

Instituto Politécnico de Coimbra
Instituto Superior de Contabilidade
e Administração de Coimbra

Luís Miguel da Costa Correia

Modelo de *portofolio* multiobjetivo com coeficientes intervalares:
Euronext e FTSE 100

Modelo de *portofolio* multiobjetivo com coeficientes intervalares: Euronext e FTSE 100

Luís Miguel da Costa Correia

ISCAC | 2017

Coimbra, outubro de 2017



Instituto Politécnico de Coimbra
Instituto Superior de Contabilidade
e Administração de Coimbra

Luís Miguel da Costa Correia

Modelo de *portofolio* multiobjetivo com coeficientes
intervalares: Euronext e FTSE 100

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Análise Financeira, realizada sob a orientação da Professora Doutora Carla Margarida Saraiva de Oliveira Henriques.

Coimbra, outubro de 2017

TERMO DE RESPONSABILIDADE

Declaro ser o autor desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido a outra Instituição de ensino superior para obtenção de um grau acadêmico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas e que tenho consciência de que o plágio constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

PENSAMENTO

A good portfolio is more than a long list of good stocks and bonds. It is a balanced whole, providing the investor with protections and opportunities with respect to a wide range of contingencies.

Harry Markowitz (1959)

DEDICATÓRIA

À Professora Doutora Carla Margarida Saraiva de Oliveira Henriques pela orientação científica, pelo seu estímulo e apoio, contribuindo com importantes sugestões na elaboração deste trabalho, bem como na revisão do texto desta dissertação.

À Professora Doutora Maria Elisabete Duarte Neves pela sua importante cooperação, essencial à concretização deste trabalho.

Aos meus pais, irmão e avós pelo apoio incessante em todos os momentos bons e maus.

A minha gratidão é ainda extensível a todos aqueles que, apesar de não serem explicitamente mencionados, contribuíram de alguma forma, direta ou indiretamente, para a prossecução deste trabalho.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma abordagem metodológica assente em modelos de *portfolio* multiobjetivo, com vista à obtenção de carteiras de ações possivelmente eficientes que considerem a incerteza intrínseca de decisões de investimento, utilizando o modelo dos desvios médios semi-absolutos como medida de risco. A modelação da incerteza é feita considerando o retorno esperado, o risco dos ativos e a liquidez como números intervalares, sendo contempladas restrições intervalares respeitantes às frações máximas de investimento nos vários ativos e em relação ao número máximo de ativos mantidos em carteira. Neste trabalho, é, ainda, apresentada uma proposta para obtenção de soluções possivelmente eficientes dos problemas de *portfolio* multiobjetivo intervalares, que permite atender a três tipos de estratégias de investimento, ou seja, uma estratégia conservadora, uma estratégia agressiva e uma estratégia combinada. A aplicabilidade da abordagem descrita é ilustrada através da utilização de dados de um conjunto de ações cotadas nos mercados Euronext e FTSE 100 e transacionadas entre 1 de janeiro de 2007 e 12 de novembro de 2015.

Os resultados obtidos permitem avaliar os *trade-offs* entre risco, retorno e liquidez em diferentes conjunturas económicas. Neste contexto, para além do *trade-off* entre risco e retorno, que tende a aumentar num cenário de crise, evidencia-se também o *trade-off* entre liquidez e risco, verificando-se que o risco mínimo conduz, em geral, a níveis de liquidez mais baixos. Por outro lado, o *trade-off* entre retorno e liquidez está também patente nos resultados obtidos, com a maximização da liquidez a traduzir-se em níveis baixos de retorno. Finalmente, os resultados indicam que, quando a diversificação setorial é considerada como ponto de partida, o investidor pode obter *portfolios* possivelmente eficientes, consistentes com níveis de risco mais baixos, quando comparados com os níveis de risco obtidos sem atender a qualquer estratégia de diversificação de partida.

Palavras-chave: Modelos de *portfolio* multiobjetivo, Programação Intervalar, Euronext, FTSE 100

ABSTRACT

This dissertation is aimed at presenting a methodological approach based on multiobjective portfolio models, with the purpose of obtaining possible efficient solutions, which account for the intrinsic uncertainty of investment decision, by means of the use of the mean semi-absolute deviation model as a risk measure. The uncertainty of the model is tackled by considering the return, the risk and the liquidity of the assets as interval numbers, also incorporating interval constraints regarding the maximum proportion of capital that can be invested and regarding the maximum number of assets being held in the portfolio. A proposal for obtaining the possibly efficient solutions of the multiobjective interval portfolio problems is also presented, which allows considering three different investment strategies according to the investor's standpoint, in other words, a conservative strategy, an aggressive strategy and a combined strategy. The usefulness of the described approach is illustrated by considering data from a set of stocks from Euronext and FTSE100 markets traded between the 1st of January of 2007 and the 12th of November of 2015.

The results illustrate the trade-off between risk, return and liquidity in distinct economic settings. Besides the expected trade-off between return and risk, which tends to increase in a crisis scenario, a trade-off between risk and liquidity is also obtained with minimum risk generally leading to lower liquidity levels. On the other hand, a trade-off between return and liquidity is also highlighted, with the maximum liquidity resulting in low return levels. The overall conclusion is that, when taking sectorial diversification as a starting point, the investor is able to generate possible efficient portfolios with a consistently higher performance level towards risk when compared to the traditional approach.

Keywords: Multiobjective portfolio models, Interval Programming, Euronext, FTSE 100

ÍNDICE GERAL

INTRODUÇÃO	1
1 MODELOS DE <i>PORTFOLIO</i> MULTIOBJETIVO COM COEFICIENTES INTERVALARES	6
1.1 Números intervalares	8
1.1.1 Operações aritméticas entre números intervalares.....	9
1.2 Modelos de PLMO	10
1.3 Modelos de PLMO com coeficientes intervalares	13
1.3.1 O melhor valor ótimo e o pior valor ótimo.....	14
1.4 Modelos de <i>portfolio</i> multiobjetivo	16
1.4.1 Funções objetivo	16
1.4.1.1 Retorno.....	16
1.4.1.2 Risco.....	17
1.4.1.3 Liquidez.....	20
1.4.2 Restrições.....	21
1.4.2.1 Restrição orçamental.....	21
1.4.2.2 Frações máximas de investimento nos vários ativos.....	21
1.4.2.3 Número máximo de ativos mantidos em carteira.....	21
1.4.2.4 Não é permitida a venda a descoberto.....	21
1.4.3 Modelos de <i>portfolio</i> multiobjetivo com coeficientes intervalares	22
1.4.3.1 Modelo de desvio médio semi-absoluto.....	22
1.5 Métodos para a obtenção de <i>portofolios</i> possivelmente eficientes	23
1.5.1 Estratégia conservadora	23
1.5.2 Estratégia agressiva.....	24
1.5.3 Estratégia combinada.....	24

2	UM MODELO DE <i>PORTFOLIO</i> MULTIOBJETIVO COM COEFICIENTES INTERVALARES: EURONEXT E FTSE 100.....	26
2.1	Dados e pressupostos	28
2.1.1	Análise dos dados e das correlações setoriais.....	30
2.1.2	Seleção das ações que minimizam a correlação setorial.....	34
2.1.3	Seleção das ações que minimizam a correlação das carteiras	39
2.2	Especificação numérica do modelo de <i>portfolio</i>	42
2.2.1	Funções objetivo	42
2.2.2	Restrições.....	42
3	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS	43
3.1	Resultados obtidos com a carteira diversificada	43
3.1.1	Período global da análise	43
3.1.2	Cenário de crise económica	47
3.1.3	Cenário de recuperação económica	51
3.2	Resultados obtidos com a carteira de <i>Big Stocks</i>	55
3.2.1	Período global de análise	55
3.2.2	Cenário de crise económica	61
3.2.3	Cenário de recuperação económica	66
	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
	APÊNDICES	86
	APÊNDICE 1. CORRELAÇÃO DAS AÇÕES POR SETOR DE ATIVIDADE (EURONEXT – <i>BIG STOCKS</i>)	87
	APÊNDICE 2. CORRELAÇÃO DAS AÇÕES POR SETOR DE ATIVIDADE (FTSE 100 – <i>BIG STOCKS</i>).....	92
	APÊNDICE 3. RETORNO MENSAL MÉDIO – <i>BIG STOCKS</i>	98
	APÊNDICE 4. LIQUIDEZ MÉDIA MENSAL – <i>BIG STOCKS</i>	99

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1. Distribuição das ações por setores de atividade no mercado Euronext.....	31
Tabela 2.2. Distribuição das ações por setores de atividade no mercado FTSE 100.....	31
Tabela 2.3. Análise estatística das correlações intrassetoriais – Euronext.....	32
Tabela 2.4. Análise estatística das correlações intrassetoriais – FTSE 100.....	32
Tabela 2.5. Correlações intersetoriais – Euronext.....	33
Tabela 2.6. Correlações intersetoriais – FTSE 100.....	34
Tabela 2.7. Carteira de ações que minimizam a correlação setorial.....	35
Tabela 2.8. Correlação da carteira diversificada intrassetorialmente – Euronext.....	37
Tabela 2.9. Correlação da carteira diversificada intrassetorialmente – FTSE 100.....	38
Tabela 2.10. Correlação da carteira diversificada intersetorialmente – Euronext.....	40
Tabela 2.11. Correlação da carteira diversificada intersetorialmente – FTSE 100.....	40
Tabela 2.12. Correlação da carteira global.....	41
Tabela 3.1. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> – período global.....	44
Tabela 3.2. Características dos <i>portfolios</i> obtidos – período global.....	47
Tabela 3.3. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> – cenário de crise.....	48
Tabela 3.4. Características dos <i>portfolios</i> obtidos – cenário de crise.....	50
Tabela 3.5. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> – cenário de recuperação.....	51
Tabela 3.6. Características dos <i>portfolios</i> obtidos – cenário de recuperação.....	54
Tabela 3.7. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> - <i>Big Stocks</i> , cenário global (1).....	58
Tabela 3.8. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> – <i>Big Stocks</i> , cenário global (2).....	59
Tabela 3.9. Características dos <i>portfolios</i> obtidos – <i>Big Stocks</i> , cenário global.....	60
Tabela 3.10. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> – <i>Big Stocks</i> , cenário de crise (1).....	63
Tabela 3.11. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> – <i>Big Stocks</i> , cenário de crise (2).....	64

Tabela 3.12. Características dos <i>portfolios</i> obtidos – <i>Big Stocks</i> , cenário crise.....	66
Tabela 3.13. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> – <i>Big Stocks</i> , recuperação (1).....	69
Tabela 3.14. Proporção de ativos em cada <i>portfolio</i> – <i>Big Stocks</i> , recuperação (2).....	70
Tabela 3.15. Características dos <i>portfolios</i> obtidos – <i>Big Stocks</i> , recuperação.....	71

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Retorno, liquidez e risco – período global.....	46
Figura 2. Retorno, liquidez e risco – cenário de crise.....	49
Figura 3. Retorno, liquidez e risco – cenário de recuperação.....	53
Figura 4. Retorno, liquidez e risco da carteira de <i>Big Stocks</i> – cenário global.....	60
Figura 5. Retorno, liquidez e risco da carteira de <i>Big Stocks</i> - cenário de crise.....	65
Figura 6. Retorno, liquidez e risco da carteira de <i>Big Stocks</i> – recuperação.....	71

Lista de siglas e acrónimos

AEX 25 - *Amsterdam Exchange Index*

BEL 20 - *Brussels Stock Exchange*

CAC 40 - *Cotation Assistée en Continu*

FTSE 100 - *Financial Times Stock Exchange*

PEC - Pacto de Estabilidade e Crescimento

PIB – Produto Interno Bruto

PLMO – Programação Linear Multiobjetivo

PSI 20 - *Portuguese Stock Index*

SIC - *Standard Industrial Classification*

INTRODUÇÃO

Markowitz (1952) estabeleceu as bases da teoria de *portfolio* moderna. A formulação clássica proposta por Markowitz considera a variância como uma medida da volatilidade do risco, descurando o facto de que, muitas vezes, a posição do investidor em relação ao risco não é coincidente com a simetria ou distribuição normal. De facto, uma pequena perda pode ser suficiente para tornar um investidor não propenso ao risco pouco satisfeito, podendo o oposto também ser verdade. Assim sendo, este tipo de aproximação é apenas válido desde que o retorno esperado seja multivariado e normalmente distribuído e o investidor seja avesso ao risco (Papahristodoulou & Dotzauer, 2004).

Por este motivo, esta abordagem tem atraído algumas críticas, uma vez que pode permitir a escolha de um *portfolio* menos rentável. Por outro lado, devido à sua complexidade (uma vez que a função objetivo da formulação proposta neste modelo é quadrática), pode ser difícil implementá-la na prática, conduzindo, eventualmente, o investidor a afetar o seu orçamento a um grande número de ações, ignorando os custos de transação envolvidos. A semi-variância como medida de avaliação do risco foi proposta, posteriormente, por Markowitz (1968), para colmatar alguns dos problemas inerentes à função de risco inicialmente sugerida, proporcionando uma melhor forma de avaliação. No entanto, o esforço computacional deste tipo de abordagem pode tornar-se incomportável, se o número de ativos da carteira for elevado e se o problema de *portfolio* possuir variáveis inteiras.

O modelo clássico de Markowitz deve, portanto, ser visto como uma aproximação aos problemas bastante complexos que os investidores têm de enfrentar na realidade. No mundo real, as carteiras são constituídas por um grande número de ativos, possivelmente com participações muito pequenas para alguns deles, um tamanho mínimo de lote e políticas de gestão de ativos complexas (Cesarone, Scozzari & Tardella, 2011).

Na última década, o modelo clássico de Markowitz tem evoluído, tendo sido estudadas algumas variantes deste modelo conducentes à melhoria do esforço computacional envolvido no cálculo de soluções. Neste contexto, foram propostas diversas formas alternativas para reduzir a complexidade do problema de *portfolio*, nomeadamente através da linearização da função objetivo quadrática (ver, por exemplo, Sharpe (1966), Speranza (1993) e Mansini, Ogryczak & Grazi Speranza (2003)) e da decomposição da matriz de covariância (Mitra, Kyriakis, Lucas & Pirbhad, 2003). Podem, no entanto, ser

ainda consideradas outras medidas de risco. Em Biglova, Ortobelli, Rachev & Stoyanov (2004) e Ortobelli, Rachev, Stoyanov, Fabiozzi & Biglova (2005), por exemplo, é facultada uma revisão ilustrada respeitante à utilização de medidas e modelos de risco na avaliação de carteiras de ativos.

Embora exista um número elevado de publicações em relação a diferentes medidas e modelos de risco, a tomada de decisão em problemas de *portfolio* também pode ser baseada nas expectativas do investidor face às características de retorno, risco e liquidez dos ativos (Gupta, Mehlawat, Inuiguchi & Chandra, 2014). Neste âmbito, os investidores podem revelar interesse em explorar os *trade-offs* (interações) entre o retorno, o risco e a liquidez decorrentes do investimento em diferentes ativos.

Em geral, os modelos de *portfolio* multiobjetivo tradicionais consideram os coeficientes do modelo como um dado estabelecido *a-priori*. No entanto, este tipo de problemas envolve, inerentemente, questões de incerteza e de inexatidão, nomeadamente associadas à obtenção de informação acerca do retorno, do risco e da liquidez dos ativos que, por vezes, é incompleta; por outro lado, os mercados onde decorre a negociação destes ativos exibem alguma volatilidade e as opiniões dos especialistas podem variar significativamente.

O tratamento da incerteza deste tipo de modelos pode ser efetuado, nomeadamente, com recurso a técnicas de programação estocástica, difusa e intervalar. A programação estocástica requer a existência de dados estatísticos suficientes para obter as funções de distribuição das variáveis aleatórias do modelo matemático ou uso de probabilidades subjetivas, quando este tipo de informação não se encontra disponível (Oliveira & Antunes, 2007). A programação difusa permite tornar menos rígidas as noções de satisfação das restrições e de otimização das funções objetivo, assumindo-se que as suas funções de pertença são conhecidas (Bellman & Zadeh, 1970). No entanto, nem sempre é fácil especificar essas funções de distribuição *probabilística* (como na programação estocástica) e de distribuição *possibilística* (como na programação difusa), sendo mais prático definir os coeficientes dos modelos de *portfolio* como intervalos. Para aplicação da abordagem intervalar, é necessário apenas dispor de informação acerca da gama de variação dos coeficientes necessários para construir o modelo, sendo, portanto, intuitivamente preferível para o decisor na prática (Oliveira & Antunes, 2007).

Neste contexto, vários autores têm proposto modelos de *portfolio* contemplando o desvio semi-absoluto como medida de risco, considerando os retornos incertos dos ativos traduzidos como intervalos (Lai, Wang, Xu, Zhu & Fang, 2002; Bhattacharyya, Kar & Majumder, 2011; Zhang, 2016). A abordagem que procura minimizar o máximo arrependimento foi considerada num problema de *portfolio* em que os preços dos títulos são tratados como números intervalares (Giove, Funari & Nardelli, 2006). Os modelos de *portfolio* multi-período também foram desenvolvidos com coeficientes intervalares em Liu, Zhang & Zhang (2013), Zhang (2016) e Liu, Zhang & Wang (2016).

Em geral, os modelos de *portfolio* intervalares têm sido aplicados em situações onde se assume que um investidor pretende aplicar a sua riqueza num pequeno número de ativos, considerando apenas a incerteza existente nas funções objetivo do problema (Henriques & Neves, 2017). Deste modo, pretende-se apresentar uma abordagem metodológica para auxiliar os investidores em problemas de *portfolio* reais, que permita reduzir a complexidade do problema de ponto de vista computacional, mesmo quando o tratamento da incerteza envolve quer as funções objetivo, quer as restrições do modelo.

Este trabalho pretende, assim, apresentar um modelo de otimização de *portfolio* com coeficientes intervalares em três funções objetivo, onde são também consideradas restrições intervalares respeitantes às frações máximas de investimento afetas aos vários ativos, de modo a garantir a diversificação da carteira de ativos, sendo ainda contempladas restrições de cardinalidade intervalares para evitar custos de transação elevados. Neste âmbito, é exposta uma metodologia para obtenção de carteiras de ativos, correspondentes a *portfolios* possivelmente eficientes do problema de *portfolio* multiobjetivo intervalar, onde é possível explorar três tipos de estratégias de investimento, ou seja, uma estratégia conservadora, uma estratégia agressiva e uma estratégia combinada. Finalmente, é encetado um vasto trabalho de recolha de dados, de modo a ilustrar a utilidade da abordagem proposta em problemas de *portfolio* multiobjetivo próximos da realidade, utilizando como referência os mercados Euronext e FTSE100.

A presente dissertação encontra-se dividida em cinco Capítulos:

- Neste Capítulo, “Introdução”, são expostas as motivações conducentes à realização deste trabalho e é efetuado um pequeno resumo de cada um dos Capítulos da dissertação, sendo referidas as contribuições mais relevantes.

- No Capítulo 1, “Modelos de *portfólio* multiobjetivo com coeficientes intervalares”, antes de explorar a formulação dos modelos de *portfólio* multiobjetivo com coeficientes intervalares, são abordados os conceitos e propriedades básicas da teoria dos números intervalares. De seguida, são apresentados alguns conceitos básicos da Programação Linear Multiobjetivo (PLMO) com coeficientes fixos e com coeficientes intervalares, aplicáveis no contexto dos modelos de *portfólio* multiobjetivo utilizados neste trabalho. A descrição do estudo dos modelos de *portfólio* considerados é efetuada, fazendo-se referência explícita às funções objetivo e restrições consideradas nos modelos. Finalmente, expõe-se uma abordagem para o tratamento de incerteza dos modelos usados, descrevendo-se a metodologia utilizada para a obtenção dos modelos determinísticos substitutos.
- No Capítulo 2, “Um modelo de *portfólio* multiobjetivo com coeficientes intervalares aplicado aos mercados Euronext e FTSE 100”, expõe-se a metodologia seguida para obtenção dos dados que são utilizados para instanciar os modelos desenvolvidos no Capítulo 1 e são construídos os modelos com base nesses dados.
- No Capítulo 3, “Discussão dos resultados obtidos”, são analisados os resultados obtidos nas diferentes etapas do algoritmo descrito no Capítulo 2, que permite a um investidor (real ou hipotético) obter carteiras de ações possivelmente eficientes, atendendo a três tipos de estratégias de investimento, ou seja, uma estratégia conservadora, uma estratégia agressiva e uma estratégia combinada.
- No Capítulo 4, “Conclusão”, são apresentadas as principais conclusões deste trabalho e sugeridas algumas pistas de desenvolvimento futuro.

Os principais contributos deste trabalho foram, em síntese, os seguintes:

- Proposta de um modelo de *portfólio* multiobjetivo intervalar com três funções objetivo – minimização do risco, maximização da liquidez e do retorno, considerando o modelo de desvio médio semi-absoluto como medida do risco, incorporando restrições intervalares relativamente aos montantes máximos de investimento afetos aos vários ativos, de modo a garantir um nível mínimo de diversificação do *portfólio* dos ativos, e contemplando restrições de cardinalidade intervalares.

- Apresentação de uma metodologia para obtenção de soluções possivelmente eficientes dos problemas de *portfolio* multiobjetivo intervalares, que permite adotar três tipos de estratégias de investimento, ou seja, uma estratégia conservadora, uma estratégia agressiva e uma estratégia combinada.
- Desenvolvimento de um vasto trabalho de recolha de dados, de modo a ser obtido um modelo de *portfolio* multiobjetivo próximo da realidade, para o estudo das interações entre o risco, o retorno e a liquidez, salientando a utilidade da abordagem utilizada no apoio à decisão deste tipo de problemas.

1 MODELOS DE *PORTFOLIO* MULTIOBJETIVO COM COEFICIENTES INTERVALARES

Na realidade, as decisões estratégicas de investimento são efetuadas num ambiente crescentemente complexo, caracterizado por evoluções e alterações permanentes da tecnologia e do ambiente económico.

O ambiente de tomada de decisão é marcado pela existência de diferentes eixos de avaliação, caracterizados por objetivos múltiplos e conflituosos. Neste âmbito, os modelos matemáticos de apoio à decisão, em particular os modelos de *portfolio* com objetivos múltiplos, permitem captar uma diversidade de aspetos de avaliação, onde o investidor se depara com a necessidade de procurar compromissos entre objetivos (Steuer, 1986; Roy, 1985, 1990; Clímaco, Antunes & Alves, 2003; Antunes, Alves & Clímaco, 2016).

Os modelos de *portfolio* multiobjetivo tradicionais consideram os coeficientes do modelo como um dado certo. No entanto, nos problemas de investimento reais, a presença de determinados fatores de incerteza não deve ser omitida, quer na perceção e análise do próprio problema, quer no estudo das soluções. Por vezes, não existe informação suficiente que permita especificar de modo exato o retorno, o risco e a liquidez dos ativos. Por este motivo, é conveniente considerar a extensão dos modelos de *portfolio*, onde se assume o carácter determinístico dos coeficientes do modelo, para ambientes onde a influência intrínseca da incerteza prevalece.

A incerteza pode resultar da imprecisão e das oscilações dos dados que instanciam os modelos, da subjetividade do Ser Humano, da imprecisão presente na modelação da realidade, da ocorrência de imponderáveis relevantes e das simplificações assumidas devido à complexidade crescente dos problemas reais (Bellman & Zadeh, 1970; Gal & Greenberg, 1997; Zimmermann, 2012).

Assim, é importante contemplar o tratamento da incerteza na construção dos modelos de *portfolio*, bem como na interpretação e análise das soluções obtidas com o auxílio das ferramentas de apoio à decisão.

Existem diferentes técnicas para efetuar o tratamento da incerteza em modelos de programação matemática, dependendo, essencialmente, do tipo de informação disponível, da informação que o decisor pretende obter e do modo como este apreende a imprecisão

inerente ao modelo e aos dados, das quais se destacam a programação difusa, a programação estocástica e a programação intervalar.

A programação difusa resulta da aplicação da teoria dos conjuntos difusos no domínio dos métodos de decisão, permitindo tornar menos rígidas as noções de satisfação das restrições e de otimização das funções objetivo (Bellman & Zadeh, 1970).

A programação estocástica requer a existência de dados estatísticos suficientes para obter as funções de distribuição das variáveis aleatórias do modelo matemático, ou o uso de probabilidades subjetivas quando este tipo de informação não exista.

A programação intervalar possui algumas características interessantes, porque não requer a especificação das distribuições *probabilísticas* (como na programação estocástica) ou das distribuições *possibilísticas* (como na programação difusa) dos coeficientes do modelo. Na teoria de programação intervalar assume-se que existe informação sobre as gamas de variação possíveis de alguns (ou de todos) os coeficientes, permitindo especificar um modelo de programação matemática intervalar (Oliveira & Antunes, 2007).

Geralmente, os modelos de *portfolio* intervalares têm sido desenvolvidos considerando que o investidor decide aplicar a sua riqueza num pequeno número de ativos, considerando apenas a incerteza nas funções objetivo. Neste âmbito, Lai et al. (2002), Bhattacharyya et al. (2011) e Zhang (2016) consideram apenas o retorno como incerto, sendo tratado como um intervalo, e Giove et al. (2006) apenas contemplam os preços dos títulos dados em intervalos. Deste modo, pretende-se apresentar uma abordagem metodológica que permita apoiar os investidores na escolha de *portfolios* possivelmente eficientes, que reduza a complexidade computacional do problema, mesmo quando o tratamento da incerteza envolva quer as funções objetivo, quer as restrições do problema.

Este Capítulo procura, assim, descrever o desenvolvimento de um modelo de *portfolio* com coeficientes intervalares, encontrando-se organizado da seguinte forma: na Secção 1.1 são abordados os conceitos e propriedades básicos da teoria dos números intervalares; nas Secções 1.2 e 1.3 são apresentados alguns conceitos básicos da PLMO e da PLMO intervalar, aplicáveis no contexto dos modelos de *portfolio* multiobjetivo considerados neste trabalho; na Secção 1.4 expõe-se o estudo de modelos de *portfolio* com coeficientes intervalares; na Secção 1.5 são apresentados três modelos matemáticos assentes na

abordagem sugerida em Henriques & Neves (2017), que permitem explorar três estratégias distintas de investimento.

1.1 Números intervalares¹

Considere-se que o valor x (um número real) é incerto, sabendo-se apenas que x se localiza entre dois números reais a^L e a^U , em que $a^L < a^U$, que formam um intervalo. Todos os números pertencentes a este intervalo possuem a mesma importância.

Um *número intervalar* A define-se como o conjunto de números reais x tal que $a^L \leq x \leq a^U$, ou seja, $x \in [a^L, a^U]$, $a^L, a^U \in \mathfrak{R}$, ou ainda,

$$A = [a^L, a^U] = \{x: a^L \leq x \leq a^U, x \in \mathfrak{R}\}. \quad (1.1)$$

Deste modo, o intervalo fechado (1.1) representa um número incerto $x \in [a^L, a^U]$, onde a^L e a^U são os limites ou extremos do intervalo.

Um número intervalar $A = [a^L, a^U]$ é um *ponto intervalar* (*point interval number*) se $a^L = a^U$.

Dois números intervalares $A = [a^L, a^U]$ e $B = [b^L, b^U]$ são iguais se e só se $a^L = b^L$ e $a^U = b^U$.

Um intervalo considera-se ilimitado quando os limites superior e/ou inferior são infinitos. Os intervalos dados a seguir, por exemplo, são ilimitados: $[-\infty, 3]$, $[6, +\infty]$, $[-\infty, +\infty]$.

O número intervalar $A^- = [a^L, a^U]^- = [-a^U, -a^L]$ é o simétrico do número intervalar $A = [a^L, a^U]$.

O número intervalar $A^{-1} = [a^L, a^U]^{-1} = [\frac{1}{a^U}, \frac{1}{a^L}]$, com $0 \notin [a^L, a^U]$, corresponde ao *número inverso* do número intervalar $A = [a^L, a^U]$.

A *amplitude* do número intervalar $A = [a^L, a^U]$ é $w[A] = a^U - a^L$.

¹ Esta Secção baseia-se em Henriques (2009).

O *ponto médio* (ou o valor central) do número intervalar $A = [a^L, a^U]$ é $m[A] = \frac{1}{2} (a^U + a^L)$.

1.1.1 Operações aritméticas entre números intervalares

Um determinado operador \diamond entre dois números reais pode expandir-se de modo a ser utilizado entre intervalos. As operações possivelmente expandidas correspondem às operações tradicionalmente utilizadas entre números intervalares (Moore, 1966; Alefeld & Herzberger, 1983); Bojadziev & Bojadziev, 1996). Quando nada for dito referimo-nos, por omissão, a esta perspectiva e consideramos que o operador (\diamond) é igual a \diamond .

Deste modo, para os números intervalares $A = [a^L, a^U]$ e $B = [b^L, b^U]$, com $0 \notin B$, pode estabelecer-se o operador (\diamond) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A (\diamond) B &= \{ z : z = x \diamond y, x \in A, y \in B \} = \\ &= \{ z : z = x \diamond y, x \in [a^L, a^U], y \in [b^L, b^U] \}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde $A (\diamond) B$ permite estimar a região possível do valor $x \diamond y$, de tal modo que $x \in A$ e $y \in B$. Neste sentido, um operador (\diamond) designa-se por “*operador possivelmente expandido de \diamond* ” (Inuiguchi & Kume, 1991).

A *adição possivelmente expandida* (ou *adição possível*) de números intervalares é definida por:

$$A (+) B = [a^L, a^U] (+) [b^L, b^U] = [a^L + b^L, a^U + b^U]. \quad (1.3)$$

A *subtração possivelmente expandida* (ou *subtração possível*) de números intervalares é definida por:

$$A (-) B = [a^L, a^U] (-) [b^L, b^U] = [a^L - b^U, a^U - b^L]. \quad (1.4)$$

A *adição* e a *subtração* possíveis permitem concluir que:

$$m[A (+) B] = m[A] + m[B], \quad (1.5)$$

$$m[A (-) B] = m[A] - m[B], \quad (1.6)$$

$$w[A (+) B] = w[A (-) B] = w[A] + w[B], \quad (1.7)$$

Refira-se que as amplitudes dos intervalos $A (+) B$ e $A (-) B$ são sempre superiores ou iguais às dos intervalos A ou B .

O *máximo possivelmente expandido* (ou máximo possível) de números intervalares é definido por:

$$A (\vee) B = [a^L \vee b^L, a^U \vee b^U]. \quad (1.8)$$

A multiplicação de um número intervalar por um escalar é definida por:

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a^L, \lambda a^U], \lambda \geq 0, \\ [\lambda a^U, \lambda a^L], \lambda \leq 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

O módulo de um número intervalar obtém-se do seguinte modo:

$$|A| = \begin{cases} [a^L, a^U], a^L \geq 0, \\ [0, (-a^L) \vee a^U], a^L < 0 < a^U, \\ [-a^U, -a^L], a^U \leq 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $a \vee b = \max(a, b)$.

1.2 Modelos de PLMO

Um modelo de PLMO consiste, sem perda de generalidade², na otimização de p funções objetivo lineares, sujeitas a um conjunto de restrições também lineares³:

² Para as funções objetivo a minimizar e para as restrições do tipo “ \geq ” e “ $=$ ” deverão efetuar-se as conversões convenientes.

³ Para um aprofundamento dos modelos de programação linear multiobjetivo, indicam-se como referências, por exemplo, as obras de Steuer (1986), Antunes et al. (2016) e o livro escrito, em língua portuguesa, de Clímaco et al. (2003).

$$\text{Max } z_1(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_1\mathbf{x},$$

$$\text{Max } z_2(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_2\mathbf{x},$$

...

$$\text{Max } z_p(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_p\mathbf{x},$$

$$\text{s.a: } \mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n: \mathbf{x} \geq 0, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^m\}. \quad (2.11)$$

ou, na forma matricial,

$$\text{Max } \mathbf{z}(\mathbf{x}) = C\mathbf{x},$$

$$\text{s.a: } \mathbf{x} \in X. \quad (1.13)$$

onde p é o número de funções objetivo; n é o número de variáveis de decisão; m é o número de restrições; \mathbf{x} é o vetor das variáveis de decisão; \mathbf{c}_k é o vetor dos coeficientes da função objetivo z_k , com $k = 1, \dots, p$; X é a região admissível do espaço das variáveis de decisão; A é a matriz dos coeficientes tecnológicos (de característica m); \mathbf{b} é o vetor dos termos independentes; C é a matriz dos coeficientes das funções objetivo, de dimensão $(p \times n)$, cujas linhas são os vetores \mathbf{c}_k ; “Max” representa a operação de determinar soluções eficientes, considerando-se, sem perda de generalidade, que as funções objetivo são todas a maximizar.

Em modelos com apenas um objetivo, o valor ótimo da função objetivo é único, mesmo que existam soluções ótimas alternativas. Perante a existência de múltiplas funções objetivo, não existe, em geral, uma solução admissível, $\mathbf{x} \in X$, que otimize simultaneamente todas as funções objetivo. Deste modo, a noção de solução ótima dá lugar à noção de *solução eficiente* (ou *ótima de Pareto*). Uma solução admissível para um modelo de PLMO é *eficiente* se, e só se, não existir outra solução admissível que melhore o valor de uma função objetivo, sem piorar o valor de, pelo menos, outra função objetivo.

De acordo com Markowitz (1959), um *portfolio* é eficiente (num problema de *portfolio* que contemple apenas como funções objetivo a maximização de retorno e a minimização de risco), se só for possível aumentar o retorno do *portfolio*, sacrificando a sua variabilidade e vice-versa (isto é, se só for possível reduzir a variabilidade do *portfolio*, sacrificando o seu retorno).

O conjunto das soluções eficientes pode definir-se da seguinte forma:

$$X_E = \{ \mathbf{x} \in X: \nexists \mathbf{x}' \in X: \mathbf{z}(\mathbf{x}') \geq \mathbf{z}(\mathbf{x}) \text{ e } \mathbf{z}(\mathbf{x}') \neq \mathbf{z}(\mathbf{x}) \}, \quad (1.13)$$

ou seja, $\mathbf{x} \in X$ é *eficiente* se, e só se, não existir outro $\mathbf{x}' \in X$, de tal modo que $z_k(\mathbf{x}') \geq z_k(\mathbf{x})$ para todo o k e $z_k(\mathbf{x}') > z_k(\mathbf{x})$ para pelo menos um k ($k = 1, \dots, p$).

O conjunto das soluções fracamente eficientes é definido da seguinte forma:

$$X_{FE} = \{ \mathbf{x} \in X: \nexists \mathbf{x}' \in X: \mathbf{z}(\mathbf{x}') > \mathbf{z}(\mathbf{x}) \}. \quad (1.14)$$

Deste modo, uma solução $\mathbf{x}^* \in X$ é *fracamente eficiente* relativamente à matriz C do modelo (1.12) (ou seja, $\mathbf{x}^* \in X_{FE}$) se e só se não existir outra solução $\mathbf{x} \in X$ tal que $C\mathbf{x} > C\mathbf{x}^*$, isto é, se, e só se, não existir outra solução $\mathbf{x} \in X$ tal que $\mathbf{z}(\mathbf{x}) > \mathbf{z}(\mathbf{x}^*)$ (ou seja, se, e só se, não existir outra solução \mathbf{x} que melhore estritamente o valor de todas as funções objetivo).

A determinação de uma solução eficiente do modelo de PLMO pode ser feita a partir da resolução de um modelo de programação linear com uma função escalar substituta, que incorpora parâmetros de representação das preferências do decisor, cuja solução ótima é eficiente do modelo multiobjetivo. A função substituta utilizada para construir um equivalente escalar do modelo de PLMO é geralmente designada por *função escalarizante*.

Uma forma de *escalarização* muito utilizada⁴ corresponde à otimização de uma soma ponderada das funções objetivo. Cada função objetivo é afetada por um coeficiente de ponderação (*peso*) λ_k , de modo a construir uma função objetivo escalar que corresponde à soma ponderada das p funções objetivo:

$$\text{Max } \sum_{k=1}^p \lambda_k z_k(\mathbf{x}),$$

s.a: $\mathbf{x} \in X$,

⁴ Existem outras formas de *escalarização* que podem ser consultadas em qualquer obra de referência da PLMO (Steuer, 1986; Roy, 1985, 1990; Clímaco et al., 2003; Antunes et al. 2016). Refere-se apenas esta, uma vez que será utilizada no processo de obtenção de soluções dos problemas de *portfolio* apresentados neste Capítulo.

$$\lambda \in \Lambda, \tag{1.45}$$

onde Λ é o conjunto de todos os vetores de pesos $\Lambda = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1\}$.

A otimização de uma função escalar soma ponderada conduz à obtenção de uma solução eficiente do modelo de PLMO original quando a solução ótima do modelo escalar é única, mesmo com algum $\lambda_k = 0$. A otimização de uma função escalar soma ponderada com algum $\lambda_k = 0$ pode conduzir a soluções fracamente eficientes do modelo multiobjetivo se o modelo escalar tiver ótimos alternativos. Neste caso, a eficiência (estrita) da solução obtida só é garantida se todos os pesos, λ_k ($k=1, \dots, p$), forem estritamente positivos.

1.3 Modelos de PLMO com coeficientes intervalares⁵

A programação intervalar tem sido utilizada para efetuar o tratamento da incerteza em situações específicas da PLMO (Oliveira & Antunes, 2007). Neste contexto, o tratamento da incerteza pode ser efetuado apenas nas funções objetivo (Bitran, 1980; Steuer, 1981; Inuiguchi & Kume, 1991; Inuiguchi, Higashitani & Tanino, 1999; Antunes & Clímaco, 2000; Ida, 1999, 2000a, 2000b, 2005; Wang & Wang, 2001a; Oliveira, Antunes & Barrico, 2014) e nos termos independentes das restrições (Wang & Wang, 2001b) ou em todos os coeficientes do modelo (Urli & Nadeau, 1992; Oliveira & Antunes, 2008).

Inuiguchi & Kume (1994) e Inuiguchi & Sakawa (1995) consideram duas abordagens distintas para tratar os modelos de PLMO com funções objetivo intervalares: as abordagens de satisfação (*satisficing approach*) e de otimização (*optimizing approach*).

Na abordagem de satisfação, cada função objetivo intervalar é transformada numa ou em várias funções objetivo (o limite inferior, o limite superior e o valor central dos intervalos são geralmente utilizados), de modo a obter uma solução de compromisso. Por outro lado, a abordagem de otimização estende o conceito de eficiência, tradicionalmente utilizado em PLMO, para o caso da PLMO com coeficientes intervalares.

Bitran (1980) sugeriu, neste contexto, dois tipos de soluções eficientes: uma solução é *necessariamente eficiente* se for eficiente para qualquer combinação de vetores de

⁵ Esta Secção baseia-se em Henriques (2009) e em Oliveira & Antunes (2007).

coeficientes das funções objetivo, dentro das suas gamas de variação admissíveis; a solução diz-se *possivelmente eficiente* se for eficiente para, pelo menos, uma combinação de vetores de coeficientes das funções objetivo, dentro das suas gamas de variação admissíveis. As soluções necessariamente eficientes são consideradas as mais robustas e as possivelmente eficientes são as mais otimistas (Ida, 1999).

O modelo de programação linear multiobjetivo com coeficientes intervalares pode ser dado, sem perda de generalidade, por⁶:

$$\text{Max } Z_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n [c_{kj}^L, c_{kj}^U] x_j, k = 1, \dots, p,$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n [a_{ij}^L, a_{ij}^U] x_j \leq [b_i^L, b_i^U], i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \tag{1.16}$$

onde $[c_{kj}^L, c_{kj}^U]$, $[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ e $[b_i^L, b_i^U]$, $k = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$, são intervalos fechados.

1.3.1 O melhor valor ótimo e o pior valor ótimo

Os ótimos individuais obtidos com as versões extremas das regiões admissíveis e com as formulações extremas das funções objetivo permitem obter o *melhor valor ótimo* e o *pior valor ótimo* (terminologia adotada em Chinneck & Ramadan (2000)).

O melhor valor ótimo é obtido com a formulação mais favorável da função objetivo, considerando a região admissível mais abrangente. Por outro lado, o pior valor ótimo obtém-se com a região admissível menos abrangente, fazendo recurso à formulação menos favorável da função objetivo.

Considere-se, sem perda de generalidade, o seguinte modelo de programação linear com coeficientes intervalares na função objetivo e nas restrições:

⁶ Para um aprofundamento das questões relacionadas com modelos de programação linear multiobjetivo com coeficientes intervalares, indica-se como referência Oliveira & Antunes (2007) e Henriques (2009).

$$\text{Min } Z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n [c_j^L, c_j^U] x_j,$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n [a_{ij}^L, a_{ij}^U] x_j \geq [b_i^L, b_i^U], i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, j=1, \dots, n. \quad (1.17)$$

onde $[c_j^L, c_j^U]$, $[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ e $[b_i^L, b_i^U]$, $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$, pertencem a $I(\mathfrak{R})$, onde $I(\mathfrak{R})$ é o conjunto de todos os números intervalares em \mathfrak{R} e $x_j \in \mathfrak{R}$.

Algoritmo que permite determinar o melhor valor ótimo e o pior valor ótimo

Passo 1. Obtenção do melhor valor ótimo

Resolve-se o modelo de programação linear I:

$$\text{Min } Z^L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c'_j x_j, \text{ onde, para } x_j \in \mathbf{x}^{si}, c'_j = \begin{cases} c_j^L, & \text{se } x_j \geq 0, \\ c_j^U, & \text{se } x_j \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j \geq b_i^L, i = 1, \dots, m, \text{ onde, para } x_j \in \mathbf{x}^{si}, a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^U, & \text{se } x_j \geq 0, \\ a_{ij}^L, & \text{se } x_j \leq 0. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

Passo 2. Obtenção do pior valor ótimo

Resolve-se o modelo de programação linear II:

$$\text{Min } Z^U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c''_j x_j, \text{ onde, para } x_j \in \mathbf{x}^{si}, c''_j = \begin{cases} c_j^U, & \text{se } x_j \geq 0, \\ c_j^L, & \text{se } x_j \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n a''_{ij} x_j \geq b_i^U, i = 1, \dots, m, \text{ onde, para } x_j \in \mathbf{x}^{si}, a''_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^L, & \text{se } x_j \geq 0, \\ a_{ij}^U, & \text{se } x_j \leq 0. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

Considere-se que $\underline{x} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$ é a solução ótima do modelo de programação linear I, sendo Z^L o valor ótimo, e que $\bar{x} = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)^T$ é a solução ótima do modelo de programação linear II, sendo Z^U o valor ótimo.

A melhor solução é $\underline{x} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$, com o valor ótimo Z^L e o cenário de coeficientes c'_j, a'_{ij} e $b'_i, i = 1, \dots, m$.

A pior solução é $\bar{x} = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)^T$, com o valor ótimo Z^U e o cenário de coeficientes c''_j, a''_{ij} e $b''_i, i = 1, \dots, m$.

Deste modo, $Z = [Z^L, Z^U]$, ou seja, o valor ótimo do modelo encontra-se entre Z^L (no melhor cenário) e Z^U (no pior cenário), dependendo dos cenários considerados para os coeficientes intervalares.

1.4 Modelos de *portfolio* multiobjetivo

Considere-se que os investidores aplicam a sua riqueza em n ativos, que oferecem uma taxa de retorno aleatória e que o problema de *portfolio* considerado está assente num modelo de investimento efetuado num único período.

Nas próximas secções deste Capítulo, apresentam-se os pressupostos considerados na construção dos modelos de *portfolio* multiobjetivo, baseados em Henriques & Neves (2017), descrevendo-se as funções objetivo e as restrições do problema.

1.4.1 Funções objetivo

Um *portfolio* é composto por dois ou mais ativos representados por $\Theta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde x_i é a proporção investida no $i^{\text{ésimo}}$ ativo.

1.4.1.1 Retorno

O retorno do ativo ou a taxa de retorno é definida para um determinado período t como:

$$r_{it} = \frac{(p_{it}) - (p_{it-1}) + (d_{it})}{(p_{it-1})} \quad (1.18)$$

onde p_{it} é o preço de fecho do $i^{\text{ésimo}}$ ativo durante o período t , p_{it-1} é o preço de fecho do $i^{\text{ésimo}}$ ativo durante o período $t-1$ e d_{it} é o dividendo do $i^{\text{ésimo}}$ ativo durante o período t . O

valor esperado ($E[\cdot]$) da taxa de retorno, R_i ($i = 1, 2, \dots, n$), é uma variável aleatória que é considerada aproximadamente igual à média dos retornos históricos, ou seja,

$$r_i = E[R_i] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it}. \quad (1.19)$$

Em geral, a média aritmética dos retornos passados é considerada como uma *proxy* do retorno esperado de um ativo. No entanto, em problemas de *portfolio* reais, os preços dos ativos e os retornos obtidos estão sujeitos a um conjunto de fatores cujo comportamento não pode ser apenas aferido com base em dados históricos (Gupta et al., 2014). De facto, a utilização da média aritmética dos retornos históricos como retorno esperado pode apresentar um óbice na análise do problema, em particular, se os dados históricos considerados respeitarem a um longo período de tempo. Neste caso, a influência dos dados mais antigos tem o mesmo peso que a dos dados mais recentes.

Assim, pode ser útil efetuar o tratamento da incerteza do retorno esperado de um ativo através da utilização de números intervalares. Nestas circunstâncias, o retorno do *portfolio* pode ser expresso como:

$$\sum_{i=1}^n [r_i^L, r_i^U] x_i = [\sum_{i=1}^n r_i^L x_i, \sum_{i=1}^n r_i^U x_i], \quad (1.20)$$

onde $[r_i^L, r_i^U]$ é o retorno intervalar.

1.4.1.2 Risco

Normalmente, um investidor prefere que o retorno do *portfolio* seja o maior possível e que a sua dispersão/variabilidade seja a menor possível. Neste contexto, Markowitz (1952) sugeriu a variância para quantificar o risco de um *portfolio*. Embora, a variância possa ser utilizada como medida de risco, uma das principais limitações à sua utilização reside no facto de poder penalizar os ganhos em detrimento das perdas. Assim, quando a distribuição de probabilidade do retorno dos ativos é assimétrica, a variância pode tornar-se uma medida pouco apropriada para medir o risco, podendo o *portfolio* selecionado sacrificar maiores retornos esperados (Chunhachinda, Dandapani, Hamid & Prakash, 1997). Para colmatar este problema, Markowitz (1968) sugeriu a semi-variância, que é uma medida de risco que apenas considera os desvios negativos em relação a um determinado nível de retorno de referência. A sua vantagem em relação à variância consubstancia-se no facto de não considerar a obtenção de ganhos como um risco, sendo, portanto, uma medida adequada quando os investidores estão preocupados com o desempenho insuficiente do *portfolio* e não com o desempenho excessivo. Não obstante

este facto, a implementação de modelos de seleção de *portfolio* assentes nesta medida de risco pode tornar-se facilmente muito complexa em termos de esforço computacional, em particular se a carteira possuir um número de ativos elevado e se o problema de *portfolio* possuir variáveis inteiras.

Em 1994, a JP Morgan sugeriu outra medida de risco também designada por *Value-at-Risk* (Longerstaey & Spencer, 1996), que também encerra algumas desvantagens inerentes à sua aplicação. Por um lado, esta abordagem conduz a um problema de otimização que não é convexo e, por outro, não permite expressar os benefícios de diversificação (Cesarone et al., 2011). O *Value-at-Risk* condicional, é uma outra medida de risco que surgiu com base neste conceito, apresentando o mesmo tipo de problemas intrínsecos à sua aplicação, sendo também designada por *Mean Excess Loss*, *Mean Shortfall* ou *Tail Var* (Rockafellar & Uryasev, 2000).

A maximização do retorno mínimo (perda máxima) pode também ser encarada como medida de risco (Young, 1998):

$$\text{Max Min } \sum_{i=1}^n r_{it} x_i, t = 1, \dots, T. \quad (1.21)$$

Young (1998) defendeu o uso desta medida de risco quando o problema de otimização de *portfolio* envolve um grande número de variáveis de decisão (incluindo variáveis inteiras), ou quando o investidor é mais avesso ao risco do que é implícito na minimização clássica da variância. No entanto, apesar da sua simplicidade, essa formulação pode conduzir a uma solução impossível se os ativos gerarem um retorno negativo.

Uma abordagem diferente, que permite substituir a formulação clássica de Markowitz, consiste em utilizar a função de desvio absoluto como medida de risco (Konno & Yamazaki, 1991; Mansini & Speranza, 1999; Rudolf, Walter & Zimmermann, 1999).

O desvio absoluto de uma variável aleatória é o valor absoluto esperado da diferença entre a variável aleatória e a sua média. O risco de *portfolio* medido como desvio absoluto pode ser obtido da seguinte forma:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i| \quad (1.22)$$

Uma vez que os retornos esperados dos ativos são considerados como números intervalares, o desvio absoluto esperado do retorno do *portfolio* abaixo do retorno esperado também pode ser visto como um número intervalar:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\sum_{i=1}^n (r_{it} - [r_i^L, r_i^U]) x_i| \quad (1.23)$$

Konno & Yamazaki (1991) concluíram que, se o retorno for normalmente distribuído e multivariado, a minimização do desvio absoluto fornece resultados similares à formulação clássica de Markowitz. Ainda a este respeito, Rudolf et al. (1999) argumentam que a minimização do desvio absoluto é equivalente à maximização da utilidade esperada sob aversão ao risco.

Esta formulação matemática como medida de risco possui ainda várias vantagens, uma vez que não requer a estimativa da matriz de variância/covariância, permitindo a obtenção de soluções, mesmo quando todos os ativos geram um retorno negativo. Este modelo também é suficientemente flexível para ser formulado como um problema de programação linear inteira mista, permitindo a incorporação de outros aspetos igualmente importantes na formulação do problema (por exemplo, custos fixos e variáveis associados à compra dos ativos), sendo facilmente implementado, mesmo quando é considerado um grande número de ativos (Mansini & Speranza, 1999).

Após o trabalho de Konno & Yamazaki (1991), Speranza (1993) propôs o desvio médio semi-absoluto como medida alternativa para quantificar o risco e concluiu que, considerando a função de risco como uma combinação linear dos desvios semi-absolutos, (isto é, desvios médios abaixo e acima do retorno da carteira), pode ser obtido um modelo equivalente ao modelo de desvio médio absoluto, sempre que a soma dos coeficientes da combinação linear é positiva. Finalmente, estes autores também mostraram que este modelo é equivalente ao modelo de Markowitz, se os retornos forem normalmente distribuídos. O desvio semi-absoluto esperado de retorno da carteira abaixo do retorno esperado é dado por:

$$\sum_{t=1}^T \frac{|\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i| + \sum_{i=1}^n (r_i - r_{it}) x_i}{2T} \quad (1.24)$$

O modelo de desvio médio semi-absoluto reduz o número de restrições do problema para metade em relação ao modelo de desvio médio absoluto, uma vez que requer apenas T restrições de linearização, enquanto o modelo de desvio médio absoluto requer 2T restrições de linearização.

Se os retornos esperados dos ativos forem dados como números intervalares, o desvio médio semi-absoluto esperado do retorno do *portfolio* abaixo do retorno esperado também é um número intervalar:

$$\left[\sum_{t=1}^T \frac{|\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^L)x_i| + \sum_{i=1}^n (r_i^L - r_{it})x_i}{2T}, \sum_{t=1}^T \frac{|\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^U)x_i| + \sum_{i=1}^n (r_i^U - r_{it})x_i}{2T} \right] \quad (1.25)$$

1.4.1.3 Liquidez

A liquidez é um eixo de avaliação relevante das decisões de investimento, dada a sua relação com os custos de transação. Teoricamente, os investidores que compram ações ilíquidas exigem maiores retornos para serem compensados pela exposição ao risco. Portanto, a liquidez pode também ser encarada como um fator de risco adicional (Pastor & Stambaugh, 2003; Martinez, 2005; Hearn, 2011).

Na literatura existem diversas medidas de liquidez. Neste âmbito, o *bid-ask spread* expressa um indicador de iliquidez e consiste na diferença entre o preço mais elevado que um comprador está disposto a pagar (*bid*) e o preço mais baixo que um vendedor está disposto a aceitar (*ask*), num determinado momento (Amihud & Mendelson, 1986). Quanto maior for a diferença entre estes valores, menor será a liquidez do ativo. A necessidade de grandes fluxos de informação e a sua indisponibilidade nalguns mercados coloca restrições à sua utilização. Não obstante, este indicador apresenta como principal vantagem a capacidade de medir o custo de transação do ativo.

Por outro lado, o rácio de iliquidez proposto por Amihud (2002), mede o comportamento do preço dos ativos em relação aos volumes transacionados. Neste contexto, um ativo será tanto mais líquido quanto menor o impacto do volume transacionado no preço. A facilidade em obter a informação necessária para calcular este rácio e o facto de refletir as alterações de preço face ao volume de transações são indicados como vantagens da sua utilização.

Finalmente, o *turnover*, como medida de liquidez, permite medir o volume de títulos transacionados, ou seja, mede a relação entre a quantidade de ações negociadas e a quantidade de ações em circulação. Valores mais elevados para este rácio significam um nível de liquidez mais elevado. A principal desvantagem na utilização deste rácio consiste na sua insensibilidade à variação do preço dos ativos.

O cálculo da liquidez através da taxa de *turnover* é frequentemente utilizado na literatura, devido à acessibilidade da informação necessária para o seu cálculo (Datar, Naik & Radcliffe, 1998; Korczak & Bohl, 2005; Chordia, Subrahmanyam & Tong, 2014; Gupta et al., 2014; Foran, Hutchinson & O’Sullivan, 2015). Por esse motivo, foi o indicador utilizado neste trabalho como *proxy* da liquidez.

O *turnover* de um título i é dado por (Foran et al., 2015):

$$L_i = Turn_{s,m} = \frac{1}{n_{s,m}} \sum_{t=1}^{n_{s,m}} \frac{Vol_{s,t}}{SO_{s,t}} \quad (1.26)$$

onde $Vol_{s,t}$ é o número de ações transacionadas no dia t , $SO_{s,t}$ é o número de ações em circulação e s,m é o número de observações diárias no mês m .

Analogamente ao que foi efetuado anteriormente, é possível considerar a liquidez do *portfolio* como um número intervalar. A liquidez do *portfolio* é expressa por:

$$\sum_{i=1}^n [L_i^L, L_i^U] x_i = [\sum_{i=1}^n L_i^L x_i, \sum_{i=1}^n L_i^U x_i] \quad (1.27)$$

onde $[L_i^L, L_i^U]$ é a gama de variação dos valores de liquidez do ativo i .

1.4.2 Restrições

1.4.2.1 Restrição orçamental

Como x_i é a proporção de riqueza investida no ativo i , esta restrição impõe que o montante máximo investido em ativos não exceda os 100% da riqueza investida:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (1.28)$$

1.4.2.2 Frações máximas de investimento nos vários ativos

A fração máxima de investimento afeta aos ativos de uma carteira depende de vários fatores. Para alcançar um determinado nível de diversificação, considera-se o limite superior desta restrição dado no intervalo $[u_i^L, u_i^U]$, do seguinte modo:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq [u_i^L, u_i^U] y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.29)$$

onde y_i é uma variável binária que indica se o $i^{\text{ésimo}}$ ativo se encontra ou não contido no *portfolio*.

1.4.2.3 Número máximo de ativos mantidos em carteira

Os investidores podem diferir em relação ao número máximo de ativos que pretendem gerir num *portfolio*. Portanto, considera-se um número máximo de ativos dado num intervalo, $[h^L, h^U]$, obtendo-se a seguinte restrição:

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq [h^L, h^U]. \quad (1.30)$$

1.4.2.4 Não é permitida a venda a descoberto

A venda a descoberto ocorre quando um investidor não possui um ativo, mas estabelece uma posição de mercado vendendo o ativo em antecipação da queda do seu preço. Matematicamente, essa situação implica que o número de ativos na propriedade do investidor seja negativo. Em problemas matemáticos de *portfolio*, a venda a descoberto não é permitida, ou seja, os valores de x_i não podem assumir valores negativos, traduzindo-se na seguinte restrição:

$$x_i \geq 0, \text{ para } i (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.31)$$

1.4.3 Modelos de *portfolio* multiobjetivo com coeficientes intervalares

Uma vez que o modelo de desvio médio semi-absoluto reduz o número de restrições do problema para metade em relação ao modelo de desvio médio absoluto, os problemas de otimização do *portfolio* intervalares são obtidos considerando o desvio médio semi-absoluto como medida de risco.

1.4.3.1 Modelo de desvio médio semi-absoluto

$$\begin{aligned} & \text{Min } \left[\sum_{t=1}^T \frac{|\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^L) x_i| + \sum_{i=1}^n (r_i^L - r_{it}) x_i}{2T}, \sum_{t=1}^T \frac{|\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^U) x_i| + \sum_{i=1}^n (r_i^U - r_{it}) x_i}{2T} \right], \\ & \text{Max } \left[\sum_{i=1}^n r_i^L x_i, \sum_{i=1}^n r_i^U x_i \right], \\ & \text{Max } \left[\sum_{i=1}^n L_i^L x_i, \sum_{i=1}^n L_i^U x_i \right], \\ & \text{s.a. } \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^n y_i \leq [h^L, h^U], \\ & x_i \leq [u_i^L, u_i^U] y_i, i = 1, \dots, n, \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \\ & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.32)$$

O problema (1.32) pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^1, \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^2 \right], \\ & \text{Max } \left[\sum_{i=1}^n r_i^L x_i, \sum_{i=1}^n r_i^U x_i \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } [\sum_{i=1}^n L_i^L x_i, \sum_{i=1}^n L_i^U x_i], \\
 & \text{s.t. } \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\
 & \sum_{i=1}^n y_i \leq [h^L, h^U], \\
 & x_i \leq [u_i^L, u_i^U] y_i, i = 1, \dots, n, \\
 & p_t^1 + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^L) x_i \geq 0, t=1, 2, \dots, T, \\
 & p_t^1 + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^U) x_i \geq 0, t=1, 2, \dots, T, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \\
 & y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, n, \\
 & p_t^1 \geq 0, t=1, 2, \dots, T, \\
 & p_t^2 \geq 0, t=1, 2, \dots, T.
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.5 Métodos para a obtenção de *portofolios* possivelmente eficientes

Esta Secção apresenta três modelos matemáticos assentes na abordagem sugerida em Henriques & Neves (2017), que permitem explorar três estratégias distintas de investimento: um modelo respeitante à adoção de uma estratégia conservadora, um modelo referente à adoção de uma estratégia agressiva e um modelo alusivo à estratégia combinada.

Uma vez que o problema (1.33) é um problema PLMO intervalar, a determinação das soluções eficientes pode então ser feita a partir da resolução de um modelo de programação linear, fazendo recurso à otimização de uma soma ponderada das funções objetivo (Secção 1.2).

1.5.1 Estratégia conservadora

O investidor que procura adotar uma estratégia conservadora é mais avesso ao risco, estando mais preocupado com o risco do que com o retorno. Por este motivo, o investidor pretende maximizar o retorno e a liquidez e minimizar o risco no cenário de coeficientes mais adverso.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } (\varphi \sum_{i=1}^n r_i^L x_i - \tau \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^2 + \gamma L_i^L x_i), \\
 & \text{s.t. } \sum_{i=1}^n x_i = 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n y_i &\leq h^L, \\
 x_i &\leq u_i^L y_i, \quad i = 1, \dots, n, \\
 p_t^1 + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^U) x_i &\geq 0, \quad t=1, 2, \dots, T, \\
 x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
 y_i &\in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n, \\
 p_t^1 &\geq 0, \quad t=1, 2, \dots, T,
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

onde φ , τ e γ , são parâmetros que variam entre zero e um, representando os pesos que o investidor atribui a cada função objetivo.

1.5.2 Estratégia agressiva

O investidor que procura adotar uma estratégia agressiva é mais propenso ao risco, estando mais preocupado com o retorno do que com o risco. Por este motivo, o investidor pretende maximizar o retorno e a liquidez e minimizar o risco, atendendo apenas ao cenário de coeficientes mais favorável.

$$\begin{aligned}
 \text{Max } &(\varphi \sum_{i=1}^n r_i^U x_i - \tau \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^1 + \gamma L_i^U x_i) \\
 \text{s.t. } &\sum_{i=1}^n x_i = 1, \\
 \sum_{i=1}^n y_i &\leq h^U, \\
 x_i &\leq u_i^U y_i, \quad i = 1, \dots, n, \\
 p_t^1 + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^L) x_i &\geq 0, \quad t=1, 2, \dots, T, \\
 x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
 y_i &\in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n, \\
 p_t^1 &\geq 0, \quad t=1, 2, \dots, T.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

1.5.3 Estratégia combinada

Uma estratégia combinada permite ao investidor escolher uma abordagem mais equilibrada em relação ao risco e ao retorno.

$$\begin{aligned}
 \text{Max } &\rho \left(\varphi \sum_{i=1}^n r_i^L x_i - \tau \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^2 + \gamma L_i^L x_i \right) + (1-\rho) \left(\varphi \sum_{i=1}^n r_i^U x_i - \tau \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^1 + \gamma L_i^U x_i \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^n y_i \leq h^U - \delta(h^U - h^L), \\ & x_i + (-u_i^U + \delta_i(-u_i^L + u_i^U))y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ & p_t^1 + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^L) x_i \geq 0, \quad t=1, 2, \dots, T, \\ & p_t^1 + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i^U) x_i \geq 0, \quad t=1, 2, \dots, T, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ & y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n, \\ & p_t^1 \geq 0, \quad t=1, 2, \dots, T, \\ & p_t^2 \geq 0, \quad t=1, 2, \dots, T, \end{aligned} \tag{1.36}$$

onde ρ , δ e δ_i , $i = 1, \dots, n$, são índices de pessimismo variando entre zero (estratégia agressiva) e um (estratégia conservadora).

2 UM MODELO DE *PORTFOLIO* MULTIOBJETIVO COM COEFICIENTES INTERVALARES: EURONEXT E FTSE 100

Geralmente, em gestão de *portfolios*, utiliza-se uma abordagem *top-down* em relação à escolha dos ativos. A primeira etapa pode consistir, por exemplo, em decidir a percentagem de ações a adquirir de cada país. Enquanto, numa segunda etapa, se procede à escolha das ações mais representativas e dos seus pesos, nos países em análise. No passado recente, os investidores diversificavam as carteiras de ativos atendendo, predominantemente, ao fator geográfico (Baca, Garbe & Weiss, 2000). Adicionalmente, ao longo da última década, a maioria dos bancos Europeus tem seguido uma abordagem assente na diversificação geográfica, em relação aos *portfolios* internacionais (Ehling & Ramos, 2006).

Uma outra abordagem consiste, por exemplo, em determinar os fatores que influenciam a covariância dos retornos das ações. Neste contexto, Heston & Rouwenhorst (1995) demonstraram que o fator geográfico para efeitos de diversificação é geralmente uma estratégia melhor que o fator setorial. Outros autores, como Errunza & Padmanabhan (1988), Grinold, Rudd & Stefek (1989), Beckers, Grinold, Rudd & Stefek (1992), Drummen & Zimmermann (1992), Roll (1992), Arshanapalli, Doukas & Lang (1997), Griffin & Karolyi (1998), Rouwenhorst (1999) e Heckman (2001) obtiveram conclusões consistentes com estes resultados.

Mais recentemente, Bekaert, Hodrick & Zhang (2009) concluíram que o efeito da globalização aumenta a integração entre países, mas que este facto não modifica de forma considerável a importância do fator geográfico.

A escolha tradicional da diversificação geográfica começou, no entanto, a ser colocada em causa por duas razões fundamentais (Ehling & Ramos, 2006). Em primeiro lugar, a desregulação dos mercados e a eliminação das barreiras internacionais aos movimentos de capitais são consideradas como catalisadoras da integração dos mercados, podendo influenciar a importância do fator geográfico. Um exemplo paradigmático é o caso da União Monetária Europeia, onde existe uma política monetária única e políticas fiscais coordenadas, restringidas pelo Pacto de Estabilidade e Crescimento (PEC). Por este motivo, há quem defenda que a abordagem *top-down* deverá passar a ser conduzida ao nível setorial (ou industrial). Tal facto tem sido aceite, nomeadamente, pela banca de investimento, havendo bancos que passaram a atuar de acordo com esta estratégia de diversificação (Ehling & Ramos, 2006).

Em segundo lugar, existe um vasto leque de estudos que apresenta resultados inconclusivos em relação à estratégia de diversificação setorial e industrial.

Vários autores têm defendido a perda da importância do fator geográfico, advogando que a diversificação setorial de uma carteira é mais eficiente do que a diversificação geográfica (Cavaglia, Brightman & Aked, 2000; Galati & Tsatsaronis, 2003).

Outros resultados sugerem apenas que o efeito setorial está a tornar-se cada vez mais relevante, enquanto o efeito geográfico está a perder poder explicativo (ver, por exemplo, Baca et al., 2000; Brooks & Del Negro, 2002a; Isakov & Sonney, 2003). Estes resultados não corroboram, contudo, a superioridade dos fatores setoriais.

De facto, a maior parte da literatura baseia-se na metodologia adotada em Heston & Rouwenhorst (1995), que também tem sido alvo de algumas críticas devido a questões metodológicas (para mais informação sobre este assunto indica-se como referência Brooks & Del Negro, 2002b).

Gerard, Hillion & de Roon (2002) e Ehling & Ramos (2006) concluíram que a diferença entre as duas estratégias é pequena, em particular em problemas de *portfolio* sem restrições de vendas a descoberto. Não obstante, a introdução deste tipo de restrições no problema de *portfolio* conduz a que a abordagem baseada na diversificação geográfica se torne mais apelativa.

Fasnacht & Loubergé (2007) estudaram o comportamento da correlação do retorno dos ativos ao nível setorial. Estes autores concluíram que as correlações de mercado são, em média, superiores às correlações setoriais. Por outro lado, demonstraram que as correlações setoriais entre países são tendencialmente mais estáveis ao longo do tempo que as correlações setoriais obtidas nos próprios países. Finalmente, os mesmos autores concluíram que algumas correlações setoriais relacionadas com os setores industriais, financeiros e de serviços prestados ao consumidor têm uma forte implicação na evolução da correlação ao nível do mercado.

Ferreira & Gama (2010) estudaram uma série temporal de correlações entre os setores e os mercados mundiais no período de 1979-2008 e concluíram que a correlação entre setores nem sempre é igual, apresentando um nível baixo no final dos anos 1990. Estes autores concluíram ainda que as correlações industriais têm um comportamento contra cíclico, sendo que a correlação é tendencialmente maior nas fases descendentes do mercado do que nas fases ascendentes.

Outros autores estudaram também o efeito de contágio, em períodos de crise económica, na correlação geográfica (King & Wadhwani, 1990; King, Sentana & Wadhwani, 1994; Forbes & Rigobon, 2002; Rigobon, 2002; Bekaert, Geert, Harvey & Ng, 2005; Samarakoon, 2017).

Ainda no âmbito da adoção de uma estratégia de diversificação setorial, Anton & Polk (2014) avaliaram a influência da correlação de ações pertencentes aos mesmos setores, com base na *Standard Industrial Classification* (SIC), na rentabilidade de carteiras pertencentes a investidores comuns, tendo obtido uma correlação intrasetorial muito elevada.

Considerando a hipótese colocada por estes autores de que a diversificação setorial de uma carteira de ações tem impacto efetivo na rentabilidade da carteira, optou por efetuar-se a segmentação das ações com base na metodologia apresentada em Anton & Polk (2014).

O objetivo deste capítulo consiste, assim, em apresentar a metodologia seguida para selecionar as carteiras de ações, que serão utilizadas para instanciar o modelo de *portfolio* proposto no Capítulo 1, considerando, numa primeira fase, as ações conducentes ao menor nível de correlação do setor em que se inserem e, numa segunda etapa, as ações conducentes à menor correlação verificada nos respetivos mercados

Este Capítulo encontra-se organizado da seguinte forma: na Secção 2.1 são apresentados os dados e os pressupostos considerados para efetuar uma análise da correlação setorial, bem como o método utilizado para obter as ações que minimizam, em primeiro lugar, as correlações setoriais e, em segundo lugar, as correlações dos mercados respetivos; na Secção 2.2 são apresentados os dados que irão instanciar os modelos de *portfolio* multiobjetivo com coeficientes intervalares.

2.1 Dados e pressupostos

Os mercados considerados neste estudo foram o *Amsterdam Exchange Index* (AEX 25), o *Brussels Stock Exchange* (BEL 20), o *Cotation Assistée en Continu* (CAC 40), o *Portuguese Stock Index* (PSI 20) e o *Financial Times Stock Exchange* (FTSE 100).

Como fonte de informação para a construção da base de dados, utilizaram-se as cotações fornecidas pelo *Yahoo Finance* e pela Euronext.

Após a recolha das cotações de todas as ações integrantes destes mercados, a base de dados obtida apresentava uma dimensão de 199 ações. Com a consideração de um intervalo temporal de 1 de janeiro de 2007 a 12 de novembro de 2015 (aproximadamente 9 anos), a amostra passou a contemplar 175 ações. Ficaram excluídas deste estudo as empresas que só entraram para os mercados mais recentemente.

Para todas as ações consideradas nesta análise foi calculado o retorno logarítmico:

$$r_{it} = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = \ln \frac{p_t}{p_{t-1}}. \quad (2.1)$$

Este retorno foi calculado sobre o preço ajustado a dividendos, *split stocks*⁷ e aumentos de capital.

Posteriormente, as 176 ações obtidas foram separadas em dois grandes grupos: FTSE 100 e Euronext.

O mercado FTSE 100 foi analisado isoladamente por conter um maior número de ações, por apresentar uma liquidez completamente distinta do mercado Euronext, por deter uma moeda distinta e por possuir um sistema legal de *Common Law*⁸, diferente do mercado Euronext.

Para a separação das ações pela variável *Size*, foi necessário calcular a capitalização bolsista de cada uma das ações a analisar.

O número de ações em circulação foi recolhido na base de dados *Yahoo Finance* (mercado FTSE 100), juntamente com a Euronext (mercado Euronext):

$$\mathbf{n^{\circ} de ações em circulação} \times \mathbf{preço de fecho ajustado} \quad (2.2)$$

As amostras foram separadas entre *Big Stocks* e *Small Stocks*, considerando a capitalização como referência. A separação foi efetuada considerando uma capitalização

⁷ Corresponde ao aumento do número de ações de uma empresa. O preço é ajustado de forma a que a capitalização de mercado da empresa permaneça, antes e depois, a mesma, e que não ocorra diluição.

⁸ Neste sistema, quando não existe um precedente, os juízes possuem a autoridade para criar o direito, estabelecendo um precedente.

das ações no mercado Euronext superior a 7.500.000€ para as *Big Stocks* e inferior para as *Small Stocks*. Foi adotado um procedimento análogo para o mercado FTSE 100, tendo como limiar uma capitalização de 600.000.000€.

Posteriormente, foi feita a separação das ações por setores de atividade com base na lista setorial apresentada pela *Yahoo Finance*. Uma vez que o setor denominado *Conglomerates* inclui empresas que são concentrações empresariais, atuando em vários setores de atividade, as respetivas empresas foram incluídas no setor de atividade com maior peso no seu *core business*.

A etapa seguinte consistiu em agrupar as ações por setores e por *Size*, para apurar a correlação desses grupos. Para a comparação da correlação entre as ações e o seu setor de atividade, foi construído um retorno setorial correspondente à média dos retornos logarítmicos das ações, que foram enquadrados na análise da correlação com as ações do setor.

Os resultados deram origem aos quadros de correlações apresentados nas Tabelas dadas em apêndice (ver Apêndices 1 e 2). Este estudo foi importante para aferir se existe correlação entre os diferentes setores de atividade. Neste âmbito, apenas foram analisadas as *Big Stocks* devido à falta de liquidez das *Small Stocks* (principalmente no mercado Euronext) e à volatilidade que estas apresentavam.

A partir deste ponto, foi possível selecionar uma carteira de ações diversificada.

2.1.1 Análise dos dados e das correlações setoriais

As Tabelas 2.1 e 2.2 mostram a distribuição das ações por setor de atividade nos mercados Euronext e FTSE 100, respetivamente.

O mercado Euronext apresenta um total de 86 ações (44 *Big Stocks* e 42 *Small Stocks*), enquanto o mercado FTSE 100 engloba 89 (45 *Big Stocks* e 44 *Small Stocks*).

As ações pertencentes aos setores de Bens de Consumo, de Cuidados de Saúde e *Utilities* apresentaram-se maioritariamente no grupo das *Big Stocks*. Em contrapartida, setores como Bens Industriais e Tecnologia enquadram-se mais no grupo das *Small Stocks*. Já os setores Financeiro (no mercado FTSE 100) e de Serviços (no mercado Euronext) têm uma distribuição semelhante entre os grupos das *Big Stocks* e das *Small Stocks*.

Tabela 2.1. Distribuição das ações por setores de atividade no mercado Euronext.

SETORES EURONEXT	<i>BIG STOCKS</i>	<i>SMALL STOCKS</i>	TOTAL
<i>MATERIAIS BÁSICOS</i>	5	6	11
<i>BENS DE CONSUMO</i>	10	7	17
<i>FINANCEIRO</i>	9	7	16
<i>CUIDADOS DE SAÚDE</i>	2	1	3
<i>BENS INDUSTRIAIS</i>	4	5	9
<i>SERVIÇOS</i>	5	6	11
<i>TECNOLOGIA</i>	5	8	13
<i>UTILITIES</i>	4	2	6
<i>TOTAL</i>	45	42	86

Tabela 2.2. Distribuição das ações por setores de atividade no mercado FTSE 100

SETORES FTSE 100	<i>BIG STOCKS</i>	<i>SMALL STOCKS</i>	TOTAL
<i>MATERIAIS BÁSICOS</i>	6	5	11
<i>BENS DE CONSUMO</i>	6	3	9
<i>FINANCEIRO</i>	11	11	22
<i>CUIDADOS DE SAÚDE</i>	3	2	5
<i>BENS INDUSTRIAIS</i>	2	9	11
<i>SERVIÇOS</i>	11	10	21
<i>TECNOLOGIA</i>	2	3	5
<i>UTILITIES</i>	4	1	5
<i>TOTAL</i>	45	44	89

O mercado Euronext caracteriza-se por ser um mercado maioritariamente composto por ações dos setores de Bens de Consumo e Financeiro, enquanto o mercado FTSE 100 é principalmente composto por ações dos setores Financeiro e de Serviços.

Após o estudo da correlação da carteira organizada segundo os critérios definidos na Secção 2.1, no grupo das *Small Stocks*, apenas uma empresa portuguesa, a lusa *REN*, integra a carteira de ações do mercado Euronext, sendo a que melhor representa as características do setor *Utilities* deste grupo de ações. No grupo das *Big Stocks*, este mesmo setor aparece representado pela *EDP*. O índice holandês concorre com duas ações, contribuindo com um peso de 13,33% na composição da carteira. O índice belga, tal como o português, apresenta apenas uma ação, representando um peso de 6,67% para cada tipo de ações. O índice francês contribui com onze ações, correspondendo a quase três quartos da composição da carteira, com um peso de 73,33%. Deste modo, a constituição da

carteira poderá estar a ser influenciada pelo facto do PSI 20, da BEL 20 e da AEX 25 apresentarem um menor número de ações em circulação.

A análise estatística respeitante ao cálculo das correlações intrassetoriais para cada mercado é apresentada nas Tabelas 2.3 e 2.4.

Tabela 2.3. Análise estatística das correlações intrassetoriais - Euronext

Correlação Euronext	Média Correlação - <i>Big Stocks</i>	Mediana Correlação - <i>Big Stocks</i>	Média Correlação - <i>Small Stocks</i>	Mediana Correlação - <i>Small Stocks</i>
Materiais Básicos	0,68	0,72	0,76	0,75
Bens de Consumo	0,73	0,72	0,66	0,68
Financeiro	0,76	0,85	0,61	0,65
Cuidados de Saúde	0,86	0,86		
Bens Industriais	0,84	0,85	0,77	0,77
Serviços	0,71	0,71	0,62	0,65
Tecnologia	0,76	0,77	0,58	0,58
<i>Utilities</i>	0,79	0,81	0,70	0,70
Média	0,77	0,79	0,67	0,68

Tabela 2.4. Análise estatística das correlações intrassetoriais – FTSE 100

Correlação FTSE 100	Média Correlação - <i>Big Stocks</i>	Mediana Correlação - <i>Big Stocks</i>	Média Correlação - <i>Small Stocks</i>	Mediana Correlação - <i>Small Stocks</i>
Materiais Básicos	0,72	0,72	0,59	0,66
Bens de Consumo	0,62	0,71	0,71	0,75
Financeiro	0,66	0,69	0,52	0,56
Cuidados de Saúde	0,81	0,82	0,74	0,74
Bens Industriais	0,64	0,64	0,53	0,63
Serviços	0,56	0,60	0,58	0,59
Tecnologia	0,79	0,79	0,75	0,74
<i>Utilities</i>	0,77	0,80		
Média	0,70	0,72	0,63	0,67

No mercado Euronext, no grupo das *Big Stocks*, os setores de Bens Industriais e de Cuidados de Saúde apresentam as correlações mais elevadas. Os setores Financeiro e *Utilities* apresentam correlações elevadas no grupo das *Big Stocks* e mais baixas no grupo das *Small Stocks*.

As correlações obtidas no grupo das *Small Stocks* são, em geral, mais baixas que as obtidas para o grupo das *Big Stocks*. Apenas o setor de Materiais Básicos apresenta maior correlação nas *Small Stocks* do que nas *Big Stocks*. Tal facto não será alheio à maior volatilidade, menor liquidez e maior suscetibilidade de especulação deste tipo de ações, tornando-as menos representativas das características reais dos setores de atividade.

Pode concluir-se, contudo, que nenhum setor apresenta um nível de correlação baixo. As *Big Stocks* e as *Small Stocks* possuem um nível de correlação médio de cerca de 0,77 e 0,67 respetivamente.

No mercado FTSE 100, no grupo das *Big Stocks*, o setor de Cuidados de Saúde apresenta a correlação mais elevada. Os setores Tecnologia e *Utilities* apresentam correlações elevadas, quer no grupo das *Big Stocks* quer no grupo das *Small Stocks*.

Neste mercado, pode concluir-se, uma vez mais, que nenhum setor apresenta um nível de correlação baixo.

Neste âmbito, pode ainda referir-se que as correlações média e mediana obtidas no mercado FTSE 100 são ligeiramente inferiores às do mercado Euronext.

As Tabelas 2.5 e 2.6 apresentam as correlações intersetoriais apenas das *Big Stocks*, uma vez que, devido às suas características, as *Small Stocks* foram excluídas da análise.

Tabela 2.5. Correlações intersetoriais - Euronext

Correlação Euronext	<i>Materiais Básicos</i>	<i>Bens de Consumo</i>	<i>Financeiro</i>	<i>Cuidados de Saúde</i>	<i>Bens Industriais</i>	<i>Serviços</i>	<i>Tecnologia</i>	<i>Utilities</i>
<i>Materiais Básicos</i>	1							
<i>Bens de Consumo</i>	0,70062	1						
<i>Financeiro</i>	0,621957	0,755028	1					
<i>Cuidados de Saúde</i>	0,564741	0,673961	0,54969	1				
<i>Bens Industriais</i>	0,693894	0,821336	0,796035	0,592982	1			
<i>Serviços</i>	0,635019	0,782865	0,695151	0,66891	0,775714	1		
<i>Tecnologia</i>	0,691569	0,805412	0,766442	0,654442	0,811813	0,768607	1	
<i>Utilities</i>	0,681331	0,772959	0,744248	0,615051	0,789329	0,728429	0,791628	1

Tabela 2.6. Correlações intersetoriais – FTSE 100

Correlação FTSE 100	<i>Materiais Básicos</i>	<i>Bens de Consumo</i>	<i>Financeiro</i>	<i>Cuidados de Saúde</i>	<i>Bens Industriais</i>	<i>Serviços</i>	<i>Tecnologia</i>	<i>Utilities</i>
Materiais Básicos	1							
Bens de Consumo	0,553493	1						
Financeiro	0,576044	0,438813	1					
Cuidados de Saúde	0,86386	0,708452	0,876234	1				
Bens Industriais	0,709219	0,560474	0,981136	0,952852	1			
Serviços	0,566626	0,616333	0,644738	0,729171	0,698447	1		
Tecnologia	0,359836	0,350889	0,406017	0,451487	0,436778	0,42785	1	
<i>Utilities</i>	0,48432	0,52055	0,386007	0,535365	0,457766	0,458565	0,395715	1

No mercado Euronext, verifica-se que os setores de atividade se encontram fortemente correlacionados entre si, destacando-se o setor de Bens de Consumo que é o que regista um maior nível de correlação intersetorial.

No mercado FTSE 100, observa-se que os setores de Tecnologia e *Utilities* apresentam uma correlação baixa, devido às características inerentes a estes dois setores. A correlação mais alta é entre os setores de Cuidados de Saúde e Financeiro e a mais baixa entre os setores de Tecnologia e de Materiais Básicos.

Em geral, a correlação entre diferentes setores é maior no mercado Euronext do que no mercado FTSE 100. Uma vez que o mercado Euronext contempla ações de diferentes países (Bélgica, França, Holanda e Portugal), seria de esperar uma menor correlação intersetorial.

Da análise aqui realizada é possível concluir que a diversificação setorial nos dois mercados não conduz necessariamente a baixos níveis de correlação das carteiras de ações obtidas, uma vez que os setores de atividade se encontram fortemente correlacionados.

Neste contexto, o objetivo das próximas Secções é obter uma carteira que contemple ações dos dois mercados, suficientemente diversificada setorialmente, minimizando, em simultâneo, a correlação global dessas carteiras.

2.1.2 Seleção das ações que minimizam a correlação setorial

A obtenção de uma carteira de ações diversificada por setor foi feita com base numa abordagem inspirada no modelo de Markowitz (1952), com a introdução de restrições de

cardinalidade. Deste modo, resolveu-se o problema de programação quadrática inteira mista (1.36) para cada setor de atividade, obtendo-se, numa primeira fase, as três ações que minimizam a correlação em cada setor⁹. Deste modo, foi possível selecionar uma carteira de ações composta por 23 e 22 títulos para os mercados Euronext e FTSE 100, respetivamente.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
 & \text{s.a. } \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\
 & \sum_{i=1}^n y_i \leq K, \\
 & x_i \leq u_i y_i, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

onde σ_{ij} é a correlação entre os retornos logarítmicos dos ativos i e j , K é o número máximo de ações que se pretendem obter (igual a três para cada setor) e u_i é a fração máxima de investimento permitida em cada ação i (neste caso, 50%).

A carteira de ações assim obtida é dada na Tabela 2.7.

Tabela 2.7. Carteira de ações que minimizam a correlação setorial

Euronext	FTSE 100
ARCELORMITTAL	BHP BILLITON
ROYAL DUTCH SHELLA	BP
SOLVAY	RIO TINTO
AB INBEV	RECKITT BENCKISER GROUP
DANONE	UNILEVER
RENAULT	SABMiller
AGEAS	BARCLAYS
BNP PARIBAS ACT.A	BRITISH LAND COMPANY
KLEPIERRE	STANDARD CHARTERED
ESSILOR INTL.	ASTRAZENECA
SANOFI	GLAXOSMITHKLINE
RANDSTAD	SHIRE
SAFRAN	ROLLS ROYCE HOLDINGS

⁹ Os modelos foram corridos no solver não linear do Excel, uma vez que o lote de ações por setor não apresentava dimensão significativa.

Euronext	FTSE 100
SAINT GOBAIN	TAYLOR WIMPEY
AHOLD KON	INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP
AIRBUS GROUP	ITV
PUBLICIS GROUPE SA	WPP
ASML HOLDING	BT GROUP
ORANGE	VODAFONE
PHILIPS KON	CENTRICA
EDP	NATIONAL GRID
SCHNEIDER ELECTRIC	SEVERN TRENT
VEOLIA ENVIRON.	

A correlação das carteiras assim obtidas é apresentada nas Tabelas 2.8 e 2.9, respetivamente.

No mercado Euronext, a empresa *Ageas* é a que apresenta as correlações mais baixas. Por sua vez, as empresas que apresentam correlações mais altas são a *Renault*, *Saint Gobain* e *Schneider Electric*.

No mercado FTSE 100, a empresa *Internacional Consolidated Airlines Group* é a que apresenta as correlações mais baixas. Por outro lado, as empresas que apresentam correlações mais altas são a *Unilever*, *Sab Miller* e *British Land Company*.

Tal como anteriormente, as correlações obtidas no mercado Euronext são, em geral, mais altas que as obtidas para o mercado FTSE 100.

Tabela 2.8. Correlação da carteira diversificada intrasetorialmente – Euronext

Carteira	RENAULT	SANOFI	SAINT GOBAIN	SCHNEIDER ELECTRIC	AGEAS	ROYAL DUTCH SHELLA	SOLVAY	AB INBEV	DANONE	BNP PARIBAS ACT. A	KLEPIERRE	ESSILOR INTL.	RANDSTAD	SAFRAN	AHOLD KON	AIRBUS GROUP	PUBLICIS GROUPE SA	ASML HOLDING	ORANGE	PHILIPS KON	EDP	VEOLIA ENVIRON.	R. LOG. Carteira	
RENAULT	1,00																							
SANOFI	0,41	1,00																						
SAINT GOBAIN	0,68	0,49	1,00																					
SCHNEIDER ELECTRIC	0,66	0,51	0,76	1,00																				
AGEAS	0,11	0,14	0,13	0,10	1,00																			
ROYAL DUTCH SHELLA	0,48	0,50	0,55	0,55	0,12	1,00																		
SOLVAY	0,53	0,40	0,53	0,58	0,05	0,43	1,00																	
AB INBEV	0,34	0,35	0,36	0,40	0,06	0,33	0,31	1,00																
DANONE	0,42	0,55	0,49	0,52	0,14	0,49	0,40	0,40	1,00															
BNP PARIBAS ACT. A	0,63	0,43	0,65	0,65	0,10	0,44	0,49	0,35	0,40	1,00														
KLEPIERRE	0,52	0,34	0,52	0,53	0,11	0,37	0,44	0,29	0,41	0,50	1,00													
ESSILOR INTL.	0,37	0,50	0,42	0,47	0,12	0,39	0,38	0,39	0,49	0,38	0,37	1,00												
RANDSTAD	0,59	0,41	0,63	0,60	0,09	0,48	0,50	0,34	0,41	0,53	0,49	0,38	1,00											
SAFRAN	0,49	0,37	0,53	0,53	0,09	0,40	0,45	0,28	0,39	0,45	0,46	0,36	0,48	1,00										
AHOLD KON	0,29	0,36	0,34	0,33	0,15	0,33	0,30	0,24	0,38	0,29	0,27	0,36	0,29	0,29	1,00									
AIRBUS GROUP	0,50	0,43	0,54	0,54	0,12	0,41	0,41	0,28	0,43	0,44	0,40	0,40	0,49	0,56	0,33	1,00								
PUBLICIS GROUPE SA	0,55	0,44	0,59	0,59	0,16	0,45	0,47	0,34	0,43	0,48	0,46	0,41	0,53	0,48	0,31	0,49	1,00							
ASML HOLDING	0,46	0,38	0,50	0,49	0,11	0,43	0,42	0,31	0,38	0,43	0,37	0,39	0,47	0,39	0,29	0,44	0,42	1,00						
ORANGE	0,44	0,52	0,51	0,52	0,06	0,43	0,40	0,31	0,46	0,48	0,36	0,43	0,41	0,35	0,33	0,38	0,41	0,35	1,00					
PHILIPS KON	0,60	0,47	0,65	0,65	0,12	0,51	0,49	0,36	0,47	0,59	0,47	0,39	0,57	0,47	0,33	0,51	0,52	0,50	0,44	1,00				
EDP	0,40	0,40	0,48	0,47	0,18	0,47	0,35	0,26	0,37	0,40	0,34	0,34	0,40	0,31	0,26	0,36	0,41	0,33	0,47	0,41	1,00			
VEOLIA ENVIRON.	0,48	0,38	0,54	0,52	0,11	0,39	0,43	0,24	0,38	0,50	0,40	0,34	0,47	0,38	0,28	0,40	0,45	0,34	0,44	0,44	0,43	1,00		
R. LOG. Carteira	0,75	0,66	0,82	0,82	0,20	0,68	0,67	0,50	0,66	0,73	0,64	0,61	0,73	0,64	0,49	0,68	0,71	0,62	0,65	0,76	0,60	0,63	1,00	

Tabela 2.9. Correlação da carteira diversificada intrasetorialmente – FTSE 100

	RIO TINTO	BARCLAYS	ROLLS ROYCE HOLDINGS	VODAFONE	NATIONAL GRID	RECKITT BENCKISER GROUP	TAYLOR WIMPEY	INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	BHP BILLITON	BP	UNILEVER	SAB MILLER	BRITISH LAND COMPANY	STANDARD CHARTERED	GLAXOSMI THKLINE	SHIRE	ITV	WPP	BT GROUP	CENTRICA	SEVERN TRENT	R. LOG. CARTEIRA	
RIO TINTO	1,00																						
BARCLAYS	0,40	1,00																					
ROLLS ROYCE HOLDINGS	0,02	0,01	1,00																				
VODAFONE	0,20	0,27	0,03	1,00																			
NATIONAL GRID	0,30	0,26	0,00	0,37	1,00																		
RECKITT BENCKISER GROUP	0,06	0,05	-0,02	-0,01	0,05	1,00																	
TAYLOR WIMPEY	0,28	0,20	0,04	0,07	0,09	0,04	1,00																
INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	-0,05	0,01	0,00	-0,02	-0,01	-0,03	-0,03	1,00															
BHP BILLITON	0,45	0,18	0,06	0,15	0,16	0,08	0,22	-0,02	1,00														
BP	0,46	0,41	0,01	0,32	0,43	0,03	0,12	-0,01	0,26	1,00													
UNILEVER	0,29	0,28	0,00	0,33	0,49	0,03	0,11	-0,01	0,13	0,41	1,00												
SAB MILLER	0,26	0,15	0,08	0,18	0,24	0,00	0,27	0,01	0,43	0,23	0,23	1,00											
BRITISH LAND COMPANY	0,36	0,52	0,02	0,27	0,34	0,03	0,29	0,01	0,20	0,36	0,34	0,21	1,00										
STANDARD CHARTERED	0,24	0,24	0,06	0,16	0,18	0,03	0,23	-0,01	0,40	0,22	0,17	0,38	0,27	1,00									
GLAXOSMITHKLINE	0,22	0,29	0,01	0,35	0,44	0,02	0,07	0,03	0,08	0,40	0,48	0,16	0,32	0,12	1,00								
SHIRE	0,25	0,28	0,00	0,28	0,33	0,00	0,09	0,00	0,09	0,33	0,35	0,11	0,32	0,15	0,45	1,00							
ITV	0,17	0,25	0,05	0,12	0,12	0,02	0,32	-0,03	0,27	0,13	0,10	0,41	0,24	0,32	0,07	0,08	1,00						
WPP	0,28	0,24	0,05	0,18	0,25	0,05	0,21	-0,01	0,25	0,25	0,22	0,24	0,30	0,25	0,20	0,16	0,20	1,00					
BT GROUP	0,19	0,22	0,03	0,23	0,21	0,03	0,15	0,03	0,21	0,25	0,18	0,23	0,25	0,20	0,17	0,13	0,19	0,36	1,00				
CENTRICA	0,30	0,30	-0,01	0,28	0,55	0,02	0,07	-0,03	0,10	0,38	0,41	0,13	0,36	0,09	0,41	0,31	0,06	0,21	0,18	1,00			
SEVERN TRENT	0,20	0,13	0,05	0,20	0,37	0,02	0,10	0,00	0,31	0,23	0,26	0,39	0,20	0,28	0,20	0,12	0,22	0,20	0,20	0,26	1,00		
R. LOG. CARTEIRA	0,53	0,52	0,57	0,39	0,45	0,09	0,44	0,08	0,49	0,49	0,42	0,49	0,53	0,49	0,39	0,37	0,43	0,44	0,39	0,38	0,40	1,00	

2.1.3 Seleção das ações que minimizam a correlação das carteiras

A obtenção de uma carteira de ações diversificada por mercado foi efetuada a partir da resolução do problema de programação quadrática inteira mista (1.36) para cada mercado. Deste modo, foi possível selecionar as 10 ações que minimizam a correlação de cada mercado (i.e. $K = 10$)¹⁰.

As correlações das carteiras de ações compostas por títulos dos mercados Euronext e FTSE 100 são apresentadas nas Tabelas 2.10 e 2.11.

A obtenção de uma carteira de ações diversificada por mercado, conduziu a uma redução da correlação média de ambas as carteiras de 0,65 para 0,59, no que se refere à carteira respeitante ao mercado Euronext e de 0,42 para 0,31, no que diz respeito ao mercado FTSE 100. A correlação global da nova carteira assim diversificada é de 0,44, sendo ilustrada na Tabela 2.12.

¹⁰ Apesar do considerável aumento de esforço computacional, foi possível obter as soluções destes modelos com o *solver* não linear do Excel.

Tabela 2.10. Correlação da carteira diversificada intersetorialmente – Euronext

	AGEAS	SOLVAY	AB INBEV	KLEPIERRE	ESSILOR INTL.	SAFRAN	AHOLD KON	ASML HOLDING	EDP	VEOLIA ENVIRON.	R. LOG. Carteira
AGEAS	1,00										
SOLVAY	0,05	1,00									
AB INBEV	0,06	0,31	1,00								
KLEPIERRE	0,11	0,44	0,29	1,00							
ESSILOR INTL.	0,12	0,38	0,39	0,37	1,00						
SAFRAN	0,09	0,45	0,28	0,46	0,36	1,00					
AHOLD KON	0,15	0,30	0,24	0,27	0,36	0,29	1,00				
ASML HOLDING	0,11	0,42	0,31	0,37	0,39	0,39	0,29	1,00			
EDP	0,18	0,35	0,26	0,34	0,34	0,31	0,26	0,33	1,00		
VEOLIA ENVIRON.	0,11	0,43	0,24	0,40	0,34	0,38	0,28	0,34	0,43	1,00	
R. LOG. Carteira	0,50	0,64	0,53	0,65	0,61	0,64	0,52	0,63	0,60	0,64	1,00

Tabela 2.11. Correlação da carteira diversificada intersetorialmente – FTSE 100

	ROLLS ROYCE HOLDINGS	VODAFONE	RECKITT BENCKISER GROUP	TAYLOR WIMPEY	INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	SHIRE	ITV	BT GROUP	CENTRICA	SEVERN TRENT	R. LOG. Carteira
ROLLS ROYCE HOLDINGS	1,00										
VODAFONE	0,03	1,00									
RECKITT BENCKISER GROUP	-0,02	-0,01	1,00								
TAYLOR WIMPEY	0,04	0,07	0,04	1,00							
INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	0,00	-0,02	-0,03	-0,03	1,00						
SHIRE	0,00	0,27	0,00	0,10	0,00	1,00					
ITV	0,05	0,12	0,02	0,32	-0,03	0,09	1,00				
BT GROUP	0,03	0,24	0,03	0,15	0,03	0,13	0,19	1,00			
CENTRICA	-0,01	0,28	0,02	0,07	-0,03	0,31	0,06	0,18	1,00		
SEVERN TRENT	0,05	0,20	0,02	0,10	0,00	0,12	0,22	0,20	0,26	1,00	
R. LOG. Carteira	0,84	0,28	0,08	0,38	0,14	0,23	0,34	0,29	0,22	0,27	1,00

Tabela 2.12. Correlação da carteira global

	AGEAS	SOLVAY	AB INBEV	KLEPIERRE	ESSILOR INTL.	SAFRAN	AHOLD KON	ASML HOLDING	EDP	VEOLIA ENVIRON.	ROLLS ROYCE HOLDINGS	VODAFONE	RECKITT BENCKISER GROUP	TAYLOR WIMPEY	INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	SHIRE	ITV	BT GROUP	CENTRICA	SEVERN TRENT	R. LOG. Carteira Final	
AGEAS	1,00																					
SOLVAY	0,28	1,00																				
AB INBEV	0,43	0,45	1,00																			
KLEPIERRE	0,44	0,52	0,42	1,00																		
ESSILOR INTL.	0,32	0,44	0,45	0,38	1,00																	
SAFRAN	0,38	0,44	0,28	0,53	0,45	1,00																
AHOLD KON	0,37	0,46	0,39	0,44	0,45	0,50	1,00															
ASML HOLDING	0,42	0,35	0,30	0,36	0,29	0,43	0,45	1,00														
EDP	0,34	0,29	0,36	0,28	0,32	0,19	0,32	0,32	1,00													
VEOLIA ENVIRON.	0,33	0,42	0,37	0,52	0,43	0,43	0,40	0,47	0,51	1,00												
ROLLS ROYCE HOLDINGS	0,03	0,04	0,09	-0,04	-0,03	-0,08	0,00	-0,06	0,22	0,10	1,00											
VODAFONE	0,19	0,06	0,10	0,16	0,06	0,12	-0,01	0,12	0,09	0,09	-0,01	1,00										
RECKITT BENCKISER GROUP	0,32	0,40	0,32	0,53	0,27	0,33	0,49	0,41	0,21	0,36	0,12	-0,03	1,00									
TAYLOR WIMPEY	0,36	0,32	0,43	0,29	0,17	0,14	0,04	-0,01	0,14	0,20	0,05	0,14	0,16	1,00								
INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	0,41	0,20	0,18	0,38	0,27	0,50	0,26	0,33	0,27	0,41	0,07	0,08	0,18	0,01	1,00							
SHIRE	0,10	0,04	0,20	0,15	0,02	0,17	0,04	0,04	-0,02	0,09	0,08	0,27	0,05	0,23	0,03	1,00						
ITV	0,25	0,18	0,14	0,25	0,18	0,22	0,11	0,12	0,18	0,24	0,10	0,22	0,19	0,48	0,02	0,33	1,00					
BT GROUP	0,22	0,17	0,00	0,26	0,05	0,16	0,03	0,04	0,02	0,10	0,11	0,32	0,10	0,37	0,18	0,26	0,63	1,00				
CENTRICA	0,04	0,05	0,21	-0,12	-0,01	-0,06	-0,13	0,01	0,01	-0,04	0,06	0,22	0,04	0,30	-0,14	0,18	0,26	-0,01	1,00			
SEVERN TRENT	0,02	0,07	0,13	-0,04	0,07	-0,02	0,08	-0,01	-0,09	0,04	-0,10	0,15	0,18	0,18	-0,21	0,19	0,21	0,05	0,49	1,00		
R. LOG. Carteira Final	0,62	0,50	0,55	0,54	0,41	0,45	0,42	0,40	0,49	0,56	0,59	0,27	0,47	0,50	0,42	0,31	0,50	0,41	0,20	0,10	1,00	

2.2 Especificação numérica do modelo de *portfolio*

2.2.1 Funções objetivo

Os valores dos retornos da carteira diversificada e da carteira global de *Big Stocks* que permitem instanciar as funções de maximização do retorno e de minimização do risco são apresentados nas Tabelas dadas em apêndice (Apêndice 3). Os valores obtidos para a liquidez das ações que permitem construir as funções de maximização de liquidez, quer no problema com a carteira diversificada quer no problema com a carteira global de *Big Stocks*, são dados em apêndice (Apêndice 4).

2.2.2 Restrições

O número de ações que o investidor pretende manter em carteira foi considerado no seguinte intervalo $[h^L, h^U] = [5, 6]$ (Gupta et al., 2014; Henriques & Neves, 2017). Por outro lado, a fração máxima de capital afeto aos ativos contemplados no *portfolio* considera-se no intervalo $[u_i^L, u_i^U] = [20\%, 50\%]$, de modo a garantir um determinado nível de diversificação da carteira.

3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

De entre os vários fatores que podem influenciar de forma significativa a taxa de variação do retorno dos ativos, salientam-se as características dos períodos em que estes são obtidos. Deste modo, os retornos obtidos em fases de crise económica e em fases de recuperação económica devem ser considerados separadamente, uma vez que os investidores podem pretender afetar a sua riqueza tendo em conta o retorno dos ativos de acordo com cenários *bull* e *bear* (Henriques & Neves, 2017).

A delimitação dos períodos de crise económica é, geralmente, efetuada com base em acontecimentos marcantes, como o colapso do *Lemon Brothers*, por exemplo. Neste caso, considerou-se, em particular, o período de crise entre agosto de 2007 e dezembro de 2009, estabelecendo-se o período de recuperação económica até novembro de 2015 (Milesi-Ferretti & Tille, 2011; Mobarek, Mollah & Keasey, 2014).

Portanto, de modo a ser possível avaliar o impacto da conjuntura económica nas soluções obtidas, este Capítulo tem como objetivo apresentar uma discussão dos resultados considerando, numa primeira fase, o período global da análise e, numa segunda etapa, os períodos de crise e de recuperação económica, respetivamente. Finalmente, de modo a aferir o impacto da consideração da diversificação nos resultados da carteira, serão ainda apresentados os resultados obtidos para a carteira global de *Big Stocks*, composta por 89 ações.

Este Capítulo encontra-se organizado da seguinte forma: na Secção 3.1 são analisados os resultados obtidos com a carteira diversificada; na Secção 3.2 são apresentados os resultados obtidos com a carteira global de *Big Stocks*.

3.1 Resultados obtidos com a carteira diversificada

A obtenção dos *portfolios* possivelmente eficientes para a carteira diversificada foi efetuada com recurso ao *software* gratuito *open solver* (disponível em: <http://opensolver.org/>), devido à dimensão dos modelos.

3.1.1 Período global da análise

O modelo obtido neste período possui 236 restrições e 254 variáveis de decisão.

A Tabela 3.1 faculta informação acerca dos *portfolios* possivelmente eficientes, selecionados de acordo com diferentes estratégias de investimento.

Os *portfolios* 1, 3 e 5 são obtidos considerando uma estratégia conservadora e permitem alcançar os valores ótimos individuais dos limites inferiores das funções objetivo retorno e liquidez e do limite superior da função risco (cenário pessimista). Por outro lado, os *portfolios* 2, 4 e 6 são obtidos de acordo com uma estratégia agressiva e possibilitam a obtenção dos valores ótimos individuais dos limites superiores das funções objetivo retorno e liquidez e do limite inferior da função risco (cenário otimista).

Relativamente aos *portfolios* obtidos na Tabela 3.1, pode concluir-se, tal como em Henriques & Neves (2017), que estratégias mais conservadoras conduzem sempre a *portfolios* mais diversificados, enquanto estratégias mais agressivas descumrem a diversificação, concentrando, neste caso, o investimento em apenas duas ações.

Tabela 3.1. Proporção de ativos em cada *portfolio* – período global

	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
Estratégia	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
AB INBEV	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AGEAS	0,000	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AHOLD KON	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,00	0,00
ASML HOLDING	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BT GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CENTRICA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
EDP	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,200	0,000	0,00	0,00
ESSLOR INTL.	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,200	0,000	0,00	0,30
INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ITV	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
KLEPIERRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RECKITT BENCKISER GROUP	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,500	0,200	0,000	0,00	0,30
ROLLS ROYCE HOLDINGS	0,000	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,000	0,500	0,35	0,30
SAFRAN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SEVERN TRENT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,200	0,000	0,00	0,00
SHIRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SOLVAY	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,30	0,10
TAYLOR WIMPEY	0,000	0,500	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,00	0,00
VEOLIA ENVIRON.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VODAFONE	0,200	0,500	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,35	0,00

O *trade-off* entre as funções de retorno, risco e liquidez é ilustrado na Figura 1. Nestas circunstâncias, o *portfolio* que admite maior nível de risco também conduz ao maior nível de retorno (*Portfolio* 2). Por outro lado, os *portfolios* que admitem menor retorno, no limite superior e inferior desta função, resultam da maximização da liquidez nos limites inferiores e superior (*Portfolios* 3 e 4), respetivamente. Finalmente, os *portfolios* que permitem minimizar o risco (*Portfolios* 5 e 6) permitem alcançar os níveis mais baixos de liquidez.

Os resultados obtidos são consistentes com os de alguns autores que explicam o *trade-off* entre o retorno e a liquidez com base na hipótese assumida de que a liquidez das ações é capaz de reduzir parte do risco incorrido pelo investidor, tornando-o mais disposto a pagar um preço superior por estas, implicando menores retornos esperados de mercado (Perobelli, Famá & Sacramento, 2016). Estes autores concluíram também que o retorno esperado está negativamente correlacionado com a taxa de *turnover* (Datar et al., 1998; Amihud & Mendelson, 1986).

Por outro lado, a literatura científica tem reconhecido a existência de uma correlação positiva entre o *turnover* e a volatilidade (dos preços) das ações (Karpoff, 1987; Gallant, Rossi & Tauchen, 1992; Harris & Raviv, 1993; Bessembinder & Seguin, 1993; Shalen, 1993), podendo explicar o *trade-off* entre o risco e liquidez obtido nos resultados.

Os *portfolios* 7 e 8 traduzem estratégias de investimento conservadoras e agressivas, respetivamente, onde todas as funções objetivo têm um peso positivo, sendo atribuído um peso maior ao risco. Os *portfolios* 9 e 10 traduzem estratégias de investimento combinadas, onde todas as funções objetivo têm um peso positivo, permitindo obter resultados mais equilibrados. Poderiam ter sido explorados outros cenários, não obstante, por limitações de espaço, optou-se por ilustrar as potencialidades da metodologia apenas com os cenários apresentados.

As características dos *portfolios* possivelmente eficientes são dadas na Tabela 3.2.

Após a observação da Tabela 3.2, é de ressaltar que o peso do mercado FTSE 100 na carteira nunca assume valores inferiores ao peso do mercado Euronext, em todos os *portfolios* obtidos com uma estratégia agressiva.

Por outro lado, é possível concluir que uma estratégia mais agressiva em torno do retorno conduz à aquisição de ações apenas no mercado FTSE 100, contemplando um nível baixo de diversificação da carteira (*Portfolio* 2). Já a escolha de uma estratégia conservadora em função do retorno (*Portfolio* 1), propõe que a maioria da carteira seja proveniente do mercado Euronext (60%), mas com um maior nível de diversificação. Neste caso, os setores que oferecem maior retorno num cenário pessimista são o de Tecnologia (20%), de *Utilities* (20%), de Serviços (20%), de Bens de Consumo (20%) e de Cuidados de Saúde (20%). Num cenário otimista (*Portfolio* 2), o retorno máximo obtém-se apenas com o investimento equitativo nos setores de Bens Industriais e de Tecnologias.

Estratégias mais agressivas em torno da liquidez conduzem a uma distribuição do investimento equitativa pelos dois mercados, mas contemplando o investimento em duas ações apenas (*Portfolio 4*). Os setores que oferecem a máxima liquidez são o Financeiro (50%) e o de Bens Industriais (50%).

Uma postura mais conservadora em função da liquidez (*Portfolio 3*) sugere que a maioria do investimento seja canalizado para o mercado Euronext (60%), alcançando-se um maior nível de diversificação. Neste contexto, os setores que permitem obter maior liquidez, incluem, para além dos setores Financeiro (20%) e de Bens Industriais (20%), os setores de Bens de Consumo (20%), de Materiais Básicos (20%) e de Tecnologia (20%).

Se o decisor adotar uma estratégia mais agressiva em função do risco (*Portfolio 6*), 100% do investimento é canalizado para o mercado FTSE 100. Neste caso, os setores que oferecem menor risco são o de Bens Industriais e de Bens de Consumo. Uma estratégia mais conservadora deste eixo de avaliação da carteira (*Portfolio 5*) coloca apenas 60% do investimento no mercado FTSE 100. Deste modo, os setores que permitem obter menor risco são os de Tecnologia (20%), de *Utilities* (40%), de Cuidados de Saúde (20%) e de Bens de Consumo (20%).

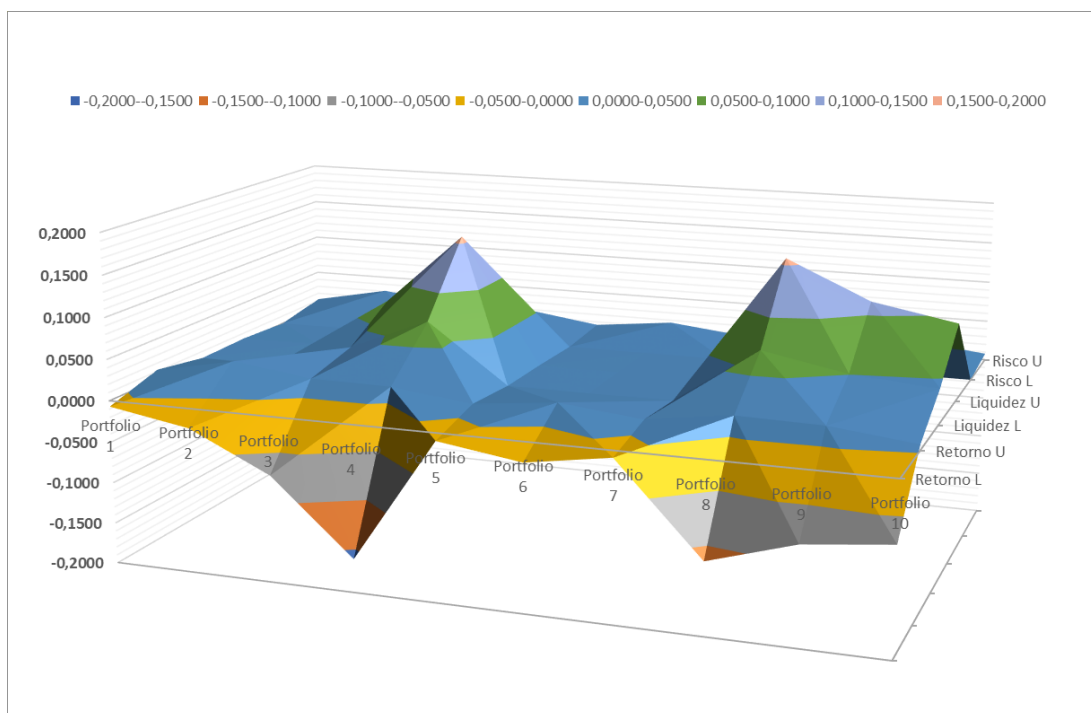


Figura 1. Retorno, liquidez e risco – período global

Tabela 3.2. Características dos portfólios obtidos – período global

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
Portfólio 1	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	60%	40%	Euronext - <i>Utilities</i> (20%), Serviços (20%), Cuidados de Saúde (20%) FTSE 100 – Bens de Consumo (20%), Tecnologia (20%)
Portfólio 2	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Tecnologia (50%) e Bens Industriais (50%)
Portfólio 3	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	60%	40%	Euronext - Financeiro (20%), Materiais Básicos (20%), Serviços (20%) FTSE 100 – Bens Industriais (20%), Tecnologia (20%)
Portfólio 4	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	50%	50%	Euronext - Financeiro (50%) FTSE 100 – Bens Industriais (50%)
Portfólio 5	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Conservadora	Pessimista	40%	60%	Euronext – <i>Utilities</i> (20%), Cuidados de Saúde (20%) FTSE 100 - Bens de Consumo (20%), <i>Utilities</i> (20%) Tecnologia (20%)
Portfólio 6	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Agressiva	Otimista	0	100%	FTSE 100 – Bens de Consumo (50%), Bens Industriais (50%)
Portfólio 7	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Conservadora	Pessimista	60%	40%	Euronext – Cuidados de Saúde (20%), <i>Utilities</i> (20%), Serviços (20%) FTSE 100 – Bens de Consumo (20%), <i>Utilities</i> (20%)
Portfólio 8	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Agressiva	Otimista	0	100%	FTSE 100 – Bens Industriais (50%), Tecnologia (50%)
Portfólio 9	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Médio	0%	100%	FTSE 100 – Bens Industriais (35%), Materiais Básicos(30%), Tecnologia (35%)
Portfólio 10	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Ligeiramente pessimista (coeficientes de pessimismo =2/3)	30%	100%	Euronext – Cuidados de Saúde (30%) FTSE 100 – Bens de Consumo (30%), Bens Industriais (30%), Materiais Básicos (10%)

3.1.2 Cenário de crise económica

O modelo obtido neste período possui 80 restrições e 98 variáveis de decisão.

A Tabela 3.3 fornece informação acerca dos *portfólios* possivelmente eficientes, selecionados de acordo com diferentes estratégias de investimento, considerando apenas os dados respeitantes ao período de crise económica.

Analogamente ao que foi feito na Secção anterior, os *portfolios* 1, 3 e 5 são obtidos considerando uma estratégia conservadora, enquanto os *portfolios* 2, 4 e 6 são calculados de acordo com uma estratégia agressiva.

Os *portfolios* obtidos na Tabela 3.3 com estratégias mais conservadoras conduzem, tal como anteriormente, a *portfolios* mais diversificados, enquanto estratégias mais agressivas concentram o investimento em apenas duas ações.

Tabela 3.3. Proporção de ativos em cada *portfolio* – cenário de crise

	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
Estratégia	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
AB INBEV	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AGEAS	0,000	0,500	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,00	0,00
AHOLD KON	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ASML HOLDING	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BT GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CENTRICA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
EDP	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,200	0,000	0,00	0,00
ESSILOR INTL.	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,200	0,000	0,00	0,10
INTERNACIONAL CONSOLIDATED	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ITV	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
KLEPIERRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RECKITT BENCKISER GROUP	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,500	0,200	0,000	0,00	0,00
ROLLS ROYCE HOLDINGS	0,000	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,200	0,500	0,35	0,30
SAFRAN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SEVERN TRENT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SHIRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SOLVAY	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,30	0,30
TAYLOR WIMPEY	0,000	0,500	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,00	0,00
VEOLIA ENVIRON.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VODAFONE	0,200	0,000	0,200	0,500	0,200	0,000	0,200	0,000	0,35	0,30

A interação entre as de funções retorno, risco e liquidez é ilustrada na Figura 2. Num cenário de crise, o *trade-off* entre risco e liquidez diminui e aumenta o *trade-off* entre risco e retorno. Neste caso, a maximização do retorno conduz aos maiores níveis de risco (assumindo uma estratégia mais agressiva) – ver *Portfolio 2*. Por outro lado, tal como nas soluções obtidas considerando o período global da análise, o *portfolio* que admite menor retorno, no limite superior desta função, resulta da minimização do risco (*Portfolio 5*). Finalmente, os *portfolios* que permitem minimizar o risco (*Portfolios 5 e 6*) são, novamente, os que permitem atingir os níveis mais baixos de liquidez.

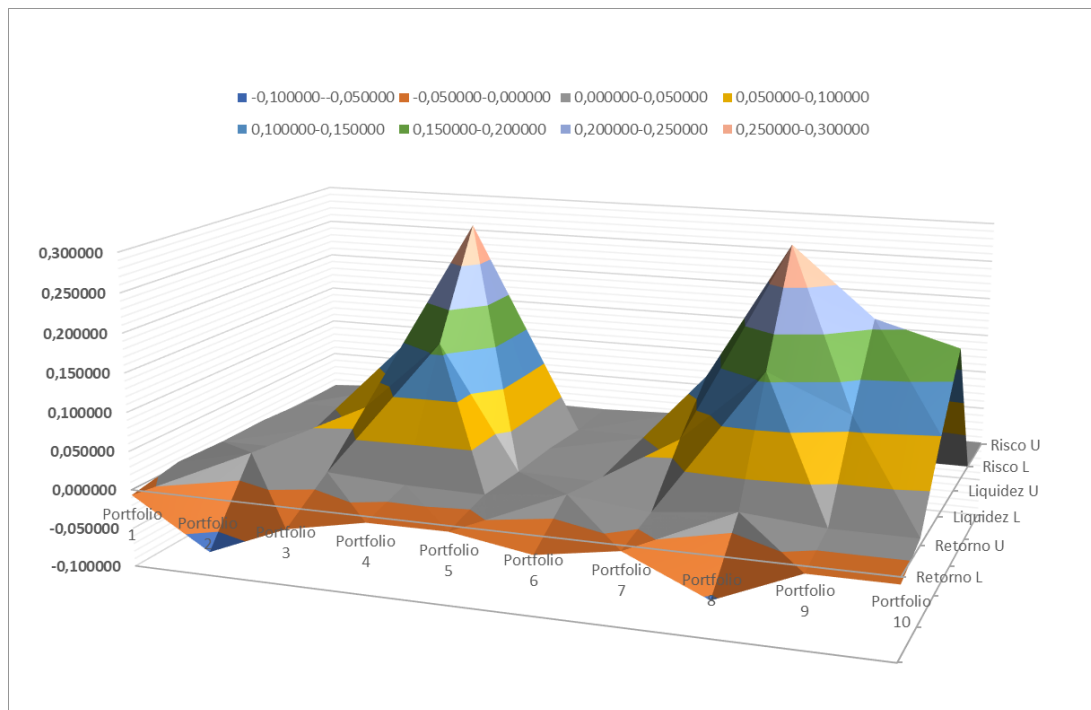


Figura 2. Retorno, liquidez e risco – cenário de crise

As características dos *portfolios* possivelmente eficientes são apresentadas na Tabela 3.4.

Após a análise da Tabela 3.4, salienta-se, tal como no período global de análise, que o peso do mercado FTSE 100 na carteira nunca assume valores inferiores ao peso do mercado Euronext, em todos os *portfolios* obtidos com uma estratégia agressiva. A escolha de uma estratégia conservadora apenas conduz a uma maior importância do mercado Euronext, na carteira de ações, quando se maximiza o retorno e a liquidez (*Portfolios 1 e 3*).

Em relação ao período global da análise, os setores que oferecem o maior retorno, de acordo com uma estratégia conservadora (*Portfolio 1*), mantêm-se. De acordo com uma estratégia agressiva, a carteira passa a contemplar ações do setor Financeiro, em substituição do setor Tecnológico.

Por sua vez, num cenário de crise económica, os setores que permitem obter maior liquidez, assumindo uma estratégia conservadora, mantêm-se, em relação ao período global de análise. No caso da opção por uma estratégia agressiva em torno da liquidez, apenas são selecionados os setores de Bens Industriais e de Tecnologia, de forma equitativa, em detrimento do setor Financeiro, que deixa de constar da carteira de ações.

Os setores que oferecem menor risco (*Portfolios 5 e 6*), de acordo com as estratégias agressiva e conservadora, mantêm-se em relação ao período global da análise.

Tabela 3.4. Características dos *portfolios* obtidos – cenário de crise

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
<i>Portfolio</i> 1	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	60%	40%	Euronext - Cuidados de Saúde (20%), Serviços (20%), <i>Utilities</i> (20%) FTSE 100 – Tecnologia (20%) e Bens de Consumo (20%)
<i>Portfolio</i> 2	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	50%	50%	Euronext – Financeiro (50%), FTSE 100 – Bens Industriais (50%)
<i>Portfolio</i> 3	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	60%	40%	Euronext – Financeiro (20%), Materiais Básicos (20%), Bens de Consumo (20%) FTSE 100 – Bens Industriais (20%) e Tecnologia (20%)
<i>Portfolio</i> 4	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Bens Industriais (50%) e Tecnologia (50%)
<i>Portfolio</i> 5	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Conservadora	Pessimista	40%	60%	Euronext – Cuidados de Saúde (20%), <i>Utilities</i> (20%) FTSE 100 – Bens de Consumo (20%), Tecnologia (20%), <i>Utilities</i> (20%)
<i>Portfolio</i> 6	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Bens de Consumo (50%), Bens Industriais (50%)
<i>Portfolio</i> 7	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Conservadora	Pessimista	40%	60%	Euronext - Cuidados de Saúde (20%), <i>Utilities</i> (20%) FTSE 100 – Bens de Consumo (20%), Bens Industriais (20%), Tecnologia (20%)
<i>Portfolio</i> 8	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Agressiva	Otimista	50%	50%	Euronext – Financeiro (50%) FTSE 100 – Bens Industriais (50%)
<i>Portfolio</i> 9	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Médio	30%	70%	Euronext – Materiais Básicos (30%) FTSE 100 – Bens Industriais (35%), Tecnologia (35%)
<i>Portfolio</i> 10	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Ligeiramente pessimista (coeficientes de pessimismo =2/3)	40%	60%	Euronext – Cuidados de Saúde (10%), Materiais Básicos (30%) FTSE 100 – Bens Industriais (30%), Tecnologia (30%)

3.1.3 Cenário de recuperação económica

O modelo obtido neste período possui 164 restrições e 182 variáveis de decisão.

A informação respeitante aos *portfolios* possivelmente eficientes consta da Tabela 3.5.

Uma vez mais, os *portfolios* 1, 3 e 5 são obtidos com base numa estratégia conservadora, enquanto os *portfolios* 2, 4 e 6 são calculados de acordo com uma estratégia agressiva.

Tal como nos cenários anteriores, os *portfolios* obtidos na Tabela 3.5 são mais diversificados adotando estratégias conservadoras, enquanto estratégias mais agressivas conduzem a menos diversificação.

Tabela 3.5. Proporção de ativos em cada *portfolio* – cenário de recuperação

	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
Estratégia	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
AB INBEV	0,20	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,20	0,00	0,30	0,30
AGEAS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
AHOLD KON	0,20	0,00	0,00	0,00	0,20	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00
ASML HOLDING	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BT GROUP	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CENTRICA	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00
EDP	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ESSILOR INTL.	0,20	0,00	0,20	0,00	0,20	0,00	0,20	0,00	0,00	0,10
INTERNACIONAL CONSOLIDATED	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ITV	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KLEPIERRE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
RECKITT BENCKISER GROUP	0,20	0,00	0,00	0,00	0,20	0,50	0,20	0,00	0,00	0,00
ROLLS ROYCE HOLDINGS	0,00	0,00	0,20	0,50	0,00	0,00	0,20	0,50	0,35	0,30
SAFRAN	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SEVERN TRENT	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SHIRE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SOLVAY	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TAYLOR WIMPEY	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
VEOLIA ENVIRON.	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
VODAFONE	0,20	0,50	0,20	0,50	0,00	0,00	0,00	0,50	0,35	0,30

O *trade-off* entre as funções de retorno, risco e liquidez é ilustrado na Figura 3.

Num cenário de recuperação económica, o limite inferior da função de risco deixa de ser nulo, como nos *portfolios* anteriormente analisados, verificando-se um aumento do risco no cenário pessimista. No entanto, o nível máximo de risco (no limite superior desta função) é obtido no cenário de crise económica.

A liquidez máxima alcançada (quer no limite superior quer no limite inferior desta função) atinge o intervalo de valores mais elevado ($[0,080, 0,538]$), em comparação com os valores obtidos quer num cenário de crise ($[0,06, 0,297]$), quer considerando o período global de análise ($[0,03, 0,157]$).

Este resultado é consistente com os resultados obtidos em Florackis, Giorgioni, Kostakis & Milas (2014), para dados compreendidos entre 1989 e 2012 para o Reino Unido. Estes autores concluíram que existe uma correlação negativa entre a liquidez nos mercados de capitais e o crescimento do Produto Interno Bruto (PIB), sendo esta mais vincada nos períodos com menor crescimento económico. Estes autores também demonstraram que, durante os períodos de incerteza relativamente ao futuro da economia, os investidores tendem a reduzir a sua exposição aos mercados acionistas, provocando a redução da sua liquidez.

O retorno logarítmico máximo alcançado atinge o intervalo de valores ($[-0,005, 0,024]$), enquanto que no cenário de crise e no período global da análise varia entre $[-0,007, 0,028]$ e $[-0,007, 0,031]$, respetivamente.

O facto do retorno logarítmico máximo não atingir o valor mais elevado no período de recuperação pode estar relacionado com a alteração das condições de funcionamento do mercado de ações após a crise económica (Aarnikoivu, 2015).

Uma vez mais, os níveis de liquidez mais baixos são registados quando se minimiza o risco com uma estratégia mais agressiva (*Portfolio 6*), mantendo-se o *trade-off* entre risco e liquidez. O *trade-off* entre risco e retorno está patente no *Portfolio 2* (máximo risco no cenário pessimista) e no *Portfolio 6* (mínimo retorno no cenário otimista).

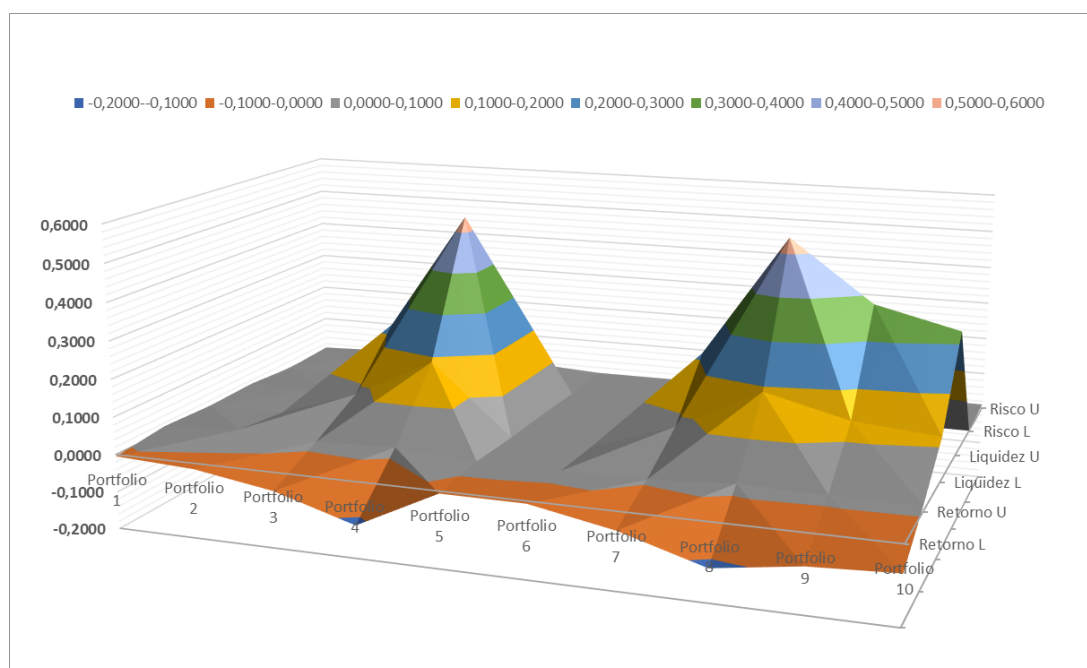


Figura 3. Retorno, liquidez e risco – cenário de recuperação

As características dos *portfolios* possivelmente eficientes estão patentes na Tabela 3.6.

Após a observação da Tabela 3.6, é de salientar que o peso do mercado FTSE 100 na carteira assume sempre o valor de 100%, em todos os *portfolios* obtidos com uma estratégia agressiva. Por outro lado, a escolha de uma estratégia conservadora conduz, em geral, a uma maior importância do mercado Euronext, excetuando no caso de minimização do risco (*Portfolios 5*).

Os setores que oferecem o maior retorno de acordo com uma estratégia conservadora (*Portfolio 1*) alteram-se em relação ao cenário de crise, deixando de contemplar o setor de *Utilities*. Deste modo, o peso do setor de Bens de Consumo na carteira aumenta de 20% para 40%. Assumindo uma estratégia agressiva, a carteira passa a contemplar, de forma equitativa, ações dos setores de *Utilities* e de Tecnologia, em substituição dos setores Financeiro e de Bens Industriais.

Por outro lado, num cenário de recuperação económica, em contraposição com o cenário de crise, os Setores de Cuidados de Saúde e Financeiro alteram o seu peso na carteira que oferece a liquidez máxima (assumindo uma estratégia conservadora), aumentando de 0% para 20% e reduzindo de 20% para 0%, respetivamente.

No caso da opção por uma estratégia agressiva em torno da liquidez, são igualmente selecionados os setores de Bens Industriais e de Tecnologia.

Os setores que oferecem menor risco (*Portfolios 5 e 6*), de acordo com uma estratégia agressiva, passam a contemplar para além do setor de Bens de Consumo, o setor de *Utilities*, em detrimento do setor de Bens Industriais. Por outro lado, com a consideração de uma estratégia conservadora, o setor de Serviços passa a constar da carteira, por substituição do setor de Bens Industriais, enquanto o setor de *Utilities* reduz o seu peso na carteira para 20%.

No que se refere aos *Portfolios 7, 9 e 10*, regista-se um aumento do peso do setor de Bens de Consumo, em relação ao cenário de crise, em particular no mercado Euronext.

Tabela 3.6. Características dos portfólios obtidos – cenário de recuperação

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
<i>Portfolio 1</i>	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	60%	40%	Euronext – Bens de Consumo (20%), Cuidados de Saúde (20%), Serviços (20%) FTSE 100 – Bens de Consumo (20%), Tecnologia (20%)
<i>Portfolio 2</i>	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – <i>Utilities</i> (50%), Tecnologia (50%)
<i>Portfolio 3</i>	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	60%	40%	Euronext – Bens de Consumo (20%), Cuidados de Saúde (20%), Materiais Básicos (20%) FTSE 100 – Tecnologia (20%), Bens de Consumo (20%)
<i>Portfolio 4</i>	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Bens Industriais (50%), Tecnologia (50%)
<i>Portfolio 5</i>	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Conservadora	Pessimista	40%	60%	Euronext – Cuidados de Saúde (20%) e Serviços (20%) FTSE 100 – Tecnologia (20%), Bens de Consumo (20%) e <i>Utilities</i> (20%)
<i>Portfolio 6</i>	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Bens de Consumo (50%) e <i>Utilities</i> (50%)
<i>Portfolio 7</i>	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Conservadora	Pessimista	60%	40%	Euronext - Cuidados de Saúde (20%), Serviços (20%), Bens de Consumo (20%) FTSE 100 – Bens de Consumo (20%) e Bens Industriais (20%)

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
Portfolio 8	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Bens Industriais (50%) e Tecnologia (50%)
Portfolio 9	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Médio	30%	70%	Euronext – Bens de Consumo (30%) FTSE 100 – Bens Industriais (35%) e Tecnologia (35%)
Portfolio 10	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Ligeiramente pessimista (coeficientes de pessimismo = 2/3)	40%	60%	Euronext – Bens de Consumo (30%), Cuidados de Saúde (10%) FTSE 100 – Bens Industriais (30%) e Tecnologia (30%)

3.2 Resultados obtidos com a carteira de *Big Stocks*

A obtenção dos *portfolios* possivelmente eficientes para a carteira global, composta por 89 títulos *Big Stocks*, foi também efetuada com recurso ao *software* gratuito *open solver*, por motivos análogos aos alegados anteriormente.

3.2.1 Período global de análise

O modelo obtido neste período possui 305 restrições e 392 variáveis de decisão.

As Tabelas 3.7 e 3.8 permitem obter informação acerca dos *portfolios* possivelmente eficientes, selecionados de acordo com diferentes estratégias de investimento.

Os *portfolios* 1, 3 e 5 são obtidos considerando uma estratégia conservadora e os *portfolios* 2, 4 e 6 são obtidos de acordo com uma estratégia agressiva.

Relativamente aos *portfolios* obtidos nas Tabelas 3.7 e 3.8, pode concluir-se, tal como nos *portfolios* da carteira diversificada de partida, em todos os cenários, que estratégias mais conservadoras conduzem sempre a *portfolios* mais diversificados, enquanto estratégias mais agressivas relegam para segundo plano a diversificação, concentrando, uma vez mais, o investimento em apenas duas ações.

No que se refere ao *portfolio* de ações que permite maximizar o retorno, de acordo com uma estratégia conservadora, permanecem, no *portfolio*, ações das empresas *Essilor INTL*. (Cuidados de Saúde) e *Vodafone* (Tecnologia), que são selecionadas em todos os *portfolios* da carteira diversificada de partida, em todos os cenários de análise (Tabelas 3.1, 3.3 e 3.5). De acordo com a opção por uma estratégia agressiva, a escolha da *Vodafone* com um peso de 50%, só não é obtida na carteira diversificada, no cenário de

crise económica. As restantes ações dos *portfolios* obtidos na carteira global correspondem a empresas que não constam da carteira diversificada (Secção anterior).

O retorno logarítmico máximo obtido na carteira global de *Big Stocks* permite alcançar valores no intervalo $[-0,006, 0,074]$, superiores aos obtidos considerando a carteira de partida diversificada, no período global da análise $[-0,007, 0,031]$.

Nesta solução, o risco da carteira global de *Big Stocks* aumenta em relação ao risco da carteira diversificada de partida, considerando o período global de análise.

O *portfolio* de ações que permite maximizar a liquidez, de acordo com uma estratégia conservadora, contém ações da empresa *Rolls Royce Holdings*, que são selecionadas em todos os *portfolios* da carteira diversificada, em todos os cenários de análise (Tabelas 3.1, 3.3 e 3.5). De acordo com a opção por uma estratégia agressiva, nenhuma das ações dos *portfolios* obtidos na carteira global corresponde a empresas que constam da carteira diversificada de partida (Secção anterior).

A liquidez máxima alcançada atinge o intervalo de valores $[0,440, 2,641]$, enquanto a carteira diversificada de partida, no período de recuperação económica, atinge valores na ordem de $[0,08, 0,538]$.

A minimização do risco permite obter risco nulo (no limite superior e inferior desta função), tal como já sucedia com os valores obtidos para este eixo de avaliação com o *portfolio* diversificado de partida, no cenário de recuperação económica. Não obstante, nenhuma das empresas *Big Stock* selecionadas coincide com as empresas contantes da carteira de ações diversificada de partida no cenário de recuperação económica.

A interação entre as funções de retorno, risco e liquidez pode ser avaliada através da Figura 4. O *trade-off* entre risco e liquidez está patente no cenário conservador da minimização do risco (*Portfolio 5*), onde a liquidez obtém os valores mais baixos em ambos os limites. Neste caso, a maximização da liquidez conduz aos maiores níveis de risco no cenário pessimista (assumindo uma estratégia conservadora) – ver *Portfolio 3*. Por outro lado, o *portfolio* que admite menor retorno, no limite superior desta função, resulta da minimização do risco num cenário otimista (*Portfolio 6*).

As características dos *portfolios* possivelmente eficientes são apresentadas na Tabela 3.9.

Após a observação da Tabela 3.9, é de ressaltar que o peso do mercado FTSE 100 na carteira assume valores superiores quase em todas as estratégias, excetuando na minimização do risco com uma estratégia conservadora (*Portfolio 6*), onde a Euronext tem um peso de 100% na carteira de ações selecionada.

Depois de analisada a Tabela 3.9, é possível concluir que uma estratégia mais agressiva em torno do retorno, conduz à aquisição de ações apenas no mercado FTSE 100, contemplando um nível baixo de diversificação da carteira (*Portfolio 2*). Não obstante, a escolha de uma estratégia conservadora em função do retorno (*Portfolio 1*), continua a propor que a maioria da carteira seja proveniente do mercado FTSE 100 (80%), mas com um maior nível de diversificação da carteira. Neste caso, os setores que oferecem maior retorno num cenário pessimista são o de Tecnologia (20%), de Serviços (20%), de Bens de Consumo (40%) e de Cuidados de Saúde (20%). Num cenário otimista (*Portfolio 2*), o retorno máximo obtém-se apenas com o investimento equitativo nos setores Financeiro e de Tecnologia.

Estratégias mais agressivas em torno da liquidez conduzem, uma vez mais, a um enfoque no mercado FTSE 100, contemplando o investimento em duas ações apenas (*Portfolio 4*). Os setores que oferecem a máxima liquidez são o de Cuidados de Saúde (50%) e o de Materiais Básicos (50%).

Uma postura mais conservadora em função da liquidez (*Portfolio 3*) sugere que todo o investimento seja canalizado para o mercado FTSE 100, alcançando-se um maior nível de diversificação. Neste contexto, os setores que permitem obter maior liquidez incluem para além dos setores de Cuidados de Saúde (20%) e de Materiais Básicos (20%), os setores de Bens Industriais (20%), de Bens de Consumo (20%) e Financeiro (20%).

Se o decisor adotar uma estratégia mais agressiva em função do risco (*Portfolio 6*), 100% do investimento é canalizado para o mercado Euronext. Neste caso, os setores que oferecem menor risco são o de Serviços e de Materiais Básicos.

Uma estratégia mais conservadora deste eixo de avaliação da carteira (*Portfolio 5*), coloca apenas 60% do investimento no mercado FTSE 100. Deste modo, os setores que permitem obter menor risco são os de Tecnologia (20%), Serviços (40%) e Bens de Consumo (40%).

Tabela 3.7. Proporção de ativos em cada *portfolio* - *Big Stocks*, cenário global (1)

Estratégia	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
AB INBEV	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AEGON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AGEAS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AHOLD KON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AIR LIQUIDE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,00	0,00
AIRBUS GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ARCELORMITTAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ASML HOLDING	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ASTRAZENECA	0,000	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,200	0,500	0,35	0,30
AVIVA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AXA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BARCLAYS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BG GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BHP BILLITON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BNP PARIBAS ACT.A	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BRITISH AMERICAN TOBACCO	0,200	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,30	0,10
BRITISH LAND COMPANY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BT GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CAP GEMINI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CARREFOUR	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,00	0,00
CENTRICA GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AGRICOLE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DANONE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DELHAIZE GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DIAGEO	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
EDP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ENGIE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ESSILOR INTL.	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
EXPERIAN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
GLAXOSMITHKLINE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
HEINEKEN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
HSBC HOLDINGS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
IMPERIAL TOBACCO GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ING GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
INTERTEK GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ITV	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
KINGFISHER	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
KLEPIERRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
L'OREAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LAND SECURITIES GROUP	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,00	0,30
LEGAL & GENERAL GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LLOYDS BANKING GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LONDON STOCK EXCHANGE GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LVMH	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Tabela 3.8. Proporção de ativos em cada *portfolio* – *Big Stocks*, cenário global (2)

	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
Estratégia	Conservadora	Agressiva	Conservador	Agressiva	Conservador	Agressiva	Conservador	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
MICHELIN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
NATIONAL GRID	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
NEXT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ORANGE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PERNOD RICARD	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PEUGEOT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PHILIPS KON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PRUDENTIAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PUBLICIS GROUPE SA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RANDST AD	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RECKITT BENCKISER GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RELX	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RENAULT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RIO TINTO	0,000	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,200	0,500	0,35	0,30
ROLLS ROYCE HOLDINGS	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL BANK OF SCOTLAND GROUP	0,000	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELL A	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELL B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELLA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SABMiller	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAFRAN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAINSBURY (J)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAINT GOBAIN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SANOFI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SCHNEIDER ELECTRIC	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SEVERN TRENT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SHIRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SKY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SOCIETE GENERALE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SOLVAY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SSE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
STANDARD CHARTERED	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,00	0,00
TAYLOR WIMPEY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
TESCO	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
TOTAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNIBAIL-RODAMCO	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNILEVER	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNILEVER DR	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VEOLIA ENVIRON.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VINCI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VIVENDI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VODAFONE	0,200	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,00	0,00
WPP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

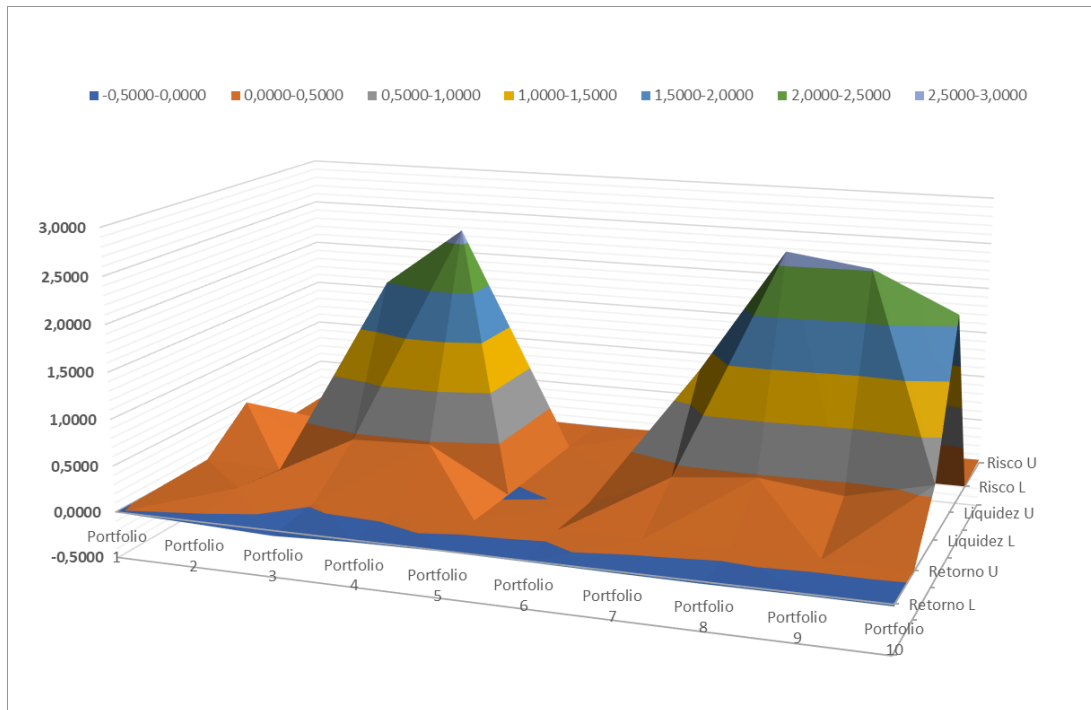


Figura 4. Retorno, liquidez e risco da carteira de *Big Stocks* – cenário global

O setor de Cuidados de Saúde é uma constante nos *portfolios* 7, 8, 9 e 10, apesar de apresentar pesos diferenciados na carteira, entre 20% e 50%.

Tabela 3.9. Características dos *portfolios* obtidos – *Big Stocks*, cenário global

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
<i>Portfolio</i> 1	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	20%	80%	Euronext – Cuidados de Saúde (20%) FTSE 100 – Tecnologia (20%), Serviços (20%), Bens de Consumo (40%)
<i>Portfolio</i> 2	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Tecnologia (50%), Financeiro (50%)
<i>Portfolio</i> 3	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (20%), Financeiro (20%), Materiais Básicos (20%), Bens Industriais (20%)
<i>Portfolio</i> 4	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (50%), Materiais Básicos (50%)
<i>Portfolio</i> 5	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Conservadora	Pessimista	40%	60%	Euronext – Bens de Consumo (20%), Tecnologia (20%) FTSE 100 – Serviços (40%), Bens de Consumo (20%)

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
Portfolio 6	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Agressiva	Otimista	100%	0%	Euronext – Serviços (50%), Materiais Básicos (50%)
Portfolio 7	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Conservadora	Pessimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (20%), Financeiro (40%), Materiais Básicos (20%), Tecnologia (20%)
Portfolio 8	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (50%), Materiais Básicos (50%)
Portfolio 9	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Médio	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (35%), Bens de Consumo (30%), Materiais Básicos (35%)
Portfolio 10	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Ligeiramente pessimista (coeficientes de pessimismo =2/3)	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (30%), Financeiro (30%), Materiais Básicos (30%), Bens de Consumo (10%)

3.2.2 Cenário de crise económica

O modelo obtido neste período possui 161 restrições e 234 variáveis de decisão.

As Tabelas 3.10 e 3.11 oferecem informação acerca dos *portfolios* possivelmente eficientes, selecionados de acordo com diferentes estratégias de investimento, considerando apenas os dados respeitantes ao período de crise económica.

Analogamente ao que foi feito nas Secções anteriores, os *portfolios* 1, 3 e 5 são obtidos considerando uma estratégia conservadora, enquanto os *portfolios* 2, 4 e 6 são calculados de acordo com uma estratégia agressiva.

Os *portfolios* obtidos nas Tabelas 3.10 e 3.11, com estratégias mais conservadoras, conduzem, tal como anteriormente, a *portfolios* mais diversificados, enquanto estratégias mais agressivas concentram o investimento em apenas duas ações.

No que diz respeito ao *portfolio* de ações que permite maximizar o retorno, de acordo com uma estratégia conservadora, a carteira de ações não sofre alterações em relação ao período global de análise. A consideração de uma estratégia agressiva, conduz a que *Vodafone* seja substituída por uma empresa do setor de Bens Industriais (*Taylor Wimpey*) com um peso de 50%.

O retorno logarítmico máximo obtido na carteira global de *Big Stocks*, em cenário de recuperação, permite alcançar valores similares aos retornos obtidos na mesma carteira,

no período global de análise. Em relação ao cenário de crise, a composição da carteira passa a incluir ações do setor Tecnologia (*Vodafone*), em detrimento das ações do setor Industrial (*Taylor Wimpey*).

Nesta solução, o risco da carteira global de *Big Stocks* é semelhante ao obtido nas duas Secções anteriores.

Os *portfolios* de ações que permitem maximizar a liquidez, quer de acordo com uma estratégia conservadora, quer de acordo com uma estratégia agressiva, permitem obter valores ligeiramente inferiores aos registados no cenário de crise e no cenário global.

A minimização do risco permite obter risco nulo (no limite superior e inferior desta função), tal como nas soluções calculadas na Secção anterior.

A Figura 5 ilustra a interação entre as funções de retorno, risco e liquidez. Neste contexto, os resultados assemelham-se aos obtidos na Secção anterior.

Tabela 3.10. Proporção de ativos em cada *portfolio* – *Big Stocks*, cenário de crise (1)

Estratégia	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\phi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\phi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\phi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\phi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\phi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\phi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\phi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\phi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\phi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\phi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
AB INBEV	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AEGON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AGEAS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AHOLD KON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AIR LIQUIDE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,00	0,00
AIRBUS GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ARCELORMITTAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ASML HOLDING	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ASTRAZENECA	0,000	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,200	0,500	0,35	0,30
AVIVA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AXA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BARCLAYS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BG GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BHP BILLITON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BNP PARIBAS ACT.A	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BRITISH AMERICAN TOBACCO	0,200	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,00	0,10
BRITISH LAND COMPANY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BT GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CAP GEMINI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CARREFOUR	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,00	0,00
CENTRICA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
COMPASS GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CREDIT AGRICOLE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DANONE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DELHAIZE GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DIAGEO	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
EDP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ENGIE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ESSILOR INTL.	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
EXPERIAN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
GLAXOSMITHKLINE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
HEINEKEN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
HSBC HOLDINGS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
IMPERIAL TOBACCO GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ING GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
INTERTEK GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ITV	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
KINGFISHER	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
KLEPIERRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
L'OREAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LAND SECURITIES GROUP	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,30	0,30
LEGAL & GENERAL GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LLOYDS BANKING GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LONDON STOCK EXCHANGE GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LVMH	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Tabela 3.11. Proporção de ativos em cada *portfolio* – *Big Stocks*, cenário de crise (2)

	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
Estratégia	Conservadora	Agressiva	Conservador	Agressiva	Conservador	Agressiva	Conservador	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
MICHELIN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
NATIONAL GRID	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
NEXT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ORANGE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PERNOD RICARD	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PEUGEOT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PHILIPS KON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PRUDENTIAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PUBLICIS GROUPE SA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RANDST AD	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RECKITT BENCKISER GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RELX	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RENAULT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RIO TINTO	0,000	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,200	0,500	0,35	0,30
ROLLS ROYCE HOLDINGS	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL BANK OF SCOTLAND GROUP	0,000	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELL A	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELL B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELLA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SABMiller	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAFRAN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAINSBURY (J)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAINT GOBAIN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SANOFI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SCHNEIDER ELECTRIC	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SEVERN TRENT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SHIRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SKY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SOCIETE GENERALE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SOLVAY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SSE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
STANDARD CHARTERED	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,00	0,00
TAYLOR WIMPEY	0,000	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
TESCO	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
TOTAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNIBAIL-RODAMCO	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNILEVER	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNILEVER DR	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VEOLIA ENVIRON.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VINCI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VIVENDI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VODAFONE	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
WPP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

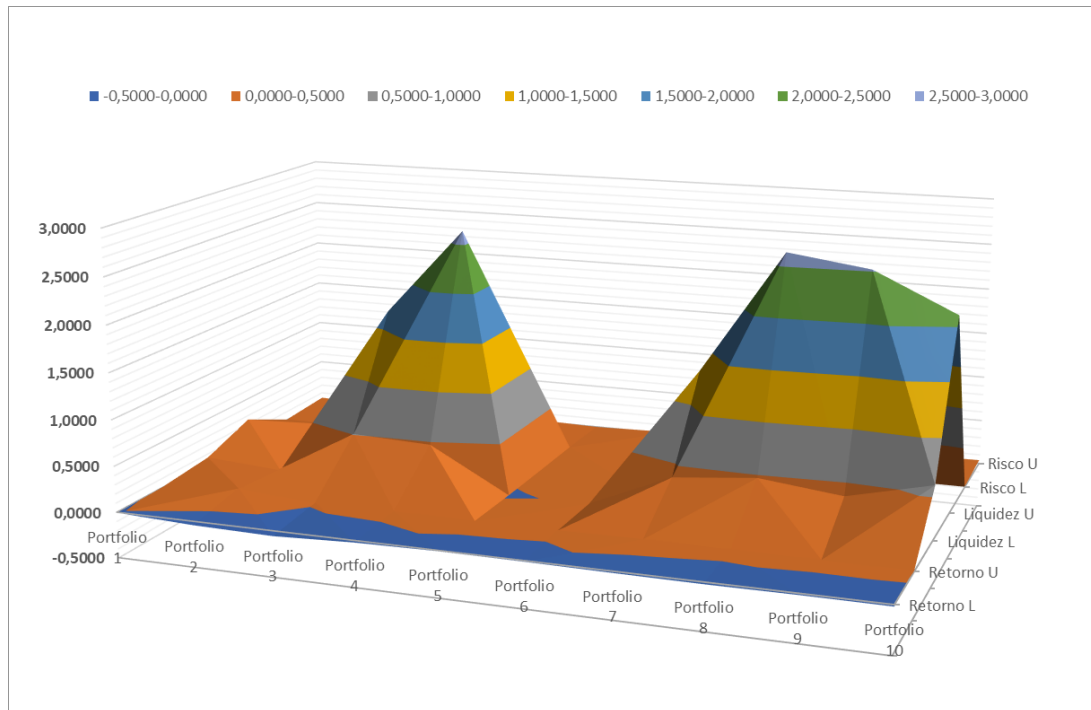


Figura 5. Retorno, liquidez e risco da carteira de *Big Stocks* - cenário de crise

A Tabela 3.12 apresenta de forma resumida as características dos *portfolios* possivelmente eficientes.

O maior peso do mercado FTSE 100 nos *portfolios* obtidos regista-se, novamente, quase em todas as estratégias, excetuando na minimização do risco com uma estratégia conservadora (*Portfolio* 6), onde o mercado Euronext tem um peso de 100% no *portfolio* de ações selecionado.

Após a análise da Tabela 3.12, é possível concluir que o *portfolio* que se altera de modo mais significativo, em relação aos *portfolios* obtidos na Secção anterior, é o que corresponde a uma estratégia agressiva em torno do retorno. Por outro lado, os *portfolios* 7 e 9 também sofrem alterações, com a substituição do setor de Tecnologia pelo setor de Bens de Consumo e com a saída do setor de Bens de Consumo e a entrada do setor Financeiro, respetivamente.

Tabela 3.12. Características dos portfólios obtidos – Big Stocks, cenário crise

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
Portfólio 1	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	20%	80%	Euronext – Cuidados de Saúde (20%) FTSE 100 – Tecnologia (20%), Serviços (20%), Bens de Consumo (40%)
Portfólio 2	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Bens Industriais (50%), Financeiro (50%)
Portfólio 3	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (20%), Financeiro (20%), Materiais Básicos (20%), Bens Industriais (20%), Bens de Consumo (20%)
Portfólio 4	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (50%), Materiais Básicos (50%)
Portfólio 5	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Conservadora	Pessimista	40%	60%	Euronext- Tecnologia 20%, Bens de Consumo 20% FTSE 100 – Serviços (40%), Bens de Consumo (20%)
Portfólio 6	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Agressiva	Otimista	100%	0%	Euronext – Serviços (50%), Materiais Básicos (50%)
Portfólio 7	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Conservadora	Pessimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (20%), Financeiro (40%), Materiais Básicos (20%), Bens de Consumo (20%)
Portfólio 8	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (50%), Materiais Básicos (50%)
Portfólio 9	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Médio	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (35%), Financeiro (30%), Materiais Básicos (35%)
Portfólio 10	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Ligeiramente pessimista (coeficientes de pessimismo = 2/3)	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (30%), Financeiro (30%), Materiais Básicos (30%), Bens de Consumo (10%)

3.2.3 Cenário de recuperação económica

O modelo obtido neste período possui 233 restrições e 320 variáveis de decisão.

As Tabelas 3.13 e 3.14 facultam informação acerca dos portfólios possivelmente eficientes, selecionados de acordo com diferentes estratégias de investimento, considerando apenas os dados respeitantes ao período de recuperação económica.

Analogamente ao que foi efetuado nas Secções anteriores, os *portfolios* 1, 3 e 5 são obtidos considerando uma estratégia conservadora, enquanto os *portfolios* 2, 4 e 6 são calculados de acordo com uma estratégia agressiva.

Os *portfolios* obtidos nas Tabelas 3.13 e 3.14 com estratégias mais conservadoras conduzem, mais uma vez, a *portfolios* mais diversificados, enquanto estratégias mais agressivas registam o investimento em apenas duas ações.

No que se refere ao *portfolio* de ações que permite maximizar o retorno, de acordo com uma estratégia conservadora, a carteira de ações sofre alterações, quer em relação ao período global de análise, quer em relação ao cenário de crise. A consideração de uma estratégia agressiva, conduz a que a *Diageo* (setor de Bens de Consumo – FTSE 100) seja substituída por uma empresa do mesmo setor, mas do mercado Euronext (*AB INBEV*).

O retorno logarítmico máximo obtido na carteira global de *Big Stocks*, em cenário de recuperação, permite alcançar valores similares aos retornos obtidos na mesma carteira, no período global de análise, e aos retornos obtidos na carteira diversificada de partida, no período de recuperação económica. Em relação ao cenário de crise, a composição da carteira passa a incluir ações do setor Tecnologia (*Vodafone*), em detrimento das ações do setor Industrial (*Taylor Wimpey*).

Nesta solução, o risco da carteira global de *Big Stocks* é semelhante ao obtido nas três Secções anteriores.

Os *portfolios* de ações que permitem maximizar a liquidez, quer de acordo com uma estratégia conservadora, quer de acordo com uma estratégia agressiva, são semelhantes aos calculados para a carteira diversificada de partida, no período de recuperação económica.

A minimização do risco permite obter risco nulo (no limite superior e inferior desta função), tal como nas soluções calculadas nas três Secções anteriores.

A Figura 6 permite avaliar o *trade-off* entre as funções de retorno, risco e liquidez. Neste contexto, os resultados assemelham-se aos obtidos nas três Secções anteriores.

A Tabela 3.15 mostra, de forma resumida, as características dos *portfolios* possivelmente eficientes.

Verifica-se, novamente, uma preponderância do mercado FTSE 100, quase em todas as estratégias, excetuando na minimização do risco com uma estratégia conservadora

(*Portfolio 6*), onde o mercado Euronext alcança um peso de 100% no *portfolio* de ações selecionado.

Após a análise da Tabela 3.15, é possível concluir que o *portfolio* que se altera de modo mais significativo, em relação aos *portfolios* obtidos na Secção anterior, é o que corresponde a uma estratégia agressiva em torno do retorno. Por outro lado, os *portfolios* 7, 8 e 9 também sofrem alterações, fundamentalmente devido à substituição do setor de Materiais Básicos pelo setor de Bens de Consumo.

Tabela 3.13. Proporção de ativos em cada *portfolio* – Big Stocks, recuperação (1)

Estratégia	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Conservadora	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
AB INBEV	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AEGON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AGEAS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AHOLD KON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AIR LIQUIDE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,00	0,00
AIRBUS GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ARCELORMITTAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ASML HOLDING	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ASTRAZENECA	0,000	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,200	0,500	0,35	0,30
AVIVA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AXA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BARCLAYS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BG GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BHP BILLITON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BNP PARIBAS ACT.A	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BRITISH AMERICAN TOBACCO	0,200	0,000	0,200	0,500	0,000	0,000	0,200	0,500	0,35	0,30
BRITISH LAND COMPANY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
BT GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CAP GEMINI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
CARREFOUR	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,00	0,00
CENTRICA GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
AGRICOLE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DANONE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DELHAIZE GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
DIAGEO	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
EDP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ENGIE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ESSILOR INTL.	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
EXPERIAN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
GLAXOSMITHKLINE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
HEINEKEN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
HSBC HOLDINGS	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
IMPERIAL TOBACCO GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ING GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
INTERTEK GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ITV	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
KINGFISHER	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,00	0,00
KLEPIERRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
L'OREAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LAND SECURITIES GROUP	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,00	0,30
LEGAL & GENERAL GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LLOYDS BANKING GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LONDON STOCK EXCHANGE GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
LVMH	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Tabela 3.14. Proporção de ativos em cada *portfolio* – *Big Stocks*, recuperação (2)

	Portfolio 1	Portfolio 2	Portfolio 3	Portfolio 4	Portfolio 5	Portfolio 6	Portfolio 7	Portfolio 8	Portfolio 9	Portfolio 10
Estratégia	Conservadora	Agressiva	Conservador	Agressiva	Conservador	Agressiva	Conservador	Agressiva	Combinada	Combinada
Empresas	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=1, \tau=0, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=1, \gamma=0$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=0, \tau=0, \gamma=1$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/6, \tau=1/6, \gamma=2/3$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=1/2$	$\varphi=1/3, \tau=1/3, \gamma=1/3, \rho=2/3$
MICHELIN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
NATIONAL GRID	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
NEXT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ORANGE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PERNOD RICARD	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PEUGEOT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PHILIPS KON	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PRUDENTIAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
PUBLICIS GROUPE SA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RANDST AD	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RECKITT BENCKISER GROUP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RELX	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RENAULT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
RIO TINTO	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,30	0,10
ROLLS ROYCE HOLDINGS	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL BANK OF SCOTLAND GROUP	0,000	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELL A	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELL B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
ROYAL DUTCH SHELLA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SABMiller	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAFRAN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAINSBURY (J)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SAINT GOBAIN	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SANOFI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SCHNEIDER ELECTRIC	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SEVERN TRENT	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SHIRE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SKY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SOCIETE GENERALE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SOLVAY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
SSE	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
STANDARD CHARTERED	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
TAYLOR WIMPEY	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
TESCO	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
TOTAL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNIBAIL-RODAMCO	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNILEVER	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
UNILEVER DR	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VEOLIA ENVIRON.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VINCI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VIVENDI	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
VODAFONE	0,200	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
WPP	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

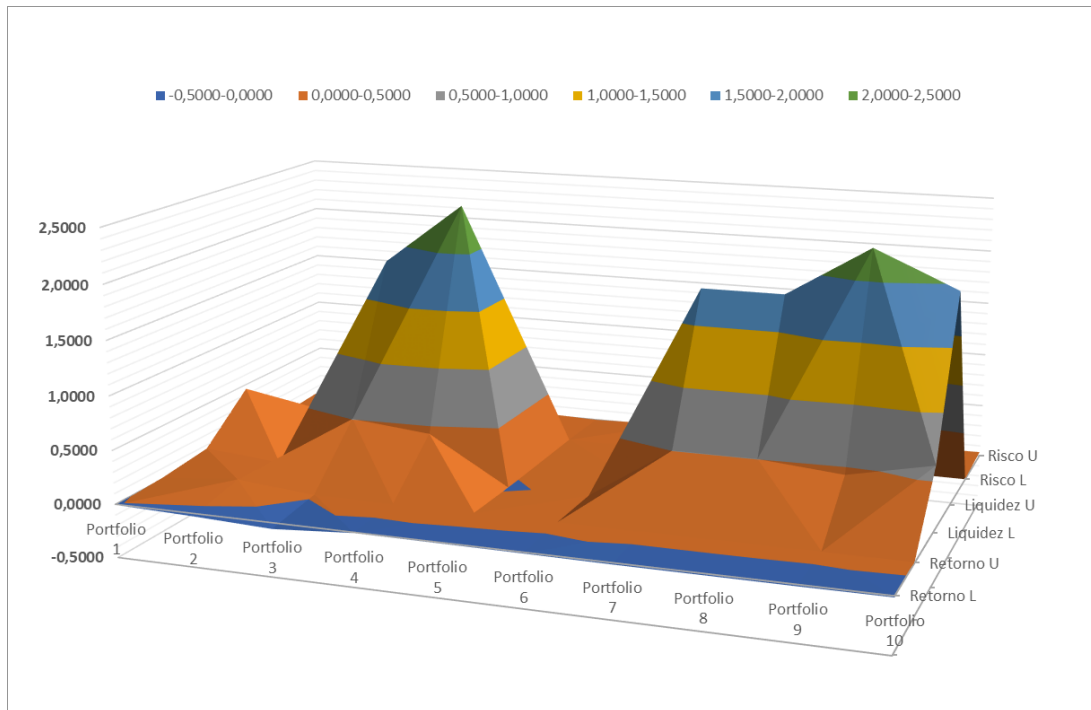


Figura 6. Retorno, liquidez e risco da carteira de *Big Stocks* – recuperação

Tabela 3.15. Características dos portfólios obtidos – *Big Stocks*, recuperação

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
<i>Portfólio 1</i>	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	40%	80%	Euronext – Bens de Consumo (20%), Cuidados de Saúde (20%) FTSE 100 – Tecnologia (20%), Serviços (20%), Bens de Consumo (20%)
<i>Portfólio 2</i>	$\varphi=1$	$\tau=0$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Tecnologia (50%), Financeiro (50%)
<i>Portfólio 3</i>	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Conservadora	Pessimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (20%), Financeiro (20%), Materiais Básicos (20%), Bens Industriais (20%), Bens de Consumo (20%)
<i>Portfólio 4</i>	$\varphi=0$	$\tau=1$	$\gamma=0$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (50%), Bens de Consumo (50%)
<i>Portfólio 5</i>	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Conservadora	Pessimista	40%	60%	Euronext- Tecnologia 20%, Bens de Consumo 20% FTSE 100 – Serviços (40%), Bens de Consumo (20%)
<i>Portfólio 6</i>	$\varphi=0$	$\tau=0$	$\gamma=1$	Agressiva	Otimista	100%	0%	Euronext – Serviços (50%), Materiais Básicos (50%)

Modelo de portfolio multiobjetivo com coeficientes intervalares: Euronext e FTSE 100

Solução	Retorno	Liquidez	Risco	Estratégia	Cenário	Euronext	FTSE 100	Setores de atividade
<i>Portfolio</i> 7	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Conservadora	Pessimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (20%), Financeiro (20%), Materiais Básicos (20%), Bens de Consumo (20%), Serviços
<i>Portfolio</i> 8	$\varphi=1/6$	$\tau=1/6$	$\gamma=2/3$	Agressiva	Otimista	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (50%), Bens de Consumo (50%)
<i>Portfolio</i> 9	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Médio	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (35%), Bens de Consumo (35%), Materiais Básicos (30%)
<i>Portfolio</i> 10	$\varphi=1/3$	$\tau=1/3$	$\gamma=1/3$	Combinada	Ligeiramente pessimista (coeficientes de pessimismo = 2/3)	0%	100%	FTSE 100 – Cuidados de Saúde (30%), Materiais Básicos (30%), Bens de Consumo (30%), Serviços (10%)

CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um modelo de *portfolio* com funções objetivo intervalares, contemplando também restrições intervalares. As funções objetivo consideradas no modelo são a minimização do risco (medido através do desvio médio semi-absoluto), a maximização da liquidez (tendo como *proxy* o *turnover*) e a maximização do retorno. Para além de restrições de coerência (que impõem que a soma das percentagens afetas às ações da carteira deve ser igual a 100%), são impostas restrições que asseguram um determinado nível de diversificação, bem como restrições de cardinalidade. Por outro lado, o modelo não permite a venda de ações a descoberto.

Finalmente, neste âmbito, é ainda exposto um método para obtenção de *portfolios* possivelmente eficientes, que permite considerar três tipos de estratégias de investimento, ou seja, uma estratégia conservadora, uma estratégia agressiva e uma estratégia combinada.

A utilidade da abordagem apresentada foi ilustrada através da sua aplicação real aos mercados Euronext e FTSE 100.

Numa primeira etapa, de modo a obter as carteiras de ações, que foram utilizadas para instanciar o modelo de *portfolio* apresentado, foi seguida a metodologia proposta por Anton & Polk (2014) para efetuar a segmentação das ações.

Posteriormente, a obtenção das carteiras de ações diversificada foi feita com base numa abordagem inspirada no modelo de Markowitz (1952), com a introdução de restrições de cardinalidade, isto é, primeiro foram obtidas as ações conducentes ao menor nível de correlação do setor e, por fim, foram determinadas as conducentes à menor correlação verificada nos respetivos mercados.

De modo a ser possível avaliar o impacto de cenários *bull* e *bear* nas soluções obtidas, delimitou-se o período de análise entre agosto de 2007 e dezembro de 2009, estabelecendo-se o período de recuperação económica até novembro de 2015.

Finalmente, de modo a aferir o impacto da consideração da diversificação da carteira de partida nos resultados da carteira, foram também apresentados os resultados obtidos para a carteira global de *Big Stocks*, composta por 89 ações. Nestas circunstâncias, foi possível constatar que o algoritmo apresentado para a obtenção de soluções eficientes não apresenta elevada complexidade computacional, mesmo para os modelos de maiores dimensões.

Os resultados mostram que, com a adoção de uma estratégia conservadora (ou seja, mais avessa ao risco), as carteiras obtidas são sempre mais diversificadas, verificando-se o oposto com a adoção de estratégias mais agressivas.

De um modo geral, este estudo também contribui para a compreensão dos *trade-offs* entre o risco, retorno e liquidez em diferentes conjunturas económicas, nos mercados Euronext e FTSE 100. Neste contexto, destaca-se o *trade-off* entre risco e retorno, que tende a aumentar no cenário de crise económica (em particular na carteira diversificada de partida). Por outro lado, constata-se que a obtenção de liquidez máxima não conduz a retornos máximos, evidenciando-se um *trade-off* negativo entre liquidez e retorno. No que se refere ao *trade-off* entre risco e liquidez, regista-se que o risco mínimo, conduz, em geral, a níveis de liquidez mais baixos.

Estes resultados parecem corroborar as hipóteses postuladas por alguns autores de que a liquidez das ações é capaz de reduzir parte do risco incorrido pelo investidor, tornando-o mais disposto a pagar um preço superior por estas, implicando menores retornos esperados de mercado (Perobelli et al., 2016), verificando-se que o retorno esperado está negativamente correlacionado com a taxa de *turnover* (Datar et al., 1998; Amihud & Mendelson, 1986).

Por outro lado, a literatura científica tem reconhecido a existência de uma correlação positiva entre o *turnover* e a volatilidade (dos preços) das ações (Karpoff, 1987; Gallant et al., 1992; Harris & Raviv, 1993; Bessembinder & Seguin, 1993; Shalen, 1993), podendo explicar o *trade-off* entre o risco e liquidez obtido nos resultados.

Da análise dos *portfolios* possivelmente eficientes da carteira diversificada, foi possível concluir que, num cenário de recuperação económica, o limite inferior da função de risco deixa de ser nulo, verificando-se um aumento do risco no cenário pessimista. Contudo, pode concluir-se que o risco no cenário pessimista é sempre positivo, em qualquer das fases do ciclo económico, no que se refere aos *portfolios* obtidos a partir da carteira global de 89 ações. Portanto, a carteira diversificada de partida permite a um investidor avesso ao risco obter sempre *portfolios* associados a níveis menores de risco, mas também a menores níveis de liquidez e de retorno.

A liquidez máxima alcançada para a carteira diversificada de partida atinge o intervalo de valores mais elevado num cenário de recuperação económica. Não obstante, se for considerada a carteira global de 89 ações, os maiores níveis de liquidez são registados no

cenário de crise económica e não no de recuperação económica. Este resultado vai de encontro, por um lado, aos resultados obtidos em Florackis et al. (2014) de que existe uma correlação negativa entre a liquidez nos mercados de capitais e o crescimento do PIB. Por outro lado, a medida de liquidez aqui considerada (*turnover*) é pouco sensível à variação do preço, podendo conduzir à conclusão errada de que em períodos de queda bolsista subsistem níveis elevados de liquidez (Gaio, 2016).

Com a carteira de ações diversificada de partida, o retorno logarítmico máximo não atinge o valor mais elevado no período de recuperação económica. Já a carteira de 89 ações permite obter valores de retorno sempre mais altos que a carteira diversificada de partida e muito próximos uns dos outros, em qualquer cenário económico (sendo ligeiramente inferiores no cenário de crise económica).

Num cenário de recuperação económica, com a carteira diversificada de partida, salienta-se o peso de 100% do mercado FTSE 100, em todos os *portfolios* obtidos com uma estratégia agressiva. Por outro lado, a escolha de uma estratégia conservadora (quer num cenário de crise quer num cenário de recuperação) conduz, em geral, a uma maior importância do mercado Euronext, excetuando na minimização do risco.

Se se considerar a carteira global de 89 ações, verifica-se uma preponderância do mercado FTSE 100, quase em todas as estratégias, excetuando na minimização do risco com uma estratégia conservadora, onde o mercado Euronext alcança um peso de 100% no *portfolio* de ações selecionado.

As ações das empresas *Essilor INTL.* (Cuidados de Saúde) e *Vodafone* (Tecnologia) aparecem selecionadas no *portfolio* que maximiza o retorno, de acordo com uma estratégia conservadora, em qualquer dos cenários económicos (quer com a carteira diversificada de partida, quer com a carteira global de 89 ações).

Nas soluções mais equilibradas, isto é, onde todas as funções objetivo têm uma ponderação positiva, regista-se que, num cenário de recuperação económica, o setor Bens de Consumo aparece sempre nas soluções obtidas.

Em suma, pode concluir-se que, utilizando dados do mercado Euronext e FTSE 100, a adoção de uma estratégia assente na diversificação setorial para obter uma carteira de partida é capaz de gerar *portfolios* possivelmente eficientes com um desempenho ajustado ao risco consistentemente superior ao obtido com a abordagem tradicional.

Finalmente, como trabalho futuro seria interessante avaliar se uma estratégia de diversificação geográfica para obtenção da carteira diversificada de partida permitiria obter melhores resultados, como sugerido por Gerard et al. (2002) e Ehling & Ramos (2006).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aarnikoivu, M. (2015). *Relation between past stock market returns and trading volume in Europe* (Finance Master's thesis). Department of Finance, Aalto University School of Business.
- Alefeld, G., & Herzberger, J. (1983). *An introduction to interval computations*, New York: Academic Press.
- Amihud Y. and Mendelson, H. (1986). Asset pricing and the bid-ask spread, *Journal of Financial Economics*, 17, 223-249.
- Amihud, Y. (2002). Illiquidity and stock returns: cross-section and time-series effects. *Journal of Financial Markets*, 5, 31-56.
- Anton, M., & Polk, C. (2014). Connected stocks. *The Journal of Finance*, 69(3), 1099-1127.
- Antunes, C. A., & Clímaco, J. (2000). Decision aid in the optimization of the interval objective function. In *Decision making: Recent developments and worldwide applications* (pp. 251-261). Springer US.
- Antunes, C. H., Alves, M. J., & Clímaco, J. (2016). *Multiobjective linear and integer programming*. Springer.
- Arshanapalli, B., Doukas, J., & Lang, L. H. (1997). Common volatility in the industrial structure of global capital markets. *Journal of International Money and Finance*, 16(2), 189-209.
- Baca, S. P., Garbe, B. L., & Weiss, R. A. (2000). The rise of sector effects in major equity markets. *Financial Analysts Journal*, 56(5), 34-40.
- Beckers, S., Grinold, R., Rudd, A., & Stefek, D. (1992). The relative importance of common factors across the European equity markets. *Journal of Banking & Finance*, 16(1), 75-95.
- Bekaert, G., Hodrick, R. J., & Zhang, X. (2009). International stock return comovements. *The Journal of Finance*, 64(6), 2591-2626.
- Bekaert, G., Harvey, C. R., & Ng, A. (2005). *Market integration and contagion*, *Journal of Business* 78, 39–79.

- Bellman, R. E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, 17(4), B-141.
- Bessembinder, H., Seguin, P. J. (1993). Price Volatility, Trading Volume, and Market Depth: Evidence from the Futures Markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28, 21-39.
- Bhattacharyya, R., Kar, S., & Majumder, D. D. (2011). Fuzzy mean–variance–skewness *portfolio* selection models by interval analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(1), 126-137.
- Biglova, A., Ortobelli, S., Rachev, S. T., & Stoyanov, S. (2004). Different approaches to risk estimation in *portfolio* theory. *The Journal of Portfolio Management*, 31(1), 103-112.
- Bitran, G. R. (1980). Linear multiple objective problems with interval coefficients. *Management Science*, 26(7), 694-706.
- Bojadziev, G., & Bojadziev, M. (1996). *Fuzzy sets, fuzzy logic, applications* (Vol. 5). World scientific.
- Brooks, R. and Del Negro M. (2002b), *International divesification strategies*, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 2002-23.
- Brooks, R., and Del Negro M. (2002a), *The rise in comovement across national stock markets: market integration or global bubble?*, IMF Working Paper.
- Cavaglia, S., Brightman, C., & Aked, M. (2000). The increasing importance of industry factors. *Financial Analysts Journal*, 56(5), 41-54.
- Cesarone, F., Scozzari, A., & Tardella, F. (2011). Portfolio selection problems in practice: a comparison between linear and quadratic optimization models. *arXiv preprint arXiv:1105.3594*.
- Chinneck, J. W., Ramadan, K. (2000). Linear programming with interval coefficients. *Journal of the Operational Research Society*, 51(2), 209.
- Chordia, T, Subrahmanyam, A., & Tong, Q. (2014). Have Capital Market Anomalies Attenuated in the Recent Era of High Liquidity and Trading Activity?. *Journal of Accounting & Economics (JAE)*, 58, No. 1, 2014.

- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., & Prakash, A. J. (1997). Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. *Journal of Banking & Finance*, 21(2), 143-167.
- Clanchy, J. & Ballard, B. (2000). *Como escrever ensaios: um guia para estudantes*. Lisboa: Temas & Debates.
- Clímaco, J. N., Antunes, C. H., & Alves, M. J. G. (2003). *Programação linear multiobjetivo: do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objetivo*. Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press.
- Datar, V. T., Naik, N. Y., & Radcliffe, R. (1998). Liquidity and stock returns: an alternative test. *Journal of Financial Markets*, 1(2), 203-219.
- Drummen, M., & Zimmermann, H. (1992). The structure of European stock returns. *Financial Analysts Journal*, 48(4), 15-26.
- Ehling, P., & Ramos, S. B. (2006). Geographic versus industry diversification: Constraints matter. *Journal of Empirical Finance*, 13(4), 396-416.
- Errunza, V. R., & Padmanabhan, P. (1988). Further evidence on the benefits of portfolio investments in emerging markets. *Financial Analysts Journal*, 44(4), 76-78.
- Fasnacht, P., & Louberge, H. (2007). International stock market correlations: A sectoral approach.
- Ferreira, M. A., & Gama, P. M. (2010). Correlation dynamics of global industry portfolios. *Journal of Multinational Financial Management*, 20(1), 35-47.
- Florackis, C., Giorgioni, G., Kostakis, A., & Milas, C. (2014). On stock market illiquidity and real-time GDP. *Journal of International Money and Finance*, N°44, 210–229.
- Foran, J., Hutchinson, M. C., & O’Sullivan, S. (2015). Liquidity commonality and pricing in UK equities. *Research in International Business and Finance*, 34, 281-293.
- Forbes, K., & Rigobon, R. (2002). No Contagion, Only Interdependence: Measuring. In *Stock Market Comovements*,” *Journal of Finance*.
- Gaio, D. O. (2016). *Relação entre Liquidez do Mercado de Capitais e o Crescimento Económico - Itália, Espanha, Portugal e Grécia* (Dissertação de Mestrado em Gestão). Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Leiria.

- Gal, T., & Greenberg, H. J. (1997). Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming. International Series in Operations Research & Management Science, vol. 6.
- Galati, G., & Tsatsaronis, K. (2003). The impact of the euro on Europe's financial markets. *Financial Markets, Institutions & Instruments*, 12(3), 165-222.
- Gallant, A. R., Rossi, P. E., Tauchen, G. (1992). Stock Prices and Volume. 5, 199-242.
- Gerard, B., Hillion, P., & de Roon, F. (2002). International *portfolio* diversification: industry, country, and currency effects revisited. *Unpublished manuscript*.
- Giove, S., Funari, S., & Nardelli, C. (2006). An interval *portfolio* selection problem based on regret function. *European Journal of Operational Research*, 170(1), 253-264.
- Griffin, J. M., & Karolyi, G. A. (1998). Another look at the role of the industrial structure of markets for international diversification strategies. *Journal of financial economics*, 50(3), 351-373.
- Grinold, R. C., Rudd, A., & Stefek, D. (1989). Global factors: fact or fiction?. *The Journal of Portfolio Management*, 16(1), 79-88.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). *Fuzzy portfolio optimization: advances in hybrid multi-criteria methodologies* (Vol. 316). Springer.
- Harris, M., Raviv, A. (1993). Differences of Opinion make a Horse Race. *The Review of Financial Studies* 6, 473-506.
- Hearn, B. (2011). Modeling Size and Liquidity in North African Industrial Sectors. *Emerging Markets review* 12, 21-46.
- Heckman, L., Narayanan, S. R., & Patel, S. A. (2001). Country and industry importance in European returns. *The Journal of Investing*, 10(1), 27-34.
- Henriques, C. M. S. D. O. & Neves, M. (2017). *A multiobjective interval portfolio framework for supporting investor's preferences under different risk assumptions*. Proceedings of 8th International Research Meeting in Business and Management, July 2017, IPAG Business School, Nice, France.
- Henriques, C. M. S. D. O. (2009). *Modelos input-output multiobjetivo com coeficientes intervalares para o estudo das interações economia-energia-ambiente* (Doctoral dissertation).

- Heston, S. L., & Rouwenhorst, K. G. (1995). Industry and country effects in international stock returns. *The Journal of Portfolio Management*, 21(3), 53-58.
- Ida, M. (1999). Necessary efficient test in interval multiobjective linear programming. In *Proceedings of the eighth international fuzzy systems association world congress* (pp. 500-504).
- Ida, M. (2000). Efficient solution generation for multiple objective linear programming and uncertain coefficients. *Proceedings of the 8th Bellman Continuum, Taiwan*, 132-6.
- Ida, M. (2000). Interval multiobjective programming and mobile robot path planning. *New Frontier in Computational Intelligence and its Applications*.
- Ida, M. (2005). Efficient solution generation for multiple objective linear programming based on extreme ray generation method. *European Journal of Operational Research*, 160(1), 242-251.
- Inuiguchi, M., & Kume, Y. (1991). Goal programming problems with interval coefficients and target intervals. *European Journal of Operational Research*, 52(3), 345-360.
- Inuiguchi, M., & Kume, Y. (1994). Minimax regret in linear programming problems with an interval objective function. In *Multiple criteria decision making* (pp. 65-74). Springer New York.
- Inuiguchi, M., & Sakawa, M. (1995). Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function. *European Journal of Operational Research*, 86(3), 526-536.
- Inuiguchi, M., Higashitani, H., & Tanino, T. on Enumeration of Possibly Optimal Extreme Points in Linear Programming Problems with Interactive Possibilistic Variables, *Proceedings of 7th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing: CD Rom, cc5-312852_p.pdf*, Aachen, Germany, 1999.
- Isakov, D. & Sonney, F. (2003). Are practitioners right? On the relative importance of industrial factors in international stock returns.
- Karpoff, J. M. (1987). The Relation between Price Changes and Trading Volume: A Survey. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, 109-126.

- King, M. A., & Wadhvani, S. (1990). Transmission of volatility between stock markets. *The Review of Financial Studies*, 3(1), 5-33.
- King, M., Sentana, E., & Wadhvani, S. (1994). Volatility and Links between National.
- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, 37(5), 519-531.
- Korczak, P., & Bohl, M. T. (2005). Empirical evidence on cross-listed stocks of Central and Eastern European companies. *Emerging Markets Review*, 6(2), 121-137.
- Lai, K. K., Wang, S. Y., Xu, J. P., Zhu, S. S., & Fang, Y. (2002). A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(6), 698-704.
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Wang, J. B. (2016). Multi-period cardinality constrained portfolio selection models with interval coefficients. *Annals of Operations Research*, 244(2), 545-569.
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhang, P. (2013). A multi-period *portfolio* selection optimization model by using interval analysis. *Economic Modelling*, 33, 113-119.
- Longerstaey, J., & Spencer, M. (1996). Risk Metrics TM—Technical Document. *Morgan Guaranty Trust Company of New York: New York*.
- Mansini, R., & Speranza, M. G. (1999). Heuristic algorithms for the *portfolio* selection problem with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, 114(2), 219-233.
- Mansini, R., Ogryczak, W., & Grazia Speranza, M. (2003). LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison. *IMA Journal of Management Mathematics*, 14(3), 187-220.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. J. Wiley.
- Markowitz, H. M. (1968). *Portfolio selection: efficient diversification of investments* (Vol. 16). Yale university press.

- Martínez N. R. T. (2005). Asset pricing and systematic liquidity risk: An empirical investigation of the Spain stock market. *International Review of Economics and Finance* 14 (2005) 81-103.
- Milesi-Ferretti, G. M., & Tille, C. (2011). The great retrenchment: international capital flows during the global financial crisis. *Economic Policy*, 26(66), 289-346.
- Mitra, G., Kyriakis, T., Lucas, C., & Pirkhad, M. (2003). A review of portfolio planning: Models and systems. *Advances in Portfolio Construction and Implementation (A volume in Quantitative Finance)*, 1-39. doi.org/10.1016/B978-075065448-7.50002-1
- Mobarek, A., Mollah, S., & Keasey, K. (2014). A cross-country analysis of herd behavior in Europe. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 32, 107-127.
- Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*, New Jersey: Prentice Hall.
- Oliveira, C., & Antunes, C. H. (2007). Multiple objective linear programming models with interval coefficients—an illustrated overview. *European journal of operational Research*, 181(3), 1434-1463.
- Oliveira, C., Antunes, C. H., & Barrico, C. (2014). An enumerative algorithm for computing all possibly optimal solutions to an interval LP. *TOP*, 22(2), 530.
- Ortobelli, S., Rachev, S. T., Stoyanov, S., Fabozzi, F. J., & Biglova, A. (2005). The proper use of risk measures in portfolio theory. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(08), 1107-1133.
- Papahristodoulou, C., & Dotzauer, E. (2004). Optimal portfolios using linear programming models. *Journal of the Operational research Society*, 55(11), 1169-1177.
- Pastor, L. and Stambaugh, R.F., 2003. Liquidity risk and expected stock returns. *Journal of Political Economy*, 111, 642-685.
- Perobelli, F. F. C., Famá, R., & Sacramento, L. C. (2016). *Relações entre Liquidez e Retorno nas Dimensões Contábil e de Mercado no Brasil*.
- Rigobon, R. (2002). Contagion: how to measure it?. In *Preventing currency crises in emerging markets* (pp. 269-334). University of Chicago Press.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Portfolio Safeguard*, 2(3), 21-41.

- Roll, R. (1992). Industrial structure and the comparative behavior of international stock market indices. *The Journal of Finance*, 47(1), 3-41.
- Rouwenhorst, K. G. (1999). European equity markets and the EMU. *Financial Analysts Journal*, 55(3), 57-64.
- Roy, B. (1985). *Méthodologie multicritère d' aide à la décision*. Economica.
- Roy, B. (1990). Decision-aid and decision-making. *European Journal of Operational Research*, 45(2-3), 324-331.
- Rudolf, M., Wolter, H. J., & Zimmermann, H. (1999). A linear model for tracking error minimization. *Journal of Banking & Finance*, 23(1), 85-103.
- Samarakoon, L. P. (2017). Contagion of the eurozone debt crisis. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*.
- Shalen, C.T. (1993). Volume, Volatility, and the Dispersion of Beliefs. *The Review of Financial Studies*, 6, 405-434.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *The Journal of business*, 39(1), 119-138.
- Sousa, Gonçalo V. E. (1998). Metodologia da investigação, redacção e apresentação de trabalhos científicos. 1ª ed. Porto: Civilização Editora.
- Speranza, M. G. (1993). *Linear programming models for portfolio optimization*.
- Steuer, R. E. (1981). Algorithms for linear programming problems with interval objective function coefficients. *Mathematics of Operations Research*, 6(3), 333-348.
- Steuer, R. E. (1986). *Multiple criteria optimization: theory, computation, and applications*. Wiley.
- Stoll, H. R. (1978). The supply of dealer services in securities markets. *Journal of Finance*, 33, 1133-1151.
- Urli, B., & Nadeau, R. (1992). An interactive method to multiobjective linear programming problems with interval coefficients. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 30(2), 127-137.
- Wang, M. L., & Wang, H. F., Decision Analysis of the Interval – Valued Multiobjective Linear Programming Problems. In. M. Köksalan, S. Zionts (eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Multiple Criteria Decision Making in the New Millennium*, Vol. 507, 210–218, Springer – Verlag, 2001a.

Wang, M. L., & Wang, H. F. (2001). Interval Analysis of a Fuzzy Multiobjective Linear Program. *International Journal of Fuzzy Systems*, 3(4), 558-568.

Young, M. R. (1998). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management science*, 44(5), 673-683.

Zhang, P. (2016). An interval mean–average absolute deviation model for multiperiod portfolio selection with risk control and cardinality constraints. *Soft Computing*, 20(3), 1203-1212.

Zimmermann, H. J. (2012). *Fuzzy sets, decision making, and expert systems* (Vol. 10). Springer Science & Business Media.

APÊNDICES

APÊNDICE 1. CORRELAÇÃO DAS AÇÕES POR SETOR DE ATIVIDADE (EURONEXT – *BIG STOCKS*)

Modelo de portfolio multiobjetivo com coeficientes intervalares: Euronext e FTSE 100

MATERIAIS BÁSICOS	AIR LIQUIDE	ARCELORMITTAL	ROYAL DUTCH SHELLA	SOLVAY	TOTAL	R. LOG. SETOR
AIR LIQUIDE	1					
ARCELORMITTAL	-0,03	1				
ROYAL DUTCH SHELLA	0,58	-0,02	1			
SOLVAY	0,59	0,06	0,43	1		
TOTAL	0,71	-0,02	0,81	0,50	1	
R. LOG. SETOR	0,74	0,48	0,72	0,70	0,78	1

BENS DE CONSUMO	AB INBEV	DANONE	HEINEKEN	L'OREAL	LVMH	MICHELIN	PERNOD RICARD	PEUGEOT	RENAULT	UNILEVER DR	R. LOG. SETOR
AB INBEV	1										
DANONE	0,40	1									
HEINEKEN	0,49	0,51	1								
L'OREAL	0,39	0,62	0,50	1							
LVMH	0,42	0,56	0,47	0,65	1						
MICHELIN	0,30	0,44	0,38	0,49	0,60	1					
PERNOD RICARD	0,48	0,55	0,55	0,53	0,57	0,45	1				
PEUGEOT	0,26	0,32	0,31	0,39	0,52	0,61	0,36	1			
RENAULT	0,34	0,42	0,39	0,49	0,62	0,71	0,45	0,72	1		
UNILEVER DR	0,41	0,66	0,54	0,61	0,55	0,40	0,54	0,32	0,41	1	
R. LOG. SETOR	0,60	0,71	0,66	0,74	0,81	0,78	0,72	0,73	0,82	0,69	1

Modelo de portfolio multiobjetivo com coeficientes intervalares: Euronext e FTSE 100

FINANCEIRO	AEGON	AGEAS	AXA	BNP PARIBAS ACT.A	CREDIT AGRICOLE	ING GROUP	KLEPIERRE	SOCIETE GENERALE	UNIBAIL-RODAMCO	R. LOG. SETOR
AEGON	1									
AGEAS	0,20	1								
AXA	0,75	0,15	1							
BNP PARIBAS ACT.A	0,68	0,10	0,77	1						
CREDIT AGRICOLE	0,67	0,13	0,75	0,81	1					
ING GROUP	0,76	0,13	0,77	0,72	0,72	1				
KLEPIERRE	0,51	0,11	0,56	0,50	0,51	0,53	1			
SOCIETE GENERALE	0,67	0,11	0,74	0,81	0,82	0,70	0,52	1		
UNIBAIL-RODAMCO	0,53	0,12	0,59	0,53	0,52	0,54	0,70	0,53	1	
R. LOG. SETOR	0,84	0,37	0,88	0,85	0,86	0,85	0,67	0,85	0,69	1

CUIDADOS DE SAÚDE	ESSILOR INTL.	SANOFI	R. LOG. SETOR
ESSILOR INTL.	1		
SANOFI	0,50	1	
R. LOG.SETOR	0,84	0,89	1

UTILITIES	EDP	ENGIE	SCHNEIDER ELECTRIC	VEOLIA ENVIRON.	R. LOG. SETOR
EDP	1				
ENGIE	0,53	1			
SCHNEIDER ELECTRIC	0,47	0,58	1		
VEOLIA ENVIRON.	0,43	0,52	0,52	1	
R. LOG. SETOR	0,73	0,82	0,82	0,80	1

SERVIÇOS	AHOLD KON	AIRBUS GROUP	CARREFOUR	DELHAIZE GROUP	PUBLICIS GROUPE SA	R. LOG. SETOR
AHOLD KON	1					
AIRBUS GROUP	0,33	1				
CARREFOUR	0,43	0,44	1			
DELHAIZE GROUP	0,50	0,32	0,45	1		
PUBLICIS GROUPE SA	0,31	0,49	0,47	0,36	1	
R. LOG. SETOR	0,65	0,74	0,76	0,69	0,72	1

BENS INDUSTRIAIS	RANDSTAD	SAFRAN	SAINT GOBAIN	VINCI	R. LOG. SETOR
RANDSTAD	1				
SAFRAN	0,48	1			
SAINT GOBAIN	0,63	0,53	1		
VINCI	0,63	0,53	0,78	1	
R. LOG. SETOR	0,83	0,75	0,89	0,87	1

TECNOLOGIA	ASML HOLDING	CAP GEMINI	ORANGE	PHILIPS KON	VIVENDI	R. LOG. SETOR
ASML HOLDING	1					
CAP GEMINI	0,51	1				
ORANGE	0,35	0,44	1			
PHILIPS KON	0,50	0,56	0,44	1		
VIVENDI	0,40	0,52	0,58	0,53	1	
R. LOG. SETOR	0,74	0,81	0,71	0,80	0,77	1

**APÊNDICE 2. CORRELAÇÃO DAS AÇÕES POR SETOR DE ATIVIDADE
(FTSE 100 – *BIG STOCKS*)**

MATERIAIS BÁSICOS	BG GROUP	BHP BILLITON	BP	RIO TINTO	ROYAL DUTCH SHELL A	ROYAL DUTCH SHELL B	R. LOG. SETOR
BG GROUP	1						
BHP BILLITON	0,53	1					
BP	0,34	0,26	1				
RIO TINTO	0,38	0,45	0,46	1			
ROYAL DUTCH SHELL A	0,40	0,33	0,70	0,45	1		
ROYAL DUTCH SHELL B	0,54	0,47	0,38	0,34	0,46	1	
R. LOG. SETOR	0,73	0,75	0,67	0,76	0,71	0,70	1

BENS DE CONSUMO	BRITISH AMERICAN TOBACCO	DIAGEO	IMPERIAL TOBACCO GROUP	RECKITT BENCKISER GROUP	SABMILLER	UNILEVER	R. LOG. SETOR
BRITISH AMERICAN TOBACCO	1						
DIAGEO	0,50	1					
IMPERIAL TOBACCO GROUP	0,66	0,43	1				
RECKITT BENCKISER GROUP	0,02	0,026	0,01	1			
SABMILLER	0,43	0,60	0,32	0,00	1		
UNILEVER	0,23	0,30	0,23	0,03	0,23	1	
R. LOG.SETOR	0,76	0,76	0,71	0,28	0,72	0,53	1

Modelo de portfolio multiobjetivo com coeficientes intervalares: Euronext e FTSE 100

FINANCEIRO	AVIVA	BARCLAYS	BRITISH LAND COMPANY	HSBC HOLDINGS	LAND SECURITIES GROUP	LEGAL & GENERAL GROUP	LLOYDS BANKING GROUP	LONDON STOCK EXCHANGE GROUP	PRUDENTIAL	ROYAL BANK OF SCOTLAND GROUP	STANDARD CHARTERED	R. LOG. SETOR
AVIVA	1											
BARCLAYS	0,61	1										
BRITISH LAND COMPANY	0,50	0,52	1									
HSBC HOLDINGS	0,60	0,61	0,55	1								
LAND SECURITIES GROUP	0,38	0,35	0,56	0,40	1							
LEGAL & GENERAL GROUP	0,70	0,61	0,54	0,55	0,41	1						
LLOYDS BANKING GROUP	0,37	0,43	0,27	0,38	0,44	0,36	1					
LONDON STOCK EXCHANGE GROUP	0,33	0,29	0,32	0,33	0,49	0,34	0,41	1				
PRUDENTIAL	0,55	0,41	0,38	0,42	0,55	0,51	0,52	0,53	1			
ROYAL BANK OF SCOTLAND GROUP	0,22	0,28	0,19	0,23	0,20	0,22	0,31	0,15	0,21	1		
STANDARD CHARTERED	0,31	0,24	0,27	0,36	0,44	0,29	0,41	0,43	0,48	0,15	1	
R. LOG. SETOR	0,72	0,72	0,63	0,69	0,65	0,71	0,69	0,58	0,72	0,58	0,58	1

CUIDADOS DE SAÚDE	ASTRAZENECA	GLAXOSMITHKLINE	SHIRE	R. LOG. SETOR
ASTRAZENECA	1			
GLAXOSMITHKLINE	0,61	1		
SHIRE	0,43	0,45	1	
R. LOG. SETOR	0,82	0,81	0,82	1

BENS INDUSTRIAIS	ROLLS ROYCE HOLDINGS	TAYLOR WIMPEY	R. LOG. SETOR
ROLLS ROYCE HOLDINGS	1		
TAYLOR WIMPEY	0,04	1	
R. LOG. SETOR	0,96	0,33	1

TECNOLOGIA	BT GROUP	VODAFONE	R. LOG. SETOR
BT GROUP	1		
VODAFONE	0,23	1	
R. LOG. SETOR	0,77	0,80	1

SERVIÇOS	COMPASS GROUP	EXPERIAN	INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	ITV	KINGFISHER	NEXT	RELX	SAINSBURY (J)	SKY	TESCO	WPP	R. LOG. SETOR
COMPASS GROUP	1											
EXPERIAN	0,34	1										
INTERNACIONAL CONSOLIDATED AIRLINES GROUP	-0,03	0,01	1									
ITV	0,13	0,33	-0,03	1								
KINGFISHER	0,29	0,45	-0,02	0,40	1							
NEXT	0,31	0,44	-0,03	0,43	0,63	1						
RELX	0,28	0,46	-0,04	0,38	0,42	0,40	1					
SAINSBURY (J)	0,23	0,40	0,01	0,27	0,41	0,38	0,40	1				
SKY	0,28	0,27	-0,04	0,21	0,28	0,29	0,28	0,23	1			
TESCO	0,25	0,22	-0,03	0,12	0,26	0,25	0,22	0,30	0,23	1		
WPP	0,27	0,27	-0,01	0,20	0,32	0,28	0,29	0,23	0,28	0,19	1	
R. LOG. SETOR	0,50	0,67	0,20	0,60	0,72	0,71	0,64	0,61	0,51	0,46	0,52	1

<i>UTILITIES</i>	CENTRICA	NATIONAL GRID	SEVERN TRENT	R. LOG. SETOR
CENTRICA	1			
NATIONAL GRID	0,55	1		
SEVERN TRENT	0,26	0,37	1	
R. LOG. SETOR	0,80	0,82	0,70	1

APÊNDICE 3. RETORNO MÉDIO MENSAL – *BIG STOCKS*

(consultar CD anexo)

APÊNDICE 4. LIQUIDEZ MÉDIA MENSAL – *BIG STOCKS*

(consultar CD anexo)