Números e álgebra: desenvolvimento curricular

Joana Brocardo, Catarina Delgado, Fátima Mendes (ESE de Setúbal)
Isabel Rocha (ESE de Leiria)
Lurdes Serrazina (ESE de Lisboa)

Tomemos como ponto inicial de reflexão a afirmação de Fuson (2003) de que, tanto nos Estados Unidos como no Canadá, o que muitas pessoas esperam do currículo de matemática ao nível elementar é que possibilite o domínio de técnicas de cálculo. Esta perspectiva, que nos parece generalizável a vários países, tem marcado muitas discussões de carácter curricular sobre o tema números e álgebra. Em grande parte, um aspecto essencial para marcar direcções de mudança curriculares tem sido o debate sobre o foco a dar às técnicas: até que ponto valorizar o domínio de técnicas de cálculo numérico e algébrico? Como integrar o trabalho em torno do domínio de técnicas de cálculo com o desenvolvimento de capacidades como as de resolver problemas ou de criticar ideias e argumentar?

Outro aspecto que marca claramente um repensar de opções curriculares é a evolução tecnológica. Qual o papel dos algoritmos tradicionais de cálculo num contexto em que é inquestionável o fácil acesso de todos à calculadora? Que opções curriculares devem ser tomadas de modo a tirar partido das potencialidades gráficas e algébricas das calculadoras e dos computadores?

Finalmente, não podemos esquecer outros factores que influenciam o currículo nomeadamente os que dizem respeito ao impacto do contexto social, especialmente significativo nos dias de hoje. Como é salientado por NCTM (2000) "a necessidade de perceber e de ser capaz de usar a matemática na vida de todos os dias e no local de trabalho nunca foi maior e continuará a aumentar" (p. 4). Na sociedade de hoje é importante, por exemplo, compreender os números e as operações e ser capaz de analisar criticamente informação numérica. É igualmente importante saber analisar situações que envolvem regularidades, tabelas, equações e ser capaz de usar conhecimentos numéricos e algébricos para resolver problemas. De que modo se poderá organizar um currículo que, no que diz respeito aos números e à álgebra, consiga dar resposta às solicitações colocadas pelo mundo de hoje? Em particular, como aliar o domínio do cálculo numérico e algébrico com a sua utilização na análise e resolução de situações problemáticas?

Neste texto propomo-nos contribuir para a discussão das questões e aspectos referidos anteriormente. Começamos por analisar a evolução curricular no nosso país a partir dos anos 80. Em seguida, procuramos contextualizar e discutir algumas questões curriculares que consideramos especialmente significativas quando se pensa nos Números e na Álgebra. Finalmente, organizamos uma discussão centrada na análise de alguns estudos empíricos portugueses que incluem aspectos ligados ao currículo no domínio dos Números e da Álgebra.

Os números e a álgebra no currículo de matemática

Discutir o papel que determinado tema tem vindo a ocupar no currículo de matemática é uma tarefa cuja complexidade depende, em grande parte, de se incluírem e analisarem dados relativos a diferentes níveis de currículo. Neste ponto iremos centrar a nossa atenção no currículo *enunciado*[1] e nos documentos e discussões que consideramos estarem relacionados com ele. No entanto, não prescindimos de referir alguns dados relativos ao currículo *implementado* e ao *adquirido* que nos parecem importantes para clarificar o modo como tem sido encarado, no currículo oficial, o trabalho em torno dos números e da álgebra.

Dos anos 80 até hoje: marcos de evolução curricular em Portugal

No final dos anos 80 viveu-se no nosso país um período de grande debate sobre as perspectivas curriculares para o ensino da Matemática. Contestavam-se os programas marcados pela Matemática moderna em que se sobrevalorizava a Lógica e as estruturas abstractas da Álgebra e em que se reduzia a Geometria. A preponderância do formalismo e do cálculo tanto no currículo enunciado como nos currículos implementados e adquiridos foram, talvez, os aspectos mais criticados:

[1] ICMI (1986) considera três níveis de currículo: o currículo *enunciado* (relativo aos documentos oficiais e que supostamente traduzem as intenções dos autores), o currículo *implementado* (que diz respeito ao modo como se concretizam as indicações oficiais e o currículo *adquirido* (relativo aquilo que de facto os alunos aprendem).

> Com muitas raras excepções, o essencial da aprendizagem da Matemática, consiste actualmente em *dominar* algumas questões formais da linguagem e das estruturas matemáticas e, sobretudo, umas quantas técnicas destinadas a resolver exercícios-tipo (...) o processo de aprendizagem, do ponto de vista do aluno, reduz-se basicamente à repetição dos mecanismos transmitidos pelo professor (APM, 1988, p.9).

Nesta altura, parecia generalizada uma prática lectiva em que quase se identifica a Matemática com cálculo. Nos primeiros anos dominava uma aprendizagem centrada na prática de algoritmos. No 2º ciclo introduzia-se o cálculo com números fraccionários, aspecto a que se continuará a dar bastante ênfase nos anos de escolaridade seguintes. O cálculo algébrico domina no 3º ciclo. Embora já não se exija a resolução das expressões mais *quilométricas* ainda se despende muito tempo no treino do cálculo pelo cálculo.

Criticando esta realidade inicia-se no nosso país um movimento de renovação do ensino da Matemática que dinamiza várias iniciativas. Uma delas, a criação da Associação de Professores de Matemática (APM) em 1986, foi fundamental para permitir que um número crescente de professores discutissem vários aspectos relacionados com o currículo de Matemática. É, aliás, por iniciativa de um grupo de professores fortemente ligados à APM que se organiza o documento "Renovação do Currículo de Matemática" (APM, 1988) que perspectiva as principais orientações curriculares dos anos 80. A importância central da resolução de problemas e o uso das calculadoras e computadores são recomendações centrais deste documento e que questionam fortemente a prática de *cálculo pelo cálculo* que dominava até então.

No início da década de 90 foi implementada a reforma do Sistema Educativo que englobou novos currículos em todas as disciplinas. O currículo de Matemática para o ensino básico, generalizado em 1991, fazendo eco das ideias defendidas nos anos 80, destaca, por exemplo, a importância da resolução de problemas, da utilização da calculadora, do computador e de vários materiais manipuláveis.

Embora considerado como um avanço significativo relativamente ao currículo anterior, identifica-se no conjunto de documentos de 1991 uma falta de articulação entre as finalidades, objectivos, metodologias e conteúdos (APM, 1990) podendo mesmo dizer-se que "o currículo vai-se fixando nos conteúdos da Matemática e progressivamente ganhando uma natureza menos aberta e flexível" (Silva *et al.,* 1999, p. 73).

Realizaram-se poucos estudos que incidissem na fase de generalização da reforma dos anos 90 (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). A falta de dados que permitissem traçar um quadro da situação do ensino da Matemática a nível nacional foi uma das motivações que originou a realização do estudo *Matemática 2001* (APM, 1998). Uma das questões nele equacionadas foi: "O que mudou nos últimos anos? Até que ponto as novas orientações curriculares estão a ser seguidas?". Os dados recolhidos apontam no sentido de que muitas das orientações curriculares têm pouca expressão na prática lectiva: a maioria dos professores usa com pouca frequência os materiais manipuláveis, os jogos didácticos ou o computador; os exercícios e a exposição pelo professor são as situações de trabalho predominantes.

Esta correlação aparentemente fraca entre o currículo *enunciado* e o *implementado* tem várias explicações. Uma delas, a de considerar fundamental envolver o professor no processo de definição e desenvolvimento curricular, foi uma das justificações para desencadear um novo movimento de renovação curricular: a "Reflexão participada sobre o currículo", iniciado em 1996 e continuado pelo projecto "Gestão flexível do currículo" e que culmina com publicação, no final do ano 2001, do *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais* (ME-DEB, 2001). A formulação das orientações curriculares em termos de competências, que integram conhecimentos, capacidades e atitudes e podem ser entendidas com saber em *acção* ou em *uso,* é um dos aspectos que mais o distingue dos documentos publicados em 1991. Relacionada também com o cálculo destaca-se, neste documento, uma indicação central:

> A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo (p. 58).

O documento de 2001 afirma-se como uma referência central para o desenvolvimento do currículo ao nível do Ensino Básico e como enquadrando os programas dos anos 90. No Ensino Secundário o programa do início dos anos 90 é reformulado em 1996 e, em 2004, na sequência da reorganização deste nível de ensino, implementam-se novos programas de Matemática. Nestes programas salienta-se, por exemplo, uma visão de integração do cálculo nos temas do currículo e uma forte relação entre a análise de situações do ponto de vista algébrico e do ponto de vista gráfico.

Os Números e a Álgebra: o que mudou

No ponto anterior caracterizámos, brevemente, a evolução curricular nos últimos 15 anos. Embora referindo aspectos relativos aos Números e Álgebra, eles foram contextualizados num quadro geral de evolução curricular. Neste ponto procuramos centrar a discussão em torno dos Números e da Álgebra discutindo sinais de evolução ao nível do currículo enunciado, implementado e adquirido.

Analisando os currículos enunciados é muito fácil identificar sinais de evolução ao nível do estilo de currículo. De um breve enunciado de conteúdos, passou-se para a elaboração de documentos mais completos que incluíam também finalidades, objectivos gerais e específicos, indicações metodológicas e indicações gerais sobre a avaliação. No entanto, torna-se difícil fazer afirmações gerais que comparem aspectos como os conteúdos ou as indicações metodológicas e que englobem os sucessivos programas oficiais.

Uma das ideias que talvez possa parecer plausível é a de que o que evoluiu significativamente ao nível do currículo enunciado foram as indicações metodológicas. Será assim? Consideramos que responder sim a esta questão é assumir uma posição demasiado simplista. Em todos os programas, há, por exemplo uma referência explícita à resolução de problemas e à exploração de situações da vida de todos os dias. Vejamos dois exemplos:

> O professor terá sempre presente que a aritmética está intimamente ligada à vida, pois quase todas os nossos actos são condicionados pela intervenção dos números, A escola não pode alhear-se desta realidade. Por isso, o ensino desta disciplina deve ser feito em conformidade com situações vividas pelas crianças, quer no ambiente familiar quer no meio social. (...)
> Os programas de todas as classes terminam com a rubrica “Problemas”. Não se trata de uma razão de ordem. Pelo contrário: sempre o ensino da aritmética deve ser feito por meio de problemas convenientemente preparados e oportunamente tratados. (...)
> Um problema representa normalmente para a inteligência da criança uma real dificuldade. Importa porém, que esta dificuldade não provenha de obscuridade da expressão. Na resolução de problemas dê-se, quanto possível, preferência ao cálculo mental sobre o cálculo escrito (programa do ensino primário, 1960).

> Pretende-se que o aluno utilize a Matemática na resolução de problemas correntes (...)
> Sempre que possível, o processo de aprendizagem socorre-se ou apoia-se em situações da vida concreta dos alunos sobre as quais se faz um esforço adequado de matematização, daí partindo para a elaboração de conceitos ou relações que estejam em causa (programa do 8º ano, 1983).

O mesmo se passa com a referência à importância do trabalho independente dos alunos ou ao uso de materiais: são referências que podemos ver nos vários programas. No entanto, também não poderemos dizer que nada mudou nem que não houve uma evolução significativa. A utilização da calculadora é a grande *revolução*: no Ensino Secundário é obrigatório o uso da calculadora gráfica; no Ensino Básico é recomendada a utilização e calculadoras. Mas o que muda radicalmente é que os algoritmos, os procedimentos de manipulação algébrica, a elaboração de gráficos não se tornam um fim em si mesmos. A calculadora liberta os alunos de cálculos repetitivos e fastidiosos permitindo-lhes concentrarem-se na compreensão do seu significado e na sua interpretação em contexto. Mas, para além da calculadora, vários outros aspectos têm evoluído: a referência ao uso dos materiais manipuláveis é mais concretizada, a importância de ligar os cálculos à sua utilização significativa é cada vez mais reforçada (grande parte das técnicas de cálculo surgem a propósito de temas que requerem a sua utilização e não isoladamente, como acontecia nos programas mais antigos), a referência ao desenvolvimento do raciocínio indutivo é sublinhada (nos programas mais antigos apenas se referia o raciocínio dedutivo).

Relativamente aos conteúdos poderemos ser tentados a pensar que temas abordados nos programas mais antigos tendem a ser abordados mais tarde nos programas mais recentes. Será assim? Provavelmente ao nível da opinião pública esta ideia, aliada à de que hoje o que se *ensina* é uma simplificação do que se *ensinava* há uns anos atrás, tem uma certa aceitação. No entanto está longe da verdade. Nos currículos mais recentes passou a dar-se um maior realce a aspectos pouco estudados anteriormente (é o que acontece, por exemplo, com o estudo dos padrões). Também se abandonou o estudo de alguns temas cuja importância se foi desvalorizando (o trabalho com números complexos referidos às horas, minutos e segundos). Finalmente, nos dias de hoje, não apostar numa simplificação do trabalho em torno dos cálculos rotineiros seria uma opção completamente absurda. Mas isto não significa uma simplificação a nível geral. Pelo contrário, nos currículos mais recentes, defende-se a importância de analisar situações complexas, o que, está longe de corresponder a qualquer simplificação.

Embora estando conscientes de que se trata de uma afirmação polémica somos tentadas a afirmar que existe um *core curriculum* algébrico e numérico que tem estado presente nos vários currículos de Matemática. Ele integra não só os conteúdos como as indicações metodológicas. O que evoluiu centralmente nos últimos anos foi a valorização da *integração*: salienta-se o conceito de saber em *acção* que integra conhecimentos, capacidades e atitudes; salienta-se o modo integrado como o professor deve trabalhar com os seus alunos de modo a conseguir promover o desenvolvimento do conhecimento em *acção*. Não basta os alunos dominarem o cálculo, é indispensável saberem usá-lo na resolução de problemas. Não basta o professor explicar a matéria, é indispensável que proporcione ao alunos a possibilidade de explorar autonomamente situações significativas e de natureza diversificada.

Pensar em possíveis sinais de evolução ao nível do currículo implementado não é uma tarefa fácil. Como já foi referido anteriormente existe pouca informação sobre este aspecto. Algumas conclusões do relatório "Matemática 2001" (APM,) não indiciam grandes evoluções: a prática de exercícios e a exposição da matéria pelo professor ainda predominam. Mas não podemos ignorar um conjunto de trabalhos de inovação curricular que têm sido desenvolvidos no nosso país e que serão referidos na terceira parte deste texto.

Finalmente, relativamente ao currículo *adquirido* os resultados das provas de aferição e do estudo Internacional PISA revelam que não é nas tarefas mais rotineiras que os alunos têm piores resultados, mas sim nas tarefas mais abertas que implicam um raciocínio flexível e espírito crítico. Se tomarmos os resultados do PISA 2000 podemos ver que embora ao nível do cálculo os resultados dos nossos alunos não sejam brilhantes, se compararmos os resultados portugueses com os dos outros países, temos um índice de sucesso que nos situa na média ou mesmo acima dela. No entanto, ao nível das conexões e integração para a resolução de problemas o desempenho dos nossos alunos situa-se bastante abaixo da média (Ramalho, 2002). Esta tendência é confirmada no Pisa 2003 especialmente centrado na resolução de problemas: quase 25% dos alunos não atinge o nível 1 de proficiência[2] e só cerca de 10% dos alunos atingem o nível 3 [3] na resolução de problemas.

---

[2] Abaixo do nível 1, os estudantes conseguem, na melhor das hipóteses, lidar com problemas evidentes que incluem tarefas estruturadas e que requrem respostas baseadas em factos ou observações simples (2004, Gave)

[3] Nível 3 – estudantes que resovem o problema reflectindo e comunicando (2004, Gave)

OS NÚMEROS E A ÁLGEBRA: PERSPECTIVAS CURRICULARES PARA O SÉC. XXI

Os anos 80 e o princípio do anos 90 foram ricos ao nível do debate curricular em matemática. No entanto, a viragem para o século XXI também ficou marcada por algumas iniciativas de reflexão curricular importantes. A nível internacional destaca-se a publicação *Principles and Standards for School Mathematics* (*Standards 2000*), (NCTM, 2000). Relativamente aos números e operações este documento identifica três objectivos: (1) compreender os números, modos de os representar, relações entre os números e os conjuntos numéricos; (2) compreender o significado das operações e o modo como se relacionam umas com as outras e (3) calcular fluentemente e fazer estimativas razoáveis.

Relativamente a cada um destes objectivos perspectiva-se brevemente o modo como eles devem ser entendidos ao longo de toda a escolaridade básica e secundária. Destacamos, relativamente ao objectivo (1) um aspecto que nos parece corresponder a indicações que diferem das do currículo português e que diz respeito aos números fraccionários. Considera-se que as crianças pequenas, devem, a partir de contextos apropriados, conseguir compreender uma fracção como uma divisão de números e que a partir do 3º ano podem aprender a comparar fracções com fracções de referência (*benchmarks*, no original) como o 1/2 e a decidir sobre a ordem de grandeza de somas como 1/2 + 3/8 - "deve ser menor que 1 porque cada parcela é menor ou igual a 1/2", p. 33. Relativamente ao objectivos (3) destacamos dois aspectos. Um primeiro, diz respeito à ênfase colocada no desenvolvimento da capacidade, de decidir se a resolução de um problema requer uma estimativa, um resultado aproximado com determinado grau de precisão ou um resultado exacto. Um segundo, diz respeito à introdução dos algoritmos. Defende-se que os alunos desenvolvam estratégias de cálculo flexíveis chamando a atenção para que:

> "A experiência sugere que em turmas em que se dá ênfase ao desenvolvimento e discussão de estratégias, surgem naturalmente ou podem ser introduzidos pelo professor vários algoritmos "*standard*". O que é importante é que os alunos consigam calcular fluentemente – devem ter métodos eficazes e precisos que se apoiem na compreensão dos números e das operações." (p. 35)

No que diz respeito à álgebra o *Standards 2000* apontam quatro objectivos para o currículo de matemática desde a educação de infância até ao 12º ano: (1) compreender padrões, relações e funções; (2) representar e analisar situações; (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (4) analisar mudança em vários contextos. Uma ideia que consideramos importante destacar é que, neste documento, se defende que as experiências algébricas devem fazer parte das experiências de aprendizagem desde a educação de infância, pois serão um importante precursor para o estudo posterior mais formalizado da álgebra. Deste modo, ser capaz de reconhecer e continuar padrões começa na educação de infância e desenvolve-se ao longo do 1º e 2º ciclos caminhando no sentido do estabelecimento de generalizações.

No nosso país, no início do séc. XXI foi publicado o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001). Já referimos anteriormente alguns aspectos relativos a este documento. Gostaríamos apenas de salientar que a formulação que ele adopta permite perceber grandes linhas que estão em consonância com o documento publicado pelo NCTM (NCTM, 2000). Por exemplo, reconhece-se a importância de decidir se uma situação exige uma estimativa ou um valor exacto. Também se considera que desde o 1º ciclo os alunos devem procurar padrões e regularidades e formular generalizações. Este documento corresponde a uma afirmação organizada das competências que são consideradas fundamentais e, por isso, não está definido para aspectos mais específicos. Sendo assim, se se quiser perceber, por exemplo, como se vê a introdução das fracções ou dos algoritmos, teremos que consultar os programas dos anos 90, os quais, em relação a estes aspectos têm perspectivas diferentes da apontada pelos Standards 2000.

Os números e operações: polémicas curriculares

Neste ponto procuramos situar a discussão em torno de algumas opções curriculares que consideramos revestirem-se de alguma polémica.

Aprendizagens iniciais: o papel da contagem, o valor de posição e os algoritmos

Anghileri (2001), referindo-se aos currículos holandeses e ingleses, salienta que apesar de uma aparente uniformidade foram emergindo diferenças importantes ao nível das opções curriculares relativas às primeiras aprendizagens numéricas. Refere, em primeiro lugar, o papel da contagem para desenvolver estratégias de cálculo. Em Inglaterra, tal como consideramos suceder no nosso país, contar é visto como uma actividade mecânica, a que não se atribui muito significado e cujo uso para calcular é considerado 'primitivo'. Pelo contrário, na perspectiva curricular holandesa é com base na contagem que se promove a re-invenção das estratégias informais de cálculo. Mais concretamente, o que quer isto dizer? Tomemos como exemplo o que se passa em Portugal. A contagem tende a ser usada para apoiar a resolução de situações do tipo "conta de 5 em 5" ou para explicar procedimentos ligados à introdução de algumas operações (por exemplo, numa fase inicial de trabalho em torno da subtracção, os alunos contam para trás, de um em um). No entanto, para resolver 76 – 27 pretende-se que os alunos usem um cálculo formal.

Um outro aspecto que esta autora refere diz respeito ao valor de posição. Em Inglaterra ele é visto como um princípio organizador da matemática muito importante e que é a base de vários métodos escritos de cálculo, em particular, do algoritmo tradicional. Esta mesma perspectiva é seguida no currículo português. A decomposição do número em dezenas e unidades começa no 1º ano e é nesta decomposição que assenta o desenvolvimento do cálculo. A perspectiva holandesa, com refere Anghileri (2001), é bastante diferente. No currículo não é feita nenhuma referência explícita ao valor de posição. Promove-se uma "abordagem mais holística ao número, com o desenvolvimento de estratégias de cálculo escrito que conservam, ao longo dos cálculos, os números inteiros" (p. 6). Ao longo dos cálculos os números podem ser decompostos em dezenas e unidades. No entanto, o foco não é no valor de posição mas no conceito de *multi-unit*, em que o "dez" e as unidades são diferentes categorias de unidades que se podem relacionar: o "dez" é, ao mesmo tempo, 10 unidades.

Finalmente, a importância dos algoritmos, é um dos aspecto mais debatidos quando se fala do currículo de Matemática dos primeiros anos. Vários estudos empíricos têm vido a questionar a sua importância argumentando que os alunos perdem facilmente a noção da ordem de grandeza dos números envolvidos, pensando apenas nos 'números por coluna'. Por exemplo, Kamii e Dominick (1998) propuseram a três grupos de alunos problemas de adição/subtracção: o "grupo dos não algoritmos" (não conheciam os algoritmos), o "grupo dos algoritmos" (tinham aprendido na escola os algoritmos) e um terceiro grupo que tinha aprendido alguns algoritmos em casa, mas não na escola. A comparação dos resultados permitiu concluir que foi o "grupo dos não algoritmos" que teve, na globalidade, a maior percentagem de respostas correctas e que os alunos do "grupo dos algoritmos" que erraram o resultado, apresentaram respostas bem menos razoáveis do que as respostas incorrectas dadas pelos alunos do "grupo dos não algoritmos".

Em vários países, como por exemplo em Inglaterra, embora recomendando que não se introduzam os algoritmos demasiado cedo, continua a exigir-se o domínio dos algoritmos tradicionais (Anghileri, 2001). Em Portugal, consideramos que as recomendações curriculares oficiais prevêem o ensino dos algoritmos demasiado cedo não dando espaço aos alunos de desenvolverem as suas estratégias informais de cálculo.

Contribuindo também para a desvalorização de uma aprendizagem precoce dos algoritmos vários estudos têm vindo a apoiar a ideia de que os alunos podem "actuar como os matemáticos no passado e reinventar procedimentos e algoritmos que irão contribuir para desenvolver a sua compreensão matemática"(Gravemeijer e Galen, 2003, p. 121). Estes autores salientam, no entanto, que os algoritmos são uma componente essencial da matemática. A grande questão coloca-se ao nível de introduzir os algoritmos aos alunos: não podem ser apresentados de uma forma pronta. Ensinar aos alunos algoritmos que não compreendem e que não foram naturalmente desenvolvendo, tem potencialidades muito limitadas e, sobretudo, vinca o uso de procedimentos isolados que não contribuem para a conhecimento matemático global dos alunos. (Fosnot e Dolk , 2001; Gravemeijer e Galen, 2003).

Embora em vários publicações 'oficiais' se perspectivem opções curriculares viradas, por exemplo, para um trabalho inicial em torno dos números que proporcione o desenvolvimento de estratégias informais de cálculo e se enfatize a importância de não formalizar cedo de mais, não será importante estabelecer de forma clara linhas concretas de desenvolvimento do sentido do número? Mais em geral, relativamente ao número e às operações quais as indicações curriculares que consideramos desadequadas? Qual deve ser o sentido da mudança?

Materiais manipuláveis e calculadora

No currículo português, tal como em documentos curriculares como os *Standards* 2000 (NCTM, 2000), recomenda-se a utilização de vários tipos de materiais. No contexto dos números e operações refere-se sobretudo o uso da calculadora e de materiais manipuláveis como os cubos de encaixar, o MAB ou o ábaco.

Ao nível das orientações curriculares oficiais a utilização da calculadora é uma realidade. Esta opção tem sido criticada tanto ao nível da opinião publica como ao nível, por exemplo, da Comissão para a Promoção do Estudo da Matemática e das Ciências que, em 2003, recomendou a limitação do uso da calculadora em todos os níveis de ensino. A investigação, como será desenvolvido no ponto seguinte, tem vindo a reforçar a ideia de que tirar partido da calculadora, permite desenvolver competências importantes ligadas à resolução de problemas, à análise de padrões e regularidades numéricas. Sendo assim, o que é importante ao nível do ensino da matemática, é tirar partido das inúmeras potencialidades da calculadora e usá-las no sentido de desenvolver a competência numérica dos alunos.

Relativamente ao uso dos materiais manipuláveis como o MAB ou o ábaco encontramos igualmente a recomendação do seu uso. No entanto, sobre este aspecto, consideramos existir uma insuficiente reflexão sobre as 'intencionalidades' que o seu uso pode veicular. Por exemplo, autores como Gravemeijer (1994) e Klein (1999) salientam que analisar as potencialidades dos materiais manipuláveis na formação do conceito de número e de operação não é fácil. Sobretudo, a pertinência do seu uso em determinada etapa da aprendizagem, está intimamente ligada ao tipo de competências que se quer desenvolver. Por exemplo, usar material indiferenciado de contagem vinca o nível da contagem mais *baixo*: de 1 em 1. Pelo contrário, usar um colar com pérolas de duas cores enfiadas de 5 em 5, vinca o uso da base 5 e 10 para apoiar a contagem. De igual modo, a utilização do MAB vinca a decomposição numérica em unidades, dezenas, centenas e milhares. Quando se quer que os alunos desenvolvam estratégias de cálculo flexíveis, veicular sempre o recurso a uma decomposição em unidades, dezenas e centenas, é, no mínimo, limitador.

Embora o currículo oficial recomende a utilização dos materiais manipuláveis e da calculadora consideramos que este é um primeiro passo no aprofundamento das potencialidades e limitações destes materiais. Várias questões, dizendo respeito a aspectos menos gerais, serão importantes discutir. Por exemplo: de que modo perspectivar a utilização da calculadora numa fase em que os alunos realizam as primeiras aprendizagens numéricas? Como compatibilizar o desenvolvimento de técnicas de cálculo e o uso da calculadora? Qual as estratégias de cálculo potencializadas pelos diferentes tipos de materiais manipuláveis?

Álgebra: alguns aspectos curriculares

Neste ponto procuramos focar um olhar sobre algumas perspectivas curriculares em torno da Álgebra. Começamos por reflectir sobre modos de ligar os Números e a Álgebra. Em seguida analisamos características de tarefas algébricas e, finalmente, fazemos uma breve referência ao uso das tecnologias.

Algebrizar os números

Podem gerar-se actividades algébricas partindo de actividades numéricas, transformando problemas com uma resposta numérica simples em outros onde há espaço para construir padrões, conjecturar, generalizar e justificar factos e relações matemáticas. A variação da forma como se apresenta um problema pode conduzir a que um problema aritmético simples se transforme numa questão algébrica. Por exemplo, o problema "dos apertos de mão", é usualmente colocado aos alunos dos primeiros anos, como uma problema de resposta simples: "Quantos apertos de mão serão dados se cada um do teu grupo cumprimentar todos os outros uma vez?" Os alunos podem experimentar dar os apertos de mão ou podem fazer o desenho para chegar à resposta. *Algebrizar* este problema consiste em ir alterando o número de pessoas no grupo, de modo que os alunos obtenham um conjunto de dados que tenha um padrão matemático.

Uma forma de explorar esta tarefa é colocar uma questão aos alunos para um grupo cujo tamanho seja suficientemente grande que não possam (ou não queiram) modelar o problema e escrever todas as parcelas e somá-las. Por exemplo, para 100 pessoas, os alunos não podem simplesmente fazer uma soma, têm de identificar um padrão e estabelecer as relações entre os vários números de apertos de mão a partir dos do seu grupo (*uso algébrico dos números*), podendo estabelecer uma conjectura que descreve o que é verdade sobre o número de apertos de mão para um grupo de qualquer tamanho. Quando a sua conjectura é suportada por suficiente evidência, a conjectura torna-se uma *generalização*, ou uma afirmação que se aplica a múltiplos casos específicos.

Blanton e Kaput (2003) apresentam um exemplo em que um professor na sala de aula pediu a um aluno para verificar se a soma de 5 e 7 é par ou ímpar:

> Prof. Como chegaste lá?
> João: Juntei 5 com 7 e olhei para ali (indicando uma lista de números pares e números ímpares na parede) e vi que era par.
> Prof. E se for 45 678 mais 85 631? É par ou ímpar?
> Inês. Ímpar.
> Prof. Porquê?
> Inês. Porque 8 e 1 é par e ímpar, e par e ímpar é ímpar.

Os alunos nesta turma tinham já discutido o resultado de adicionar números pares e ímpares. Utilizando números pares e ímpares suficientemente grandes, o professor fez com que os alunos não calculassem a soma, forçando-os a pensar sobre as propriedades dos números. Inês sabia que bastava apenas considerar o último dígito dos dois números e não necessitava de calcular a soma. De facto, ela nem sequer calculou 8+1. Simplesmente notou que 8 é par e 1 é ímpar, depois usou a generalização que "par+ímpar = ímpar". Aqueles autores referem que cabe ao professor explorar as oportunidades para envolver os alunos em generalizações, tornando-as mais explícitas.

Características das tarefas

Como já foi referido, a Álgebra pode construir-se a partir das experiências dos alunos com números. A análise de dados e a Geometria são também importantes no desenvolvimento do pensamento algébrico. Os alunos podem recolher dados e procurar padrões nos dados, mas nem todos os problemas permitem uma generalização, para isso têm que:

(1) permitir que os alunos encontrem um número para diferentes casos antes de construírem uma regra geral. Esta progressão ajuda a que identifiquem quais os factores que permanecem os mesmos e quais os que variam;

(2) exigir que os alunos encontrem o resultado para um pequeno número, aumentando-o até chegar a um suficientemente grande que os obrigue a libertarem-se das suas estratégias de desenho e de contagem caminhando no sentido de encontrar a regra geral que existe na relação.

Uma das vantagens de generalizar situações numéricas é que as variáveis representam realmente quantidades a variar (em oposição à visão muitas vezes apresentada de uma variável como um simples valor desconhecido numa equação, por exemplo 2x+3=11). A introdução da notação formal pode ajudar os alunos a ver os símbolos algébricos como representando quantidades a variar. Para Lannin (2003), generalizar situações numéricas dá aos alunos uma oportunidade de se envolverem em discussões sobre as ideias matemáticas importantes.

Ainda em relação às características das tarefas que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico, Bay-Williams (2001) refere que os alunos podem construir tabelas e gráficos com padrões geométricos e retirar conclusões, mencionando ainda que os padrões e gráficos devem ser representados numa variedade de formas. Para aquele autor, palavras, tabelas, gráficos, símbolos e diagramas podem todos ser usados para representar padrões e funções. Incluir várias destas formas na mesma exploração ajuda os alunos a ver relações entre elas e mover-se de modo flexível entre as diferentes formas. Como para alguns alunos umas formas de representar fazem mais sentido que outras, usar diferentes representações ajuda a que mais alunos compreendam as ideias apresentadas.

O modo como as questões são apresentadas numa dada tarefa pode determinar uma actividade aritmética ou algébrica. Segundo Usiskin (1997) álgebra é uma linguagem que tem cinco aspectos principais: (1) termos desconhecidos, (2) fórmulas, (3) padrões generalizados, (4) *placeholders* e (5) relações.

1. Quando fazemos perguntas do tipo:

“Qual é o número que quando adicionado a 3 dá 7?

Preenche o espaço em branco: 3 + __ = 7

Resolve: $3 + x = 7$”

estamos a referirmo-nos a termos desconhecidos.

2. Fórmulas

Se temos a fórmula para a área de um rectângulo, $A= cl$, e pedimos aos alunos para encontrar A quando $c = 5$ e $l = 7$, estamos a fazer álgebra. Quando temos 5 x 7 = n e queremos saber qual é o n, não é claro que estejamos a fazer álgebra. Usiskin, refere que depende da pergunta. Se o professor pergunta “Porque número posso substituir n para obter uma afirmação verdadeira", está a tratar a frase como álgebra. Se o professor pergunta, "Qual é a resposta?" então está a tratar a questão como de aritmética.

3. O uso de padrões generalizados

Uma das estratégias de cálculo mental para multiplicar um número por 19 é multiplicá-lo por 20 e subtrair o número. Algebricamente podemos escrever: Se n é o número, $19n = 20n - n$.

Ainda quando queremos escrever propriedades gerais da aritmética é mais adequado usar a linguagem algébrica. Podemos dizer aos alunos, "para multiplicar dois números não interessa a ordem, a resposta é sempre a mesma", mas podemos escrever o mesmo em termos algébricos: "para quaisquer números a e b, $a \bullet b = b \bullet a$".

Está-se a fazer álgebra se se discutem generalizações, como "Adiciona 0 a um número e o resultado é esse número. Adiciona um número a ele próprio e o resultado é o mesmo que duas vezes o número". Em vez de escrever em português, usando a linguagem da álgebra temos: ($0 + n = n$; $t + t = 2t$).

4. *Placeholders*

Quando se joga um jogo de tabuleiro, por exemplo, o Monopólio, no qual é dada a regra seguinte "Lança o dado. O número que obtiveres, anda para a frente duas vezes o número de espaços". Em linguagem algébrica significa "Se sai d no dado, então anda $2d$".

Também numa folha de cálculo se utiliza álgebra e o *placeholde*r. Quando pegamos um número numa célula (x), lhe subtraímos um número na segunda célula (y) e colocamos a diferença na terceira ($x - y$), preenchendo uma *array* rectangular.

5. Relações

As relações algébricas são utilizadas na resolução de muitos problemas, por exemplo:

João é 2 anos mais velho que Marisa. Quais podem ser as suas idades? Se Marisa tem 7, então João tem 9. Se a Marisa tem 4, então João tem 6.

Não temos de saber as suas idades para sabermos como estão relacionadas. Se a idade de João é representada por J e a da Marisa por M, podemos usar formas equivalentes de escrever a relação entre J e M.:

$J = M + 2$

$J - M = 2$

$M = J - 2$

Uso das tecnologias

Já foi referido anteriormente que utilizar uma folha de cálculo pode ser um bom instrumento para trabalhar aspectos da álgebra, nomeadamente a ideia de *placeholder* (Usiskin, 1997), mas também as fórmulas estão presentes no trabalho com a folha de cálculo.

A introdução das calculadoras gráficas e outros meios tecnológicos coloca alguns desafios no que se refere às múltiplas representações da mesma expressão. Como foi dito anteriormente trata-se de um aspecto que deve ser trabalhado de forma que os alunos sejam capazes de passar de umas representações para outras o que, para alguns autores (por exemplo, Chazan, 2003), corresponde a uma abordagem curricular da álgebra a partir das funções.

Muitas questões se podem colocar sobre este tema. Por exemplo: quais as potencialidades da utilização da calculadora e do computador na concretização do currículo de Álgebra? Quais as implicações, ao nível deste currículo, da utilização das tecnologias?

Estudos empíricos realizados em Portugal

Não são muitos os estudos realizados em Portugal nos últimos doze anos, no âmbito do desenvolvimento do sentido do número nos primeiros anos de escolaridade. No entanto, existem estudos em que as temáticas abordadas, como sejam, a natureza das tarefas ou a utilização de materiais ou tecnologias e respectivos desafios que colocam aos alunos ou professores, acabam por envolver questões do ensino e da aprendizagem de conceitos numéricos. São alguns desses estudos que iremos apresentar em seguida.

Opções curriculares

Há poucas experiências em Portugal, em que o objectivo tenha sido o desenvolvimento de um currículo alternativo ao estabelecido a nível oficial. Uma dessas experiências, o projecto de desenvolvimento curricular “Métodos Quantitativos para os alunos do ensino artístico” (Mansos e outros, 1994) surgiu da constatação de que o programa oficial de MQ era desajustado aos alunos do ensino artístico, pela incidência na Lógica e no

Cálculo que eram propostos de forma abstracta e pela ausência da Geometria. O projecto foi concebido e implementado pelas autoras do artigo na Escola Secundária António Arroio, projecto que foi submetido à aprovação do ME visto que pressupunha uma alteração do programa da disciplina. Cabe aqui a referência a este projecto na medida em que do ponto de vista dos conteúdos matemáticos do programa, para além da introdução de temas da Geometria foram valorizadas as conexões da Álgebra ou da Análise com a Geometria. Estas conexões contribuíram para uma melhor construção dos conceitos e desenvolvimento do raciocínio analítico, apoiado no raciocínio visual. Aliás a ficha de trabalho apresentada neste artigo inclui-se na abordagem aos números racionais e evidencia a preocupação de proporcionar determinadas experiências de aprendizagem com os números, nomeadamente as actividades de investigação.

Anteriormente, em 1993, uma outra equipa (Mourão e outros, 1993) organizou, aplicou e avaliou um programa de recuperação de alunos do 7.º ano de escolaridade com dificuldades de aprendizagem, após identificação dos factores explicativos do insucesso na aprendizagem da matemática. Os alunos que participaram no programa foram identificados pelos seus professores, tendo-se constituído um grupo de controlo (com alunos da mesma turma) e um grupo experimental. O programa foi aplicado e avaliado em nove escolas, por professores que foram objecto de acções de formação prévia. Decorreu em períodos extra-lectivos de molde a não repetir situações formais de aprendizagem e propiciar aos alunos um contacto com a matemática num ambiente informal. O programa centrou-se num conteúdo matemático "Teoria dos números", devido à frequência de dificuldades encontradas nos alunos na abordagem deste tema, associadas à falta de conhecimentos conceptuais e procedimentais e pela importância de que ele se reveste para o estudo da Matemática em geral, e do 3.º ciclo, em particular. Desenvolveu-se ao longo de oito sessões (2h cada) e procurou-se que os professores/aplicadores não realizassem o programa junto dos seus alunos. Foram privilegiados, no primeiro momento, os aspectos práticos e activos das tarefas com recurso a materiais manipuláveis, situações familiares ou metáforas. No segundo momento procurou exercitar-se o cálculo através da exploração de situações lúdicas e de jogo. O terceiro momento era constituído por dois tipos de actividade: um texto em banda desenhada com a síntese e propostas de exercícios e problemas visando aproximar o programa da disciplina curricular de Matemática.

Para avaliação do projecto, a equipa adoptou procedimentos de avaliação qualitativa (mudanças de atitudes em relação à matemática) e também de avaliação quantitativa (foram avaliados conhecimentos e o rendimento na disciplina de matemática). Os resultados apontaram para um incremento de atitudes positivas em relação à aprendizagem da matemática, mais autoconfiança na resolução de problemas, embora não se tenham verificado diferenças (grupo de controlo e grupo experimental) quer na prova de raciocínio numérico quer na prova de pensamento divergente numérico. Em relação ao aproveitamento escolar dos alunos, a informação recolhida (notas nos períodos e pontuação nos testes) permitiu concluir que os alunos, sujeitos ao programa, melhoraram progressivamente o seu desempenho, verificando-se uma diferença, em relação aos do grupo de controlo, estatisticamente significativa.

A nível do 1.º ciclo, Correia e Aguiar (1998) apresentam algumas tarefas para a sala de aula concretizadoras de propostas curriculares inovadoras, ao nível do ensino da Matemática para o 1.º ciclo, que se encontram nos documentos oficiais portugueses e outros. As tarefas foram construídas, discutidas, reflectidas e implementadas com alunos do 3.º ano de escolaridade e no contexto de um trabalho colaborativo entre três docentes do 1.º ciclo e uma investigadora e formadora de professores. São apresentadas duas tarefas no contexto dos números e operações que apontam para o uso da calculadora. São dois problemas, em que um deles apela a diferentes estratégias de resolução com a consequente discussão e argumentação. São também analisadas duas outras tarefas em que se exploram conceitos numéricos (metade, terça parte, números quadrados, …) num contexto geométrico de exploração de regularidades, que se distanciam de uma abordagem mecanizada e rotineira que ainda com muita frequência se sente no desenvolvimento destes conceitos. A valorização da exploração de conexões dentro da matemática (números e geometria) está evidenciada neste artigo, donde também sobressai a importância do trabalho colaborativo entre os professores na preparação conjunta de tarefas mais abertas.

Os estudos revistos anteriormente focam aspectos como a importância do estabelecimento de conexões e a necessidade de pensar nas aprendizagens dos alunos com dificuldades. Muitos outros focos poderão vir a ser objecto de estudos futuros. No contexto dos números e operações importa discutir vários aspectos de carácter curricular, nomeadamente: quais as opções curriculares que devem ser tomadas pelo professor de modo a facilitar e desenvolver a aprendizagem dos números e da álgebra? Que apostas curriculares se revelam mais urgentes?

Nas secções seguintes apresentamos alguns aspectos relacionados com o tipo de tarefas, com as abordagens numéricas e com materiais que podem ser utilizados contribuindo para este desenvolvimento.

Tarefas

Nos últimos anos vários estudos incidiram sobre a natureza das tarefas que se propõem aos alunos, nomeadamente sobre as tarefas de natureza investigativa.

Uns procuraram analisar as dificuldades dos alunos na realização deste tipo de tarefas, como é o caso do estudo de Ponte e Segurado (1998). Este estudo contribui para a compreensão das dificuldades que os alunos podem ter na realização de uma tarefa de natureza investigativa, a nível da compreensão da mesma e das estratégias a usar na sua resolução. Seguindo uma abordagem qualitativa, este estudo incidiu sobre um único aluno do 6.º ano, a quem foram propostas 5 tarefas de exploração e investigação em contextos numéricos, nas suas aulas de Matemática. Tratando-se de um aluno com uma "inclinação" natural para a Matemática, este trabalho mostrou que é possível, pelo menos a alunos com estas características, proporcionar uma experiência matemática envolvendo tarefas de natureza exploratória e investigativa em contextos numéricos, envolvendo a formulação e testagem de conjecturas e a elaboração de justificações dos resultados encontrados. Mostrou ainda, este estudo, que com este tipo de tarefas, as concepções dos alunos relativamente à matemática podem sair enriquecidas, sendo que no início do estudo o aluno atribuía um papel preponderante ao cálculo.

Outros estudos procuraram compreender os desafios que o desenvolvimento deste tipo de tarefas coloca aos professores. Nomeadamente o estudo de caso realizado por Oliveira (1998), que envolveu duas professoras do 3.º ciclo, com formação e experiências profissionais diferentes, procurou compreender os desafios que o desenvolvimento de actividades de investigação (de natureza algébrica), na aula de matemática, quer a nível da sua selecção ou adaptação quer a nível de integração curricular, colocou a essas professoras, na sua prática, e o modo como os enfrentaram. A análise dos dados permitiu concluir que as professoras consideram estas actividades como boas ideias para a aula de matemática, visto que se aproximam do que é a actividade matemática. Como dificuldades para uma prática mais continuada com este tipo de actividades, apontam a imprevisibilidade que caracterizam estas aulas, o apoio que é necessário conceder a cada aluno e a decisão sobre o tipo de apoio, quando este se debate com alguma dúvida ou impasse, a necessidade de uma discussão final na turma e a complexidade inerente a este tipo de actividades que gera alguma insegurança na sua forma de actuação.

Um estudo realizado mais recentemente por Brocardo (2001), pretendia analisar as potencialidades de um projecto curricular, que incluía a exploração de um conjunto de tarefas de investigação, no modo como os alunos aprendem e vêem a Matemática. Algumas destas tarefas relacionavam-se com o desenvolvimento de aspectos numéricos e algébricos (exploração de sequências numéricas, com a descoberta e demonstração da lei geral de formação). O estudo envolveu alunos de uma turma de 8ºano, incidindo em particular em três deles. A recolha de dados incluiu uma variedade de fontes de informação, recorrendo a entrevistas e observação de aulas. Os resultados deste estudo evidenciam várias potencialidades da exploração continuada de tarefas de investigação no que diz respeito à motivação dos alunos para a Matemática, à sua participação e salienta ainda a facilidade na compreensão de processos e ideias matemáticas.

Os estudos referidos salientam a importância da realização de tarefas de investigação no modo como os alunos se relacionam com a Matemática e nas suas concepções sobre esta disciplina. Revelam também influências na compreensão das relações matemáticas e no entendimento do que é a actividade matemática.

Como poderá o professor integrar actividades deste tipo de forma a promover a aprendizagem de conceitos numéricos e algébricos nos alunos?

Números e operações

Esta secção apresenta um conjunto de investigações realizadas no âmbito do ensino e aprendizagem dos números e operações. A primeira, sobre o desenvolvimento do sentido do número, realizada por Ferreira (2002), procurou analisar de uma forma global os vários aspectos que o constituem. As restantes, centram-se em aspectos específicos do sentido do número – Azevedo (1996) centra-se na aprendizagem da estimação matemática e Gonçalves (2003) debruça-se sobre o ensino e a aprendizagem das operações multiplicação e divisão.

Ferreira (2002) procura caracterizar o sentido do número de alunos do 8º ano de escolaridade, tentando conhecer e perceber o modo como os alunos aprendem os números e as operações e de que forma se pode contribuir para um desenvolvimento significativo do sentido do número. Realiza seis estudos de caso de alunos da mesma turma, recolhendo os dados através de uma entrevista semi-estruturada a cada um dos participantes e da realização de um conjunto de tarefas. A autora conclui que, de um modo geral, os alunos apresentam falta de compreensão acerca do significado dos números e que os números decimais e fraccionários são os que mais suscitam dificuldades conceptuais. Refere ainda que, globalmente, a capacidade de escolher e aplicar uma estratégia adequada aos problemas propostos está relacionada com o nível de desenvolvimento do sentido do número, o grau de confiança em fazer Matemática e com as suas experiências. Um aspecto salientado pela autora refere-se a uma certa tendência por parte dos alunos em aplicar um algoritmo, regra ou procedimento aprendido na aula quando colocados perante um problema. Relativamente à forma como se pode contribuir para um desenvolvimento significativo do sentido do número, a autora salienta as interacções aluno-aluno e professor-aluno como aspectos fundamentais na criação de um ambiente de sala de aula onde haja partilha de hipóteses, raciocínios e conclusões e na criação dos seus próprios procedimentos e estratégias.

O estudo realizado por Azevedo (1996) envolveu alunos de uma turma do 6º ano de escolaridade, centrando-se na aprendizagem escolar da estimação matemática. Mais especificamente, este estudo pretendia compreender os processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de sala de aula e identificar as suas atitudes e concepções face à estimação. A recolha de dados envolveu a observação de aulas, conversas informais com os alunos e com a professora da turma, entrevistas e questionários aos alunos. Neste trabalho são identificados vários processos usados em estimativas de cálculo, nomeadamente a reformulação, a compensação, a translação e a comparação. Nas estimativas de cálculo, a autora conclui que o processo de reformulação, que corresponde a uma alteração dos números envolvidos para números mais fáceis mantendo-se intacta a estrutura do problema, foi o mais usado pelos alunos. A autora observou também a tendência dos alunos apelarem mentalmente a procedimentos algorítmicos e ao uso de estratégias pouco diversificadas. De um modo geral, este estudo aponta para a existência de dificuldades por parte dos alunos na estimação, caracterizando-o como um processo difícil e confuso. Relativamente às concepções dos alunos face à estimação matemática, a autora conclui que os alunos lhe atribuem valor, mas consideram mais importante saber regras e os algoritmos de cálculo.

No seu estudo, Gonçalves (2003) pretendeu compreender o modo como os alunos constroem o conceito de multiplicação e de divisão, identificando simultaneamente aspectos relacionados com a natureza, o uso e desenvolvimento de métodos próprios. Pretendia também verificar se estes métodos permaneciam quando lhes eram ensinadas estratégias mais sofisticadas. Para tal, realizou seis estudos de caso de alunos do 3º ano de escolaridade de uma escola do 1º ciclo. A cada um dos alunos foram realizadas três entrevistas, em momentos diferentes da investigação, que consistiram na apresentação de um conjunto de problemas que envolvem várias situações de multiplicação e de divisão. O estudo aponta para a existência de dificuldades nos alunos em decidir qual a estratégia para resolver os problemas apresentados, não sendo, na maioria das vezes, a estratégia inicial aquela que se mostrou mais eficaz. A investigadora conclui que os alunos tendem a usar métodos próprios antes de lhes ser ensinado métodos formais e procedimentos rotineiros de realização das operações. O estudo refere ainda que, após a introdução destes métodos, alguns dos alunos mesmo depois de terem utilizado outras estratégias de resolução dos problemas, acabavam por apresentar o algoritmo.

Um aspecto que parece poder ser realçado a partir deste conjunto de investigações prende-se com o lugar que o algoritmo ocupa nas opções dos alunos em diferentes anos de escolaridade e em contextos diferentes de trabalho com os números e operações. O algoritmo parece, assim, prevalecer como processo de resolução de problemas e de estimativas relativamente a outras estratégias possíveis.

Até que ponto estes resultados apontam para uma sobrevalorização do ensino e da utilização do algoritmo nos primeiros anos de escolaridade? Que tipo de estratégias e procedimentos de cálculo devem ser privilegiados na sala de aula, num contexto de resolução de problemas, de modo a promover o sentido do número?

Utilização de materiais na aprendizagem dos números

Esta secção apresenta um conjunto de investigações relacionadas com o uso de diversos materiais no ensino e aprendizagem dos números e da álgebra.

Mamede (2002) realizou um estudo no 1º ciclo centrado na utilização da calculadora na sala de aula, com alunos do 4º ano, onde se procurou perceber de que forma estes alunos utilizam esta ferramenta no contexto da resolução de problemas não rotineiros. Foram seleccionados três pares de alunos com competências matemáticas distintas, alunos "bons", "razoáveis" e com mais "dificuldades" em Matemática. No âmbito desta investigação foram identificados alguns resultados interessantes e que se relacionam com as competências matemáticas tais como destrezas de cálculo mental e escrito, sentido da operação e valor posicional. A autora concluiu que os grandes benefícios da disponibilidade da calculadora pressupõem que os alunos tenham desenvolvidas as competências matemáticas referidas anteriormente, ou seja, alunos pouco competentes nestes aspectos parecem não conseguir tirar partido das potencialidades da calculadora. Por outro lado, alunos mais competentes, ainda que manifestem algumas dificuldades ao nível da prática, parecem conseguir ultrapassar essas limitações no cálculo através da calculadora.

Vizinho e Cabrita (2002) referem uma outra investigação, realizada no 1º ciclo pela primeira autora e que incide sobre uma abordagem dos numerais decimais recorrendo a diversas conexões, dentro e fora da Matemática, e apoiada por uma exploração adequada de materiais diversificados. Uma das questões do estudo, relacionada com o tema deste texto, pretendia perceber o contributo deste tipo de abordagem para uma sólida construção dos conceitos em causa. Assim, a investigadora trabalhou com uma turma de 4º ano e a sua professora, com quem planificou em conjunto a unidade temática relacionada com os numerais decimais, que foi posteriormente implementada. As actividades desenvolvidas foram sustentadas por vários materiais, incluindo a calculadora, o computador (Excel), diversos dominós e puzzles, a maior parte deles elaborados para o efeito. Antes e depois da implementação do conjunto de tarefas relacionadas com os decimais, os alunos fizeram testes, cujos resultados foram comparados e que permitiram responder à questão do estudo já referida. A análise e comparação dos resultados obtidos pelos alunos permitiram identificar que a utilização de estratégias inovadoras, evidenciando conexões e recorrendo a diversos materiais, parecem contribuir para uma mais sólida construção dos conceitos relativos aos numerais decimais. Também em termos de processo parece ter havido alterações positivas na forma de resolver o mesmo tipo de questões.

No 2º ciclo, foi desenvolvida uma outra investigação que pretendia problematizar a construção do conceito de proporcionalidade mediado pela utilização da calculadora, (Paula, 2000). A investigadora definiu como um dos objectivos do seu estudo, desenvolvido com alunos do 6º ano de escolaridade, saber qual o papel mediador desta tecnologia na construção do conceito de proporcionalidade. A unidade de análise foram as actividades desenvolvidas por dois grupos heterogéneos de quatro alunos, tendo sido usada uma metodologia de natureza interpretativa. A recolha de dados foi efectuada através, nomeadamente, da observação participante de 20 aulas de proporcionalidade directa, para além de entrevistas aos alunos e análise de fichas de trabalho realizadas por estes. Da análise efectuada a autora afirma que a utilização da calculadora contribuiu para a antecipação do conceito de multiplicação de números racionais com dízimas infinitas. No que diz respeito à construção do conceito de proporcionalidade a utilização da tecnologia referida contribuiu para que ocorresse uma variedade de representações matemáticas associadas à linguagem e que são importantes na elaboração de imagens mentais que traduzem as relações entre variáveis.

Podemos afirmar que, em qualquer destas investigações realizadas, o recurso a diferentes ferramentas, nomeadamente à utilização da calculadora parece ter contribuído para o desenvolvimento dos conceitos numéricos e das operações. Uma questão que se pode colocar relacionada com esta problemática prende-se com o modo de integrar a utilização de materiais diversificados na aprendizagem dos números e no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Referências bibliográficas

Amaral, H. (2003). *Actividades investigativas na aprendizagem da Matemática no 1º ciclo*. Tese de Mestrado. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Anghileri, J. (2001). Contrasting approaches that challenge tradition. In J. Anghileri (Ed.). Principles and practices in arithmetic teaching

APM (1988). Renovação do currículo de matemática. Lisboa: APM

APM (1990). *Parecer relativo aos projectos de programas de Matemática para o 1º, 2º e 3º ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: APM

Azevedo, M. (1996). *A aprendizagem da estimação Matemática. Um estudo no 2º ciclo*. Tese de Mestrado. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bay-Williams, J.. M. (2001). What is algebra in elementary school? *Teaching Children Mathematics, 8(4),* 196-200.

Blanton, M. L. e Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics, 10(2),* 70-77.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8ºano.* Tese de Doutoramento. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Chazan, D. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: research on algebra learning and directions of curricular change. In J.Kilpatrick, W. G. Martin e D. Schiffer (Eds.), *A Research Companion for Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 123-135). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Correia, G. e I. Aguiar (1997). Os contributos da matemática para a educação dos alunos do1.º ciclo. *Educação e Matemática*, 50, 11-15.

Ferreira, N. (2002). *Caracterização do sentido do número: estudos de caso com alunos do 8º ano de escolaridade.* Tese de Mestrado não publicada: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Fosnot, C. T. e Dolk, M. (2001). *Young mathematics at work: Constructing number sense, addition and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fuson, K. (2003). Developing mathematical power in whole number operations. In J.Kilpatrick, W. G. Martin e D. Schiffer (Eds.), *A Research Companion for Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 69-93). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Gonçalves, H. (2003). *A multiplicação e divisão em alunos do 1º ciclo do ensino básico.* Tese de Mestrado. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: Freudental Institute.

Gravmeijer, K. e Galen, F. (2003). Facts and Algorithms as products of student's own mathematical activity. In J.Kilpatrick, W. G. Martin e D. Schiffer (Eds.), *A Research Companion for Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 114-122). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

ICMI (1986). School mathematics in the 1990s. Cambridge: Cambridge Press.

Kami, C. e Dominic, A.(1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow e M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Klein, A. S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base*, Utrecht: Freudhental Institute.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebra reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8(7),* 342-348.

Mamede, E. (2002). A calculadora no 1º ciclo: Mero instrumento de verificação ou algo mais? In: Ponte, J., Costa, C., Rosendo, A., Maia, E., Figueiredo, N., Dionísio, A. (org.). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática a na formação dos professores.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação e Matemática.

Mansos, M. P., A. Pinto, R. Bastos, C. Pinheiro e C. Saporiti (1994). Métodos Quantitativos para os alunos do ensino artístico. Proposta de adaptação do programa. *Educação e Matemática*, 30, 3-6.

Mourão, A. P., L. S. Almeida, A. M. Barros, J. S. Fernandes e M. C. Campelo (1993). Construção, aplicação e avaliação de um programa de recuperação em matemática. Estudo junto de alunos do 7.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 2 (1), 89-112.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveira, H. (1998). Vivências de duas professoras com actividades de investigação. *Quadrante*, 7(2), 71-98.

Paula, I. (2000). *A construção do conceito de proporcionalidade mediada pela utilização da calculadora*. Tese de Mestrado. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Matos, J. M.; Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática.: Implicações curriculares.* Lisboa: IIE.

Porfírio, J. (1998). Os currículos de Matemática: com têm evoluído? *Educação e Matemática*, nº50 (pp 32-38).

Ramalho, G. (Coor). (2004). *Resultados do estudo internacional Pisa 2003*. 1º relatório nacional. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ramalho, G. (Coord) (2002). *Pisa 2000 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Segurado, I. e J. P. Ponte (1998). Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7 (2), 5-40.

Silva. A., Veloso, E., Porfírio, J. e Abrantes, P. (1999). O currículo de Matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Grupo

"Matemática para todos – investigações na sala de aula" (CIEFCUL) e APM: Lisboa: APM.

Usiskin, Z. (1997), Doing algebra in grades K-4. *Teaching Children Mathematics,3(6),* 346-356..

Vizinho, I., Cabrita, I. (2002). Abordagem dos numerais decimais no 1º ciclo do ensino básico sustentada por actividades significativas de resolução de problemas. In: Ponte, J., Costa, C., Rosendo, A., Maia, E., Figueiredo, N., Dionísio, A. (org.). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática a na formação dos professores.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação e Matemática.