ ; enquanto que as inequações (7b) se referem especificamente aos arcos que convergem para o depósito  $(i, 0)$ , no qual o fluxo máximo poderá ser o número total de clientes que o colaborador  $k$  pode visitar, ou seja,  $(n^k)$ .

Em conjunto, as restrições (6), (7a) e (7b) e a integralidade das variáveis  $\{x_{ij}^k\}$  garantem a eliminação de sub-circuitos nas soluções (excluindo, no caso das restrições (6) e (7b), os arcos orientados do depósito para os clientes, e, no caso das restrições (7a), o nodo depósito).

As restrições (8), também de ligação, impõem a existência de fluxo nos arcos percorridos pelas rotas, excluindo os arcos que divergem do depósito. Estas restrições são também redundantes na formulação, servindo para fortalecer a respetiva relaxação linear, tal como se discutirá no Capítulo 6 (ver, Gouveia (1995) para um problema semelhante).

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

As restrições (9) limitam o tempo total da rota de cada colaborador  $k$ , de forma a não ultrapassar o respetivo tempo limite de trabalho ( $T^k$ ), de acordo com o contrato específico do colaborador  $k$ . Para tal, são contabilizados os tempos de serviço de cada trabalho a realizar e as deslocações, sem contabilizar o tempo de almoço.

As restrições (10) asseguram que o horário de funcionamento da empresa não é ultrapassado. No caso concreto da empresa em análise que encerra às 18:30h, se existirem serviços com uma duração, por exemplo, de 40 minutos, então estes só podem ser iniciados no máximo até às 17:50h.

As restrições (11) garantem o cumprimento das janelas de tempo de cada cliente, ou seja, estas restrições obrigam que o instante em que o cliente  $j$  será visitado ficará compreendido entre o limite inferior ( $a'_j$ ) e o limite superior ( $a''_j$ ) do mesmo, sendo estes limites previamente definidos nos parâmetros do problema.

As restrições (12) mantêm a coerência temporal entre visitas, isto é, a chegada ao cliente  $j$  deve ocorrer após o término do serviço no cliente  $i$  e a deslocação de  $i$  para  $j$ , caso a rota do colaborador  $k$  faça esse percurso. Nesta classe de restrições, poderíamos considerar importante a inclusão adicional das inequações  $a_j \leq (a_i + s_i + t_{ij}) + (1 - x_{ij}^k)C$ ,  $(i, j) \in A^k, k \in M$ . Porém, a sua inclusão iria obrigar uma junção das janelas de tempo, sem permitir folgas (sem serviço e sem deslocação) entre clientes. Isso impediria, por exemplo, que um colaborador executasse um serviço ao início da manhã e outro ao final da manhã, ainda que tivesse de esperar pelo segundo serviço. De facto, em termos práticos, estas situações ocorrem com alguma regularidade quando os clientes beneficiam da indicação de janelas de tempo.

As restrições (13) reforçam a coerência entra a variável  $w^k$  (que assinala a existência, ou não, de almoço na rota do colaborador  $k$ ) e os arcos que incidem no cliente fictício. Por outras palavras, se o almoço não fizer parte da rota, então nenhum desses arcos poderá estar na solução; inversamente, se algum desses arcos estiver na solução, então a variável  $w^k$  será obrigatoriamente igual a um, uma vez que a rota incluirá o almoço.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

As restrições (14a) determinam que, se a soma do instante de chegada com a duração do serviço for inferior ao início do horário de almoço, então o colaborador poderá trabalhar exclusivamente no turno da manhã, e, nesse caso,  $b1^k$  assumirá o valor um. Esta restrição considera tanto o instante de chegada quanto a duração do serviço, pois, embora o colaborador possa chegar ao local antes do início do horário de almoço, se a duração do serviço for superior ao tempo restante até à pausa para almoço, o serviço acabaria por coincidir com o horário de almoço. Simplificando, não basta garantir que o colaborador chegue antes da hora do almoço, é necessário que ele termine o serviço antes do início da pausa para almoço.

As restrições (14b) aplicam-se ao turno da tarde, funcionando de forma inversa à anterior, isto é, garantem que o colaborador possa trabalhar apenas na parte da tarde, com  $b2^k$  a assumir o valor um sempre que isso se verificar.

Estes dois conjuntos de restrições (14a) e (14b) regulam o turno de trabalho dos colaboradores, assegurando que, sempre que seja possível realizar o trabalho apenas na parte da manhã ou apenas na parte da tarde, assim se proceda.

As restrições (15) garantem que apenas uma das três situações se pode verificar: ou o colaborador trabalha de manhã e de tarde, e nesse caso o almoço tem de estar incluído; ou o colaborador trabalha apenas de manhã ou apenas de tarde, impedindo a inclusão do almoço. Estes acontecimentos não podem ocorrer em simultâneo.

As restrições (16) previnem a existência de sub-circuitos entre pares de clientes, sendo um caso particular de restrições de eliminação de sub-circuitos. Por esse motivo são também redundantes na formulação, podendo ser úteis no fortalecimento da respetiva relaxação linear, tal como se discutirá também no Capítulo 6.

Por fim, as condições (17) são restrições de domínio, definindo o domínio das variáveis.

## 6 TESTES COMPUTACIONAIS

Este capítulo apresenta um conjunto de testes computacionais para o problema em estudo, recorrendo à formulação proposta no Capítulo 5. Estes testes são conduzidos em duas direções. A primeira envolve uma análise ao desempenho computacional da formulação. A segunda, envolve uma discussão sobre aspetos da aplicabilidade prática do problema e da formulação. Para este efeito, começa-se por descrever o processo de recolha de dados e os dados em si.

Todos os testes foram realizados num computador portátil com as seguintes especificações: processador Intel Core i5-12500H de 2,50 GHz, 8 GB de memória RAM e sistema operativo Windows 11. Os testes foram desenvolvidos em Python, utilizando o *solver* Gurobi na versão 12.0.2. Após a recolha de dados efetuada diretamente na empresa, as coordenadas geográficas, distâncias e tempos de deslocação entre os clientes foram obtidos através de uma API do Microsoft Azure.

Além disto, é importante salientar que as distâncias e os tempos apresentados nas rotas visualizadas através do Bing Maps podem não coincidir exatamente com os valores finais resultantes da otimização. Tal deve-se ao facto da recolha de dados e a visualização das rotas ocorrerem em tempo real (com influência de fatores de tráfego), havendo um hiato de tempo entre os dois instantes. Esse hiato de tempo incluirá, pelo menos, o tempo de resolução da formulação. Além disso, o facto de haver um limite de pedidos à API do Microsoft Azure (na versão gratuita), faz com que a recolha de dados não seja repetida com a assiduidade que poderia ser recomendável. Esta limitação pode originar ligeiras discrepâncias em relação ao que é apresentando visualmente, embora sem impacto significativo. Adicionalmente, importa referir que as rotas visualizadas no Bing Maps incluem também o trajeto entre o último cliente do período da manhã e o primeiro cliente do período da tarde. No entanto, conforme mencionado no capítulo anterior, essa distância não é contabilizada (quer a distância quer o tempo), sendo assumida como zero sempre que exista intervalo para almoço.

Em todas as instâncias consideradas, foi definido um tempo máximo de execução de 3600 segundos e um *gap* (desvio relativo entre o melhor limite inferior e o melhor limite

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

superior, em relação ao ótimo, obtidos pelo algoritmo de Branch-and-Bound utilizado na resolução da formulação) de 0,0001, garantindo um critério uniforme de paragem para cada um dos casos analisados. Foram mantidos os parâmetros definidos por defeito pelo Gurobi na execução do respetivo algoritmo de Branch-and-Bound.

Para representar os períodos de almoço de cada colaborador, utiliza-se a letra grega  $\alpha$ .

## **6.1 Recolha e tratamento dos dados**

A etapa de recolha de dados foi fundamental para o desenvolvimento do presente trabalho, uma vez que permitiu obter as informações necessárias para compreender a realidade da empresa e apoiar a construção da solução proposta. Esta recolha foi realizada diretamente junto da empresa, com base nos seus registos internos.

Assim, foram obtidas as seguintes informações necessárias para o presente estudo:

- Moradas dos clientes;
- Número de colaboradores;
- Horário de trabalho da empresa;
- Tempo máximo diário de trabalho de cada colaborador (variável consoante o dia);
- e
- Tipos de trabalhos que podem ser realizados (sendo estes passíveis de serem adicionados ou removidos).

A base de dados a ser utilizada inclui um total de 96 clientes, que correspondem à carteira atual da empresa. Contudo, apenas um subconjunto será considerado, dado que nem todos os clientes solicitam serviços diariamente.

Adicionalmente, e também para efeitos de testes computacionais à formulação, serão considerados dados de clientes e colaboradores fictícios; tanto para efeito de cenarização de testes de maior dimensão, visando cenários de crescimento da empresa e/ou empresas de maior dimensão; como para garantir a privacidade dos clientes.

Com base nestas informações, foi elaborado um documento que a empresa deverá utilizar no processo de otimização das rotas. Este documento reúne todos os dados necessários

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

para esse fim e foi desenvolvido com a flexibilidade necessária para se adaptar às exigências operacionais do dia a dia da empresa em estudo, permitindo também a sua adaptação a outras empresas (consultar o Apêndice 1).

As instâncias presentes no subcapítulo 6.2 incluem exemplos reais e instâncias recolhidas na literatura e usadas noutros problemas de rotas de veículos com janelas de tempo. As instâncias reais são designadas usando a notação  $r_{n_m}$  e vêm descritas no Apêndice 2. Cada uma destas instâncias é caracterizada por um conjunto de  $n$  clientes localizados numa determinada região geográfica, gerados aleatoriamente a partir da carteira de clientes da empresa. A instância é também caracterizada por  $m$  colaboradores com parametrizações específicas, nomeadamente subconjuntos de clientes que cobrem e respetivos limites de tempo de trabalho.

Em termos geográficos, a maioria dos clientes encontra-se concentrada no centro da cidade onde a empresa tem o seu escritório e onde se desenvolve a maior parte da sua atividade. A empresa está sediada no concelho de Marco de Canaveses, no distrito do Porto. No entanto, várias instâncias incluem clientes localizados na periferia, seja em meios rurais, em concelhos vizinhos ou, em alguns casos, em distritos distintos, como Aveiro e Viseu.

A seguir apresenta-se um breve resumo destas instâncias.

- $r_{10\_2}$ : 10 clientes e 2 colaboradores. Um colaborador dispõe de 8 horas de trabalho disponíveis e o outro de apenas 6 horas; 3 dos clientes estão significativamente afastados do centro.
- $r_{12\_2}$ : 12 clientes e 2 colaboradores, ambos com 8 horas de trabalho disponíveis; apenas 1 cliente se encontra distante dos restantes.
- $r_{15\_2}$ : 15 clientes e 2 colaboradores, ambos com 8 horas de trabalho. Os clientes estão mais dispersos entre si, embora a maioria continue no centro da cidade.
- $r_{20\_3}$ : 20 clientes e 3 colaboradores. Um colaborador dispõe de 4 horas e os restantes de 8 horas de trabalho. Existem diversos clientes em concelhos e distritos vizinhos.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

- **r\_25\_3**: 25 clientes e 3 colaboradores, todos com 8 horas de trabalho disponíveis. Cinco clientes encontram-se afastados do centro.
- **r\_30\_4**: 30 clientes e 4 colaboradores. Dois colaboradores têm 8 horas de trabalho disponíveis e os outros dois têm 6 horas. Alguns clientes estão distribuídos pela periferia e concelhos vizinhos.
- **r\_40\_7**: 40 clientes e 7 colaboradores, todos com 8 horas de trabalho disponíveis. Inclui clientes em diferentes concelhos e 2 em distritos distintos, 1 em Aveiro e 1 em Viseu.
- **r\_50\_7**: 50 clientes e 7 colaboradores, todos com 8 horas de trabalho disponíveis. Distribuição geográfica semelhante à instância anterior.
- **r\_60\_9**: 60 clientes e 9 colaboradores, todos com 8 horas de trabalho disponíveis. Mantem-se a lógica de dispersão para fora do centro urbano.
- **r\_70\_12**: 70 clientes e 12 colaboradores, todos com 8 horas. Inclui clientes na cidade, periferia e distritos como Aveiro e Viseu.
- **r\_80\_18**: 80 clientes e 18 colaboradores, todos com 8 horas de trabalho. Segue a mesma lógica de distribuição geográfica.
- **r\_90\_22**: 90 clientes e 22 colaboradores, todos com 8 horas de trabalho. Padrão de dispersão semelhante às instâncias anteriores.
- **r\_96\_24**: 96 clientes e 24 colaboradores, todos com 8 horas de trabalho. A distribuição dos clientes mantém-se idêntica, incluindo a maioria dos clientes no centro da cidade e os restantes na periferia e nos concelhos e distritos próximos.

As instâncias recolhidas na literatura vêm descritas por Solomon (1987), surgindo com uma notação própria pela qual são amplamente conhecidas. Utilizaremos essa mesma notação no presente trabalho. Estas instâncias estão organizadas em seis tipos distintos: C1, C2, R1, R2, RC1 e RC2, cada um contendo problemas com 100 nós. Além disso, tratam-se de problemas em que a distância é calculada de forma euclidiana, sendo que o tempo de um cliente para o outro é igual à distância.

Os conjuntos C apresentam clientes agrupados, com janelas de tempo geradas a partir de uma solução de referência. Nos conjuntos R, a localização dos clientes é gerada uniforme

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

e aleatoriamente. Os conjuntos RC constituem uma combinação dos dois anteriores, incluindo tanto clientes agrupados como distribuídos aleatoriamente. A numeração 1 e 2 associada aos conjuntos também tem significado, neste caso o índice 1 corresponde a janelas de tempo estreitas e a uma pequena capacidade de veículos. O índice 2 indica janelas de tempo largas e maior capacidade de veículos. Resumindo, os conjuntos R1 e R2 são aleatórios, os C1 e C2 são agrupados e os RC1 e RC2 são semi-agrupados, ou seja, representam uma mistura de dados gerados aleatoriamente e agrupados. O horizonte de escalonamento também difere, nos conjuntos C1, R1 e RC1, o horizonte é curto, permitindo apenas alguns clientes por rota. Por outro lado, nos conjuntos C2, R2 e RC2, o horizonte é longo, permitindo que cada veículo atenda a um número maior de clientes (Solomon, 1987).

No presente trabalho, os veículos são interpretados como colaboradores. Não se consideram restrições de capacidade, mas é tida em conta a pausa para almoço, o que implica uma adaptação das instâncias ao problema em estudo. Sendo assim, em todos os casos são considerados, inicialmente, 25 colaboradores que correspondem ao número de veículos disponíveis nestas instâncias.

Nas instâncias reais, a janela de tempo para o início do almoço será definida no intervalo [12:30-12:45], por corresponder ao período habitual de início de almoço da empresa. Nas instâncias da literatura, esse intervalo será mais alargado, correspondendo a 120 unidades, de forma a garantir a obtenção de soluções viáveis, dadas as janelas de tempo exigentes dessas instâncias. No entanto, não é possível definir uma janela de tempo fixa para todas as instâncias, uma vez que o tempo total de laboração varia consideravelmente, sendo, em alguns casos, de 230 unidades e, noutros, podendo chegar a 3390. Assim, para introduzir o período de almoço de forma coerente, optou-se por posicioná-lo aproximadamente a meio do horizonte temporal. Por exemplo, numa instância com uma duração total de 230 unidades, a janela de tempo para o almoço foi definida como [55 – 175].

## **6.2 Desempenho Computacional da Formulação**

Neste subcapítulo, será realizada uma análise do desempenho computacional da formulação matemática, com o objetivo de compreender como esta se comporta perante diferentes alterações, tanto em termos de tempo de execução quanto na obtenção da solução ótima. No contexto de problemas de otimização, em especial no planeamento de rotas, o desempenho computacional pode ser influenciado por diversos fatores. Para o presente estudo, destaca-se a presença de restrições redundantes para a formulação inteira, mas que cortam o poliedro que caracteriza a respetiva relaxação linear permitindo fortalecer o modelo. Destaca-se ainda uma análise à variação do número de colaboradores disponíveis e uma análise a diferentes perfis de janelas de tempo.

Inicialmente, serão efetuados alguns testes utilizando instâncias da literatura, nomeadamente as de Solomon (DIMACS, consultado a 25 de junho de 2025), que são amplamente estudadas em problemas de otimização de rotas com janelas de tempo.

Em seguida, a análise incidirá sobre a relevância das restrições de corte adicionais. Posteriormente, será explorada a influência do número de colaboradores, avaliando como a variação no número de recursos pode afetar o desempenho computacional. Por fim, será discutido o impacto das alterações nas janelas de tempo, visto que restrições temporais mais flexíveis ou mais rigorosas podem alterar significativamente a dificuldade computacional do problema (nas instâncias analisadas no presente estudo).

### **6.2.1 Testes Computacionais com Instâncias de Solomon para o VRPTW**

As instâncias de Solomon, amplamente utilizadas na literatura para o VRPTW, foram aqui adaptadas da melhor forma possível com o intuito de permitir comparações com resultados previamente publicados. No entanto, essas instâncias não contemplam pausas para almoço, o que limita a sua total adequação ao problema em estudo.

De todas as instâncias testadas, apenas as apresentadas na Tabela 6.2.1.1 puderam ser aproveitadas, uma vez que permitiram alcançar uma solução ótima ou, pelo menos, uma solução admissível. As restantes não conseguiram obter soluções admissíveis dentro do tempo limite de 3600 segundos, suscitando a dúvida sobre se essas instâncias possuem,

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

de facto, uma solução admissível ou se são impossíveis de resolver no contexto específico considerado.

*Tabela 6.2.1.1 - Desempenho das Instâncias de Solomon adaptadas ao problema proposto*

| Instâncias | OPT/GAP |
|------------|---------|
| C1         |         |
| • C105     | 70,66%  |
| • C106     | 64,95%  |
| C2         |         |
| • C201     | 0,76%   |
| • C205     | OPT     |

Nesta tabela e nas seguintes, “OPT” significa que foi alcançada uma solução ótima dentro do tempo limite.

Tendo em conta as diferenças entre o problema tratado neste trabalho e os reportados na literatura, a comparação direta de resultados torna-se praticamente inviável. Ainda assim, apresentam-se algumas comparações com outros trabalhos que também recorrem às instâncias de Solomon.

Inicialmente, procurou-se realizar a comparação com métodos exatos, de forma a manter a coerência com a abordagem aqui proposta. Para tal, foi considerado o estudo de Karimi & Nawrin Ferdous (2022), que aborda um Problema de Rotas de Veículos com Múltiplas Viagens, Vagões Variáveis e Janelas de Tempo (MTVRP-VW-TW – *Multiple Trip Vehicle Routing Problem with Variable Wagons and Time Windows*). Apesar da semelhança na consideração das janelas de tempo e no objetivo de minimizar a distância total percorrida, esse estudo não contempla pausas para almoço e realizou alterações nas instâncias de Solomon, dificultando uma comparação equitativa.

Ainda assim, procedendo à comparação, verifica-se que a implementação apresentada no referido artigo foi realizada em OPL, com recurso ao ILOG CPLEX, sendo os testes executados no *cluster* CEDAR da *Compute Canada*. O tempo máximo por instância foi fixado em 4 horas e foram disponibilizados até 40 GB de memória por execução. Importa ainda referir que os testes foram efetuados apenas para instâncias com, no máximo, 50 clientes, o que representa uma limitação face às instâncias com 100 clientes utilizadas no

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

presente trabalho. Mesmo assim, o *gap* médio obtido para instâncias do tipo C1 foi de 89%, o que revela um desempenho inferior ao alcançado no nosso estudo. Contudo, importa sublinhar, que se trata de problemas com características bastante distintas.

Por outro lado, outros trabalhos identificados na literatura, como os de Tan et al. (2001), Rochat & Taillard (1995) e Ombuki et al. (2006), recorrem a abordagens heurísticas para a resolução do VRPTW (sem considerar pausas para almoço), distinguindo-se, assim, da abordagem exata utilizada no presente estudo. Para além de aplicarem métodos diferentes, os referidos trabalhos apresentam os resultados em termos de distância total percorrida e número de veículos utilizados, sem indicar o valor do *gap*. Além disto, enquanto nesses trabalhos o número de veículos varia (sendo sempre inferior aos 25), no presente estudo consideram-se, inicialmente 25 colaboradores fixos para as instâncias de Solomon, que correspondem exatamente aos veículos disponíveis nessas instâncias, como foi referido no subcapítulo 6.1. Neste contexto, os colaboradores podem ser considerados equivalentes aos veículos referidos na literatura.

Na instância C105, composta por 100 clientes e 25 colaboradores, a distância total obtida foi de 199,1 unidades. Esta solução dificilmente poderá ser comparável com a solução reportada em Rochat & Taillard (1995), que apresenta uma distância de 828,94 unidades, mas considerando apenas 10 veículos. Na instância C106 e para o problema em estudo com  $n = 100$  e  $m = 25$ , a distância total foi de 206,6 unidades, face às 827,3 unidades registadas também em Rochat & Taillard (1995) com 10 veículos, para o problema de rotas discutido no artigo. Testámos a formulação (no âmbito do problema em estudo) para estas duas instâncias, com 10 colaboradores, sem obter qualquer solução admissível dentro do tempo máximo de execução.

Relativamente às instâncias do tipo C2, observam-se resultados ainda mais favoráveis. Tal poderá dever-se às janelas de tempo mais alargadas nestas instâncias, o que permite uma maior flexibilidade na construção das rotas. Na instância C201, com 25 colaboradores, obteve-se uma distância total de 324,4 unidades, enquanto em Tan et al. (2001) indicam uma distância de 590 unidades, mas considerando apenas 3 veículos. Por fim, na instância C205, o algoritmo aqui proposto encontrou a solução ótima em 1645,07

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

segundos, considerando igualmente os 25 colaboradores, com uma distância total de 332,60 unidades, em contraste com as 588,88 unidades reportadas por Rochat & Taillard (1995), que utilizaram apenas 3 veículos. Aqui também, testámos a formulação (no âmbito do problema em estudo) para as duas instâncias da classe C2 referidas, considerando 3 colaboradores. Neste caso, o modelo revelou-se impossível, não existindo qualquer solução que satisfaça as restrições impostas.

Embora as comparações apresentadas não sejam completamente justas, devido às diferenças entre os modelos, número de veículos (ou colaboradores) considerados e abordagens de resolução, é possível concluir que a metodologia aqui proposta se revela eficaz, em especial na minimização da distância total, mesmo que, provavelmente, à custa da utilização de um maior número de colaboradores.

Das 56 instâncias de Solomon, apenas quatro forneceram soluções viáveis no contexto do problema em estudo. Assim, os testes de desempenho da formulação, que se apresentarão a seguir, são realizados com base em instâncias reais, isto é, utilizando os dados fornecidos pela empresa.

Num esforço adicional, numa tentativa de aproveitar ao máximo as instâncias de Solomon, foi inclusivamente testada a formulação sem considerar a pausa para almoço, de modo a aproximar melhor das características originais destas instâncias. No entanto, esta abordagem afasta-se do objetivo principal do presente trabalho. Ainda assim, os resultados obtidos nesse contexto estão apresentados no Apêndice 3.

### **6.2.2 Análise do Impacto das Restrições Redundantes**

Com o objetivo de analisar a relevância das restrições redundantes ((8) e (16)) na formulação inteira proposta, são realizados testes com e sem a sua inclusão, considerando instâncias de diferentes dimensões. Pretende-se, assim, verificar se estas restrições têm um impacto significativo na relaxação linear do modelo e consequentemente no desempenho do algoritmo de Branch-and-Bound utilizado para a resolução do modelo inteiro.

Para esse efeito, consideram-se três formulações distintas:

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

- F0: Formulação com as restrições (2)-(7b), (9)-(15) e (17a)-(17f) (exclui as restrições (8) e as (16));
- F1: Formulação F0 com a adição das restrições (8) (exclui apenas as restrições (16));
- F2: Formulação F1 com a adição das restrições (16) (inclui todas as restrições propostas).

Na Tabela 6.2.2.1, apresentam-se os resultados obtidos para cada uma das três formulações, relativamente às respetivas relaxações lineares e ao desempenho do algoritmo de Branch-and-Bound (do *solver* utilizado) sobre o modelo inteiro. Para o efeito, consideram-se as instâncias descritas no subcapítulo 6.1. As notações  $F0_L$ ,  $F1_L$  e  $F2_L$  referem-se à versão em relaxação linear das formulações em discussão e  $z_L^*$  corresponde ao valor ótimo da relaxação linear da respetiva formulação.

Tabela 6.2.2.1 - Desempenho das Formulações F0, F1 e F2

| Instância | n  | m | F0 <sub>L</sub> | F0      |             | F1 <sub>L</sub> | F1      |             | F2 <sub>L</sub> | F2      |             |
|-----------|----|---|-----------------|---------|-------------|-----------------|---------|-------------|-----------------|---------|-------------|
|           |    |   | $z_L^*$         | OPT/GAP | Tempo (seg) | $z_L^*$         | OPT/GAP | Tempo (seg) | $z_L^*$         | OPT/GAP | Tempo (seg) |
| r_10_2    | 10 | 2 | 50,003          | OPT     | 0,28        | 50,574          | OPT     | 0,28        | 54,343          | OPT     | 0,33        |
| r_12_2    | 12 | 2 | 14,286          | OPT     | 100,84      | 14,367          | OPT     | 205,13      | 33,536          | OPT     | 87,05       |
| r_15_2    | 15 | 2 | 26,104          | 45,66%  | 3600        | 26,264          | 44,88%  | 3600        | 34,996          | 42,68%  | 3600        |
| r_20_3    | 20 | 3 | 35,985          | 49,60%  | 3600        | 36,227          | 49,55%  | 3600        | 56,605          | 52,62%  | 3600        |
| r_25_3    | 25 | 3 | 52,012          | 54,42%  | 3600        | 52,451          | 54,31%  | 3600        | 63,353          | 54,34%  | 3600        |
| r_30_4    | 30 | 4 | 65,813          | 51,04%  | 3600        | 66,040          | 50,86%  | 3600        | 85,095          | 51,84%  | 3600        |
| r_40_7    | 40 | 7 | 38,741          | 44,19%  | 3600        | 38,900          | 43,81%  | 3600        | 83,793          | 41,32%  | 3600        |
| r_50_7    | 50 | 7 | 60,561          | 68,18%  | 3600        | 60,618          | 66,88%  | 3600        | 81,984          | 64,53%  | 3600        |
| r_60_9    | 60 | 9 | 81,515          | 64,59%  | 3600        | 81,742          | -----   | 3600        | 121,40          | 62,06%  | 3600        |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instância | n  | m  | F0 <sub>L</sub> | F0      |             | F1 <sub>L</sub> | F1      |             | F2 <sub>L</sub> | F2      |             |
|-----------|----|----|-----------------|---------|-------------|-----------------|---------|-------------|-----------------|---------|-------------|
|           |    |    | $z_L^*$         | OPT/GAP | Tempo (seg) | $z_L^*$         | OPT/GAP | Tempo (seg) | $z_L^*$         | OPT/GAP | Tempo (seg) |
| r_70_12   | 70 | 12 | 62,361          | 63,64%  | 3600        | 62,296          | 65,81%  | 3600        | 95,530          | 62,93%  | 3600        |
| r_80_18   | 80 | 18 | 13,090          | -----   | 3600        | 13,097          | -----   | 3600        | 50,038          | -----   | 3600        |
| r_90_22   | 90 | 22 | 59,184          | 44,73%  | 3600        | 59,254          | 44,28%  | 3600        | 156,79          | 21,36%  | 3600        |
| r_96_24   | 96 | 24 | 85,139          | 23,21%  | 3600        | 85,259          | 20,17%  | 3600        | 192,74          | 24,44%  | 3600        |

Como explicado anteriormente, “OPT” significa que, dentro do tempo limite, foi alcançada uma solução ótima. Além disso, quando não é apresentado qualquer valor (“-----”) significa que, no tempo limite não foi possível encontrar uma solução admissível. Esta notação será utilizada também nas tabelas seguintes.

Da análise comparativa entre as formulações F0, F1 e F2, observa-se uma melhoria progressiva dos resultados à medida que se introduzem as restrições adicionais. Essa melhoria é consistente nos resultados das relaxações lineares, com forte destaque para a presença das restrições (16) que caracterizam a formulação F2. Na execução do Branch-and-Bound, observa-se um desempenho melhor, em geral, quando utilizada a formulação F2, especialmente nas instâncias de maior dimensão (em geral).

Assim, ainda que o acréscimo de restrições implique um maior esforço computacional, esse esforço pode ser compensado pela melhoria na qualidade dos valores ótimos da relaxação linear, o que, por sua vez, pode beneficiar a execução do algoritmo de Branch-and-Bound. No entanto, se por um lado, o fortalecimento da relaxação linear melhora o desempenho do algoritmo de Branch-and-Bound, por outro, pode tornar a formulação mais pesada (no número de restrições), podendo prejudicar esse mesmo desempenho. Estes dois fatores poderão explicar comportamentos diferentes em algumas instâncias, nos resultados observados na Tabela 6.2.2.1.

Ponderando todos estes fatores e os resultados referidos anteriormente, a formulação F2 parece ser, de forma geral, a mais eficaz entre as três analisadas, sobretudo em instâncias

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

de maior dimensão. Por este motivo, nas análises subsequentes será considerada exclusivamente a formulação F2, com a inclusão de todas as restrições anteriormente descritas.

Antes de terminar esta secção, importa referir que o *gap* observado refere-se à diferença relativa entre um limite inferior e um limite superior (solução admissível para o problema), ou seja, pode não corresponder à “distância” ao valor ótimo. Por outro lado, porém, pode acontecer que o limite superior encontrado possa corresponder ao valor ótimo do problema. Da análise que será conduzida no subcapítulo 6.3, envolvendo um estudo sobre a aplicabilidade prática da formulação, fica-se com a convicção de que as soluções associadas aos limites superiores gerados pelo algoritmo de Branch-and-Bound (nos casos em que não são comprovadamente as ótimas) não estarão distantes das soluções ótimas, colocando o ónus do *gap* sobretudo na qualidade dos limites inferiores. Esta convicção advém da observação geográfica das soluções, do conhecimento prático e real dos casos e da comparação com as soluções construídas manualmente pela empresa.

### **6.2.3 Variação do número de colaboradores**

De seguida, procede-se à análise do desempenho da formulação mediante a variação do número de colaboradores disponíveis, com o objetivo de avaliar o impacto dessa alteração nas soluções obtidas. Esta análise permite compreender de que forma o número de colaboradores pode ou não influenciar o esforço de resolução da formulação. Adicionalmente, analisar-se-á também a influência da cobertura restrita de clientes pelos colaboradores, em comparação com as versões mais usuais dos problemas de rotas de veículos que consideram que os veículos (colaboradores no caso presente) poderão visitar qualquer cliente. Tal como referido anteriormente, a análise será conduzida apenas usando a formulação F2.

A Tabela 6.2.3.1 apresenta os resultados da execução do algoritmo de Branch-and-Bound dos casos em análise. Na versão designada por F2\_a, considera-se que cada colaborador pode cobrir apenas alguns clientes (versão inicialmente proposta no presente trabalho). Na formulação F2\_b, todos os colaboradores podem atender qualquer cliente, não existindo qualquer restrição de atribuição, tal como nas versões usuais de problemas de

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

rotas de veículos. Importa ainda referir que, em ambos os casos, são consideradas janelas de tempo, sendo estas iguais tanto na versão F2\_a como na versão F2\_b.

*Tabela 6.2.3.1 - Comparação do desempenho das Formulações F2\_a e F2\_b*

| Instância | $n$ | $m$ | F2_a    |             | F2_b    |             |
|-----------|-----|-----|---------|-------------|---------|-------------|
|           |     |     | OPT/GAP | Tempo (seg) | OPT/GAP | Tempo (seg) |
| r_10_2    | 10  | 2   | OPT     | 0,27        | OPT     | 18,35       |
| r_10_4    | 10  | 4   | OPT     | 0,11        | OPT     | 0,10        |
| r_10_6    | 10  | 6   | OPT     | 0,23        | OPT     | 0,18        |
| r_30_4    | 30  | 4   | 32,65%  | 3600        | -----   | 3600        |
| r_30_8    | 30  | 8   | OPT     | 14,80       | 9,11%   | 3600        |
| r_30_14   | 30  | 14  | OPT     | 11,10       | OPT     | 24,24       |
| r_60_9    | 60  | 9   | 40,60%  | 3600        | -----   | 3600        |
| r_60_18   | 60  | 18  | 25,14%  | 3600        | 28,62%  | 3600        |
| r_60_28   | 60  | 28  | 29,21%  | 3600        | OPT     | 1258,61     |
| r_80_18   | 80  | 18  | 25,82%  | 3600        | -----   | 3600        |
| r_80_36   | 80  | 36  | 26,92%  | 3600        | OPT     | 1547,52     |
| r_90_22   | 90  | 22  | 23,68%  | 3600        | -----   | 3600        |
| r_90_44   | 90  | 44  | 0,97%   | 3600        | 75,27%  | 3600        |

A escolha do valor de  $m$  (número de colaboradores) começa com a definição de um valor inicial, que, posteriormente, é ajustado. Após o valor inicial, os valores de  $m$  são o dobro do valor anterior. Este aumento progressivo visa expandir a disponibilidade de colaboradores, na expectativa de que a resolução possa beneficiar disso. O valor inicial deste parâmetro ( $m$ ) corresponde ao menor número de colaboradores com o qual foi possível obter pelo menos uma solução admissível, dentro do limite de tempo definido, ou para garantir que o problema não fosse considerado impossível.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Como referido anteriormente, a progressão do valor de  $m$  duplica o valor anterior. Embora esse procedimento permita obter soluções a cada nova iteração, muitas vezes essas soluções envolvem colaboradores sem clientes atribuídos. Este tipo de situação é frequente na formulação F2\_a, uma vez que, nesta versão, alguns colaboradores são previamente designados para atender determinados clientes, o que limita as possibilidades de combinação. No entanto, na formulação F2\_b, isto já não é expectável, visto que todos os colaboradores podem atender qualquer cliente. Por este motivo, privilegiaram-se os valores de  $m$  para os quais as soluções atribuíram rotas para todos os colaboradores na versão F2\_b. A título de exemplo, na instância r\_60 testou-se o caso com  $m = 36$  (dobro de 18, valor de  $m$  anterior), tendo-se obtido uma solução ótima. No entanto, observou-se que 8 colaboradores ficariam sem trabalho. Tendo isto em consideração, optou-se antes pela versão com  $m = 28$  (r\_60\_28), cuja resolução levou à solução ótima em F2\_b. Desta vez, todos os colaboradores foram devidamente alocados a rotas, evitando que alguns ficassem sem rota atribuída. Assim, o último valor de  $m$  é aquele em que todos os colaboradores têm rotas atribuídas.

A razão para calcular o dobro do valor de  $m$  baseia-se na tentativa de garantir que o espaço de soluções seja amplo o suficiente para encontrar uma solução, além de permitir a análise do impacto do aumento de  $m$ .

A análise comparativa entre as formulações F2\_a e F2\_b revela diferenças significativas de desempenho. Em problemas de menor escala ( $n = 10$ ), ambas as formulações obtêm soluções ótimas em tempos de execução reduzidos. No entanto, nas três alterações do parâmetro  $m$  quando  $n = 10$ , o modelo F2\_b apresenta melhor desempenho em dois dos três casos, sendo a versão F2\_a superior apenas na instância com menor número de colaboradores (r\_10\_2).

Na instância com  $n = 30$ , a versão com limitações de cobertura dos clientes (F2\_a) apresenta um desempenho globalmente superior, alcançando a solução ótima em tempos de execução significativamente mais baixos, comparativamente com a versão sem condicionantes de cobertura dos clientes (F2\_b), que em alguns casos não consegue sequer encontrar uma solução admissível no tempo limite.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

A versão F2\_b aparenta melhorar o seu desempenho à medida que o número de colaboradores ( $m$ ) aumenta, conseguindo, em várias instâncias, atingir o valor ótimo antes de alcançar o tempo máximo de execução. Esta melhoria pode ser atribuída à maior flexibilidade de construção de rotas, resultante da possibilidade de atribuição livre de colaboradores a clientes, o que parece potenciar uma exploração mais eficaz do espaço de soluções, sobretudo em problemas de maior escala.

De forma geral, os resultados sugerem que a formulação F2\_a tende a apresentar melhores resultados, apesar de, em comparação com a F2\_b, nem sempre conseguir atingir a solução ótima. Contudo, a versão F2\_a aparenta maior eficácia quando os valores de  $m$  são mais baixos. A versão F2\_b, que permite que qualquer cliente possa ser servido por qualquer colaborador, só se destaca quando o valor de  $m$  é elevado.

É importante referir, porém, que estas observações não constituem uma regra geral, respeitando apenas às instâncias e condições consideradas nesta análise.

#### **6.2.4 Diversas configurações de janelas de tempo**

Numa outra análise, são realizados testes sobre as mesmas instâncias, considerando diferentes configurações de janelas de tempo: sem janelas de tempo, com janelas regulares e com janelas apertadas. Esta variação tem como objetivo analisar o impacto das janelas de tempo no desempenho computacional do modelo, permitindo analisar de que forma a presença e a rigidez das janelas de tempo influenciam a qualidade das soluções e o tempo de resolução. Sendo assim, é considerada a formulação F2 com três características distintas:

- F2\_s: corresponde ao caso sem janelas de tempo, isto é, o serviço pode ser realizado a qualquer momento do dia, sendo apenas necessário cumprir as restrições temporais associadas ao período de funcionamento da empresa.
- F2\_c: corresponde ao caso em que existem janelas de tempo regulares, ou seja, janelas que permitem que o trabalho seja realizado durante a parte da manhã ou da tarde, ou janelas com duração mínima de três horas. De forma geral, estas

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

janelas apresentam intervalos amplos, proporcionando maior flexibilidade para a realização do trabalho.

- F2\_p: corresponde ao caso com janelas de tempo apertadas, variando entre 15 minutos e 2 horas, com maior frequência de janelas de 30 minutos.

Importante salientar que todas as formulações incluem janelas de tempo apertadas nos clientes fictícios (almoço), correspondentes ao intervalo [12:30-12:45], conforme referido anteriormente. Além disso, todas as formulações contemplam igualmente clientes sem janelas de tempo pré-agendadas, refletindo o funcionamento real da empresa, onde existem serviços que não exigem marcação prévia. Assim, esta característica é também considerada neste trabalho.

Recorde-se que todas as janelas de tempo consideradas no presente trabalho servem para enquadrar o instante de início da visita ao cliente. A conclusão dessa visita pode ocorrer já fora dessa janela.

As janelas de tempo de cada umas das instâncias vêm descritas pormenorizadamente no Apêndice 4.

A Tabela 6.2.4.1 apresenta os resultados computacionais decorrentes da resolução da formulação F2 nos três cenários propostos.

*Tabela 6.2.4.1 - Comparação do desempenho das Formulações F2\_s, F2\_c e F2\_p*

| Instância | n  | m | F2_s    |             | F2_c    |             | F2_p    |             |
|-----------|----|---|---------|-------------|---------|-------------|---------|-------------|
|           |    |   | OPT/GAP | Tempo (seg) | OPT/GAP | Tempo (seg) | OPT/GAP | Tempo (seg) |
| r_10_2    | 10 | 2 | OPT     | 0,33        | OPT     | 0,23        | OPT     | 0,13        |
| r_12_2    | 12 | 2 | OPT     | 87,05       | OPT     | 24,05       | OPT     | 0,75        |
| r_15_2    | 15 | 2 | 42,65%  | 3600        | 23,95%  | 3600        | OPT     | 597,02      |
| r_20_3    | 20 | 3 | 52,62%  | 3600        | 50,03%  | 3600        | 32,63%  | 3600        |
| r_25_3    | 25 | 3 | 54,34%  | 3600        | 43,57%  | 3600        | -----   | 3600        |
| r_30_4    | 30 | 4 | 51,84%  | 3600        | 50,61%  | 3600        | 25,81%  | 3600        |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instância | n  | m  | F2_s    |             | F2_c    |             | F2_p    |             |
|-----------|----|----|---------|-------------|---------|-------------|---------|-------------|
|           |    |    | OPT/GAP | Tempo (seg) | OPT/GAP | Tempo (seg) | OPT/GAP | Tempo (seg) |
| r_40_7    | 40 | 7  | 41,32%  | 3600        | 23,59%  | 3600        | 15,92%  | 3600        |
| r_50_7    | 50 | 7  | 64,53%  | 3600        | 31,59%  | 3600        | 22,56%  | 3600        |
| r_60_9    | 60 | 9  | 62,06%  | 3600        | 49,76%  | 3600        | 35,94%  | 3600        |
| r_70_12   | 70 | 12 | 62,93%  | 3600        | 56,47%  | 3600        | 43,18%  | 3600        |
| r_80_18   | 80 | 18 | -----   | 3600        | 45,89%  | 3600        | 30,40%  | 3600        |
| r_90_22   | 90 | 22 | 21,36%  | 3600        | 21,50%  | 3600        | -----   | 3600        |
| r_96_24   | 96 | 24 | 24,44%  | 3600        | 52,01%  | 3600        | -----   | 3600        |

A modelação de janelas de tempo em problemas de rotas de veículos obriga a um aumento da dimensão da formulação (mais variáveis e restrições), podendo aumentar o esforço computacional de resolução. Porém, a presença dessas mesmas janelas restringe o conjunto de soluções admissíveis do problema, podendo refletir-se numa redução do esforço de resolução. Este comportamento antagónico pode ajudar a explicar algumas das observações reportadas na Tabela 6.2.4.1. Em geral, em instâncias de pequena e média dimensão, a formulação consegue melhores resultados quando o problema considera janelas de tempo apertadas, tirando partido da redução do conjunto de soluções admissíveis do problema (Ghoseiri & Ghannadpour, 2010). Em instâncias de maior dimensão, a versão que ignora janelas de tempo consegue melhor desempenho.

Nas instâncias com 90 ou mais clientes, a versão F2\_p perde capacidade de resposta, deixando mesmo de apresentar soluções admissíveis.

Em síntese, em instâncias pequenas e médias, as janelas de tempo, tanto regulares como apertadas, tendem a beneficiar o desempenho do modelo, beneficiando da redução do conjunto de soluções admissíveis. Contudo, em instâncias de maior dimensão, o número

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

elevado de restrições poderá dificultar a resolução do modelo, sobretudo quando as janelas de tempo são demasiado restritivas.

Neste caso também, é importante referir que estas observações não constituem uma regra geral, respeitando apenas às instâncias e condições consideradas nesta análise.

### **6.3 Discussão de Casos Aplicados**

Neste subcapítulo, serão analisados casos reais aplicáveis à empresa em questão, nomeadamente para instâncias com  $n = 10$ ,  $n = 12$  e  $n = 15$ . O principal objetivo consiste em avaliar a eficácia da formulação proposta na resolução de instâncias representativas do contexto operacional e atual da organização. Para tal, são consideradas instâncias com um número reduzido de clientes e de colaboradores, garantindo a representatividade da realidade da empresa. Os resultados obtidos serão comparados com as rotas construídas de forma manual pela empresa, permitindo avaliar a utilidade prática das soluções propostas, em termos de eficiência, otimização e, sobretudo, do impacto potencial que podem ter na melhoria do desempenho da organização.

No que diz respeito às rotas manuais, uma vez que estas não são planeadas com antecedência e vão sendo definidas ao longo do dia, a empresa não dispunha de exemplos anteriores que pudessem ser diretamente utilizados. Assim, optou-se por selecionar aleatoriamente os clientes a incluir em cada instância e, posteriormente, solicitar à empresa a elaboração de uma rota manual com base nesses mesmos clientes. Esta abordagem foi adotada por sugestão da própria empresa e permitiu obter um ponto de comparação para os testes realizados.

Contudo, importa referir que esta comparação não é totalmente equitativa, uma vez que, atualmente, a empresa não realiza planeamento prévio das rotas, o que leva, inevitavelmente, a perdas de produtividade no dia a dia. Assim, é expectável que, se fossem utilizadas rotas reais da empresa a diferença em relação aos resultados obtidos pela formulação proposta fosse ainda mais acentuada. Por outras palavras, os resultados aqui apresentados poderão até subestimar o real impacto positivo da solução otimizada no contexto operacional da empresa.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Posteriormente, serão considerados cenários em que o *gap* é elevado, com o objetivo de avaliar se as soluções admissíveis são viáveis e se estas se ajustam à realidade operacional da empresa.

Por fim, serão testadas diferentes configurações de janelas de tempo, tal como foi feito no subcapítulo 6.2.4, incidindo também em três perfis de janelas de tempo: sem janelas de tempo, com janelas de tempo regulares e com janelas de tempo apertadas. Com esta análise, pretende-se observar a influência prática da utilização das janelas de tempo, assim como a dificuldade de obtenção de soluções de qualidade nesse contexto.

Em todos os casos, serão apresentadas as janelas de tempo nos clientes que as possuam e, nos mesmos, será também indicado o instante de chegada, de forma a verificar o seu cumprimento.

### **6.3.1 Instância com $n = 10$ e $m = 2$**

A instância com 10 clientes ( $n = 10$ ) situa-se na região norte de Portugal, abrangendo os distritos do Porto e de Viseu. Desses, 9 clientes estão localizados no distrito do Porto: 8 no concelho de Marco de Canaveses e 1 no concelho de Penafiel. O restante cliente encontra-se em Cinfães, no distrito de Viseu. Inclui 7 clientes em meio urbano e 3 clientes fora desse meio urbano. Corresponde a um caso típico de serviços diários da empresa de condomínios em causa. Tendo em conta a especificidade dos serviços solicitados e as competências dos colaboradores, os clientes representados a laranja (clientes {20, 32, 80}) podem ser servidos apenas pelo colaborador A, os clientes a roxo (clientes {7, 25, 41, 45}) podem ser servidos apenas pelo colaborador B, podendo os restantes clientes ({8, 83, 90}), a azul, ser servidos por qualquer um dos colaboradores. As janelas de tempo são apertadas (duração máxima de uma hora e meia), com a particularidade de as janelas de tempo dos clientes 7 e 90 serem coincidentes [14:00 – 15:00], impossibilitando serem visitados na mesma rota. Para esta dimensão, a empresa recorre a 2 colaboradores ( $m = 2$ ) com horários de laboração de 8 e 6 horas para o colaborador A e B, respetivamente. As janelas de tempo vêm descritas pormenorizadamente no Apêndice 5.



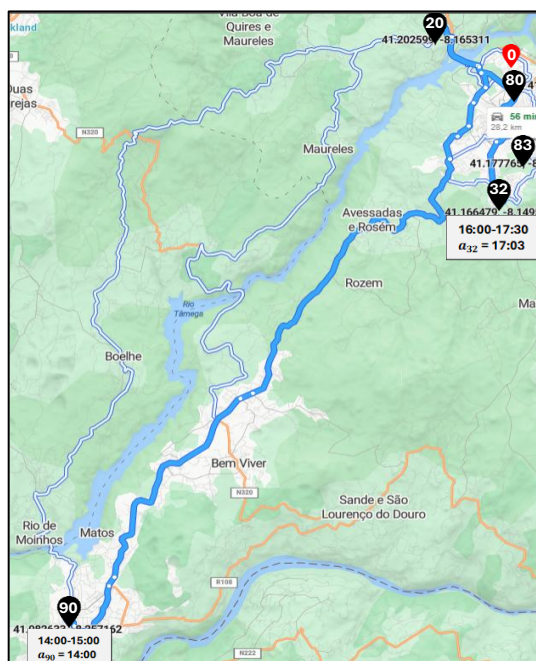
Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

Tabela 6.3.1.1 - Comparação entre as rotas manuais e as rotas obtidas pela formulação

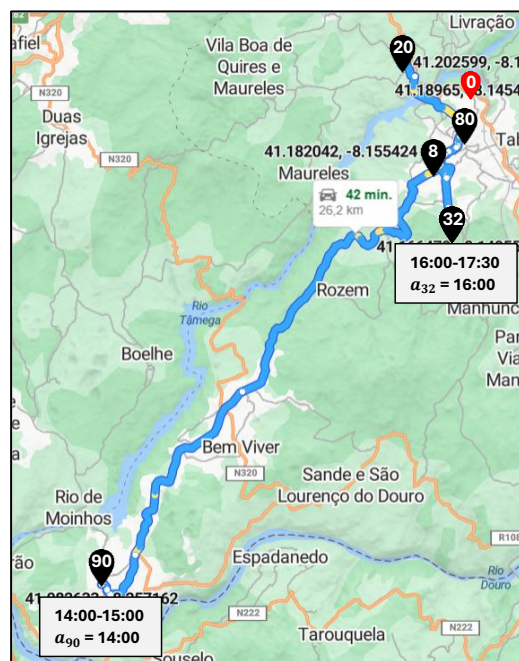
| Rotas      | A              | B                      |
|------------|----------------|------------------------|
| Manual     | 90 20 80 83 32 | 8 25 41 $\alpha$ 7 45  |
| Formulação | 90 8 32 80 20  | 25 83 $\alpha$ 7 41 45 |

Verifica-se, através da Tabela 6.3.1.1, que as rotas de ambos os colaboradores diferem ligeiramente.

A Figura 6.3.1.2 mostra uma representação visual da rota do colaborador A. Em (a) é apresentada a rota construída manualmente e em (b) é apresentada a rota obtida através da formulação.



(a)



(b)

Figura 6.3.1.2 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador A

Existem ligeiras diferenças entre as rotas. Na rota manual, o colaborador A visita o cliente 83 em vez do cliente 8. No entanto, em ambas as rotas, o cliente 90 é visitado pelo colaborador A, mesmo não sendo específico do mesmo. Esta situação já era expectável, uma vez que a janela de tempo do cliente 90 coincide com a do cliente 7, conforme referido anteriormente. Como o cliente 7 é exclusivo do colaborador B, então

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

consequentemente, o cliente 90 torna-se exclusivo do colaborador A, tendo em conta que ambos os clientes não poderão surgir na mesma rota.

Na Tabela 6.3.1.2 são apresentados os tempos e distâncias da rota do colaborador A, na versão manual e na versão da formulação.

*Tabela 6.3.1.2 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador A*

| Rota – Colaborador A | Distância (km) <sup>2</sup> | Tempo (min) <sup>3</sup> |
|----------------------|-----------------------------|--------------------------|
| Manual               | 28,18                       | 47,08                    |
| Formulação           | 26,09                       | 42,72                    |

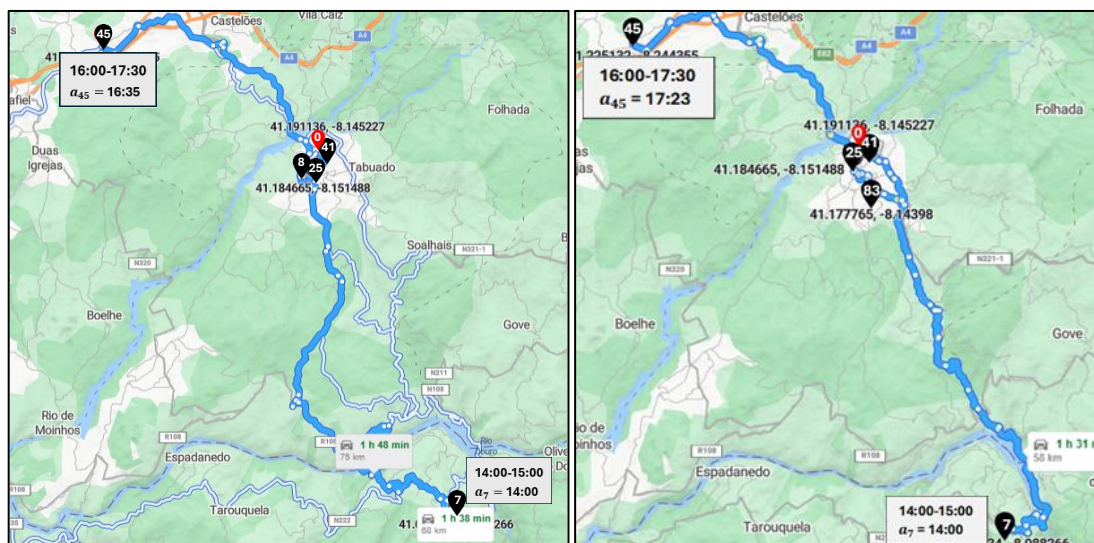
Tendo em conta o tempo de deslocação e o tempo de atendimento de cada cliente, bem como as janelas de tempo dos clientes obrigatórios do colaborador A, a rota corresponde apenas ao período da tarde.

A rota atribuída ao colaborador B também difere ligeiramente daquela que foi definida manualmente, sendo a representação visual de ambos os casos ilustrada na Figura 6.3.1.3.

<sup>2</sup> A distância exclui a penalização para almoço, ou seja, representa a distância real.

<sup>3</sup> Este tempo é apenas o tempo de deslocação, ou seja, não inclui o tempo do serviço, visto que esse se mantém tanto na rota manual como na otimizada.

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios



(a)

(b)

Figura 6.3.1.3 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador B

Neste caso, as rotas abrangem manhã e tarde, obrigando à inclusão do cliente fictício para almoço.

Na primeira rota (em (a)), definida manualmente, o colaborador deve visitar, pela manhã, os clientes 8, 25 e 4. Na rota otimizada, este deverá visitar apenas os clientes 25 e 83 durante a manhã, ficando os restantes para a parte da tarde.

A Tabela 6.3.1.3 apresenta os tempos e distâncias da rota do colaborador B, quer da rota manual quer da otimizada. Por fim, a Tabela 6.3.1.4 apresenta uma análise comparativa global das rotas, incluindo os tempos e distâncias das duas rotas (colaborador A e B), quer definidas manualmente, quer obtidas através da formulação.

Tabela 6.3.1.3 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador B

| Rota – Colaborador B | Distância (km) | Tempo (min) |
|----------------------|----------------|-------------|
| Manual               | 41,17          | 57,25       |
| Formulação           | 41,10          | 59,34       |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela 6.3.1.4 - Comparação entre a distância e o tempo obtidos manualmente e através da formulação para ambas as rotas*

| Rotas      | Distância (km) | Tempo (min) |
|------------|----------------|-------------|
| Manual     | 69,35          | 104,33      |
| Formulação | 67,19          | 102,06      |

Na totalidade das duas rotas de ambos os colaboradores, a diferença em distância total percorrida é de aproximadamente 2 quilómetros, correspondendo apenas a uma diferença temporal de 2 minutos. Esta diferença, ainda que pequena, insere-se sobretudo nas rotas do colaborador A.

### 6.3.2 Instância com $n = 12$ e $m = 2$

A instância com 12 clientes ( $n = 12$ ) situa-se também na região norte de Portugal, com clientes maioritariamente no distrito do Porto, todos no concelho de Marco de Canaveses e 1 no distrito de Aveiro, mais concretamente em Castelo de Paiva. Inclui 11 clientes em meio urbano e 1 cliente fora desse meio. Para esta dimensão, a empresa recorre a 2 colaboradores ( $m = 2$ ) com horários de laboração de oito horas cada um. Tendo em conta a especificidade dos serviços solicitados e das competências de cada colaborador, os clientes representados a laranja (clientes {12, 26, 65}) podem ser visitados apenas pelo colaborador A, os clientes a roxo (clientes {24, 39}) podem ser servidos apenas pelo colaborador B, podendo os restantes clientes ({9, 16, 35, 55, 69, 88, 96}), a azul, ser servidos por qualquer um dos colaboradores. Adicionalmente, o marcador vermelho mantém a mesma referência, ou seja, representa o escritório. As janelas de tempo são tanto regulares (por exemplo visitar um determinado cliente durante a manhã) como apertadas (por exemplo com duração de 30 minutos), ou seja, considera os dois casos. As janelas de tempo dos clientes 69 e 88 são coincidentes (16:00 – 16:30), impossibilitando serem visitados pelo mesmo colaborador. Tal como no caso anterior, as janelas de tempo estão pormenorizadas no Apêndice 5.

Para esta instância, e considerando os parâmetros referidos, a formulação F2 conseguiu encontrar a solução ótima em 1,59 segundos. Na Figura 6.3.2.1 são apresentados mapas



Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

Tabela 6.3.2.1 - Comparação entre as rotas manuais e as rotas obtidas pela formulação

| Rotas      | A                         | B                               |
|------------|---------------------------|---------------------------------|
| Manual     | 65 9 $\alpha$ 12 88 35 26 | 16 24 39 55 $\alpha$ 69 96      |
| Formulação | 12 69 26 65               | 9 55 24 $\alpha$ 16 39 88 96 35 |

Através da Tabela 6.3.2.1 verifica-se que as rotas apresentam uma diferença significativa, principalmente na rota do colaborador A que apenas tem pausa para almoço na rota manual.

A Figura 6.3.2.2 mostra uma representação visual da rota do colaborador A. Permanece a mesma lógica anterior, em (a) é apresentada a rota construída manualmente e em (b) a rota obtida através da formulação.

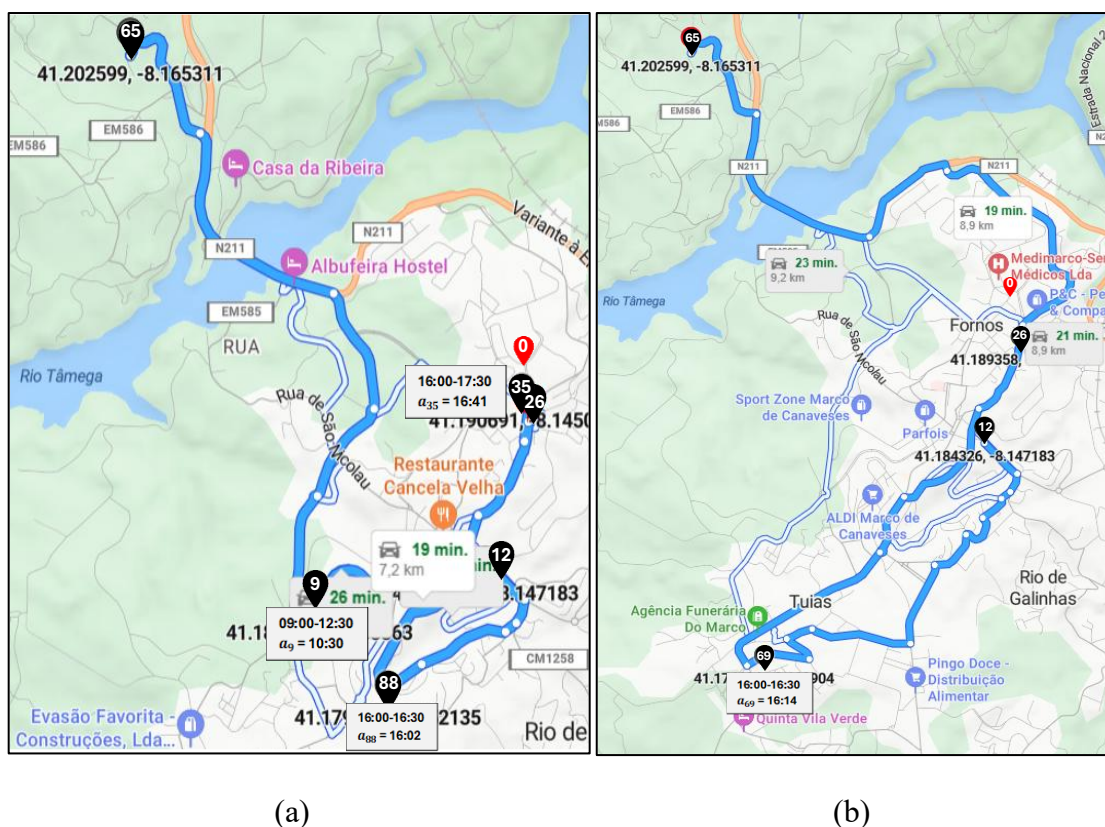


Figura 6.3.2.2 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador A

Através da Figura 6.3.2.2, na primeira rota (em (a)) é possível verificar que a rota manual do colaborador A, embora inclua mais clientes, apresenta uma distância menor em

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

comparação com a rota definida pela formulação (em (b)). Contudo, é importante considerar que a primeira rota (em (a)), definida manualmente abrange tanto a parte da manhã quanto a da tarde, enquanto a segunda rota (em (b)) obtida através da formulação é referente apenas à parte da tarde. Quanto aos clientes com janelas coincidentes ({69, 88}) verifica-se que na rota manual é visitado o cliente 88 e na rota obtida através da formulação é visitado o cliente 69.

Na Tabela 6.3.2.2 são apresentados os tempos e as distâncias da rota do colaborador A, na versão manual e na versão da formulação.

*Tabela 6.3.2.2 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador A*

| Rota – Colaborador A | Distância (km) | Tempo (min) |
|----------------------|----------------|-------------|
| Manual               | 6,24           | 13,52       |
| Formulação           | 8,05           | 17,66       |

Como referido anteriormente a rota manual inclui mais clientes do que a rota gerada pela formulação, neste sentido seria expectável que a rota da formulação apresentasse uma distância menor do que a rota manual. Assim, em princípio, ao minimizar a distância, a formulação deveria gerar uma rota igual ou até melhor que a rota definida manualmente, o que não se verifica neste caso. Como pode ser observado na Tabela 6.3.2.2, a distância da rota manual é inferior à da rota gerada pela formulação. Contudo, ainda é necessário analisar os valores relativos à rota do colaborador B, o que impede tirar conclusões definitivas baseadas apenas na rota do colaborador A.

A rota atribuída pela formulação ao colaborador B também difere ligeiramente daquela que foi definida manualmente, sendo a comparação visual entre ambos os casos apresentada na Figura 6.3.2.3.

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

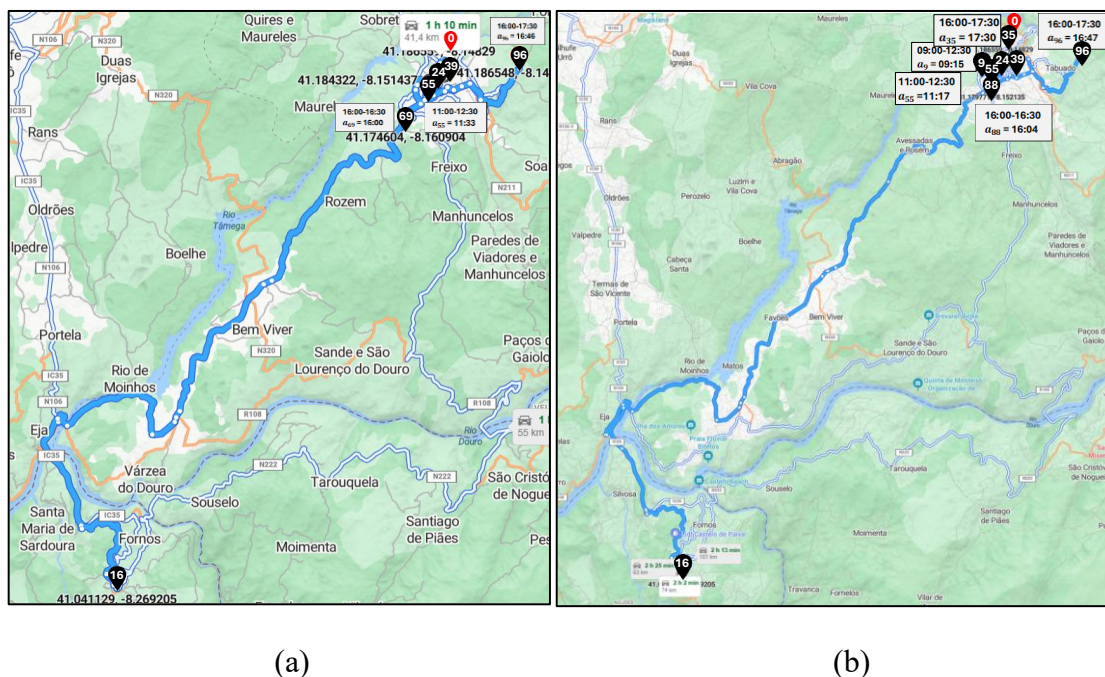


Figura 6.3.2.3 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador B

Neste caso, as rotas abrangem tanto a parte da manhã como a parte da tarde, obrigando à inclusão de pausa para almoço.

Na primeira rota, definida manualmente (em (a)), o colaborador deve visitar, durante a manhã, os clientes 16, 24, 39 e 55. Na rota otimizada (em (b)), este deverá visitar apenas os clientes 9, 55 e 24. Ao comparar ambos os casos presentes na Figura 6.3.2.3 e as rotas na Tabela 6.3.2.1, é possível observar que a rota otimizada inclui mais clientes do que a rota manual, o que, em princípio, indicaria uma distância maior do que a rota manual.

A Tabela 6.3.2.3 apresenta os tempos e distâncias da rota do colaborador B, quer da rota manual quer da rota otimizada.

Tabela 6.3.2.3 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador B

| Rota – Colaborador B | Distância (km) | Tempo (min) |
|----------------------|----------------|-------------|
| Manual               | 38,4           | 58,49       |
| Formulação           | 41,92          | 64,64       |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

Verifica-se, através da Tabela 6.3.2.3, que a distância obtida através da formulação é, de facto, superior à da rota manual. No entanto, é necessário analisar a rota de forma global. A Tabela 6.3.2.4 apresenta a análise global da rota, que considera os resultados totais de ambos os colaboradores.

*Tabela 6.3.2.4 - Comparação entre a distância e o tempo obtidos manualmente e através da formulação para ambas as rotas*

| Rotas      | Distância (km) | Tempo (min) |
|------------|----------------|-------------|
| Manual     | 44,64          | 72,01       |
| Formulação | 49,97          | 82,30       |

A Tabela revela que, no conjunto, a rota manual apresenta melhores resultados, com uma distância de aproximadamente 5,3 quilómetros inferior à da rota obtida pela formulação. Este resultado deve-se ao facto de a rota manual considerar pausa para almoço em ambos os colaboradores, enquanto a formulação apenas inclui o intervalo para almoço na rota do colaborador B. Considerando a função objetivo, que reflete as necessidades práticas da empresa, o almoço só deve ser considerado quando estritamente necessário. Assim, embora a formulação não minimize a distância de forma tão eficiente, esta respeita a preferência de dividir a jornada entre a parte da manhã ou da tarde sempre que possível, o que contribui para a diferença de distâncias observada. A diferença total entre as rotas é de cerca de 5,3 quilómetros e 10 minutos a favor da rota manual. No entanto, como mencionado, a função objetivo tem em conta a penalização associada à inclusão ou não da pausa para almoço, o que não ocorre na elaboração manual da rota.

Caso se retire a penalização associada ao almoço, ou seja, considerando o almoço de forma flexível, isto é, este pode ser incluído mesmo que não seja estritamente necessário, a formulação apresenta um valor de distância inferior, ou seja, melhor, em relação à rota manual, com uma diferença de 2 quilómetros. Porém, obriga o colaborador A a ter atividade de manhã e de tarde, que, do ponto de vista prático e funcional, prejudica a sua disponibilidade para outras atividades (externas às rotas) quer na empresa, quer fora da mesma. Note-se que neste setor de atividade, muitos destes colaboradores são

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

subcontratados, não estando exclusivamente ao serviço de uma empresa, fundamentando a penalização da pausa de almoço na função objetivo.

### **6.3.3 Instância com $n = 15$ e $m = 2$**

Quando se aumenta ligeiramente o número de clientes, a diferença entre a rota definida manualmente e a rota otimizada pode tornar-se mais acentuada, tal como acontece na instância que se passará a analisar.

A instância com 15 clientes ( $n = 15$ ) situa-se também na região norte de Portugal, abrangendo os distritos do Porto e de Aveiro. Apenas 1 dos clientes se encontra no distrito de Aveiro, mais especificamente em Castelo de Paiva (cliente 46), os restantes estão espalhados pelo concelho do Marco de Canaveses, à exceção do cliente 56 que se encontra no concelho de Penafiel. Inclui 11 clientes em meio urbano e os restantes 4 fora desse meio. Para esta dimensão, a empresa recorre a 2 colaboradores com horários de laboração de oito horas cada um. Tendo em conta a especificidade dos serviços solicitados e das competências de cada colaborador, os clientes representados a laranja (clientes {12, 17}) apenas podem ser visitados pelo colaborador A, os clientes a roxo (clientes {70, 88}) apenas podem ser visitados pelo colaborador B e os restantes clientes, representados a azul ({2, 9, 20, 40, 41, 42, 46, 49, 56, 58, 92}), podem ser visitados por qualquer um dos colaboradores. Adicionalmente, o marcador a vermelho representa o escritório. As janelas de tempo incluem tanto janelas de 30 minutos (apertadas) como de uma manhã (regulares), novamente com a particularidade de dois clientes partilharem a mesma janela de tempo, cliente 2 e o cliente 46 apresentam a mesma janela das 10:30 às 11:00 horas. À semelhança do que ocorreu nos casos anteriores, as janelas de tempo estão detalhadas no Apêndice 5.

Para esta instância a formulação F2 conseguiu encontrar a solução ótima em 1073,18 segundos. Na Figura 6.3.3.1 são apresentados mapas com a localização geográfica dos 15 clientes, sendo representado em (b) uma ampliação da zona de maior concentração de clientes, de forma a facilitar a visualização.

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

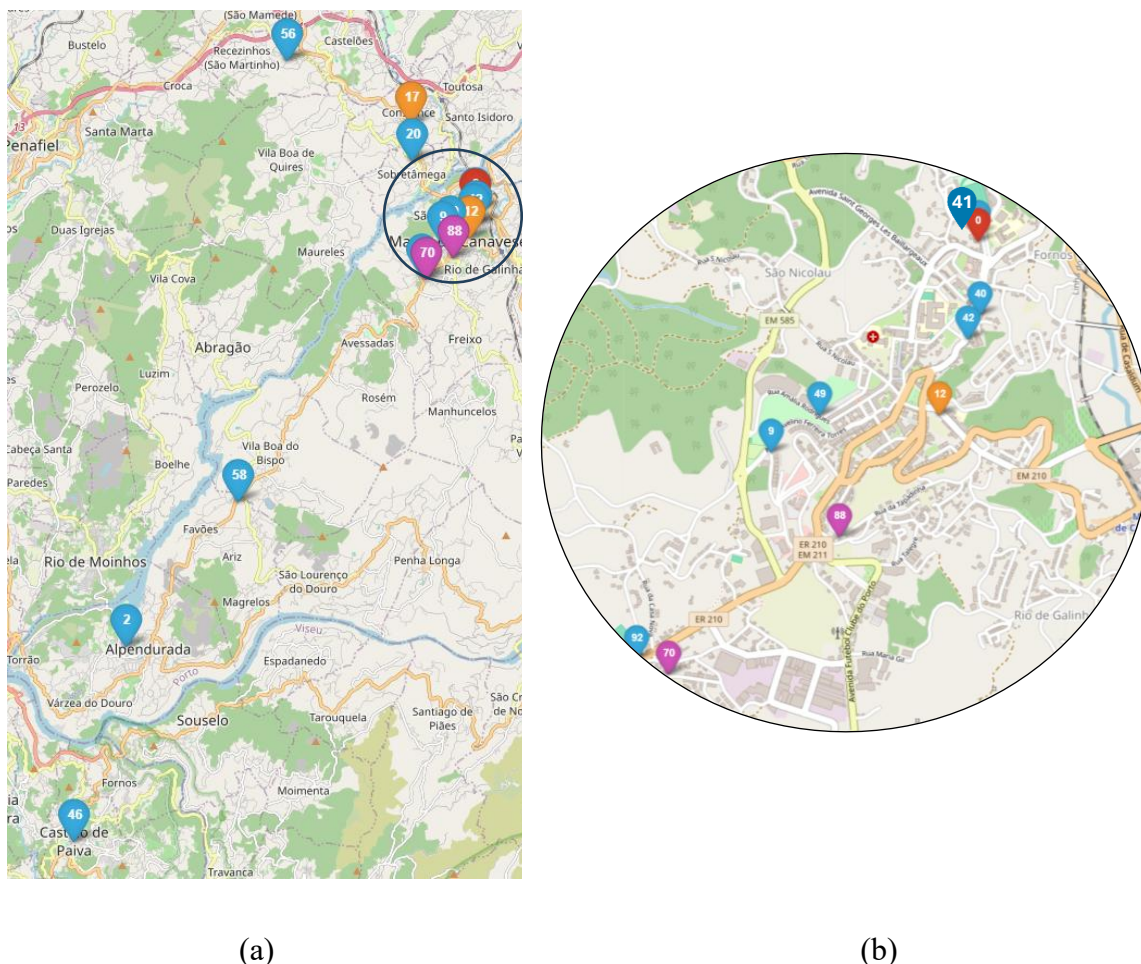


Figura 6.3.3.1 - Mapa dos 15 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b)

Tal como referido anteriormente, os clientes 2 e 46 apresentam janelas de tempo coincidentes, ou seja, apesar do marcador azul, estes têm de estar em rotas distintas.

A Tabela 6.3.3.1 apresenta as rotas definidas manualmente e as que foram obtidas através da formulação.

Tabela 6.3.3.1 - Comparação entre as rotas manuais e as rotas obtidas pela formulação

| Rotas      | A                                   | B                            |
|------------|-------------------------------------|------------------------------|
| Manual     | 12 2 56 $\alpha$ 17 20 41 40 42     | 58 46 88 $\alpha$ 49 9 92 70 |
| Formulação | 49 12 46 $\alpha$ 56 17 20 42 40 41 | 88 58 2 $\alpha$ 70 92 9     |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

Verifica-se, através da Tabela 6.3.3.1, que as rotas de ambos os colaboradores diferem significativamente e em ambos os casos as rotas abrangem tanto a parte da manhã como a da tarde.

A Figura 6.3.3.2 mostra uma representação visual da rota do colaborador A. Em (a) é apresentada a rota construída manualmente e em (b) a rota obtida através da formulação.

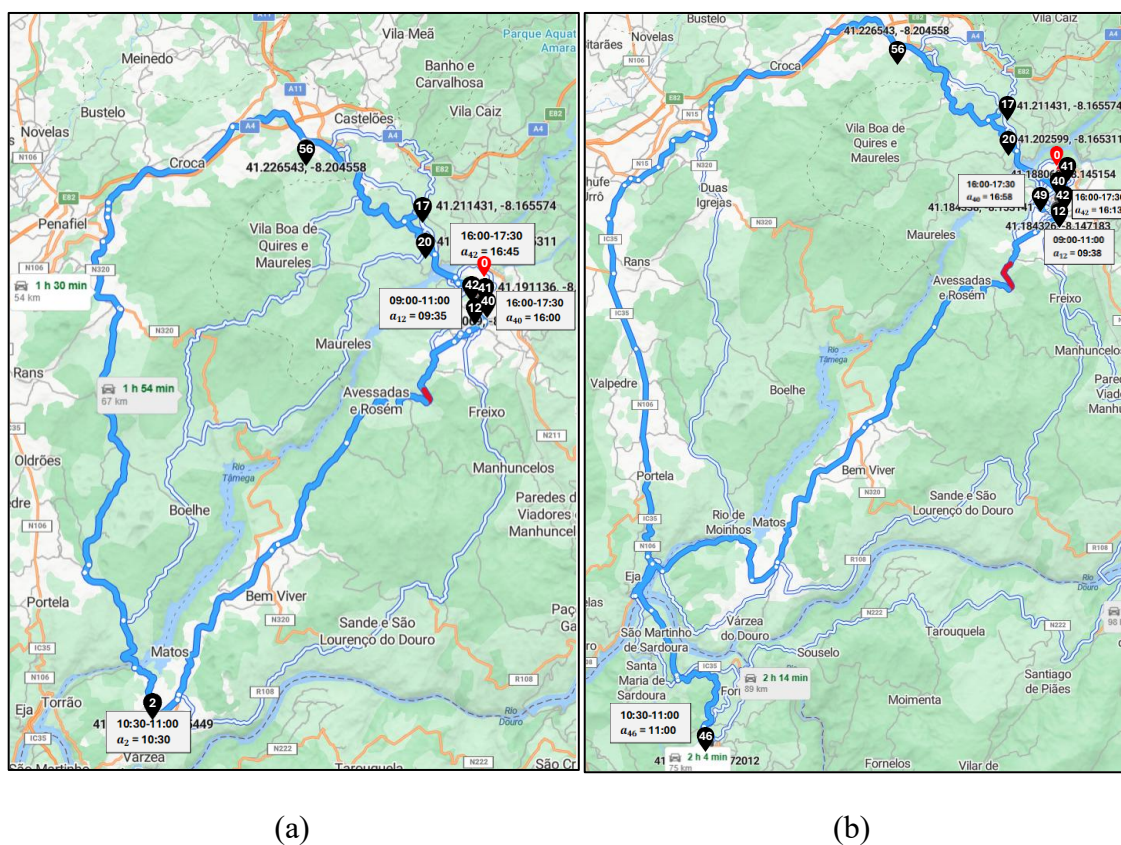


Figura 6.3.3.2 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador A

A grande diferença visual entre as rotas está na inclusão do cliente 2 na rota manual, enquanto na rota otimizada este cliente não está presente. No entanto, a rota otimizada inclui o cliente 46, o que torna a rota do colaborador A mais longa. É importante salientar que, apesar de as rotas parecerem fechadas, na realidade são rotas duplamente abertas, como já foi mencionado anteriormente (consultar Apêndice 6).

Na Tabela 6.3.3.2 são apresentados os tempos e distâncias da rota do colaborador A, na versão manual e na versão da formulação.

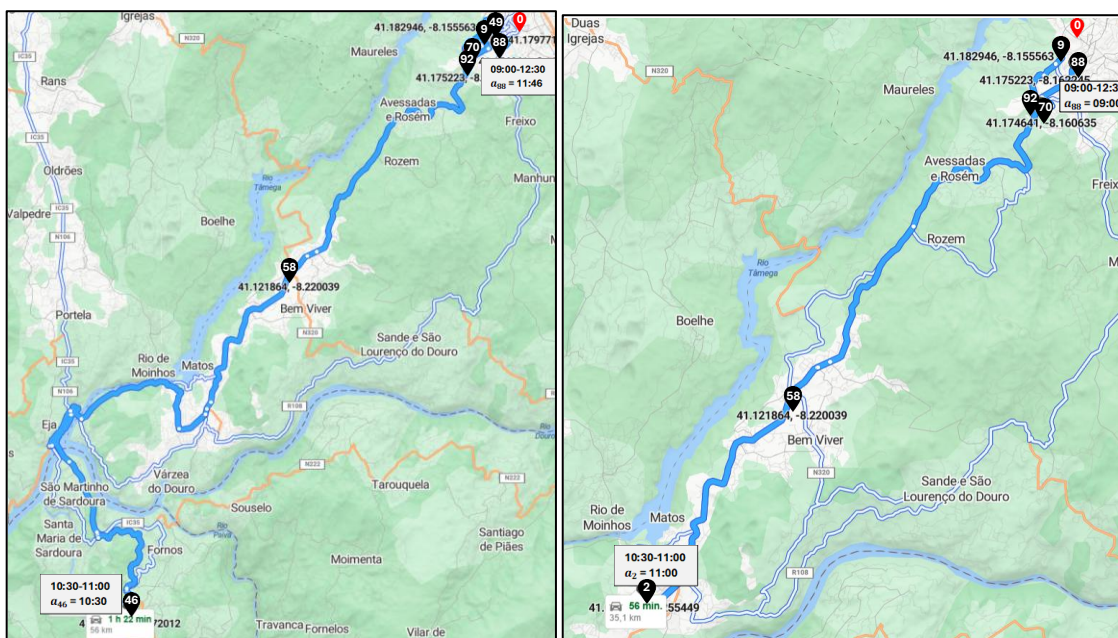
Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

Tabela 6.3.3.2 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador A

| Rota – Colaborador A | Distância (km) | Tempo (min) |
|----------------------|----------------|-------------|
| Manual               | 47,95          | 67,02       |
| Formulação           | 42,80          | 63,37       |

Existe uma diferença mais significativa em comparação com os casos anteriores. Considerando apenas as rotas do colaborador A, a diferença é de aproximadamente 5 quilómetros, reduzindo também o tempo da rota.

A rota atribuída ao colaborador B também difere da definida manualmente, sendo a comparação visual entre ambos os casos apresentada na Figura 6.3.3.3.



(a)

(b)

Figura 6.3.3.3 - Visualização da rota manual (a) e da rota obtida pela formulação (b) do colaborador B

Na primeira rota, definida manualmente (em (a)), o colaborador deve visitar os clientes 58, 46 e 88 na parte da manhã. Na rota otimizada (em (b)), este deverá visitar os clientes 88, 58 e 2 durante a manhã. Em ambos os casos, os restantes clientes são visitados na parte da tarde.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

A Tabela 6.3.3.3 apresenta os tempos e distâncias da rota do colaborador B, quer da rota manual quer da otimizada.

*Tabela 6.3.3.3 - Comparação entre a distância e o tempo obtidas manualmente e através da formulação do colaborador B*

| Rota – Colaborador B | Distância (km) | Tempo (min) |
|----------------------|----------------|-------------|
| Manual               | 52,90          | 73,07       |
| Formulação           | 18,81          | 27,95       |

Existe uma diferença considerável na distância total entre a rota obtida através da formulação e a rota manual, com uma variação de praticamente 34 quilómetros. Esta diferença deve-se, sobretudo, à inclusão do cliente 46 na rota manual, o que torna o percurso mais longo. O cliente 46 possui uma janela de tempo específica a meio da manhã (das 10:30 às 11:00 horas), não favorecendo que seja o primeiro a ser visitado. Assim, para garantir o cumprimento dessa janela, a sequência de visitas na rota manual acaba por implicar desvios que aumentam a distância total percorrida.

Além disso, como mencionado anteriormente, os clientes 2 e 46 apresentam janelas de tempo coincidentes, o que obriga a que sejam atendidos por colaboradores distintos. Na construção manual da rota, optou-se por incluir o cliente 46, o que acabou por não ser a melhor escolha. No entanto, essa ineficiência só se torna evidente quando se compara a solução manual com a gerada pela formulação.

Embora esta discrepância seja significativa, a análise deve ser realizada de forma global, ou seja, considerando o impacto conjunto das rotas de ambos os colaboradores. Para esse efeito, a Tabela 6.3.3.4 apresenta os resultados totais, considerando as rotas dos dois colaboradores.

*Tabela 6.3.3.4 - Comparação entre a distância e o tempo obtidos manualmente e através da formulação para ambas as rotas*

| Rotas      | Distância (km) | Tempo (min) |
|------------|----------------|-------------|
| Manual     | 100,85         | 140,09      |
| Formulação | 61,61          | 91,32       |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

Nota-se uma grande diferença entre a rota otimizada e a rota manual, a solução da formulação diminui a distância relativamente às rotas manuais em aproximadamente 39 quilómetros e em 49 minutos. Verifica-se então que a rota otimizada é uma mais-valia para a empresa, permitindo uma significativa economia tanto na distância quanto no tempo percorrido e despendido pelos colaboradores.

De uma forma geral, os três casos analisados mostram os benefícios da formulação para a empresa, tanto em termos de distância percorrida como de tempo despendido nas deslocações e a não inclusão do almoço. Estes ganhos resultam em melhorias significativas na operação diária e na produtividade global da empresa, evidenciando a eficiência da formulação em comparação com a abordagem manual.

Além disso, a formulação considera a alocação do almoço apenas quando é estritamente necessário, o que é particularmente relevante para empresas com colaboradores a tempo parcial ou subcontratados. Embora não haja uma minimização direta do tempo de trabalho, a gestão otimizada do intervalo para almoço assegura uma utilização mais eficiente do tempo, evitando a alocação desnecessária de tempo para esta pausa.

Importa também destacar que a definição manual das rotas, quando conseguida, requer mais tempo do que a elaboração através da formulação. Ao construir as rotas manualmente, o processo é mais demorado, o que implica maior esforço e tempo despendido. Com a formulação, esse processo é otimizado e mais eficiente, permitindo à empresa poupar tempo e recursos na criação das rotas, garantindo ao mesmo tempo uma gestão mais eficaz do tempo de trabalho dos colaboradores. A redução do tempo dedicado à elaboração das rotas reflete-se diretamente na organização da empresa, nomeadamente no tempo gasto nesse processo e na diminuição da probabilidade de erro associado à construção manual.

Portanto, a formulação não só contribui para a eficiência operacional, como também oferece uma solução estratégica que se alinha e adapta às necessidades específicas das organizações.

### 6.3.4 Análise de casos com *gap* muito elevado

Como referido anteriormente, esta secção tem como objetivo avaliar a aplicabilidade prática das soluções obtidas, mesmo nos casos em que o valor do *gap* é significativo. Em nenhum dos cenários é possível garantir que a solução encontrada seja a ótima, uma vez que, no limite de tempo, todos os casos analisados apresentaram um *gap* não nulo. No entanto, o inverso também não pode ser afirmado com certezas, ou seja, apesar do *gap* refletir a distância relativa entre um limite inferior e um limite superior ao valor ótimo do problema, nada impede que o limite superior corresponda ao valor ótimo do problema.

Com base nos resultados da formulação F2 com janelas de tempo, procede-se, de seguida, à análise dos dois *gaps* mais elevados (entre os testes realizados) com o intuito de avaliar a qualidade das soluções do ponto de vista da aplicabilidade prática.

A Tabela 6.3.4.1 apresenta as duas instâncias com os *gaps* mais elevados ( $n = 20$  e  $n = 96$ ), indicando, para cada uma, o número de clientes e de colaboradores, o valor da relaxação linear, o tempo de execução (previamente fixado) e o *gap* associado.

Tabela 6.3.4.1 - Dados das instâncias com os maiores *gaps* (20 e 96 clientes)

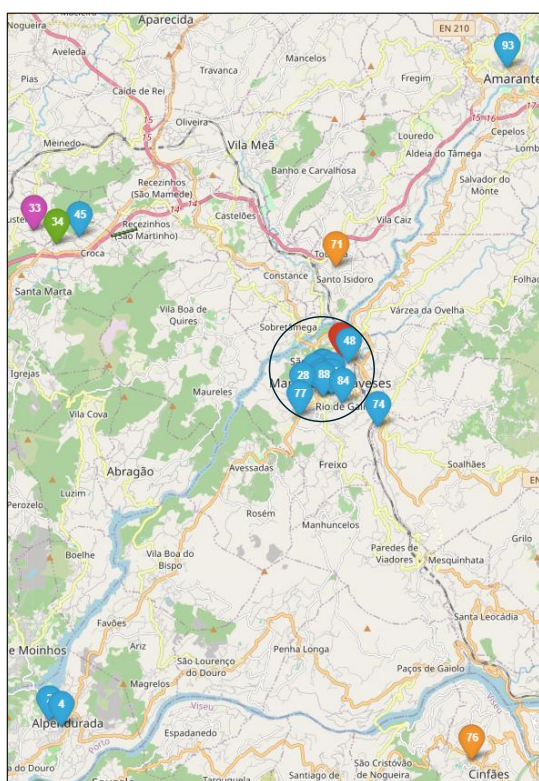
| Instância | n  | M  | F2 <sub>L</sub> | F2     |             |
|-----------|----|----|-----------------|--------|-------------|
|           |    |    | $z_L^*$         | GAP    | Tempo (seg) |
| r_20_3    | 20 | 3  | 56,68457        | 48,60% | 3600        |
| r_96_24   | 96 | 24 | 192,7426        | 51,65% | 3600        |

Analisando o primeiro caso, ou seja, considerando 20 clientes e 3 colaboradores, apresenta-se, de seguida, o mapa com as localizações geográficas dos clientes. Estes 20 clientes estão situados em dois distritos distintos, Porto e Viseu. Dos 20 clientes apenas 1 se encontra no distrito de Viseu, especificamente em Cinfães, os restantes 19 estão localizados no Porto, em 3 concelhos distintos, 15 no concelho de Marco de Canaveses, 3 em Penafiel e 1 em Amarante. Neste caso, mantém-se a mesma coerência das cores, os clientes representados a laranja (clientes {71, 76}) podem ser servidos pelo colaborador A, os clientes representados a roxo (clientes {33}) podem ser servidos pelo colaborador B, os clientes representados a verde (clientes {34}) podem ser servidos pelo colaborador

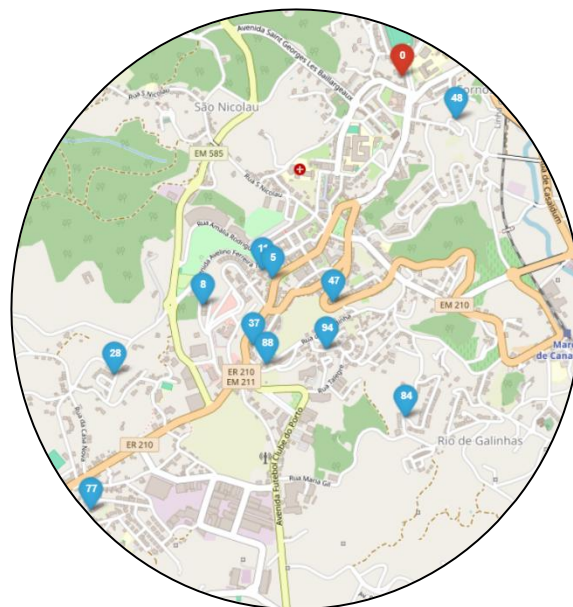
*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

C, e por fim, a azul, aqueles que podem ser servidos por qualquer um dos colaboradores. São consideradas tanto janelas regulares como apertadas, além disso existem clientes com janelas de tempo coincidentes, especificamente o cliente 2 e o cliente 37 com uma janela das 10:30 às 11:00 horas. Para esta dimensão são considerados 3 colaboradores com horários de laboração de 4 horas para o colaborador A e 8 horas quer para o colaborador B como para o colaborador C.

Na Figura 6.3.4.1 são apresentados mapas com a localização dos 20 clientes, sendo representado em (b) uma ampliação da zona de maior concentração de clientes.



(a)



(b)

Figura 6.3.4.1 - Mapa dos 20 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b)

A Tabela 6.3.4.2 apresenta as rotas obtidas através da formulação para cada um dos colaboradores.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela 6.3.4.2 - Rotas obtidas pela formulação para 20 clientes*

| Colaboradores | Formulação                     |
|---------------|--------------------------------|
| A             | 76 47 71 93                    |
| B             | 74 84 2 33 $\alpha$ 77 28 8 11 |
| C             | 48 5 37 88 94 $\alpha$ 45 34 4 |

Analisando a Figura 6.3.4.1 juntamente com a rota presente na Tabela 6.3.4.2, a rota do colaborador A é bastante lógica. Nenhum dos clientes associados a esta rota possui janelas de tempo, o que significa que podem ser atendidos a qualquer hora, desde que dentro do horário de funcionamento da empresa. Tendo isso em consideração, a rota parece estar bem estruturada, além disso o colaborador A realiza as visitas todas na parte da tarde, cumprindo com o requisito de colocar a pausa para almoço apenas quando é estritamente necessário.

No entanto, a duração total da rota do colaborador A é cerca de 216 minutos, e considerando que a parte da tarde tem 270 minutos disponíveis, surge a possibilidade de incluir outro cliente na rota. Contudo, não é possível afirmar que essa inclusão resultaria numa diminuição da distância total percorrida das rotas dos 3 colaboradores. De qualquer forma, a rota do colaborador A, apesar dessa incerteza, mantém-se bastante lógica.

A rota do colaborador B também parece estar bem planeada. Na parte da manhã, o colaborador visita dois clientes com janelas de tempo, os clientes 74 e 2. Sem considerar as janelas de tempo, a sequência das visitas poderia parecer atípica, principalmente ao passar do cliente 84 para o cliente 2. No entanto, sabendo que o cliente 2 possui uma janela de tempo a meio da manhã (entre as 10:30 e as 11:00 horas), a sequência torna-se compreensível.

Na parte da tarde, todos os clientes do colaborador B podem ser atendidos sem restrições temporais, o que torna a rota bastante lógica e fluida. Assim, é possível concluir que a rota do colaborador B também é adequada, tanto na parte da manhã como na parte da tarde.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

No caso da rota do colaborador C, na parte da manhã, este tem três clientes com janelas de tempo. Mesmo desconsiderando essas janelas, a rota é bastante lógica, ou seja, a sequência das visitas parece bem organizada e eficiente, independentemente das janelas de tempo.

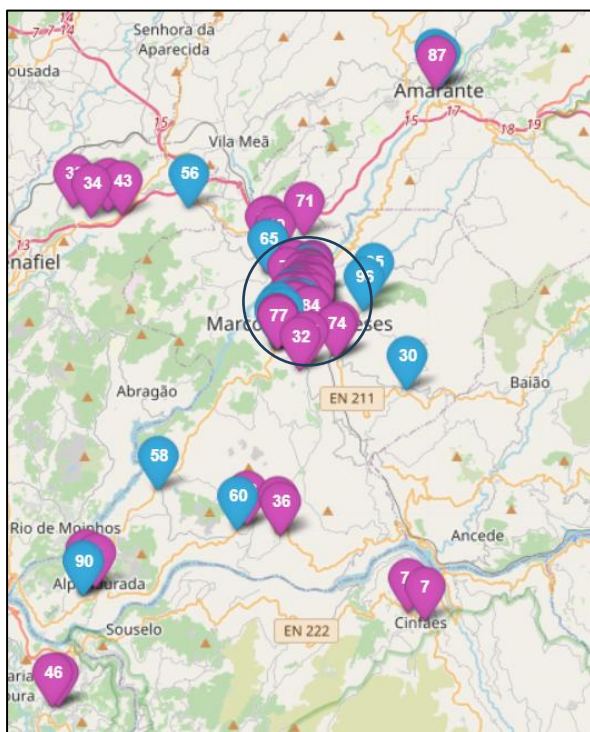
Na parte da tarde, a situação torna-se um pouco mais complexa. O colaborador C tem um cliente (cliente 34), cuja visita é da sua exclusividade e que possui janela de tempo. Além disso, tem também na sua rota outro cliente (cliente 4), que, embora possa ser visitado por todos, também possui janela de tempo. No entanto, a estrutura geral da rota continua a ser adequada, tendo em conta as limitações temporais.

Apesar do *gap* ser elevado, as rotas dos colaboradores A, B e C são bastante lógicas e bem organizadas, o que indica que o planeamento das visitas a cada cliente foi feito de forma eficiente. As janelas de tempo foram devidamente tidas em consideração nas análises e a ordem das visitas parece ser adequada e ajustada à realidade prática. Assim, as rotas permitem um bom equilíbrio entre a eficiência do percurso e as limitações temporais, bem como a inclusão ou não do almoço, dependendo das necessidades e limites de cada colaborador.

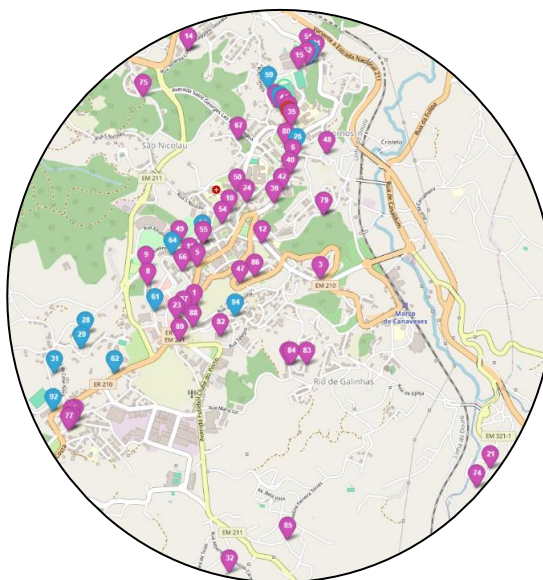
Para a base de dados completa ( $n = 96$ ) o *gap* é ainda mais elevado. Neste caso os 96 clientes estão dispersos por 3 distritos: Porto, Aveiro e Viseu. Dos 96 clientes, 84 encontram-se espalhados pelo concelho de Marco de Canaveses; 3 no concelho de Amarante; e 5 no concelho de Penafiel, totalizando 92 clientes no distrito do Porto. Os restantes 4 clientes estão divididos pelos outros distritos: 2 em Aveiro, mais concretamente em Castelo de Paiva e os outros 2 em Cinfães, no distrito de Viseu. As janelas de tempo são regulares e apertadas e apenas 27 clientes possuem tais janelas. Para esta dimensão são considerados 24 colaboradores com 8 horas diárias disponíveis para cada um. No entanto, todos os colaboradores apresentam no mínimo um cliente específico. Neste caso, uma vez que são demasiados colaboradores e de forma a não tornar a visualização confusa, optou-se por manter a cor azul para os clientes que podem ser servidos por qualquer um dos colaboradores e a cor roxa para os que têm colaboradores específicos, neste caso, sem especificar a que colaborador corresponde.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

Na Figura 6.3.4.2 são apresentados mapas com a localização geográfica dos 96 clientes, sendo representado em (b) uma ampliação da zona de maior concentração de clientes, de modo a tentar facilitar a visualização.



(a)



(b)

*Figura 6.3.4.2 - Mapa dos 96 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b)*

A Tabela 6.3.4.3 apresenta as rotas obtidas através da formulação para cada um dos colaboradores.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela 6.3.4.3 - Rotas obtidas pela formulação para 96 clientes*

| Rotas | Formulação                       | Período do dia |
|-------|----------------------------------|----------------|
| A     | 64 66 1 32                       | Tarde          |
| B     | 33 67 31 2                       | Tarde          |
| C     | 3 68 56 34                       | Tarde          |
| D     | 35 62 69 4 91 90                 | Tarde          |
| E     | 5 92 70 36                       | Tarde          |
| F     | 37 6 $\alpha$ 71                 | Manhã e Tarde  |
| G     | 72 38 7                          | Tarde          |
| H     | 8 39 73 60                       | Manhã          |
| I     | 9 40 74 $\alpha$ 58              | Manhã e Tarde  |
| J     | 41 10 75 $\alpha$ 30             | Manhã e Tarde  |
| K     | 11 42 $\alpha$ 76                | Manhã e Tarde  |
| L     | 77 12 $\alpha$ 43                | Manhã e Tarde  |
| M     | 44 13 $\alpha$ 78                | Manhã e Tarde  |
| N     | 14 79 $\alpha$ 45                | Manhã e Tarde  |
| O     | 15 59 80 $\alpha$ 46             | Manhã e Tarde  |
| P     | 16 47 26 57 81                   | Tarde          |
| Q     | 82 94 48 17                      | Tarde          |
| R     | 18 25 49 83                      | Tarde          |
| S     | 19 50 84                         | Tarde          |
| T     | 65 20 51 85                      | Tarde          |
| U     | 52 63 86 21                      | Tarde          |
| V     | 27 93 87 $\alpha$ 53 22          | Manhã e Tarde  |
| W     | 54 23 88                         | Manhã          |
| X     | 95 96 55 24 $\alpha$ 61 89 29 28 | Manhã e Tarde  |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

A maioria das rotas é realizada integralmente no período da manhã ou da tarde, justamente para respeitar a preferência de acomodar as rotas nesses dois blocos horários. Como mencionado anteriormente, cada colaborador apresenta no mínimo um cliente específico, ou seja, um cliente que terá obrigatoriamente de visitar, sendo assim, mesmo que a rota seja pequena existirá sempre uma rota associada a cada colaborador. A maior parte destas rotas é composta apenas por clientes específicos de cada colaborador. Quando é incluído um cliente que não é obrigatório, este é escolhido por estar geograficamente próximo dos restantes, ou seja, a sequência de visitas é lógica.

Existem, no entanto, algumas rotas que ocupam tanto a manhã como a tarde, implicando, assim, uma pausa para almoço. Nestes casos, é possível compreender o motivo dessa necessidade.

Por exemplo, a rota do colaborador F inclui apenas três clientes, todos obrigatórios. À primeira vista, poderia parecer viável realizar essa rota apenas de manhã ou apenas de tarde. Contudo, o cliente 6 apresenta uma janela de tempo das 9:00h às 12:30h, e o serviço prestado demora 120 minutos. Acrescentando esse tempo ao das deslocações (total de aproximadamente 215 minutos), o tempo disponível durante a manhã é ultrapassado (210 minutos). Desta forma, a inclusão da pausa para almoço torna-se inevitável para garantir o atendimento a todos os clientes.

As rotas dos colaboradores I, J, K, L, M, N e O também exigem, obrigatoriamente, uma pausa para almoço, uma vez que incluem janelas de tempo na parte da manhã, mas o tempo necessário para atender todos os clientes obrigatórios, somado ao tempo de deslocação entre eles, torna impossível completar a rota apenas durante a manhã. Assim, a pausa para almoço é imprescindível para cumprir todas as restrições temporais.

Já a rota do colaborador V poderia, eventualmente, ser realizada integralmente durante a manhã. No entanto, faz sentido incluir a pausa para almoço devido à visita ao cliente obrigatório 87, que se encontra, no geral, distante dos restantes. Ao visitar este cliente durante a manhã, o colaborador pode, posteriormente, atender dois outros clientes localizados próximos do 87 e próximos entre si. Esta abordagem otimiza a rota, evitando

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado  
a empresa de condomínios*

---

que outro colaborador tenha de realizar esse desvio, o que provavelmente resultaria num aumento da distância total percorrida.

Por fim, a rota do colaborador X requer obrigatoriamente a inclusão do almoço, dado que existem duas janelas de tempo distintas em clientes obrigatórios, uma durante a manhã e outra durante a tarde. Esta situação exige que o colaborador inclua uma pausa para almoço para que seja possível cumprir ambas as janelas de tempo e realizar todos os serviços dentro do horário estipulado.

Apesar do *gap* ser elevado, todas as rotas analisadas fazem sentido do ponto de vista organizacional e de eficiência. A consideração das janelas de tempo, a distribuição lógica dos clientes e a gestão adequada do tempo disponível garantem que os colaboradores possam cumprir as suas tarefas corretamente. A inclusão do almoço é necessária em vários casos, especialmente quando existem clientes com janelas de tempo e/ou serviços que exigem mais tempo. Todos estes fatores tornam as rotas equilibradas e viáveis, contribuindo para um planeamento eficaz que, mesmo com um *gap* elevado, respeita as necessidades dos clientes, bem como os limites de tempo tanto dos colaboradores quanto da empresa.

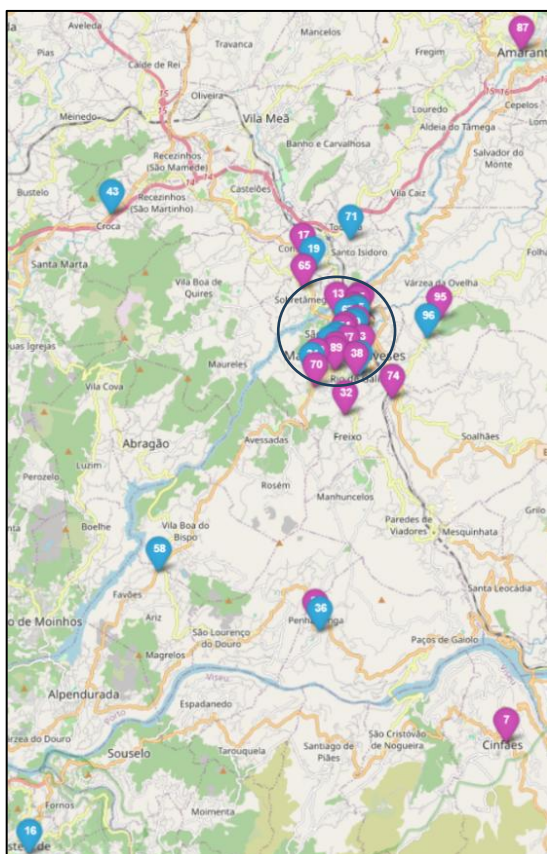
Em resumo, apesar de ambos os casos apresentarem *gaps* elevados, as rotas analisadas demonstram uma elevada organização e sequência lógica, estando bem estruturadas. Isso sugere que, embora as soluções possam não ser as ótimas em termos da função objetivo em causa, as rotas, tal como estão, são válidas e fazem sentido. Portanto, as soluções atuais são eficazes, mesmo com a incerteza sobre se são, de facto, as soluções ótimas.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

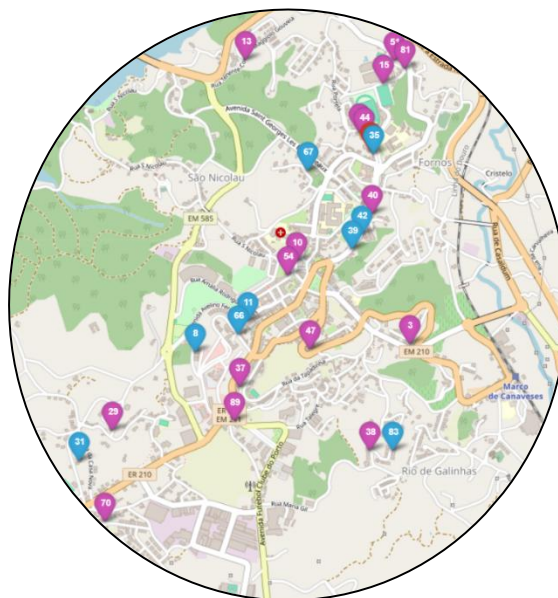
### 6.3.5 Discussão das janelas de tempo em caso prático

Esta secção procura analisar o impacto da variação das janelas de tempo na qualidade das soluções obtidas. Para tal, é utilizada uma mesma instância base (com  $n = 40$  clientes), variando apenas os intervalos de tempo atribuídos a cada cliente. São considerados três cenários distintos: sem janelas temporais, com janelas de tempo regulares (intervalos amplos, com duração mínima de três horas) e com janelas de tempo apertadas (intervalos curtos e rígidos, com duração máxima de uma hora e meia), conforme detalhado no subcapítulo 6.2.4.

Na Figura 6.3.5.1, é possível observar a disposição geográfica dos clientes correspondentes à instância em estudo, sendo representado em (b) uma ampliação da zona de maior concentração de clientes.



(a)



(b)

Figura 6.3.5.1 - Mapa dos 40 clientes (a) com ampliação da zona de maior concentração (b)

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela 6.3.5.1 - Rotas obtidas pela formulação para 40 clientes para os diferentes cenários de janelas de tempo*

| Rotas | Sem janelas de tempo             | Com janelas de tempo regulares         | Com janelas de tempo apertadas |
|-------|----------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------|
| A     | 83 38 3 39 66 37                 | 3 $\alpha$ 11 37 83 38                 | 3 16 $\alpha$ 38 83 37 11      |
| B     | 16 7 $\alpha$ 58 31 47 54 67 81  | 7 $\alpha$ 81 35 42 39 54 47           | 7 $\alpha$ 81 39 47 54 67 43   |
| C     | 10 89 40 87                      | 10 89 40 87                            | 96 35 10 $\alpha$ 87 40 89 8   |
| D     | 13 63 42 70                      | 70 31 13 63                            | 70 66 63 13                    |
| E     | 32 8 19 71 17 43                 | 17 8 32                                | 32 36 17                       |
| F     | 29 11 22 36                      | 22 36 58 16 $\alpha$ 43 19 71 67 66 29 | 22 $\alpha$ 42 71 19 31 29     |
| G     | 51 15 $\alpha$ 65 44 35 74 96 95 | 95 96 74 $\alpha$ 65 44 15 51          | 58 74 95 $\alpha$ 65 44 15 51  |

Através da Tabela 6.3.5.1 é possível observar que no cenário sem janelas de tempo, existe uma maior flexibilidade na gestão das rotas, o que se reflete numa menor quantidade de colaboradores com rotas que ocupam o dia inteiro. Esta diferença, deve-se, muito provavelmente, ao facto de, nos cenários com janelas de tempo, existirem clientes cuja visita seguida se torna inviável, seja por janelas coincidentes entre clientes distintos, seja por limitações impostas por janelas mais apertadas, onde, mesmo que não coincidam diretamente, o tempo de deslocação entre clientes inviabiliza a visita a ambos.

No cenário sem janelas de tempo, é possível gerir melhor a distribuição dos serviços ao longo do dia, evitando, assim, a necessidade de incluir pausas para almoço. Já nos cenários com janelas de tempo, a obrigatoriedade do cumprimento rigoroso dos horários leva a uma maior rigidez no planeamento, obrigando à inclusão de mais pausas para almoço.

Adicionalmente, é expectável que, quanto mais apertadas forem as janelas de tempo, maior seja a distância total percorrida, uma vez que a solução é forçada a introduzir desvios na sequência lógica das visitas, de forma a cumprir os horários definidos.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

Apresentam-se de seguida os valores da função objetivo correspondentes a três casos:

- Soluções com a penalização associada à inclusão da pausa para almoço (caso 1);
- Mesmas soluções anteriores, mas subtraindo o valor da penalização (caso 2);
- Resultados obtidos ao retirar a penalização da função objetivo, ou seja, desconsiderando-a por completo (caso 3).

*Tabela 6.3.5.2 - Comparação entre os três casos referentes à penalização do almoço*

| Penalização do almoço                       | Sem janelas de tempo | Com janelas de tempo regulares | Com janelas de tempo apertadas |
|---------------------------------------------|----------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Caso 1 (Com penalização)                    | 211,54               | 296,46                         | 403,94                         |
| Caso 2 (Sem penalização)                    | 108,76               | 90,80                          | 146,99                         |
| Caso 3 (Sem penalização na função objetivo) | 31,37                | 56,85                          | 94,96                          |

Observando a Tabela 6.3.5.2 verifica-se que quando existe penalização associada à pausa para o almoço (caso 1), a distância total percorrida aumenta progressivamente com o estreitamento das janelas de tempo, o que era expectável, uma vez que as rotas incluem mais pausas para almoço à medida que as restrições temporais se tornam mais exigentes.

Contudo, ao considerar apenas a distância real, ou seja, sem a penalização da pausa para o almoço (caso 2), este padrão deixa de se verificar. Neste caso, a menor distância é observada no cenário com janelas de tempo regulares, e não no cenário sem janelas de tempo. A explicação para este comportamento reside no facto de que, no cenário sem janelas de tempo, onde não existem restrições temporais, a inclusão do cliente fictício é evitada ao máximo, mesmo que isso resultasse numa solução mais eficiente em termos de distância. Em contraste, no cenário com janelas de tempo regulares, as pausas para almoço são mais frequentes, uma vez que as janelas de tempo muitas vezes obrigam à inclusão do cliente fictício. Assim, a diferença nos resultados entre os cenários deve-se ao facto de que, sem janelas de tempo, o cliente fictício só é incluído em situações de extrema necessidade, enquanto nas janelas de tempo regulares, apesar de também só ser

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

incluído quando é necessário, acaba por ser incluído mais vezes, o que leva a uma melhoria na distância total percorrida.

Por fim, no caso sem penalização na função objetivo (caso 3), observa-se o que era expectável, isto é, à medida que as janelas de tempo se tornam mais restritivas, a distância aumenta progressivamente, confirmando que as janelas de tempo acabam por prejudicar os resultados.

Através das Figuras 6.3.5.2, 6.3.5.3 e 6.3.5.4, é possível observar a influência das diferentes configurações das janelas de tempo nas rotas atribuídas ao colaborador A.

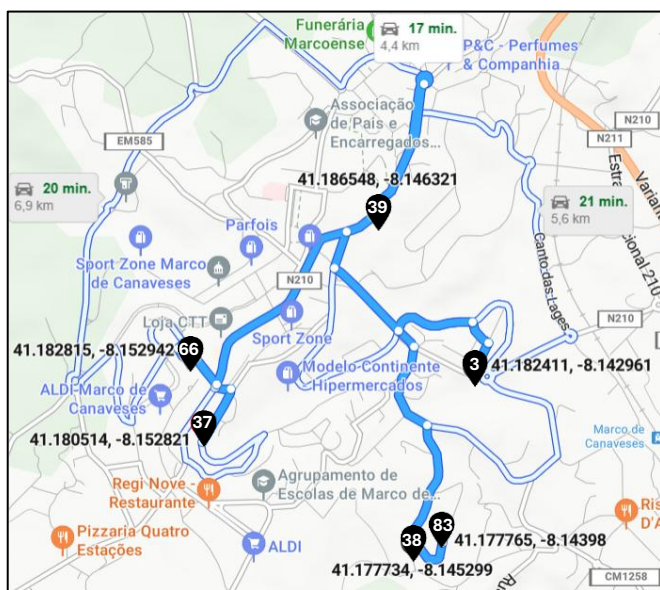


Figura 6.3.5.2 - Rota do colaborador A sem janelas de tempo

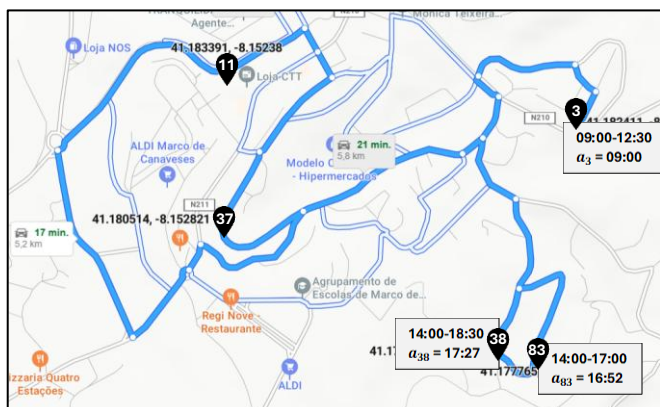


Figura 6.3.5.3 - Rota do colaborador A com janelas de tempo regulares

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

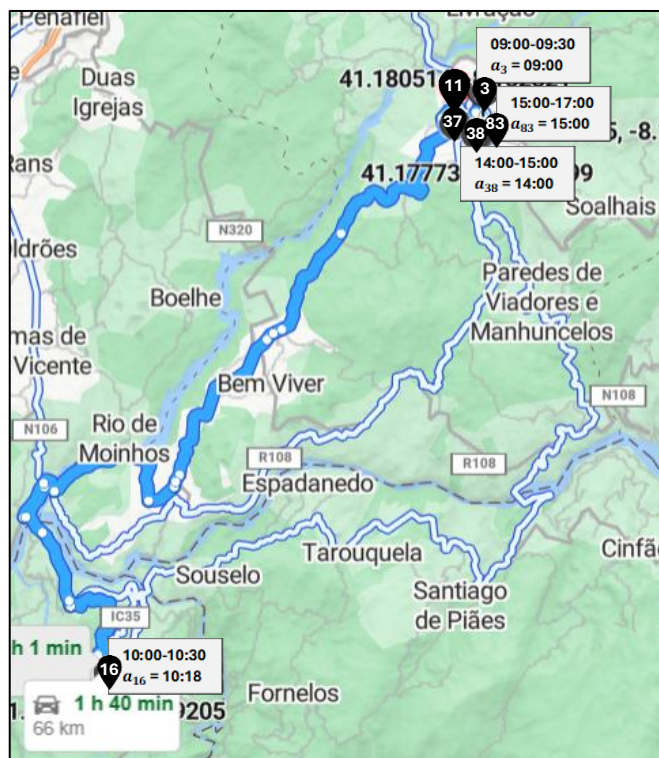


Figura 6.3.5.4 - Rota do colaborador A com janelas de tempo apertadas

Na Figura 6.3.5.2, a ausência de restrições temporais permite que a rota seja realizada integralmente durante o período da tarde, sendo possível visitar seis clientes. No entanto, observa-se que todos os clientes se encontram geograficamente próximos, o que facilita a realização da rota no período da tarde.

Na Figura 6.3.5.3, observa-se a necessidade de incluir uma pausa para almoço, devido à existência de duas janelas de tempo associadas a clientes obrigatórios, uma na parte da manhã (cliente 3) e outra na parte da tarde (cliente 38).

Por fim, a Figura 6.3.5.4 apresenta uma rota significativamente distinta das anteriores. Tal diferença deve-se, provavelmente, à existência de janelas de tempo muito próximas e restritivas, que inviabilizam uma organização dos clientes semelhante à dos cenários anteriores. Tal como no caso anterior, a rota é condicionada por duas janelas de tempo distintas associadas a clientes obrigatórios.

As rotas dos restantes colaboradores podem ser consultadas no Apêndice 7. De forma geral, verifica-se que, para cada colaborador, as rotas geradas com os diferentes cenários

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado  
a empresa de condomínios*

---

de janelas de tempo são distintas entre si. Algumas apresentam semelhanças pontuais, o que se explica sobretudo pela existência de clientes obrigatórios. Assim, é natural que determinadas rotas coincidam parcialmente, uma vez que mantêm a visita obrigatória aos mesmos clientes, independentemente do cenário considerado.

## 7 CONCLUSÃO

Neste projeto foi proposta uma formulação para resolver um problema prático enfrentado por uma empresa de gestão de condomínios, relacionado com a construção eficiente das rotas dos colaboradores que realizam as visitas técnicas aos diversos clientes, quer sejam colaboradores internos ou externos. A proposta teve como principais objetivos considerar limitações contratuais dos colaboradores (como o tempo diário disponível), tempo laboral da empresa, a minimização da distância total percorrida, e evitar, sempre que possível rotas diárias, que se estendam da manhã para a tarde.

A situação atual da empresa é construir as rotas à medida que os trabalhos surgem, ou seja, os trabalhos são distribuídos sem qualquer sequência e frequentemente, nestes casos, perde-se a eficiência por falta de agrupamento geográfico. Neste sentido, a formulação desenvolvida demonstrou ser eficaz ao permitir a criação de rotas mais coesas, com melhor aproveitamento do tempo disponível e redução de deslocações desnecessárias.

Do ponto de vista crítico, os objetivos definidos inicialmente foram cumpridos. O modelo mostrou-se aplicável à realidade da empresa, fornecendo soluções viáveis e vantajosas. Ainda assim, algumas limitações devem ser destacadas. Por exemplo, a simplificação de considerar o tempo e a distância nulos entre clientes e clientes fictícios (almoço) pode levar a um grande distanciamento entre o último cliente da manhã e o primeiro cliente da tarde, o que afeta a qualidade do planeamento. Além disso, o modelo assume uma realidade estática, não contemplando alterações dinâmicas nas tarefas ao longo do dia, como por exemplo imprevistos.

Para investigações futuras, existem diversas direções promissoras a explorar. Uma dessas direções poderia envolver comparar a formulação proposta com a versão que incluiria variáveis binárias associadas à presença da pausa de almoço entre pares de clientes, usualmente considerada na literatura. Seria interessante comparar o desempenho das duas formulações, nomeadamente em relação à qualidade das soluções obtidas e ao tempo de execução.

Outros desenvolvimentos relevantes envolveriam expandir a abordagem atual para incluir cenários mais complexos, como adaptar o modelo para situações em que um mesmo

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

cliente requer a presença simultânea de mais do que um colaborador. Nestes casos, as rotas de cada colaborador poderão não corresponder a uma partição do conjunto de clientes tendo em conta que poderão existir clientes presentes em mais do que uma rota. Um aspeto importante nesta versão é que os colaboradores que tenham de comparecer no mesmo cliente tanto poderão ter de o fazer no mesmo intervalo de tempo, como não. Também se poderia explorar uma abordagem baseada no Problema de Escalonamento de Veículos (VSP). Comparar a abordagem atual com a do escalonamento das rotas também seria uma direção promissora para trabalhos futuros.

Outra proposta interessante seria a introdução de sub-rotas separadas para a parte da manhã e para a parte da tarde, o que permitiria uma maior flexibilidade e organização das jornadas, sem que as pausas impactassem negativamente as operações. A integração com um planeamento semanal, ao contrário do diário, abriria portas à distribuição estratégica de visitas recorrentes.

Por fim, seria relevante testar diferentes funções objetivo, incluindo a maximização do número de clientes atendidos, a minimização do tempo total ou até mesmo abordagens multiobjetivo que equilibrem os diferentes critérios de eficiência e cobertura. Neste âmbito, poderia também ser interessante discutir as duas componentes na função objetivo (minimização da soma total das distâncias das rotas e a penalização da inclusão de pausas para almoço) em duas funções separadas. Relativamente a este aspeto, é importante reforçar que a opção por abordar o problema como mono-objetivo teve como propósito evitar a dispersão do processo de decisão por uma diversidade de soluções eficientes e favorecer a complexidade de resolução, procurando alcançar soluções de melhor qualidade utilizando abordagens exatas.

Todas estas extensões tornariam o modelo ainda mais completo e adaptável às necessidades reais da empresa, contribuindo para uma melhoria contínua dos seus processos logísticos. Além disto, considerar a implementação do problema com métodos aproximativos permitiria alargar o problema para empresas com uma escala maior.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Asghari, M., Mohammad, S., Al-E-Hashem, J. M., & Al-E-Hashem Assistant, S. M. J. M. (2020). *Green vehicle routing problem: A state-of-the-art review*.
- Bazirha, M. (2023). A novel MILP formulation and an efficient heuristic for the vehicle routing problem with lunch break. *Annals of Operations Research*. <https://doi.org/10.1007/s10479-023-05742-3>
- Braekers, K., Ramaekers, K., & Van Nieuwenhuyse, I. (2016). The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300–313. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.12.007>
- Caric, T., & Gold, H. (2008). *Vehicle Routing Problem* (T. Caric & H. Gold, Eds.; 1st ed.). In-Teh. <https://doi.org/10.5772/64>
- Chapman, P., Clinton, J., Kerber, R., Khabaza, T., Reinartz, T., Shearer, C., & Wirth, R. (1999). *CRISP-DM 1.0 Step-by-step data mining guide*. DaimlerChrysler.
- Coelho, L. C., Gagliardi, J. P., Renaud, J., & Ruiz, A. (2016). Solving the vehicle routing problem with lunch break arising in the furniture delivery industry. *Journal of the Operational Research Society*, 67(5), 743–751. <https://doi.org/10.1057/jors.2015.90>
- Cokyasar, T., Subramanyam, A., Larson, J., Stinson, M., & Sahin, O. (2023). Time-Constrained Capacitated Vehicle Routing Problem in Urban E-Commerce Delivery. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2677(2), 190–203. <https://doi.org/10.1177/03611981221124592>
- Corona-Gutiérrez, K., Nucamendi-Guillén, S., & Lalla-Ruiz, E. (2022). Vehicle routing with cumulative objectives: A state of the art and analysis. *Computers & Industrial Engineering*, 169, 108054. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108054>
- Dantzig, G., Fulkerson, R., & Johnson, S. (1954). Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(4), 393–410. <https://doi.org/10.1287/opre.2.4.393>

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

- DIMACS. (n.d.). *VRP with Time Windows*. Retrieved June 25, 2025, from <http://dimacs.rutgers.edu/programs/challenge/vrp/vrptw/>
- Elshaer, R., & Awad, H. (2020). A taxonomic review of metaheuristic algorithms for solving the vehicle routing problem and its variants. *Computers & Industrial Engineering*, 140, 106242. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106242>
- Farzadnia, F., & Lysgaard, J. (2021). Solving the service-oriented single-route school bus routing problem: Exact and heuristic solutions. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 10, 100054. <https://doi.org/10.1016/j.ejtl.2021.100054>
- Freitas, M., Silva, J. M. P., & Uchoa, E. (2023). A unified exact approach for Clustered and Generalized Vehicle Routing Problems. *Computers & Operations Research*, 149, 106040. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.106040>
- Frits, M., & Bertok, B. (2021). Routing and scheduling field service operation by P-graph. *Computers & Operations Research*, 136, 105472. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105472>
- Gaur, D. R., Mudgal, A., & Singh, R. R. (2013). Routing vehicles to minimize fuel consumption. *Operations Research Letters*, 41(6), 576–580. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2013.07.007>
- Gavish, B., & Graves, S. C. (1978). *The travelling salesman problem and related problems* (Operations Research Center Working Paper;OR 078-78).
- Ghoseiri, K., & Ghannadpour, S. F. (2010). Multi-objective vehicle routing problem with time windows using goal programming and genetic algorithm. *Applied Soft Computing*, 10(4), 1096–1107. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2010.04.001>
- Goel, A., & Gruhn, V. (2006). Drivers' working hours in vehicle routing and scheduling. *2006 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference*, 1280–1285. <https://doi.org/10.1109/ITSC.2006.1707399>
- Gouveia, L. (1995). A  $2n$  Constraint Formulation for the Capacitated Minimal Spanning Tree Problem. *Operations Research*, 43(1), 130–141.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

- Karimi, L., & Nawrin Ferdous, C. (2022). Branch and Price Algorithm for Multi-Trip Vehicle Routing with a Variable Number of Wagons and Time Windows. *Algorithms*, 15(11), 412. <https://doi.org/10.3390/a15110412>
- Khanna, A., Liu, F., Gupta, S., Pavia, S., Mukhopadhyay, A., & Dubey, A. (2025). PDPTW-DB: MILP-Based Offline Route Planning for PDPTW with Driver Breaks. *ICDCN 2025 - Proceedings of the 26th International Conference on Distributed Computing and Networking*, 73–83. <https://doi.org/10.1145/3700838.3700854>
- Konstantakopoulos, G. D., Gayialis, S. P., & Kechagias, E. P. (2022). Vehicle routing problem and related algorithms for logistics distribution: a literature review and classification. *Operational Research*, 22(3), 2033–2062. <https://doi.org/10.1007/s12351-020-00600-7>
- Kramer, R., Maculan, N., Subramanian, A., & Vidal, T. (2015). A speed and departure time optimization algorithm for the pollution-routing problem. *European Journal of Operational Research*, 247(3), 782–787. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.06.037>
- Kucukoglu, I., Dewil, R., & Cattrysse, D. (2021). The electric vehicle routing problem and its variations: A literature review. *Computers & Industrial Engineering*, 161, 107650. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107650>
- Liu, R., Xie, X., Augusto, V., & Rodriguez, C. (2013). Heuristic algorithms for a vehicle routing problem with simultaneous delivery and pickup and time windows in home health care. *European Journal of Operational Research*, 230(3), 475–486. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.044>
- Malandraki, C., & Daskin, M. S. (1992). Time Dependent Vehicle Routing Problems: Formulations, Properties and Heuristic Algorithms. *Transportation Science*, 26(3), 185–200. <https://doi.org/10.1287/trsc.26.3.185>
- Molina, J. C., Eguia, I., Racero, J., & Guerrero, F. (2014). Multi-objective Vehicle Routing Problem with Cost and Emission Functions. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 160, 254–263. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.12.137>

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

- Ombuki, B., Ross, B. J., & Hanshar, F. (2006). Multi-Objective Genetic Algorithms for Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Applied Intelligence*, 24(1), 17–30. <https://doi.org/10.1007/s10489-006-6926-z>
- Prins, C. (2002). Efficient Heuristics for the Heterogeneous Fleet Multitrip VRP with Application to a Large-Scale Real Case. In *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms* (Vol. 1).
- Rizzoli, A. E., Montemanni, R., Lucibello, E., & Gambardella, L. M. (2007). Ant colony optimization for real-world vehicle routing problems. *Swarm Intelligence*, 1(2), 135–151. <https://doi.org/10.1007/s11721-007-0005-x>
- Rochat, Y., & Taillard, É. D. (1995). Probabilistic diversification and intensification in local search for vehicle routing. *Journal of Heuristics*, 1(1), 147–167. <https://doi.org/10.1007/BF02430370>
- Ruiz, E., Soto-Mendoza, V., Ruiz Barbosa, A. E., & Reyes, R. (2019). Solving the open vehicle routing problem with capacity and distance constraints with a biased random key genetic algorithm. *Computers & Industrial Engineering*, 133, 207–219. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.05.002>
- Sabet, S., & Farooq, B. (2022). Green Vehicle Routing Problem: State of the Art and Future Directions. *IEEE Access*, 10, 101622–101642. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3208899>
- Schröer, C., Kruse, F., & Gómez, J. M. (2021). A Systematic Literature Review on Applying CRISP-DM Process Model. *Procedia Computer Science*, 181, 526–534. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.01.199>
- Solomon, M. M. (1987). Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints. *Operations Research*, 35(2), 254–265. <https://doi.org/10.1287/opre.35.2.254>
- Tan, K. C., Lee, L. H., Zhu, Q. L., & Ou, K. (2001). Heuristic methods for vehicle routing problem with time windows. *Artificial Intelligence in Engineering*, 15(3), 281–295. [https://doi.org/10.1016/S0954-1810\(01\)00005-X](https://doi.org/10.1016/S0954-1810(01)00005-X)

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

- Vidal, T., Laporte, G., & Matl, P. (2019). A concise guide to existing and emerging vehicle routing problem variants. *European Journal of Operational Research*, 286(2), 401–416. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.06750>
- Wirth, R., & Hipp, J. (2000). CRISP-DM: Towards a Standard Process Model for Data Mining. *Proceedings of the 4th International Conference on the Practical Applications of Knowledge Discovery and Data Mining*, 29–39.
- Zhang, H., Ge, H., Yang, J., & Tong, Y. (2022). Review of Vehicle Routing Problems: Models, Classification and Solving Algorithms. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29(1), 195–221. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09574-x>

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado  
a empresa de condomínios*

---

## APÊNDICES

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

## APÊNDICE 1. Documento de Apoio à Otimização de Rotas para a Empresa

As figuras seguintes apresentam excertos do documento Excel desenvolvido como suporte para a empresa inserir toda a informação necessária à otimização das rotas. Estes pequenos excertos ilustram a forma como o documento foi estruturado. O ficheiro foi desenvolvido em Excel, uma vez que esta é uma ferramenta com a qual a empresa está familiarizada, de utilização simples e, na forma como foi concebida, bastante intuitiva.

Regras de Utilização

FOLHA "Moradas\_colaboradores"

Exemplo da folha:

| ID | Moradas                                                                   | Colaborador | Visitar | Trabalho               | s   | i     | f     |
|----|---------------------------------------------------------------------------|-------------|---------|------------------------|-----|-------|-------|
| 0  | AVENIDA DOUTOR ARTUR MELO E CASTRO 93 LOJA 18 4630-204 MARCO DE CANAVESES | Todos       | Sim     |                        | 0   |       |       |
| 1  | RUA DOUTOR MANUEL VASCONCELOS 117 4630-280 MARCO DE CANAVESES             | A           | Sim     | Alterar videoporteiro  | 105 |       |       |
| 2  | RUA DOUTOR MANUEL VASCONCELOS 196 4630-280 MARCO DE CANAVESES             | C           | Sim     | Verificar campanha     | 40  | 10:45 | 11:30 |
| 3  | RUA MANUEL PEREIRA SOARES 199 4630-296 MARCO DE CANAVESES                 | Todos       | Sim     | Verificar portões      | 35  |       |       |
| 4  | RUA MANUEL PEREIRA SOARES 219 4630-296 MARCO DE CANAVESES                 | A           | Sim     | Trocar canhão          | 45  |       |       |
| 5  | AVENIDA DOUTOR FRANCISCO SA CARNEIRO 500 4630-205 MARCO DE CANAVESES      | Todos       | Sim     | Colocar luzes de natal | 45  |       |       |
| 6  | AVENIDA GAGO COUTINHO 410 4630-206 MARCO DE CANAVESES                     | a, b        | Sim     | Limpar piscina         | 120 |       |       |

Coluna

ID

Moradas

Colaborador

Visitar

Trabalho

s

i

f

Legenda

O ID representa o edifício.

As moradas devem ser adicionadas nesta coluna.

Nesta coluna, é indicado o colaborador responsável pela visita ao edifício.

Nesta coluna, deve-se indicar se o edifício deverá ser visitado, com as opções: Sim ou Não.

Para especificar o trabalho a ser realizado.

Representa o tempo de trabalho, que é preenchido automaticamente ao selecionar o tipo de trabalho.

Representa o início da janela de tempo.

Representa o fim da janela de tempo.

Se alterar o ID de um edifício, deve proceder à atualização de todos os dados, selecionando a caixa de verificação em "Atualizar tudo?" na folha "Atualizar".  
Ao adicionar um cliente, deve proceder à atualização da lista de clientes na folha "Atualizações".  
Caso o tempo de trabalho não apareça ao selecionar o trabalho, deve simplesmente arrastar a fórmula na coluna "t".  
O ID zero corresponde ao escritório e não deve ser alterado, exceto no caso de mudança da sua localização.

FOLHA "Trabalhos"

Exemplo da folha:

| Trabalho              | Tempo (min) |
|-----------------------|-------------|
| Mudar lâmpadas        | 30          |
| Verificar campanha    | 40          |
| Alterar videoporteiro | 105         |
| Limpar piscina        | 120         |
| Trocar canhão         | 45          |

Coluna

Trabalho

Tempo (min)

Legenda

Nesta coluna, podem ser adicionados mais tipos de trabalho a realizar.

Nesta coluna, deve ser indicado o tempo necessário, em minutos, para a execução do trabalho.

FOLHA "Colaboradores"

Exemplo da folha:

| Nome   | Colaboradores | Tempo máximo de trabalho (H) |
|--------|---------------|------------------------------|
| João   | A             | 7                            |
| Mário  | B             | 8                            |
| Duarte | C             | 8                            |
|        | Todos         |                              |
|        | A, B          |                              |

Coluna

Nome

Colaboradores

Tempo máximo de trabalho

Legenda

Nesta coluna, pode ser inserido o nome do colaborador.

Nesta coluna, deve ser adicionada uma letra que representará o colaborador. (Todos significa que é indiferente o colaborador que vai visitar o cliente)

Nesta coluna, deve ser indicado o tempo máximo disponível para o colaborador, em horas.

Na linha "Todos", não deve ser indicado o tempo máximo de trabalho, uma vez que cada colaborador tem o seu próprio tempo.  
Quando existirem dois colaboradores na mesma linha, também não deve ser indicado o tempo máximo de trabalho.

Figura A1.1 - Excerto do documento Excel

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| FOLHA "Horário de Trabalho"                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                      |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------------|--|---------------------|------------------------------|----------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------|-----------------|-----------------------------------------|----------|----------|
| Exemplo da folha:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                      |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Horário de Trabalho da Empresa</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Início</td> <td>Fim</td> <td>Início pausa para almoço</td> <td>Fim pausa para almoço</td> </tr> <tr> <td>09:00:00</td> <td>18:30:00</td> <td>12:30:00</td> <td>14:00:00</td> </tr> </tbody> </table>                                                                                                                        |                                                                                      |                          |                       | Horário de Trabalho da Empresa |  |                     |                              | Início               | Fim                          | Início pausa para almoço | Fim pausa para almoço        | 09:00:00        | 18:30:00                                | 12:30:00 | 14:00:00 |
| Horário de Trabalho da Empresa                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                      |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Início                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Fim                                                                                  | Início pausa para almoço | Fim pausa para almoço |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| 09:00:00                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 18:30:00                                                                             | 12:30:00                 | 14:00:00              |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| <b>Coluna</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>Legenda</b>                                                                       |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Início                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Nesta coluna, deve ser inserido o horário de início de funcionamento da empresa.     |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Fim                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Nesta coluna, deve ser inserido o horário de fim de funcionamento da empresa.        |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Início pausa para almoço                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Nesta coluna, deve ser inserido o horário de início de pausa para almoço da empresa. |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Fim pausa para almoço                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Nesta coluna, deve ser inserido o horário de fim de pausa para almoço da empresa.    |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| FOLHA "Atualizações"                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                      |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Exemplo da folha:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                      |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Atualizações</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Atualizar clientes?</td> <td><input type="checkbox"/> NÃO</td> </tr> <tr> <td>Atualizar os tempos?</td> <td><input type="checkbox"/> NÃO</td> </tr> <tr> <td>Atualizar as distâncias?</td> <td><input type="checkbox"/> NÃO</td> </tr> <tr> <td>Atualizar tudo?</td> <td><input checked="" type="checkbox"/> SIM</td> </tr> </tbody> </table> |                                                                                      |                          |                       | Atualizações                   |  | Atualizar clientes? | <input type="checkbox"/> NÃO | Atualizar os tempos? | <input type="checkbox"/> NÃO | Atualizar as distâncias? | <input type="checkbox"/> NÃO | Atualizar tudo? | <input checked="" type="checkbox"/> SIM |          |          |
| Atualizações                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                      |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Atualizar clientes?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <input type="checkbox"/> NÃO                                                         |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Atualizar os tempos?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <input type="checkbox"/> NÃO                                                         |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Atualizar as distâncias?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <input type="checkbox"/> NÃO                                                         |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Atualizar tudo?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <input checked="" type="checkbox"/> SIM                                              |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| <b>Linha</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>Explicação</b>                                                                    |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Atualizar clientes?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Ao adicionar um novo cliente, deve marcar a caixa de verificação.                    |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Atualizar os tempos?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Neste caso, serão calculados apenas os tempos entre os clientes.                     |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Atualizar as distâncias?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Neste caso, serão calculadas apenas as distâncias entre os clientes.                 |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
| Atualizar tudo?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Atualize todas as informações.                                                       |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |
|  <p>Nesta folha, a única ação permitida é a seleção ou desmarcação das caixas de verificação. Conforme ilustrado, se a caixa estiver assinalada, o valor considerado é "SIM"; caso contrário, é considerado "NÃO".</p>                                                                                                                                       |                                                                                      |                          |                       |                                |  |                     |                              |                      |                              |                          |                              |                 |                                         |          |          |

Figura A1.2 - Excerto do documento Excel

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

## APÊNDICE 2. Descrição Pormenorizada das Instâncias Reais Utilizadas

Nas instâncias reais (representadas por  $r_{n,m}$ ), consideram-se tempos de serviço idênticos para cada subconjunto de clientes. Assim, apresenta-se de seguida a Tabela A2.1, na qual se encontram ilustrados os tempos de serviço, em minutos, atribuídos a cada cliente. Estes tempos estão associados ao parâmetro  $s$  na formulação.

*Tabela A2.1 - Tempo de serviço de cada cliente*

| Cientes - ID | Tempo de Serviço em minutos | Cientes - ID | Tempo de Serviço em minutos | Cientes - ID | Tempo de Serviço em minutos |
|--------------|-----------------------------|--------------|-----------------------------|--------------|-----------------------------|
| 1            | 105                         | 33           | 45                          | 65           | 45                          |
| 2            | 40                          | 34           | 45                          | 66           | 35                          |
| 3            | 35                          | 35           | 45                          | 67           | 35                          |
| 4            | 45                          | 36           | 45                          | 68           | 35                          |
| 5            | 45                          | 37           | 45                          | 69           | 35                          |
| 6            | 120                         | 38           | 45                          | 70           | 35                          |
| 7            | 105                         | 39           | 45                          | 71           | 35                          |
| 8            | 45                          | 40           | 45                          | 72           | 45                          |
| 9            | 120                         | 41           | 45                          | 73           | 35                          |
| 10           | 120                         | 42           | 45                          | 74           | 35                          |
| 11           | 120                         | 43           | 45                          | 75           | 45                          |
| 12           | 120                         | 44           | 45                          | 76           | 45                          |
| 13           | 120                         | 45           | 45                          | 77           | 35                          |
| 14           | 120                         | 46           | 35                          | 78           | 35                          |
| 15           | 120                         | 47           | 35                          | 79           | 35                          |
| 16           | 30                          | 48           | 35                          | 80           | 35                          |
| 17           | 30                          | 49           | 35                          | 81           | 35                          |
| 18           | 30                          | 50           | 45                          | 82           | 35                          |
| 19           | 30                          | 51           | 45                          | 83           | 35                          |
| 20           | 30                          | 52           | 45                          | 84           | 45                          |
| 21           | 30                          | 53           | 45                          | 85           | 45                          |
| 22           | 30                          | 54           | 45                          | 86           | 45                          |
| 23           | 30                          | 55           | 45                          | 87           | 35                          |
| 24           | 30                          | 56           | 45                          | 88           | 35                          |
| 25           | 30                          | 57           | 45                          | 89           | 35                          |
| 26           | 45                          | 58           | 45                          | 90           | 35                          |
| 27           | 45                          | 59           | 45                          | 91           | 35                          |
| 28           | 45                          | 60           | 45                          | 92           | 45                          |
| 29           | 45                          | 61           | 45                          | 93           | 35                          |
| 30           | 45                          | 62           | 45                          | 94           | 35                          |
| 31           | 45                          | 63           | 45                          | 95           | 35                          |
| 32           | 45                          | 64           | 45                          | 96           | 35                          |

Nas tabelas seguintes (Tabela A2.2 a Tabela A2.14), são descritas as diversas instâncias utilizadas nos testes, com o objetivo de garantir uma compreensão das mesmas. É apresentada toda a informação relevante, incluindo os clientes que compõem cada

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

subconjunto, os colaboradores para atender esses clientes, o tempo diário de trabalho disponível por colaborador, bem como os clientes que devem, obrigatoriamente, ser atendidos por um colaborador específico e por qual.

*Tabela A2.2 - Descrição da Instância r\_10\_2*

| Instância                                 | r_10_2                                                   |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Número de clientes                        | 10 {7;8;20;25;32;41;45;80;83;90}                         |
| Número de Colaboradores                   | 2                                                        |
| Tempo de Trabalho por Colaborador         | Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 6 horas.       |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador A: {20;32;80}<br>Colaborador B: {7;21;41;45} |

*Tabela A2.3 - Descrição da Instância r\_12\_2*

| Instância                                 | r_12_2                                              |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Número de clientes                        | 12 {9;12;16;24;26;35;39;55;65;69;88;96}             |
| Número de Colaboradores                   | 2                                                   |
| Tempo de Trabalho por Colaborador         | Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas.  |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador A: {12;26;65}<br>Colaborador B: {24;39} |

*Tabela A2.4 - Descrição da Instância r\_15\_2*

| Instância                         | r_15_2                                             |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------|
| Número de clientes                | 15 {2;9;12;17;20;40;41;42;46;49;56;58;70;88;92}    |
| Número de Colaboradores           | 2                                                  |
| Tempo de Trabalho por Colaborador | Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas. |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instância                                 | r_15_2                                           |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador A: {12;17}<br>Colaborador B: {70;88} |

*Tabela A2.5 - Descrição da Instância r\_20\_3*

| Instância                                 | r_20_3                                                                        |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Número de clientes                        | 20<br>{2;4;5;8;11;28;33;34;37;45;47;48;71;74;76;77;84;88;93;94}               |
| Número de Colaboradores                   | 3                                                                             |
| Tempo de Trabalho por Colaborador         | Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas;<br>Colaborador C: 8 horas. |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador A: {71;76}<br>Colaborador B: {33}<br>Colaborador C: {34}          |

*Tabela A2.6 - Descrição da Instância r\_25\_3*

| Instância                                 | r_25_3                                                                             |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Número de clientes                        | 25<br>{4;7;8;11;19;23;24;28;32;33;35;39;41;42;45;47;48;50;54;62;66;74;82;88;89}    |
| Número de Colaboradores                   | 3                                                                                  |
| Tempo de Trabalho por Colaborador         | Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas;<br>Colaborador C: 8 horas.      |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador A: {7;23;33}<br>Colaborador B: {45;50;74}<br>Colaborador C: {41;48;62} |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela A2.7 - Descrição da Instância r\_30\_4*

| Instância                                | r_30_4                                                                                                                     |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Número de clientes                       | 30<br>{2;4;6;8;11;20;21;22;23;30;31;33;38;43;44;59;63;67;70;71;75;79;81;82;83;87;88;89;91;95}                              |
| Número de Colaboradores                  | 4                                                                                                                          |
| Tempo de Trabalho por Colaborador        | Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas;<br>Colaborador C: 8 horas;<br>Colaborador D: 8 horas.                   |
| Cientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador A: {4;11;33;81;83;88}<br>Colaborador B: {30;38;43;59}<br>Colaborador C: {67;70;71}<br>Colaborador D: {2;91;95} |

*Tabela A2.8 - Descrição da Instância r\_40\_7*

| Instância                         | r_40_7                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Número de clientes                | 40<br>{3;7;8;10;11;13;15;16;17;19;22;29;31;32;35;36;37;38;39;40;42;43;44;47;51;54;58;63;65;66;67;70;71;74;81;83;87;89;95;96}                                                              |
| Número de Colaboradores           | 7                                                                                                                                                                                         |
| Tempo de Trabalho por Colaborador | Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas;<br>Colaborador C: 8 horas;<br>Colaborador D: 8 horas;<br>Colaborador E: 8 horas;<br>Colaborador F: 8 horas;<br>Colaborador G: 8 horas. |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instância                                | r_40_7                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cientes obrigatórios de cada colaborador | <p>Colaborador A: {3;37;38}</p> <p>Colaborador B: {7;47;54;81}</p> <p>Colaborador C: {10;40;87;89}</p> <p>Colaborador D: {13;63;70}</p> <p>Colaborador E: {17;32}</p> <p>Colaborador F: {22;29}</p> <p>Colaborador G: {15;44;51;65;74;95}</p> |

*Tabela A2.9 - Descrição da Instância r\_50\_7*

| Instância                                | r_50_7                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Número de clientes                       | <p>50</p> <p>{5;6;7;8;9;10;11;12;15;16;18;20;21;22;23;24;26;27;28;31;32;34;35;36;38;40;44;47;49;50;51;54;57;63;64;68;70;71;73;74;75;79;80;85;86;87;89;91;92;96}</p>                                                                                              |
| Número de Colaboradores                  | <p>7</p>                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Tempo de Trabalho por Colaborador        | <p>Colaborador A: 8 horas;</p> <p>Colaborador B: 8 horas;</p> <p>Colaborador C: 8 horas;</p> <p>Colaborador D: 8 horas;</p> <p>Colaborador E: 8 horas;</p> <p>Colaborador F: 8 horas;</p> <p>Colaborador G: 8 horas.</p>                                         |
| Cientes obrigatórios de cada colaborador | <p>Colaborador A: {5;6;54;71;75;89}</p> <p>Colaborador B: {7;34;49;57;92}</p> <p>Colaborador C: {36;51;70;85;96}</p> <p>Colaborador D: {9;10;11;64}</p> <p>Colaborador E: {15;38;63}</p> <p>Colaborador F: {18;26;47;79}</p> <p>Colaborador G: {21;23;44;86}</p> |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela A2.10 - Descrição da Instância r\_60\_9*

| Instância                                 | r_60_9                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                           | 60                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Número de clientes                        | {6;7;8;10;11;12;13;14;16;17;18;20;21;22;24;25;26;32;33;34;35;38;40;41;42;43;44;46;47;48;49;50;52;53;55;56;57;58;59;61;62;63;65;67;68;69;72;73;75;78;80;81;84;85;87;88;89;90;93;94}                                                                                                                        |
| Número de Colaboradores                   | 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Tempo de Trabalho por Colaborador         | Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas;<br>Colaborador C: 8 horas;<br>Colaborador D: 8 horas;<br>Colaborador E: 8 horas;<br>Colaborador F: 8 horas;<br>Colaborador G: 8 horas;<br>Colaborador H: 8 horas;<br>Colaborador I: 8 horas.                                                           |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador A: {6;7;8}<br>Colaborador B: {10;11;12}<br>Colaborador C: {32;33;34}<br>Colaborador D: {13;25;26}<br>Colaborador E: {35;38;42;43;44;46}<br>Colaborador F: {}<br>Colaborador G: {20;21;22;24;49;50;52;53;56}<br>Colaborador H: {72;73;75;78;80;81;84;85}<br>Colaborador I: {14;16;17;18;62;63} |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela A2.11 - Descrição da Instância r\_70\_12*

| Instância                                 | r_70_12                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Número de clientes                        | 70<br>{1;2;3;5;7;8;9;10;11;12;13;15;20;23;25;28;33;34;<br>35;36;37;38;39;40;41;42;43;45;46;47;48;49;50;51<br>;52;53;55;56;57;58;59;60;61;62;63;64;65;66;67;<br>68;69;71;73;75;76;78;79;81;82;83;84;86;87;88;89<br>;91;92;93;94;96}                                                                                                         |
| Número de Colaboradores                   | 12<br><br>Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas;<br>Colaborador C: 8 horas;<br>Colaborador D: 8 horas;<br>Colaborador E: 8 horas;<br>Colaborador F: 8 horas;<br>Colaborador G: 8 horas;<br>Colaborador H: 8 horas;<br>Colaborador I: 8 horas;<br>Colaborador J: 8 horas;<br>Colaborador K: 8 horas;<br>Colaborador L: 8 horas. |
| Tempo de Trabalho por Colaborador         | Colaborador A: {1;2;23;35;40}<br>Colaborador B: {3;5;11;82;92}<br>Colaborador C: {51;67;75;88;96}<br>Colaborador D: {28;37;47;49;86}<br>Colaborador E: {57;60;63;78;84}                                                                                                                                                                    |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador F: {8;13;38;45;53;83}<br>Colaborador G: {15;42;69}<br>Colaborador H: {64;73;81;94}<br>Colaborador I: {39;48;50;52}<br>Colaborador J: {9;12;59;66;89}<br>Colaborador K: {10;25;41;55;62}                                                                                                                                        |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

|                                           |                        |
|-------------------------------------------|------------------------|
| Instância                                 | r_70_12                |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador L: {61;71} |

*Tabela A2.12 - Descrição da Instância r\_80\_18*

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Instância                         | r_80_18                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Número de clientes                | 80<br>{1;2;3;4;5;7;8;9;10;11;12;13;14;15;19;20;23;25;<br>26;28;30;33;34;35;36;37;38;39;40;41;42;43;44;45<br>;46;47;48;49;50;51;52;53;55;56;57;58;59;60;61;<br>62;63;64;65;66;67;68;69;70;71;72;73;75;76;78;79<br>;80;81;82;83;84;86;87;88;89;90;91;92;93;94;96}                                                                                                                                                                                                                                              |
| Número de Colaboradores           | 18<br><br>Colaborador A: 8 horas;<br>Colaborador B: 8 horas;<br>Colaborador C: 8 horas;<br>Colaborador D: 8 horas;<br>Colaborador E: 8 horas;<br>Colaborador F: 8 horas;<br>Colaborador G: 8 horas;<br>Colaborador H: 8 horas;<br>Colaborador I: 8 horas;<br>Colaborador J: 8 horas;<br>Colaborador K: 8 horas;<br>Colaborador L: 8 horas;<br>Colaborador M: 8 horas;<br>Colaborador N: 8 horas;<br>Colaborador O: 8 horas;<br>Colaborador P: 8 horas;<br>Colaborador Q: 8 horas;<br>Colaborador R: 8 horas. |
| Tempo de Trabalho por Colaborador |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instância                                 | r_80_18                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | <p>Colaborador A: {1;36;67}</p> <p>Colaborador B: {2;37;68}</p> <p>Colaborador C: {3;38;69}</p> <p>Colaborador D: {4;39;70}</p> <p>Colaborador E: {5;40;71}</p> <p>Colaborador F: {7;41;72}</p> <p>Colaborador G: {8;42;73}</p> <p>Colaborador H: {9;43;75}</p> <p>Colaborador I: {10;44;76}</p> <p>Colaborador J: {11;45;78}</p> <p>Colaborador K: {12;46;79}</p> <p>Colaborador L: {13;47;80}</p> <p>Colaborador M: {14;48;81}</p> <p>Colaborador N: {15;49;82}</p> <p>Colaborador O: {19;50;83}</p> <p>Colaborador P: {20;51;84}</p> <p>Colaborador Q: {23;52;86}</p> <p>Colaborador R: {25;53;87}</p> |

*Tabela A2.13 - Descrição da Instância r\_90\_22*

| Instância               | r_90_22                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Número de clientes      | <p>90</p> <p>{1;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20;21;22;23;24;25;26;27;28;29;30;31;32;33;34;35;37;38;39;40;41;42;43;44;45;46;47;48;49;50;51;52;53;54;55;57;58;59;60;61;62;63;64;65;66;67;68;69;71;72;73;74;75;76;77;78;79;80;81;82;83;85;86;87;88;89;90;91;92;93;94;96}</p> |
| Número de Colaboradores | 22                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instância                                 | r_90_22                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tempo de Trabalho por Colaborador         | <p>Colaborador A: 8 horas;<br/> Colaborador B: 8 horas;<br/> Colaborador C: 8 horas;<br/> Colaborador D: 8 horas;<br/> Colaborador E: 8 horas;<br/> Colaborador F: 8 horas;<br/> Colaborador G: 8 horas;<br/> Colaborador H: 8 horas;<br/> Colaborador I: 8 horas;<br/> Colaborador J: 8 horas;<br/> Colaborador K: 8 horas;<br/> Colaborador L: 8 horas;<br/> Colaborador M: 8 horas;<br/> Colaborador N: 8 horas;<br/> Colaborador O: 8 horas;<br/> Colaborador P: 8 horas;<br/> Colaborador Q: 8 horas;<br/> Colaborador R: 8 horas;<br/> Colaborador S: 8 horas;<br/> Colaborador T: 8 horas;<br/> Colaborador U: 8 horas;<br/> Colaborador V: 8 horas.</p> |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | <p>Colaborador A: {1;46;61}<br/> Colaborador B: {3;48;63}<br/> Colaborador C: {4;49;64}<br/> Colaborador D: {5;50;65}<br/> Colaborador E: {6;51;66}<br/> Colaborador F: {7;52;67}<br/> Colaborador G: {8;38;71}<br/> Colaborador H: {9;39;72}<br/> Colaborador I: {10;40;73}<br/> Colaborador J: {11;41;74}<br/> Colaborador K: {12;42;75}</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instância                                 | r_90_22                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | <p>Colaborador L: {13;43;76}</p> <p>Colaborador M: {14;44;77}</p> <p>Colaborador N: {15;45;78}</p> <p>Colaborador O: {16;26}</p> <p>Colaborador P: {17;27}</p> <p>Colaborador Q: {18;28}</p> <p>Colaborador R: {19;29}</p> <p>Colaborador S: {20;30}</p> <p>Colaborador T: {21;31}</p> <p>Colaborador U: {22;32}</p> <p>Colaborador V: {23;33}</p> |

*Tabela A2.14 - Descrição da Instância r\_96\_24*

| Instância                         | r_96_24                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Número de clientes                | <p>96</p> <p>{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20;21;22;23;24;25;26;27;28;29;30;31;32;33;34;35;36;37;38;39;40;41;42;43;44;45;46;47;48;49;50;51;52;53;54;55;56;57;58;59;60;61;62;63;64;65;66;67;68;69;70;71;72;73;74;75;76;77;78;79;80;81;82;83;84;85;86;87;88;89;90;91;92;93;94;95;96}</p> |
| Número de Colaboradores           | 24                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Tempo de Trabalho por Colaborador | <p>Colaborador A: 8 horas;</p> <p>Colaborador B: 8 horas;</p> <p>Colaborador C: 8 horas;</p> <p>Colaborador D: 8 horas;</p> <p>Colaborador E: 8 horas;</p> <p>Colaborador F: 8 horas;</p> <p>Colaborador G: 8 horas;</p> <p>Colaborador H: 8 horas;</p> <p>Colaborador I: 8 horas;</p>                    |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado  
a empresa de condomínios*

| Instância                                 | r_96_24                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tempo de Trabalho por Colaborador         | <p>Colaborador J: 8 horas;<br/>Colaborador K: 8 horas;<br/>Colaborador L: 8 horas;<br/>Colaborador M: 8 horas;<br/>Colaborador N: 8 horas;<br/>Colaborador O: 8 horas;<br/>Colaborador P: 8 horas;<br/>Colaborador Q: 8 horas;<br/>Colaborador R: 8 horas;<br/>Colaborador S: 8 horas;<br/>Colaborador T: 8 horas;<br/>Colaborador U: 8 horas;<br/>Colaborador V: 8 horas;<br/>Colaborador X: 8 horas;<br/>Colaborador Z: 8 horas.</p> <p>Colaborador A: {1;32;66}<br/>Colaborador B: {2;33;67}<br/>Colaborador C: {3;34;68}<br/>Colaborador D: {4;35;69}<br/>Colaborador E: {5;36;70}<br/>Colaborador F: {6;37;71}<br/>Colaborador G: {7;38;72}<br/>Colaborador H: {8;39;73}<br/>Colaborador I: {9;40;74}<br/>Colaborador J: {10;41;75}<br/>Colaborador K: {11;42;76}<br/>Colaborador L: {12;43;77}<br/>Colaborador M: {13;44;78}<br/>Colaborador N: {14;45;79}<br/>Colaborador O: {15;46;80}<br/>Colaborador P: {16;47;81}<br/>Colaborador Q: {17;48;82}</p> |
| Clientes obrigatórios de cada colaborador |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instância                                 | r_96_24                   |
|-------------------------------------------|---------------------------|
| Clientes obrigatórios de cada colaborador | Colaborador R: {18;49;83} |
|                                           | Colaborador S: {19;50;84} |
|                                           | Colaborador T: {20;51;85} |
|                                           | Colaborador U: {21;52;86} |
|                                           | Colaborador V: {22;53;87} |
|                                           | Colaborador X: {23;54;88} |
|                                           | Colaborador Z: {24;55;89} |

### APÊNDICE 3. Testes com Instâncias de Solomon sem Pausa para Almoço

Apresentam-se na Tabela A3.1 os resultados obtidos sem considerar a pausa para almoço, assumindo a utilização de 25 colaboradores, sendo que cada cliente pode ser atendido por qualquer um deles. Apenas são incluídas as instâncias para as quais foi possível obter resultados dentro do tempo limite de execução; as restantes não obtiveram soluções admissíveis no intervalo de tempo estipulado (3600 segundos).

Tabela A3.1 - Desempenho das Instâncias de Solomon sem pausa para almoço

| Instâncias | OPT/GAP |
|------------|---------|
| C1         |         |
| • C101     | OPT     |
| • C102     | 0,91%   |
| • C105     | OPT     |
| • C106     | OPT     |
| • C107     | OPT     |
| • C108     | OPT     |
| C2         |         |
| • C201     | OPT     |
| • C202     | OPT     |
| • C203     | OPT     |
| • C204     | OPT     |
| • C205     | OPT     |
| • C206     | OPT     |
| • C207     | OPT     |
| • C208     | 1,99%   |
| R1         |         |
| • R101     | OPT     |
| • R105     | OPT     |
| R2         |         |
| • R201     | OPT     |
| • R203     | 0,64%   |
| • R204     | 0,85%   |
| • R205     | OPT     |
| • R207     | 0,40%   |
| • R210     | 0,20%   |
| • R211     | 0,68%   |
| RC1        |         |
| • RC101    | OPT     |
| • RC106    | OPT     |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Instâncias | OPT/GAP |
|------------|---------|
| RC2        |         |
| • RC201    | OPT     |
| • RC202    | 2,71%   |
| • RC204    | OPT     |
| • RC205    | 0,72%   |
| • RC206    | OPT     |
| • RC208    | OPT     |

Das 56 instâncias de Solomon testadas, 31 apresentaram resultados, sendo que a maioria alcançou a solução ótima. Contudo, é importante salientar que estes resultados não correspondem diretamente ao problema original, uma vez que, como mencionado anteriormente, foi desconsiderada a pausa para almoço.

Adicionalmente, ao comparar com a literatura, verifica-se uma diferença significativa na estrutura do problema, por exemplo, no presente estudo foram considerados 25 colaboradores para atender 100 clientes, o que resulta, em média, em 4 clientes por rota. Já nos trabalhos existentes na literatura, normalmente utiliza-se um número inferior de veículos (mesmo que colaboradores neste trabalho), e problemas distintos o que por conseguinte, dificulta uma comparação direta e justa dos resultados.

## APÊNDICE 4. Janelas de Tempo por instância nas Formulações F2\_c e F2\_p

Nas tabelas seguintes (Tabela A4.1 a Tabela A4.13) são apresentadas para cada instância as janelas de tempo dos clientes que as possuem, de acordo com as formulações F2\_c (com janelas de tempo amplas) e F2\_p (com janelas de tempo restritas). Note-se que apenas são incluídos os clientes com janelas de tempo definidas, conforme explicado anteriormente.

Tabela A4.1 - Janelas de Tempo para a Instância r\_10\_2 e para as formulações F2\_c e F2\_p

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 7            | [15:30 – 18:30] | [15:00 – 15:30] |
| 20           | [14:00 – 17:00] | [16:00 – 16:30] |
| 32           | [14:00 – 17:30] | [17:00 – 17:30] |
| 45           | [15:00 – 18:30] | [17:00 – 18:30] |
| 83           | [14:00 – 17:00] | [14:00 – 15:00] |
| 90           | [15:00 – 18:30] | [15:00 – 15:30] |

Tabela A4.2 - Janelas de Tempo para a Instância r\_12\_2 e para as formulações F2\_c e F2\_p

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 9            | [09:30 – 12:30] | [09:30 – 10:00] |
| 16           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 35           | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 16:15] |
| 69           | [09:30 – 12:30] | [11:00 – 11:45] |
| 88           | [09:30 – 12:30] | [10:30 – 11:00] |
| 96           | [15:00 – 18:30] | [16:00 – 16:15] |

Tabela A4.3 - Janelas de Tempo para a Instância r\_15\_2 e para as formulações F2\_c e F2\_p

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 2            | [09:00 – 12:30] | [10:30 – 11:00] |
| 12           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 40           | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 17:30] |
| 42           | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 17:30] |
| 46           | [09:00 – 12:30] | [15:45 – 16:00] |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 88           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |

*Tabela A4.4 - Janelas de Tempo para a Instância r\_20\_3 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 2            | [09:00 – 12:30] | [10:30 – 11:00] |
| 4            | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 16:15] |
| 5            | [09:00 – 12:30] | [10:30 – 11:00] |
| 34           | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 16:15] |
| 37           | [09:00 – 12:30] | [10:30 – 11:00] |
| 48           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 74           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |

*Tabela A4.5 - Janelas de Tempo para a Instância r\_25\_3 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 4            | [14:00 – 17:00] | [16:00 – 16:30] |
| 7            | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 16:30] |
| 8            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 23           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 24           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 32           | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 17:00] |
| 35           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 41           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 54           | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 16:15] |
| 66           | [14:00 – 17:00] | [14:00 – 14:30] |
| 74           | [15:30 – 18:30] | [15:45 – 16:15] |
| 88           | [14:00 – 18:30] | [15:00 – 15:30] |
| 89           | [14:00 – 18:30] | [15:30 – 17:00] |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela A4.6 - Janelas de Tempo para a Instância r\_30\_4 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 2            | [09:30 – 12:30] | [09:30 – 10:30] |
| 6            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 8            | [15:00 – 18:00] | [15:30 – 16:30] |
| 11           | [15:00 – 18:00] | [15:45 – 16:15] |
| 20           | [09:30 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |
| 22           | [09:30 – 12:30] | [09:30 – 10:00] |
| 23           | [09:30 – 12:30] | [10:30 – 11:00] |
| 30           | [15:30 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 31           | [14:00 – 17:00] | [15:00 – 15:30] |
| 38           | [14:00 – 17:00] | [17:00 – 18:30] |
| 81           | [09:30 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 82           | [09:30 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 83           | [09:30 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 87           | [09:30 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |
| 89           | [09:30 – 12:30] | [11:00 – 11:30] |
| 91           | [09:30 – 12:30] | [09:30 – 10:00] |
| 95           | [09:30 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |

*Tabela A4.7 - Janelas de Tempo para a Instância r\_40\_7 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 3            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 7            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 13           | [15:00 – 18:00] | [16:00 – 16:15] |
| 16           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 17           | [09:00 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |
| 19           | [14:00 – 18:30] | [15:45 – 16:15] |
| 22           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 29           | [14:00 – 18:30] | [17:00 – 18:00] |
| 32           | [09:00 – 12:30] | [09:30 – 10:00] |
| 36           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 38           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 15:00] |
| 39           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 15:00] |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 40           | [14:30 – 18:30] | [15:00 – 16:00] |
| 43           | [14:00 – 18:30] | [17:00 – 18:30] |
| 58           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 63           | [14:00 – 18:30] | [15:00 – 15:30] |
| 66           | [14:30 – 18:30] | [14:30 – 15:00] |
| 67           | [14:00 – 17:00] | [16:30 – 17:00] |
| 71           | [15:00 – 18:00] | [15:00 – 15:30] |
| 81           | [11:00 – 15:30] | [14:00 – 15:00] |
| 83           | [14:00 – 17:00] | [15:00 – 17:00] |
| 87           | [15:00 – 18:00] | [15:00 – 15:30] |
| 89           | [14:00 – 17:00] | [15:45 – 17:00] |

*Tabela A4.8 - Janelas de Tempo para a Instância r\_50\_7 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 5            | [09:00 – 12:30] | [11:00 – 11:45] |
| 6            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 7            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 8            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 9            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 12           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:30] |
| 16           | [15:00 – 18:00] | [15:00 – 15:30] |
| 20           | [15:00 – 18:00] | [15:00 – 15:30] |
| 22           | [09:00 – 12:30] | [10:30 – 11:00] |
| 23           | [15:00 – 18:00] | [15:00 – 15:30] |
| 24           | [15:00 – 18:00] | [15:00 – 15:30] |
| 26           | [14:00 – 17:00] | [16:00 – 16:30] |
| 31           | [14:00 – 17:00] | [16:00 – 16:30] |
| 32           | [14:00 – 17:30] | [16:00 – 17:00] |
| 36           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 44           | [14:00 – 17:00] | [17:00 – 18:00] |
| 47           | [14:00 – 17:00] | [17:00 – 18:00] |
| 50           | [14:00 – 17:00] | [17:00 – 18:00] |
| 51           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 15:00] |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 57           | [09:00 – 12:30] | [11:00 – 12:30] |
| 63           | [09:00 – 12:30] | [11:00 – 12:30] |
| 64           | [09:00 – 12:30] | [11:00 – 12:30] |
| 68           | [15:00 – 18:00] | [16:30 – 18:00] |
| 71           | [14:00 – 18:30] | [14:30 – 15:00] |
| 73           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 80           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 86           | [09:00 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |
| 87           | [09:00 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |
| 91           | [15:00 – 18:00] | [15:00 – 15:30] |

*Tabela A4.9 - Janelas de Tempo para a Instância r\_60\_9 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 6            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 10           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 13           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 17           | [15:30 – 18:30] | [18:00 – 18:30] |
| 20           | [15:30 – 18:30] | [18:00 – 18:30] |
| 24           | [09:00 – 12:30] | [11:00 – 11:45] |
| 25           | [09:00 – 12:30] | [11:00 – 11:45] |
| 33           | [15:30 – 18:30] | [17:00 – 18:00] |
| 34           | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 16:15] |
| 40           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 41           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 42           | [14:00 – 18:30] | [14:30 – 15:00] |
| 47           | [14:00 – 17:30] | [16:30 – 17:00] |
| 48           | [14:00 – 17:30] | [16:30 – 17:00] |
| 50           | [09:00 – 12:30] | [14:30 – 15:00] |
| 55           | [09:00 – 12:30] | [14:30 – 15:00] |
| 58           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 59           | [14:00 – 17:00] | [14:00 – 14:30] |
| 61           | [15:00 – 18:30] | [15:00 – 16:00] |
| 63           | [09:00 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 72           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 73           | [14:00 – 17:00] | [17:00 – 18:00] |
| 78           | [15:00 – 18:30] | [15:00 – 16:00] |
| 81           | [15:00 – 18:30] | [15:00 – 16:00] |
| 87           | [14:00 – 17:00] | [15:00 – 16:00] |
| 88           | [14:00 – 17:00] | [15:00 – 15:30] |
| 89           | [14:00 – 18:30] | [15:00 – 15:30] |
| 90           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 93           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |

*Tabela A4.10 - Janelas de Tempo para a Instância r\_70\_12 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 1            | [09:30 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 2            | [09:30 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |
| 7            | [14:00 – 17:00] | [14:00 – 14:30] |
| 9            | [09:30 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 10           | [09:30 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 11           | [09:30 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 20           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 25           | [14:00 – 18:30] | [14:30 – 15:00] |
| 36           | [14:00 – 17:00] | [14:00 – 15:00] |
| 41           | [14:00 – 18:30] | [15:00 – 15:45] |
| 43           | [14:00 – 18:30] | [15:00 – 15:45] |
| 46           | [14:00 – 17:00] | [15:00 – 15:45] |
| 49           | [15:00 – 18:30] | [15:30 – 16:00] |
| 50           | [14:00 – 18:30] | [15:30 – 16:00] |
| 60           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 65           | [14:00 – 18:30] | [16:30 – 17:00] |
| 73           | [14:00 – 17:00] | [16:30 – 17:00] |
| 76           | [14:00 – 18:30] | [16:30 – 17:00] |
| 79           | [14:00 – 18:30] | [17:00 – 18:00] |
| 91           | [14:00 – 17:00] | [16:00 – 17:00] |
| 96           | [14:00 – 18:30] | [17:00 – 18:30] |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

*Tabela A4.11 - Janelas de Tempo para a Instância r\_80\_18 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 1            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 7            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 9            | [15:00 – 18:30] | [15:00 – 16:00] |
| 15           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 19           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 23           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 28           | [15:00 – 18:00] | [16:00 – 17:00] |
| 30           | [09:00 – 12:30] | [09:30 – 10:00] |
| 34           | [14:00 – 17:00] | [15:00 – 15:30] |
| 40           | [09:00 – 12:30] | [10:30 – 12:30] |
| 44           | [15:00 – 18:00] | [16:00 – 18:00] |
| 46           | [15:30 – 18:30] | [15:30 – 16:30] |
| 47           | [14:00 – 17:00] | [16:00 – 17:00] |
| 53           | [14:00 – 17:00] | [15:00 – 16:00] |
| 61           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 63           | [14:00 – 17:00] | [17:00 – 18:30] |
| 69           | [15:30 – 18:30] | [16:15 – 17:00] |
| 79           | [15:30 – 18:30] | [17:00 – 18:00] |
| 87           | [15:30 – 18:30] | [17:00 – 18:00] |
| 96           | [15:30 – 18:30] | [17:00 – 18:00] |

*Tabela A4.12 - Janelas de Tempo para a Instância r\_90\_22 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 1            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 4            | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 8            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 11           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 19           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 25           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 33           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 34           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 43           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 46           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 53           | [14:00 – 18:30] | [15:45 – 16:15] |
| 62           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 10:30] |
| 68           | [14:00 – 18:30] | [15:00 – 15:30] |
| 73           | [14:00 – 18:30] | [17:00 – 18:30] |
| 74           | [14:00 – 18:30] | [17:00 – 18:30] |
| 86           | [14:00 – 18:30] | [17:00 – 18:30] |
| 90           | [14:00 – 17:00] | [14:00 – 14:30] |
| 91           | [14:00 – 17:00] | [14:00 – 14:30] |

*Tabela A4.13 - Janelas de Tempo para a Instância r\_96\_24 e para as formulações F2\_c e F2\_p*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 6            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 9            | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 10           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 11           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 12           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 13           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 14           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 15           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 09:30] |
| 19           | [15:30 – 18:30] | [16:00 – 16:30] |
| 21           | [14:00 – 17:00] | [16:00 – 17:00] |
| 24           | [09:00 – 12:30] | [11:45 – 12:30] |
| 28           | [15:30 – 18:30] | [17:00 – 17:45] |
| 33           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 39           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 11:00] |
| 44           | [09:00 – 12:30] | [15:30 – 16:00] |
| 48           | [15:30 – 18:30] | [15:30 – 16:00] |
| 51           | [15:30 – 18:30] | [15:30 – 16:00] |
| 57           | [15:30 – 18:30] | [16:15 – 16:45] |
| 58           | [14:00 – 17:45] | [17:45 – 18:30] |
| 63           | [14:00 – 17:45] | [14:00 – 15:00] |
| 70           | [14:00 – 17:45] | [15:00 – 16:00] |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

| Cientes - ID | F2_c            | F2_p            |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 83           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 86           | [14:00 – 18:30] | [14:00 – 14:30] |
| 87           | [09:00 – 12:30] | [09:00 – 10:00] |
| 89           | [15:30 – 18:30] | [15:30 – 16:00] |
| 93           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 11:00] |
| 95           | [09:00 – 12:30] | [10:00 – 11:00] |

## **APÊNDICE 5. Janelas de Tempo das Instâncias Reais Utilizadas nos Casos Aplicados**

Nas tabelas seguintes é possível observar, de forma detalhada, as janelas de tempo dos clientes presentes nas instâncias reais dos casos aplicados, respetivamente, r\_10\_2 (Tabela A5.1), r\_12\_2 (Tabela A5.2) e r\_15\_2 (Tabela A5.3).

*Tabela A5.1 - Janelas de Tempo da Instância r\_10\_2 do caso aplicado*

| Cientes | Janelas de Tempo |
|---------|------------------|
| 7       | [14:00 – 15:00]  |
| 32      | [16:00 – 17:30]  |
| 45      | [16:00 – 17:30]  |
| 90      | [14:00 – 15:00]  |

*Tabela A5.2 - Janelas de Tempo da Instância r\_12\_2 do caso aplicado*

| Cientes | Janelas de Tempo |
|---------|------------------|
| 9       | [09:00 – 12:30]  |
| 35      | [16:00 – 17:30]  |
| 55      | [11:00 – 12:30]  |
| 69      | [16:00 – 16:30]  |
| 88      | [16:00 – 16:30]  |
| 96      | [16:00 – 17:30]  |

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

---

*Tabela A5.3 - Janelas de Tempo da Instância r\_15\_2 do caso aplicado*

| Cientes | Janelas de Tempo |
|---------|------------------|
| 2       | [10:30 – 11:00]  |
| 12      | [09:00 – 11:00]  |
| 40      | [16:00 – 17:30]  |
| 42      | [16:00 – 17:30]  |
| 46      | [10:30 – 11:00]  |
| 88      | [09:00 – 12:30]  |

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

## APÊNDICE 6. Visualização Detalhada das Rotas referentes ao colaborador A e 15 clientes

De modo a comprovar que as rotas do colaborador A são abertas, apresentam-se as Figuras A6.1 e A6.2, em que (a) representa a imagem ilustrada anteriormente no subcapítulo 6.3.3 e (b) a sua ampliação, permitindo verificar que se tratam de rotas abertas.

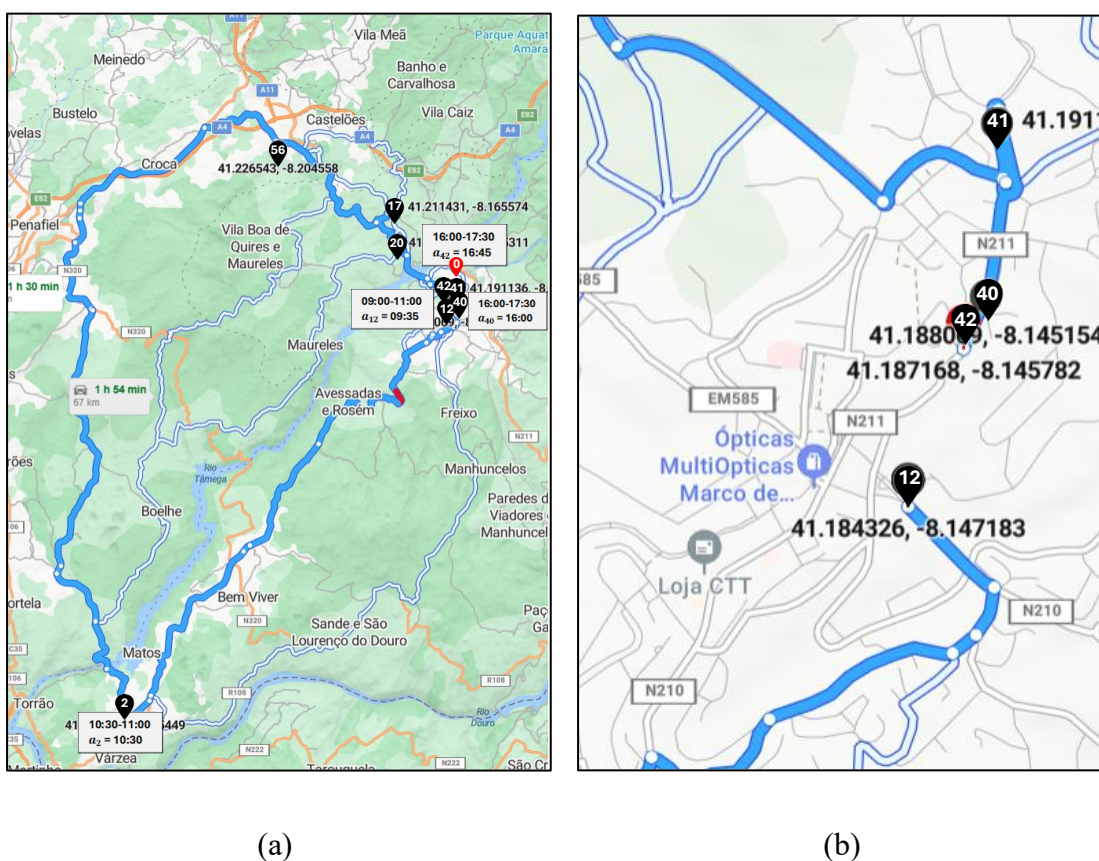
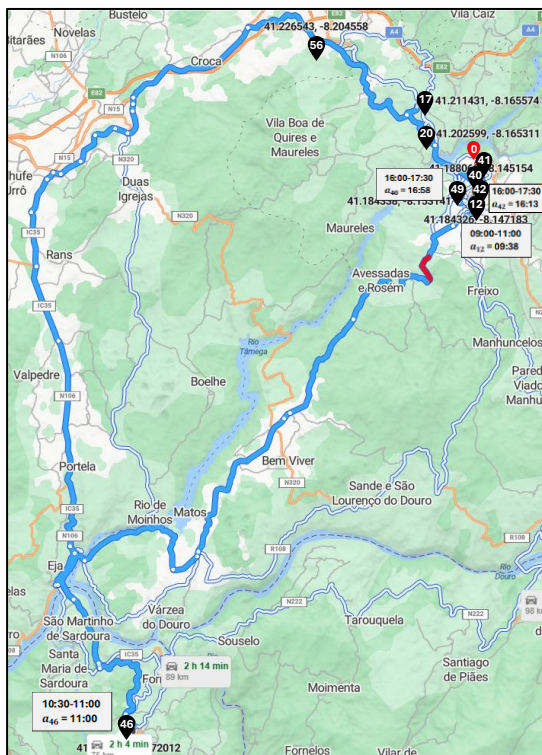


Figura A6.1 - Visualização da rota manual do colaborador A (a), com ampliação do local onde a rota começa (cliente 12) e termina (cliente 42)

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios



## APÊNDICE 7. Visualização das Rotas com Diferentes Cenários de Janelas de Tempo

Neste apêndice, apresentam-se as rotas dos restantes colaboradores da análise feita no subcapítulo 6.3.5, confirmando a análise realizada para as rotas do colaborador A, ou seja, à medida que as janelas de tempo se tornam mais apertadas, as rotas também sofrem alterações. Muitas delas apresentam padrões semelhantes devido à presença de clientes obrigatórios, mas, de uma forma geral, as rotas com janelas de tempo mais apertadas são as que exibem maiores diferenças em relação aos outros cenários.

- Colaborador B

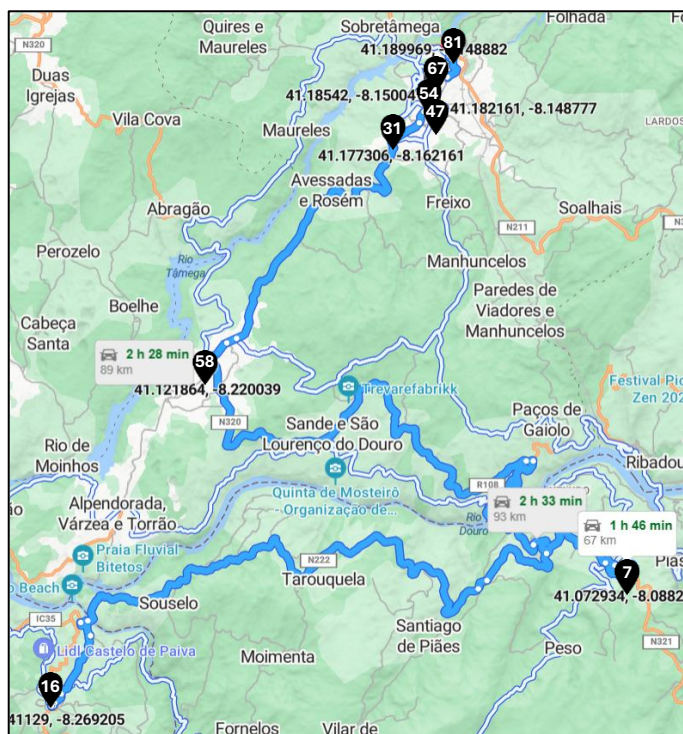


Figura A7.1 - Rota do colaborador B sem janelas de tempo

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

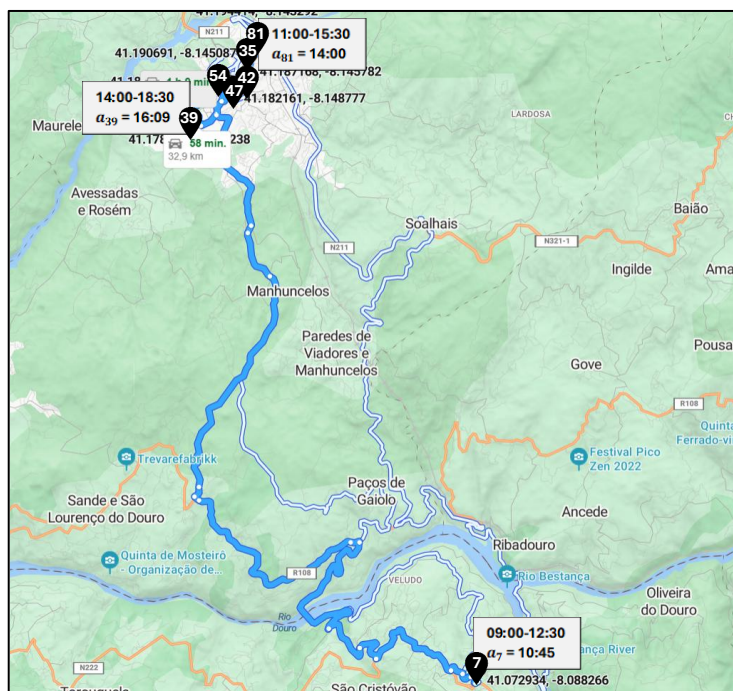


Figura A7.2 - Rota do colaborador B com janelas de tempo regulares

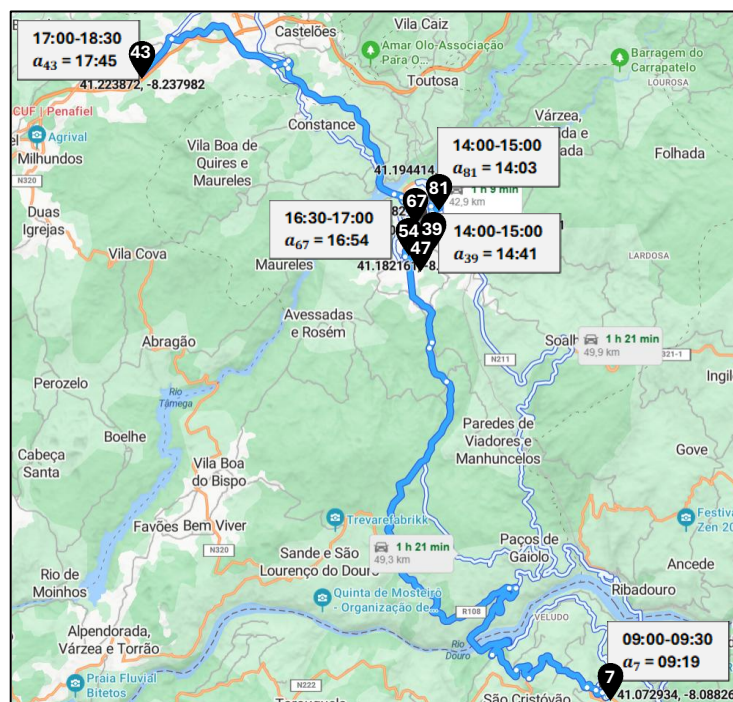


Figura A7.3 - Rota do colaborador B com janelas de tempo apertadas

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

- Colaborador C

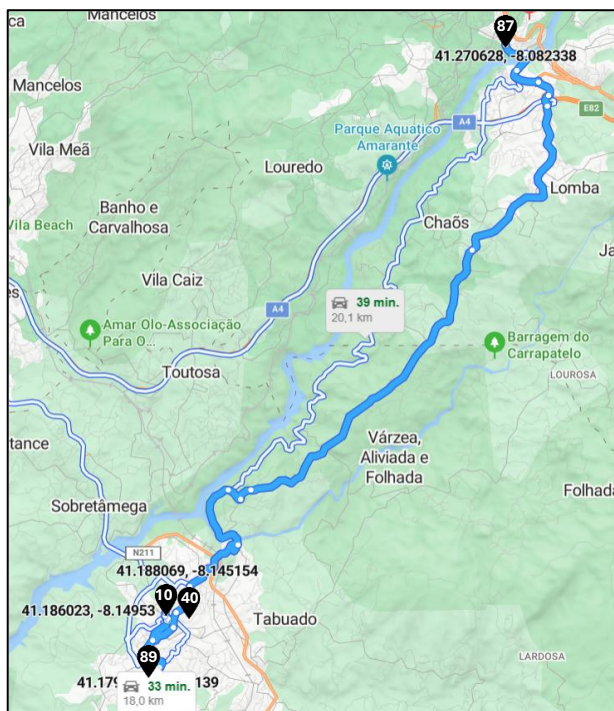


Figura A7.4 - Rota do colaborador C sem janelas de tempo

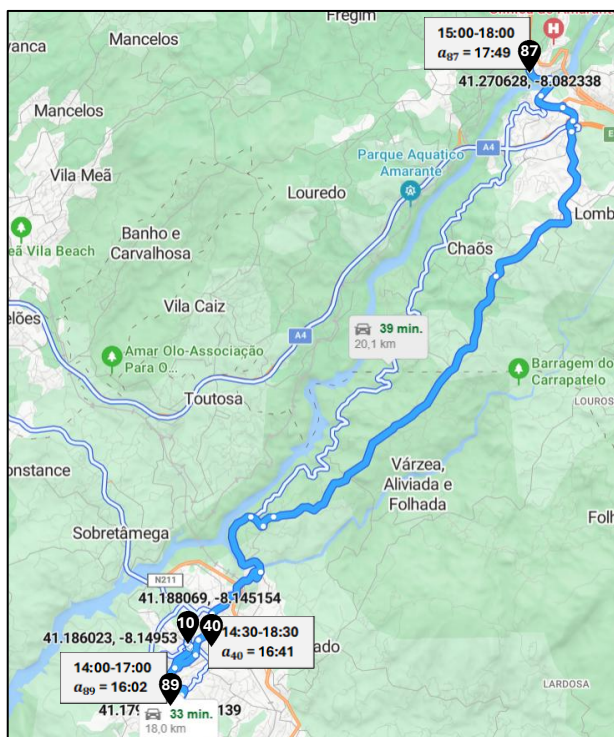


Figura A7.5 - Rota do colaborador C com janelas de tempo regulares

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

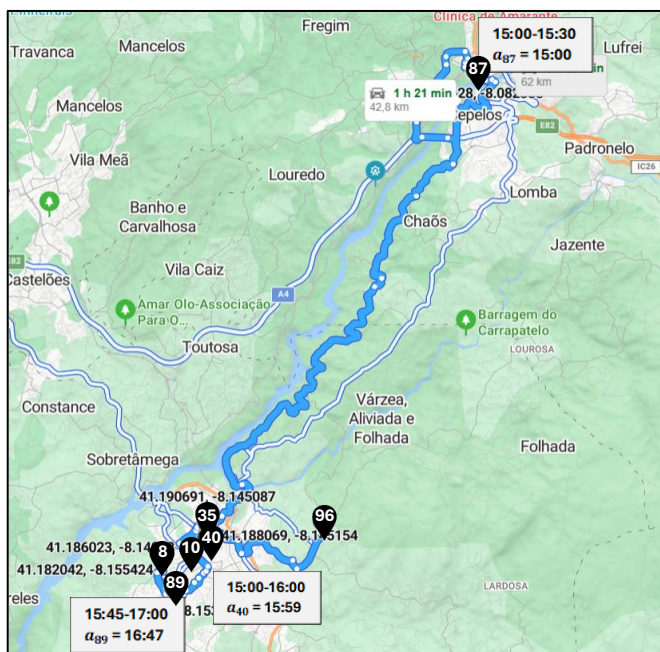


Figura A7.6 - Rota do colaborador C com janelas de tempo abertas

- Colaborador D

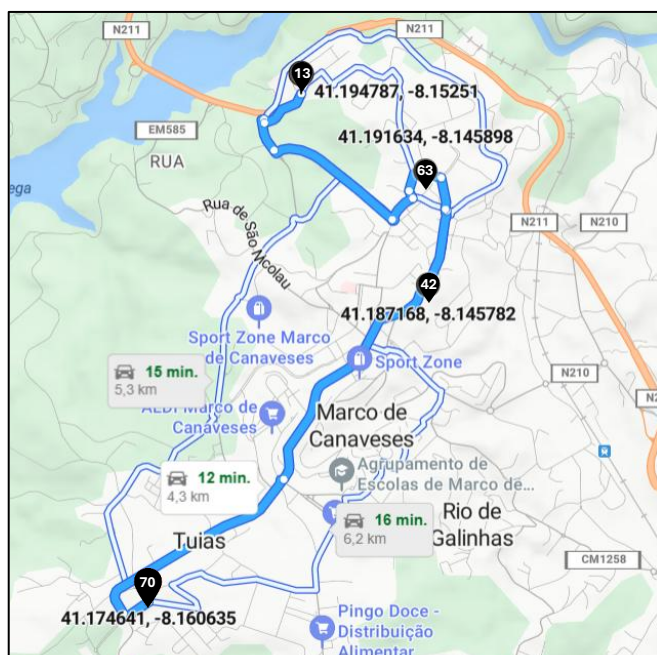


Figura A7.7 - Rota do colaborador D sem janelas de tempo

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

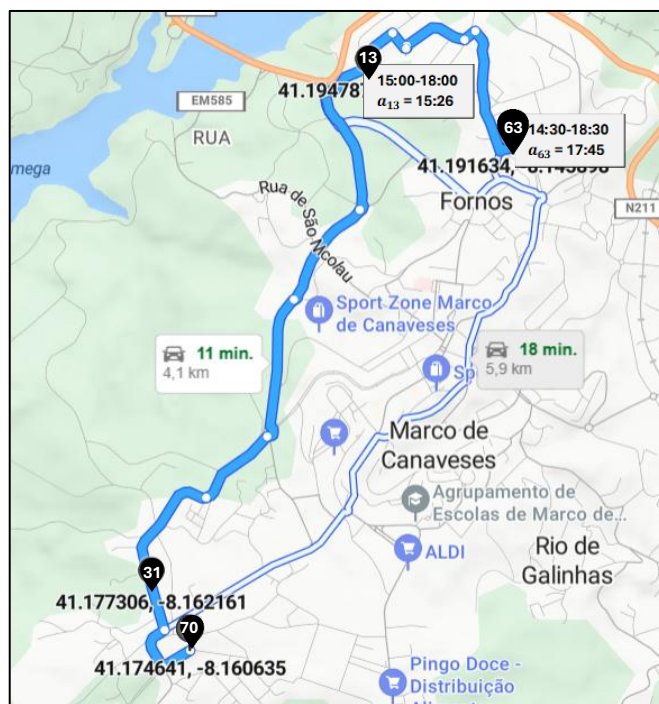


Figura A7.8 - Rota do colaborador D com janelas de tempo regulares

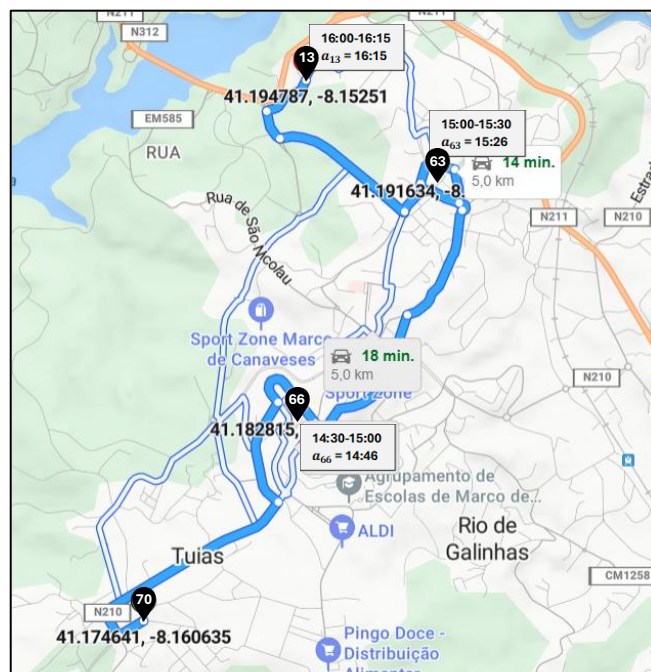


Figura A7.9 - Rota do colaborador D com janelas de tempo apertadas

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

- Colaborador E

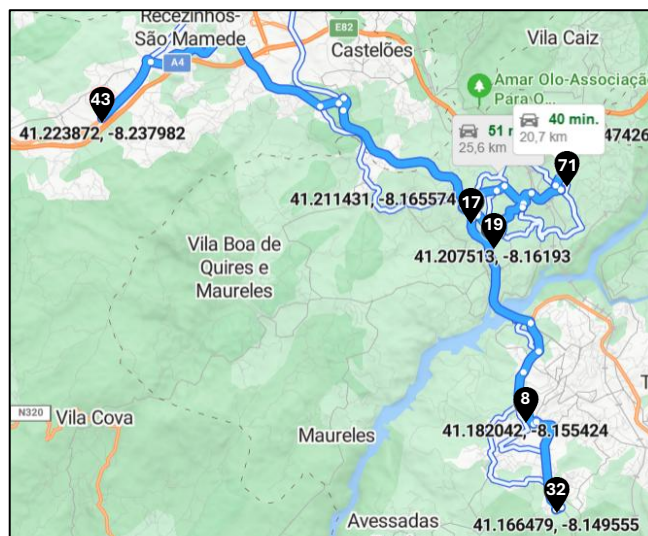


Figura A7.10 - Rota do colaborador E sem janelas de tempo

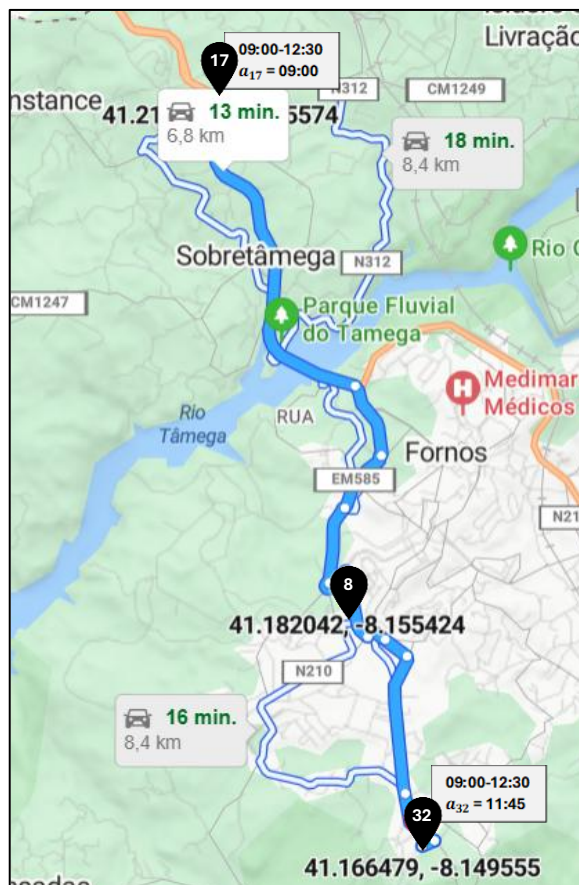


Figura A7.11 - Rota do colaborador E com janelas de tempo regulares

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

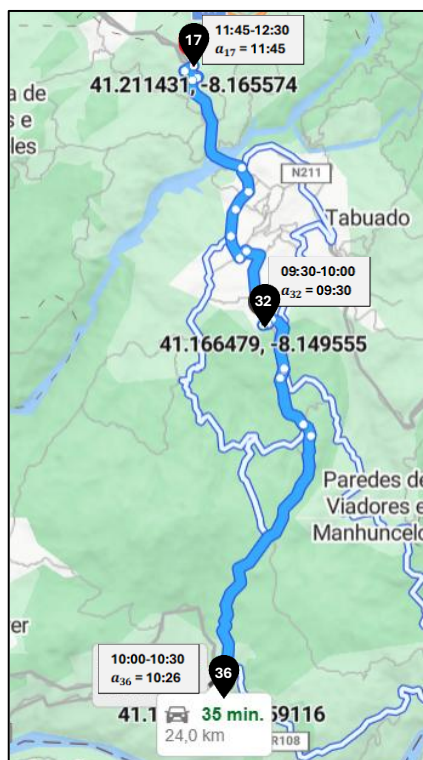


Figura A7.12 - Rota do colaborador E com janelas de tempo apertadas

- Colaborador F

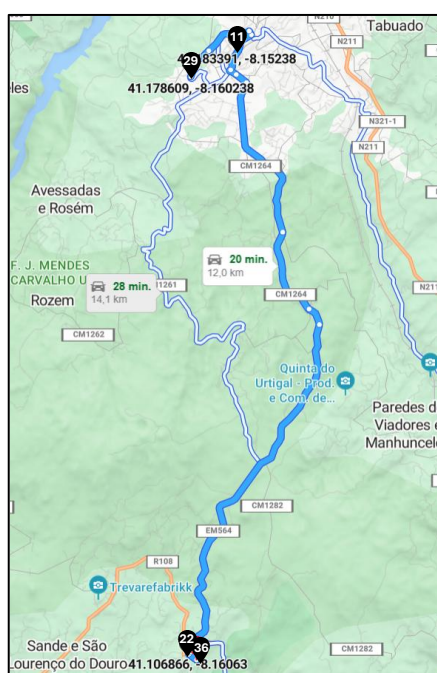


Figura A7.13 - Rota do colaborador F sem janelas de tempo

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

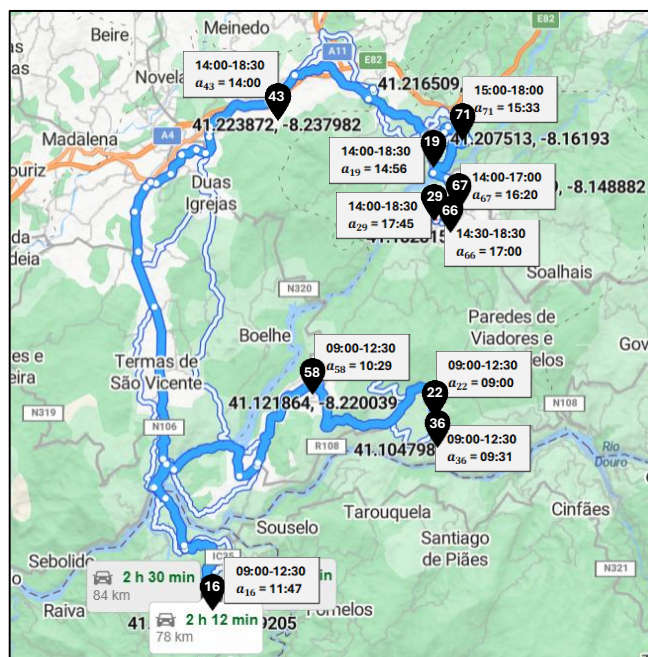


Figura A7.14 - Rota do colaborador F com janelas de tempo regulares

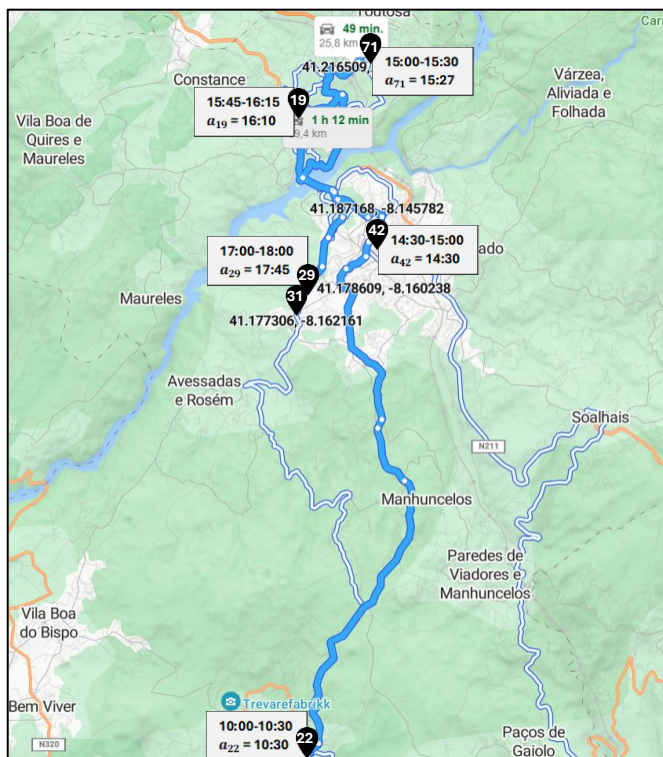


Figura A7.15 - Rota do colaborador F com janelas de tempo apertadas

Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios

- Colaborador G

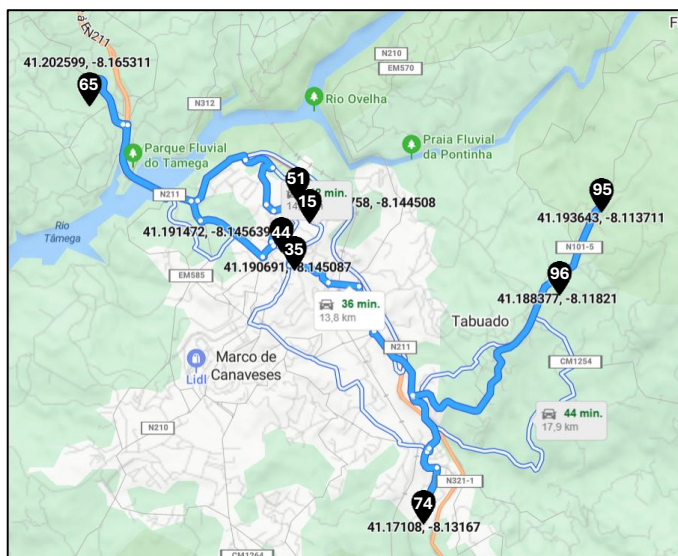


Figura A7.16 - Rota do colaborador G sem janelas de tempo

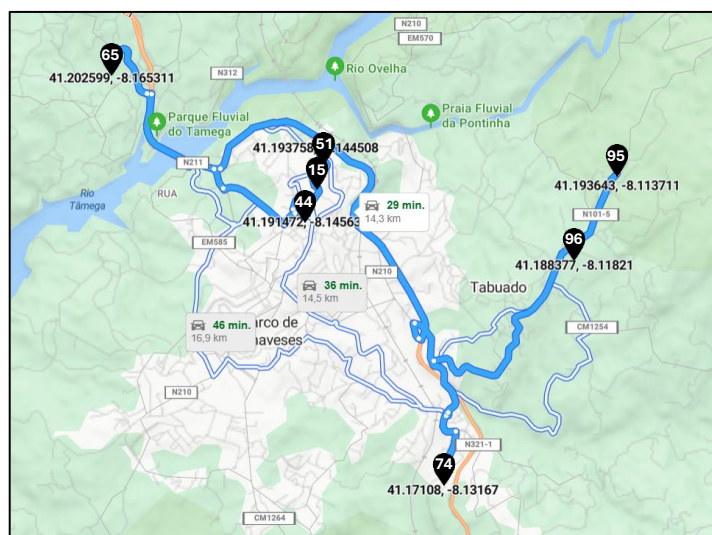


Figura A7.17 - Rota do colaborador G com janelas de tempo regulares

Neste caso, Figura A7.17, mesmo sendo com janelas de tempo regulares, nenhum dos clientes presentes tem janelas de tempo.

*Planeamento de rotas usando modelos de otimização matemática – Caso aplicado a empresa de condomínios*

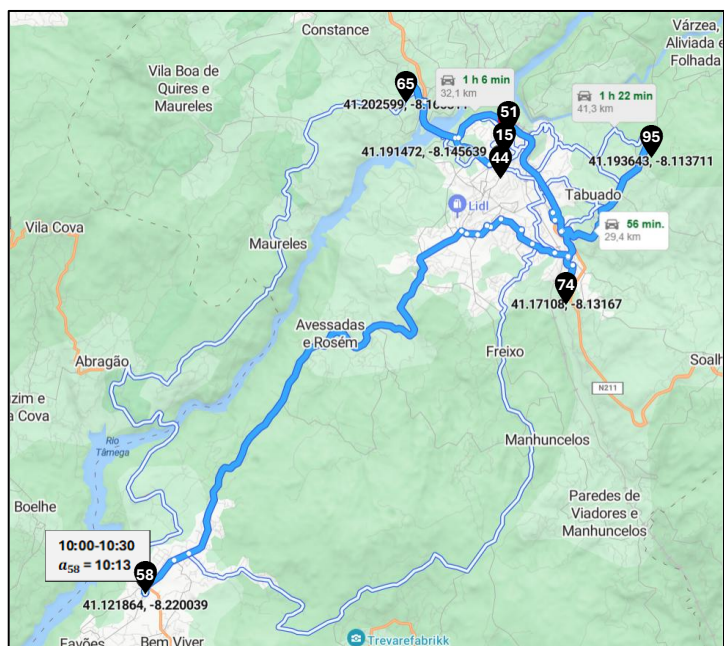


Figura A7.18 - Rota do colaborador G com janelas de tempo apertadas