IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Ana Filipa

Eleutério Vieira

A aprendizagem da adição e subtração através da resolução de problemas

Relatório da componente de investigação de Estágio III do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Setúbal, dezembro de 2016

Versão Final

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Ana Filipa
Eleutério Vieira

A aprendizagem da adição e subtração através da resolução de problemas

Tese orientada pela Professora Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes

Relatório da componente de investigação de Estágio III do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Setúbal, dezembro de 2016

Versão Final

Agradecimentos

O presente relatório representa o término de uma etapa há muito tempo desejada, em que o caminho percorrido se encontrava repleto de desafios, dificuldades e aprendizagens. Muitas foram as pessoas que se cruzaram comigo ao longo deste percurso, outras já me acompanham há muitos anos, mas todas elas foram importantes para concretizar o sonho de finalizar o curso. Assim, não posso deixar de agradecer:

À professora cooperante, por possibilitar a realização deste estudo e aos alunos do 2.º A que participaram no mesmo. Ficarão para sempre guardados no meu coração.

À minha orientadora, Professora Doutora Fátima Mendes, pelo apoio prestado desde o primeiro momento, pela motivação e palavras de incentivo que me ajudaram a superar dificuldades e, sobretudo, obrigada por nunca me ter deixado desistir!

Às minhas colegas de curso que se tornaram minhas amigas, em especial à Susana, Catarina e Nádia, com quem tive oportunidade de experimentar, errar, aprender, desabafar e passar bons momentos ao longo do meu percurso académico.

À minha amiga Marisa por partilhar comigo a experiência vivida ao longo deste projeto. Obrigada pelo apoio nos momentos difíceis e por me conseguires motivar com as tuas palavras. Realmente, em equipa foi mais fácil! Obrigada pela nossa amizade.

Aos meus amigos que sempre se preocuparam que terminasse este percurso e por me fazerem rir nos momentos de *stress*.

À Tuna Sadina, por todos os momentos de descontração e pelas amizades que ficam para a vida.

Ao André, o meu namorado, pelo apoio ao longo de todos estes anos, por sempre insistires comigo em não desistir, por me teres feito lutar contra a minha preguiça, por estares ao meu lado enquanto escrevia muitas das linhas deste projeto e pela paciência nos momentos de maior angústia. Peço-te desculpa pela minha ausência nos momentos finais deste percurso, mas fica com a certeza que estiveste sempre no meu coração.

À minha família, em especial aos meus pais, pelo apoio incondicional, pelo carinho, pelo amor e compreensão que demonstraram ao longo deste percurso. Peço-vos também desculpa pelas minhas ausências a que este projeto me obrigou, mas estou convicta de que lutámos em conjunto para chegar até aqui. Obrigada por me terem dado oportunidade de realizar este sonho e por a cada dia se orgulharem mais de mim!

A todos, muito obrigada!

Resumo

O presente estudo foca-se na resolução de problemas de adição e subtração no contexto do 2.º ano de escolaridade, tendo como objetivo compreender o modo como os alunos resolvem esses problemas. Mais concretamente, pretende identificar as estratégias utilizadas pelos alunos, compreender as dificuldades que manifestam e perceber se, no final do estudo, houve mudanças nas estratégias utilizadas.

A fundamentação teórica inclui, essencialmente, os seguintes tópicos: o sentido de número e cálculo mental; a aprendizagem das operações de adição e subtração e a resolução de problemas destas operações; as estratégias de adição e subtração; as dificuldades na resolução de problemas de adição e subtração; e, finalmente, a resolução de problemas destas operações nas orientações curriculares.

Do ponto de vista metodológico, esta investigação caracteriza-se como qualitativa e enquadra-se num paradigma interpretativo. Nela participaram 17 alunos pertencentes a uma turma do 2.º ano de escolaridade, tendo sido escolhidos 2 desses alunos para uma análise aprofundada das suas resoluções.

A recolha de dados ocorreu ao longo de quatro semanas e meia através da observação participante, de entrevistas clínicas e da análise documental. A análise dos catorze problemas, construídos ou adaptados por mim, teve por base as produções escritas de dois alunos permitindo obter conclusões desta investigação.

Os resultados deste estudo evidenciam que: (1) os alunos recorrem a três tipos de representação do cálculo para resolver os problemas: horizontal, vertical e através da reta numérica; (2) as estratégias mais utilizadas são a 1010, uma próxima ao algoritmo e a N10; (3) nos problemas de subtração com sentido completar e comparar os alunos tendem a utilizar estratégias aditivas, enquanto que nos problemas com sentido retirar não se verifica qualquer preferência; (4) as principais dificuldades relacionam-se com a interpretação de enunciados, a seleção e utilização correta das estratégias, a interpretação dos resultados e a justificação dos raciocínios; (5) os alunos tiveram oportunidade de conhecer e manipular um modelo de apoio ao cálculo, a reta numérica, que os conduziu à utilização de novas estratégias.

Palavras-chave: Aprendizagem da adição e subtração; Estratégias de adição e subtração; Resolução de problemas; Dificuldades dos alunos.

Abstract

The present study focuses on solving addition and subtraction problems in the context of the second grade, aiming at how students solve these problems. More specifically, it intends to identify the strategies used by the students, to understand the difficulties they manifest and to perceive if, at the end of the study, there were changes in the strategies used.

The theoretical framework includes, essentially, the following topics: number sense and mental calculation; learning the operations of addition and subtraction and problems solving with these operations; addition and subtraction strategies; difficulties in solving addition and subtraction problems; and, finally, the resolution of problems with these operations in the curricular guidelines.

From the methodological point of view, this research is characterized as qualitative and fits into an interpretative paradigm. The study involves seventeen students belonging to a second grade, and two of these students were chosen for an in-depth analysis of their resolutions.

Data collection took place over four and a half weeks through participant observation, clinical interviews, and documental analysis. The analysis of the fourteen problems, constructed or adapted by me, was based on the written productions of two students, allowing to obtain the conclusions of this investigation.

The results of this study show that: (1) students use three types of calculus representation to solve the problems: horizontal, vertical and across the number line; (2) the most commonly used strategies are 1010, close to the algorithm, and N10; (3) in the subtraction problems with meaning to complete and compare the students tend to use additive strategies, while in the problems with withdraw sense there is no preference; (4) the main difficulties are related to the interpretation of the problems statements, selection and correct use of strategies, interpretation of results and justification of reasoning; (5) the students had the opportunity to know and manipulate a model of support to the calculation, the numerical line, that led them to use new strategies.

Keywords: Learning of addition and subtraction; Addition and subtraction strategies; Problem solving; Difficulties of students.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Tabelas

Capítulo 1 – Introdução

No presente capítulo é apresentado o tema do projeto de investigação bem como as minhas motivações pessoais que conduziram à escolha do mesmo e, também, os objetivos e questões do estudo desenvolvido numa turma do 2.º ano de escolaridade. A pertinência do estudo no contexto educativo assume também um enfoque neste capítulo e, por fim, apresento, sucintamente, a estrutura geral deste documento.

1.1. Motivações, objetivos e questões do estudo

Ao longo dos anos, tem sido criada uma (falsa) imagem agregada à disciplina de Matemática, devido aos resultados insatisfatórios obtidos pelos alunos nos exames nacionais. Esta imagem influencia toda a sociedade e, principalmente, os mais pequenos, que desde cedo poderão rotular esta disciplina de forma errada. Neste sentido, preocupa-me que este clima conduza a um desinteresse e desmotivação das crianças por uma área que, como tantas outras, se encontra, indiscutivelmente, presente nas suas vidas, a Matemática.

É no 1.º Ciclo do Ensino Básico que as crianças têm o primeiro contacto formal com a Matemática e, por isso, cabe ao professor propor tarefas que motivem a sua curiosidade, suscitando, assim, o interesse dos alunos em querer descobrir e saber mais. Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar

> As bases para o desenvolvimento matemático das crianças são estabelecidas desde cedo. A aprendizagem matemática é construída a partir da sua curiosidade e entusiasmo e é desenvolvida, de forma natural, a partir das suas experiências. (NCTM, 2007, p. 83)

Foi para um caminho de interesse e descoberta que me guiaram os professores de Matemática, com os quais me cruzei no decorrer da minha vida académica. Um caminho repleto de desafios, com níveis de dificuldade, gradualmente, mais exigentes mas onde os números conferiam cada vez mais sentido às equações, fórmulas, funções e outros conteúdos matemáticos. Nesta procura constante em querer saber mais, muitas vezes sentia frustração e insatisfação com os resultados. Contudo, este sentimento era frequentemente substituído pela persistência e pelo prazer do desafio em encontrar as respostas corretas.

O facto de, durante o meu percurso académico, ter criado uma relação bastante prazerosa com a disciplina de Matemática, influenciou a escolha da área a trabalhar no presente projeto de investigação. Para além disto, considero bastante interessante e enriquecedor escutar e compreender os diferentes raciocínios das crianças perante uma tarefa, promovendo a sua partilha, de modo a conduzir à progressão do seu pensamento matemático.

O meu projeto de investigação foi desenvolvido numa turma do 2.º ano do 1.º Ciclo do Ensino básico, onde realizei dois estágios no âmbito das Unidades Curriculares Estágio II e Estágio III. Ao observar e intervir na turma que acompanhei, tive oportunidade de compreender que os alunos revelavam algumas dificuldades associadas ao sentido de número e, consequentemente, às operações aritméticas abordadas – adição e subtração. Neste sentido, considerei pertinente focar a minha investigação nas estratégias usadas pelos alunos quando resolvem problemas, proporcionando, assim, momentos dedicados, exclusivamente, ao trabalho com as operações já referidas, através da resolução de problemas de forma sistemática. Deste modo, o tema do meu relatório de intervenção foca-se na resolução de problemas de adição e subtração no contexto do 2.º ano de escolaridade, tendo como objetivo compreender o modo como os alunos resolvem esses problemas.

Considerando o objetivo acima enunciado, identifico as questões que orientam a minha investigação:

- Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtração?
- Quais as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtração?
- Que mudanças, se existirem, se identificam nas estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a adição e subtração?

1.2. Pertinência do estudo

As operações aritméticas adição e subtração, assumem-se como o foco de trabalho na área curricular de Matemática nos 1.º e 2.º anos de escolaridade (Ferreira, 2008), sendo necessário que os alunos adquiram fluência de cálculo e destreza no uso destas duas operações. É de salientar que, as orientações curriculares ao nível do ensino da

Matemática têm vindo a realçar "opções curriculares que, em vez de se centrarem na memorização e aplicação de técnicas de cálculo, dão ênfase à apropriação de aspectos essenciais dos números e suas relações" (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2006, p. 64). Assim, para que os alunos consigam estabelecer relações entre os números e as operações revela-se essencial que os mesmos desenvolvam uma aprendizagem central da Matemática, o sentido de número, contrariamente ao que é defendido pelo programa de Matemática em vigor que dá primazia à aprendizagem dos algoritmos das quatro operações aritméticas referindo que "É fundamental que os alunos adquiram (…) fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos" (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013, p. 6). Segundo Kamii e Dominick (1998), a aprendizagem focada nos algoritmos não permite desenvolver o raciocínio numérico dos alunos, uma vez que os alunos que utilizam outras estratégias obtêm respostas mais corretas para os problemas e aparentam um melhor conhecimento sobre os números. Os autores afirmam, ainda, que o uso predominante dos algoritmos conduz os alunos a desistir dos seus próprios pensamentos e processos, impedindo-os de desenvolver o seu sentido de número. Por isso a aprendizagem e utilização dos vários algoritmos deve "culminar um longo trabalho centrado na compreensão dos números e das operações" (Brocardo & Serrazina, 2008, p. 101).

O desenvolvimento do sentido de número pressupõe que os alunos consigam compreender os números e as operações de uma forma global colocando, assim, esta competência em prática de forma flexível, com o objetivo de analisarem situações e desenvolverem estratégias que lhes permitam manipular os números e as operações (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2006; Serrazina, Sousa, & Gonçalves, 2005). Neste sentido, torna-se fulcral que o docente, na área da Matemática, assuma o papel de

> encorajar os alunos a mostrar e a aprofundar os seus conhecimentos dos números e das operações, através da resolução de problemas contextualizados, interessantes e da discussão das representações e das estratégias utilizadas. (NCTM, 2007, p. 91)

A resolução de problemas acompanha toda a atividade matemática uma vez que se revela essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Esta é uma atividade natural na vida das crianças, já que acontece sempre que se deparam com novas situações (NCTM, 2007). Segundo Ponte e Serrazina (2000) a resolução de problemas auxilia os alunos a desenvolver várias competências, uma vez que "ajuda a desenvolver a compreensão das ideias matemáticas e a consolidar as capacidades já aprendidas, (…)

[sendo que] constitui um importante meio de desenvolver novas ideias matemáticas" (pp. 55-56).

Considerando a importância da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática, a escolha dos problemas a apresentar aos alunos não pode ser aleatória, visto que estes devem ter intencionalidades específicas, ser adequados à aprendizagem e contextualizados, para que os alunos lhes possam atribuir significado. Brocardo (2011) defende que o professor terá de desenvolver uma «lente» que lhe permita analisar tarefas percebendo as suas potencialidades e, se necessário, adequá-las de modo a construir novas tarefas que propiciem um maior desenvolvimento matemático dos alunos aleado a um pensamento flexível, de forma a mobilizá-lo antes da utilização de um algoritmo.

Sendo este projeto baseado na resolução de problemas de adição e subtração é importante referir que estas operações devam ser exploradas através de problemas matemáticos que tenham contextos aliados ao quotidiano dos alunos, pois desta forma "eles irão usar os seus conhecimentos e métodos informais para os resolver, dando significado real a estas operações" (Brocardo, et al., 2005, p. 18).

Associadas à resolução de problemas, surgem as mais diversas estratégias utilizadas pelos alunos que, de acordo com o sentido de número de cada um, caracterizar-se-ão como mais ou menos sofisticadas. Contudo, deve ser proporcionado tempo para que os alunos observem os números e criem relações entre eles uma vez que "para se ser capaz de calcular usando o sentido do número, não é suficiente dispor de uma grande quantidade de estratégias, é preciso também saber olhar para os números envolvidos em cada situação" (Ferreira, Mendes, & Pratas, 2005, p. 30). Devido às diferentes vivências e níveis de aprendizagem de cada aluno, revela-se fulcral que os alunos partilhem as suas estratégias com a turma, visto que

> A partilha proporciona aos alunos oportunidades de ouvir novas ideias, de as comparar com as suas próprias e de justificar o seu raciocínio. À medida que os alunos se debatem com problemas, conseguir obter uma série de resoluções correctas aumenta as suas hipóteses de aprenderem estratégias úteis. (NCTM, 2007, p. 137)

Não sendo privilegiado o pensamento algorítmico neste projeto, pretende-se então analisar e refletir sobre as estratégias informais utilizadas pelos alunos, uma vez que estas

> fornecem pistas muito importantes ao professor, que lhes permite acompanhar e identificar dificuldades sentidas por eles e, por outro lado, perceber os seus modos de pensar, muitas vezes bem diferentes daquilo que imaginamos (Ferreira, Mendes, & Pratas, 2005, p. 35)

1.3. Organização geral do estudo

Este relatório é composto por seis capítulos. O primeiro corresponde ao presente capítulo onde apresento as motivações, objetivos e questões do estudo, bem como a pertinência do mesmo.

No segundo capítulo apresento a revisão da literatura encontrando-se organizado em cinco secções. Primeiramente caracterizo os conceitos de sentido de número e cálculo mental, mencionando também a forma como se relacionam e como são desenvolvidas essas capacidades ao longo da aprendizagem da matemática. Seguidamente, foco-me na aprendizagem das operações de adição e subtração onde são referidos os níveis de cálculo e modelos estruturais, sendo atribuído destaque à reta numérica como modelo de apoio ao cálculo. Ainda na segunda secção defino problema, a importância de resolver problemas e os sentidos das operações de adição e subtração. Na terceira parte são explicitadas as estratégias da adição e subtração referidas por Thompson e Smith (1999) e Foxman e Beishuizen (2002). Seguem-se as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas em geral e especificamente na resolução de problemas de adição e subtração. Por fim, discuto a presença da resolução de problemas de adição e subtração nas orientações curriculares.

No terceiro capítulo descrevo e justifico as opções metodológicas adotadas neste estudo, apresento o contexto e os participantes e, por fim, explico as técnicas de recolha e análise de dados utilizadas.

O quarto capítulo inclui a proposta pedagógica que concebi e concretizei no âmbito do desenvolvimento deste projeto. Apresento a sua estrutura, calendarização e fonte dos problemas. Descrevo as quatro grandes partes em a minha intervenção foi divida e apresento os problemas propostos, detalhando as suas datas de exploração, fonte, objetivos, operações e sentidos subjacentes, a justificação dos números escolhidos e as estratégias antecipadas. Por fim, descrevo o modo como os problemas foram explorados.

No quinto capítulo, referente à análise de dados são analisadas as produções de dois alunos bem como os dados oriundos de entrevistas clínicas gravadas ao longo da investigação. No final da análise relativa aos dados associados a cada aluno apresento uma síntese onde refiro as estratégias usadas, dificuldades manifestadas e eventuais mudanças nas estratégias usadas inicialmente.

Por fim, no sexto capítulo apresento as conclusões do estudo. Primeiramente elaboro uma síntese do estudo, focando o contexto e o objetivo do estudo, as três questões de investigação, bem como os principais aspetos metodológicos do mesmo. Seguidamente tento dar resposta às questões de investigação apresentando alguns autores de referência e, tendo em consideração a análise de dados. Termino uma reflexão pessoal sobre todo o trabalho realizado.

Capítulo II – Revisão da Literatura

O presente capítulo destina-se à revisão da literatura onde me debruço sobre os aspetos essenciais da temática de investigação. Este capítulo encontra-se organizado em cinco secções distintas. Na primeira secção caracterizo os conceitos de sentido de número e cálculo mental, mencionando também a forma como se relacionam e como são desenvolvidos ao longo da aprendizagem da matemática. A segunda secção diz respeito à aprendizagem das operações de adição e subtração onde são referidos os níveis de cálculo e modelos estruturais referentes à aprendizagem destas operações, sendo atribuído destaque à reta numérica como modelo de apoio ao cálculo. Alicerçada a esta secção surge uma subsecção destinada à resolução de problemas de adição e subtração onde é explicitada a definição de problema, a importância de resolver problemas e os sentidos das operações de adição e subtração. Na terceira secção apresento e explico as diferentes categorizações das estratégias da adição e subtração referidas por Thompson e Smith (1999) e Foxman e Beishuizen (2002). Na quarta parte enuncio algumas dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas em geral e, especificamente, na resolução de problemas de adição e subtração. Por fim, discuto a presença da resolução de problemas de adição e subtração nas orientações curriculares, estabelecendo relações entre os documentos de referência para o ensino desta temática.

2.1. Sentido de número e cálculo mental

Ao longo dos anos, tem sido destacada a importância de se proporcionar às crianças situações que permitam a compreensão dos diferentes significados de número, bem como dos diferentes sentidos das operações, de forma a ser promovido o desenvolvimento do sentido de número, desde cedo. Contudo, compreender o significado desta expressão não se revela uma tarefa fácil, uma vez que a sua caracterização se encontra relacionada com as ideias que se foram estabelecendo sobre os números e as operações ao longo do tempo.

Segundo Piaget, “a construção do número progride de acordo com o desenvolvimento da lógica e do período pré-numérico, que nas crianças até aos 5/6 anos corresponde ao período pré-lógico” (Brocardo, et al., 2005, p. 12). Nesta fase muitas vezes as crianças apresentam a capacidade de realizar contagens contudo, não têm ainda adquiridas algumas noções matemáticas tais como: correspondência biunívoca, princípio de inclusão hierárquica e conservação do número.

A correspondência biunívoca implica que tenhamos dois conjuntos – A, B – e que a cada elemento do conjunto A corresponda a um e só um elemento do conjunto B. Na prática, as crianças, no período acima referido, não realizam ainda a correspondência entre as palavras de contagem (conjunto A) e os objetos a contar (conjunto B). Para além disto, é necessário referir que não compreendem, também, que o último objeto contado, e consequentemente, o último número mencionado, corresponde ao cardinal do conjunto contado (Castro & Rodrigues, 2008b). Relativamente ao princípio da inclusão hierárquica, este refere-se à relação entre um conjunto e os seus subconjuntos, sendo que se deve reter que os subconjuntos estão contidos no respetivo conjunto – significa perceber que o 5 está contido no 6 e que este está contido no 7, etc. Ou seja, se uma criança ainda não for capaz de fazer a inclusão hierárquica poderá não compreender que se possuir dez flores também possui 5, ou 8 ou 9, por exemplo. Finalmente, ter a noção de conservação de número implica que as crianças identifiquem "o número como uma propriedade de um conjunto de objetos, independentemente do modo como estão dispostos" (Castro & Rodrigues, 2008a, p. 118). Por exemplo, se dispusermos duas filas, paralelas, de cinco bolachas as crianças irão referir que têm a mesma quantidade. Contudo, numa segunda fase, se afastarmos as bolachas de uma das filas, as crianças, que se encontram no período pré-lógico, dirão que essa mesma fila possui um maior número de bolachas (Figura 1), revelando que não têm ainda adquirida a noção de conservação das quantidades.

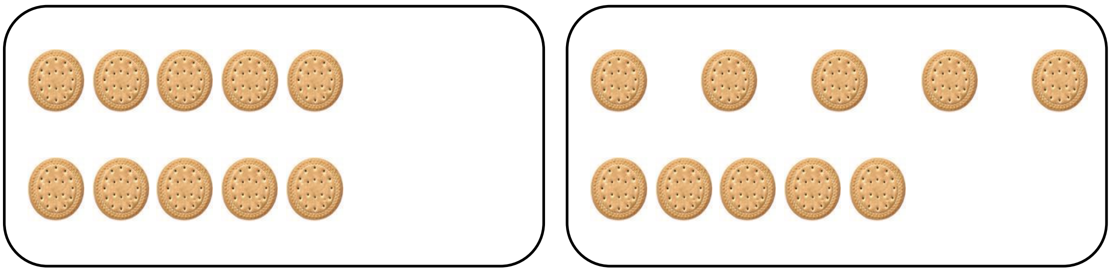


Figura 1 - Exemplo de exercício de conservação do número

Para Piaget, os conceitos acima mencionados complementam-se e relacionam-se entre si, sendo, por isso, essencial que a sua aquisição ocorra de forma ordenada, uma vez que se mostram essenciais para o desenvolvimento do sentido de número das crianças, já que "a aprendizagem dos conceitos numéricos só poderá realizar-se após a aquisição de determinadas estruturas lógicas" (Castro & Rodrigues, 2008a, p. 120). As estruturas lógicas mencionadas por este autor são a classificação e seriação, ou seja

> para que um conjunto de elementos tenha o estatuto de uma quantidade numérica, deve ser percebido, identificado, tomado em consideração, em função do número de elementos que o compõem e ser reconhecido como mais pequeno ou maior que um outro em função deste mesmo critério. (Ferreira, 2012, p. 17)

Piaget afirmava, também, que o conhecimento da sequência numérica se referia, apenas, a um procedimento social equivalente a conhecer uma canção/lengalenga. De acordo com Castro e Rodrigues (2008a), por este motivo não influenciava o desenvolvimento do sentido de número das crianças, pois este só seria adquirido quando as mesmas se encontrassem no período das operações concretas.

Outros autores que se seguiram a Jean Piaget encontraram algumas lacunas na sua rígida teoria, uma vez que consideraram que apesar de as crianças não terem adquiridas algumas noções matemáticas já apresentavam algum sentido de número. Nunes, Campos, Magina e Bryant (2001), defendiam que o desenvolvimento lógico da criança se apresentava dissociado das competências pré-numéricas da mesma, já que estas podem ser estimuladas no seu quotidiano onde se poderão desenvolver estratégias numéricas informais face à resolução de problemas. Neste sentido, contrariamente à teoria de Piaget encontramo-nos perante "outra posição epistemológica que considera o conhecimento da sequência numérica e a capacidade de contagem o ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos numéricos" (Castro & Rodrigues, 2008a, p. 121). Segundo Serrazina, Sousa e Gonçalves (2005) a sequência numérica serve de mote para o raciocínio aritmético informal e também para o princípio da inclusão hierárquica. Já a capacidade de contagem fornece, às crianças, competências para realização de comparações quantitativas, essenciais para a resolução de problemas aritméticos onde a utilização de contagens servirá como estratégia de resolução.

Com a capacidade que as crianças têm em realizar contagens no seu quotidiano, ao longo do tempo, os números começam a adquirir sentido, sendo que, segundo Fosnt e Dolk (2001), as crianças desenvolvem três tipos de competências numéricas associadas à contagem, designadamente: contagem oral, contagem de objetos e relações numéricas.

A contagem oral refere-se à enumeração dos termos da sequência numérica sem intenção de realizar contagens específicas. As crianças aprendem os termos da sequência socialmente com outras crianças e adultos, sendo por este motivo, natural que cometam alguns erros. A contagem oral conduz ao desenvolvimento de algumas competências, designadamente:

- O conhecimento da sequência numérica de um só dígito (do 1 ao 9);
- A compreensão que o número nove implica transição para uma nova dezena (9-10; 19-20; 29-30 …);
- O conhecimento dos termos de transição para uma nova série (10, 20, 30 …);
- A compreensão das regras para gerar uma nova série e suas exceções (as exceções encontram-se entre o número 10 e o 20) (Castro & Rodrigues, 2008a, 2008b; Serrazina, Sousa, & Gonçalves, 2005).

Torna-se essencial que desde a educação de infância sejam criados contextos significativos que facilitem o desenvolvimento da aprendizagem da contagem oral nas crianças, já que a mesma facilita o desenvolvimento do sentido de número. Com a contagem oral é possível trabalhar várias competências, tais como: contagem crescente, decrescente, de 2 em 2, de 5 em 5, etc. Este trabalho pode ser promovido, por exemplo, nos momentos da rotina diária do Jardim de Infância, por exemplo,

> num momento de transição, ser trabalhada a contagem oral crescente, sempre que (…) uma criança se senta no tapete e, mais tarde, a contagem oral decrescente, quando a educadora forma a fila para o almoço e as crianças vão saindo do tapete uma a uma. (Castro & Rodrigues, 2008b)

A contagem de objetos, contrariamente à contagem oral, surge com uma intenção, uma vez que quando a criança participa em contextos de contagem de objetos "vai sentindo a necessidade de conhecer os termos da contagem oral e de relacionar os números. Gradualmente, todas começam a relacionar os diferentes significados e utilizações dos números" (Castro & Rodrigues, 2008b, p. 17). A contagem de objetos requer determinadas competências que se desenvolverão com os pares, o adulto e a contagem oral. Estas são:

- A sequência da contagem;
- Que cada objeto corresponde a uma palavra (termo) de contagem;
- Não esquecer nem repetir nenhum objeto durante a contagem;
- Cardinalidade (o último termo de contagem corresponde ao número total de objetos contados) (Brocardo, et al., 2005).

As crianças com cinco anos possuem alguma dificuldade em encontrar estratégias que as auxiliem a evitar esquecer e/ou repetir objetos durante a contagem, especialmente se os conjuntos de objetos foram muito numerosos e/ou estiverem dispostos desorganizadamente. Assim, revela-se essencial proporcionar múltiplas e diversificadas experiências de contagem às crianças para que desenvolvam estratégias eficazes para ultrapassarem estas dificuldades. Quando os objetos estão dispostos circularmente (material não estruturado) as crianças, facilmente, se confundem na contagem, já que não identificam onde iniciam e terminam a mesma. Neste sentido, se os objetos forem dispostos em fila, ou se as crianças arrastarem os objetos contados, ou deixarem um dedo no primeiro objeto contado de uma roda, é previsível que os erros de contagem diminuam. Para além disto, a utilização de materiais estruturados – as próprias mãos, o colar de contas, torres de cubos, etc. – não só auxiliam na contagem como também promovem a contagem de 2 em 2, de 5 em 5, etc., consoante a forma como esses materiais se encontram estruturados (Castro & Rodrigues, 2008b; Serrazina, Sousa, & Gonçalves, 2005).

As relações numéricas "desenvolvem-se em simultâneo com a capacidade de contagem de objectos" (Brocardo, et al., 2005, p. 14) sendo esperado que as crianças se apercebam da quantidade de objetos sem necessitarem de proceder a uma contagem, estabelecendo, desta forma, relações mentais entre os números. Por conseguinte, torna-se importante que as crianças sejam expostas a diversas experiências com materiais estruturados e não estruturados, para que comecem a desenvolver relações numéricas. Por exemplo, se as crianças participarem num jogo de *dominó*, em que cada peça possui pintas cuja soma seja 8 (figura 2), vão-se apercebendo que o 8 pode ser representado de várias formas (4+4; 6+2; 5+3; etc.), e através da disposição ordenadas das pintas do *dominó* começam a associá-la à quantidade correspondente, sem realizarem contagens.

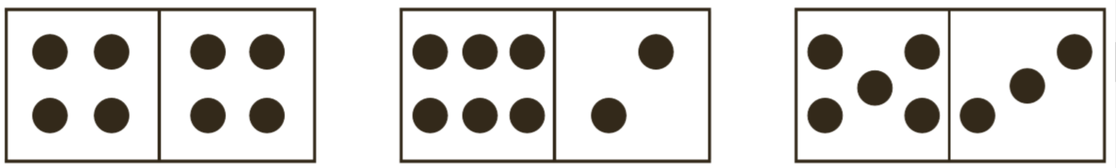


Figura 2 - Dominó de base 8 (retirado de Castro & Rodrigues, 2008b)

Os dedos das mãos mostram-se, também, um material estruturado que auxilia as crianças a aperceberem-se destas relações, para além de que é o material que se encontra sempre acessível às mesmas. Este recurso permite que as crianças manipulem números superiores a 5, tornando-se este número como referência para compor outros números.

Torna-se importante compreender que os materiais ajudam os alunos a contextualizar os seus raciocínios ao falar sobre objetos concretos, estabelecendo assim uma relação entre a linguagem oral e os símbolos matemáticos (Ferreira, 2012).

Segundo Castro e Rodrigues (2008b) “o estabelecimento de relações numéricas facilita o cálculo mental e a compreensão do sentido das operações” (p. 23), havendo a possibilidade de as crianças desenvolverem estas competências quando resolvem problemas simples de adição e subtração, usando a contagem como estratégia de resolução que, ao longo do tempo, se manifesta cada vez mais eficiente e complexa. Por exemplo, no Jardim-de-Infância é habitual surgirem problemas como: Na mesa estão 7 canetas se vos der 5, com quantas ficam? Muitas crianças procedem à contagem desde início, enquanto outras contam a partir do 7 até ao total, ou ainda explicam que chegaram ao número 12 porque “já fiz muitas vezes e sei que 6 e 6 são 12 e é o mesmo que 7 e 5”, revelando que já mobilizam algumas relações numéricas (Brocardo, et al., 2005).

Em síntese, revela-se importante referir que a contagem se apresenta como a base para o trabalho primário com os números, sendo que não deve ser vista como uma atividade rotineira mas sim como uma atividade significativa para as crianças, que deve ser praticada para que as mesmas comecem a atribuir significado aos números e a estabelecer relações entre os mesmos.

As experiências em que as crianças participam e que têm subjacente o desenvolvimento das competências numéricas, revelam-se essenciais para o que hoje em dia se pretende que os alunos desenvolvam, o sentido de número (Ferreira, 2012; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000).

A expressão de sentido de número surgiu no início da década de 90, do séc. XX, para substituir o termo “numeracia” que se definia como uma mera capacidade de lidar com as exigências matemáticas do dia-a-dia, levando a que a escrita simbólica formal fosse pouco utilizada pela comunidade matemática. Contudo, houve necessidade de “considerar a importância emergente do papel quer das escolhas a nível da estratégia de cálculo quer na reflexão do processo e do resultado ao empregar essa estratégia” (McIntosh, Reys, & Reys, 1992, p. 3), aparecendo, assim, a expressão de sentido de número.

Castro e Rodrigues (2008b), na mesma aceção de McIntosh, Reys e Reys (1992), referem que o sentido de número

> diz respeito à compreensão global e flexível dos números e das operações, com o intuito de compreender os números e as suas relações e desenvolver estratégias úteis

> e eficazes para cada um utilizar no seu dia-a-dia, na sua vida profissional ou enquanto cidadão activo. (p. 11)

As mesmas autoras destacam, ainda, a importância de o sentido de número ajudar a desenvolver a compreensão de que os números podem ter diferentes significados e poderem ser usados em contextos muito diversificados. Estas ideias vão ao encontro das defendidas por McIntosh, Reys, e Reys (1992), que afirmam que o sentido de número se relaciona com o conhecimento de cada indivíduo acerca dos números e suas operações e com a sua capacidade de o utilizar "de forma flexível para construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis ao lidar com números e com as suas operações" (p. 3).

Mas como sabemos que possuímos sentido de número? De acordo com Turkel e Newman (1993) as pessoas com sentido de número, sentem-se confortáveis com os números, sabem interpretá-los e entendem facilmente as relações numéricas, sendo "capazes de usar os números e (…) [compreenderem] como são utilizados no mundo à sua volta" (p. 31). É nesta perspetiva, que o sentido de número precoce adquirido nos primeiros anos de escolaridade, desempenha um papel significativo em todo o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos mais complexos, sendo que, o sentido de número se desenvolve à medida que os alunos

> compreendem a sua ordem de grandeza, desenvolvem variadas formas de pensar sobre ele e de representá-lo, utilizam os números como referência e desenvolvem uma percepção exacta acerca do modo como as operações os afectam. (Sowder mencionado em NCTM, 2007, p. 92-93)

O sentido de número não é um conceito que se adquira num curto período de tempo, mas uma competência geral que se desenvolve gradualmente e de forma evolutiva antes de qualquer ensino formal, durante o ensino obrigatório e ao longo de toda a vida do indivíduo quando visualiza, explora e relaciona os números em diversificados contextos (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; McIntosh, Reys, & Reys, 1992). Por conseguinte, "o sentido do número é, desta forma, algo impreciso, pessoal e personalizado, que está relacionado com as ideias que cada um foi estabelecendo sobre os números e as operações" (Cebola, 2002, p. 226).

Considerando o significado da expressão sentido de número, é possível evidenciar que este se constitui por ser uma "referência central do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos" (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999, p. 46) não esquecendo que o sentido de número também se encontra associado a muitas outras situações, como a medida, localização, ordenação e identificação. Assim, torna-se imperativo afirmar que, numa sociedade tão desenvolvida tecnologicamente, o facto de se possuir sentido de número revela-se uma das principais características que diferencia o ser humano dos computadores (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; McIntosh, Reys, & Reys, 1992).

Uma vez que os números se encontram bastante presentes no quotidiano das crianças, estas são expostas a diversos problemas que necessitam de solucionar e onde podem desenvolver flexibilidade de pensamento, sendo que esta se assume como uma competência base de quem possui sentido de número.

Com as experiência de manipulação dos números e com o desenvolvimento de pensamento matemático dos alunos, o sentido de número começa a revelar-se de diversas formas, inclusivamente quando as crianças aprendem os algoritmos aritméticos, uma vez que "o sentido de número ganha importância na reflexão sobre as respostas" (McIntosh, Reys, & Reys, 1992, p. 4). Contudo, os mesmos autores afirmam que a aprendizagem precoce dos algoritmos aritméticos podem limitar os alunos na utilização de estratégias informais, uma vez que estes começam a ser os principais métodos escolhidos, já que são passíveis de ser utilizados sem haver necessidade de pensar. "Ironicamente, à medida que o conhecimento técnico de Matemática dos alunos se expande, o seu leque de estratégias pode tornar-se limitado" (McIntosh, Reys, & Reys, 1992, p. 4).

McIntosh, Reys, e Reys (1992) apresentam um modelo assente em três componentes chave que se relacionam e caracterizam o sentido de número, nomeadamente: o conhecimento e destreza com os números, o conhecimento e destreza com as operações e aplicações do conhecimento e a destreza com os números e operações em situações de cálculo.

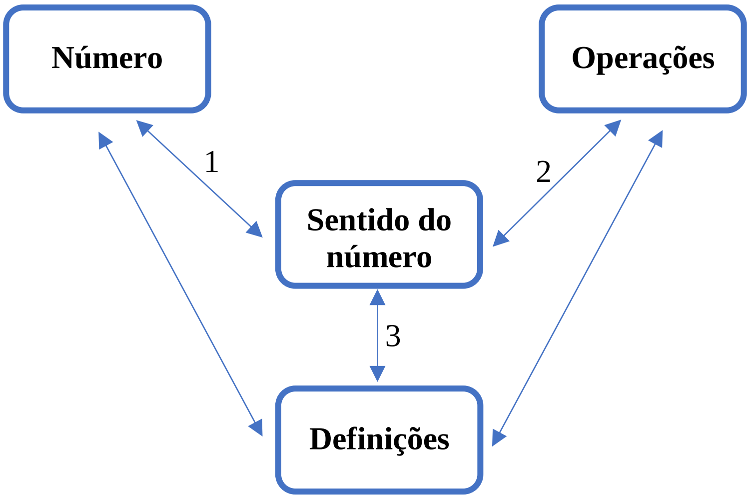


Figura 3 - Interligações dos componentes principais do sentido do número (adaptado de McIntosh, Reys, & Reys, 1992)

O conhecimento e destreza com os números requer que os alunos conheçam o sistema numérico hindu-árabe e, consequentemente, que compreendam o sistema de valor de posição. A utilização de materiais manipuláveis, de modelos, o uso de retas numéricas, etc., podem tornar-se cruciais para a compreensão deste sistema. Quando o aluno atinge esta fase de conhecimento tem a capacidade de organizar, comparar e ordenar os números num determinado contexto. Quando, por exemplo uma criança aprende a contar a partir de um número específico, oralmente e por escrito, começa a compreender alguns padrões do sistema de numeração, ajudando-a assim a descobrir como continua a sequência numérica. “Uma vez identificados, estes padrões proporcionam um suporte importante para que o processo e a sequência de contagem continuem e se generalizem” (Ferreira, 2012, p. 31).

Os alunos devem ter conhecimento de que os números podem assumir diversas representações, sendo que estas podem surgir mentalmente ou por manipulação numérica. “Por exemplo, reconhecer que 2 + 2 + 2 + 2 é o mesmo que 4 x 2 é uma relação entre conceitos útil, sendo aqui representada a relação entre a adição e a multiplicação” (McIntosh, Reys, & Reys, 1992, p. 10).

Por conseguinte, os alunos devem reconhecer as diversas formas equivalentes dos números e utilizá-las em contextos específicos para seu benefício próprio, como na resolução de problemas, desenvolvendo assim o seu poder matemático.

É, ainda, importante que os alunos possuam o sentido de grandeza relativa e absoluta dos números, que segundo Ferreira (2012) “engloba a capacidade para reconhecer o valor relativo de um número ou quantidade em relação a outro número e a capacidade para sentir a grandeza geral de um dado número ou quantidade” (p. 32).

Por exemplo, se questionarmos um aluno sobre “quando tempo demoramos a contar até 1000?” ou “Já viveste mais ou menos do que 1000 dias?”(McIntosh, Reys, & Reys, 1992, p. 11), aqui o aluno terá de pensar sobre a quantidade 1000 em diversos contextos que lhe são familiares, auxiliando-o a compreendê-la melhor.

Por fim, ao serem utilizados sistemas de referência, estes tornam-se instrumentos de cálculo e raciocínio para os alunos, uma vez que lhes facilitará a avaliação das suas respostas, ou até o arredondamento de um resultado por forma a auxiliar o seu cálculo ou na resolução de problemas. “A variedade e a complexidade de referências na tomada de decisões acerca dos números e contextos numéricos são um indicador valioso do sentido de número” (Ferreira, 2012, p. 32).

O conhecimento e destreza com as operações requerem que os alunos compreendam as operações e o modo como são executadas, sendo que nos primeiros anos escolares, esta compreensão é desenvolvida em simultâneo com outras capacidades matemáticas.

Nesta componente revela-se importante que os alunos compreendam o efeito das operações com diferentes números, inteiros e racionais. Para que tal aconteça, podem ser utilizados vários modelos, como por exemplo se souberem que a multiplicação pode ser representada com adições sucessivas, torna-se mais fácil para o aluno aplicar este conhecimento noutras situações em que lhe seja mais favorável usar esta representação da multiplicação. Contudo, é igualmente importante que os alunos tenham conhecimento de vários modelos das operações, para que os possam analisar e compreender as limitações de cada um, para que não concretizem generalizações incorretas. Assim, os alunos têm oportunidade de

> Refletir e investigar a mudança nas respostas tendo em conta a alteração de uma das componentes da operação contribui para o sentido de número bem como refletir nas interações entre as operações e os números. (Ferreira, 2012, p. 32)

Os alunos devem também perceber as propriedades das operações matemáticas, que muitas vezes são aplicadas intuitivamente em procedimentos de cálculo. Por exemplo, no que se refere à operação multiplicação, quando pretendem multiplicar 4x36 mentalmente pensam: 4 x 35 + 4x1 ou 140 + 4 ou 144. Assim, os alunos que compreendem as funções das propriedades das operações na prática mostram um bom sentido de número, já que “aplicam as propriedades confortavelmente, em diversas situações” (McIntosh, Reys, & Reys, 1992, p. 13).

Por fim, nesta componente é também considerada a compreensão da relação entre as operações que permite que o aluno pense em diversas formas e estratégias de resolver um problema. Contudo, para que tal aconteça é importante que compreenda e saiba utilizar cada uma das operações, sendo que este conhecimento se desenvolve ao longo do tempo e ao manipular números naturais e racionais, desenvolvendo-se em simultâneo o cálculo mental e escrito.

A aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo requer que os alunos, num contexto de resolução de problemas, raciocinem com os números e/ou operações, sendo que tal implica a tomada de várias decisões, nomeadamente: qual a resposta apropriada, que ferramenta de cálculo é eficiente e acessível, a escolha e aplicação de estratégias, rever os vários resultados e analisar a sua lógica podendo alterar a estratégia e resolver novamente (McIntosh, Reys, & Reys, 1992).

Quando os problemas são contextualizados é possível depreender quais os números e a operação a utilizar, bem como o resultado mais apropriado. Assim é essencial que o aluno tenha consciência das diversas estratégias que poderá utilizar. Contudo, o aluno deve, também, possuir a capacidade de compreender que a estratégia escolhida pode revelar-se inadequada à resolução do problema, formulando e utilizando uma nova estratégia. Para além disto, é importante que compreenda que existem estratégias mais e menos eficientes para a resolução de determinados problemas.

Por fim, quando o problema se resolve e se chega a uma solução, os alunos com sentido de número analisam a resposta segundo o enunciado/contexto do problema de forma a determinar a validade da sua resposta, refletindo também sobre a estratégia utilizada. A esta fase da resolução de problemas, geralmente, não lhe é atribuída muita importância pelos alunos. Contudo é necessário sensibilizar os alunos para a necessidade de perceberem se o resultado faz sentido relativamente ao contexto apresentado.

Em suma, o modelo apresentado por McIntosh, Reys e Reys (1992) mostra a complexidade referente à caracterização do sentido de número bem como a importância das suas componentes, reforçando a ideia de que "Uma pessoa com um bom sentido do número pensa e reflete sobre números, operações e os resultados produzidos" (p. 8)

O sentido de número, "surge [também] muito associado à aquisição de destrezas de cálculo mental, porque estas destrezas requerem um bom conhecimento e compreensão dos números e das relações entre eles" (Brocardo, et al., 2005, p. 18).

Mas afinal o que se entende por cálculo mental? O cálculo mental é "um cálculo pensado (não mecânico) sobre representações mentais dos números. Envolve o uso de factos, de propriedades dos números ou das operações e das relações entre os números e as operações" (Noteboom, Boklove, & Nelissen, 2001, p. 90).

Assim, o cálculo mental caracteriza-se por ser uma capacidade essencial para o desenvolvimento da competência numérica, sendo que implica a capacidade de efetuar operações. Quando o cálculo mental é eficiente, o indivíuo utiliza, metalmente, algoritmos que o auxiliam na resolução dos problemas/operações, sendo estes algoritmo chamados de algoritmos mentais, bastante diferentes dos aritméticos.

No mesmo sentido, Cebola (2002), Morais (2011) e, também, Ponte e Serrazina (2000), referem algumas características do cálculo mental:

- Variável, já que é possível utilizar estratégias diferentes para atingir o mesmo resultado;
- Flexível, pois os números podem ser adaptados para que a operação seja facilitada;
- Ativo, sendo que o aluno tem a possibilidade de escolher o método a utilizar;
- Global, porque os números são considerados como um todo e não como dígitos individuais;
- Construtivo, uma vez que muitas vezes se começa a calcular com o primeiro número apresentado na operação;
- Necessita de compreensão adquirida pela experiência;
- Concede uma aproximação inicial da resposta, já que os dígitos com maior grandeza são, geralmente, calculados em primeiro lugar (da esquerda para a direita do número).

Ainda assim, Sowder (1988) defende que o cálculo mental apenas é caracterizado desta forma caso não sejam utilizados meios externos – como os registos escritos e a calculadora – de apoio aos cálculos, encontrando-se esta ideia associada à "memorização e à realização de cálculos com rapidez e apenas «de cabeça» (Mendes, 2012, p. 101)". Esta conceção é ainda defendida por vários autores, o que conduz a uma ideia errada sobre o que hoje se considera cálculo mental, fomentando assim uma barreira entre o cálculo mental e o cálculo escrito. Anghileri (2003) argumenta que o uso de registos escritos, aquando utilizadas estratégias de cálculo mental, se revela importante, pois auxiliam a memória a curto prazo do indivíduo, não sendo, desta forma, caracterizadas como estratégias de cálculo escrito. Nesta perspetiva Noteboom, Boklove, e Nelissen (2001) acreditam que calcular mentalmente “não é o mesmo que fazer cálculos na cabeça, mas sim com a cabeça e registar determinados passos, se necessário. Neste sentido, não deve ser visto como o oposto ao cálculo escrito” (p. 90).

Segundo Buys (2008), o cálculo mental apresenta-se como um “cálculo flexível e habilidoso baseado no conhecimento sobre as relações numéricas e as características dos números” (p. 103), tendo, por isso, algumas características que o distingue de outros tipos de cálculo, designadamente:

- Opera-se com os números e não com os dígitos, uma vez que o número é visto como um todo;
- Utiliza-se propriedades das operações e relações numéricas;
- É suportado um bom conhecimento sobre os números e factos numéricos elementares (como os números até 20 e até 100);
- Recorre-se a registos escritos, caso necessário.

Por conseguinte, para que os processos de cálculo mental se revelem significativos para os alunos torna-se essencial que, os mesmos compreendam os conceitos inerentes ao mesmo mas que, também, desenvolvam competências de cálculo, associadas ao sentido de número e à compreensão das relações numéricas (Brocardo, et al., 2005). É através da prática em que os alunos “brincam com os números” e, consequentemente, começam a adquirir as competências essenciais, aqui mencionadas, que promovem o desenvolvimento do sentido de número e a destreza no cálculo mental. Revela-se imperativo que compreendam que existem várias estratégias para calcular o mesmo resultado sendo estas reajustáveis aos números e contexto que lhes são apresentados, sendo que “o uso de diferentes estratégias para chegar ao mesmo resultado ajuda os alunos a compreender o sentido do número e a desenvolver estratégias de cálculo mental” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 156), promovendo assim o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas.

O papel do professor, relativamente ao modo como explora os números na sala de aula, revela-se determinante para o processo de aprendizagem das crianças ao nível da Matemática, nomeadamente no desenvolvimento do cálculo mental. De acordo com Brocardo (2011) uma forma de equacionar o processo de ensino aliado ao desenvolvimento do cálculo mental passa por considerar essencial que o professor interligue duas abordagens de ensino: abordagem procedimental e abordagem conceptual. Se o docente seguir uma abordagem procedimental focar-se-á na aplicação de procedimentos de cálculo essenciais para se obter resultados numéricos, dando assim primazia à compreensão instrumental, enquanto que se seguir uma abordagem conceptual concederá liberdade às crianças de explorarem as tarefas tendo consciência das ideias e relações que os alunos irão desenvolver, tendo ainda como objetivo atribuir significado à pergunta do enunciado, bem como aos cálculos escolhidos e resultados obtidos, apoiando-se assim numa compreensão relacional por parte das crianças.

Nos primeiros anos, é necessário que as crianças se apropriem dos procedimentos e os interiorizem para que, mais tarde, se foquem nas relações entre números, operações e suas propriedades aliadas ao sentido de número. Ainda nessa fase, é importante dar ênfase aos contextos escolhidos das tarefas apresentadas para que, progressivamente, as crianças sejam capazes de utilizar e explorar procedimentos mais sofisticados. Nesta perspetiva, a adequação dos contextos possibilita que as crianças consigam dar sentido aos números, relacionem as diferentes representações dos mesmos e servem ainda de base para os conhecimentos dos números já conhecidos, "Quando se está numa fase mais avançada de desenvolvimento do cálculo mental opera-se sobre objectos e relações matemáticas, e tende-se a abordar as questões de uma forma relacional" (Brocardo, 2011, p. 8).

No Programa de Matemática do Ensino Básico em vigor (ME, 2013) o cálculo mental parece estar associado à aprendizagem dos algoritmos das operações aritméticas. Segundo este documento

> É fundamental que os alunos adquiram durante estes anos fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos, próprios do sistema decimal, associados a estas operações. Note-se que esta fluência não pode ser conseguida sem uma sólida proficiência no cálculo mental. (ME, 2013, p. 6)

Ao longo dos quatro anos do 1.º Ciclo espera-se que os alunos realizem determinados cálculos mentalmente, sempre associados às quatro operações, sendo que cabe ao professor proporcionar atividades para esse fim, escolhendo problemas com um grau de dificuldade, progressivamente, mais exigente em congruência com o ano de escolaridade.

A perspetiva do Programa de Matemática atual (ME, 2013) revela-se redutora tendo em consideração os autores que mencionei anteriormente, uma vez que, segundo os últimos o cálculo mental não é visto como um ponto de partida para a aprendizagem dos algoritmos aritméticos, mas sim uma competência que deve ser desenvolvida ao longo de toda a vida do indivíduo e utilizada em qualquer circunstância, sendo essencial para o desenvolvimento de outras capacidades. Neste sentido, Thompson (1999) refere algumas razões que refletem a importância de integrar o cálculo mental nos currículos de matemática:

1. Os cálculos são essencialmente resolvidos mentalmente ao invés da resolução ser realizada com papel e lápis;
2. Ajuda a desenvolver o sentido de número bem como a auxiliar os alunos a utilizar e produzir cálculos abreviados, o que conduz ao desenvolvimento do sistema numérico;
3. Desenvolve a competência de resolução de problemas, uma vez que devem ser utilizadas e selecionadas estratégias de cálculo adequadas aos números seguindo-se uma sequência de passos ao executar o cálculo;
4. Contribui para o desenvolvimento dos cálculos escritos, no futuro.

Em suma, é possível depreender que o cálculo mental e o sentido de número são conceitos indissociáveis sendo que tal facto é defendido por vários autores, contudo não é consensual sobre qual deles tem influência sobre o outro, ou se se desenvolvem em simultâneo. Heirdsfield e Cooper (2004) afirmam que se os alunos foram encorajados a criar as suas estratégias, associadas à resolução de problemas encontram-se a desenvolver estratégias de cálculo mental e, consequentemente, a desenvolver o seu sentido de número (Mendes, 2012). Para Varol e Farran (2007) os alunos que usam estratégias de cálculo mental de forma flexível têm a capacidade de escolher aquelas que se revelam mais eficientes para os problemas que lhes são apresentados, uma vez que possuem um conhecimento conceptual relativamente aos números e operações (Mendes, 2012). Assim Hartnett (2007) reforça que a relação que existem entre o cálculo mental e o sentido de número, na medida em que "por um lado, o uso flexível de estratégias de cálculo mental exige ter sentido de número e, por outro, o trabalhar os números de modo flexível cria oportunidades para o desenvolver" (Mendes, 2012, p. 124).

2.2. A aprendizagem das operações de adição e subtração

A aprendizagem da adição e subtração desenvolve-se desde o pré-escolar, quando as crianças participam em experiências de contagem, onde têm oportunidade de identificar algumas relações aritméticas que tornar-se-ão essenciais para a aprendizagem destas operações. A exploração de materiais conduz as crianças a envolverem-se em situações relacionadas com a adição.

Também os dedos das mãos as auxiliam na resolução de situações aditivas com números até 10. Inicialmente, utilizam uma das mãos para representar uma das parcelas, da adição, sendo que a outra mão representa a outra parcela, contando no final todos os dedos que se encontram levantados.

Relativamente à subtração, esta necessita do desenvolvimento de competências mais complexas por parte das crianças, uma vez que necessitarão de encontrar outras estratégias distintas daquelas que utilizam numa situação aditiva. Geralmente, a subtração é associada ao ato de retirar, sendo que a estratégia mais utilizada, com objetos concretos, passa por representarem o total, retirarem o subtrativo e procederem à contagem do que restou, encontrando assim o resultado final da operação. Com a experimentação, as crianças começam a desenvolver estratégias mais eficazes para a resolução destas operações (Castro & Rodrigues, 2008a).

Treffers (2001) defende que as crianças passam por três níveis de cálculo no que concerne à aprendizagem dos números e operações, desenvolvendo-se a partir do pré-escolar e envolvendo todas as operações aritméticas, ou seja, também se refere à adição e subtração. Os níveis de cálculo são os seguintes:

- Cálculo por contagem;
- Cálculo estruturado;
- Cálculo formal.

O *cálculo por contagem* diz respeito ao primeiro nível da aprendizagem da adição e subtração, sendo apoiado por materiais que possibilitam a contagem. Habitualmente, as crianças resolvem as operações com o auxílio dos dedos das próprias mãos recorrendo à contagem de um em um. Quando as crianças já dominam esta estratégia, cabe ao professor apresentar problemas com números maiores, revelando-se mais difícil resolvê-los sem recorrer a outras estratégias. É nesta perspetiva que os alunos procuram outras estratégias, como por exemplo, a utilização das dezenas, com recurso à reta numérica numerada de 10 em 10 (Ferreira, 2008). Assim, neste nível de cálculo, as operações concretizam-se "através de um movimento ao longo da linha numérica: saltando para a frente na adição, saltando para trás na subtração" (Morais, 2011, p. 13), conduzindo à progressão, dos alunos para o nível de cálculo seguinte. No *cálculo estruturado* os alunos abandonam a contagem de 1 em 1, apoiando-se em modelos estruturados, sendo que utilizam, principalmente, três estratégias: adições de 10 em 10, adições através do 10 e decomposição das parcelas. Para as primeiras estratégias, muitos alunos constroem retas numéricas que os auxiliam na resolução das operações, tornando explícito os seus raciocínios. Alguns dos alunos realizam adições com maior número de dezenas (20, 30, etc.) revelando "uma maior flexibilidade e destreza com os números, conseguindo desenvolver estratégias mais eficientes" (Ferreira, 2008, p. 139). Relativamente à terceira estratégia, de decomposição, existem alunos que decompõem os números em dezenas e unidades, que serão subtraídas ou adicionadas separadamente. No *cálculo formal* "os números são usados como objectos para calcular de forma inteligente e flexível, sem a necessidade de recorrer a materiais estruturados" (Treffers, 2001, p. 43), uma vez que os alunos realizam cálculos mentalmente, registando apenas os cálculos intermédios. A progressão para este nível de cálculo acontece de forma gradual, sendo os alunos que sentem necessidade de criar novas estratégias com base na estrutura dos números e nas propriedades das operações (Ferreira, 2008).

No início do 1.º ano de escolaridade espera-se que a maioria dos alunos se situe no nível de cálculo por contagem. Cabe ao professor proporcionar-lhes tarefas com contextos adequados que permitam o desenvolvimento da estruturação dos números. Treffers (2001) apresenta três modelos estruturais pelos quais podem ser representados os números até 20 (e até 100):

- *Modelo linear*: adequado à sequência numérica e à representação de contextos de estrutura linear ou sequencial. Alguns materiais associados a este modelo são: os colares de contas de duas cores e agrupadas de 5 em 5 ou 10 em 10, e posteriormente a reta numérica. O uso deste modelo auxilia os alunos a "adquirirem a competência de ordenar os números por ordem de grandeza e a ser capazes de designar os vizinhos directos de um determinado número" (Gonçalves, 2008, p. 20)
- *Modelo de agrupamento*: os números podem ser agrupados e decompostos (de 2 em 2, 5 em 5, etc.) de várias formas, mas mantêm-se contáveis e as crianças podem vê-los e ter-lhes acesso. São exemplos deste modelo: os dedos das mãos, cubos de encaixe de várias cores, etc.
- *Modelo combinado*: resulta da combinação entre o modelo linear e o modelo de agrupamento. Os materiais que apoiam este modelo são: os ábacos horizontais (têm as contas em linha, como o colar de contas e encontram-se agrupados por cores), as molduras de 10 (tem duas filas com cinco divisões cada).

A *reta numérica não graduada* ou reta numérica vazia é também considerada como um modelo didático para auxiliar os alunos na resolução de problemas de adição e subtração. Surgiu na década de 90 na Holanda para completar o uso do "quadrado dos 100" e o uso do MAB (Material Multibásico), materiais estes que conferiam pouca oportunidade na utilização de procedimentos informais aos alunos (Beishuizen, 2003).

Segundo Bobis e Bobis (2005) "A reta numérica vazia é uma representação visual para o registo e partilha de estratégias de pensamento dos alunos durante o cálculo mental" (p. 67). A introdução da reta não graduada deve ser, primeiramente, realizada com a apresentação de um colar de contas – com contas agrupadas de 5 em 5, 10 em 10 etc. – para que, os alunos consigam identificar os números e, consequentemente, que se familiarizem com o seu valor posicional até 100, bem como com as suas quantidades (Bobis & Bobis, 2005; Ferreira, 2012). Após todo este trabalho realizado em torno da representação linear, os alunos encontram-se preparados para utilizarem a reta numérica semiestruturada (com as dezenas marcadas) e posteriormente a reta numérica vazia, onde têm a liberdade de marcar os números que necessitam para realização dos seus cálculos. Nesta perspetiva, a reta vazia "Tem sido usada normalmente como uma ferramenta de registo das estratégias de cálculo mental de dois dígitos na adição e subtração" (Bobis & Bobis, 2005, p. 67).

Alguns autores enumeram várias vantagens da utilização da reta numérica vazia como modelo de apoio à aprendizagem da adição e subtração. Gravemeijer (1994) salienta três benefícios: o primeiro passa por considerar essencial que os alunos tenham contacto e manipulem a representação linear do número em situações de distâncias e medidas, com recurso à reta numérica vazia; o segundo diz respeito ao facto de a reta vazia refletir de forma mais intuitiva e fiel a estratégia mental da criança, uma vez que são escritos os seus procedimentos informais, já que "Muitos dos processos informais de contagem poderão ser consideradas como formas sofisticadas de contagem dos números" (Ferreira, 2012, p. 109); por fim, o terceiro evidencia o potencial que esta reta possui para fomentar o desenvolvimento de estratégias de cálculo mais sofisticadas, indo ao encontro do argumento de que "um modelo não deve apenas dar aos alunos a liberdade de desenvolver os seus próprios procedimentos de resolução: o uso do modelo deve também promover o desenvolvimento de procedimentos mais sofisticados" (*ibidem*).

Também o autor Beishuizen (2003) indica quatro argumentos sobre a importância do uso desta reta, uma vez que esta é:

1. Um suporte para uma atividade mental de um nível mais elevado;

2. Um modelo mais natural e transparente para o cálculo;
3. Um modelo aberto a estratégias informais, que conduz ao desenvolvimento de estratégias mais formais e eficientes;
4. Um modelo que permite a flexibilidade de estratégias de cálculo mental, em particular variações do N10[1].

Perante estes argumentos é possível afirmar que a reta numérica vazia é um modelo que potencia a flexibilidade das estratégias dos alunos e ainda a progressão das mesmas para outras mais sofisticadas. Este modelo assume, para os alunos, uma função de andaime, uma vez que as suas estratégias ficam registadas e torna-se possível visualizar quais os cálculos que foram realizados e aqueles que ainda necessitam de ser concluídos. Neste sentido, "os registos na recta numérica vazia contêm muita informação sobre o que levou aos erros e sobre o desenvolvimento estratégico das crianças" (Beishuizen, 2003, p. 11), que poderá ser, posteriormente, discutido na sala de aula. Nesta perspetiva, é possível enunciar outra vantagem da utilização da reta numérica vazia, que é o facto ser uma ferramenta poderosa para aumentar a comunicação na sala de aula, uma vez que pode ser alvo de discussões e partilha de estratégias de cálculo mental, já que os alunos têm oportunidade de explicar as suas estratégias e mostrar aos outros o que fizeram (Bobis & Bobis, 2005).

Sendo a reta numérica vazia um potencial modelo para a aprendizagem das operações de adição e subtração, tal como anteriormente referido, cabe ao professor apresentar problemas adequados, ao nível de aprendizagem dos alunos, onde seja possível a utilização deste e outros modelos, que promovam o desenvolvimento de estratégias cada vez mais sofisticadas.

2.2.1 Resolução de problemas de adição e subtração

A resolução de problemas é algo que surge, frequentemente, no quotidiano das crianças, sendo considerado por isso "uma atividade bastante natural, uma vez que o mundo se encontra repleto de coisas novas e elas demonstram curiosidade, inteligência e flexibilidade ao deparar-se com situações novas" (NCTM, 2007, p. 134). Nesta perspetiva, as crianças encontram-se predispostas a resolver problemas, por isso cabe ao professor aproveitar a sua vontade e motivação para o desenvolvimento desta capacidade.

[1] A clarificação do que significa N10 está inserida na secção sobre as estratégias de adição e subtração.

Segundo Ponte et al. (2007) a resolução de problemas em sala de aula deve ocorrer frequentemente, para que os alunos adquiram confiança na interpretação dos problemas e consequente resolução. Esta prática permitirá que sejam desenvolvidas estratégias de resolução inicialmente informais, mas que evoluem para estratégias cada vez mais flexíveis e formais, em simultaneidade com o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Para alguns autores, a resolução de problemas pode caracterizar-se como um processo em que se aplica o conhecimento já adquirido em novas situações, envolvendo a "exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjeturas" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008, p. 14), e também pode ser visto como "o ponto de partida para a abordagem de novos conceitos e ideias matemáticas" (Morais, 2011, p. 24). Noutra perspetiva, a abordagem da resolução de problemas é encarada como um meio para o ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos, sendo o ensino através da resolução de problemas uma "via facilitadora da aprendizagem" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008, p. 14), sendo esta prática denominada como ensino da Matemática através da resolução de problemas.

Apesar da resolução de problemas poder assumir diversos papéis na aprendizagem da matemática, é importante referir que são múltiplas as potencialidades que esta atividade fomenta nos alunos, nomeadamente: "ajuda a desenvolver a compreensão das ideias matemáticas e consolidar as capacidades já aprendidas e, por outro lado, constitui um importante meio de desenvolver novas ideias matemáticas" (Ponte & Serrazina, 2000, pp. 55-56).

A atividade de resolver problemas possibilita que os alunos raciocinem sobre relações matemáticas, conduzindo ao desenvolvimento da capacidade de pensar matematicamente (Palhares, 2004) e ao desenvolvimento da autonomia na procura de soluções. Por ser considerada uma capacidade transversal da matemática, a resolução de problemas permite que se interliguem diferentes temas matemáticos, possibilitando que os alunos desenvolvam diferentes tipos de representações, a comunicação e o raciocínio matemático. A comunicação é também uma competência essencial na aprendizagem da matemática pois permite que os alunos troquem ideias/estratégias com os outros, possibilitando que de forma gradual, aprendam a usar a linguagem e símbolos matemáticos mais adequados (NCTM, 2007). Desta forma, os alunos refletem sobre os seus conhecimentos e a forma como resolvem os problemas, uma vez que "quando os alunos se esforçam por comunicar as suas ideias de forma clara, estão a desenvolver uma maior compreensão do seu próprio pensamento” (*idem*, p. 149).

Em suma, Boavida, Paiva, Cebola, Vale, e Pimentel (2008) defendem a necessidade de resolver problemas uma vez que:

- “proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação;
- fomenta o raciocínio e a justificação;
- permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares;
- apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana.” (p. 14)

Apesar da resolução de problemas ser uma abordagem que potencia o desenvolvimento de diversas competências nos alunos, o professor tem um papel fundamental para que esta se revele num trabalho desafiante e significativo para os alunos, uma vez que cabe ao docente a escolha dos problemas a apresentar e a forma como os mesmos são contextualizados em sala de aula. Tal como salienta Ponte, Brocardo, & Oliveira (2006) “é fundamental que os alunos se sintam motivados para a atividade a realizar” (p. 47). Para além disto, de acordo com o conhecimento que o professor possui dos alunos, este deve escolher problemas segundo as suas necessidades, “problemas que alarguem o pensamento matemático de alguns e que consolidem os conhecimentos aprendidos por outros” (NCTM, 2007, p. 138).

Resolver problemas é um processo complexo, uma vez que o aluno tem oportunidade de procurar soluções não imediatas através de diferentes estratégias e/ou procedimentos. Pode ser uma tarefa morosa onde o aluno, através dos seus conhecimentos já desenvolvidos, investiga e explora o problema de modo a compreendê-lo e consequentemente atingir o resultado pretendido. Nesta perspetiva, o professor tem um papel fundamental em todas as etapas da resolução de problemas (antes, durante e depois da resolução do problema), devendo dar oportunidade dos alunos serem protagonistas neste processo e assumindo um papel de apoio e de encorajador. Assim, os alunos sentem-se seguros e confiantes para experimentar novas estratégias, analisar e refletir sobre as suas ideias, proporcionando um clima facilitador da aprendizagem com o objetivo de conduzir ao êxito, dos alunos, na realização das tarefas propostas (Lopes, et al., 1999; NCTM, 2008).

Quando se aborda o tema da resolução de problemas torna-se pertinente referir o significado de problema, uma vez que muitos autores têm tentado definir este conceito da matemática que, frequentemente, se confunde com exercício.

Um problema é uma tarefa que não se consegue resolver, apenas, com um algoritmo que nos leve à solução imediata, ou seja, não existe um caminho óbvio para o resolver e, por isso, não se consegue atingir a situação final, apenas, com o conhecimento que temos imediatamente disponível (Kantowski referido por Afonso, Conceição, Costa, Filipe e Serrasqueiro, 2008; Pólya, Lester, Mayer, referidos por Palhares 2004). Pólya (citado por Fonseca, 1995) acrescenta ainda, que resolver um problema "significa procurar conscientemente alguma acção apropriada para atingir um objectivo claramente definido, mas não imediatamente atingível" (p. 24).

Ao refletir sobre as afirmações anteriores é possível compreender que um problema não é uma situação rotineira pois apresenta diferentes desafios para os alunos. Assim sendo, uma vez que não apresenta uma solução imediata, possibilita que os alunos recorram a várias estratégias para atingir a sua solução. Tal como referem Boavida et al, (2008)

> tem-se um problema quando se está perante uma situação que não pode resolver-se utilizando processos conhecidos e estandardizados; quando é necessário encontrar um caminho para chegar à solução e esta procura envolve a utilização do que se designa por estratégias. (p. 15)

Um problema distingue-se de um exercício quando o aluno, à partida, não consegue "encontrar uma solução num único passo" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 52), visto que, se aluno encontrar rapidamente a solução com apenas um algoritmo que já tenham aprendido, significa que se encontra perante um exercício. Neste sentido, revela-se importante mencionar que a distinção entre exercício e problema obtém-se não só no enunciado da tarefa mas também nos conhecimentos prévios dos alunos, uma vez que para um aluno a mesma tarefa pode representar um exercício e para outro poderá representar um problema (*ibidem*).

Segundo Ponte (2005) para estarmos perante um problema, este terá de comportar algum grau de dificuldade, "No entanto, se o problema for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente (…). Se o problema for demasiado acessível, não será então um problema mas sim um exercício" (p. 13).

Importa ainda referir que os problemas devem apresentar determinadas características para que significativos para a aprendizagem dos alunos. Assim, é necessário que:

- "sejam, realmente, compreensíveis pelo aluno apesar de a solução não ser imediatamente atingível;
- sejam intrinsecamente motivantes e intelectualmente estimulantes;
- possam ter mais do que um processo de resolução;
- possam integrar vários temas" (Boavida et al., 2008, p. 16)

Ao longo do processo de ensino-aprendizagem dos alunos, o professor deve ter um vasto leque de problemas de diferentes tipos. Existem "várias tipologias de classificação de problemas matemáticos que diferem segundo os autores" (Vale & Pimentel, 2004, p. 17). Contudo, considerando os objetivos desta investigação optei por seguir a terminologia adotada por Boavida et al., (2008) que distingue três tipos de problemas adequados ao 1.º ciclo, nomeadamente: problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos. Segundo o contexto e características dos alunos envolvidos neste trabalho, decidi apresentar apenas problemas de cálculo que irei caracterizar em seguida.

Os problemas de cálculo são aqueles que, de acordo com os dados apresentados, requerem a escolha de uma ou mais operações aritméticas para chegar à solução. Assim, após a leitura do problema, os alunos "avaliam o que é conhecido e o que é pedido e, finalmente, efectuam uma ou mais operações que consideram apropriadas usando os dados do enunciado" (Boavida et al., 2008, p. 17). O número de operações aritméticas utilizadas para a resolução dos problemas, conduz a que sejam atribuídos nomes distintos a cada tipo de problema, nomeadamente: problemas de um passo e problemas de mais passos. Tal como o nome sugere, nos "problemas de um passo" é utilizada, apenas, uma operação aritmética para a resolução dos problemas, enquanto nos "problemas de mais passos" são utilizadas uma ou mais operações aritméticas para chegar ao resultado final (*ibidem*).

De acordo com as autoras, estes problemas apresentam algumas potencialidades, nomeadamente "proporcionam aos alunos a oportunidade de aplicarem conceitos e destrezas previamente aprendidos e praticarem esta aplicação" (*idem*, p.18). Todavia, a exploração exclusiva destes problemas em sala de aula poderá “levá-los a leituras demasiado rápidas, a análises superficiais ou a respostas sem qualquer nexo” (*ibidem*).

Uma vez que os problemas de cálculo se encontram vinculados às operações aritmética, torna-se necessário referir que, o presente estudo centra-se na resolução de problemas de adição e subtração devido ao contexto onde o mesmo foi implementado e por estas operações assumirem um papel importante no 1.º e 2.º anos de escolaridade.

Nos primeiros anos de escolaridade, os alunos devem ser confrontados com problemas diversificados e contextualizados que envolvam a adição e subtração de números inteiros, pois permitirão desenvolver a compreensão destas operações, sendo esta uma competência central para o conhecimento da matemática (Ferreira, 2012; NCTM, 2008; Serrazina, Sousa, & Gonçalves, 2005). Esta prática permitirá, também, que os alunos desenvolvam e enriqueçam as suas representações e se deparem com as propriedades das operações (NCTM, 2007).

As operações aritméticas devem surgir em diferentes situações de resolução de problemas com contextos realistas e onde lhes são conferidos os seus diferentes significados. Ou seja, dependendo da situação/problema onde as operações de adição e subtração se encontra presentes, podem assumir os seus vários sentidos (Morais, 2011). Pode definir-se como sentido das operação como “a classe de situações problemáticas que se resolvem através dessa operação” (Pires, 1992, p. 64), sendo esta aprendizagem, principalmente, realizada através da resolução de problemas.

Os diferentes sentidos das operações de adição e subtração encontram-se descritos e exemplificados no quadro seguinte.

Quadro 1 – Diferentes sentidos das operações de adição e subtração (adaptado de Morais, 2011, p. 26)

Operação	***Sentidos***
Adição	**Combinar ou juntar:** duas ou mais quantidades são transformadas noutra quantidade *Exemplo:* A turma do Luís tem 13 meninos e 11 meninas. Quantos alunos tem a turma?
	Acrescentar: uma quantidade é aumentada. *Exemplo:* A Helena tem 14 cromos, comprou mais 5. Com quantos cromos ficou?
Subtração	**Retirar**: a uma quantidade é retirada outra *Exemplo:* O Marco tinha 23 berlindes mas perdeu 9. Com quantos ficou?

	Comparar: são comparadas duas quantidades, pretendendo-se encontrar a diferença entre as quantidades ou ver quanto é que uma é maior ou menor que outra. *Exemplo:* A Luísa já leu 14 livros e o Tomás leu 5. Quantos livros a mais já leu a Luísa?
	Completar: é calculado quando se deverá juntar uma quantidade para se obter um determinado valor. *Exemplo:* O Pedro quer comprar um jogo que custa 32€ e já tem 17€. Quanto dinheiro ainda tem de poupar?

Apesar de ser necessário que os alunos tenham oportunidade de explorar os diversos sentidos das operações, não significa que haja necessidade de os interpretarem dessa forma (Ponte & Serrazina, 2000).

Por fim, é importante salientar que, apesar de a adição e subtração serem operações distintas com sentidos diferentes, são operações inversas uma da outra e, por isso, encontram-se "intimamente relacionadas e o contexto dos problemas torna-se essencial para que os alunos compreendam a relação existente entre estas duas operações" (Fosnot e Dolk, mencionados por Morais 2011).

2.3. Estratégias de adição e subtração

Em primeiro lugar e antes de especificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtração, referidas por vários autores, importa clarificar o que se entende por este termo muito utilizado na matemática. Ponte e Serrazina (2000) definem estratégia como "uma abordagem que pode ser usada em diversos problemas" (p. 55). Beishuizen (1997) diferencia o conceito de estratégia do de procedimento. Para este autor, estratégia designa-se pela "escolha de opções relacionadas com a estrutura do problema" e procedimento caracteriza-se por "a execução de passos de cálculo relacionados com os números no problema" (p. 127). Importa referir que, para o mesmo problema é possível aplicar diversas estratégias, em que "umas podem ser mais vantajosas do que outras" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 55).

As quatro operações aritméticas têm subjacentes estratégias de cálculo já estudadas. Contudo, dados os objetivos desta investigação irei apresentar, apenas, as estratégias inerentes à adição e subtração.

Thompson e Smith (1999) realizaram um estudo, em Inglaterra, com 144 crianças para compreender quais as estratégias utilizadas em adições e subtrações, sendo essas estratégias classificadas quanto ao seu nível de complexidade No quadro seguinte é possível observar as estratégias utilizadas, pelos alunos, segundo o seu grau de complexidade.

Quadro 2 – Nível de sofisticação de estratégias de cálculo mental (adaptado de Thompson e Smith 1999)

	Estratégias	
Nível	***Adição***	***Subtração***
1	Contagem de 1 em 1 ou de 10 em 10	Contagem de 1 em 1 ou de 10 em 10
2	Manipulação de dígitos	Manipulação de dígitos
3	Decomposição	Decomposição
4	Método misto (decompor e saltar)	Método misto (decompor e saltar) Adição complementar (saltar para 10)
5	Sequenciação (saltos) Compensação	Sequenciação (saltos) Compensação

Os resultados obtidos através deste estudo indicam que as estratégias mais utilizadas, pelos alunos, na resolução de adições concentram-se no nível 3 e 4, respetivamente, decomposição e método misto. Curiosamente, na resolução de subtrações, as estratégias mais utilizadas foram as de nível 1 e 5, respetivamente, contagem de 1 em 1 ou 10 em 10 e sequência ou compensação.

Thompson (2003) identificou que os alunos utilizam quatro tipos de estratégias na resolução de problemas de adição e subtração com números de vários dígitos, nomeadamente: decomposição, por saltos, mistas e compensação.

Nas estratégias por decomposição, as dezenas e unidades são separadas e operadas separadamente, por exemplo, 22+34 é calculado 20+30 e 2+4, e por fim 50+6.

As estratégias por saltos, também conhecida por cumulativas ou sequenciais, são aquelas que à primeira parcela são retirados ou acrescentados valores de cada dígito da segunda parcela. Por exemplo, para calcular 22+34, parte-se do 22 e dá-se um salto de 30 (22+30), chegando ao 52. Por fim, dá-se um salto de 4 e chega-se ao 56 (52+4).

Nas estratégias mistas, existe uma combinação entre as duas anteriores por isso também são conhecidas por “decompor e saltar”. Por exemplo, para calcular 22+34, parte-se do 20, dá-se um salto de 30 (20+30) obtendo-se 50, depois dá-se um salto de 4 (50+4), obtendo-se 54 e por fim um salto de 2 (54+2), chegando ao resultado, 56.

Por fim, nas estratégias de compensação, também designadas por “saltar para além de”, os números ajustam-se de modo flexível para a simplificação dos cálculos. Por exemplo, para calcular 22+34, parte-se do 22 e dá-se um salto de 30 e um salto de 5, obtendo-se 57 (22+30+5), contudo, é apenas necessário adicionar 34, por isso compensa-se dando um salto de 1 unidade para trás (57-1), obtendo-se 56.

Na literatura Holandesa as diversas estratégias de cálculo foram, também, categorizadas por Meindert Beishuizen através de pequenos acrónimos que identificam facilmente o tipo de estratégia. Estas encontram-se organizadas em duas categorias: N10 e 1010. As estratégias por saltos são mencionadas pelos acrónimos N10, N10C e A10, as estratégias por decomposição pelos acrónimos 1010 e 10s e as estratégias por compensação pelo acrónimo N10C (Foxman & Beishuizen, 2002).

Na categoria N10 é adicionado ou retirado um múltiplo de 10 à primeira parcela. Num nível mais complexo, surge a estratégia N10C, em que à primeira parcela é adicionado ou retirado a dezena aproximada da segunda parcela, ou seja, um múltiplo de 10. Por último, ao resultado é adicionada ou retirada a restante diferença.

Na estratégia A10 é adicionada ou retirada parte da segunda parcela, de forma a obter um múltiplo de 10, sendo adicionado ou retirado, posteriormente, o restante da mesma (*ibidem*).

Na categoria 1010, os números são decompostos em dezenas e unidades, adicionando-as e obtendo o resultado através da recomposição do número. Na estratégia 10s, também, os números são decompostos em dezenas e unidades, e adicionados sequencialmente (*ibidem*).

Em seguida apresento um quadro com as diferentes categorizações mencionadas por Thompson e Beishuizen onde se pode observar que os dois autores apresentam diferentes nomenclaturas para as mesmas estratégias. Importa referir que, sendo este um aspeto importante para a posterior análise de dados, nesta investigação irei basear-me na nomenclatura de Beishuizen.

Os exemplos apresentados no quadro baseiam-se no cálculo 38+26 para a adição e 64–26 para a subtração.

Quadro 3 – Estratégias de cálculo mental para a adição e subtração na perspetiva de Beishuizen e Thompson (adaptado de Foxman & Beishuizen, 2002)

	Beishuizen	*Thompson*	*Exemplos das estratégias*
N10	N10	Sequenciação (Método do Salto)	38+20=58; +6=64 64-20=44; -6=38
	N10C	Compensação	38+30=68; -4=64 64-30=34; +4=38
	A10	Adição Complementar	38+2=40; +20=60; +4=64 26+4=30; +30=60; +4=64 64-4=60; -20=40; -2=38
1010	1010	Fragmentação (Método da Decomposição)	30+20=50; 8+6=14. 50+14=64 60-20=40; 4-6=? Transportar 10 de 40 ficando com 30; então 4-6 torna-se 14-6=8; 30+8=38 (muitas vezes inválido: 4-6=2; 40+2=42)
	10s	Método Misto	30+20=50; +8=58; +6=64 60-20=40; +4=44; -6=38 (inválido: 40-4=36-6=30)

Foxman e Beishuizen (2002) salientam que o método N10 é mais fluente e tem mais sucesso que o método 1010 que consome mais tempo e é mais vulnerável a erros. Nesta perspetiva, Beishuizen (2009) refere que os alunos com mais facilidade de cálculo tendem a recorrer ao método N10, pois possibilita-os de adaptarem este procedimento para escolher cálculos mais eficientes. Contrariamente à anterior, a estratégia 1010 apresenta-se como a eleita dos alunos com maior dificuldade de cálculo, possivelmente por estes alunos não terem ainda bem desenvolvido o procedimento de saltos de 10 em 10, contudo, segundo os autores esta estratégia conduz à ocorrência de um maior número de erros.

2.4. Dificuldades na resolução de problemas de adição e subtração

As dificuldades apresentadas pelos alunos podem ter duas origens, uma intimamente ligada ao aluno e às suas características de aprendizagem e a outra relacionada com os métodos de ensino usados pelo professor (Almeida, 2006). Na

Matemática, a resolução de problemas é o tema onde os alunos apresentam mais dificuldades, talvez por ser

> "uma actividade intelectual extremamente complexa, pois implica mais do que lembrar factos ou a aplicação de procedimentos bem aprendidos. Implica a coordenação de conhecimento, experiências prévias, intuição, atitudes e concepções" (Vale & Pimentel, 2004, pp. 15-16).

Muitas vezes aos alunos adquirem algumas conceções matemáticas erróneas, que podem dificultar o sucesso da resolução de problemas (Schoenfeld, 1992 mencionado por Vale & Pimentel, 2004). É frequente os alunos considerarem que os problemas têm sempre uma solução e que essa é única, conduzindo-os, erradamente, a procurar dados do problema de forma anárquica, que posteriormente não são utilizados da forma correta, obtendo-se, desta forma, respostas rápidas mas sem sentido (Lopes, et al., 1999; Vale & Pimentel, 2004). Nesta perspetiva, estas conceções e procedimentos prejudicam o desempenho dos alunos, uma vez que "pode levá-los a desistirem caso não consigam resolver um problema ao fim de alguns minutos ou caso descubram que o problema não tem solução" (Vale & Pimentel, 2004, p. 16). Por isso, é importante que os professores explorem, com os alunos, problemas de tipologias diferentes e os alertem para "a importância de procurar dados de uma forma consciente, ver quais as condições que relacionam esses dados e interpretar o sentido que têm relativamente ao que é pedido" (Lopes, et al., 1999, p. 11). Outra conceção errónea, frequentemente, transmitida pelos professores é que a subtração significa apenas "tirar", sendo esta ideia completamente errada porque esse resume-se apenas um dos sentidos da subtração. Por isso "é importante que as crianças percebam que os problemas de subtração podem ser resolvidos com estratégias de adição" (Fosnot & Dolk, 2001, p. 140).

Um estudo realizado por Carvalho (2011) refere que os alunos apresentam dificuldades em utilizar estratégias de cálculo mental na resolução de problemas, apontando dois possíveis motivos para tal acontecer: (1) a pouca frequência da resolução de problemas em sala de aula; (2) a inclusão de texto para ler e interpretar. O segundo motivo tem sido apontado por vários autores por ser uma das grandes dificuldades dos alunos na resolução de problemas. Por conseguinte, Costa e Fonseca (2009) mencionam que para além dos alunos necessitarem de competências matemáticas para a resolução de problemas torna-se, também, essencial que manifestem competências na Língua Portuguesa. Deste modo, as dificuldades na disciplina do Português espelham-se na resolução de problemas, por isso é fundamental que os alunos desenvolvam competências ao nível da leitura, compreensão e interpretação de enunciados e justificação e explicação dos seus raciocínios, seja de modo oral ou escrito.

A justificação dos raciocínios na forma escrita e oral pode assumir-se, também, como uma dificuldade pois, exige aos alunos que enunciem, esclareçam, organizem e consolidem os seus pensamentos (NCTM, 2007) sobre os seus resultados. Assim, estas dificuldades podem estar relacionadas com um fraco domínio da Língua Portuguesa ao nível do vocabulário e da articulação de ideias de forma clara e, relativamente, ao ato de refletir.

Outro aspeto onde se podem identificar dificuldades refere-se ao conhecimento dos conteúdos matemáticos subjacentes ao problema, que muitas vezes se relacionam com a capacidade de mobilizar conhecimentos, previamente, adquiridos em cada ano de escolaridade. Schoenfeld (citado por NCTM, 2007) contraria esta ideia proferindo que, frequentemente, o insucesso dos alunos "não se deve à falta de conhecimentos matemáticos, mas antes à deficiente utilização dos mesmos" (p. 60)

A seleção e concretização das estratégias podem ser, também, uma dificuldade pois estas têm de ser realizadas, criteriosamente, de acordo com o contexto do problema e executadas cuidadosamente e de forma flexível para se atingir o resultado correto.

Quando os alunos utilizam estratégias que envolvem contagem ou decomposição dos números que faseadamente são adicionados ou subtraídos, podem ocorrer erros ao nível da contagem e da memorização da quantidade de números já adicionados ou subtraídos, para colmatar estas incorreções a reta numérica poderá representar um auxílio para os alunos.

A estratégia 1010, categorizada por Beishuizen, apresenta características que podem conduzir a dificuldades na sua utilização, pois propicia "uma maior confusão conceptual e processual" (Ferreira, 2012, p. 80) dos alunos. Quando nos encontramos perante uma situação de subtração com empréstimo, por exemplo 74-38, os alunos podem não conseguir calcular 4-8 e por isso calculam erradamente 8-4. Neste sentido, "a dificuldade desta estratégia não está na decomposição dos números na sua estrutura decimal, mas sim na correcta recomposição dos números" (Morais, 2011, p. 18), por isso recomenda-se que se use o colar de contas ou a reta graduada para auxiliar na execução dos cálculos.

Um estudo realizado por Carpenter et al. (1998) concluiu que os alunos que, durante o processo de aprendizagem da matemática tiveram oportunidade de inventar as suas estratégias de cálculo mental têm mais facilidade na utilização e manipulação dos algoritmos das operações aritméticas, ao invés daqueles cuja introdução destes métodos de cálculo surgiu precocemente na sala de aula. Estes últimos apresentam dificuldades e incorreções no uso dos algoritmos enquanto os outros mostram “uma compreensão mais profunda sobre aspetos do sistema de numeração, assim como são melhor sucedidos em situações novas” (Mendes, 2012, p. 66). Selter (mencionado por Mendes, 2012) acrescenta, ainda, que os alunos apresentam mais dificuldades na utilização do algoritmo da subtração talvez devido à forma confusa como muitas vezes é explicado e pelo pouco tempo e atenção dedicados a esta operação, contrariamente ao que acontece com a adição. Conclui, ainda que após a introdução do algoritmo este passa a ser “o método mais usado, tendo os outros, quase desaparecido, sobretudo os informais escritos” (Mendes, 2012, p. 68). Por fim, Mendes (2012) salienta que a utilização de abordagens não tradicionais da adição e da subtração auxiliam os alunos a “compreender e a explicar as estratégias utilizadas (…) [referindo] a importância das experiências iniciais serem suportadas por materiais de contagem e por representações (desenhos) elucidativas da estrutura do sistema decimal” (p. 68)

Finalmente, revela-se importante referir que os alunos podem apresentar dificuldades na adição e subtração sendo essencial compreender qual a origem real destas dificuldades, que muitas vezes se reflete ao nível da compreensão dos números. Tal como refere Leitão (2000/2002) “A falta de certos pré-requisitos. E um insuficiente desenvolvimento do sistema de numeração, causa dificuldades na aprendizagem dos algoritmos e erros de cálculo” (p. 46). Mais acrescenta que, para além de se identificar a causa e o tipo de erro, deve-se levar a criança a olhar para os seus erros, para que esse procedimento incorreto seja corrigido, ao invés de ser substituído por outro.

2.5. A resolução de problemas de adição e subtração nas orientações curriculares

Os problemas assumem, desde há muitos anos, um lugar no ensino da matemática contudo, os trabalhos de George Pólya vieram evidenciar o seu valor educativo. O autor defende que os problemas devem desafiar as capacidades matemáticas dos alunos e consequentemente o gosto pela descoberta, sendo estas condições fundamentais “para que os alunos possam perceber a verdadeira natureza da Matemática e desenvolver o seu gosto por esta disciplina” (Ponte, 2005, p. 13). Estas ideias revelaram-se determinantes e marcantes nos currículos até 2007, uma vez que aí “a resolução de problemas em Matemática constitui um traço fundamental das orientações curriculares de todos os níveis de ensino, do 1º ciclo do ensino básico ao ensino superior” (*ibidem*).

Nesta perspetiva, é possível inferir que a resolução de problemas tem sido alvo de discussão relativamente à sua importância para o ensino na matemática, por isso, ao longo dos anos o seu papel nas orientações curriculares tem-se modificado por alterações sociais e políticas educativas.

Na década de 80 do século XX, em Portugal, a Associação de Professores de Matemática (APM) defendia que a resolução de problemas deveria “estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares, tal como tem acontecido afinal ao longo do desenvolvimento da própria Matemática” (Veiga, 1996, p. 16).

No programa de Matemática do 1.º Ciclo de 1998, o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é visto como uma das finalidades de ensino para os quatro anos de escolaridade, avançando ainda com a ideia de que “quer na fase de exploração e descoberta, quer na fase de aplicação, deverá constituir a actividade fundamental desta disciplina e estar presente no desenvolvimento de todos os seus capítulos” (p. 173). Neste sentido, este programa evidencia que a resolução de problemas deve ser uma atividade central na matemática um vez que promove o desenvolvimento do raciocínio, comunicação e uma “atitude activa de aprendizagem” (p. 170). Na mesma perspetiva, o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001) integra a resolução de problemas no tópico das experiências de aprendizagem que devem ser proporcionadas a todos os alunos, salientado que constitui “um contexto universal de aprendizagem e deve, por isso, estar presente, associada ao raciocínio e à comunicação integrada naturalmente nas diversas actividades” (p. 68).

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) consideram a resolução de problemas como “um marco de toda a actividade matemática e uma via fundamental para o desenvolvimento matemático” (p. 134). Este documento evidencia, assim, que a resolução de problemas permite que os alunos desenvolvam novos conhecimentos matemáticos e que adquiram “modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas” (p. 57).

Na mesma perspetiva que o NCTM (2007), o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) de 2007 considera a resolução de problemas como uma capacidade fundamental que os alunos devem desenvolver. Neste sentido, para os autores do programa, a resolução de problemas integra os objetivos gerais do ensino da Matemática e encontra-se incluída nas capacidades transversais a serem desenvolvidas no âmbito da aprendizagem desta disciplina. Esta capacidade não é vista, apenas, como uma atividade de consolidação de conhecimentos mas deve ser, também, utilizada para os alunos "consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático" (Ponte, et al., 2007, p. 5). Nesta perspetiva, este programa permitiu que os professores tivessem oportunidade de abordar a resolução de problemas em sala de aula com objetivos diferentes, ou seja, "em vez de se proporem exercícios para os alunos praticarem processos já conhecidos propõem-se tarefas em que eles têm de definir estratégias e argumentar soluções" (Ponte & Serrazina, 2009, p. 3). Desta forma, torna-se importante que os alunos experienciem que os problemas podem ser resolvidos através de diferentes estratégias e que as mesmas devem ser discutidas e analisadas em conjunto, sendo esperado que "adquiram flexibilidade nos processos de resolução que utilizam, evoluindo, progressivamente, de estratégias informais para estratégias formais" (Ponte J. P., et al., 2007, p. 29).

O PMEB 2007 determina como capacidades que os alunos devem desenvolver as seguintes:

- "Compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
- Apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam;
- Monitorizar o seu trabalho e reflectir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;
- Formular problemas" (Ponte J. P., et al., 2007, p. 5).

Em 2013, surge um novo programa de Matemática (ME, 2013), substituindo o de 2007, que segundo Fonseca (2014) foi um momento "de má memória para muitos professores de matemática" (p. 13) uma vez que trouxe uma "conceção diferente sobre o papel do professor e do aluno" (*ibidem*).

No atual Programa (ME, 2013) encontra-se veiculada a ideia de que a resolução de problemas implica, por parte dos alunos

> a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos previamente estudados e

treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (ME, 2013, p. 5)

A resolução de problemas pressupõe que os problemas sejam resolvidos através de um conjunto de passos sendo esperado que "o número de passos necessários à resolução dos problemas vá aumentando de ano para ano" (ME, 2013, p. 5). É, também, salientada a importância de não se confundir a resolução de problemas com "atividades vagas de exploração" (ibidem) uma vez que esta é uma atividade bastante exigente na Matemática. Neste documento encontra-se, também, patente a ideia de que os problemas devem ser, apenas, utilizados com o objetivo de aplicar conteúdos e/ou regras anteriormente aprendidos, tal como conclui Fonseca (2014) que "na resolução de problemas aplicam-se regras e procedimentos previamente estudados e treinados" (p. 20). Na mesma perspetiva, Jeremy Kilpatrick (2014) ao analisar o novo programa compreende que a resolução de problemas se limita a uma "receita específica, sugerindo que os alunos precisam simplesmente de praticar, seguindo regras e procedimentos previamente aprendidos, e que, assim, ficarão preparados para resolver qualquer problema de matemática que encontrem" (p. 6). Contudo, o atual programa menciona que o gosto pela matemática deve ser fomentado através da compreensão matemática e pela resolução de problemas.

Ao comparar os aspetos referidos pelo PMEB de 2013 com os documentos dos anos anteriores, nomeadamente o PMEB de 2007 é possível identificar a existência de algumas contradições e, de certo modo, algum retrocesso no modo como os problemas são vistos em sala de aula.

Um dos aspetos díspares diz respeito aos tipos de problemas apresentados, uma vez que para o PMEB de 2013 a resolução de problemas encontra-se associada a um número de passos específico e os problemas devem estar relacionados com conteúdos já aprendidos – problemas de conteúdo –, sem se destacarem as diversas estratégias e discussão das mesmas. Todavia, os Princípios e Normas para a Matemática Escolar 2007 contrariam esta perspetiva, pois salientam que os verdadeiros problemas não se limitam a um número de passos para a sua resolução. Para além disto, por considerar que "para a resolução de problemas, o conhecimento do conteúdo matemático, sendo essencial, nem sempre é suficiente" (Fonseca L. , 2014, p. 19) o PMEB de 2007 considera que esta atividade se revela fundamental para a construção, consolidação e mobilização do conhecimento matemático. Ainda no PMEB de 2007 encontra-se patente a importância de discutir as diferentes estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, com vista ao desenvolvimento de novos conhecimentos e da promoção de um novo papel do aluno, já que “ao justificar os seus raciocínios de maneira lógica, o aluno torna-se também numa autoridade na sala de aula” (Ponte & Serrazina, 2009, p. 4).

Nesta perspetiva, é possível compreender que o PMEB de 2007 incentiva a exploração de diversos tipos de problemas, atribui primazia às diferentes estratégias e sua discussão como partilha de ideias promotoras de novos conhecimentos, enquanto o PMEB de 2013 se foca nas etapas de resolução dos problemas bem como nos problemas de conteúdo. Apesar das diferenças que surgiram no novo Programa a resolução de problemas continua a ser uma capacidade central no ensino da Matemática “pois é motor de desenvolvimento da ciência e da nossa civilização” (Fonseca L. , 2014, p. 17).

Relativamente às operações aritméticas adição e subtração, estas surgem sempre integradas no bloco dos Números e Operações. No programa de Matemática do 1.º Ciclo de 1998, o sentido de número, o domínio das operações aritméticas e o cálculo mental tratam-se de importantes aspetos na aprendizagem da matemática no 1.º Ciclo, por isso devem ser trabalhados em sala de aula. Este programa evidencia ainda que os algoritmos das operações aritméticas constituem “meios auxiliares do cálculo” (*idem*, p. 178) sendo que, a sua aprendizagem “deve surgir sempre como o resultado de um longo trabalho com os números e as operações” (*idem*, p. 179), mais acrescenta que a introdução dos algoritmos ao longo dos quatro anos “aparece sequenciada em função do desenvolvimento do cálculo mental e do seu grau de dificuldade” (*ibidem*).

Uma vez que o meu projeto foi implementado com crianças do 2.º ano de escolaridade apresento, em seguida, de que forma a adição e subtração surge no programa de Matemática do 1.º Ciclo de 1998 neste ano de escolaridade. Estas operações aparecem associadas aos seguintes objetivos:

- “Representar números numa recta graduada;
- Explorar situações que levem ao reconhecimento da subtracção como operação inversa da adição;
- Explorar e usar regularidades e padrões na adição e na subtração;
- Construir tabelas da adição e utilizá-las para a subtração;
- Decompor números em somas, diferenças (…);
- Praticar o cálculo mental;

- Procurar estratégias diferentes para efectuar um cálculo (utilizando intuitivamente as propriedades das operações);
- Explicitar oralmente os passos seguidos ao efectuar um cálculo" (pp. 180-181).

Como meios auxiliares de cálculo surge o algoritmo da adição com e sem transporte e o algoritmo da subtração sem empréstimo com números inteiros de 3 algarismos, no máximo.

O Currículo Nacional do Ensino Básico (2001) aborda as operações aritméticas de um modo geral, evidenciando dois aspetos a desenvolver no 1.º Ciclo, tais como: (1) a compreensão do sistema de numeração de posição aliada aos algoritmos das quatro operações; (2) a utilização das propriedades das operações em certas situações e especialmente quando estas facilitam a realização de cálculos. É de salientar que este currículo apresenta, ainda, outros aspetos a desenvolver ao longo de todos os ciclos, sendo que evidencio alguns deles, nomeadamente:

- "a compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações;
- O reconhecimento e utilização de diferentes (…) propriedades das operações;
- A aptidão para efectuar cálculos mentalmente;
- A aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados" (p. 60).

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2007) evidenciam que os alunos devem compreender os sentidos da adição e da subtração bem como as relações entre estas operações e, ainda, perceber quais os resultados ao adicionar e subtrair números inteiros. Este documento realça que, inicialmente, as crianças através da contagem de objetos conseguem resolver problemas de adição e subtração, sendo que algumas utilizam as estratégias de contagem para desenvolver outras estratégias de resolução de problemas. Com a prática, estas estratégias são abandonadas e "os alunos desenvolvem a capacidade de lidar mentalmente com os números e de pensar sobre eles" (*idem*, p. 92) adquirindo flexibilidade de pensamento sobre os números e conduzindo para o desenvolvimento do sentido de número. Para os autores, a compreensão da adição e da subtração poderá partir de problemas com o sentido de acrescentar e retirar, apresentando assim um dos sentidos destas operações, sendo que num futuro próximo se revela essencial que o professor apresente os restantes sentidos, permitido assim que os alunos se deparem "com o mesmo número numa variedade de contextos distintos" (*idem*, p. 96). Por último, este documento defende que "ao desenvolver a compreensão da adição e da subtracção com números inteiros, os alunos estarão, igualmente, a desenvolver o seu repertório de representações" (*ibidem*).

No PMEB de 2007 encontram-se patentes três ideias fundamentais a desenvolver no tema Números e Operações, nomeadamente: promoção e compreensão dos números e operações, desenvolvimento do sentido de número e desenvolvimento da fluência de cálculo. A representação dos números na reta numérica e o desenvolvimento do cálculo mental adquirem, também, uma importância significativa neste programa. Para além do cálculo mental estar relacionado com o desenvolvimento do sentido do número, é de salientar que "quanto maior for o desenvolvimento das estratégias de cálculo mental mais à-vontade se sentirá o aluno no uso de estratégias de cálculo mais convencionais como os algoritmos das quatro operações" (*idem*, p. 10). Segundo este documento, o facto de as crianças deterem algum conhecimento, informal, dos números e suas representações, deverá constituir como um ponto de partida para o desenvolvimento dos Números e Operações, e consequentemente para o desenvolvimento do sentido de número. Revela-se importante proporcionar-lhes experiências de contagem com recurso a modelos estruturados conduzindo, assim, à possibilidade estruturar e relacionar os números, o que "contribui para a compreensão das primeiras relações numéricas" (*idem*, p. 13). É ainda evidenciado que a aprendizagem dos algoritmos deve ser efetuada com compreensão sendo

> fundamental que anteriormente a essa aprendizagem tenha existido um trabalho consistente com os números, valorizando o sentido de número e que os alunos sejam capazes de escolher o processo de cálculo numérico (mental ou escrito) mais adequado a cada situação. (*idem*, pp. 14-15)

Por fim, a adição e subtração surgem nos 1.º e 2.º anos de escolaridade através dos seguintes objetivos específicos:

- "Compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar;
- Compreender a subtração nos sentidos retirar, comparar e completar;
- Usar os sinais +, – (…) na representação horizontal do cálculo;

- Compreender e memorizar factos básicos da adição e relacioná-los com os da subtração;
- Adicionar, subtrair (…) utilizando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito (como por exemplo: decompondo os números, usando a recta não graduada e graduada, etc.);
- Resolver problemas envolvendo adições, subtracções" (*idem*, p. 16).

Contrariamente às orientações curriculares anteriores, o novo PMEB de 2013 atribui bastante importância à aprendizagem dos algoritmos das operações aritméticas, uma vez que na secção dos objetivos menciona que "O domínio de procedimentos padronizados, como por exemplo algoritmos e regras de cálculo, deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina" (ME, 2013, p. 4), sendo que mais à frente reforça esta ideia referindo que "É fundamental que os alunos adquiram durante estes anos fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos" (*idem*, p. 6). Contudo, os autores acrescentam, que a fluência de cálculo a que se referem apenas será conseguida com um sólido desenvolvimento do cálculo mental, encorajando os professores a propor atividades adequadas para a promoção desta capacidade. Este programa preconiza, os conteúdos que devem ser desenvolvidos, pelos alunos do 2.º ano, no que concerne às operações de adição e subtração, nomeadamente:

- "Cálculo mental: somas de números de um algarismo, diferenças de números até 20, adições e subtrações de 10 e 100 a números de três algarismos;
- Adições cuja soma seja inferior a 1000;
- Subtrações de números até 1000;
- Problemas de um ou dois passos envolvendo situações de juntar, acrescentar, retirar, comparar ou completar" (*idem*, p. 8).

Ao analisar os dois últimos programas consigo compreender que existem algumas diferentes do modo vêm os Números e Operações no currículo da matemática. Neste sentido, o PMEB de 2007 enfatiza muitas vezes a importância do desenvolvimento do sentido de número e que esta capacidade se revela fundamental para o conhecimento dos números e suas relações, enquanto no PMEB de 2013 em nenhuma das suas páginas é referido esta expressão.

Os algoritmos, no PMEB de 2013 são vistos como um objetivo a atingir, ou seja, para os autores revela-se essencial que os alunos adquiram este conhecimento e que o saibam utilizar da melhor forma possível, ao contrario do PMEB de 2007 que evidencia que a aprendizagem dos algoritmos deve ser gradual considerando que "num primeiro momento, os alunos devem ter a possibilidade de usar formas de cálculo escrito informais, de construir os seus próprios algoritmos ou de realizar os algoritmos usuais com alguns passos intermédios" (Ponte, et al., 2007, p. 14). Também no PMEB de 2007 é bastante valorizada a representação horizontal e, para Delgado (2009), "esta perspectiva está associada uma forte valorização do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e da aprendizagem gradual dos algoritmos" (p. 18). Contudo, em ambos os programas os algoritmos das operações aritméticas começam a surgir apenas no 3.º ano de escolaridade. É de salientar que os dois programas evidenciam também a importância do desenvolvimento do cálculo mental para o conhecimento da matemática, embora este aspeto seja mais explícito no PMEB de 2007.

Em suma, é possível depreender que o PMEB de 2007 apresenta uma "maior valorização do cálculo mental e do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental" (Delgado, 2009, p. 21) assumindo de forma global uma perspetiva de desenvolvimento do sentido de número nos três ciclos, enquanto o PMEB de 2013 se foca no desenvolvimento do cálculo mental e na aprendizagem dos quatro algoritmos das operações aritméticas.

Capítulo III – Metodologia

O presente capítulo encontra-se organizados em três secções. Primeiramente começo por descrever e justificar as opções metodológicas adotadas neste estudo, em seguida apresento o contexto e os participantes e, por fim, explico as técnicas de recolha e análise de dados utilizadas.

3.1. Opções metodológicas

Quando se realiza um projeto de investigação é necessário pensar numa sequência de passos que conduzirão aos objetivos de estudo, originando "um discurso original sobre um aspecto científico da realidade educacional" (Afonso, 2005, p. 48). É a partir da reflexão sobre a prática que o investigador se questiona sobre as mais diversas problemáticas, suscitando assim a curiosidade e interesse de procurar respostas. Segundo Coutinho (2011) "A investigação é uma atividade de natureza cognitiva que consiste num processo sistemático, flexível e objectivo de indagação e que contribui para explicar e compreender os fenómenos sociais" (p. 7), neste sentido o investigador tem uma intencionalidade "e um conjunto de metodologias, métodos, e técnicas" (*idem*, p. 6-7) que sustentam toda a investigação.

Após, anteriormente, ter indicado as questões que orientam a minha investigação torna-se pertinente identificar o paradigma em que se insere o meu estudo uma vez que

> "o conhecimento científico é uma construção social e história, organizada em "paradigmas" construídos e reconstruídos no seio de comunidades e instituições científicas que refletem e influenciam o contexto social em que se inserem" (Afonso N. , 2005, p. 19).

Para além disto irei definir a metodologia que caracteriza a minha investigação já que esta "implicará a tomada de decisões estratégicas sobre o contexto" (*idem*, p. 56).

3.1.1. O paradigma

Segundo Afonso (2005) quando o investigador mobiliza conceitos, modelos e teorias, não o realiza de forma aleatória, mas sim com uma intencionalidade e em função de um paradigma.

O conceito de paradigma surgiu associado a Thomas Kuhn que o definiu como "o conjunto de crenças, valores, técnicas partilhadas pelos membros de uma dada comunidade científica, (…) [e] como um modelo para o "que" e para o "como" investigar num dado e definido contexto histórico/social" (Kuhn, 1962 citado por Coutinho, 2011). O paradigma pretende tornar consensuais os conceitos e metodologias da investigação, atribuindo assim sentido aos dados recolhidos e à sua interpretação (Afonso, 2005; Coutinho, 2011). Outros autores referem que os paradigmas "não são mais do que esquemas teóricos, com carácter didáctico, que agrupam o conjunto de cientistas que utilizam uma dada metodologia na prática de investigação, constituindo uma comunidade científica" (Coutinho, 2011, p. 9).

Ao refletir acerca deste conceito compreendo que primeiramente o investigador identifica o seu objeto de estudo e o mesmo inserir-se-á num paradigma. É de referir que os paradigmas mostram o modo como se vê o mundo e unificam as ideias dos investigadores que são aceites pela comunidade. Assim, compreende-se que é o paradigma que valida e justifica as metodologias utilizadas pelo investigador para alcançar respostas à questão de investigação, uma vez que este define a forma como o conhecimento deve ser alcançado.

Coutinho (2011) refere que, a maioria dos autores, defende que atualmente existem três paradigmas na investigação em Ciências Sociais e Humanas, nomeadamente: o positivista ou quantitativo, o interpretativo ou qualitativo e o sociocrítico ou hermenêutico.

Após uma leitura cuidada das características de cada paradigma consigo enquadrar o meu estudo no paradigma interpretativo ou qualitativo que é caracterizado "pela preocupação em compreender o mundo social a partir da experiência subjectiva" (Afonso, 2005, p. 34). Segundo Coutinho (2011) este paradigma "procura penetrar no mundo pessoal dos sujeitos, para saber como interpretam as diversas situações e que significado tem para eles" (p. 16), assim é possível compreender que confere primazia à compreensão, ao significado e à ação.

A minha investigação inscreve-se neste último paradigma uma vez que, após diagnosticar um problema – dificuldades dos alunos na utilização das operações aritméticas de adição e subtração – delineei uma intervenção que passou pela resolução de problemas (de adição e subtração), como uma ferramenta que visava auxiliar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades, sendo o meu foco principal a compreensão e caraterização das estratégias utilizadas pelos alunos. Neste sentido, o meu objetivo passa por compreender e caracterizar as estratégias dos alunos e proporcionar-lhes novos problemas que os encorajassem a utilizar estratégias cada vez mais eficientes.

Para além disto, é importante referir que os problemas foram interpretados de um modo global e ainda de modo individual, de forma a compreender o nível de aprendizagem da turma e de cada aluno particularmente, tal como defende Coutinho (2011) que "A interpretação da parte depende da do todo, mas o todo depende das partes. (…) [sendo] A produção do conhecimento (…) concebida como um processo circular, interativo e em espiral" (p. 17).

3.1.2. Investigação qualitativa

Quando houve necessidade de se fazer investigação qualitativa, esta não foi imediatamente aceite pela sociedade e principalmente pelos cientistas que fazem investigação quantitativa. Contudo, após longos anos de "luta" a investigação qualitativa é agora utilizada por uma grande diversidade de autores, "Os investigadores qualitativos estudam os fenómenos nos seus contextos naturais. (…) A investigação qualitativa é, portanto, considerada um campo interdisciplinar e transdisciplinar que atravessa as ciências físicas e humanas." (Nelson et al.,1992 citado por Aires, 2011, p. 13). Segundo Denzin e Lincoln (1994, p. 2) "a investigação qualitativa é uma perspectiva multimetódica que envolve uma abordagem interpretativa e naturalista do sujeito de análise" (citado por Aires, 2011, p. 14).

A investigação qualitativa apresenta cinco características: (1) os dados são retirados do ambiente natural, porque os investigadores preocupam-se com o contexto e defendem que as ações se percebem melhor quando são observadas no ambiente natural da sua população, "Para o investigador qualitativo divorciar o acto, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o seu significado." (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48); (2) é descritiva, porque os dados são palavras ou imagem, estes são tratados de forma minuciosa e na totalidade porque qualquer dado por mais insignificante que seja pode ser uma grande importância para a compreensão do objetivo de estudo, "A palavra escrita assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registo dos dados como para a disseminação dos resultados. (…) Nada é considerado como um dado adquirido e nada escapa à avaliação." (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49); (3) valorização do processo, é mais importante perceber o "como" do que o "porquê", "As estratégias qualitativas patentearem o modo como as expectativas se traduzem nas actividades, procedimentos e interacções diárias." (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49); (4) análise dos dados é feita de forma indutiva, parte-se do empírico para a formulação de teorias, ou seja, depois de várias informações recolhidas, estas são interrelacionadas e formula-se assim a teoria fundamentada,

> "Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes. O processo de análise de dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo." (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50);

(5) importância do significado, o investigador tenta perceber qual o significado que as pessoas dão às suas vidas relativamente ao tema em estudo (perspetivas participantes), percebendo assim a dinâmica interna daquela situação que muitas vezes é invisível ao observador exterior, "Os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber "aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o modo social em que vivem" (Psathas, 1973 citado por Bogdan & Biklen, 1994, p. 51) promovendo assim, o "diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 51).

3.1.3. O método de investigação

O método de investigação caracteriza-se por ser indissociável do paradigma, tal como referido anteriormente, pois este constitui "o caminho para chegar ao conhecimento científico, (sendo) o conjunto de procedimentos que servem de instrumentos para alcançar os fins da investigação" (Coutinho, 2011, p. 22).

O paradigma em que se inscreve a minha investigação é o interpretativo, sendo que adotei uma abordagem próxima da Investigação-Ação. Importa agora referir como os autores definem esta abordagem e como a mesma surge no meu estudo.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) "a investigação-acção consiste na recolha de informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais" (p. 292). Para Kurt Lewin, a investigação-ação baseia-se numa "acção de nível realista sempre seguida por uma reflexão autocrítica objectiva e uma avaliação de resultados e é animada pelo espírito de dupla recusa: nem acção sem investigação nem investigação sem acção." (citado por Silva & Pinto, 1986, p. 265). Segundo Dick (1999), a investigação-ação inclui a ação, representada pela mudança e a investigação, ou compressão, em simultâneo, sendo este um processo cíclico ou em espiral, que alterna entre a ação e a reflexão cítica. “Nos ciclos posteriores, são aperfeiçoados, de modo contínuo, os métodos, os dados e a interpretação feita à luz da experiência (conhecimento) obtida no ciclo anterior.” (referido por Coutinho et al, 2009, p. 360).

Partindo das definições referidas pelos autores importa referir que a investigação-ação é uma metodologia que parte do contexto e de um olhar reflexivo do professor/investigador sobre o mesmo e sobre a sua prática. Após identificar uma situação-problema, o professor/investigador irá utilizar estratégias de implementação para que a sua situação problema se aproxime da situação desejável. Assim, tal como referido anteriormente, a investigação-ação adota um caráter cíclico e assume a seguinte sequência: planificação, ação, observação (avaliação) e reflexão (teorização). Esta sequência repete-se ao longo do tempo para que o investigador/professor analise as interações ocorridas no processo e proceda, assim, a reajustes na investigação do problema, caso seja necessário.

Segundo Coutinho et al. (2009), a investigação-ação apresenta cinco características: (1) participativa e colaborativa, pois todos os intervenientes são integrados no processo e o investigador é participante na medida em que tenta mudar/melhorar a realidade dos intervenientes; (2) prática e interventiva, uma vez que intervém numa realidade e não se limita apenas à teoria; (3) cíclica, porque há uma espiral de ciclos que levam a mudanças, onde a teoria e a prática estão ao mesmo tempo envolvidas; (4) crítica, porque os participantes são também críticos e atuam como agentes de mudança; (5) auto avaliativa, porque há uma constante avaliação das modificações implementadas de forma a adaptar e produzir novos conhecimentos.

Tendo em consideração a problemática da turma referente às dificuldades nas operações aritméticas (adição e subtração), planeei a minha intervenção com base na exploração de problemas de adição e subtração de forma sistemática. Primeiramente apresentei dois problemas com a função de diagnóstico, de modo a avaliar o nível de aprendizagem e as dificuldades de cada criança e poder delinear a minha intervenção de acordo com as necessidades da turma. Após esta primeira fase, apresentei diversos problemas aos alunos, sendo que semanalmente analisava as estratégias usadas pelos alunos na sua resolução, de modo a compreender o que se tornava relevante propor a seguir, para iniciar novos ciclos com novos desafios para os alunos.

3.2. Contexto e participantes

O projeto de investigação foi desenvolvido em contexto de estágio numa escola básica do 1.º ciclo em Setúbal. Em seguida apresento a escola, as características da turma que interveio neste estudo e finalmente as características dos participantes do mesmo.

3.2.1. Caracterização do contexto

A escola na qual estagiei e, consequentemente, implementei este projeto de investigação é a sede de um agrupamento de caracter público que foi criado no ano 2004, abrangendo, desde 2006, oito escolas, localizadas entre a zona rural e a periferia da cidade de Setúbal.

Desde 22 de Setembro de 2010, esta é uma Escola Básica Integrada, uma vez que no mesmo recinto é possível encontrar os diferentes níveis de ensino: ensino pré-escolar, 1.º, 2.º e 3º ciclos do ensino básico.

A escola possui um espaço exterior amplo, com alguns equipamentos lúdicos, bancos e campos de jogos de equipa, onde decorrem os tempos livres dos vários ciclos de ensino, bem como algumas atividades promovidas pela escola.

No edifício destinado ao ensino pré-escolar e 1.º ciclo do ensino básico, é possível verificar a existência de oito salas de aula equipadas com o indispensável, sendo que algumas têm quadro interativo e retroprojetor. Existe, também, uma Unidade de Ensino Estruturado que se baseia no modelo de intervenção do programa TEACCH (*Treatment and Education of Autistic and Related Communication Handicapped Children*), que acolhe crianças com Autismo.

Relativamente ao espaço circundante à escola, é possível visualizar um bairro social que se encontra um pouco degradado e, ainda, um bairro de classe média que apresenta uma requalificação evidente. Existe também alguma diversidade cultural uma vez que na escola existe uma população pertencente a diferentes etnias (africana, cigana, brasileira e de Europa de Leste).

No que respeita à interação com a comunidade este agrupamento mantém parcerias com várias instituições da comunidade local. Além disto, os representantes dos pais e dos encarregados de educação são, igualmente, um elo de ligação importante entre a escola e a comunidade.

3.2.2. Caracterização da turma

A turma na qual estagiei e desenvolvi este trabalho pertence ao 2.º ano de escolaridade e é constituída por vinte alunos com idades compreendidas entre os sete e os oito anos, sendo onze do sexo feminino e nove do sexo masculino.

Após uma análise cuidada do Plano de Turma é possível perceber que este grupo é constituído por crianças oriundas dos bairros circundantes da escola e provêm de famílias com um nível socioeconómico baixo, médio baixo e médio. A turma integra uma criança de etnia cigana, duas cuja nacionalidade não é portuguesa e, ainda, dois alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE).

Relativamente às características da turma, esta apresenta algumas dificuldades no comprimento das regras de sala de aula e de regras sociais tais como: o saber estar, o saber ouvir e o respeitar o próximo. Contudo são crianças meigas, que necessitam de alguma atenção, já que, segundo a professora cooperante, algumas vivem num ambiente familiar pouco estruturado, onde a escola e a educação, no geral, são pouco valorizadas.

No que diz respeito ao aproveitamento, pode considerar-se que se trata de um grupo bastante heterogéneo com diferentes ritmos de trabalho e de aprendizagem. De acordo com o Plano de Turma, existem cinco alunos que apresentam maiores dificuldades de aprendizagem, não conseguindo acompanhar o ritmo da turma. A grande maioria encontra-se desperta, interessada e curiosa para com o processo de ensino-aprendizagem, gostando de interagir no mesmo e apresentando resultados que divergem entre o satisfatório e o excelente, exceto os alunos anteriormente referidos.

3.2.1. Caracterização dos participantes

Para a concretização deste projeto de investigação e, apesar de a maioria dos alunos da turma ter participado na resolução dos problemas propostos, selecionei dois alunos para analisar, aprofundadamente, as suas produções.

A seleção destes alunos teve por base alguns critérios, tais como: a resolução de todos os problemas, a participação nos três momentos da exploração dos problemas na sala de aula, o facto de apresentarem diferentes níveis de aprendizagem e a diversidade de estratégias ao longo dos problemas. Tendo em conta estes critérios foram selecionados a Lara e o Tomé.

Lara

Lara é uma criança afetuosa, alegre e muito amiga do seu amigo. A aluna é distraída e faladora o que a impossibilita de se concentrar nas aulas, apresenta interesse em aprender e empenha-se quando é necessário. Revela bastante insegurança em qualquer área curricular uma vez que tem muito medo de errar devido ao seu perfeccionismo, solicitando várias vezes o *feedback* do adulto no decorrer dos trabalhos realizados. Quando as suas produções são bem-sucedidas, a aluna mostra-se bastante satisfeita e radiante consigo própria, quase como se fosse uma conquista para ela.

Lara apresenta algumas dificuldades na área da matemática, contudo é considerada, pela professora titular da turma, uma aluna de nível de conhecimentos intermédio.

Tomé

Tomé é um aluno que revela bastante interesse na aprendizagem de novos conhecimentos, principalmente na matemática que se caracteriza por ser a sua disciplina de preferência. Apresenta muita necessidade de mostrar os seus conhecimentos e, por isso, é um elemento bastante participativo nas aulas. Contudo, algumas vezes, as suas intervenções orais revelam-se inconvenientes, pois responde a todas a perguntas colocadas, mesmo àquelas que não lhe são destinadas. Nestas situações, Tomé mostra o seu individualismo, característico da sua personalidade, não respeitando os outros para evidenciar as suas competências.

De acordo com a professora titular da turma, o aluno não revela dificuldades de aprendizagem, especialmente na matemática, mostrando segurança nas suas resoluções e querendo ser sempre o primeiro a terminar com sucesso as tarefas propostas.

3.3. Procedimentos de recolha e análise de dados

3.3.1. Técnicas de recolha de dados

As técnicas de recolha de dados encontram-se subjacentes à metodologia escolhida na investigação. Segundo Moreira (2007), “Observar, perguntar e ler são as três acções fundamentais que estão na base das técnicas de recolha de dados” (p. 153).

a) Observação participante

Para que haja observação é necessária a presença do investigador no contexto da investigação. Tal como refere Adler e Adler (1994) "A observação (…) pratica-se no contexto da ocorrência, entre os actores que participam naturalmente na interacção e segue o processo normal da vida quotidiana" (citado por Aires, 2011, p. 25).

A observação consiste numa técnica de recolha de dados, de forma sistemática, que se caracteriza por ser útil e fidedigna, uma vez que a informação obtida não é condicionada pelos pontos de vista dos sujeitos. É através do contacto direto com determinadas situação que esta informação é conseguida (Afonso, 2005; Aires, 2011). Os dados recolhidos através desta técnica, normalmente assumem a forma de "registos escritos pelo investigador, ou registos vídeo" (Afonso, 2005, p. 92).

Existem vários tipos de observação, sendo que os mesmos se distinguem através do papel que o investigador pretende assumir no contexto. Na minha intervenção adotei a observação participante como uma das técnicas de recolha de dados.

A observação participante é normalmente associada à literatura antropológica e sociológica, sendo que por isso

> o investigador insere-se no contexto social e cultural que pretende estudar, vive *como* e *com* as pessoas objecto de estudo, compartilha com elas a quotidianidade, descobre as suas preocupações as suas esperanças, as suas concepções do mundo e as suas motivações, com o propósito de obtenção de uma «visão de dentro» que permite a compreensão. (Moreira, 2007, pp. 178-179)

No decorrer da minha investigação, para além da observação inicial, que me permitiu formular a problemática em que se baseia todo o meu estudo, observei os alunos enquanto resolviam individualmente os problemas para compreender as estratégias que se encontravam a utilizar, com o objetivo de selecionar os alunos que, posteriormente, iriam ao quadro apresentar a sua estratégia. Neste sentido, no momento de partilha das estratégias a toda a turma, observava os alunos que se encontravam no quadro, bem como todos os outros que assistiam, com o intuito de tentar deduzir se algum deles aparentava possuir alguma dúvida. No decorrer de toda a intervenção, complementei a minha observação com registos áudio, uma vez que sempre que considerei necessário questionei os alunos sobre as suas estratégias. É de salientar que todos os registos áudio foram transcritos em formato de notas de campo.

b) Entrevistas clínicas

Segundo Bogdan e Biklen (1994) "uma entrevista consiste numa conversa intencional, (…) dirigida por uma das pessoas, com o objetivo de obter informações sobre a outra" (p. 134). Baseia-se num esquema flexível de interrogação, que permite "ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo" (*ibidem*).

As entrevistas podem assumir diferentes formatos adequados a diversas situações, ambientes e objetivos do investigador (Carmo & Ferreira, 1998). De acordo com Carmo e Ferreira (1998) as entrevistas podem ser classificadas de acordo com a "liberdade concedida ao entrevistado e o grau de profundidade da informação obtida" (p. 130). Assim, os autores dividem as entrevistas em três grandes tipo: (1) entrevistas informais, que se subdividem em entrevista clínica e entrevista em profundidade; (2) entrevistas mistas, que se subdividem em entrevista livre e entrevista centrada; (3) entrevistas formais, que se subdividem em entrevista com perguntas abertas e entrevista com perguntas fechadas.

Na minha investigação realizei entrevistas clínicas, uma vez foi concedida uma liberdade quase total ao entrevistado na sua resposta e as informações partilhadas eram de índole pessoal.

As entrevistas clínicas caracterizam-se por ser uma técnica de recolha de dados com o objetivo avaliar o desempenho dos alunos em matemática. Long e Ben-Hurt (1991) definem a entrevista clínica como sendo "uma troca entre duas ou mais pessoas, na qual o entrevistador (professor) procura extrair informações de um entrevistado (aluno), sobre como ele pensa e aprende" (p. 157) compreendendo assim as dificuldades e competências dos alunos de acordo com uma determinada tarefa.

Com as entrevistas é criado um ambiente onde o aluno tem oportunidade de partilhar as suas estratégias, de pensar e repensar sobre as mesmas através das questões colocadas pelo professor, promovendo-lhe um sentimento de confiança, sem receio de arriscar e errar. Assim, a entrevista clínica permite ao professor descobrir "se os alunos se restringem a um único método de solução de problemas e colocam mais confiança nele, ou se são capazes de usar métodos alternativos" (Long & Ben-Hurt, 1991, p. 157).

As entrevistas decorrem a partir de questões pedagogicamente pensadas pelo professor, sendo que deste modo "o investigador (ou o professor) tem acesso à forma de pensar do aluno, percebendo os conhecimentos em que ele suporta a sua resolução da tarefa e o modo como os usa e relaciona" (Brocardo, Mendes, & Delgado, 2014, p. 86).

Torna-se agora relevante cruzar a vertente teórica das entrevistas clínicas com a minha investigação. Nos momentos em que os alunos se encontravam a resolver os problemas, limitava-me a deambular pela sala observando as estratégias que utilizavam. Após terminarem a resolução do problema, aproximava-me dos alunos, individualmente, e colocava-lhes um conjunto de questões, de acordo com cada situação e consoante o discurso de cada criança, com o objetivo compreender a estratégia que escolheram e consequentemente como pensaram.

c) Recolha documental

Segundo Moreira (2007) "O uso da informação disponível, qualquer que seja o seu carácter documental (…) é praticamente indispensável em investigação social" (p. 153), uma vez que permite ao investigador ter acesso às características de todo o contexto, influenciando ou não o processo investigativo.

De acordo com Moreira (2007), os documentos podem dividir-se em dois tipos de fontes de dados, os dados *primários* que são "os elementos de observação e entrevista ou inquérito obtidos intencionalmente pelo investigador (…) e que representam instrumentos mais valiosos na investigação" (Moreira, 2007, p. 154); e os dados *secundários*, que compreendem os documentos oficiais (arquivos do Ministério de Educação e das organizações escolares, publicações do Estado, etc.), os documentos públicos (revistas, jornais, etc.) e os documentos privados (arquivos de imprensa, estudo autobiográficos, etc.), sendo que para além dos registos escritos existem também os registos audiovisuais e as produções artísticas (Afonso, 2005).

Na minha investigação recolhi dados primários, nomeadamente os registos dos alunos, provenientes da resolução dos problemas, e ainda os registos áudio que acompanharam todo o processo interventivo. Relativamente aos dados de caráter secundário, analisei documentos inerentes à área da Matemática que me auxiliaram na interpretação do processo e produções dos alunos.

3.3.2. Técnicas de análise de dados

Com um extenso material recolhido ao longo de toda a investigação torna-se fundamental analisar e interpretar os dados com vista a um produto final. Assim, a análise de dados, para o investigador "é o processo de busca e de organização sistemática (…) com o objectivo de aumentar a sua própria compreensão (…) [dos] materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205).

a) Análise de conteúdo

A análise de conteúdo "é uma técnica que consiste em avaliar de forma sistemática um corpo de texto (ou material audiovisual), por forma a desvendar e quantificar a ocorrência de palavras/frases/temas considerados "chave" que possibilitem uma comparação posterior" (Coutinho, 2011, p. 193). É necessário salientar que ao analisar dados qualitativos, esta técnica revela-se "um processo muito ambíguo, moroso, reflexivo, que se caracteriza numa lógica de crescimento e aperfeiçoamento" (Afonso, 2005, p. 119).

O objetivo da utilização desta técnica baseia-se na procura de características semelhantes entre os dados, que o investigador irá categorizar e efetuar inferências sobre as mesmas (Coutinho, 2011). Assim, o mesmo autor divide a análise de conteúdo em três fases essenciais: a pré-análise, onde o investigador organiza o material recolhido e escolhe os documentos que pretende analisar; a exploração do material, onde os dados são transformados e "agregados em unidades, as quais permitem uma descrição das características pertinentes do conteúdo" (Bardin, 1997 citado por Coutinho, 2011); e a fase do tratamento dos resultados, onde são realizadas comparações e interpretações dos dados relacionando-os com a fundamentação teórica subjacente ao tema estudado.

Na minha investigação analisei, de forma reflexiva, as estratégias das crianças, aliadas à resolução dos problemas (registos escritos) e, ainda, as transcrições da observação participante e das entrevistas clínicas. De forma a validar as minhas interpretações, analisei individualmente as estratégias de cada aluno e complementei essa interpretação com as notas de campo, provenientes dos registos áudio, para que as minhas inferências se revelassem o mais próximo possível da realidade.

Para analisar as estratégias usadas pelos alunos considerei a caracterização proposta por Foxman e Beishuizen (2002). Além disto, surgiu diretamente dos dados uma estratégia à qual chame A10C por analogia à estratégia N10C.

b) Processo de análise

No decorrer da recolha de dados realizei análises informais que contribuíram para uma delineação, mais sustentada, das estratégias utilizadas por mim enquanto investigadora.

Numa primeira intervenção, com os problemas diagnósticos, realizei uma primeira análise sobre as estratégias e dificuldades dos alunos, compreendendo desta forma que problemas seriam pertinentes propor no futuro. Devido às dificuldades dos alunos, optei por, na semana seguinte, pedir que resolvessem os problemas de acordo com uma estratégia apresentada por mim, para que tivessem oportunidade de contactarem com outras formas de resolver um problema.

Após compreender que os alunos se iam familiarizando com a estratégia apresentada, concedi-lhes liberdade de resolverem os problemas como desejavam, pedindo que vários alunos partilhassem, no quadro, as diversas estratégias.

Para compreender as dificuldades de cada aluno, realizei uma tabela onde apresento uma análise geral de cada problema e divido os alunos por estratégias, analisando de forma global as características das estratégias de cada aluno. Esta tabela foi sendo preenchida todas as semanas e, a partir da mesma, conseguia compreender em que nível de aprendizagem os alunos se situavam, delineando assim o tipo de apoio e as questões que iria colocar às crianças nas entrevistas. Em simultâneo a esta análise, estruturei ainda outra tabela onde colocava apenas as estratégias utilizadas pelos alunos e se eram ou não bem-sucedidas de modo a compreender, de forma geral, se a minha intervenção se encontrava a causar alguma mudança nas aprendizagens dos alunos.

É de salientar que estas análises que realizei ao longo do processo de recolha de dados apresentam-se com um caráter informal e a estrutura das tabelas encontrava-se dependente das produções dos alunos.

Com o término da investigação analisei de forma cuidada todos os dados recolhidos ao longo do processo investigativo de forma a dar resposta às minhas questões de investigação.

Capítulo IV – Proposta Pedagógica

O presente capítulo contém diferentes aspetos relacionados com a proposta pedagógica que me propus desenvolver numa turma do 2.º ano de escolaridade. Neste sentido, na primeira secção são identificadas as opções gerais, é descrita a regularidade com que os problemas foram propostos à turma bem como a sua estrutura, calendarização e fonte de onde foram retirados ou adaptados. Ainda nesta primeira secção encontram-se descritas as quatro partes em que a minha intervenção foi dividida. Na segunda secção apresento os problemas propostos, detalhando as datas da sua exploração, objetivos, operações e sentidos subjacentes, a justificação dos números escolhidos e a antecipação das estratégias de resolução. Por fim, na última seção descrevo o modo como os problemas foram apresentados, explorados e discutidos em sala de aula.

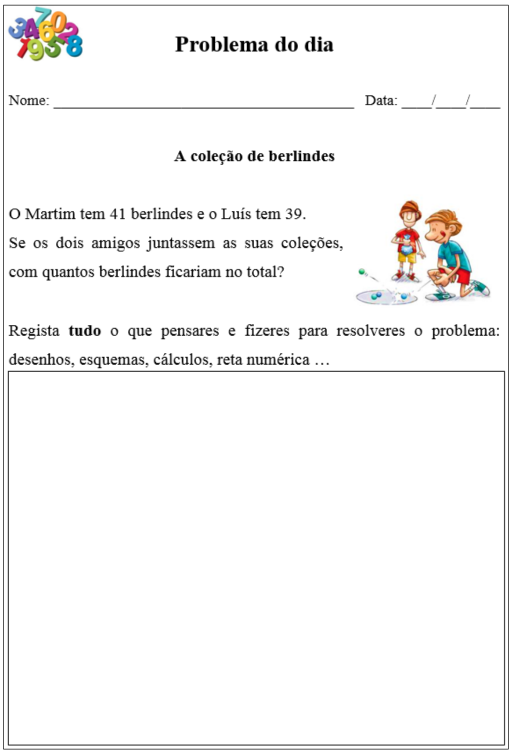
4.1. Opções gerais e calendarização

A proposta pedagógica apresentada na turma do 2.º B consistiu na resolução de um problema, três vezes por semana, respeitando os dias de estágio em que me encontrava com a turma (segunda, terça e quarta-feira). Inicialmente, o meu objetivo baseava-se em tornar o "problema do dia", parte integrante da rotina diária da turma, ou seja, depois de os alunos escreverem a data, estado do tempo e nome completo no caderno resolviam um problema matemático, pois segundo Pólya (1975) resolver problemas não pode ser uma atividade esporádica na sala de aula, devendo estar presente na vida quotidiana dos alunos. Contudo, por motivos que me transcenderam não foi possível concretizar este meu objetivo, sendo que o "problema do dia" era resolvido num de dois momentos: na hora letiva destinada à Matemática ou quando havia tempo. Apesar deste constrangimento, os problemas eram resolvidos pela turma, maioritariamente, no período da manhã. No total foram explorados, em sala de aula, catorze problemas, oito dos quais abordaram a operação adição no sentido de juntar e acrescentar e seis abordaram a operação subtração com os sentidos: completar, retirar e comparar.

A maioria dos problemas foram concebidos por mim, sendo que os restantes foram retirados ou adaptados das brochuras: "1.º Ano – Números e operações" de Brocardo, Delgado e Mendes (2010) e "Desenvolvendo o sentido de número - Materiais para o educador e para o professor do 1.º ciclo" de Brocardo, et al. (2005). A opção de adaptar os problemas cingiu-se à minha preocupação pelos números envolvidos, uma vez que os considerava inadequados para os alunos da turma. Desta forma, optei por escolher números menores para que os alunos conseguissem manipulá-los mais facilmente, procurando evitar a frustração de errar ou de não conseguir resolver os problemas. Para além disto, tornava-se essencial que os números possibilitassem o desenvolvimento de variadas estratégias e procedimentos de cálculo, uma vez que um dos grandes objetivos deste projeto era analisar essas mesmas estratégias e procedimentos dos alunos.

Em cada semana de estágio abordava-se uma temática transversal a todas as disciplinas. Neste sentido, procurei criar problemas cujos enunciados se relacionassem com a mesma, de modo a que os alunos sentissem que os problemas surgiam a partir de um determinado contexto, já que "É através do contexto que as crianças se relacionam e envolvem na resolução de problemas" (Morais, 2011, p. 28). Contudo, esta minha tentativa revelou-se inadequada, uma vez que os problemas que criei, apesar de contextualizados na temática, encontravam-se afastados da realidade. Desta forma, optei por apresentar problemas dissociáveis da temática semanal mas próximos da realidade dos alunos e sempre alicerçados ao Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2013). Assim, os alunos sentir-se-iam familiarizados com o contexto, induzindo o seu interesse e motivação para a sua resolução.

Todos os problemas obedeciam à mesma estrutura tal como mostra a figura 4. De forma a contextualizar o problema ainda antes de este ser lido pelos alunos, optei por colocar sempre um título e uma imagem ilustrativa do mesmo. Na minha perspetiva, as imagens funcionavam como um elemento motivacional e atrativo para a resolução do problema por parte dos alunos. No final de cada enunciado encontrava-se sempre uma frase que dizia: "Regista tudo o que pensares e fizeres para resolveres o problema: desenhos esquemas, cálculos, reta numérica…". Com esta frase pretendia que os alunos compreendessem que poderiam resolver o problema da forma que considerassem mais adequada, sendo que enumerava alguns exemplos para os auxiliar na sua escolha.


Problema do dia

Nome: ________________________________ Data: ___/___/___

A coleção de berlindes

O Martim tem 41 berlindes e o Luís tem 39.
Se os dois amigos juntassem as suas coleções, com quantos berlindes ficariam no total?

Regista **tudo** o que pensares e fizeres para resolveres o problema: desenhos, esquemas, cálculos, reta numérica …

Figura 4 - Exemplo de um problema

Apresento, em seguida, uma tabela onde se pode observar a lista de problemas desenvolvidos na sala de aula, a sua data de realização bem como a operação e sentido subjacente aos mesmos.

Tabela 1 - Problemas desenvolvidos na sala de aula

N.º do problema	Data de realização	Título do problema	Operação	Sentido da Operação
1	18/11/14	Os legumes da Carla	Adição	Juntar
2	19/11/14	Os sólidos geométricos da Joana	Adição	Juntar
3	24/11/14	As páginas do livro I	Adição	Acrescentar
4	24/11/14	As rifas do Miguel	Adição	Acrescentar
5	25/11/14	Parque de estacionamento	Adição	Juntar
6	26/12/14	A coleção de berlindes	Adição	Juntar
7	1/12/14	As páginas do livro II	Subtração	Completar
8	1/12/14	As rifas da Maria	Subtração	Completar
9	2/12/14	A coleção de cromos	Subtração	Retirar
10	3/12/14	O dinheiro dos mealheiros	Adição	Juntar
11	9/12/14	Os relógios	Subtração	Comparar

12	10/12/14	Os brinquedos	Adição	Juntar
13	6/01/15	O Jogo	Subtração	Retirar
14	7/01/15	A idade da Margarida	Subtração	Retirar

Ao longo de doze aulas apresentei problemas diversificados aos alunos, sendo que dividi a minha intervenção em quatro grandes partes:

- Diagnóstico
- Apresentação e exploração da reta numérica em problemas de adição
- Apresentação e exploração da reta numérica em problemas de subtração
- Liberdade estratégica

Na primeira parte, propus à turma dois problemas diagnósticos de adição – "Os legumes da Carla" e "Os sólidos geométricos da Joana" – com o intuito de compreender o nível de aprendizagem dos alunos bem como as suas dificuldades, recolhendo assim toda a informação necessária que serviu de mote para planear devidamente a minha intervenção futura. Ao analisar as resoluções dos alunos, compreendi que se encontravam demasiado focados no algoritmo, embora, ainda não o dominassem, o que de acordo com a minha perspetiva, limitava-lhes o desenvolvimento do sentido de número. Baseada nestes factos, segui para a segunda parte que teve como finalidade utilizar a reta numérica como apoio às estratégias de resolução para problemas de adição, por conseguinte, subdividi esta etapa em três fases: (1) apresentei um problema – "As páginas do livro I" – que continha duas hipóteses de resposta e onde era utilizada a reta numérica como modelo de apoio ao cálculo; (2) no mesmo dia, propus aos alunos outro problema – "As rifas do Miguel" – com a finalidade de usarem a reta como suporte (modelo de cálculo) à sua resolução, tal como no problema anterior; (3) apresentei outro problema para resolverem apoiando-se na reta numérica ou utilizando uma estratégia com que se sentissem confortáveis, exceto o algoritmo. A terceira parte, à semelhança da anterior, teve como finalidade utilizar a reta numérica como apoio às estratégias de resolução para problemas de subtração, por conseguinte, subdividi esta etapa em três fases: (1) apresentei o problema "As páginas do livro II", idêntico ao "As páginas do livro I", contudo mostrava como utilizar a reta numérica com a operação subtração; (2) no mesmo dia entreguei o problema – "As rifas da Maria" – com a finalidade de usarem a reta como suporte (modelo de cálculo) à sua resolução, tal como no problema anterior; (3) propus outro problema para o resolverem apoiando-se na reta numérica ou utilizando uma estratégia que se sentissem confortáveis, exceto o algoritmo. Por fim, a quarta parte consistiu na resolução de cinco problemas (três de subtração e dois de adição) onde foi concedida liberdade aos alunos de utilizarem o modelo de apoio ao cálculo apresentado por mim ou desenvolverem outras estratégias de resolução, sendo excluída a opção de utilizarem os algoritmos da adição e subtração.

4.2. Os problemas propostos

Problema 1 – Os legumes da Carla

Ao longo das semanas de estágio compreendi, através da observação, que os alunos apresentavam algumas dificuldades na manipulação mental dos números e, consequentemente, na resolução de problemas. Neste sentido, optei por considerar o primeiro problema como um problema de diagnóstico, com o objetivo de compreender quais as estratégias utilizadas pelos alunos e, consequentemente, algumas das suas dificuldades, para que com esses dados pudesse delinear o "rumo" da minha investigação segundo as suas necessidades.

O problema "Os legumes da Carla" foi resolvido no dia 18 de novembro de 2014, sendo que o seu contexto relaciona-se com a temática da semana, que incidia sobre a Roda dos Alimentos. O problema foi concebido por mim, contudo, o seu contexto encontra-se distante da realidade e quotidiano das crianças, facto que compreendi na sua exploração em sala de aula.

Os legumes da Carla

Na segunda-feira a Carla comprou 16 legumes.

Na terça-feira comprou mais 17 frutas.

Quantos alimentos comprou a Carla?

Figura 5 - Problema "Os legumes da Carla"

Neste primeiro problema encontra-se patente a operação adição no sentido de juntar. A minha escolha recaiu no facto de esta operação e sentido serem aqueles que os alunos aprendem primeiramente e com os quais se espera que tenham mais contacto no seu quotidiano.

Os números escolhidos para o problema encontram-se próximos do número 15, tendo como expectativa que os alunos se apercebessem desta característica para a delineação das suas estratégias. Assim, antecipei algumas estratégias que poderiam ser utilizadas pela turma, tais como:

- representação icónica das quantidades envolvidas;
- decomposição dos números envolvidos para os adicionar;
- saltar até à dezena mais próxima, com recurso à reta numérica;
- saltar, inicialmente, 10 unidades e depois saltar as unidades restantes, com recurso à reta numérica.

Problema 2 – Os sólidos geométricos da Joana

O problema "Os sólidos da Joana" foi resolvido no dia 19 de novembro de 2014, sendo que se apresenta como o último problema da primeira parte da minha intervenção – diagnóstico. O seu contexto relaciona-se com a temática da semana, que incidia sobre os sólidos geométricos. O problema foi concebido por mim e tal como no problema anterior, percebi mais tarde que o seu contexto não era próximo da realidade dos alunos.

Os sólidos geométricos da Joana

A Joana tinha 21 *poliedros* numa caixa e 20 *não poliedros* noutra caixa.

Quantos sólidos geométricos tinha a Joana?

Figura 6 - Problema "Os sólidos geométricos da Joana"

Os objetivos da apresentação deste problema à turma relacionam-se com os do problema anterior, ou seja, teve também a função de diagnóstico, uma vez que se encontram na mesma fase da intervenção.

Embora estes dois primeiros problemas envolvam a operação adição no sentido juntar, os números utilizados têm características diferentes, pois pretendiam que os alunos reconhecessem e utilizassem outras estratégias.

Os números usados foram escolhidos por serem familiares aos alunos, neste sentido, considerando o contexto e os números envolvidos no problema antecipei as seguintes estratégias:

- representação icónica das quantidades envolvidas;

- adição através da decomposição dos números envolvidos;
- usar factos conhecidos (20+20=40);
- saltar de 10 em 10, usando a reta numérica.

Problema 3 – As páginas do livro I

O problema “As páginas do livro I” caracteriza-se por ser um problema de explicação que serviu de mote para a segunda parte de intervenção deste projeto. Foi apresentado no dia 24 de novembro de 2014 e adaptado da brochura “1.º Ano – Números e operações” de Brocardo, Delgado e Mendes (2010).

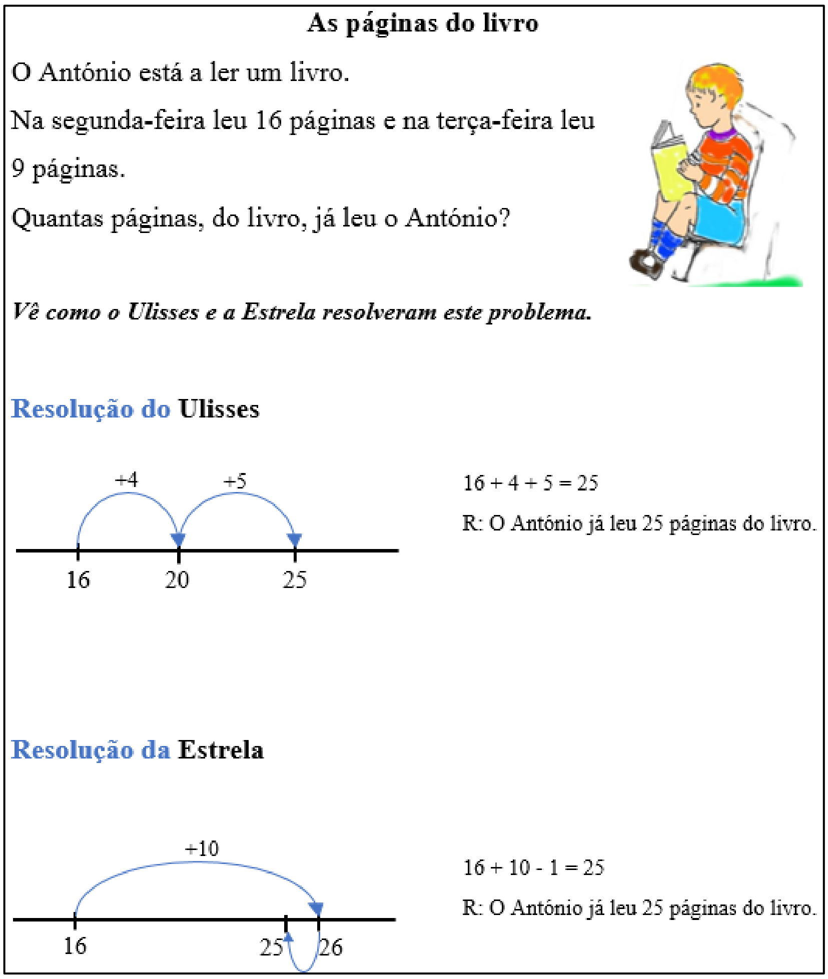


Figura 7 - Problema ”As páginas do livro I”

A apresentação do problema “As páginas do livro I” teve como finalidade mostrar aos alunos o uso da reta numérica como modelo de apoio ao cálculo. O problema foi interpretado e explorado em conjunto com os alunos com o intuito de os conduzir para a ideia de que o mesmo problema pode ser resolvido através de diversas estratégias, suportadas pelo mesmo modelo de cálculo e, por isso, são apresentadas duas estratégias de resolução:

- estratégia do Ulisses: saltar até à dezena mais próxima
- estratégia da Estrela: saltar de 10 em 10

Optei por atribuir as duas resoluções do problema, a duas personagens já conhecidas pelos alunos, a Estrela e o Ulisses, protagonistas dos problemas incluídos no manual de Matemática da turma. Neste sentido, considerei que, desta forma, os alunos se sentiriam mais interessados e familiarizados com o problema.

A escolha da reta numérica como modelo de cálculo relacionou-se com o facto de os alunos, nos problemas diagnósticos, apresentarem algumas dificuldades inerentes ao sentido de número. Nesse sentido, considerei que a reta numérica poderia servir como apoio ao cálculo, de modo a permitir que os alunos ultrapassassem as suas dificuldades.

O problema "As páginas do livro I" apresenta a operação adição com o sentido acrescentar com o objetivo de dar continuidade aos problemas diagnósticos e trabalhar esta mesma operação aplicando um modelo de cálculo e estratégias diferentes das que frequentemente utilizavam.

Os números escolhidos para o problema encontram-se próximos do 20 e do 10, números de referência com os quais os alunos se encontram habituados a trabalhar, tornando assim as resoluções do problema de fácil compreensão.

Problema 4 – As rifas do Miguel

O problema "As rifas do Miguel", resolvido no dia 24 de novembro de 2014, foi adaptado da brochura "1.º Ano – Números e operações" de Brocardo, Delgado e Mendes (2010).

As rifas do Miguel

O Miguel tem de vender rifas para a escola. Num dia vendeu 22 rifas e noutro dia vendeu 9 rifas.

Quantas rifas já vendeu o Miguel?

Figura 8 - Problema "As rifas do Miguel"

Após a análise e discussão do problema "As páginas do livro I" com os alunos, apresentei o problema "As rifas do Miguel" para lhes permitir usar uma das estratégias discutidas anteriormente neste novo problema. Este problema, tal como o anterior, apresenta um contexto de adição no sentido acrescentar.

Os números escolhidos para este problema assemelham-se aos do problema anteriormente apresentado, de modo que os alunos tenham facilidade em aplicar a estratégia anterior e, consequentemente, auxiliá-los a compreendê-la. Neste sentido, as estratégias previstas, com recurso à reta numérica foram:

- saltar de 10 em 10;
- saltar até à dezena mais próxima.

Problema 5 – Parque de estacionamento

O problema "Parque de estacionamento" foi resolvido no dia 25 de novembro de 2014 e adaptado da brochura "1.º Ano – Números e operações" de Brocardo, Delgado e Mendes (2010).

Parque de estacionamento

Num parque de estacionamento existem duas zonas.

A **Zona A** tem 25 lugares e a **Zona B** tem também 25 lugares.

Quantos lugares tem o parque de estacionamento?

Figura 9 - Problema "Parque de estacionamento"

Este problema teve como finalidade que os alunos utilizassem o modelo de cálculo apresentado nos problemas anteriores – reta numérica – com o intuito de lhes conceder oportunidade de, mais uma vez, colocarem em prática novas estratégias.

De modo a dar oportunidade de os alunos trabalharem outro sentido da operação adição, este problema apresenta a operação adição no sentido de juntar.

Quanto aos números escolhidos, desta vez, optei por selecionar números com características diferentes dos do problema anterior com o objetivo de criar uma situação diferente, mais desafiadora para os alunos. Assim, considerando o contexto e os números envolvidos antecipei as seguintes estratégias, tendo com recurso a reta numérica:

- saltar de 5 em 5;
- saltar de 10 em 10;

- saltar de 20 em 20;
- saltar até à dezena mais próxima.

Problema 6 – A coleção de berlindes

O problema "A coleção de berlindes" foi resolvido no dia 1 de dezembro de 2014 e concebido por mim. Este é o último da segunda parte da minha intervenção que teve como objetivo trabalhar, especificamente, a operação adição e um novo modelo de cálculo não utilizado pelos alunos – a reta numérica.

A coleção de berlindes

O Martim tem 41 berlindes e o Luís tem 39.
Se os dois amigos juntassem as suas coleções, com quantos berlindes ficariam no total?

Figura 10 - Problema "A coleção de Berlindes"

Para este problema foi concedida liberdade aos alunos de utilizarem a estratégia que preferissem, com a finalidade de compreender se arriscariam em utilizar a reta numérica para apoiar a estratégia que considerassem mais adequada. Por estes motivos, encontra-se, mais uma vez, patente a operação adição no sentido de juntar.

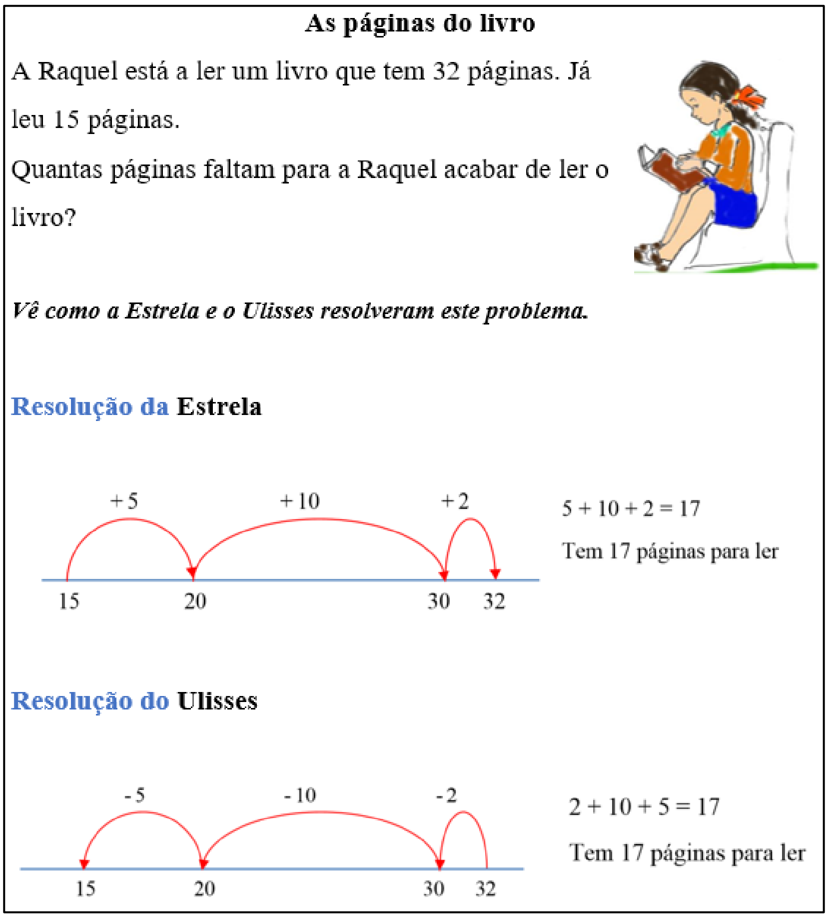
Os números são números próximos do 40 e, com os quais os alunos já têm vindo a trabalhar no decorrer das aulas dedicadas à matemática.

Considerando o contexto e os números envolvidos antecipei as seguintes estratégias:

- representação icónica das quantidades envolvidas;
- adição através da decomposição dos números envolvidos;
- usar factos conhecidos (40+40=80);
- saltar de 10 em 10, usando a reta numérica;
- saltar até à dezena mais próxima, usando a reta numérica.

Problema 7 – As páginas do livro II

O problema "As páginas do livro II", à semelhança do problema "As páginas do livro I", caracteriza-se por ser um problema de explicação que serviu de mote para a terceira parte de intervenção deste projeto. Foi apresentado no dia 2 de dezembro de 2014 e adaptado da brochura “1.º Ano – Números e operações” de Brocardo, Delgado e Mendes (2010).



As páginas do livro

A Raquel está a ler um livro que tem 32 páginas. Já leu 15 páginas.

Quantas páginas faltam para a Raquel acabar de ler o livro?

Vê como a Estrela e o Ulisses resolveram este problema.

Resolução da Estrela

Resolução do Ulisses

Figura 11 - Problema “As páginas do livro II”

A apresentação do problema “As páginas do livro II” teve como finalidade mostrar aos alunos o uso da reta numérica como modelo de apoio ao cálculo associado à operação subtração. O problema foi interpretado e explorado em conjunto com os alunos com o intuito de os conduzir para a ideia de que o mesmo problema pode ser resolvido, recorrendo à reta numérica mas usando estratégias diferentes e, por isso, são apresentadas duas estratégias de resolução:

- estratégia da Estrela: saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia aditiva
- estratégia do Ulisses: saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia subtrativa

Mais uma vez, optei por atribuir as duas resoluções do problema, a duas personagens já conhecidas pelos alunos, a Estrela e o Ulisses, pois são elas que protagonizavam os manuais dos mesmos, na tentativa de se sentirem mais interessados e familiarizados com o problema.

A escolha da reta numérica como modelo de cálculo relacionou-se com o facto de dar continuidade ao trabalho desenvolvido na segunda parte de investigação deste estudo. Uma vez que, primeiramente, apresentei a reta numérica como um modelo de apoio ao cálculo em problemas de adição, considerei que seria importante revelar a sua utilidade em problemas de subtração.

O problema "As páginas do livro II" envolve a subtração com sentido completar. A escolha de um contexto de subtração com este sentido está relacionada com o facto de, frequentemente, serem usadas estratégias aditivas na sua resolução.

Os números escolhidos para o problema estão próximos do 30 (32) e o 15 é um número de referência com os quais os alunos se encontram habituados a trabalhar, tornando assim as resoluções do problema de fácil compreensão.

Problema 8 – As rifas da Maria

O problema "As rifas da Maria", resolvido no dia 2 de dezembro de 2014, foi adaptado da brochura "1.º Ano – Números e operações" de Brocardo, Delgado e Mendes (2010).

As rifas da Maria

A Maria tem de vender 37 rifas para a escola. Mas ainda só vendeu 25.

Quantas rifas faltam vender à Maria?

Figura 12 - Problema "As rifas da Maria"

Após a análise e discussão do problema "As páginas do livro II" com os alunos, apresentei o problema "As rifas da Maria" para lhes conceder oportunidade de usarem uma das estratégias discutidas anteriormente neste novo problema. Nesta perspetiva, este problema, tal como o anterior, apresenta a operação subtração no sentido completar.

Os números escolhidos para este problema assemelham-se aos do problema anteriormente apresentado, de modo que os alunos tenham facilidade em aplicar a estratégia anterior e, consequentemente, auxiliá-los a compreendê-la. Neste sentido, as estratégias previstas, com recurso à reta numérica foram:

- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia aditiva;

- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia subtrativa.

Problema 9 – A coleção de cromos

O problema "A coleção de cromos" foi resolvido no dia 3 de dezembro de 2014 e concebido por mim.

A coleção de cromos

A Sara tinha 65 cromos de uma coleção que andava a fazer. Como é muito amiga da Beatriz, deu-lhe 29 cromos que tinha repetidos.
Com quantos cromos ficou?

Figura 13 – Problema "A coleção de cromos"

Este problema teve como finalidade a utilização da reta numérica na construção de estratégias de resolução.

De modo a criar uma situação mais desafiadora e perceber como, os alunos, a iriam encarar optei por escolher outro sentido da operação subtração, o sentido de retirar. Pelos mesmos motivos selecionei números com características diferentes e de maior ordem de grandeza relativamente aos dos problemas anteriores. Assim, considerando o contexto e os números envolvidos antecipei as seguintes estratégias, tendo com recurso a reta numérica:

- saltar de 5 em 5;
- saltar de 10 em 10;
- saltar de 20 em 20;
- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia aditiva;
- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia subtrativa.

Problema 10 – O dinheiro dos mealheiros

Findadas as primeiras fases de intervenção, o problema "O dinheiro dos mealheiros", resolvido no dia 10 de dezembro de 2014 e concebido por mim, serviu de mote para a quarta e última parte desta investigação, com o objetivo de dar liberdade aos alunos de escolherem as estratégias de cálculo que pretendessem para resolver os problemas.

O dinheiro dos mealheiros

A Catarina tem 65€ no seu mealheiro e o Tiago tem 29€.
Os dois irmãos decidiram juntar o seu dinheiro para
comprar uma prenda para os pais.
Quanto dinheiro têm os dois irmãos?

Figura 14 – Problema "O dinheiro dos mealheiros"

Uma vez que nos três anteriores problemas foi trabalhada a operação subtração, optei por apresentar, mais uma vez, um problema de adição no sentido de juntar, para que os alunos recordassem o trabalho desenvolvido anteriormente.

Relativamente aos números escolhidos, o número 29 é próximo do número 30 e o 65 é próximo do dobro de 30. Estes possibilitam que os alunos os decomponham em números de referência que, posteriormente, revelar-se-ão úteis nas estratégias escolhidas e, consequentemente, no sucesso da resolução do problema.

É de salientar que que os números deste problema estão associados ao dinheiro. Uma vez que o Programa e Metas Curriculares de Matemática, para o 2.º ano de escolaridade, integra a contagem de euros, julguei pertinente incluir esse conteúdo neste problema.

Considerando o contexto e os números envolvidos antecipei as seguintes estratégias:

- adição através da decomposição dos números envolvidos;
- saltar de 5 em 5, usando a reta numérica;
- saltar de 10 em 10, usando a reta numérica;
- saltar até à dezena mais próxima, usando a reta numérica.

Problema 11 – Os relógios

O problema "Os relógios" foi resolvido no dia 12 de dezembro de 2014 e concebido por mim.

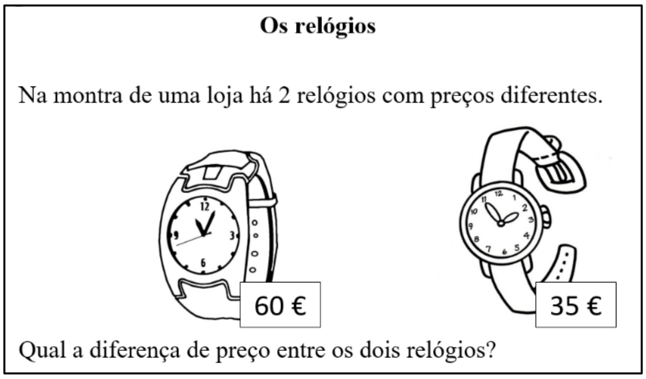


Figura 15 – Problema "Os relógios"

Com o objetivo de trabalhar outro sentido da operação subtração, de criar uma situação mais desafiadora e de analisar como os alunos a iriam encarar, este é um problema de subtração no sentido de comparar.

Relativamente aos números escolhidos, o número 35 é próximo do número 30 e o 60 é o dobro de 30. Estas características revelar-se-ão úteis nas estratégias escolhidas e, consequentemente, no sucesso da resolução do problema.

É de salientar que que os números deste problema, tal como no anterior, estão associados a quantidades de dinheiro, em euros.

Considerando o contexto e os números envolvidos antecipei as seguintes estratégias:

- subtração através da decomposição dos números envolvidos;
- usar factos conhecidos (60+30=30);
- saltar de 5 em 5, usando a reta numérica;
- saltar de 10 em 10, usando a reta numérica;
- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia aditiva;
- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia subtrativa.

Problema 12 – Os brinquedos

O problema "Os brinquedos" foi resolvido no dia 5 de janeiro de 2015 e concebido por mim.

Os brinquedos

Na montra de uma loja há vários brinquedos com preços diferentes.
A mãe do Joaquim quis oferecer-lhe uns matraquilhos e um xilofone.

Quanto gastou a mãe do Joaquim?

Figura 16 – Problema "Os brinquedos"

Sendo este o último problema de adição apresentado, optei por dar continuidade ao trabalho desenvolvido anteriormente com esta operação, por isso, este problema tem o sentido de juntar.

Relativamente aos números escolhidos, o número 59 é próximo do número 60 e o 25 é um número de referência. Estes possibilitam que os alunos os decomponham em números de referência que poderão ser úteis nas estratégias escolhidas e, consequentemente, no sucesso da resolução do problema.

É de salientar que, tal como anteriormente, os números deste problema estão associados a euros, pelas razões já apontadas. Considerando o contexto e os números envolvidos antecipei as seguintes estratégias:

- adição através da decomposição dos números envolvidos;
- saltar de 5 em 5, usando a reta numérica;
- saltar de 10 em 10, usando a reta numérica;
- saltar até à dezena mais próxima, usando a reta numérica.

Problema 13 – O jogo

O problema "O jogo" foi resolvido no dia 6 de janeiro de 2015 e concebido por mim.

O jogo

O Miguel e a Cláudia estiveram a jogar a um jogo. No final, a Cláudia teve 70 pontos e o Miguel teve 45 pontos a menos.
Quantos pontos teve o Miguel?

Figura 17 – Problema "O jogo"

Uma vez que todos os sentidos da operação subtração já haviam sido trabalhados à exceção de um, considerei pertinente que os alunos trabalhassem com o mesmo, por isso este problema é de subtração no sentido de retirar.

Relativamente aos números escolhidos, um é múltiplo de 10 e outro é múltiplo de 5. Estes possibilitam que os alunos os decomponham em números de referência que posteriormente revelar-se-ão úteis nas estratégias construídas pelos alunos.

Considerando o contexto e os números envolvidos antecipei as seguintes estratégias:

- subtração através da decomposição dos números envolvidos;
- saltar de 5 em 5, usando a reta numérica;
- saltar de 10 em 10, usando a reta numérica;
- saltar de 20 em 20, usando a reta numérica;
- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia aditiva;
- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia subtrativa.

Problema 14 – A idade da Margarida

O problema "A idade da Margarida" foi resolvido no dia 7 de janeiro de 2015 e concebido por mim.

A idade da Margarida

A avó da Margarida tem 91 anos e a Margarida tem 45 anos a menos.
Quantos anos tem a Margarida?

Figura 18 – Problema "A idade da Margarida"

De modo a dar continuidade ao problema anterior, este problema é de subtração com o sentido de retirar.

Relativamente aos números escolhidos, o número 91 é próximo do número 100 e próximo do dobro de 45. Estes possibilitam que os alunos os decomponham em números de referência que poderão ser úteis nas estratégias escolhidas e, consequentemente, no sucesso da resolução do problema.

Considerando o contexto e os números envolvidos antecipei as seguintes estratégias:

- subtração através da decomposição dos números envolvidos;

- saltar de 5 em 5, usando a reta numérica;
- saltar de 10 em 10, usando a reta numérica;
- saltar de 20 em 20, usando a reta numérica;
- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia aditiva;
- saltar até à dezena mais próxima usando uma estratégia subtrativa.

4.3. Exploração dos problemas em sala de aula

A exploração dos catorze problemas decorreu ao longo de quatro semanas e meia e cada um ocupava, aproximadamente, quarenta a sessenta minutos do horário letivo dos alunos. A sua duração variava de acordo com as dúvidas e/ou entusiasmo dos alunos em mostrar os seus raciocínios ou com o problema apresentado – os problemas de explicação (P3 e P7) necessitavam de mais tempo para serem explorados/discutidos.

As aulas organizaram-se em três fases distintas: (1) apresentação do problema, (2) exploração, individual do mesmo e (3) discussão coletiva.

Apresentação do problema

Primeiramente, é explicado aos alunos que o trabalho será realizado individualmente, sendo que existirão dois momentos em grande grupo, nomeadamente a apresentação e discussão do problema. Saliento ainda a importância da fase de exploração ser realizada individualmente, justificando que se pretende que os alunos mostrem o que são capazes de fazer e, principalmente, que não tenham receios em resolver o problema da forma que entenderem mesmo que, posteriormente, o resultado esteja errado. Apenas desta forma consigo compreender quais as dificuldades dos alunos e a partir desse ponto trabalhar em conjunto, de forma a conseguir superá-las.

Em seguida, distribui-se o problema por cada aluno, sendo solicitado que o enunciado seja lido individualmente e em voz baixa. Terminado este momento, atribuo a oportunidade de um aluno, voluntário, ler o enunciado, em voz alta, para toda a turma. Posteriormente, peço a outro aluno, voluntário, que explique por palavras suas o que entendeu que problema pedia e quais os seus aspetos relevantes para o resolver. É importante referir que os outros colegas têm também oportunidade de intervir, ordeiramente, para colocar dúvidas, para discordar ou concordar com o colega, mas sempre fundamentando as suas opiniões, de forma a ajudar toda a turma a compreender o problema. O meu papel passa por orientar os alunos caso seja necessário intervir, ou seja, se algum aluno não se conseguir fazer entender pelos outros ou se a turma não estiver a compreender o problema.

Os problemas de explicação (P3 e P4) foram também apresentados da forma agora descrita, contudo, uma vez que o objetivo destes passa por apresentar, à turma, um novo modelo de cálculo, há necessidade de intervir algumas vezes junto da mesma. Após a leitura do enunciado e discussão do mesmo, pede-se que os alunos analisem, individualmente, as estratégias apresentadas (do Ulisses e da Estrela) e, em grande grupo, procede-se à compreensão e discussão das mesmas. É de salientar, que quando findada a discussão, sistematizo as ideias dos alunos explicando as estratégias apresentadas.

Finalmente é explicada à turma a importância do registo de todos os cálculos e/ou procedimentos utilizados, mesmo que sejam feitos mentalmente, uma vez que, esses raciocínios se revelam fulcrais tanto para eles conseguirem mostrar aos colegas a forma como pensaram, como para o professor compreender as estratégias utilizadas até atingirem o resultado.

Esta fase, inicialmente, ocorre num período de tempo mais alargado, que progressivamente se vai reduzindo com a confiança dos alunos na leitura e interpretação do enunciado dos problemas.

Exploração do problema

Este momento de exploração do problema sucede-se de forma individual e autónoma, contudo, algumas vezes os alunos solicitam a minha ajuda para receber *feedback* sobre o trabalho que se encontram a desenvolver. Nesta perspetiva, enquanto a turma resolve o problema, eu deambulo pela sala para monitorizar o seu trabalho uma vez que o meu papel passa por apoiar, esclarecer dúvidas e incitar a reflexão dos alunos. Assim, ao invés de dar *feedbacks* positivos ou negativos, lançava questões que promovessem o repensar dos alunos sobre o seu raciocínio.

Na fase de exploração tive oportunidade de realizar entrevistas clínicas a alguns alunos, após o término da resolução do problema, com o objetivo de compreender o modo como pensam e as estratégias que utilizam. Fundamentalmente, solicito ao aluno que me explique como resolveu o problema e questiono o porquê das suas escolhas (dos modelos, estratégias e procedimentos de cálculo). Os dados recolhidos destas entrevistas possibilitam a compreensão do raciocínio dos alunos facilitando assim a análise de dados desta investigação.

Circular pela sala a observar o trabalho desenvolvido pelos alunos bem como realizar entrevistas clínicas, revelam-se elementos essenciais para a seleção e sequenciação das estratégias a serem apresentadas no momento de discussão em turma. Os critérios utilizados para esta seleção passam pela estratégia (mais ou menos eficaz) e procedimentos de cálculo escolhidos (corretos ou incorretos).

Discussão coletiva

Quando todos terminam a exploração do problema, recolhem-se todos os enunciados. Inicialmente, não recolhia os enunciados para dar oportunidade aos alunos de confrontarem as suas estratégias com aquelas que posteriormente seriam apresentadas no quadro. Contudo, apercebi-me que muitas crianças apagavam as suas estratégias, por estarem incorretas ou por não serem iguais às apresentadas. Então expliquei aos alunos que não pretendia que corrigissem nada mas que realizassem comparações para alcançar conclusões. Infelizmente, os alunos insistiam em apagar e corrigir as suas estratégias e, por isso, para não comprometer os dados optei por recolher sempre os enunciados.

Após o momento anterior, dá-se início à discussão coletiva. Alguns alunos são escolhidos por mim, tendo em conta os dados recolhidos na fase anterior, para explicarem, à turma, as suas estratégias de resolução do problema. Um a um, os alunos dirigem-se ao quadro e registam tudo o que escreveram na sua folha, explicando aos colegas como pensaram e todas as etapas do seu raciocínio. É importante referir que este é um momento propício para o desenvolvimento da comunicação matemática, por isso o aluno tem a liberdade de mostrar e explicar tudo por palavras suas. Neste sentido, a minha intervenção apenas se justifica quando o aluno aparenta dificuldades em fazê-lo ou caso considere a sua explicação incompleta. Caso tal se verifique, coloco questões ao aluno, permitindo que o mesmo reflita e complete o seu raciocínio da melhor forma. Qualquer elemento da turma poderá intervir, ordeiramente, colocando questões bem como tecendo comentários, levando a uma discussão mais rica. Mais uma vez, nestes casos, será o aluno que se encontra no quadro que deverá responder aos colegas de modo a "defender" o seu raciocínio, eu apenas intervenho quando estritamente necessário.

Caso existam estratégias que considere fundamentais para a exploração do problema mas que nenhum dos alunos tenha utilizado, no final de todos os alunos escolhidos apresentarem os seus raciocínios, eu apresento esses mesmos registos, com o objetivo de que a turma tenha acesso a estratégias diferentes daquelas a que estão habituados. A minha intervenção, a este nível, também acontecia quando nenhum dos alunos conseguia chegar ao resultado correto, ou seja, apresentava alguns exemplos de estratégias utilizadas por alguns alunos mas com os procedimentos de cálculo corretos.

No final de cada problema, em grupo, analisam-se globalmente os registos dos alunos escolhidos, conduzindo a uma reflexão sobre quais as estratégias mais e menos eficazes e sintetiza-se, assim, os aspetos mais importantes que foram trabalhados.

É importante referir que a turma se caracteriza por ser bastante participativa e com o desenvolvimento do projeto a maioria pretendia apresentar as suas estratégias aos colegas, por isso, ao longo das aulas destinadas à implementação deste projeto, houve o cuidado de todos os alunos terem tido oportunidade de realizar alguma tarefa de forma a sentirem-se ativamente envolvidos no projeto. Entenda-se como tarefas: a distribuição e recolha dos enunciados, leitura em voz alta do problema e apresentação das estratégias no quadro.

Capítulo V – Análise de dados

Considerando que o presente projeto de investigação tem como objetivo compreender o modo como os alunos do 2.º ano resolvem problemas de adição e subtração, no presente capítulo apresento a descrição e análise dos dados recolhidos durante o período de estágio.

São analisadas as resoluções de dois alunos, num total de doze problemas para cada um. As resoluções, de cada aluno, são analisadas e sustentadas nas suas produções escritas, bem como nas entrevistas clínicas gravadas ao longo da investigação.

No final da análise de cada aluno apresento, com recurso a uma tabela, uma síntese das representações e estratégias usadas na resolução dos problemas. Assim, torna-se possível identificar diferenças e/ou semelhanças entre os alunos, as dificuldades manifestadas, bem como possíveis evoluções no que concerne à aprendizagem das operação de adição e subtração.

5.1. Lara

5.1.1. As resoluções da Lara

Problema 1 – Os legumes da Carla

No primeiro problema, em que era preciso calcular o total de alimentos comprados pela Carla, Lara resolve-o como mostra a figura 19.

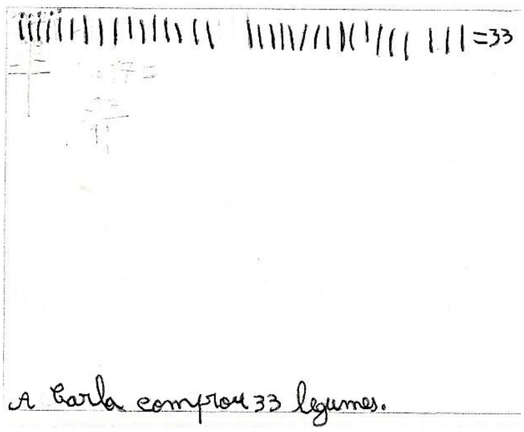


Figura 19 – Resolução de Lara do problema n.º 1

A análise da resolução de Lara permite perceber que identifica o problema como sendo de adição e recorre à representação icónica, baseando-se num cálculo por contagem de 1 em 1, para determinar o resultado final.

Aparentemente, começa por desenhar 16 traços e em seguida desenha mais 17 traços, que correspondem aos números indicados no enunciado do problema. Por fim, procede a uma contagem de 1 em 1 colocando o sinal de igual e o resultado obtido nessa contagem, 33, que parece ter sido transposto para a resposta final.

Problema 2 – Os sólidos geométricos da Joana

No segundo problema em que era preciso calcular o total de sólidos geométricos que a Joana possuía, Lara resolve-o como mostra a figura 20.

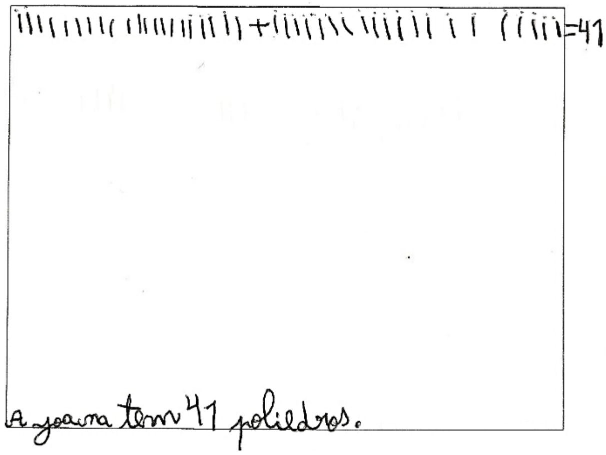


Figura 20 – Resolução de Lara do problema n.º 2

A análise da resolução de Lara evidencia que a aluna identifica o problema como sendo de adição e recorre à representação icónica, baseando-se num cálculo por contagem, para determinar o resultado final.

Parece ter começado por desenhar 21 traços, coloca um sinal de adição e, em seguida, desenha 20 traços, que correspondem aos números indicados no enunciado do problema. Por fim, procede a uma contagem de 1 em 1 colocando o sinal de igual e o resultado obtido nessa contagem, 41, foi transposto para a resposta final.

Problema 4 – As rifas do Miguel

No quarto problema em que era preciso calcular o total de rifas vendidas pelo Miguel, Lara resolve-o como mostra a figura 21.

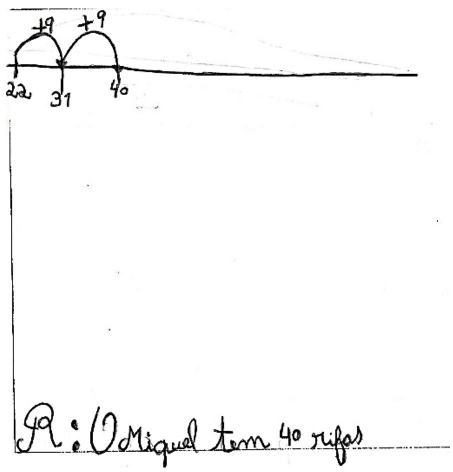


Figura 21 – Resolução de Lara do problema n.º 4

A análise da resolução de Lara mostra que identifica o problema como sendo de adição, apoiando-se na reta numérica para efetuar os seus cálculos.

Lara, aparentemente, desenha a reta numérica, marca o número 22 e adiciona-lhe 9 unidades saltando para o número 31, por fim adiciona mais 9 unidades saltando para o número 40, transpondo-o para a sua resposta final. Esta resolução mostra que Lara não compreende como se manipula a reta uma vez que chega ao resultado correto (31), sem se aperceber, parecendo dar saltos com pouco sentido.

Na minha perspetiva, esta resolução parece mostrar que a aluna ainda se baseia no cálculo por contagem pois, para efetuar os cálculos intermédios (22+9 e 31+9) é bastante provável que o tenha feito contando de 1 em 1.

A estratégia utilizada pela Lara numa tentativa de manipular a reta numérica parece aproximar-se da A10, uma vez que parte do 22 e adiciona sucessivamente 9 e 9 unidades.

Problema 5 – Parque de estacionamento

No quinto problema em que era preciso calcular o total de lugares de um parque de estacionamento, Lara resolve-o como mostra a figura 22.

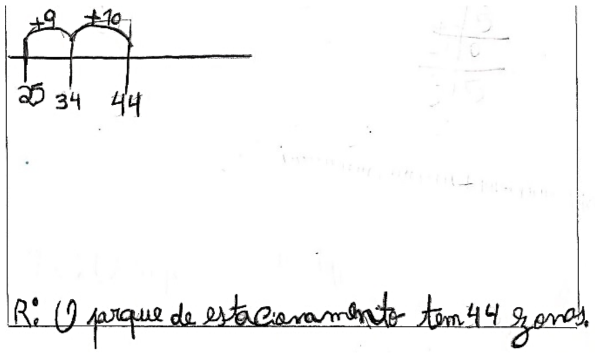


Figura 22 – Resolução de Lara do problema n.º 5

A análise da resolução de Lara permite perceber que a aluna identifica o problema como sendo de adição, apoiando-se na reta numérica para efetuar os seus cálculos.

Aparentemente, a aluna começa por desenhar a reta numérica, marca o número 25 e adiciona-lhe 9 unidades saltando para o número 34, por fim adiciona mais 10 unidades saltando para o número 44 que foi transposto para a sua resposta final. A resolução de Lara, mais uma vez, evidencia que a aluna não compreender como manipular a reta numérica pois dá saltos aleatórios que não se encontram relacionados com os números indicados no problema.

Na minha perspetiva, parece-me que a aluna ainda se baseia no cálculo por contagem pois, para efetuar o cálculo de 25+9 é bastante provável que o tenha feito contando de 1 em 1. Contudo, talvez já saiba contar de 10 em 10 e por isso o cálculo de 34+10 se tenha revelado de fácil resolução.

A estratégia utilizada pela Lara numa tentativa de manipular a reta numérica parece aproximar-se da A10, uma vez que parte do 25 e adiciona sucessivamente 9 e 10 unidades.

Problema 6 – A coleção de berlindes

No sexto problema em que era preciso calcular o total de berlindes de dois amigos, Lara resolve-o como mostra a figura 23.

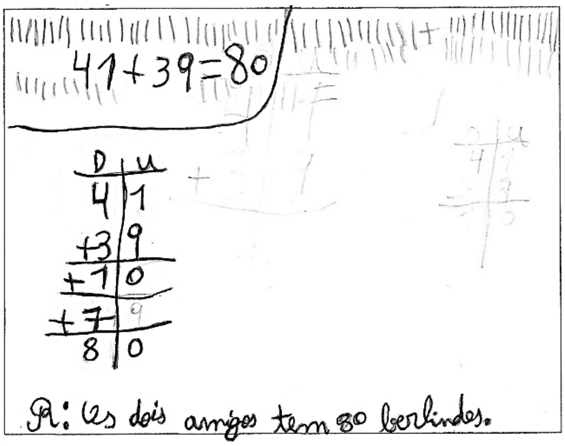


Figura 23 – Resolução de Lara do problema n.º 6

A análise da resolução de Lara evidencia que a aluna identifica o problema como sendo de adição apoiando-se num cálculo vertical para obter o resultado final.

Os registos de Lara mostram que a aluna parece ter iniciado a resolução ao problema através de uma representação icónica associada ao cálculo por contagem, sem sucesso. Provavelmente, abandonou a estratégia porque os números do problema são “grandes”, a aluna pode ter-se perdido na contagem dos traços efetuados.

Finalmente, apresenta uma representação vertical do cálculo que a conduz à solução. Parece ter começado por escrever uma expressão horizontal com os números indicados no problema e, em seguida, transpõe esses dados para uma representação vertical. Em primeiro lugar adiciona as unidades, seguidamente adiciona os algarismos das dezenas e, por fim, adiciona os resultados dos dois cálculos efetuados. O resultado obtido parece ter sido transposto tanto para a expressão horizontal inicial, como para a resposta final.

A estratégia utilizada embora se assemelhe a uma estratégia do tipo 1010, também tem algumas características que fazem lembrar o algoritmo da adição, uma vez que, a aluna calcula da direita para a esquerda e adiciona os algarismos das dezenas (adiciona 4+3 ao invés de 40+30).

Problema 8 – As rifas da Maria

No oitavo problema em que era preciso calcular o número de rifas que faltavam vender à Maria, Lara resolve-o como mostra a figura 24.

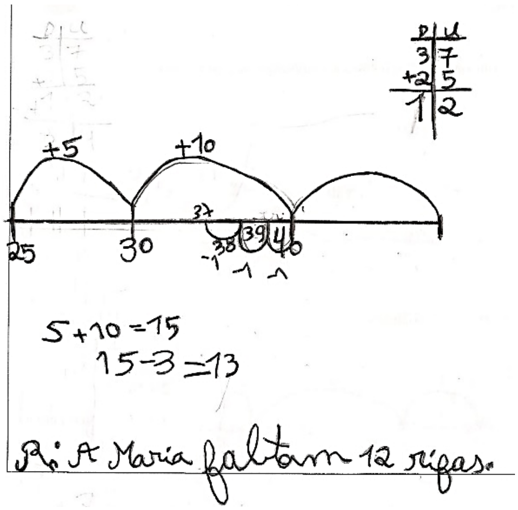


Figura 24 – Resolução de Lara do problema n.º 8

A análise da resolução de Lara mostra que a aluna identifica o problema como sendo de subtração apoiando-se num cálculo vertical e no cálculo com recurso à reta numérica para obter o resultado final.

A aluna parece ter iniciado a sua resolução efetuando um cálculo vertical, que embora se assemelhe a uma estratégia do tipo 1010, também tem algumas características que fazem lembrar o algoritmo da adição. Aparentemente, a aluna organiza verticalmente os números indicados no problema e, embora tenha colocado um sinal de adição, os cálculos que efetua são de uma subtração. Primeiramente parece ter começado por subtrair os algarismos das unidades e, sem seguida, subtrai os algarismos das dezenas, obtendo assim o resultado final. A troca do sinal poderá ter acontecido por, inicialmente, a Lara pensar que a operação envolvida no problema seria de adição ou por, simplesmente, se ter enganado.

Por fim, recorre à reta numérica para realizar o mesmo cálculo usando, desta vez, uma estratégia do tipo A10C. Parece ter começado por desenhar a reta numérica, depois marca o número 25 e adiciona 5 unidades, saltando para a dezena mais próxima (30), em seguida adiciona mais 10 unidades saltando para o número 40 e, por fim, salta para trás de 1 em 1 até chegar ao número 37. No final, possivelmente para saber qual a resposta, efetua a soma e subtração dos valores dos saltos realizados, obtendo um resultado incorreto devido a um erro de cálculo. Contudo, na resposta final, Lara escreve o resultado obtido no cálculo vertical, provavelmente por sentir mais segurança na correção desse cálculo por ser aquele que tem trabalhado em sala de aula com a professora titular.

Uma vez que para este problema estava estabelecido que os alunos teriam de utilizar a reta numérica para a sua resolução, Lara chama-me para a ajudar a esclarecer uma dúvida com a qual se deparou. Quando chego perto da aluna, esta já se encontrava no número 40 e pede a minha ajuda porque se apercebe que ultrapassou o número ao qual queria chegar (37).

Investigadora: Qual é o número a que temos de chegar?

Lara: Ao 37.

Investigadora: Ao 37. Então o 40 é antes ou depois do 37?

Lara: Depois, depois…

Investigadora: Agora temos de andar para a frente ou para trás?

Lara: Para a frente.

Investigadora: É a para a frente para chegar ao 37?

Lara: Para trás…

Investigadora: Então quanto é que temos de andar para trás?

Lara: *(Pensa um pouco)* Não sei…

Investigadora: Podemos saltar de 1 em 1.

(Lara salta de 1 em 1 até chegar ao 37 e marca os valores na reta)

Investigadora: Já chegámos ao 37?

Lara: Já!

Investigadora: Quantas rifas é que lhe faltam vender?

Lara: 37.

Investigadora: Não… isso são as rifas que ela tem de vender.

Lara: Ah, falta 25!

Investigadora: Não… isso são as rifas que ela já vendeu. Para sabermos o número de rifas que lhe faltam vender temos de recorrer aos saltos que demos na reta. Quanto é 5+10 ?

Lara: *(Conta pelos dedos)* 16…

Investigadora: De certeza? Quanto é então 10+5?

Lara: 15.

Investigadora: E 5+10?

Lara: 5+10? *(pensa um pouco)* 20!

Investigadora: Então, 10+5 é igual 15 e 5+10 é igual a 20 certo?

Lara: Não, não, não… é 15.

Investigadora: É 15! Mas tu ainda tiraste 3. Quanto é que é 15 menos 3?

Lara: 15 menos 3… Oh, não sou boa em menos *(fica a pensar)* 13…

Investigadora: Agora fica a pensar sozinha e não te esqueças da resposta.

A análise desta entrevista mostra que Lara tem bastantes dificuldades no uso da reta numérica. Na minha perspetiva, Lara escolheu utilizar a "estratégia da Estrela"[2] porque se sente mais segura na utilização de estratégias aditivas, uma vez que ela própria afirma "não sou boa em menos". Neste sentido, a sua reta numérica encontra-se praticamente igual à da Estrela, ou seja, inicia-se com número mais pequeno e são acrescentadas 5 e 10 unidades consecutivamente. Aparentemente, Lara representa ainda outro salto na reta mas sem qualquer registo associado. No meu ponto de vista, a aluna pensou que era necessário realizar outro salto pois, a Estrela também efetuou três saltos na sua reta. Contudo, Lara apercebe-se que ultrapassou o número ao qual pretendia chegar deparando-se com um problema e solicitando, de seguida, a minha ajuda. Neste sentido, embora revelando dificuldades, Lara começa a perceber que os números que se encontram na reta numérica não são aleatórios pois quando pergunto "Qual é o número que temos de chegar" responde-me, prontamente, "Ao 37".

Quando a questiono se o 40 é antes ou depois do 37, Lara responde corretamente "depois" mas quando a seguir questiono "Agora temos de andar para a frente ou para trás?" a aluna responde, erradamente, "para a frente". A aluna respondeu incorretamente, provavelmente, devido ao seguimento da conversa, pois se anteriormente disse a palavra "depois" significava que seria "para a frente". Neste sentido, possivelmente, se a minha pergunta tivesse sido "O 37 é antes ou depois do 40", ela responder-me-ia "antes" e em seguida dir-me-ia que teria de andar para trás, tal como me respondeu quando reformulei a questão. Posteriormente, Lara afirma que não sabe quanto é necessário andar para trás até chegar ao 37. A incerteza da aluna parece basear-se no modo como manipula a reta e não nos cálculos porque, quando sugiro que salte de 1 em 1 efetua os cálculos corretamente.

No discurso da Lara é, também, notório que não compreende ainda como a reta a pode ajudar na resolução do problema. Este aspeto é visível quando a aluna, após utilizar a reta corretamente, mostra não saber qual a resposta ao problema, ou seja, possivelmente, Lara apenas a usa a reta porque lhe foi sugerida e não como um modelo de apoio ao seu cálculo.

Finalmente, é possível perceber que apesar do cálculo por contagem ser o mais usado pela aluna, nem sempre se revela o mais eficaz, pois são visíveis os erros cometidos "5+10=16" e "15-3=13". Para além disto, Lara ainda não tem completamente adquirida a

[2] Ver problema "As páginas do livro II", página 69.

noção da propriedade comutativa da adição, uma vez que afirma que “5+10=16” e “10+5=15” apesar de, em seguida, ter retificado a sua resposta.

Problema 9 – As coleção de cromos

No nono problema em que era preciso calcular o número de cromos com que a Sara ficou depois de ter dado os seus cromos repetidos à amiga Beatriz, Lara resolve-o como mostra a figura 25.

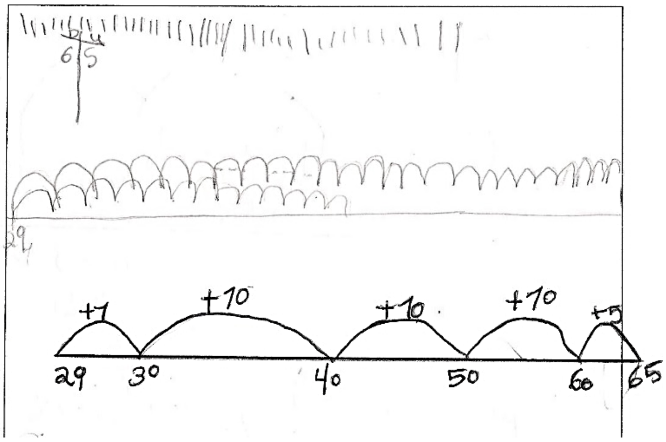


Figura 25 – Resolução de Lara do problema n.º 9

A análise da resolução de Lara permite perceber que a aluna identifica o problema como sendo de adição, apoiando-se na reta numérica para efetuar os seus cálculos.

Os registos de Lara mostram que fez algumas tentativas de resolução do problema que, posteriormente, apagou. Parece ter iniciado a resolução ao problema através de uma representação icónica aleada ao cálculo por contagem, sem sucesso. Depois, tenta realizar um cálculo vertical que não o terminou. Em seguida, tenta efetuar o cálculo na reta saltando de 1 em 1, também sem sucesso. Finalmente, apresenta uma representação na reta, baseada numa estratégia do tipo A10, que a conduz à solução. Lara, aparentemente, desenha a reta numérica, marca o número 29 e adiciona-lhe 1 unidade saltando para o número 30, em seguida salta de 10 em 10 até chegar ao número 60 e, por fim adiciona mais 5 unidades saltando para o número 65. A aluna não apresenta qualquer resposta, talvez porque se tenha esquecido ou porque ainda não compreende como saber a resposta ao problema através do cálculo com recurso à reta numérica.

Provavelmente, pelo insucesso das primeiras representações, a aluna sentiu necessidade de pedir a ajuda e, por isso, esta última representação é efetuada com a minha ajuda, tal como evidencia a seguinte entrevista.

Investigadora: A reta vai começar em que número?

Lara: 29.

Investigadora: E qual é o número que queres chegar?

Lara: 65.

Investigadora: Então qual é o número perto do 29 que seja fácil de trabalhar?

Lara: 30.

Investigadora: Então do 29 para o 30 vai quanto?

Lara: 1.

Investigadora: 1. Então faz.

Lara: Um risco?

Investigadora: Um saltinho. *(Lara representa o salto na reta)* Vais parar a que número?

Lara: 30 *(escreve o número 30).*

Investigadora: E acrescentaste quanto?

Lara: 1 *(escreve +1 por cima do salto).*

Investigadora: Já chegámos ao 65?

Lara: Não.

Investigadora: Então agora vamos acrescentar quanto?

Lara: 31.

Investigadora: Queres acrescentar 31 ao 30? *(Lara acena que sim com a cabeça)* Porquê 31?

Lara: Ai não … 10.

Investigadora: Então acrescenta 10.

Lara: Dou 10 saltinhos?

Investigadora: Não, dás um salto *(Lara: grande)* e escreves 10 em cima. Chegaste a que número?

Lara: *(conta de um em um)* 40!

Investigadora: Escreve o 40. E agora, já chegámos ao 65?

Lara: Não…

Investigadora: Então queres acrescentar quanto?

Lara: 60.

Investigadora: Ao 40 vamos acrescentar 60?

Lara: Não, não, não… 10!

Investigadora: Então vá…

Lara: Um salto graaande… *(representa o salto na reta)* Mais 10. *(conta de 1 em 1)* 50!! *(escreve o número na reta)*

Investigadora: Já chegámos ao 65?

Lara: Não.

Investigadora: Quanto queres acrescentar?

Lara: 1, mais 1. Dá 51.

Investigadora: Porquê mais 1?

Lara: Porque eu quero mais 1.

Investigadora: Mas assim vais demorar a chegar ao 65.

Lara: Então mais 10 pode ser?

Investigadora: Pode.

Lara: Mais 10… *(representa na reta o salto e conta de 1 em 1)* 40!! *(conta de novo)* 60!!

Investigadora: Já chegaste ao 65?

Lara: Sim!!

Investigadora: Está aí 65?

Lara: Não, está 60!

Investigadora: Então falta quanto para o 65?

Lara: *(conta de 1 em 1)* 5! Mais 5, 65! *(representa o salto e escreve 65 na reta)*

Investigadora: Então já chegámos ao 65?

Lara: *(radiante)* Já!!

Eu: Então como sabemos com quantos cromos ela ficou?

Lara: Ficou com 65!!

Investigadora: Não, 65 era quanto ela tinha no total e ela deu 29. Como sabemos olhando para a reta quanto lhe sobrou? Estes saltinhos que deste representam o quê?

Lara: É o número que eu acrescentei.

Investigadora: Então vá fica, sozinha, a pensar e escreve a resposta.

Quando a aluna me indica qual o número em que pretende que reta comece, bem como o que pretende atingir, mostra que começa a compreender que os números que colocamos na reta não são aleatórios e que se relacionam com o problema.

Após interpelada sobre qual o número mais próximo de 29 que é mais fácil de trabalhar, a aluna respondeu 30. Esta resposta, apesar de satisfatória levantou-me algumas dúvidas quanto ao seu raciocínio, porque para ela o 30 pode ser de facto o número mais fácil de trabalhar, uma vez que é a dezena mais próxima do 29, contudo, devido ao seu discurso ao longo da entrevista, Lara, provavelmente, pode ter escolhido o número 30 porque o seu pensamento matemático encontra-se intimamente coadunado com a contagem de 1 em 1. Esta minha hipótese tem por base a resposta da aluna quando a questionei sobre quanto queria acrescentar ao 30 respondendo “31” que, na minha perspetiva, Lara queria dizer que queria saltar para o 31. Também mais tarde quando afirma que quer adicionar 1 ao 50, mostra a sua preferência pela contagem de 1 em 1. Esta preferência é também evidente quando me pergunta se é para fazer um risco, ao invés do salto, quando interroga se é para representar 10 saltinhos na reta e, essencialmente, quando recorre permanentemente a esta contagem para efetuar os seus cálculos.

Noutra perspetiva, Lara ainda não compreende bem quais os números que pode acrescentar na reta e por isso diz algumas respostas despropositadas tal como quando afirma que ao 30 quer acrescentar 31 e ao 40 quer acrescentar 60. Contudo, posteriormente acaba por sugerir adicionar 10 unidades porque, talvez, percebe que esse valor é aceite por mim. Por outro lado, estas respostas podem também estar relacionadas com uma incorreta comunicação matemática, pois a aluna poderia querer dizer que queria saltar para o 31 e para o 60.

Por fim, no discurso da Lara é, também, notório que não compreende ainda como a reta a pode ajudar na resolução do problema. Tal se evidencia quando a aluna, após utilizar a reta corretamente, mostra não saber interpretá-la para dar uma resposta ao problema. Mais uma vez, parece usar a reta numérica, apenas, porque lhe foi sugerida, ou por outro lado, porque talvez pretenda aprender como se manipula este modelo de apoio ao cálculo, revelando, ainda, muitas dificuldades no seu uso.

Problema 10 – O dinheiro dos mealheiros

No décimo problema em que era preciso calcular o total de dinheiro de dois irmãos, Lara resolve-o como mostra a figura 26.

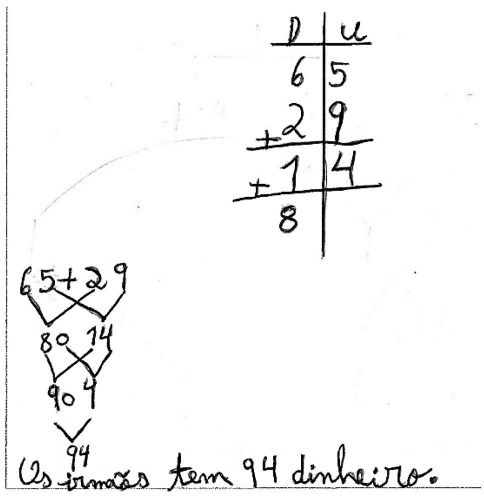


Figura 26 – Resolução de Lara do problema n.º 10

A análise da resolução de Lara evidencia que a aluna identifica o problema como sendo de adição recorrendo ao cálculo vertical e ao cálculo horizontal para determinar o resultado final.

Parece ter iniciado a sua resolução efetuando um cálculo vertical, que embora se assemelhe a uma estratégia do tipo 1010, também tem algumas características que fazem lembrar o algoritmo da adição. Aparentemente, a aluna organiza verticalmente os números indicados no problema, sendo que em primeiro lugar adiciona as unidades e em seguida os algarismos das dezenas. A resolução encontra-se, deste modo, inacabada talvez porque tenha decidido utilizar outra representação que se sentisse mais confortável.

Por fim, apresenta um cálculo horizontal baseado numa estratégia de decomposição (1010). A aluna, aparentemente, começa por escrever uma expressão horizontal com os números indicados no problema onde adiciona, separadamente, as dezenas e as unidades. Em seguida, Lara adiciona novamente dezenas e unidades e, por fim adiciona os resultados parciais, obtendo assim o resultado final. Este é, posteriormente, transposto para a expressão horizontal inicial bem como para a resposta final.

Problema 11 – Os relógios

No décimo primeiro problema em que era preciso calcular a diferença de preço entre os relógios, Lara resolve-o como mostra a figura 27.

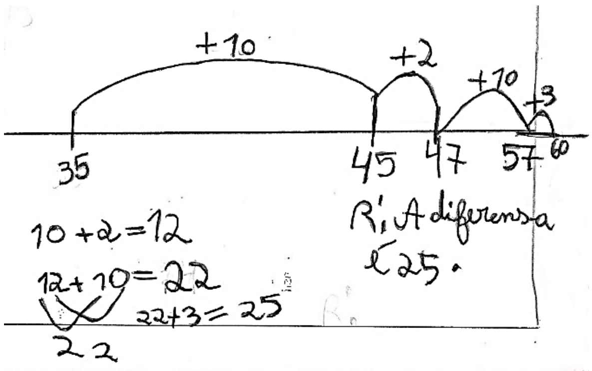


Figura 27 – Resolução de Lara do problema n.º 11

A análise da resolução de Lara mostra que a aluna identifica o problema como sendo de subtração, apoiando-se na reta numérica para efetuar os seus cálculos e baseando-se numa estratégia do tipo N10.

Lara, aparentemente, desenha a reta numérica e marca o número 35. Em primeiro lugar adiciona 10 unidades saltando para o número 45, seguidamente adiciona 2 unidades, saltando para o número 47, depois adiciona mais 10 unidades, saltando par ao número 57 e, por fim, adiciona mais 3 unidades, saltando para o número 60. No final, adiciona, sucessivamente, os valores dos saltos, obtendo o valor 25. O resultado obtido nestes cálculos é transposto para a resposta final.

Contudo, na resolução deste problema a aluna solicita a minha ajuda para terminar o seu raciocínio, sendo que, quando chego perto dela, percebo que já se encontrava no número 47 na reta numérica, tal como evidencia a entrevista seguinte.

Investigadora: Porque é que acrescentaste mais 2, Lara?

Lara: *(ignora a minha pergunta*) Agora quero acrescentar mais 10.

Investigadora: Então quanto é 47 mais 10?

Lara: *(conta de 1 em 1*) 57! *(marca na reta)*

Investigadora: Já chegámos ao 60?

Lara: Não.

Investigadora: Quanto é que falta?

Lara: *(conta de 1 em 1)* 3!! *(marca na reta).* Cheguei ao 60!! *(radiante)*

Investigadora: E agora, qual é a diferença de preço entre os dois relógio?

Lara: É 60!

Investigadora: Não. Um custa 60 euros.

Lara: É 35!

Investigadora: Aqui temos o preço dos relógios e agora quero saber a diferença entre eles. O que nos dá essa informação são os saltinhos que fizeste.

Lara: Então, 1, 2, 3, 4 *(conta os saltos)*

Investigadora: Não, Lara temos de somar o valor que cada salto tem. Vamos por partes, quanto é 10+2?

Lara: 10+2 é 12 *(e regista)*

Investigadora: Então agora temos de somar 12+10.

Lara: *(conta pelos dedos)* 26!

Investigadora: Conta novamente.

Lara: *(conta de um em um)* 21! *(conta novamente)* 24!

Investigadora: É?

Lara: Não, não, não… é?

Investigadora: Não sei, tu é que sabes.

Lara: Então olha lá… *(conta de 1 em 1)* 14! Não espera… O 2 com o 0, o 1 com o 1, 1+1 2, 2+0 2. Ana já sei o resultado, já sei olha…

Investigadora: Muito bem, mas ainda falta acrescentares o 3.

Lara: Ah pois é, 22+3 *(conta de 1 em 1)* 25!

Investigadora: Muito bem, agora escreve a resposta.

Ao analisar esta entrevista, apercebo-me que Lara parece ter solicitado a minha ajuda apenas para se sentir mais confortável e apoiada caso cometesse algum erro, uma vez que se mostra decidida sobre o que fazer ignorando a minha pergunta inicial. Penso que a aluna acrescentou 2 unidades ao 45 porque quis experimentar adicionar outro número diferente de 10 ou talvez o tenha feito sem motivo aparente.

No discurso da Lara é notório que a aluna não compreende ainda como a reta a pode ajudar na resolução do problema. Tal se evidencia quando a aluna, após utilizar a reta corretamente, mostra não saber qual a resposta ao problema, bem como quando lhe explico que os saltos nos dão essa mesma informação, Lara conta os saltos ao invés de adicionar os valores a eles associados. Esta realidade leva-me a pensar que a aluna ainda apresenta algumas dificuldades no uso da reta numérica.

Finalmente, é possível perceber que apesar do cálculo por contagem ser o mais usado pela aluna, nem sempre se revela o mais eficaz, pois para o mesmo cálculo (12+10) Lara conseguiu obter resultados diferentes (26, 21, 24 e 14). A aluna consegue chegar ao resultado correto, apenas quando utiliza uma estratégia de decomposição.

Problema 12 – Os brinquedos

No décimo segundo problema em que era preciso calcular o total de dinheiro gasto em dois brinquedos, Lara resolve-o como mostra a figura 28.

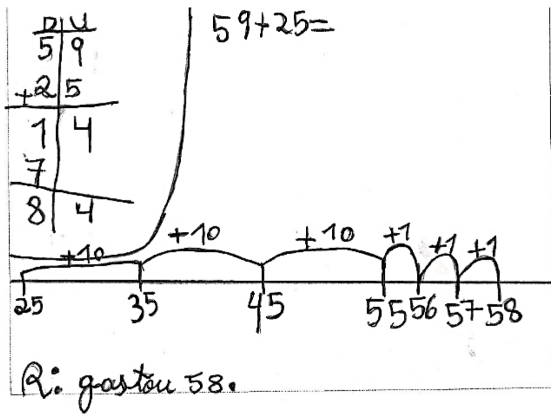


Figura 28 – Resolução de Lara do problema n.º 12

A análise da resolução de Lara permite perceber que a aluna identifica o problema como sendo de adição apoiando-se no cálculo vertical e no cálculo com recurso à reta numérica para obter o resultado final.

A aluna parece ter iniciado a sua resolução efetuando um cálculo vertical, que embora se assemelhe a uma estratégia do tipo 1010, também tem algumas características que fazem lembrar o algoritmo da adição. Aparentemente, Lara começa por organizar verticalmente os números indicados no problema. Em primeiro lugar adiciona as unidades, seguidamente adiciona os algarismos das dezenas e, por fim, adiciona os totais dos dois cálculos efetuados.

Finalmente, Lara recorre à reta numérica para realizar o mesmo cálculo, usando desta vez uma estratégia do tipo N10. A aluna parece ter começado por desenhar a reta numérica, marca o número 25 e salta de 10 em 10 até chegar ao número 55, em seguida salta de 1 em 1 até chegar ao número 58. Este último número é, aparentemente transposto para a resposta final, que se apresenta incorreta.

No meu ponto de vista, a aluna colocou na sua resposta o número a que chegou na reta numérica porque, possivelmente, começa a sentir-se mais segura na sua utilização. Noutra perspetiva, tal poderá ter acontecido, simplesmente, porque a reta foi a última representação utilizada.

Antes de usar a reta numérica, Lara solicita a minha ajuda, tal como evidencia a entrevista seguinte.

Lara: Ana ajudas-me a fazer a reta?

Investigadora: Queres começar com que número?

Lara: Quero começar com o 25.

Investigadora: E tens de fazer o quê a seguir?

Lara: Tenho de chegar ao 59.

Investigadora: De certeza?

Lara: Não…

Investigadora: Qual é a operação deste problema?

Lara: É para saber com quanto dinheiro a mãe ficou.

Investigadora: E qual é a operação?

Lara: De mais.

Investigadora: Mais quê? O que é que é mais? Quais são os valores? Quero que escrevas a operação.

Lara: 59+25.

Investigadora: Então escreve. *(Lara escreve 59+25)* Certo! Queres começar com que número?

Lara: Com o 25.

Investigadora: E tens de acrescentar quanto ao 25?

Lara: 59.

Investigadora: Então temos de acrescentar 59, queres começar por acrescentar quanto?

Lara: 10 *(conta de 1 em 1)* 35!

Investigadora: Só acrescentámos 10 e temos que acrescentar 59 quanto queres acrescentar agora?

Lara: Mais 10, *(conta de 1 em 1)* 45!

Investigadora: Acrescentámos quanto até agora?

Lara: 20.

Investigadora: E temos de acrescentar quanto?

Lara: 59.

Investigadora: Ainda temos de continuar.

Lara: Mais 10, *(conta de 1 em 1)* 55!

Investigadora: Acrescentaste quanto?

Lara: Acrescentei 10+10, 20 e mais 10, 30.

Investigadora: Então e já acrescentaste 59?

Lara: Não…

Investigadora: Então ainda falta.

Lara: *(pensa um pouco)* quero acrescentar mais 4.

Investigadora: Mais 4? Ainda falta acrescentar muito.

Lara: Não, olha… *(Conta do 55 para o 59 de 1 em 1)* 59.

Investigadora: Mas tu não queres chegar ao 59, queres acrescentar 59.

Lara: Ahh!

Investigadora: Agora faz como achares melhor, fica a pensar um bocadinho sozinha.

Ao analisar a entrevista é possível perceber que Lara compreende o que é pedido e que está implícita a operação adição, uma vez que afirma que é necessário efetuar "59+25". Tal também é possível confirmar através da primeira estratégia utilizada, em que a aluna se baseia num cálculo vertical de adição. Porém, o seu discurso evidencia que ainda não compreende como utilizar a reta numérica na operação adição, pois inicialmente mostra preferência em começar com o número 25 e chegar ao número 59. Apesar de, em conjunto, percebermos que seria necessário acrescentar 59 unidades ao 25, no decorrer da construção da reta numérica Lara retrocede no seu raciocínio, afirmando que do número 55 para o 59 faltam 4 unidades, voltando ao raciocínio inical. A sua resolução termina no número 58 e não no 59 talvez porque a aluna se tenha enganado ou esquecido de acrescentar mais uma unidade. Em suma, no discurso de Lara é notório que não compreende ainda como usar a reta para calcular e, consequentemente, resolver o problema. Assim, revela ainda algumas dificuldades no uso deste modelo de apoio ao cálculo.

Finalmente, é possível perceber que a aluna parece estar familiarizada com a sequência numérica de 10 em 10 quando afirma, sem recurso à contagem pelos dedos, “10+10, 20 e mais 10, 30”. Contudo, quando confrontada com uma situação nova, por exemplo 25+10, a aluna regride para o cálculo por contagem, levando-me a crer que Lara apenas memorizou a sequência de 10 em 10 e não conseguiu ainda compreender como a utilizar noutras situações.

Problema 13 – O jogo

No décimo terceiro problema em que era preciso calcular o número de pontos do Miguel a partir dos pontos obtidos pela Cláudia, Lara resolve-o como mostra a figura 29.

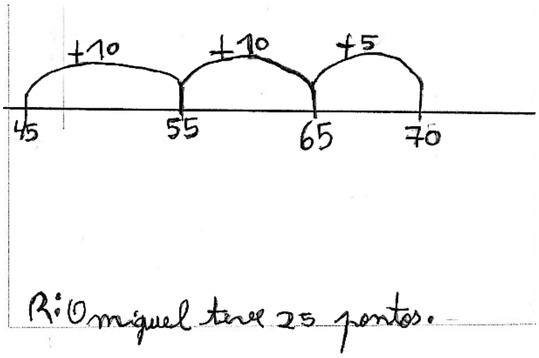


Figura 29 – Resolução de Lara do problema n.º 13

A análise da resolução de Lara evidencia que a aluna identifica o problema como sendo de subtração, apoiando-se na reta numérica para efetuar os seus cálculos e baseando-se numa estratégia do tipo N10.

Lara, aparentemente, desenha a reta numérica e marca o número 45. Em primeiro lugar adiciona 10 unidades saltando para o número 55, seguidamente adiciona mais 10 unidades, saltando para o número 65 e, por fim, adiciona 5 unidades, saltando para o número 70. A resposta ao problema parece ser o resultado da soma dos saltos realizados que, provavelmente, efetuou sem necessidade de registos.

Antes de usar a reta numérica, Lara solicita a minha ajuda, tal como evidencia a entrevista seguinte.

Lara: Quero ajuda.

Investigadora: Queres começar em que número?

Lara: No 25.

Investigadora: E tens de chegar a que número?

Lara: Ao 70.

Investigadora: Então, podes começar a fazer.

Mais tarde, a aluna procura, mais uma vez, o meu auxílio e quando me dirijo a ela percebo que a sua reta terminava no número 75, pois tinha saltado do 45, de 10 em 10 até ao 75.

Lara: Já passei…

Investigadora: Então já passaste e agora o que é que podes fazer? Quanto é que achas que era do 65 para o 70?

Lara: *(conta de 1 em 1)* É mais 5. Consegui Ana!

Investigadora: Então e quando somaste?

Lara: 10+10+5.

Investigadora: E isso é o quê?

Lara: É os que eu somei.

Investigadora: Sim, mas a pergunta é “quantos pontos teve o Miguel”. Quantos pontos teve?

Lara: 10+10 20… 70!

Investigadora: Então, 70 teve a Cláudia.

Lara: Então 10 mais 10 20, 20 mais 5…. *(conta de 1 em 1)* 25!

Investigadora: Então qual é a resposta?

Lara: O Miguel teve 25 pontos.

Ao analisar a entrevista, Lara parece solicitar a minha ajuda apenas para perceber se iria utilizar corretamente a reta, uma vez que responde corretamente a todas as minhas perguntas iniciais. Neste sentido, quando a aluna me indica qual o número com que pretende começar, bem como o que pretende atingir, mostra que começa a compreender que os números que colocamos na reta não são aleatórios e que se relacionam com o problema. Este aspeto é também visível quando a aluna percebe que ultrapassou o número ao qual pretendia chegar, deparando-se com um problema e solicitando a minha ajuda.

No discurso da Lara é notório que a aluna começa a compreender como a reta a pode ajudar na resolução do problema. Apesar da sua primeira resposta estar incorreta por, aparentemente, ter sido dada impulsivamente, quando confrontada com o significado da mesma, Lara reformula-a, mostrando que sabe qual a resposta correta ao problema.

Finalmente, é possível perceber que a aluna parece estar familiarizada com a sequência numérica de 10 em 10 quando afirma, sem recurso à contagem pelos dedos, “10 mais 10 20. Em contrapartida, parece apresentar dificuldades no contar de 5 em 5, uma vez que recorre à contagem de 1 em 1 para calcular 20+5.

Problema 14 – A idade da Margarida

No décimo primeiro problema em que era preciso calcular a idade da Margarida tendo em conta a idade da sua avó, Lara resolve-o como mostra a figura 30.

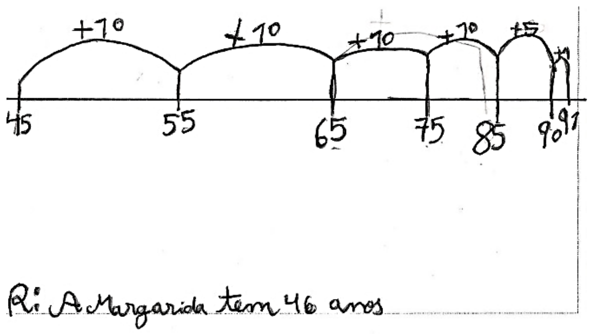


Figura 30 – Resolução de Lara do problema n.º 14

A análise da resolução de Lara mostra que a aluna identifica o problema como sendo de subtração, apoiando-se no cálculo com recurso à reta numérica para efetuar os seus cálculos e baseando-se numa estratégia do tipo N10.

A aluna, aparentemente, começa por desenhar a reta numérica, marca o número 45 e salta de 10 em 10 até chegar ao número 85, em seguida adiciona 5 unidades saltando para o número 90 e, por fim, adiciona mais 1 unidade saltando para o número 91. A resposta ao problema parece ser o resultado da soma dos saltos realizados que, provavelmente, efetuou sem necessidade de registos.

Contudo, na resolução deste problema a aluna solicita a minha ajuda para terminar o seu raciocínio, sendo que, quando chego perto dela apercebo-me que já se encontrava no número 85 na reta numérica, tal como evidencia a entrevista seguinte.

Lara: Ana ajuda-me…

Investigadora: Estás a ir bem. Tu queres chegar a que número?

Lara: Ao 91.

Investigadora: Então já estás no 85 e agora o que é que falta?

Lara: Então mas é 91 e não dá o 10.

Investigadora: Então em vez de acrescentares 10 acrescenta um número mais pequeno.

Lara: *(fica pensativa)*

Investigadora: Diz-me um número mais pequeno que 10 que gostes de trabalhar. Ou seja, um número que se acrescentares ao 85 saibas logo a resposta.

Lara: 9…

Investigadora: Se te perguntar quanto é 85 mais 9 sabes logo a resposta?

Lara: Não.

Investigadora: Então tens de escolher um número que seja fácil de trabalhar e que seja mais pequeno que o 10.

Lara: O 5?

Investigadora: Então vá o 5. Então quanto é 85 mais 5?

Lara: *(conta de 1 em 1)* Dá 90, mas é 91.

Investigadora: Então agora acrescentas o que falta.

Lara: E agora? Mais 1. *(representa o salto na reta)* Ana assim está correto?

Investigadora: Já chegaste ao 91?

Lara: Sim.

Investigadora: Então quantos anos tem a Margarida?

Lara: Então 10+10 20 mais 10 30, 20 30 40 …50

Investigadora: Vê melhor.

Lara: 10, 20, 30, 40, *(conta de 1 em 1 até ao 46)* 46!! É a resposta! Resposta… 46!

Ao analisar a entrevista percebo que a aluna tomou iniciativa de construir, sozinha, a reta numérica, provavelmente, porque começa a adquirir alguma confiança na utilização deste modelo de apoio ao cálculo. Para além disso, começa também a estabelecer relações entre os números, percebendo que ao acrescentar 10 unidades iria ultrapassar o número ao qual pretendia chegar, deparando-se com um problema e solicitando a minha ajuda.

Quando questiono a aluna sobre um número menor que 10 e de fácil trabalhar, responde-me “9”. Na minha perspetiva, Lara dá esta resposta porque ainda não compreende o que são “números fáceis de trabalhar”, ou seja, ainda não consegue trabalhar com os números de referência porque o seu pensamento matemático encontra-se intimamente coadunado com a contagem de 1 em 1. Contudo, é possível que a aluna se encontre a desenvolver competências nesse sentido pois, quando novamente inquirida sobre qual o número menor que 10 fácil de trabalhar, a aluna responde “5” e, para além disso efetua adições de 10 em 10 na reta numérica.

É possível perceber que a aluna parece estar familiarizada com a sequência numérica de 10 em 10 quando afirma, sem recurso à contagem pelos dedos, “10+10 20 mais 10 30, 20 30 40 …50". Em contrapartida, apresentar dificuldades no contar de 5 em 5, uma vez que recorre à contagem de 1 em 1 para calcular 40+5.

No discurso da Lara é notório que a aluna começa a compreender como a reta a pode ajudar na resolução do problema, uma vez que quando confrontada sobre qual a resposta ao problema, a aluna adiciona os números correspondentes a cada salto efetuado, obtendo a solução.

5.1.2. Síntese das resoluções de Lara

a) As estratégias de Lara

No decorrer da análise dos registos de Lara é possível perceber como resolve os problemas propostos. De modo a sistematizar estas informações recolhidas apresento, em seguida, uma tabela com o número dos problemas, operação e sentido subjacente, os modos de representação utilizados por Lara e as estratégias inerentes.

Tabela 2 – Síntese das resoluções de Lara

Problema	*Operação e sentido*	*Modos de representação*	*Estratégia*
P1	Adição – juntar	Representação Icónica	Cálculo por contagem
P2	Adição – juntar	Representação Icónica	Cálculo por contagem
P4	Adição – acrescentar	Através da reta numérica	A10
P5	Adição – juntar	Através da reta numérica	A10
P6	Adição – juntar	Representação vertical do cálculo	Entre a 1010 e o algoritmo
P8	Subtração – completar	Representação vertical do cálculo Através da reta numérica	Entre a 1010 e o Algoritmo A10C
P9	Subtração – retirar	Através da reta numérica	A10

P10	Adição – juntar	Representação vertical do cálculo Representação horizontal do cálculo	Entre a 1010 e o algoritmo 1010
P11	Subtração – comparar	Através da reta numérica	N10
P12	Adição – juntar	Representação vertical do cálculo Através da reta numérica	Entre a 1010 e o Algoritmo N10
P13	Subtração – retirar	Através da reta numérica	N10
P14	Subtração – retirar	Através da reta numérica	N10

A análise da tabela, bem como das produções de Lara mostram que a aluna se apoiou em quatro tipos de representação, nomeadamente: representação icónica, representação horizontal do cálculo, representação vertical do cálculo e representação através da reta numérica.

Ao longo dos 12 problemas e, excluindo as situações onde a utilização da reta numérica era obrigatória, o cálculo com recurso à reta numérica foi a representação mais utilizada pela Lara, seguindo-se da representação vertical do cálculo e, finalmente, a representação icónica bem como a representação horizontal do cálculo foram as menos utilizadas.

Quando Lara utiliza o cálculo horizontal baseia-se na estratégia 1010, quando utiliza a representação vertical do cálculo baseia-se numa estratégia entre a 1010 e o algoritmo da adição, por fim, ao utilizar a reta numérica recorre a três tipos de estratégias: A10, A10C e N10. Neste sentido, é possível perceber que as estratégias preferenciais da aluna denominam-se de N10 e a estratégia entre a 1010 e o algoritmo, seguindo-se da A10 e A10C, sendo que a última foi apenas utilizada uma vez.

Relativamente à fase de diagnóstico, Lara apresenta nos dois problemas (P1 e P2) a mesma representação, resolvendo-os através do cálculo por contagem. No meu ponto de vista este carateriza-se por ser o cálculo com que a aluna se sente mais segura e confiante em utilizar, uma vez que ao longo dos 12 problemas recorre, sistematicamente, ao mesmo para concretizar os seus cálculos.

Na segunda fase do projeto, referente à exploração da reta numérica em problemas de adição, Lara resolve os dois primeiros problemas (P4 e P5) recorrendo ao uso da reta numérica. Contudo, mostra que não compreende como manipular este modelo de apoio ao cálculo devido aos erros cometidos na sua utilização. No P6, quando os alunos tiveram liberdade total quanto à escolha da representação, Lara opta por apresentar uma representação vertical do cálculo, provavelmente por ser aquela que a professora titular de turma se encontrava a desenvolver com a mesma. Todavia, é possível perceber pelos riscos quase apagados que a aluna tentou resolver o problema através do cálculo por contagem, tal como nos problemas diagnósticos.

É importante salientar que nas duas primeiras fases do projeto, Lara não teve qualquer ajuda da minha parte na resolução de nenhum dos problemas.

Na terceira fase, referente à exploração da reta numérica em problemas de subtração, Lara resolve o primeiro problema (P8) recorrendo ao cálculo vertical, usando uma estratégia entre a 1010 e o algoritmo, pelos motivos já mencionados, e ao uso da reta numérica baseada na "Estratégia da Estrela". Neste problema a aluna começou por construir a reta sozinha e num determinado momento pediu a minha ajuda para a orientar, contudo mostrou incompreensão sobre qual seria a resposta ao problema. No segundo problema (P9) Lara recorre, mais uma vez, à reta numérica construída com a minha ajuda e mostrando as mesmas dificuldades que no problema anterior.

Na quarta fase deste projeto, referente à liberdade estratégica, em quatro dos cinco problemas, Lara utiliza sempre a reta numérica como modelo de apoio ao cálculo. No primeiro problema de adição (P10) a aluna recorre à representação vertical do cálculo por decomposição (1010) próximo do algoritmo, ainda que inacabado, talvez por ser aquele que se encontra a trabalhar em sala de aula com a professora titular e, recorre pela primeira vez, ao cálculo horizontal, provavelmente por se sentir confortável com a sua utilização. No problema 12, também de adição, Lara utiliza a estratégia de cálculo 1010, próxima do algoritmo na representação vertical, pelas mesmas razões referidas anteriormente. Depois pede a minha ajuda para construir e desenvolver a reta numérica, contudo revela incompreensão sobre qual a resposta ao problema. Nos restantes problemas desta fase (P11, P13 e P14) a aluna utiliza apenas a reta numérica como modelo de apoio ao cálculo, toma a iniciativa de a construir sozinha solicitando a minha ajuda apenas quando lhe surge alguma dúvida e, nos dois últimos problemas mostra que sabe a resposta através da reta.

b) As dificuldades manifestadas por Lara

Ao longo da resolução dos 12 problemas, Lara apresenta algumas dificuldades na utilização de algumas representações e subjacentes aos seus conhecimentos sobre os números e operações.

Relativamente à representação vertical do cálculo, Lara apresentou corretamente todos os seus cálculos baseados nesta representação e usando uma estratégia entre a 1010 e o algoritmo. Contudo, esta estratégia foi sempre utilizada com operações onde não houve a necessidade de empréstimo de dezenas, por isso não é possível saber se esta é uma estratégia que Lara domina em todas as situações. Ao utilizar esta estratégia parece evidenciar que trabalha apenas com os algarismos e não com os números. Este facto, possivelmente encontra-se associado à preferência da aluna no cálculo por contagem a cada operação que efetua. Contudo, quando Lara utiliza o cálculo horizontal mostra que conhece o valor de cada algarismo, apresentando e trabalhando, assim, com o valor dos mesmos.

Aquando da utilização da reta numérica, Lara utiliza sempre estratégias aditivas, à exceção de um caso pontual no P8. Esta preferência poderá justificar-se com uma afirmação de Lara quando numa das entrevistas menciona, "não sou boa em menos", revelando que não se sente ainda confortável na utilização de estratégias subtrativas.

Ao analisar as resoluções de Lara com recurso à reta numérica é visível que, quando utiliza este modelo nos problemas de adição mostra que não compreende como o manipular, percebendo apenas em que número poderá iniciar a reta mas não entende o que lhe deve adicionar. Por estas razões, todos os problemas de adição onde a aluna utiliza a reta numérica encontram-se incorretos. Contrariamente a esta situação, nos problemas de subtração onde é utilizada a reta numérica, Lara apresenta corretamente os seus resultados, à exceção de um dos problemas (P8) onde ocorreu um erro de cálculo. De facto, em todos os problemas a aluna teve oportunidade de ter a minha ajuda contudo, sempre mostrou que compreendia quais os números que devia colocar na reta. No entanto, apesar de manipular corretamente a reta numérica, inicialmente Lara não compreendia como a mesma poderia ajudá-la na resposta ao problema, situação que se reverteu nos dois últimos problemas. Do meu ponto de vista, Lara apresenta dificuldade na utilização da reta numérica nos problemas de adição porque não consegui acompanhar individualmente a aluna nesta fase do projeto, ao contrário do que aconteceu nos problemas de subtração.

Na minha perspetiva, Lara saltava sempre de 10 em 10 na reta numérica porque percebeu, através do meu *feedback* nas entrevistas, que aquele seria um número bem aceite por mim, por isso, nas situações onde era necessário adicionar um número menor que 10, aluna apresentava dificuldades solicitando a minha ajuda.

Ao longo dos problemas e entrevistas analisadas, é possível perceber que o pensamento matemático de Lara se encontra intimamente coadunado com a contagem de 1 em 1, pois para além de ter resolvido os problemas diagnósticos através deste tipo de contagem, recorria permanentemente a ela para efetuar os seus cálculos. Neste sentido, penso que algumas perguntas que colocava à aluna não tinham qualquer sentido para ela, particularmente: "Então qual é o número perto do 29 que seja fácil de trabalhar?", "Diz-me um número mais pequeno que 10 que gostes de trabalhar. Ou seja, um número que se acrescentares ao 85 saibas logo a resposta.", "Se te perguntar quanto é 85 mais 9 sabes logo a resposta?", "Então tens de escolher um número que seja fácil de trabalhar e que seja mais pequeno que o 10.". Uma vez que a aluna recorre sistematicamente à contagem de 1 em 1, acrescentando 10 ou 5 unidades, para ela não existem "números fáceis de trabalhar". Contudo, se na reta Lara saltasse de 10 em 10 seria mais rápido para ela, ao invés de marcar todos os saltos até ao número que pretendia chegar. Por outro lado, penso que o facto de a aluna manipular, na reta numérica, os saltos de 10 em 10 ou até de 5 em 5 poderá conduzi-la a compreender as propriedades destes números, abandonando, progressivamente a contagem de 1 em 1.

c) Eventuais mudanças nas estratégias usadas

Torna-se curioso perceber como a aluna progrediu ao longo deste projeto, uma vez que: numa fase inicial Lara baseava-se em representações icónicas recorrendo ao cálculo por contagem; numa segunda fase, apesar de já usar a reta numérica, confiava apenas nos resultados obtidos através do cálculo que se encontrava a trabalhar em sala de aula (cálculo por decomposição 1010), tal como se pode confirmar no P8; e, numa fase final, apesar de usar ainda a representação vertical do cálculo por decomposição, perto do algoritmo, confiava apenas nos resultados obtidos através o cálculo com recurso à reta numérica, tal como se pode verificar no P12.

Neste sentido, e tal como já referido, Lara foi compreendendo como deveria utilizar a reta numérica e compreendendo, também, que esta se revela um modelo de apoio ao cálculo eficaz na resolução de problemas.

5.2. Tomé

5.2.1. As resoluções do Tomé

Problema 1 – Os legumes da Carla

No primeiro problema, em que era preciso calcular o total de alimentos comprados pela Carla, Tomé resolve-o como mostra a figura 31.

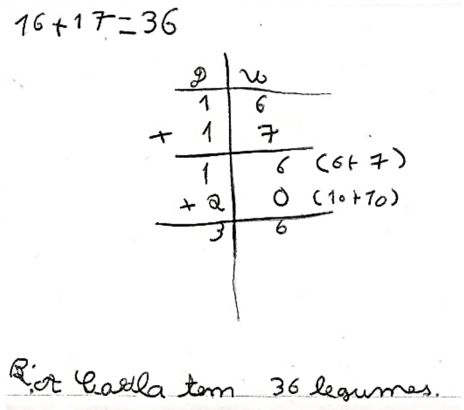


Figura 31 – Resolução de Tomé do problema n.º 1

A análise da resolução de Tomé permite perceber que identifica o problema como sendo de adição e usa um cálculo vertical para determinar o resultado final. Aparentemente, começa por escrever uma expressão horizontal com os números que iria adicionar e, em seguida, transpõe esses dados para uma expressão vertical que o auxiliou no cálculo do resultado. Em primeiro lugar parece ter adicionado as unidades, embora se tenha enganado no cálculo das mesmas, seguidamente adiciona as dezenas e, por fim, adiciona os resultados dos dois cálculos efetuados. O resultado obtido revela-se incorreto, 16+17=36, devido ao erro de cálculo ao adicionar as unidades. Contudo, este parece ter sido transposto tanto para a expressão horizontal que havia registado inicialmente, como para a sua resposta final.

A estratégia utilizada, por adicionar separadamente unidades e dezenas, parece ter sido a 1010, embora recorrendo a uma representação vertical.

Problema 2 – Os sólidos geométricos da Joana

No segundo problema em que era preciso calcular o total de sólidos geométricos que a Joana possuía, Tomé resolve-o como mostra a figura 32.

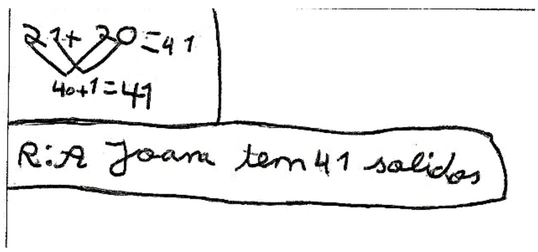


Figura 32 – Resolução de Tomé do problema n.º 2

A análise da resolução de Tomé mostra que o aluno identifica o problema como sendo de adição e regista os cálculos horizontalmente, baseando-se numa estratégia de decomposição (1010). Parece ter escrito uma expressão horizontal com os números indicados no problema, em seguida, calcula a soma das dezenas e das unidades dos dois números e, por fim, a soma desses resultados. O resultado obtido, 21+20=40, foi aparentemente transposto para a expressão horizontal inicial, bem como para a sua resposta final.

Problema 4 – As rifas do Miguel

No quarto problema em que era preciso calcular o total de rifas vendidas pelo Miguel, Tomé resolve-o como mostra a figura 33.

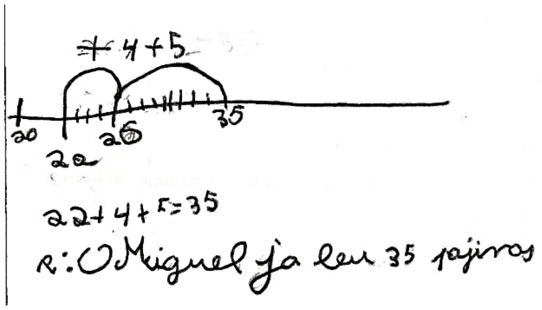


Figura 33 – Resolução de Tomé do problema n.º 4

Através da análise da resolução do Tomé é possível compreender que o aluno identifica o problema como sendo de adição apoiando-se no cálculo com recurso à reta numérica para efetuar os seus cálculos.

Tomé, aparentemente, desenha a reta numérica e marca o número 20, talvez por ser um dos números de referência e por o aluno pensar que a reta necessita de começar por um número com essas características. Seguidamente, marca o número 22 e, mentalmente, decompõe o número 9 em 4+5, por isso ao número 22 adiciona 4 unidades, saltando para o número 26 e a este adiciona 5 unidades, saltando, erradamente, para o número 35. Por fim, o Tomé apresenta uma expressão horizontal, talvez para enfatizar o resultado a que chegou, 22+4+5=35. Embora incorreto, Tomé usa o resultado obtido na resposta final.

Uma vez que Tomé parte do número 20 e adiciona sucessivamente 4 e 5 unidades, utiliza uma estratégia do tipo A10.

É de referir que, ao observar a reta numérica, consegue perceber-se a existência de pequenas marcações entre os números, que inicialmente me levaram a crer que tivessem sido feitas para auxiliar no cálculo, uma vez que entre o número 22 e o número 26 se encontram 3 traços marcados, ou seja, deram-se 4 saltos. Contudo, do número 26 para o número 35 encontram-se 8 traços, mas o Tomé adiciona apenas 4 unidades. Aparentemente, os traços registados serviam para auxiliar nos cálculos, embora estes estejam incorretos.

Problema 5 – Parque de estacionamento

No quinto problema em que era preciso calcular o total de lugares de um parque de estacionamento, Tomé resolve-o como mostra a figura 34.

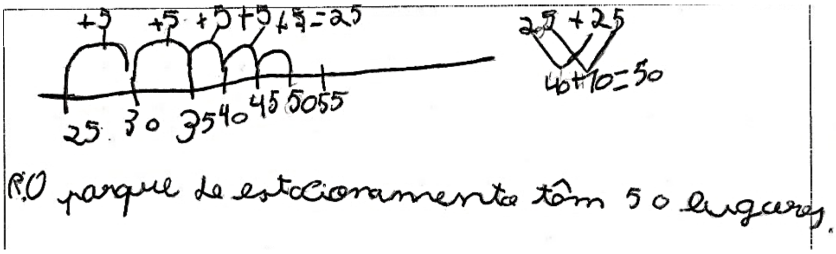


Figura 34 – Resolução de Tomé do problema n.º 5

A análise da resolução de Tomé permite perceber que identifica o problema como sendo de adição apoiando-se no cálculo com recurso à reta numérica e no cálculo horizontal para obter o resultado final.

Aparentemente, Tomé desenha a reta numérica, marca o número 25 e começa por saltar de 5 em 5 até chegar ao número 50. Em seguida, marca o número 55, provavelmente por pensar que tem de adicionar mais 5 unidades. Contudo, para confirmar se tal é necessário, adiciona os saltos de 5 que havia efetuado, 5+5+5+5+5=25 e, assim, compreende que já tinha acrescentado a quantidade mencionada no problema.

Talvez, por ter necessidade de confirmar a sua resposta, o Tomé apresenta ainda outra estratégia sem recurso à reta numérica. O aluno parece ter começado por escrever uma expressão horizontal onde coloca os números que irá adicionar. Em primeiro lugar adiciona as dezenas, em seguida as unidades e, por fim, adiciona os resultados destes dois cálculos, 40+10=50. Assim, o Tomé chega ao mesmo resultado que havia obtido aquando da utilização da reta numérica transpondo-o para a sua resposta final.

Quando utiliza a reta numérica, Tomé usa uma estratégia do tipo A10, embora tenha recorrido a uma estratégia 1010 quando efetua o cálculo horizontal.

Problema 6 – A coleção de berlindes

No sexto problema em que era preciso calcular o total de berlindes de dois amigos, Tomé resolve-o como mostra a figura 35.

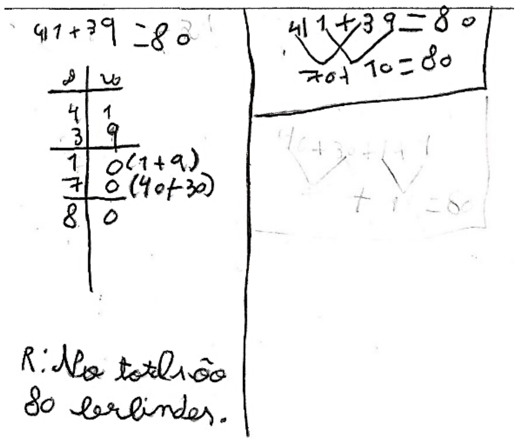


Figura 35 – Resolução de Tomé do problema n.º 6

A análise da resolução do Tomé mostra que o aluno identifica o problema como sendo de adição apoiando-se num cálculo vertical e num cálculo horizontal para obter o resultado final.

Aparentemente, o aluno começa por escrever uma expressão horizontal com os números indicados no problema e, em seguida, transpõe esses dados para uma representação vertical. Em primeiro lugar parece ter adicionado as unidades, seguidamente adiciona as dezenas e, por fim, adiciona os resultados dos dois cálculos efetuados. O resultado obtido, 41+39=80, foi aparentemente transposto para a expressão horizontal inicial.

Talvez por ter necessidade de confirmar a sua resposta ou para mostrar que sabe calcular de outra forma, opta por apresentar outra representação. Ao que tudo indica, o Tomé, começa por escrever uma expressão horizontal onde coloca as quantidades que irá adicionar. Primeiramente, adiciona as dezenas, em seguida as unidades e por fim, adiciona os resultados destes dois cálculos, 70+10=80. Assim, o aluno chega ao mesmo resultado que havia obtido aquando da representação vertical, transpondo-o para a sua resposta final.

Apesar das representações utilizadas serem diferentes – cálculo vertical e horizontal –, o aluno baseia-se na mesma estratégia de decomposição (1010).

Problema 8 – As rifas da Maria

No oitavo problema em que era preciso calcular o número de rifas que faltavam vender à Maria, Tomé resolve-o como mostra a figura 36.

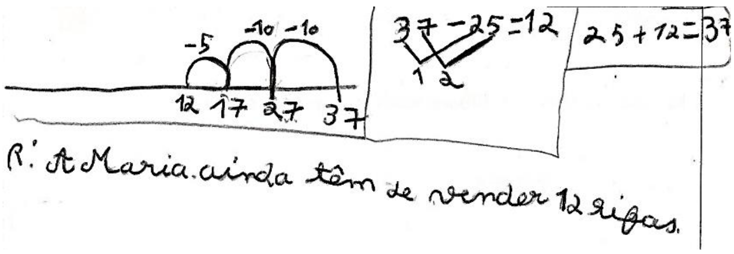


Figura 36 – Resolução de Tomé do problema n.º 8

A análise da resolução do Tomé evidencia que o aluno identifica o problema como sendo de subtração apoiando-se cálculo com recurso à reta numérica e no cálculo horizontal para obter o resultado final.

O aluno desenha a reta numérica, marca o número 37 e, mentalmente, decompõe o número 25 em 10+10+5. Neste sentido, ao número 37 retira 10 unidades saltando para o número 27, depois retira mais 10 unidades saltando para o número 17 e, por fim, retira 5 unidades saltando para o número 12.

Quando me apercebo que Tomé termina esta estratégia dirijo-me a ele para o questionar como pensou:

Investigadora: Podes explicar-me o que fizeste?

Tomé: Eu fiz uma reta, pus o número 37 e depois dei um salto de 10.

Investigadora: Para a frente ou para trás?

Tomé: Para trás.

Investigadora: Porquê para trás?

Tomé: Porque o Ulisses também tinha feito para trás e deu-me 27. Só muda a dezena.

Investigadora: E depois?

Tomé: Depois dei outro salto de 10 e deu-me 17. Mas vi que 10+10 era 20, mas era 25, por isso dei um salto e como já tinha 20 era só mais 5… *(faz uma pausa e corrige)* Menos 5! E deu-me 12.

A resposta de Tomé permite perceber que se baseou na "estratégia do Ulisses"[3], uma vez que as estratégias são idênticas. O aluno mostra, também, alguma facilidade na manipulação da reta apoiando-se no seu uso para calcular mentalmente, uma vez que decompõe o número 25 mentalmente, e ao afirmar "já tinha 20 era só mais 5" significa que sabia que para ter 25 lhe faltavam 5. Contudo, ao corrigir a sua frase para "Menos 5!" pode significar que o aluno começa a ter consciência das relações entre adição e subtração na resolução de problemas.

Quando o aluno me entregou a sua resolução percebi que, para além da reta numérica, tinha apresentado outra estratégia, talvez para mostrar que sabe calcular e outra forma. Parece ter começado por escrever uma expressão horizontal com os números indicados no problema. Primeiramente, subtrai os algarismos das dezenas e em seguida os algarismos das unidades, obtendo assim um resultado final igual ao que havia atingido com a reta numérica. Este resultado é transposto para a expressão horizontal e para a resposta final.

Aparentemente, para comprovar a validade da sua resposta, opta por adicionar, mentalmente, o número de rifas vendidas ao número de rifas que ainda faltam vender – resultado que o Tomé obteve com as duas estratégias anteriores –, obtendo assim o total de rifas que a Maria terá de vender, 25+12=37, e mostrando que a sua resposta se encontra correta.

Quando recorre à reta numérica, Tomé usa uma estratégia N10. Contudo, no cálculo horizontal parece recorrer à estratégia do tipo 1010, embora, neste caso, use apenas os algarismos das unidades e das dezenas. Finalmente, no último cálculo usa o facto de a adição ser a operação inversa da subtração para verificar o resultado obtido.

Problema 9 – As coleção de cromos

No nono problema em que era preciso calcular o número de cromos com que a Sara ficou depois de ter dado os seus cromos repetidos à amiga Beatriz, Tomé resolve-o como mostra a figura 37.

[3] Ver problema "As páginas do livro II", página 69.

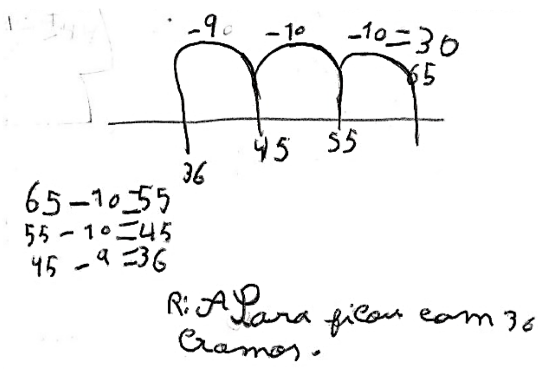


Figura 37 – Resolução de Tomé do problema n.º 9

A análise a resolução do Tomé permite perceber que identifica o problema como sendo de subtração, utiliza a reta numérica para efetuar os seus cálculos e baseia-se numa estratégia do tipo N10.

Aparentemente, Tomé desenha a reta numérica, marca o número 65 e, mentalmente, decompõe o número 29 em 10+10+9. Começa por retirar 10 unidades ao número 65 saltando para o número 55, em seguida, retira mais 10 unidades saltando para o número 45 e, por fim, retira 9 unidades saltando para o número 36. No final, talvez para confirmar os resultados obtidos na reta, efetua os mesmos cálculos mas horizontalmente. O resultado obtido foi transposto para a resposta final do problema.

Quando me apercebo que o Tomé termina esta estratégia dirijo-me a ele para o questionar como pensou:

Investigadora: Como é que fizeste, Tome?

Tomé: A Sara já tinha 65, depois tirei o 29. Como eu sabia trabalhar com o 10 eu tirei 10+10 que é 20, mas era 29, depois tirei mais 9 e deu-me 36.

Durante a discussão do problema, o aluno dirige-se ao quadro para explicar o seu raciocínio aos colegas:

Tomé: Fiz uma reta e pus 65.

Investigadora: Porque é que começaste com o 65?

Tomé: Porque era o que a Sara já tinha. E saltei 10 e deu-me 55.

Investigadora: E depois o que é que fizeste?

Tomé: E depois saltei menos 10 e deu 45. Depois saltei mais 9, porque é assim, 10+10 é 20 e depois pus menos 9 e deu-me 36.

As justificações do Tomé permitem, mais uma vez, perceber que se baseou na "estratégia do Ulisses"[4]. O aluno mostra alguma facilidade no cálculo mental, apoiando-se na reta, uma vez que decompõe o número 29 mentalmente e, ao afirmar "10+10 que é 20, mas era 29, depois tirei mais 9" significa que sabia que para ter 29 lhe faltavam 9. Nos seus discursos apresenta alguma confusão na linguagem pois confunde-se com os termos "saltei mais" "saltei menos", contudo, tal facto pode estar relacionado com uma iniciação à consciencialização das relações inerentes à adição e subtração, revelando-se natural que alguns conceitos ainda não estejam clarificados no seu discurso.

Ao recorrer à reta numérica para realizar os seus cálculos e obter o resultado deste problema, Tomé utiliza uma estratégia do tipo N10.

Problema 10 – O dinheiro dos mealheiros

No décimo problema em que era preciso calcular o total de dinheiro de dois irmãos, Tomé resolve-o como mostra a figura 38.

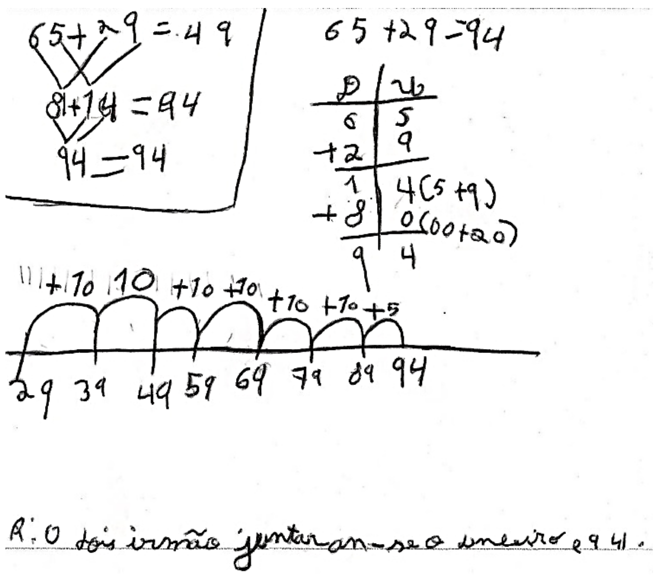


Figura 38 – Resolução de Tomé do problema n.º 10

A análise da resolução do Tomé mostra que o aluno identifica o problema como sendo de adição e recorre a três modos de representação do cálculo que efetua: cálculo horizontal, cálculo vertical e cálculo com recurso à reta numérica.

Parece ter iniciado a sua resolução efetuando um cálculo horizontal, baseando-se numa estratégia de decomposição (1010). Aparentemente, começa por escrever uma

[4] Ver problema "As páginas do livro II", página 69.

expressão horizontal com os números indicados no problema onde adiciona os algarismos das dezenas, em seguida os adiciona as unidades e, por fim, soma os resultados desses cálculos, 8+14=94.

A mesma estratégia de decomposição (1010) parece ter sido utilizada quando Tomé representa o mesmo cálculo que o anterior, mas verticalmente. O aluno parece ter começado por escrever a mesma expressão horizontal, transpondo esses dados para uma expressão vertical. Em primeiro lugar adiciona as unidades, seguidamente adiciona as dezenas e, por fim, adiciona os resultados dos dois cálculos efetuados. O resultado foi aparentemente transposto para a expressão horizontal inicial e revelou-se igual ao anterior.

Finalmente, recorre à reta numérica para realizar o mesmo cálculo usando, desta vez, uma estratégia do tipo N10. Aparentemente, desenha a reta numérica, marca o número 29 e, mentalmente, decompõe o número 65 em 10+10+10+10+10+10+5. Começa por saltar de 10 em 10 até chegar número 89 e adiciona-lhe mais 5 unidades, obtendo o número 94 como resultado final, tal como nas resoluções anteriores. O resultado obtido nas três estratégias foi transposto para a resposta final do problema.

É de salientar que não consigo identificar qual a ordem das representações apresentadas, embora me pareça que ordem pela qual Tomé realizou os cálculos foi a mesma pela qual os apresentei. Mais uma vez, o aluno parece querer mostrar que sabe realizar os cálculos de diferentes maneiras.

Problema 11 – Os relógios

No décimo primeiro problema em que era preciso calcular a diferença de preço entre os relógios, Tomé resolve-o como mostra a figura 39.

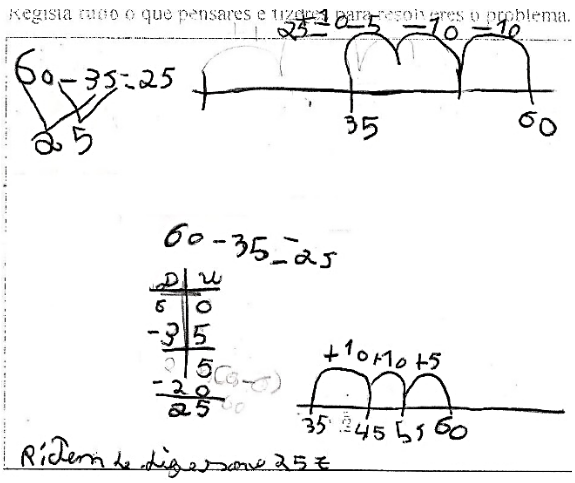


Figura 39 – Resolução de Tomé do problema n.º 11

A análise da resolução do Tomé permite perceber que o aluno identifica o problema como sendo de subtração e recorre a três modos de representação do cálculo que efetua: cálculo horizontal, cálculo vertical e cálculo com recurso à reta numérica.

Tomé parece ter iniciado a sua resolução recorrendo à reta numérica para realizar o cálculo, usando uma estratégia do tipo N10. Aparentemente desenha uma reta numérica, marca o número 60 e começa por saltar de 10 em 10, por fim efetua o último salto de 5 unidades, chegando ao número 35. Em seguida adiciona os valores dos saltos para perceber qual a diferença entre os dois relógios. O aluno, não marca na reta os números resultantes dos seus saltos, apenas marca o último que era o valor onde pretendia chegar. Tal acontece, talvez porque enquanto efetuava os cálculos mentalmente se tenha esquecido de registar os resultados obtidos ou porque já se sente confiante na utilização da reta, não sentindo necessidade de marcar todos os números.

Em seguida, Tomé efetua o mesmo cálculo através de uma representação horizontal baseando-se numa estratégia de decomposição (1010). O aluno parece ter escrito uma expressão horizontal com os números indicados no problema. Primeiramente, subtrai erradamente os algarismos das dezenas e subtrai os algarismos das unidades obtendo, curiosamente, o resultado correto e igual ao da estratégia anterior. Ou seja, Tomé não parece ter usado esta representação para calcular mentalmente, uma vez que os registos estão incorretos, mas apenas para mostrar que sabe realizar os cálculos de outro modo.

A mesma estratégia de decomposição (1010) parece ter sido utilizada quando o aluno representa o mesmo cálculo que o anterior, mas verticalmente. Aparentemente, Tomé escreve, numa expressão horizontal e transpõe esses dados para uma expressão vertical. Em primeiro lugar parece ter subtraído os algarismos das unidades, seguidamente subtrai as dezenas e, por fim, adiciona os resultados dos cálculos efetuados. O resultado foi, aparentemente, transposto para a expressão horizontal inicial e revelou-se igual aos anteriores.

Por fim, recorre novamente à reta numérica para realizar o mesmo cálculo mas, desta vez, constrói uma estratégia aditiva, sendo esta do tipo N10. Parece ter começado por desenhar a reta numérica, depois marca o número 35 e adiciona 10 unidades, saltando para o número 45, em seguida adiciona mais 10 unidades saltando para o número 55 e, por fim, adiciona mais 5 unidades chegando ao número 60. Desta forma, o resultado obtido nas três representações revelou-se igual e foi transposto para a resposta final do problema.

É de salientar que não consigo perceber qual a ordem das representações realizadas pelo aluno contudo, tendo em conta os resultados obtidos e as caraterísticas dos números do problema, parece-me que a ordem pela qual realizou os cálculos foi a mesma pela qual eu os apresentei e que irei em seguida justificar. Na minha perspetiva, Tomé utilizou primeiramente a reta numérica com estratégia subtrativa e aí conseguiu perceber qual a solução do problema. Em seguida, efetuou o cálculo horizontal que, se o aluno não soubesse ainda a solução do problema não conseguiria resolvê-lo corretamente pois implica o transporte de dezenas, procedimento que ainda não é do conhecimento de Tomé. O mesmo se verifica quando o aluno efetua o cálculo vertical, pois também implica o transporte de dezenas. A última representação com recurso à reta numérica para efetuar um cálculo aditivo, parece ter sido sugerida pelo problema apresentado ser de subtração no sentido comparar, uma vez que até aqui ainda apresentara representações com estas características.

Tal como nos problemas anteriores, Tomé parece ter tido necessidade de mostrar que sabe realizar os cálculos de diferentes maneiras.

Em síntese, Tomé fez duas tentativas de usar uma estratégia de decomposição (1010), mas como a subtração envolvida implicava transporte de dezenas, não conseguiu efetuar os cálculos corretamente. Apenas quando utiliza a reta para se apoiar no cálculo usando uma estratégia do tipo N10, conseguiu obter uma solução correta.

Problema 12 – Os brinquedos

No décimo segundo problema em que era preciso calcular o total de dinheiro gasto em dois brinquedos, Tomé resolve-o como mostra a figura 40.

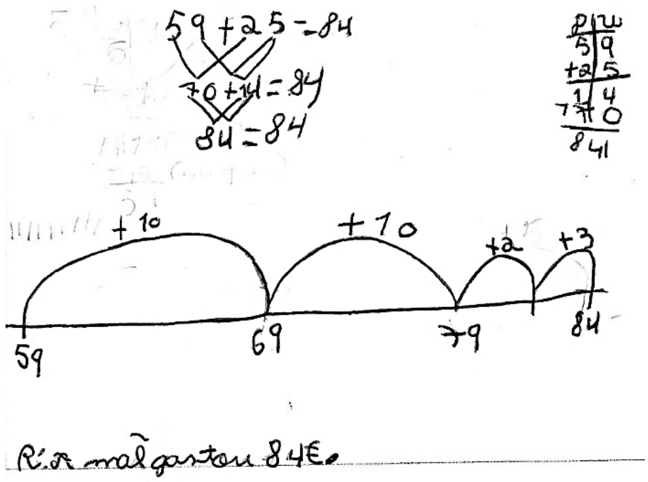


Figura 40 – Resolução de Tomé do problema n.º 12

A análise da resolução do Tomé permite perceber que o aluno identifica o problema como sendo de adição e recorre a três modos de representação do cálculo que efetua: cálculo horizontal, cálculo vertical e cálculo com recurso à reta numérica.

Aparentemente, iniciou a sua resolução efetuando um cálculo horizontal baseando-se numa estratégia de decomposição (1010). O aluno parece ter começado por escrever uma expressão horizontal com os números indicados no problema. Primeiramente adiciona as dezenas e em seguida adiciona as unidades. Como os resultados destas operações se revelam números com dois algarismos, Tomé, mais uma vez adiciona os algarismos das dezenas e das unidades, separadamente, obtendo assim o resultado final, posteriormente, transposto para a expressão horizontal inicial.

A mesma estratégia de decomposição (1010) parece ter sido utilizada quando Tomé representa o mesmo cálculo que o anterior, mas verticalmente. Aparentemente, em primeiro lugar, o aluno adiciona as unidades e seguidamente adiciona as dezenas. Tal como na estratégia anterior, devido aos números obtidos serem compostos por dois algarismos, o aluno, mais uma vez, adiciona dezenas e unidades, separadamente, obtendo assim o resultado final.

Finalmente, recorre à reta numérica para realizar o mesmo cálculo usando, desta vez, uma estratégia do tipo N10. Aparentemente, desenha a reta numérica, marca o número 59 e, mentalmente, decompõe o número 25 em 10+10+2+3. Em primeiro lugar, ao número 59 adiciona 10 unidades, saltando para o número 69, depois adiciona mais 10 unidades, saltando para o número 79, em seguida adiciona duas unidades e por fim, mais três unidades, chegando ao número 84.

Durante a discussão do problema, o Tomé dirige-se ao quadro para explicar o seu raciocínio aos colegas:

> Tomé: Fiz uma reta e pus o 59. Como sei trabalhar bem com o 10 acrescentei mais 10 e deu-me 69. Depois juntei mais 10 e deu-me 79 e depois era mais 5 para fazer os 25, e pus mais 2 e deu 81.
>
> Investigadora: Porque é que acrescentaste mais 2?
>
> Tomé: Porque não quis acrescentar logo os 5. E depois mais 3 e deu-me 84.

O discurso do Tomé permite perceber que mostra alguma facilidade na manipulação da reta apoiando-se no seu uso para calcular mentalmente, uma vez que decompõe o número 25 mentalmente, quando afirma que “acrescentei mais 10 (…), juntei mais 10 (…) e depois era mais 5 para fazer os 25”. Contudo, penso que a decomposição do número 5 em 2+3 foi algo realizado aleatoriamente, pois pelo que me parece, a reta numérica foi a última estratégia a ser utilizada sendo que, nesta fase o aluno já tinha conhecimento da resposta ao problema. Outra razão que me leva a crer que a decomposição do número 5 não respeitou qualquer critério, prende-se com facto de o aluno não ter registado na reta o resultado na soma 79+2, apesar de o ter feito quando se dirigiu ao quadro.

É de salientar que não consigo definir a ordem pela qual as estratégias foram construídas embora me pareça que respeitaram a ordem pela qual as apresentei. Mais uma vez, Tomé parece querar mostrar que sabe realizar os cálculos de diferentes maneiras.

Problema 13 – O jogo

No décimo terceiro problema em que era preciso calcular o número de pontos do Miguel a partir dos pontos obtidos pela Cláudia, Tomé resolve-o como mostra a figura 41.

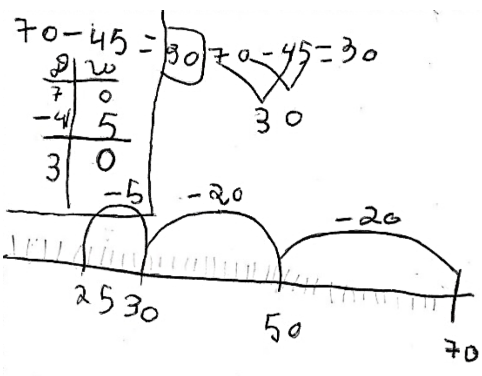


Figura 41 – Resolução de Tomé do problema n.º 13

A análise da resolução do Tomé permite perceber que o aluno identifica o problema como sendo de subtração e recorre a três modos de representação do cálculo que efetua: cálculo vertical, cálculo horizontal e cálculo com recurso à reta numérica.

Tomé, parece ter começado a sua resolução efetuando um cálculo vertical baseando-se numa estratégia de decomposição (1010). Aparentemente, escreve uma expressão horizontal transpondo esses dados para uma representação vertical. Primeiramente, parece ter subtraído os algarismos das unidades e, em seguida subtrai os algarismos das dezenas chegando a um resultado incorreto, uma vez que o aluno não sabe ainda manipular este tipo de cálculo quando requer o transporte de dezenas. O resultado foi, aparentemente, transposto para a expressão horizontal inicial.

A mesma estratégia de decomposição (1010) parece ter sido utilizada quando Tomé representa o mesmo cálculo que o anterior, mas horizontalmente. Inicialmente, o aluno escreve uma expressão horizontal com os números indicados no problema. Primeiramente, subtrai os algarismos das dezenas e subtrai os algarismos das unidades, obtendo o mesmo resultado incorreto que na representação anterior devido aos mesmos motivos.

Por fim, recorre à reta numérica para realizar o mesmo cálculo usando, desta vez, uma estratégia do tipo N10. Aparentemente, em primeiro lugar desenha uma reta numérica, marca o número 70 e, mentalmente, decompõe o número 45 em 20+20+5. Começa por retirar 20 unidades, saltando para o número 50, sem seguida tira mais 20 unidades, saltando para o número 30 e, por fim, retira mais 5 unidades, saltando para o número 25. O resultado obtido nesta estratégia revelou-se diferente dos resultados anteriores, sendo este o resultado correto. Neste problema o aluno não escreve uma resposta talvez por se ter esquecido ou por ter ficado confuso com o diferença de resultados obtidos.

Em síntese, Tomé fez duas tentativas de usar uma estratégia de decomposição (1010), mas como a subtração envolvida implicava transporte de dezenas, não conseguiu efetuar os cálculos corretamente. Apenas quando utiliza a reta para se apoiar no cálculo usando uma estratégia do tipo N10, conseguiu obter uma solução correta.

Problema 14 – A idade da Margarida

No décimo primeiro problema em que era preciso calcular a idade da Margarida tendo em conta a idade da sua avó, Tomé resolve-o como mostra a figura 41.

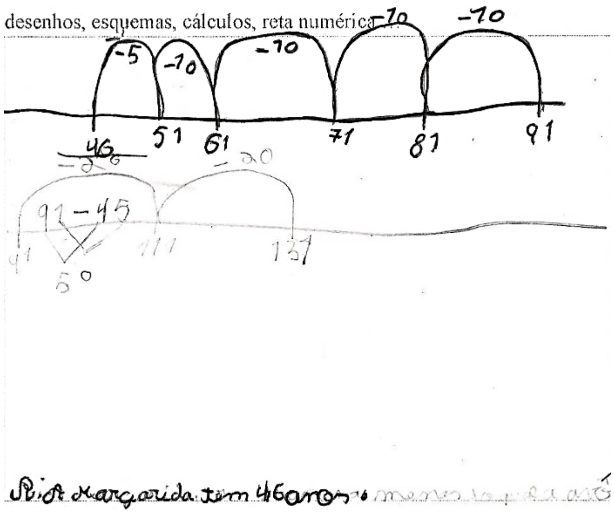


Figura 42 – Resolução de Tomé do problema n.º 14

A análise a resolução do Tomé permite perceber que identifica o problema como sendo de subtração, utiliza a reta numérica para efetuar os seus cálculos e baseia-se numa estratégia do tipo N10.

Aparentemente, Tomé desenha a reta numérica, marca o número 91 e, mentalmente, decompõe o número 45 em 10+10+10+10+5. Primeiramente, o aluno salta de 10 em 10 até chegar ao número 51 e, em seguida, dá um salto de 5 unidades, chegando ao número 46, sendo este resultado transposto para a sua resposta final.

É possível perceber que o Tomé fez uma tentativa de utilizar o cálculo horizontal, pois essa estratégia encontra-se quase apagada, contudo, o aluno parece ter percebido que não conseguia calcular dessa forma, devido à necessidade de transporte de dezenas, por isso desistiu e apagou o que havia escrito.

5.2.2. Síntese das resoluções de Tomé

a) As estratégias de Tomé

No decorrer da análise dos registos de Tomé é possível perceber como resolve os problemas propostos. De modo a sistematizar as informações recolhidas apresento, em seguida, uma tabela com os problemas, operação e sentido subjacente, os modos de representação utilizados por Tomé e as estratégias inerentes.

Tabela 3 – Síntese das resoluções de Tomé

Problema	*Operação e sentido*	*Modos de representação*	*Estratégia*
P1	Adição – juntar	Representação vertical do cálculo	1010
P2	Adição – juntar	Representação horizontal do cálculo	1010
P4	Adição – acrescentar	Através da reta numérica	A10
P5	Adição – juntar	Através da reta numérica Representação horizontal do cálculo	A10 1010
P6	Adição – juntar	Representação vertical do cálculo Representação horizontal do cálculo	1010 1010
P8	Subtração – completar	Através da reta numérica Representação horizontal do cálculo	N10 1010
P9	Subtração – retirar	Através da reta numérica	N10
P10	Adição – juntar	Representação horizontal do cálculo Representação vertical do cálculo Através da reta numérica	1010 1010 N10
P11	Subtração – comparar	Representação horizontal do cálculo Representação vertical do cálculo Através da reta numérica	1010 1010 N10
P12	Adição – juntar	Representação horizontal do cálculo Representação vertical do cálculo Através da reta numérica	1010 1010 N10
P13	Subtração – retirar	Representação horizontal do cálculo Representação vertical do cálculo Através da reta numérica	1010 1010 N10
P14	Subtração – retirar	Através da reta numérica	N10

Através da análise da tabela, bem como das produções de Tomé é possível perceber que o aluno se apoiou em três tipos representações, nomeadamente: representação horizontal do cálculo, representação vertical do cálculo e representação através da reta numérica.

Ao longo dos 12 problemas e, excluindo as situações onde a utilização da reta numérica era obrigatória, a representação horizontal do cálculo foi a representação mais utilizado pelo Tomé, seguindo-se do cálculo através da reta numérica e, finalmente, a representação vertical do cálculo foi o modelo menos utilizado. É de salientar que na fase de liberdade estratégica a reta numérica caraterizou-se por ser a representação mais utilizada.

Quando Tomé utiliza o cálculo horizontal e o cálculo vertical baseia-se na estratégia 1010 e quando utiliza a reta numérica recorre à estratégia N10. Neste sentido, é possível compreender que as estratégias preferenciais do aluno denominam-se de 1010 e N10, seguindo-se da A10 que foi apenas utilizada duas vezes.

Relativamente à fase diagnóstica, no primeiro problema (P1), Tomé utilizou o cálculo vertical talvez por ser a representação que a professora titular da turma se encontrava a desenvolver com a mesma. No segundo problema (P2), expliquei aos alunos que podiam utilizar outro tipo de representação que não aquela que estavam a trabalhar e, provavelmente por isso, Tomé utilizou o cálculo horizontal que, ao que parece, é a representação do cálculo que o aluno tem mais facilidade em trabalhar, devido ao número de vezes que a apresentou ao logo dos 12 problemas que resolveu.

Na segunda fase do projeto, referente à exploração da reta numérica em problemas de adição, Tomé resolve o primeiro problema (P4) com recurso à reta numérica e escolhe como referência a estratégia do Ulisses. No P5, quando os alunos tinham liberdade de utilizar a reta e/ou outro modelo de cálculo, o aluno utiliza a reta numérica e o cálculo horizontal, provavelmente por ser aquele que tem mais segurança em trabalhar. No P6, quando os alunos tiveram liberdade total quanto à escolha da estratégia, Tomé utiliza os mesmos modelos de cálculo que utilizou nos problemas diagnósticos. O cálculo vertical, provavelmente, por ser a representação que se encontrava a trabalhar em sala de aula e o cálculo horizontal talvez por ser aquele que sente mais facilidade em utilizar.

Na terceira fase do projeto, referente à exploração da reta numérica em problemas de subtração, Tomé resolve o primeiro problema (P8) com recurso à reta numérica e escolhe, mais uma vez, como referência a estratégia do Ulisses. Apresenta também um cálculo horizontal, talvez para confirmar se o resultado obtido na primeira estratégia estaria correto. No segundo problema (P9) o aluno utiliza unicamente o cálculo com recurso à reta numérica.

Na última fase referente à liberdade estratégica, em quatro dos cinco problemas Tomé apresenta as mesmas três representações do cálculo – cálculo horizontal, cálculo vertical e cálculo através da reta numérica. Na minha perspetiva, o aluno apresenta três formas de cálculo para mostrar que tem facilidade em trabalhar com as mesmas. Provavelmente, utiliza o cálculo horizontal por ser a representação que mais facilidade tem em trabalhar, devido ao número de vezes que a utiliza ao longo deste estudo, usa o cálculo vertical provavelmente por ser o cálculo que se encontrava a trabalhar em sala de aula e recorre à reta numérica porque foi o modelo trabalhado nesta investigação.

Aquando da utilização da reta numérica, Tomé mostra que compreende como a mesma se utiliza e opta por nos problemas de adição utilizar estratégias apenas aditivas e, nos problemas de subtração utiliza estratégias subtrativas, à exceção de um dos problemas (P11).

b) As dificuldades manifestadas por Tomé

Ao longo da resolução dos 12 problemas, Tomé apresenta dificuldades na utilização de uma das representações utilizadas, em experimentar estratégias diferentes daquelas que se sente seguro e na seleção da melhor estratégia para resolver um problema.

Relativamente ao cálculo horizontal e cálculo vertical, o aluno apresenta facilidade na utilização destas representações, à exceção dos casos em que existe transporte de dezenas na subtração, revelando que, nestes casos não domina estas representações do cálculo.

Apesar de o aluno conseguir manipular corretamente os números quando utiliza a reta, salvo raras exceções onde cometeu erros de cálculo (P4 e P13), é notório que ainda não arrisca em fazer saltos de maior valor. Ou seja, em praticamente todos os problemas em que a reta é utilizada, Tomé salta de 10 em 10 quando, na minha perspetiva, na quarta parte do estudo poderia ter arriscado em saltar, por exemplo, de 20 em 20, o que só aconteceu pontualmente no P13. Penso que tal não aconteceu porque, tal como Tomé salienta nas entrevistas, "sei trabalhar bem com o 10" e como a reta numérica se apresentou como um novo modelo de apoio ao cálculo o aluno, talvez para se sentir seguro, decidiu não arriscar.

Finalmente, é notório que o aluno, muitas vezes, utiliza mais do que uma estratégia para resolver o mesmo problema. Esta realidade pode estar relacionada com o facto de o Tomé ainda não compreender qual poderá ser a estratégia mais rápida e eficiente para resolver um problema, apresentando assim todas as estratégias de resolução que conhece.

c) Eventuais mudanças nas estratégias usadas

Ao longo deste projeto, Tomé sempre que tinha oportunidade de não utilizar a reta numérica, limitava-se, apenas, a duas representações de cálculo: horizontal e vertical e maioritariamente ao uso da estratégia 1010. Contudo, na última fase desta investigação, referente à liberdade estratégica, o aluno utilizou sempre a reta numérica como modelo de apoio ao cálculo. Neste sentido, penso que este projeto permitiu que Tomé tivesse oportunidade de conhecer e manipular outra representação do cálculo e outras estratégias subjacentes a este modelo linear, para além daquelas que já conhecia.

Capítulo VI – Conclusões

O presente capítulo encontra-se dividido em quatro secções. Na primeira secção apresento uma síntese do estudo, focando o contexto em que o estudo foi desenvolvido, o objetivo do mesmo, as três questões de investigação, bem como os principais aspetos metodológicos do estudo. Na segunda secção, tento dar resposta às questões de investigação apresentando alguns autores de referência e, tendo em consideração a análise de dados. Na terceira seção encontra-se uma reflexão pessoal sobre todo o trabalho realizado.

6.1. Síntese do estudo

Os alicerces que sustentam o presente estudo caracterizam-se por ser de índole pessoal, uma vez que a área da Matemática, desde cedo, sempre me despertou interesse e motivação em querer descobrir e saber mais sobre ela, e de cariz ideológico porque sempre acreditei que conseguiria fazer transparecer este meu interesse junto dos alunos de forma a desmistificar a (falsa) imagem que muitos têm sobre esta área curricular.

A investigação desenvolvida decorre no âmbito da Unidade Curricular Estágio III realizado com uma turma do 2.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico numa escola básica, pertencente a um agrupamento de escolas de Setúbal. Ao observar a turma compreendi que os alunos revelavam algumas dificuldades associadas ao sentido de número e, consequentemente, às operações aritméticas de adição e subtração. Neste sentido, optei por criar momentos onde os alunos tivessem oportunidade se dedicar a estas operações, através da resolução de problemas. Assim, nesta investigação procurei compreender o modo como os alunos resolvem problemas de adição e subtração.

Considerando o objetivo do estudo, formulei três questões que orientam a minha investigação:

- Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtração?
- Quais as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtração?
- Que mudanças, se existirem, se identificam nas estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a adição e subtração?

Do ponto de vista metodológico, esta investigação caracteriza-se como qualitativa e enquadra-se num paradigma interpretativo. A recolha de dados foi feita através da observação participante, de entrevistas clínicas e da recolha documental. A análise dos dados relativos às produções de dois alunos ao longo de doze problemas, permitiu-me dar resposta às questões formuladas inicialmente e, consequentemente, obter as conclusões desta investigação.

Seguidamente, apresento as conclusões do estudo respondendo às questões orientadoras deste estudo.

6.2. Conclusões do estudo

6.2.1. Estratégias utilizadas pelos alunos

Ao analisar os dados obtidos foi possível perceber que os alunos recorrem essencialmente a três tipos de representação do cálculo para resolverem os problemas, nomeadamente: horizontal, vertical e com recurso à reta numérica.

Quando utilizam uma representação horizontal do cálculo baseiam-se numa estratégia de decomposição, 1010, que se caracteriza por ser a mais utilizada pelo Tomé. Quanto à representação vertical do cálculo, encontra-se associada a uma estratégia do tipo 1010, no caso de Tomé, enquanto no caso de Lara está relacionada com o uso de uma estratégia entre a 1010 e o algoritmo, sendo esta a mais utilizada pela aluna. A segunda estratégia mais usada por Tomé e Lara é a N10, aliada ao uso do cálculo com recurso à reta numérica. Beishuizen (2009) refere que alunos com uma maior facilidade de cálculo tendem a recorrer à estratégia N10, enquanto alunos com mais dificuldades no cálculo parecem utilizar maioritariamente a estratégia 1010. Contudo, uma vez que Tomé revela uma maior flexibilidade e destreza no cálculo do que a Lara, e é o aluno que mostra preferência na utilização da estratégia 1010, não é possível concluir, no meu estudo, uma relação entre as estratégias utilizadas e a facilidade de cálculo dos alunos. Devido à minha análise se limitar a dois alunos, senti necessidade de verificar esta relação nos alunos de toda a turma (ver apêndice 1) e, numa visão geral, é possível perceber que a maioria tem preferência pela estratégia 1010, contrariando assim a perspetiva defendida por Beishuizen (2009). No meu ponto de vista, tal acontece porque quando iniciei o estágio a professora cooperante trabalhava bastante o cálculo horizontal baseado na estratégia 1010 e, posteriormente, apresentou à turma o cálculo vertical baseado na mesma estratégia. Assim, penso que os alunos se sentiam mais seguros em utilizá-la, revelando dificuldade em dela se desvincularem para manipularem outras diferentes.

Nos cálculos apoiados na reta numérica, Tomé baseou-se em duas estratégias – N10 e A10 – enquanto que Lara recorreu a três estratégias – N10, A10 e A10C – revelando-se a N10 como a preferência dos dois alunos. Apesar desta particularidade comum, Lara mostra que, segundo Treffers (2001), se encontra num nível de cálculo por contagem uma vez que recorre, permanentemente, aos dedos das próprias mãos para efetuar contagens de 1 em 1. Contudo, parece progredir para o nível de cálculo seguinte, pois consegue realizar cálculos por decomposição com sucesso. Segundo Treffers (2001), Tomé encontra-se num nível de cálculo estruturado pois revela que já conhece algumas das propriedades e relações entre os números e por isso consegue, facilmente, realizar adições e subtrações de 10 em 10 e efetuar cálculos baseados na decomposição dos números.

Uma vez que na proposta pedagógica apresento uma diversidade de problemas que incluem todos os sentidos das operações de adição e subtração, importa perceber se houve alguma relação entre os mesmos e as estratégias realizadas pelos alunos. Nesta análise refiro, apenas, as resoluções onde o uso da reta numérica prevaleceu, uma vez que os outros tipos de cálculo não são significativos na mesma, pois baseiam-se em estratégias de decomposição. Lara, em qualquer problema, seja ele de adição ou subtração, utilizou sempre estratégias aditivas talvez porque se sente mais segura na sua manipulação, tal como referiu numa das entrevistas. Tomé, nos problemas de adição recorreu sempre a estratégias aditivas, enquanto nos problemas de subtração utilizou sempre estratégias subtrativas à exceção do P11, em que recorreu a uma estratégia aditiva.

Segundo Heirdsfield e Cooper (1996) na resolução de problemas com sentido de retirar os alunos têm tendência para utilizar estratégias subtrativas e na resolução de problemas com sentido de completar tendem a recorrer a estratégias aditivas. No estudo realizado por Morais (2011), os alunos usam, também, estratégias aditivas nos problemas com sentido de comparar.

Na minha perspetiva, Tomé no P8 com sentido completar, não utilizou uma estratégia aditiva porque se baseou na "Estratégia do Ulisses"[5] que, por sua vez era

[5] Ver problema "As páginas do livro II", página 69

subtrativa. Contudo, no P11 com sentido comparar, o aluno, apesar de ter apresentado outras estratégias, efetuou um cálculo aditivo talvez por lhe ter sido sugerido pelo sentido do problema.

A análise dos dados referente aos dois alunos que realizei não me permite identificar uma tendência coerente com a defendida pelos autores acima referidos. Como tal, e uma vez que a minha análise se limitou a dois alunos, senti necessidade de perceber, junto das resoluções de toda a turma (ver apêndice 2), se se verifica, no meu estudo, esta relação entre o sentido da operação subtração e as estratégias utilizadas. Mais uma vez, refiro que apenas analisei as estratégias com recurso à reta numérica. Neste sentido verifica-se que os alunos têm uma tendência para utilizar estratégias aditivas nos problemas de subtração com sentido completar e comparar, tal como defendem os autores acima mencionados. Contudo, nos problemas de sentido retirar existe uma disparidade dos resultados, uma vez que não se verifica qualquer preferência pelo tipo de estratégia, contrariando o que Heirdsfield e Cooper (1996) defendem.

6.2.2. Dificuldades manifestadas pelos alunos

A análise das produções de Lara e Tomé bem como das entrevistas realizadas evidenciam que os alunos apresentam dificuldades ao nível da interpretação dos enunciados, da seleção da estratégia mais eficiente a utilizar, no uso de determinadas representações, na interpretação dos resultados obtidos no problema e na justificação dos seus raciocínios.

Relativamente à primeira dificuldade, durante a apresentação dos problemas era notório que Lara apresentava algumas dificuldades na interpretação dos enunciados. A aluna questionava, algumas vezes, sobre qual a operação que estava implícita no problema, facto este que identifiquei na maioria dos alunos da turma. Contrariamente a Lara, Tomé compreendia sempre o que era pedido no problema. Nesta perspetiva, Costa e Fonseca (2009) defendem que para a compreensão dos problemas matemáticos são também necessárias competências ao nível da Língua Portuguesa, uma vez que estas duas disciplinas se encontra intimamente ligadas.

Ao analisar as produções dos dois alunos, foi possível perceber que mostram algumas dificuldades na seleção da estratégia, pois, em alguns dos problemas apresentam mais do que uma estratégia e/ou representação. Tomé sente necessidade de mostrar que sabe utilizar mais do que uma representação, e consequente estratégia, para resolver um determinado problema. Esta tendência é evidenciada uma vez que, 7 dos 12 problemas, possuem mais do que uma resolução, ao contrário do que acontece com Lara pois, tal é possível confirmar-se em, apenas, 3 dos 12 problemas. Segundo Mendes (2012) esta situação pode estar relacionada com

> a falta de segurança (…), o gosto que [os alunos] parecem ter em mostrar que conseguem efetuar o mesmo cálculo de maneiras diferentes, o querer seguir a professora que, por vezes, realça as várias maneiras usadas pelos alunos de realizar um mesmo cálculo e o recurso a um procedimento de confirmação. (p. 489)

Segundo a autora, ao longo do tempo os alunos começam a compreender que o pretendido é que resolvam cada tarefa da forma mais eficiente e adequada ao problema, tornando-se dispensável que mostrem que sabem calcular de diversas maneiras.

Cada aluno analisado apresenta dificuldades no uso de uma determinada representação. Lara, ao longo da resolução dos problemas, mostra que tem algumas dificuldades na utilização da reta numérica. Nos problemas de adição, a aluna não consegue compreender quais os números que deve colocar na reta mostrando dúvidas sobre como efetuar o cálculo com o apoio deste modelo. Nos problemas de subtração, a aluna sabe qual o número em que pretende começar e qual o número a que tem que chegar. Contudo, em qualquer uma dessas operações, Lara não compreende como a reta numérica a pode ajudar na resposta ao problema, mesmo que tenha efetuado corretamente todos os cálculos. Contrariamente a esta evidência, Lara quando utiliza a representação vertical do cálculo, obtém resultados corretos, não revelando dúvidas na sua resolução, sendo esta a sua estratégia preferencial. Segundo McIntosh, Reys, e Reys (1992) quando os algoritmos aritméticos são introduzidos precocemente limitam os alunos no uso das estratégias informais, uma vez que aqueles começam a ser os principais métodos escolhidos, já que são passíveis de serem utilizados sem haver necessidade de pensar.

Na minha perspetiva, Lara apresenta dificuldades na utilização da reta numérica porque têm outras dificuldades inerentes ao conhecimento dos números e suas relações. Estas dificuldades talvez não tenham sido superadas porque a aluna não teve oportunidade de desenvolver e explorar o seu pensamento matemático devido à aprendizagem precoce do algoritmo – método rápido que não requer a capacidade de pensar – sendo este um caminho mais fácil para ela. Ao contrário, Tomé, embora tenha aprendido os algoritmos aritméticos ao mesmo tempo que Lara, já possuía algumas capacidades matemáticas que a aluna ainda não tinha desenvolvido e, por isso, consegue utilizar várias estratégias e representações sempre com sucesso, salvo algumas exceções onde ocorreram erros de cálculo. É neste perspetiva que Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que “deve dar-se menos atenção à prática repetitiva dos algoritmos e mais atenção à compreensão das operações e das relações entre elas” (p. 49).

Lara tem a capacidade de contar de 1 em 1 e esta é a estratégia mais usada pela aluna, que para Castro e Rodrigues (2008) é “o ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos matemáticos” (p.121) e promove o desenvolvimento de competências essenciais para a resolução de problemas aritméticos.

Neste sentido, Lara encontra-se ainda numa fase inicial do desenvolvimento do sentido de número uma vez que não compreende a ordem de grandeza dos números na sua plenitude, operando com dígitos e não com os números tal como acontece quando utiliza a estratégia próxima do algoritmo; não tem ainda números de referência pois, pelas entrevistas mostra que efetua saltos de 10 em 10, apenas, porque são aceites por mim; não compreende ainda a propriedade comutativa da adição, como se pode verificar na resolução do P8; e não percebe como as operações afetam os números.

Contrariamente, Tomé encontra-se numa fase de desenvolvimento do sentido de número mais avançada do que Lara, uma vez que compreende e utiliza de forma global e flexível os números e as operação, percebendo as relações entre eles. Apesar disto, Tomé tem ainda muito para descobrir e manipular, uma vez que o sentido de número se desenvolve ao longo da nossa vida (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

Tomé apresenta, também, dificuldades na utilização da estratégia 1010 quando numa situação de subtração existe empréstimo de dezenas. Beishuizen (2003) afirma que esta estratégia pode conduzir a erros em situações de empréstimo e, por isso, não é tão eficaz quando os alunos não compreendem, ainda, como esta se utiliza neste âmbito. Nestas situações, revela-se fulcral que os alunos utilizem outras estratégias com recurso, por exemplo, à reta numérica vazia.

Ao longo da implementação deste projeto, os alunos baseavam-se em estratégias próprias, como por exemplo, Lara utilizava apenas estratégias aditivas quando apoiava o cálculo na reta numérica enquanto Tomé efetua, maioritariamente, saltos de 10 em 10. Neste sentido, os dois alunos parecem apresentar dificuldade em arriscar na construção de novas estratégias.

A análise das produções de Lara mostra, também, que a aluna tem dificuldades na interpretação dos resultados, tal como se pode perceber nos problemas 4, 5 e 12. Nestes registos a aluna não consegue obter a resposta correta, contudo deveria ser capaz de interpretar o resultado ao qual chegou e refletir se este faz sentido, de acordo com os números do problema e com a questão do mesmo. McIntosh, Reys e Reys (1992) defendem que os alunos desvalorizam a revisão do resultado porque não é importante para eles, contudo esta é uma parte integrante do processo de resolução de problemas. Por isso "Quando se chega a uma solução, alunos com sentido do número examinam as respostas à luz do problema (enunciado), para determinar se as respostas têm lógica" (p. 16).

Finalmente, quanto à justificação oral dos raciocínios, Lara apresentava algumas dificuldades, sendo necessário colocar várias questões para auxiliar a aluna na explicação das suas escolhas. Tomé consegue explicar aos colegas o seu raciocínio sendo assim reduzida a minha intervenção no seu discurso. As dificuldades inerentes a este aspeto relacionam-se com a organização e clarificação do pensamento dos alunos, uma vez que quando "se esforçam por comunicar as suas ideias de forma clara, estão a desenvolver uma maior compreensão do seu próprio pensamento" (NCTM, 2007, p. 149). Deste modo este aspeto deve ser trabalhado e fomentado em sala de aula pelos professores, no sentido de desenvolver progressivamente uma comunicação mais formal das ideias matemáticas.

6.2.3. Mudanças identificadas nas estratégias utilizadas pelos alunos

Apesar de Tomé mostrar destreza e flexibilidade no cálculo, inicialmente limitava-se à utilização de estratégias de decomposição e, por isso, quando envolviam empréstimo, cometia erros por ainda não dominar esta estratégia nestas situações. Neste sentido, este projeto, parece ter permitido que o aluno tivesse oportunidade de conhecer e manipular outra representação do cálculo que o conduziu à utilização de novas estratégias, nomeadamente: A10 e N10.

Lara, inicialmente, utilizava o cálculo por contagem como estratégia de resolução e apresentava uma preferência por uma estratégia muito próxima do algoritmo para resolver os problemas. Ao longo deste projeto, a aluna foi abandonando a estratégia próxima do algoritmo para utilizar a reta numérica como modelo de apoio ao cálculo que a conduziu à utilização de novas estratégias, nomeadamente: A10, A10C e N10. Lara parece ter aprendido, também, a utilizar a reta numérica corretamente nos problemas de subtração.

Uma vez que ao longo do processo tive oportunidade de acompanhar os alunos na aprendizagem e utilização de um novo modelo de apoio ao cálculo, os alunos sentiram-se, gradualmente, mais confiantes na experimentação de novas estratégias (Lopes, et al., 1999; NCTM, 2008). Assim, este projeto permitiu, também, que os alunos tivessem contacto com diversas estratégias para calcular o mesmo resultado, característas que promovem o desenvolvimento de resolução de problemas nos alunos. Para além disto, tal como referido, Lara encontrava-se num nível de cálculo por contagem e, ao resolver os problemas do estudo, foi encorajada a transitar "para uma resolução de problemas através do cálculo mental" (NCTM, 2007, p. 97). Do meu ponto de vista, se o projeto se tivesse alongado no tempo, ajudá-la-ia a progredir para um nível de cálculo mais formal e flexível, apoiado no desenvolvimento do seu sentido de número.

6.3. Reflexão sobre o estudo

Ao longo da prática profissional, o professor deve ser reflexivo sobre e na sua prática, pois só desta forma é possível melhorá-la e readaptá-la conduzindo à aprendizagem dos alunos, dando assim forma aos problemas encontrados, "descobrindo novos caminhos, construindo e concretizando soluções" (Oliveira & Serrazina, 2002, p. 32). Muitas vezes, quando os alunos não atingem os resultados esperados é necessário refletir sobre qual a base do problema, que muitas vezes se baseia na prática do professor e não propriamente nos alunos. Para a concretização deste trabalho, tive oportunidade de refletir em vários momentos. Assim, antes da implementação do projeto, através da observação refleti sobre a dificuldade dos alunos relativamente às operações aritméticas de adição e subtração, sendo este o mote para a realização de todo o estudo. Antes da exploração dos problemas tinha de escolher criteriosamente os contextos e números implicados de forma a conduzirem ao uso de diversas estratégias. No momento da exploração tinha de refletir sobre as estratégias utilizadas pelos alunos de forma a colocar-lhes questões pertinentes nas entrevistas realizadas para compreender os seus raciocínios. Também na fase de apresentação foi necessário refletir sobre quais as estratégias a apresentar que tinham mais significado para a aprendizagem dos alunos. Por fim, no final da aula era necessário refletir sobre os pontos positivos e negativos de forma a melhorar o desenvolvimento das sessões seguintes. Neste sentido, é importante referir que "Os professores que reflectem em acção e sobre a acção estão envolvidos num processo investigativo, não só tentando compreender-se a si próprios melhor como professores, mas também procurando melhorar o seu ensino" (Oliveira & Serrazina, 2002, p. 34).

Ao refletir sobre as dificuldades dos alunos que serviram de mote para a concretização deste projeto, poderiam perguntar-me: Porque é que apresentei problemas aos alunos ao invés de colmatar a sua dificuldade através de operações isoladas? Primeiramente, pretendia que os alunos desenvolvessem o seu sentido de número sendo que, operar em situações isoladas não se revela facilitador do desenvolvimento desta competência. Para Palhares (2004), resolver problemas possibilita que os alunos raciocinem sobre relações matemáticas, conduzindo ao desenvolvimento da capacidade de pensar matematicamente. Assim, não nos interessa que os alunos sejam expostos a situações rotineiras mas importa que deem significado aos números e tal acontece quando os números surgem envolvidos num contexto. Para além disto, quando "a resolução de problemas [se integra] no contexto de situações matemáticas, os alunos reconhecem a utilizada das estratégias" (NCTM, 2007, p. 138).

No que concerne à minha proposta pedagógica consigo encontrar uma limitação, que se voltasse a realizar este projeto, teria de melhorar. Uma vez que este projeto aborda a adição e subtração, faria sentido que os problemas diagnósticos se baseassem nestas operações, contudo nos dois problemas está implícita apenas a operação adição. Tal aconteceu porque inicialmente, este estudo iria centrar-se apenas na operação adição contudo, percebi que o trabalho ficaria mais rico e completo se, também, trabalhasse a subtração pois, tal como a adição, é umas das primeiras operações que os alunos manipulam e apresentavam dificuldades.

Uma das dificuldades sentidas diz respeito ao facto de, quando os alunos se confrontavam com o erro, tendiam a apagar tudo o que haviam realizado até então. Ou seja, nos primeiros problemas, quando os alunos terminavam as suas resoluções e passávamos para a fase de discussão, alguns alunos dirigiam-se ao quadro para justificarem as suas resoluções, enquanto os outros, ao se aperceberem que as suas estratégias se encontravam incorretas, começavam a apagar o que tinham feito. Apesar de explicar à turma que o que se pretendia era que eles percebessem como se utilizava outra estratégia e que eu precisava de analisar as suas resolução estando corretas ou incorretas, os alunos tentavam apagar na mesma. Neste sentido, para não correr o risco de adulterarem os dados, optei por recolher sempre os problemas quando os alunos os terminavam. Esta atitude leva-me a refletir sobre a forma como a avaliação e, consequentemente, os erros são vistos no ensino. Atualmente, a avaliação no 1.º Ciclo é normalmente associado à sua vertente sumativa, uma vez que é prática recorrente a utilização de fichas de avaliação sumativas e exames como forma de avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos. Neste sentido "Parece haver uma tendência crescente para o requisito de todos os alunos em testes de competências mínimas de realização" (Arends, 1995, p. 324). Contudo, a avaliação formativa é vista assim como um processo de acompanhamento e regulação do ensino e da aprendizagem, sendo que o seu objetivo se centra em compreender o funcionamento cognitivo do aluno face a uma dada situação proposta para se poder intervir de forma adequada. Assim,

> cabe ao professor estar intencionalmente atento aos indícios vindos dos alunos, interpretá-los e agir em conformidade, assim como, fomentar contextos favoráveis para que esta atividade reguladora se vá desenvolvendo no aluno, para que ele possa cada vez mais ser um agente autónomo da sua autorregulação. (Santos, et al., 2010, p. 12)

Nesta perspetiva, os erros e as dificuldades são considerados como meios capazes de levar os alunos a refletirem sobre as suas dificuldades e a reformularem a sua ação. Assim, o erro ou a dificuldade não tem de ser uma humilhação nem um sinal de alerta para o professor, pois "É justamente sobre os erros que se constroem as soluções ou os novos desafios" (Pinto, 2003, p. 7). Desta forma as dificuldades passam a ser encaradas como algo natural na aprendizagem e não como uma fatalidade inultrapassável (*idem*).

Outra dificuldade sentida refere-se às entrevistas clínicas. Uma vez que inicialmente não tinha a certeza sobre quais os alunos que iria escolher, não foi possível realizar entrevistas associadas a todos problemas resolvidos por Lara e Tomé de forma a melhor compreender os seus raciocínios. Por outro lado, e de forma a tornar mais rica a análise dos dados, penso que teria sido interessante questionar os alunos sobre as dificuldades sentidas na resolução dos problemas. Assim, conseguiria perceber se as dificuldades identificadas por mim de facto são sentidas pelos alunos e, se para além destas, existem outras que não consegui identificar mas que os alunos possam ter sentido, conduzindo, desta forma, a uma reflexão, por parte do aluno sobre o problema apresentado e o trabalho realizado. Deste modo, segundo Pinto (2003) "Uma maior implicação dos alunos na sua avaliação torna-os provavelmente mais empenhados também nas suas aprendizagens" (p. 8).

Ao longo das aulas em que implementei o meu projeto, percebi que para alguns alunos a resolução dos problemas se revelava uma tarefa de fácil resolução e por isso terminavam-na rapidamente. Por outro lado, outros alunos não refletiam sobre os seus resultados, apesar de lhes solicitar que o fizessem, e por isso entregavam-me as suas resoluções pouco tempo depois de as realizarem. Os que terminavam rapidamente os problemas ficavam algum tempo à espera que os outros os resolvessem, o que levava a alguma instabilidade na sala de aula, obrigando-me a atribuir outros trabalhos a esses alunos para que não perturbassem o bom funcionamento da aula. Toda esta situação leva a que algumas perguntas ressaltem na minha cabeça: Como é que conseguirei atender a todos os ritmos de aprendizagem dos alunos enquanto futura profissional? Como oferecer uma diferenciação pedagógica coesa nas turmas que irei acompanhar? Será que conseguirei executar tudo isto quando estiver sozinha numa sala com vinte crianças? Estas são questões para as quais não tenho ainda resposta e penso que só com a prática profissional poderei atender a todas estas dúvidas. Contudo acredito que é possível fazer uma diferenciação pedagógica nas turmas, sendo necessário existir um trabalho coeso por parte do professor para que tudo funcione de forma favorável a todos, uma vez que

> Diferenciar é, pois, romper com a pedagogia magistral – a mesma lição e os mesmos exercícios para todos e ao mesmo tempo – é, sobretudo uma maneira de pôr em funcionamento uma organização de trabalho que integre diferentes dispositivos didácticos, de forma a colocar cada aluno perante a situação mais favorável. (Perrenoud, 2001, p. 1)

Finalmente gostaria de mencionar, que na minha perspetiva, este projeto revelou-se para os alunos facilitador do desenvolvimento de novas estratégias. O apresentar um novo modelo de apoio ao cálculo permitiu que os alunos tivessem oportunidade de manipular esta representação e utilizar estratégias de cálculo que até então não utilizavam. Possibilitou, também, que alguns alunos começassem trabalhar com os números e as operações de forma flexível e estabelecendo relações entre eles.

Enquanto futura profissional, este projeto possibilitou que compreendesse que, de facto a aprendizagem da adição e subtração requer um trabalho de dedicação e reflexão por parte do professor uma vez que são as primeiras operações que as crianças têm contacto. Assim, cabe ao professor motivá-las para a aprendizagem das mesmas tendo como ponto de partida o conhecimento prévio das crianças adquirido no seu quotidiano. Neste sentido, a resolução de problemas assume um papel essencial na aprendizagem destas operações, pois são eles que proporcionam a atribuição de significado aos números através do contexto em que estão inseridos. Por isso, é também função do docente perceber quais os problemas mais adequados ao nível de aprendizagem dos alunos e que lhes possibilitarão o desenvolvimento de novas capacidades e competências matemáticas.

Por fim, termino esta reflexão convicta que este estudo me auxiliará enquanto futura profissional ao nível da tomada de decisões mais acertadas e refletidas em torno dos números e operações e, em particular, sobre as operações de adição e subtração.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: Um guia prático e crítico.* Porto: ASA.

Afonso, P., Conceição, A., Costa, F., Filipe, J., & Serrasqueiro, M. (2008). *Aprender Matemática nos Primeiros Anos - Algumas Propostas de Tarefas.* Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco.

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Lisboa: Universidade Aberta.

Almeida, C. S. (2006). *Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área.* Brasília: Universidade Católica de Brasília.

Anghileri, J. (2003). Issues in teaching multiplication and division. Em I. Thompson, *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 184-194). Buckingham: Open University Press.

Arends, R. I. (1995). *Aprender a Ensinar.* Lisboa: McGraw-Hill.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. Em M. Beishuizen, K. P. Gravemeijer, & E. C. Van Lieshout, *The role of contexts and models in the development of mathemetical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht: Utrecht University.

Beishuizen, M. (2003). The empty number line as a new model. Em I. Thompson, *Issues in teaching numeracy in primary shools* (pp. 157-168). Buckingham, UK: Open University Press.

Beishuizen, M. (2009). The empty number line as a new model. Em I. Thompson, *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools* (pp. 157–168). Open University Press.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa e Metas Curriculares. Matemática: Ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC.

Bobis, J., & Bobis, E. (2005). The empty number line: Making children's thinking visible. Em M. Coupland, J. Anderson, & T. Spencer, *Proceedings of 20th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers: Making Mathematics Vital* (pp. 66-72). Sydney, Australia.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (Novembro-Dezembro de 2011). Uma ‹lente› para analisar tarefas numéricas. *Educação e Matemática*, pp. 47-52.

Brocardo, J. (2011). *Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: começando no 1º ano e continuando até ao 12º ano.* Obtido em Fevereiro de 2014, de Associação de Professores de Matemática: http://www.apm.pt/files/_CP03_4e713771384fc.pdf

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. Em J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha, *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escola Editora.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I., Castro, J., Serrazina, L., . . . Ferreira, E. (2005). *Desenvolvendo o sentido de número - Materiais para o educador e para o professor do 1º ciclo.* Associação de Professores de Matemática.

Brocardo, J., Mendes, F., & Delgado, C. (2014). Entrevistas clínicas para estudar a flexibilidade no cálculo numérico. *Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (II): Olhares para uma realidade* (pp. 85-89). Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

Buys, K. (2008). Mental arithmetic. Em M. v. Heuvel-Panhuizen, *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da Investigação - Guia para auto-aprendizagem.* Lisboa: Universidade Aberta.

Carpenter, T., Franke, M., Jacobs, V., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29 (1),* 3-20.

Carvalho, R. (2011). Calcular de cabeça ou com a cabeça? *ProfMat - Associação de Professores de Matemática.* Lisboa.

Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008a). O sentido de número no início da aprendizagem. Em J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha, *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 117-134). Lisboa: Escolar Editora.

Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008b). *Sentido de número e organização de dados: textos de apoio para Educadores de Infância.* Lisboa: Ministério da Educação: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. Em *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 223-239). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Secção de Educação Matemática.

Costa, A. M., & Fonseca, L. (2009). *Os números na interface da Língua Portuguesa e da Matemática - Actas do XIXEIEM.* Vila Real: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática.* Coimbra: Edições Almedina.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática.* Coimbra: Edições Almedina.

Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J., & Vieira, S. (2009). *Investigação-Acção: metodologia preferencial nas práticas educativas.* Obtido em janeiro de 2015, de RepositóriUM: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10148/1/Investiga%C3%A7%C3%A3o_Ac%C3%A7%C3%A3o_Metodologias.PDF

Delgado, C. (2009). Os Números e as Operações no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Em *Educação e Matemática, n.º 105* (pp. 17-21).

Ferreira, E. (2008). A adição e a subtração no contexto do sentido de número. Em J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha, *Sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 135-157). Lisboa: Escolar Editora.

Ferreira, E. (2012). *O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade.* Lisboa: Universidade de Lisboa: Instituto de Educação.

Ferreira, E., Mendes, F., & Pratas, M. (Novembro-Dezembro de 2005). Resolver problemas de subtração. *Educação e Matemática*, pp. 30-35.

Fonseca, L. (2014). Resolução de problemas de Matemática: regresso ao passado. Em *Educação e Matemática, nº 130* (pp. 17-21).

Fonseca, L. M. (1995). *Três futuros professores perante a resolução de problemas: concepções e processos utilizados.* Minho: Associação de Professores de Matemática.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematics at work: Constructing number sense, addition and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics, 51(1-2),* 41-69.

Gonçalves, A. C. (2008). *Desenvolvimento do sentido de número num contexto de resolução de problemas em alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico.* Tese de Mestrado em Educação - Didáctica da Matemática: Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Departamento de Educação.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (1996). The "Ups" and "Downs" of subtraction: Young children's additive and subtractive mental strategies for solutions of subtraction word problems and algorithmic exercises. Em P. Clarkson, *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 261-268). Melbourne: Deakin University Press.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. Em L. J. Morrow, & K. M. J., *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 130-140). Reston, VA: NCTM.

Kilpatrick, J. (2014). Como vamos de resolução de problemas? (Henrique Magalhães, Entrevistador). Em *Educação e Matemática, n.º 130* (pp. 3-9).

Leitão, A. P. (2000/2002). *As dificuldades dos alunos do 6.º ano na resolução de problemas.* Lisboa: Instituto Superior de Psicologia Aplicada.

Long, M., & Ben-Hurt, M. (Fevereiro de 1991). Informação sobre Aprendizagem através de Entrevistas Clínicas. *Arithmetic Teacher*, pp. 157-167.

Lopes, A., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J., Oliveira, M., Salgado, M., . . . Graça, T. (1999). *Actividades matemáticas na sala de aula.* Lisboa: Texto Editora.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathmatics, 12(3),* pp. 2-8 e 44.

ME. (1998). *Organização Curricular e Programas.* Lisboa: Editorial do Ministério de Educação.

ME. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

ME. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática - Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Mendes, M. d. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo.* Tese de Doutoramento em Educação - Didática da Matemática.

Morais, C. M. (2011). *O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.

Moreira, C. D. (2007). *Teorias e Práticas de Investigação.* Lisboa: Instituto Superior de Ciências Sociais e Políticas.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Noteboom, A., Boklove, J., & Nelissen, J. (2001). Glossary part I. Em M. Heuvel-Panhuizen, *Children learn mathematics* (pp. 89-91). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).

Nunes, T., Campos, T., Magina, S., & Bryant, P. (2001). *Introdução à educação Matemática - Os números e as operações.* São Paulo: Proem Ed.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. Em *Investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico.* Lisboa: Lidel.

Perrenoud, P. (2001). Conceber e desenvolver dispositivos de diferenciação à volta das competências. Em *Formação de professores: compilações.* Setúbal: Escola Superior de Educação de Setúbal.

Pinto, J. (2003). A avaliação e a aprendizagem: da neutralidade técnica à intencionalidade pedagógica. Em *Educação e Matemática, n.º 74* (pp. 3-9).

Pires, M. I. (1992). *Processos de resolução de problemas: Uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do ensino primário.* Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. Em *Educação e Matemática, nº 105* (pp. 2-6).

Ponte, J. P., & Serrazina, M. d. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2006). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., . . . Martins, M. E. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC.

Santos, L., Pinto, J., Rio, F., Pinto, F. L., Varandas, J. M., Moreirinha, O., . . . Bondoso, T. (2010). *Avaliar para Aprender. Relatos de Expriências do Pré-escolar ao Ensino Secundário.* Porto: Porto Editora.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. Em J. Hiebert, & M. Behr, *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, VA: NCTM.

Thompson, I. (2003). Written methods of calculation. Em I. Thompson, *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 169-183). Buckingham, U.K.: Open University Press.

Thompson, I., & Smith, F. (1999). *Mental calculation strategies for addition and subtraction of 2-digit numbers.* Departament of Education, University of Newcastle upon Tyne.

Treffers, A. (2001). Grade 1 (and 2) - Calculation up to 20. Em M. V. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics* (pp. 43-60). Netherlands: Freudenthal Institute Utrecht University & National Institute for Curriculum Development.

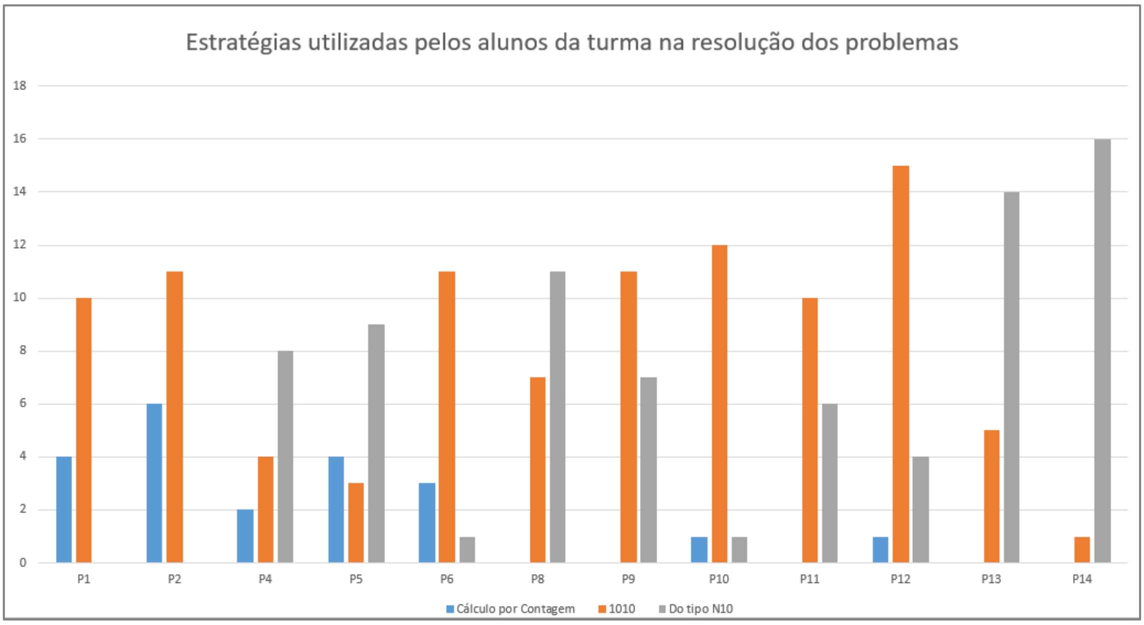
Turkel, S., & Newman, C. M. (1º trimestre de 1993). Qual é o teu número? - Desenvolvendo o sentido de número. *Educação e Matemática nº 25,* pp. 31-33.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas . Em P. P. (coord.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel.

Veiga, L. (1996). *A resolução de problemas, o raciocíonio e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico - Três estudos de caso.* Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências - Universidade de Lisboa.

Apêndices

Apêndice 1 – Gráfico com as estratégias utilizadas pelos alunos da turma na resolução dos problemas



Apêndice 2 – Gráfico com a relação entre o sentido e a estratégia utilizada nos problemas de subtração