IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Joana Inês Carvalho Cardoso

120144303

Ensinar frações no 5.º ano de escolaridade: Um estudo sobre as práticas de uma professora

Relatório da Componente de Investigação do Relatório de Estágio do Curso Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Ana Maria Roque Boavida

Janeiro de 2016

Versão definitiva

Dedicatória

Aos que me ajudam a acreditar que serei, ainda, tudo o que quiser.

Agradecimentos

Aos meus pais, alicerces da minha formação e educação, por me apoiarem incondicionalmente, por acreditarem em mim como eu, muitas vezes, não acredito, por viverem as minhas vitórias como se fossem deles. E em especial à minha mãe, pela amizade sem igual.

Ao meu irmão, o melhor do mundo, pela sua amizade e amor inquestionáveis, por estar sempre presente e por acreditar em mim, acima de tudo. Foi com ele que descobri o gosto pelo ensino.

Ao Kafu, por ser o melhor amigo e a melhor companhia que podia desejar mesmo quando deixámos de partilhar brincadeiras habituais.

Às minhas amigas, por todos os momentos que passamos juntas e por me dizerem, muitas vezes, 'tu consegues, está quase'. Em especial à Sofia, amiga de sempre e para sempre, pela amizade incondicional ao longo de anos. E à Rita, companheira e amiga de todos os dias, desde o primeiro momento desta caminhada.

À professora Ana Maria Boavida, minha orientadora, por todos os incentivos, por todo o apoio, pela incansável disponibilidade e pela extrema atenção com que sempre acompanhou o meu trabalho, por me ensinar e por procurar sempre a melhor forma de o fazer. Muito, muito obrigada por todos os momentos de aprendizagem que me proporcionou ao longo de seis anos.

À professora cooperante, por me ter aberto a porta da sua sala, por toda a compreensão, pela amabilidade com que sempre conversou comigo sobre o meu trabalho, por me ter proporcionado momentos de aprendizagem a vários níveis.

Aos alunos do 5.º ano de uma escola no concelho do Seixal, que contribuíram para que este estudo fosse possível e por me deixarem errar para aprender.

A todas as pessoas que contribuíram para que este estudo fosse possível, muito obrigada!

“Diz-.me e eu esquecerei

Ensina-me e eu lembrar-me-ei

Envolve-me e eu aprenderei.”

Provérbio chinês

Resumo

Este estudo tem como objetivo compreender de que modo posso preparar e concretizar um ensino favorável à aprendizagem dos números racionais não negativos representados sob a forma de fração. Assim, decidi estudar a minha prática enquanto professora de uma turma do 5º ano de escolaridade de uma escola do concelho do Seixal. Neste âmbito, coloquei as seguintes questões: a) a que aspetos dei especial atenção na preparação da aula? Quais se destacaram pela sua relevância? b) Como conduzi as aulas orientadas para a aprendizagem das frações? c) Que desafios experienciei?

O enquadramento teórico foca, nomeadamente a complexidade do conceito de fração, discute a construção deste conceito numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número e refere aspetos a ter em conta na preparação e lecionação de aulas orientadas para a aprendizagem das frações.

Em termos metodológicos, o estudo insere-se numa abordagem qualitativa de investigação e constitui uma investigação sobre a prática. Neste âmbito, concebi e concretizei uma intervenção pedagógica que decorreu, no âmbito do estágio no 2º ciclo, durante quatro semanas. Os dados foram recolhidos através de observação participante e recolha documental. Além disso, foram objeto de uma análise de conteúdo orientada por categorias temáticas.

Os resultados deste estudo evidenciam que, na preparação das aulas, é importante selecionar e seriar tarefas que permitam trabalhar, com os alunos, os diferentes significados de fração. É, também, relevante antecipar possíveis estratégias de resolução dessas tarefas e inventariar questões a colocar, ou outras intervenções a fazer, nos momentos de discussão coletiva. No que diz respeito à condução das aulas, destaca-se o ser capaz de colocar boas questões no momento certo visando que os alunos aprofundem o seu conhecimento; monitorizar a sua atividade enquanto trabalham autonomamente de modo a conhecer e apoiar esta atividade mas sem constranger as potencialidades matemáticas das tarefas; e abrir o espaço discursivo da aula à voz dos alunos durante as discussões coletivas para que estes tenham a oportunidade de explicar e justificar os seus raciocínios. Entre os desafios que experienciei sobressaem identificar se uma tarefa é, ou não, poderosa considerando os objetivos de aprendizagem visados; antecipar estratégias de resolução que, potencialmente, os alunos poderão usar; gerir o currículo devido, em particular, à necessidade de ter em conta dois programas de Matemática diferentes; dominar, nalgumas ocasiões, o discurso da aula por intervir em demasia reduzindo as potencialidades de determinada tarefa; e conseguir orquestrar, da melhor forma, as discussões coletivas.

Palavras-chave: Números racionais não negativos; frações; práticas do professor

Abstract

This study aims to understand how can I prepare and perform a supportive teaching of non-negative rational numbers represented in the form of fraction. Therefore, I decided to study my practice as a 5th grade school teacher. Considering this, I place the following questions: a) To what aspects have I given special attention in preparing the lessons? b) How do I conduct the classes oriented to fractions learning? c) What challenges have I experienced?

The theoretical framework focuses on the complexity of the fraction concept, it discusses this concept's construction in a perspective of number sense development and refers important aspects to take into account during the preparation and teaching of lessons focused on fractions.

Methodologically, the study is framed on a qualitative research approach and it constitutes an investigation about the practice. Therefore, I conceived and performed a pedagogic intervention that took place, within the 2nd cycle internship, for four weeks. The data were collected through participative observation and documental collect. Besides, they were object of a content analysis guided by thematic categories.

The results of this study show that, in the phase of lessons preparation, it is important to select and to sequence tasks that allow to work, with the students, the different meanings of fraction. It is also relevant to anticipate different ways to solve those tasks and to plan questions to ask, or other interventions to make, during collective discussions. Concerning teaching, it is very important to be able to place the right questions in the right moment so that the students are able to deep their knowledge; to monitor their activities as they work autonomously in order to understand and to support this activity but without restraining the mathematical potentialities of the tasks; and to open the discourse of the class to the students voice during the collective discussions so they have the opportunity to explain and justify their arguments. Among the challenges I have experienced, it stands out to identify whether a task is, or not, mathematically powerful considering the intended learning objectives; to anticipate resolution strategies that, potentially, the students may use; to manage the curriculum because, in particular, I need to take account different mathematics' programs; to dominate, in some occasions, the discourse of the lessons for intervening too much, reducing the potentialities of a given task; and to orchestrate, in the best way, the collective discussions.

Keywords: Non-negative rational numbers; fractions; teacher practices.

Índice

Índice de tabelas

Índice de figuras

Capítulo I

Introdução

O estudo que apresento foi desenvolvido no âmbito do curso de Mestrado em 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, mais concretamente na unidade curricular de Estágio no 2.º ciclo. Optei por centrá-lo na área curricular da Matemática e, particularmente, no tema Números e Operações.

Durante o período em que lecionei numa turma do 5.º ano de escolaridade, decidi aprofundar o meu conhecimento sobre práticas de ensino que podem favorecer a aprendizagem do conteúdo números racionais representados sob a forma de fração. O significado que atribuo a práticas de ensino vai no sentido do que Delgado (2013) atribui a práticas letivas, isto é, “as atividades desenvolvidas pelo professor diretamente relacionadas com o trabalho a realizar na sala de aula” (p. 49), pelo que incluo nestas práticas o trabalho orientado para a preparação de aulas e, também, para a sua lecionação.

São conhecidas as dificuldades que os alunos enfrentam na compreensão do conceito de fração[1], o que coloca significativos desafios aos professores. Assim, pretendi equacionar como poderia abordar este tópico junto dos alunos, pelo que decidi estudar a minha própria prática.

A importância de o professor investigar a sua prática é destacada por diversos autores, entre os quais Ponte (2004). Para este autor, um professor, durante a sua prática, defronta-se inúmeras vezes com diversos problemas de diferentes níveis de complexidade e, como tal, torna-se pertinente estudá-los delineando e concretizando, nomeadamente modos de agir para lhes fazer face. Neste âmbito, o mesmo autor, coloca uma questão que considero pertinente: Por que não olhar para o nosso trabalho na perspetiva de encontrar respostas para problemas com que nos deparamos no dia-a-dia da sala de aula?

De modo a enquadrar a investigação realizada, organizei este capítulo em três secções. Uma primeira onde foco a pertinência do estudo do ponto de vista contextual, pessoal e teórico; realço, ainda, a importância de o professor estudar a sua própria prática. Na segunda secção, enunciarei o problema de investigação e as questões a ele associadas.

[1] Por questões de simplificação de escrita, neste trabalho uso o termo fração para designar um número racional não negativo representado sob a forma de fração.

Finalmente, na terceira e última secção deste capítulo, farei referência à organização geral de todo o trabalho.

1. Pertinência do estudo

O último período de estágio decorreu numa escola do 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, localizada no concelho do Seixal, onde lecionei numa turma do 5.º ano de escolaridade.

O primeiro contacto com o ensino da Matemática, nessa turma, incidiu sobre a observação de duas aulas, durante a semana de reconhecimento do contexto, onde os alunos exploraram a tarefa "A visita de estudo e a distribuição de baguetes"[2].

Compreendi, analisando a atividade dos alunos desencadeada por esta tarefa e através de conversas informais com a professora cooperante, que ensinar frações é algo que, para o professor, requer uma boa preparação matemática e didática; compreendi, também, que aprender frações é um empreendimento complexo, nomeadamente pela multiplicidade de significados do conceito de fração.

Assim, considerei importante, a nível da investigação, centrar-me em questões associadas ao ensino e aprendizagem das frações, tanto mais que o tema se inscreve, também, em motivações pessoais e é pertinente do ponto de vista teórico.

1.1. Motivações pessoais

Como referi, durante a semana de reconhecimento do contexto, observei a exploração da tarefa "A visita de estudo e a distribuição das baguetes" pelos alunos. Pude constatar a existência de variadas dificuldades que, segundo alguns autores, são bastante recorrentes (por exemplo, Monteiro & Pinto, 2005). Essas dificuldades prenderam-se com o facto de os alunos não terem consciência da unidade com que estavam a trabalhar (representada por uma baguete) e de não conseguirem partilhar equitativamente um todo. Foi neste momento que decidi o caminho pelo qual pretendia enveredar.

Por um lado, em termos pessoais, uma das principais motivações que justificam a existência deste estudo foram as minhas inseguranças relacionadas com as intervenções a fazer nas aulas enquanto professora: o que dizer, o que fazer, com o que os alunos dizem e fazem, por que caminhos enveredar. Aliada a estas inseguranças está a minha experiência enquanto aluna do ensino básico. Ao longo do meu percurso no 2.º ciclo, o

[2] Tarefa que consiste na partilha equitativa de um todo em diversas partes, cada uma das quais passível de ser representada por um número fracionário e na comparação de números fracionários.

tema frações nunca foi muito inteligível para mim e experienciei dificuldades diversas que se foram esbatendo com o tempo. Preocupo-me, enquanto professora, com o que poderei fazer para ajudar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades, isto é, que tarefas poderei propor, como as articular, que materiais e recursos utilizar e de que modo poderei conduzir uma aula para que as dificuldades dos alunos se traduzam em momentos esclarecedores que conduzam a aprendizagens, incluindo aqui o *feedback* a proporcionar-lhes.

1.2. Pertinência teórica

Ao longo dos primeiros anos de escolaridade, os alunos aprendem diferentes tipos de números bem como as suas propriedades. Ainda no 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB), trabalham com os números representados sob a forma de fração, o que origina diversos tipos de dificuldades. Uma delas prende-se com a atribuição de significado ao conceito de fração, nomeadamente por se confrontarem, desde muito cedo, com um ensino descontextualizado de símbolos e regras operatórias. Monteiro e Pinto (2005) chamam, precisamente, a atenção para este aspeto:

> A aprendizagem dos aspetos formais do estudo das frações e decimais provêm do ensino, nomeadamente dos algoritmos, das operações e das regras, onde, de um modo geral, a ênfase é bastante mais acentuada nos procedimentos do que nos conceitos e raramente estabelecem "pontes" entre uns e outros. (p. 2)

Outra dificuldade associada à compreensão do conceito de fração deve-se ao facto deste conceito poder assumir diferentes significados: relação parte-todo, medida, razão, quociente e operador (Monteiro & Pinto, 2005).

Para os professores, muitas vezes, é algo igualmente complexo de ensinar. No que lhes diz respeito, as várias formas de representação dos números racionais poderão ser encaradas como uma dificuldade ou um desafio; o professor terá de começar por ser ele próprio a estabelecer relações entre estas formas para ajudar os alunos a compreendê-las (Fosnot & Dolk, citado por Silva 2012).

Um outro aspeto que justifica a pertinência deste estudo são as recentes alterações dos Programas de Matemática do Ensino Básico (PMEB).

Ao comparar os PMEB publicados em 2007 e em 2013 é possível compreender que houve alterações relevantes no que diz respeito ao ensino e aprendizagem das frações. Por exemplo, no programa de 2013, no que se refere aos conteúdos previstos para o 3.º ou 4.º anos de escolaridade, pode ler-se:

> Fração como representação de medida de comprimento e de outras grandezas (...) frações equivalentes e noção de número racional (...) ordenação de números racionais representados por frações com o mesmo numerador ou com mesmo denominador, ou utilizando a reta numérica ou a medição de outras grandezas; frações próprias (...) adição e subtração de números racionais representados por frações com o mesmo denominador; decomposição de um número racional na soma de um número natural com um número racional representável por uma fração própria. (...) construção de frações equivalentes por multiplicação dos termos por um mesmo fator; simplificação de frações (...) multiplicação e divisão de números racionais por naturais e por racionais na forma de fração unitária. (2013, pp. 11-12)

No PMEB de 2007 muitos destes aspetos apenas são objetivo de ensino e aprendizagem no 2.º ciclo. Entre os objetivos específicos indicados para este ciclo estão, nomeadamente

> Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas; (...) adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números racionais não negativos representados em diferentes formas; compreender o efeito de multiplicar (dividir) um número racional não negativo por um número menor que 1; identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e escrever uma fração na sua forma irredutível" (p. 34)

No que se refere à aprendizagem da Matemática, o percurso escolar dos alunos da turma com que trabalhei foi orientado, durante o início do ensino básico, pelo PMEB de 2007. No ano letivo em que realizei o estágio no 2.º Ciclo, estava em vigor o programa de 2013. No que diz respeito ao professor, "um currículo bem articulado dá orientação acerca do momento em que é esperado que determinadas capacidades e conceitos estejam consolidados" (NCTM, 2007, p. 17). Assim, quando realizei o estudo tive que preparar as aulas associadas ao estudo das frações, tendo em conta dois programas que, relativamente a este conteúdo matemático, têm diferenças significativas, o que complexificou o meu trabalho.

No que diz respeito ao trabalho com as frações, é importante que o professor recorra à utilização de materiais concretos que poderão surgir, nomeadamente como de apoio à compreensão de diferentes representações dos números racionais. Além disso, é necessário que propicie situações em que os alunos possam utilizar métodos informais para resolver problemas. Com efeito, numa fase embrionária do estudo das frações, estes optam por encontrar alternativas para resolver as tarefas que lhes são propostas entre as quais estão representações visuais:

> O treino permite a alguns alunos respostas corretas a situações de cálculo rotineiro, o que pode criar a ilusão de que compreendem o que fazem. Por outro lado, há situações em que os alunos resolvem bem um problema com desenhos ou esquemas, mas que não conseguem resolvê-lo recorrendo a símbolos. (Monteiro e Pinto, 2005, p. 5)

Em suma, é importante que o professor oriente o seu ensino de modo apoiar os alunos e, ao mesmo tempo, conhecer e distinguir o que já sabem daquilo que precisam saber

(NTCM, 2007). Perante as dificuldades dos alunos, é essencial que equacione o que poderá fazer de forma a ajudá-los a ultrapassá-las, o que torna relevante a realização de investigações sobre a sua prática.

1.3. A importância de o professor investigar a própria prática

O professor, por si só, não determina a atividade matemática que ocorre na sala de aula; os alunos também influenciam esta atividade através das suas intervenções e contributos acerca do que está a ser estudado. Simultaneamente, nem que prepare as aulas com o maior nível de exigência e detalhe, não poderá prever todos os problemas que poderão surgir (Ponte, 2002). Muitas das vezes, estes problemas são resolvidos através do bom senso do professor que, desprovido de uma receita de sucesso, atua de acordo com o que considera ser a melhor opção no momento (idem). Só que uma ação guiada meramente pelo bom senso nem sempre conduz a soluções satisfatórias nem a nível pessoal (para o professor), nem a nível educacional (melhoria das aprendizagens dos alunos). Como refere Ponte (2002), "o ensino é algo mais do que uma atividade rotineira onde se aplicam simplesmente metodologias pré-determinadas" (p. 5).

Perante esta situação, é necessário que um professor consiga ter sobre a sua prática um olhar crítico avaliativo que poderá contribuir para que, se necessário, repense e reformule as suas aulas tendo em conta "os modos de pensar e as dificuldades próprias dos alunos" (Ponte, 2002, p. 6).

Neste âmbito, alguns autores, sublinham a importância do professor se envolver na investigação da sua própria prática: "constitui um elemento decisivo da identidade profissional dos professores" (Ponte, 2002, p. 6); "todo o bom professor tem de ser também um investigador, desenvolvendo uma investigação em íntima relação com a sua função de professor" (Ponte, 2002, p. 7, baseando-se em Alarcão).

De um modo geral, um professor ao investigar a sua prática está a tentar resolver ou atenuar, de alguma forma, alguns problemas existentes nas suas aulas, ao mesmo tempo que aumenta os seus conhecimentos sobre a melhor forma de fazer lhes face (Ponte, 2002). Enveredar por este caminho requer que tenha uma atitude de questionamento e de reflexão sobre a sua prática quer tome como ponto de partida problemas relacionados com a aprendizagem dos alunos, quer questões associadas ao modo como prepara e leciona as aulas.

Pelas razões apresentadas decidi investigar a minha prática. Perante um estado de dúvidas e de falta de experiência profissional, considerei realmente importante investigar de que forma poderia proporcionar ambientes favorecedores de aprendizagens uma vez que "não existe "uma forma certa" de ensinar" (NCTM, 2007, p. 12). Na verdade, entendo que a possibilidade de os professores estudarem a sua própria prática pode contribuir para favorecer a aprendizagem dos alunos e proporciona "oportunidades para refletir sobre a prática de ensino, e aperfeiçoá-la" (idem).

2. Problema e questões do estudo

Desenvolver um trabalho de investigação constitui "uma poderosa forma de construir conhecimento" (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006, p. 10). Passa, necessariamente, por identificar um problema pelo qual o investigador se interesse e por procurar respostas para questões decorrentes deste problema. Como referem Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) "investigar não significa necessariamente lidar com ploblemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta" (p. 12).

O estudo que desenvolvi tem como principal objetivo compreender de que modo posso preparar e concretizar um ensino favorável à aprendizagem dos números racionais não negativos representados sob a forma de fração.

No âmbito do objetivo mencionado, formulei as seguintes questões:

1) A que aspetos dei especial atenção na preparação das aulas? Quais se destacam pela sua relevância?
2) Como conduzi as aulas orientadas para a aprendizagem das frações?
3) Que desafios experienciei?

3. Organização geral do estudo

Este documento está organizado em cinco capítulos de que a Introdução é o primeiro.

O segundo capítulo centra-se no enquadramento teórico do estudo que realizei. Em particular, debruço-me sobre a construção do conceito de número racional numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, procuro evidenciar que o conceito de fração é complexo e multifacetado, analiso orientações curriculares relacionadas com a aprendizagem das frações e foco aspetos relativos à preparação e condução do ensino deste tema.

O terceiro capítulo incide na metodologia de investigação. Refiro as principais opções metodológicas e sua fundamentação e o modo como recolhi e analisei os dados empíricos. Refiro, também, a intervenção pedagógica que concebi e concretizei para efeitos do desenvolvimento do estudo que contempla a exploração, com os alunos, de onze tarefas organizadas numa trajetória de aprendizagem.

Posteriormente — quarto capítulo — centrar-me-ei na análise dos dados, ou seja, analisarei as minhas práticas recorrendo, nomeadamente a notas de campo, à transcrição de episódios de aulas e a produções dos alunos associadas a algumas das tarefas propostas. Este capítulo está organizado em três secções: na primeira analiso, globalmente, a atividade desenvolvida durante a intervenção pedagógica; na segunda e terceira secções, analiso detalhadamente as minhas práticas de preparação e lecionação das aulas associadas a duas destas tarefas bem como os desafios que experienciei.

Por fim, no quinto e último capitulo, apresento as principais conclusões deste estudo e uma reflexão final sobre o trabalho desenvolvido.

Capítulo II

Ensinar números racionais representados por frações

No presente capítulo será apresentado o enquadramento teórico do estudo. Está estruturado em três secções: na primeira seção, começarei por abordar, de um modo geral, a aprendizagem e o ensino da matemática, realçando aspetos no que diz respeito à preparação e condução das aulas; na segunda seção, abordarei o ensino das frações numa perspetiva de desenvolvimento de ensino de número realçando: o que é o sentido de número e como se desenvolve; a complexidade da fração; as conexões dos números racionais; e o papel das orientações curriculares no ensino das frações; por fim, na última secção, enumerarei dificuldades e desafios associados ao estudo das frações, quer para alunos, quer para professores.

1. Aprender e ensinar Matemática: Perspetivas gerais

Esta secção realçará, de um modo geral, aspetos que se devem ter em conta na preparação e na condução do ensino.

1.1. Preparar o ensino

É necessário compreender que, para um professor, o cerne de uma aula não é tanto o tempo despendido em sala de aula mas sim a sua preparação.

Um professor quando planifica uma aula depara-se com uma imensidão de decisões a tomar, entre as quais está selecionar o tipo de tarefas a serem exploradas.

Deste modo, durante as planificações das aulas há que ter em conta alguns aspetos que são importantes para que uma aula obtenha um bom resultado, nomeadamente na discussão coletiva a saber: o desafio que cada tarefa apresenta para os alunos; a antecipação das resoluções dos alunos bem como as suas possíveis dificuldades para que sejam formuladas questões pertinentes a colocar durante a aula; a seleção das resoluções e dos alunos que partilharão o seu raciocínio em grande grupo; e as conexões que poderão ser estabelecidas entre resoluções e ideias matemáticas. (Smith et. al. 2009).

Enquanto prepara uma aula, é importante que o professor considere como pensarão os alunos com a tarefa escolhida. Este processo proporciona, ao professor, um maior controlo sobre a aula pois, poderá antecipar dúvidas e dificuldades dos alunos e equacionar a melhor forma de relacionar as suas estratégias, corretas ou incorretas, com os conteúdos que quer que os alunos compreendam com a tarefa apresentada (Smith et al., 2009).

Em seguida, o professor deve decidir como abordar a tarefa com a turma e, antes de mais, deve decidir o contexto que irá utilizar. O papel do contexto nas tarefas matemáticas pode incidir sobre o quotidiano das crianças, as suas vivências pessoais, o seu dia-a-dia ou pode remeter o aluno apenas para o universo matemático pois, tal como Ponte (2012) afirma,

> Na aprendizagem da Matemática os alunos precisam de trabalhar em diversos contextos – realísticos, de semi realidade e matemáticos (…) a atividade do aluno terá por base não só as suas experiências em contextos da realidade como as suas experiências matemáticas anteriores. (…) Ir-se-á libertando da necessidade de contextos da realidade, trabalhando num nível cada vez mais formar, sendo capaz de recorrer a contextos informais sempre que necessário. (Ponte, 2012, p. 196)

Em suma, o contexto de cada tarefa servirá de apoio à tarefa para que, com a mesma, os alunos aprendam conceitos, desenvolvam representações e estratégias de resolução diversificadas.

Uma das decisões a tomar durante a fase da preparação de uma aula diz respeito à seleção de materiais/ recursos a utilizar. Estes materiais "podem ajudar os alunos a descobrir, a entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem" (Serrazina, 1991, p. 37). Ainda que o material, por si só, não determine se o aluno irá apreender, ou não, o que lhe é ensinado, é importante “proporcionar diversas oportunidades de contacto com materiais para despertar interesse e envolver o aluno em situações de aprendizagem” (Botas & Moreira, 2013, p. 254).

Segundo Serrazina (1991), o que importa é a forma como o professor aborda o recurso didático que selecionou e a preocupação de tornar a exploração do mesmo significativa e marcante para o aluno.

Por fim, numa planificação importa, ainda, prever que questões colocar durante a exploração e discussão de cada tarefa. Com efeito, nas aulas de Matemática, as questões ocupam um lugar de destaque e são usadas em situações variadas e com diferentes finalidades. Segundo Serrazina (1991), o professor pode requerer a participação dos alunos; detetar dificuldades que subsistem; ter *feedback* sobre as suas aulas; motivar os alunos levando-o a organizar o pensamento matemático, e ajudá-los a melhorar o seu discurso utilizando linguagem matemática correta.

Uma tarefa matemática pode variar quanto ao seu significado e na sua forma pois, cada tarefa tem um propósito, e pode diferir quanto ao tempo de exploração e quanto ao grau de complexidade (Silva, 2012). Além disso, as tarefas podem surgir de forma a introduzir novas ideias, favorecer que os alunos atinjam determinado objetivo delineado pelo professor ou até mesmo para avaliar os alunos (Delgado, 2013).

As tarefas podem variar tendo em conta o objetivo do professor. Segundo Delgado (2013) podem ser de resposta rápida, de resposta aberta, podem partir de situações do quotidiano das crianças, podem surgir nos manuais escolares ou ser entregues em folha.

Uma vez que "uma tarefa influencia o modo como os alunos pensam" (Delgado, 2013, p. 69), é importante pensar sobre o seu significado. Uma tarefa "constitui o objeto de atividade dos alunos, o que significa que a atividade de aprendizagem matemática que estes desenvolvem está relacionada com a tarefa proposta" (Delgado, 2013, p. 68, referindo Christiansen e Walther). Tendo em conta esta perspetiva, segundo Delgado (2013), citando Ponte et al. "uma tarefa matemática corresponde a um ponto de partida para a atividade matemática desenvolvida pelos alunos" (p. 68). Para Stein e Smith, referidos por Delgado (2013), uma tarefa é "a atividade matemática na sala de aula, cujo objetivo é focar a atenção dos alunos numa ideia matemática particular" (p. 68).

Em suma, uma tarefa poderá ser uma proposta de trabalho do professor para o aluno.

O professor, ao perspetivar o ensino, poderá encadear as tarefas matemáticas que irá apresentar à turma e, se assim for, poderá criar uma trajetória hipotética de aprendizagem. Uma trajetória de aprendizagem é "um caminho de aprendizagem orientado por um conjunto de tarefas concebidas pelo professor tendo em conta as ideias e os procedimentos que quer que o aluno desenvolva" (Mendes, 2012, p. 8, referindo Simon).

Delgado (2013) referindo Cobb et al. por considerar que "a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem leva o professor a fazer conjeturas sobre a aprendizagem da Matemática dos seus alunos e sobre os meios que poderá recorrer para apoiar e organizar essa aprendizagem" (p. 80). Também Mendes (2012) considera que uma trajetória hipotética de aprendizagem tem de ir sendo adaptada pois "esta adaptação corresponde a um processo constante, dada a natureza hipotética da trajetória e os aspetos imprevisíveis que surgem a propósito dos procedimentos usados pelos alunos e de outros fatores associados ao contexto de sala de aula" (Mendes, 2012, p. 208, baseando-se em Simon; Simon & Tzur).

Um professor, quando escolhe as tarefas a propor à turma, deverá tentar delinear: "um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e forma de representação relevantes" (Ponte, 2005, p. 27)

Tendo em conta os alunos e estes critérios, "a articulação das tarefas permite-lhes, aos alunos, estabelecer relações entre as situações associadas aos contextos" (Delgado, 2013).

1.2. Conduzir o ensino

Durante a condução do ensino, é importante que os professores tenham um conhecimento matemático profundo sobre os conteúdos a ensinar. Neste sentido, torna-se imprescindível que procurem "novas formas de aprofundar os seus próprios conhecimentos" (NCTM, 2007, p. 170) pois, o que está em causa não é só a compreensão de conteúdos matemáticos por parte dos professores; é também a compreensão do pensamento matemático dos alunos. Deste modo, o professor deverá sempre procurar novos instrumentos de trabalho, novas formas de ensinar, renovando a sua prática no sentido "de se desenvolver e melhorar a experiência de educação matemática dos alunos" (p. 171).

Uma vez que não há ensino sem comunicação, nomeadamente comunicação oral, ao serem exploradas tarefas, é importante que haja uma partilha de ideias e estratégias para que os alunos possam desenvolver o seu pensamento crítico e aprofundar a compreensão matemática. Assim, "numa aula de matemática (…), a comunicação deverá incluir a partilha de raciocínios, a colocação de questões, e a explicação e justificação de ideias" (NCTM, 2007, p. 226). Para que a comunicação matemática seja bem-sucedida, o professor deverá proporcionar um bom ambiente na sala de aula concedendo o apoio adequado aos alunos, levando-os a desenvolver: a capacidade de pensar; a capacidade de raciocinar; e a capacidade de resolver problemas complexos (NCTM, 2007).

As intervenções dos alunos dependem do espaço discursivo que o professor "reserva" em cada aula para esse fim tendo em conta os modelos de ensino e aprendizagem que privilegia.

As discussões coletivas de estratégias de resolução dos alunos são um meio amplamente reconhecido, de favorecer a aprendizagem da Matemática (Boavida, 2005; Canavarro, 2011; Smith et al, 2009). É neste espaço da aula que os alunos podem ter contacto com diferentes resoluções, diferentes raciocínios para a mesma tarefa e a troca de ideias promove a compreensão conceptual das crianças. Outros autores, como Smith et al. (2008), referem alguns aspetos importantes a ter em conta na preparação de discussões coletivas: devem ser bem preparadas; apresentam um modelo composto pelo que designa cinco práticas; algumas destas práticas dizem respeito à fase da preparação das aulas e outras à da sua condução.

Durante a aula, o professor deve circular pela sala com o intuito de observar e compreender os raciocínios dos alunos e as suas ideias, independentemente da modalidade de trabalho adotada (trabalho individual, em pares, em grupo). O professor deve, ainda, tomar nota das resoluções dos alunos para que, aquando da discussão, possa seriar a ordem pela qual serão apresentadas à turma as estratégias, sequenciando e formulando assim uma lógica de discussão, partindo de algo mais abstrato para algo concreto. Por fim, é necessário que promova o estabelecimento de conexões entre as resoluções dos seus alunos e as ideias matemáticas que pretende ensinar (Smith et al., 2009).

O professor deverá valorizar as intervenções e ideias dos alunos para que estas sirvam de fonte de aprendizagem e para os envolver na tarefa que estão a realizar. Em suma, cabe ao professor criar situações favoráveis à aprendizagem.

No decorrer de uma aula de matemática há ainda a necessidade de tomar decisões durante a discussão de ideias matemáticas. O professor tem de decidir, no momento, a que aspetos deve dar ênfase, quais os que pode deixar para mais tarde e quais devem ser aprofundados. Tornando imprescindível a crescente intervenção por parte dos alunos, "é necessário que os professores aperfeiçoem as suas técnicas de escutar, questionar e parafrasear, quer para dirigir o decurso da aprendizagem matemática, quer para apresentar modelos do que deve ser o diálogo entre alunos" (NCTM, 2007, p. 230).

O tipo de questões colocadas durante uma aula pode condicioná-la positiva ou negativamente uma vez que "questões bem colocadas podem (…) fomentar, aprofundar e estimular o raciocínio dos alunos e, ao mesmo tempo, proporcionar ao professor oportunidades para avaliar a compreensão dos alunos" (NCTM, 2007, p. 230). Portanto, os professores deverão incutir nos alunos o espírito crítico na discussão de tarefas no momento da apresentação dos colegas, ajudando-os na formulação de questões. Assim, estes poderão esclarecer outro colega, nomeadamente sobre determinado conceito, ideia ou estratégia verificando, ao mesmo tempo, os seus próprios conhecimentos (NCTM, 2007).

2. Ensinar frações numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número

Esta secção está organizada em quatro partes principais. Em primeiro lugar foco-me no significado de sentido de número e seu desenvolvimento. Em seguida procuro destacar que o conceito de fração é complexo e multifacetado. Posteriormente, refiro a importância de usar diferentes representações dos números racionais e de estabelecer conexões entre estas representações. Por último, centro-me nas orientações curriculares relacionadas com o ensino das os números racionais, em particular no que se refere às frações.

2.1. Sentido de número: significado e desenvolvimento

As crianças revelam, desde cedo, em momentos informais, uma familiarização com a contagem; por exemplo, contabilizam o número de gomas que comem e o número de degraus que sobem (NTCM, 2007). As "bases para o desenvolvimento matemático das crianças são estabelecidas desde cedo (…) a aprendizagem da matemática é construída a partir da sua curiosidade e é desenvolvida, de forma natural, a partir das suas experiências" (NCTM, 2007, p. 83). Se as noções intuitivas e primitivas do número não forem trabalhadas antes do ensino formal, nomeadamente na educação pré-escolar, o aluno poderá ter mais dificuldades.

Desta forma, nos primeiros anos de escolaridade, as atividades propostas deverão "desenvolver os conhecimentos matemáticos intuitivos e informais dos alunos" (NTCM, 2007, p. 86).

Com a entrada para o ensino formal, as crianças passam a representar a mesma quantidade de várias formas; por exemplo, compreendem que se tiverem um pacote com cinco gomas podem representar a quantidade de gomas que têm usando o algarismo 5.

Alguns documentos orientadores do ensino da Matemática, como é o caso de NCTM (2007), "referem a importância de uma abordagem dos números e das operações mais adequada às necessidades do dia-a-dia" (Delgado, 2013, p. 12). Assim, as crianças poderão trabalhar a partir das suas vivências (contar as peças de lego que têm na caixa dos brinquedos, por exemplo). Experiências de contagem bem-sucedidas e representação de quantidades através de símbolos matemáticos são aspetos que, entre vários outros, estão contemplados no que alguns autores designam por sentido de número.

McIntosh, Reys e Reys (1992), caracterizam o sentido de número como:

> O conhecimento geral que uma pessoa tem acerca de números e das suas operações a par com a capacidade e inclinação para usar esse conhecimento de forma flexível para construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações (p. 4)

Esta caracterização tem muitos pontos de contacto com a apresentada por Yang:

> O sentido de número refere-se a uma compreensão pessoal e geral dos números e das operações e à habilidade para lidar com situações do dia-a-dia que envolvam números. Esta traduz-se na habilidade de desenvolver estratégias úteis, flexíveis e eficientes para lidar com problemas numéricos (Yang, citada por Delgado, 2013, p. 19).

As ideias apresentadas por McIntosh, Reys e Reys (1992) permitem destacar que o sentido de número "é uma rede conceptual bem organizada que permite a uma pessoa relacionar os números e as propriedades das operações (Sowder, mencionado por Delgado, 2013, p. 17).

É, globalmente, consensual que o sentido de número tem uma dimensão pessoal na medida em que "é uma intuição acerca dos números que se forma a partir dos diversos significados do número" (NCTM, 2007, p. 51). Como referem McIntosh, Reys e Reys (1992), "O sentido de número é altamente personalizado e está relacionado com as ideias sobre o número que estão estabelecidas e com a forma como essas ideias foram estabelecidas" (p. 6)

Contudo, "não é algo que se aprende num determinado momento" (Boavida et al., 2009, p. 279); desenvolve-se gradualmente e "as tarefas que se propõem são fundamentais para esse desenvolvimento" (Delgado, 2013, p. 20).

Uma vez que o sentido de número é um dos propósitos centrais do ensino da Matemática, nos primeiros anos de escolaridade (ME, 2007; NCTM, 2007), é importante que todos os alunos o desenvolvam, tal como sublinham vários autores (Ponte et.al., 2007; Brocardo & Serrazina, 2008). Com efeito, "um sentido de número bem desenvolvido ajuda a flexibilizar as formas de resolver os problemas e dá sentido de controlo ou poder sobre os números." (Baroody, citado por Boavida et.al., 2009, p. 278).

Como referi, o desenvolvimento de sentido de número é algo gradual; esta aptidão "é uma competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino obrigatório e não obrigatório e mesmo ao longo da vida" (Abrantes et. al., citado por Boavida et.al., 2009, p. 280).

No que se refere ao desenvolvimento do sentido de número nos primeiros anos de escolaridade é importante dar atenção a alguns aspetos tais como a "noção de cardinalidade (…), conhecimento da sequência numérica (…), construção de números de referência" (Boavida et al., 2009, pp. 280 e 281).

As crianças com um bom sentido de número entendem o significado dos números; interpretam os números de diferentes formas; reconhecem a grandeza de cada número; desenvolvem um sistema de referência para considerar números (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 6), isto é, pensam e refletem sobre os números.

Em suma, os alunos têm que compreender os números e as suas relações para que as utilizem no seu quotidiano de uma forma natural e progressiva, uma vez que, "o desenvolvimento do sentido de número vai sendo progressivamente aprofundado através da construção de ideias e destrezas, da identificação e da utilização de relações na resolução de problemas, e da associação das novas às prévias aprendizagens" (NTCM, 2007, p. 88).

Para que as crianças possam pensar e refletir sobre os números, os professores terão de lhes proporcionar o contacto com diversas ferramentas (reta numérica, sistemas de numeração de diferentes bases, entre outras) (McIntosh, Reys & Reys, 1992). Assim, estão a desenvolver os seus conhecimentos sobre a posição dos números. Cabe ao professor "dar ênfase à noção de valor de posição, através da colocação adequada de questões e da seleção de problemas" (NCTM, 2007, p. 95).

Com o continuar da sua experiência com os números, o aluno começa a desenvolver a capacidade de encontrar outras formas de os representar que possam facilitar os seus cálculos, entre as quais está a decomposição dos números (McIntosh, Reys & Reys, 1992). Mais tarde, encontram e reconhecem alguns números que lhes permitem calcular de forma mais simples, os chamados "números de referência". Estes "proporcionam marcos mentais para pensar sobre os números" (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 7) e são "utilizados para avaliar a grandeza de uma resposta ou para arredondar um número de modo a que seja mais fácil processá-lo" (idem).

Com todos estes conhecimentos, os alunos acabam por compreender que "existem diferentes estratégias de resolução para um dado problema" (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 7). Quando uma estratégia não está correta ou não é adequada, é importante que sejam autónomos e que reformulem o seu pensamento, o que significa explorar cada tarefa de diferentes formas e analisá-la de um outro ponto de vista. Deste modo, os alunos desenvolvem também "a compreensão do modo como as operações afetam os números" (NCTM, 2007, p. 95).

Uma vez que o sentido de número "resulta numa perspetiva de que os números são úteis e de que a Matemática tem uma ordem (*makes sense*)" (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 7), há, segundo McIntosh, Reys & Reys (1992) "três áreas onde o sentido de número desempenha um papel chave" (p. 7): "conhecimento e destreza com números; conhecimento e destreza com operações; aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo" (p. 8).

No conhecimento e destreza com números, pode-se incluir "a compreensão dos números racionais e a compreensão das suas representações" (McIntosh, Reys 6 Reys, 1992, p. 6), na medida em que "o sentido de número inclui o reconhecimento de que os números tomam diversas formas e podem ser manipulados de diferentes maneiras tendo em vista um certo propósito" (p. 6), isto é, as crianças têm que conhecer os números nas suas "diferentes simbolizações, como ¾ = 6/8 ou ¾ = 0.75 ou ¾ = 75%" (p. 6).

É igualmente importante "o uso de âncoras" (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 8), ou seja, de números de referência:

> Por exemplo, quando se considera a fracção 5/8, pode-se pensar nessa fracção graficamente (como parte de um círculo ou na recta numérica), ou até mesmo numa fracção equivalente ou na forma decimal. Uma representação igualmente importante é ter a noção que 5/8 é "um pouco maior que

> 1/2" ou "entre 1/2 e 3/4". Aqui, 1/2 serve como âncora ou número de referência na comparação ou representação com outros números. (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 8)

Os números de referência são importantes porque "proporcionam marcos mentais essenciais para pensar sobre os números" (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 8).

2.2. Fração: Conceito complexo e multifacetado

Os alunos, ao terem o primeiro contacto com o conjunto dos números racionais, estranham a sua natureza pois, este é o primeiro conjunto numérico que aprendem sem se basear em noções intuitivas (Quaresma, 2010). Por exemplo, quando trabalham com números racionais não podem usar o processo de contagem a que estão habituados quando trabalham com os números naturais, uma vez que não há um número racional que anteceda ou proceda a um outro número racional (Quaresma, 2010). Esta é uma fonte de dificuldades dos alunos; trata-se de uma forma de pensar diferente da que estão habituados e é necessário criar uma noção de número diferente. O conceito de número racional é "um dos mais importantes e complexos que os alunos aprendem nos primeiros anos de escolaridade" (Quaresma & Ponte, 2012, p. 38) e, portanto, há que ter em conta alguns aspetos

> (i) este deve ter como base os conhecimentos anteriores dos alunos; (ii) devem enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, quociente, razão, medida e operador); (iii) os algoritmos das operações devem ser atrasados e antecedidos pela compreensão de ordem e equivalência; e (iv) o ensino deve ser feito com base em modelos educativos que reforcem as relações entre conceitos e procedimentos, bem como as conversões dentro e entre as diferentes representações (Quaresma, 2010, p. 24).

Todos os números racionais se podem representar sob a forma de fração, pelo que importa clarificar o significado deste conceito. Em termos matemáticos, uma fração é "uma razão de números naturais que consoante o que se pretende significar varia a sua forma: quociente, expressão de uma ou mais partes da unidade dividida em partes iguais, comparação entre duas grandezas, representação de um número decimal" (Sequeira et. al., 2009, p. 20).

Uma fração, é uma relação entre dois números; não representa dois números individuais. Assim, ao terem contacto com os números racionais representados sob a forma de fração, os alunos têm de passar a considerar dois números como um só. Por exemplo, ao considerarem o 2 e o 5 os alunos reconhecem o seu valor; se lhes apresentarmos 2/5 é-lhes estranho (Quaresma, 2010). Aqui importa que os alunos conheçam e distingam o que representa o numerador e o denominador e a relação estabelecida entre eles.

Alguns investigadores afirmam que um dos fatores subjacentes à complexidade do número racional representado sob a forma de fração deriva da necessidade de compreensão de cinco subconceitos: parte-todo, operador, quociente, medida e razão (Silva, 2012). Todas estas ideias estão relacionadas, conforme sublinham Kilpatrick, Swafford e Findell (referidos por Silva, 2012), quando identificam várias interpretações do número racional (tabela 1):

Tabela 1 - Interpretações do número racional representado sob a forma de fração (Silva, 2012, p. 58)

Interpretações de número racional representado na forma de fração			
$\frac{3}{4}$	Três de quadro partes iguais de uma unidade	Parte-todo	
	O quociente de 3 por 4 (3 : 4 = 0,75)	Quociente	3 : 4
	Três quartos de 12 (3 x 8 : 4 = 6 ou 1x8:4x3)	Operador	
	Três para quatro	Razão	
	Medida do caminho percorrido desde o início da unidade	Medida	

Na relação parte – todo "existe uma comparação entre a parte de um todo contínuo ou discreto" (Quaresma & Ponte, 2012, p. 40) e este todo, isto é, segundo Quaresma e Ponte (2012), existe uma relação entre um denominador que indica o número de partes em que um todo se divide e um numerador que corresponde ao número de partes consideradas – este é um conceito fundamental dos números racionais que condiciona a compreensão dos restantes significados; a razão "designa uma comparação entre duas quantidades da mesma natureza ou de natureza distinta" (p. 40); enquanto operador a fração transforma uma quantidade (discreta ou contínua) noutra quantidade; o significado de quociente refere-se a situações em que a fração representa o "resultado de uma divisão entre dois números naturais onde o numerador e o denominador representam o todo" (p. 40); e, por fim, o conceito de medida traduz-se na "comparação entre duas grandezas, em que uma delas é considerada a unidade" (p. 40).

Os alunos devem reconhecer e interpretar as várias representações e, ao mesmo tempo que o fazem, conseguem estabelecer relações entre elas de modo a construírem o conceito de fração (Silva, 2012). Ainda assim, os alunos confundem um pouco a lógica do número inteiro com a da fração. A tabela 2 ilustra diferenças significativas entre o número natural e a fração:

Tabela 2 - Diferenças entre os números naturais e as frações (baseado em Silva, 2012)

Valor numérico	Número natural	Fração
Representação simbólica	Um número (pressuposição de discrição)	Dois números (pressuposição de densidade)
Ordem	Apoiada na sequência dos números naturais	Não apoiada na sequência dos números naturais
	Existência de antecessor e sucessor	Não há um único sucessor ou antecessor
	Não há números entre dois números consecutivos	Há uma infinidade de números entre duas frações
Relação com a unidade	A unidade é o menor número	Não há um número menor único
Adição e subtração	Apoiadas na sequência dos números naturais	Não apoiadas na sequência dos números naturais
Multiplicação	A multiplicação torna o número maior	A multiplicação torna o número maior ou menor
Divisão	A divisão torna o número mais pequeno	A divisão torna o número maior ou menor

Em suma, "uma fração pode representar uma quantidade (comi 3/5 de um chocolate)", pode surgir como uma "comparação entre a parte e o todo, considerado este a unidade", pode ser (…) o resultado da divisão entre dois números inteiros (…) em situações de partilha equitativa, quando a fração a/b representa o quociente entre dois números" e, por último, uma fração pode ainda comparar "uma grandeza com outra tomada como unidade" (Monteiro & Pinto, 2007, pp. 4, 5 e 6).

2.3. Representação dos números racionais e suas conexões

De acordo com Quaresma e Ponte (2012), "representar um número significa atribuir-lhe uma designação" (p. 40). No caso dos números racionais, os alunos devem compreender que podem ser representados de diversas maneiras ente as quais estão a número decimal, percentagem e fração. É importante que desenvolvam e utilizem "uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjeturas" (NCTM, 2007, p. 240), uma vez que "estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros" (idem). Em suma, os alunos precisam de experienciar diferentes representações dos números racionais para construírem gradualmente sentido para estes números.

Relativamente aos números decimais, os alunos confundem as décimas e as centésimas ao considerarem, por exemplo, 3,5 e 3,05; tendo em conta o número e a quantidade é vulgar que os alunos considerem, tomando como exemplo, 2,378 e 2,5 que o número maior é 2,378 pela quantidade de algarismos após a vírgula; por fim, os alunos consideram que entre 1,1, e 1,2 não existem outros racionais (Quaresma & Ponte, 2012).

No que diz respeito às percentagens, pelo simples facto dos alunos estarem habitualmente ligados a elas seja no uso de *tablets*, telemóveis ou computadores, visualmente, é-lhes familiar o símbolo de percentagem. As crianças sabem que se a bateria do *tablet* está a 100%, está cheia e não é preciso carregá-lo. Ainda assim, muitas das vezes é usual que não compreendam o significado do conceito de percentagem e/ou do símbolo % (por cento) ou que não consigam representar corretamente percentagens (Quaresma & Ponte, 2012).

Quanto às frações, importa que os alunos compreendam que entre, por exemplo, 2/4 e 4/4 existem infinitos números racionais o que não acontece com os números naturais, pois, por exemplo, que entre 2 e 4 só existe o 3 (Quaresma & Ponte, 2012).

Se é importante que os alunos consigam representar um número racional de diversas formas, então é necessário que reconheçam as diferentes representações para que possam decidir qual utilizar em determinado contexto e que saibam como relacioná-las, sejam em forma de fração, decimal, simbólicas ou reta numérica. Assim sendo, por exemplo, deverão desenvolver a capacidade de interpretar diferentes representações de, por exemplo, metade (figura 1):

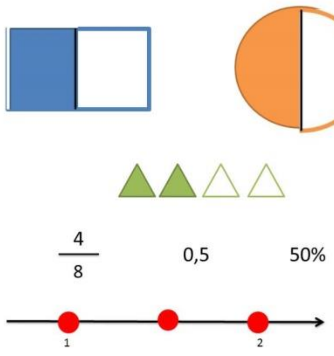


Figura 1 - Várias representações da metade

A noção de "um meio" é uma das de compreensão e representação mais simples. Trata-se de uma fração irredutível e considerada a base do entendimento do sentido de número racional (Monteiro & Pinto, 2007). Depois deste passo, conseguimos passar para metade da metade, ou seja, um quarto; para mais tarde passarmos a trabalhar com a metade, da metade, da metade – os oitavos. Podemos utilizar variadas representações desta "família das metades", a mais usual é o esquema em árvore onde os alunos relacionam todas as metades.

A par e passo com frações, podemos trabalhar os decimais e as percentagens, utilizando o mesmo esquema onde as ideias vão estar organizadas com a mesma ordem de ideias.

Para apoiar a atividade dos alunos associado à compreensão ao conceito de fração poder-se-ão utilizar diversos modelos no sentido que é atribuída a esta noção, nomeadamente por Fosnot e Dolk (2002) que os considera como "ferramentas para o pensamento" (p. 17). Entre estes modelos está, por exemplo, o que frequentemente é designado por modelo de área e que pode ser concretizado através de sectores circulares obtidos a partir da divisão equitativa de círculos iguais num diferente número de parte também iguais. Um outro modelo é a reta numérica que, para representar frações, pode surgir a partir de uma tarefa trabalhada com os alunos. A figura 2 ilustra um exemplo da utilização da reta numérica associada a uma tarefa que apelava à partilha equitativa de um certo número de baguetes (figura 2).

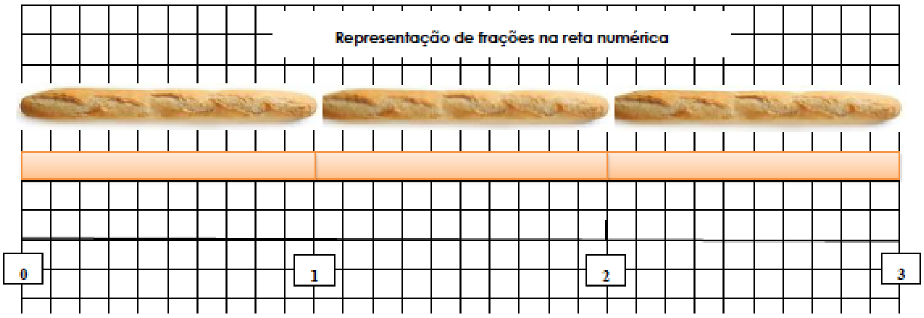


Figura 2- Reta numérica apoiada numa tarefa de referência para os alunos

Para que os alunos se familiarizem com as várias representações dos números racionais é necessário que o professor lhes possibilite esta experiência através do contacto com diferentes tarefas e que desenvolvam a capacidade "para interpretar representações, construir as suas próprias representações e que desenvolvam e comuniquem as suas ideias" (Quaresma e Ponte, 2012, p. 43).

De entre as várias representações dos números racionais, os alunos têm que compreender as suas conexões. Tomando como exemplo 1/2, os alunos têm que compreender que é "metade de", que em termos percentuais equivale a 50% e em numeral decimal será 0,5 décimas.

2.4. O que dizem as orientações curriculares

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) ao longo dos tempos tem sofrido alterações no que diz respeito ao tópico Números e Operações, nomeadamente no estudo das frações.

O PMEB datado de 2007 refere que as frações exigem um trabalho continuado pelo que preconiza que os números racionais comecem

> A ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fração nos casos mais simples. (ME, 2007, p. 15)

O PMEB (2007) salienta, desta forma, que o trabalho com as frações terá de ser algo gradual; os alunos terão de partir da exploração de tarefas simples, onde seja trabalhado a partilha equitativa, e ir trabalhando, progressivamente, todos os outros significados de fração (Ventura, 2013).

Para os anos seguintes, 3.º e 4.º, o mesmo programa defende que os alunos devem ser capazes de:

> Compreender frações com os significados quociente, parte todo e operador; reconstruir a unidade a partir das suas partes; resolver problemas envolvendo números na sua representação decimal; localizar e posicionar números racionais não negativos na reta numérica (p. 19)

No que diz respeito às variadas representações dos números racionais, quer o PMEB (2007), quer os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM) (2007), salientam que os alunos devem trabalhar os números racionais nas suas diversas representações e que é importante que o professor encoraje e apoie esta atividade (idem). Em particular, Ventura (2013) referindo-se ao PMEB publicado em 2007 sublinha que,

> No estudo dos números racionais (…) devem ser exploradas situações para ampliação do conhecimento de estratégias de cálculo mental e escrito, incluindo a realização de algoritmos. Devem ser também proporcionadas situações que permitam aos alunos relacionar a representação fracionária e a decimal. Neste ciclo, o trabalho com os números racionais, deve incluir também a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e de proporção. (p. 15)

Todo o trabalho intuitivo que decorre no primeiro ciclo é fulcral para que, mais tarde, no 2.º ciclo, os alunos aprofundem a sua compreensão sobre os números racionais e consigam trabalhar os seus vários significados. Tal como indica o PMEB (2007),

> No 2.º ciclo, a aprendizagem deve aprofundar esta compreensão e destreza, e ampliando-as aos números inteiros e racionais não negativos na forma de fração, considerada nos seus múltiplos significados, como, quociente entre dois números inteiros, relação parte-todo, razão, medida e operador, tendo sempre em vista o desenvolvimento do sentido de número. (ME, p. 32)

Ou seja, os alunos do 2.º CEB devem ter contacto com os diferentes significados de fração para que possam aprofundar o seu sentido de número. É neste ciclo que os alunos terão de:

> Compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão, medida e operador; comparar e ordenar racionais representados de diferentes formas; localizar e posicionar na reta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas; representar sob a forma de fração um número racional não negativo representado em diferentes formas. (PMEB, ME, 2007, p. 34)

Se se analisar o PMEB publicado em 2013 (MEC, 2013), constata-se que tem diferenças significativas em relação ao de 2007. Por exemplo, as frações deixaram de ser introduzidas de forma intuitiva e passaram a ser introduzidas "geometricamente a partir da decomposição de um segmento de reta em segmentos de reta de igual comprimento" (MEC, 2013, p. 6). Além disso, enquanto no PMEB de 2007 os alunos apenas teriam que identificar, no 2.º ano "a terça parte, quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fração" (ME, 2007, p. 17), no programa de 2013, também no 2.º ano, os alunos têm que identificar as "frações ½, 1/3, ¼, 1/10, 1/100 e 1/1000 como medidas de comprimento e de outras grandezas" (MEC, 2013, p. 9).

Mais tarde, no 3.º ano, o PMEB (2013) prevê que os alunos entendam a "adição e subtração de números racionais representados por frações com o mesmo denominador" (p. 11) e, no antigo PMEB (2007), no 3.º e 4.º, os alunos teriam de "adicionar, subtrair, multiplicar e dividir com números racionais não negativos na representação decimal" (p. 19).

No que diz respeito ao 4.º ano, o PMEB (2013) define como objetivo final deste ciclo a resolução de "problemas de vários passos envolvendo números racionais, aproximações de números racionais e as quatro operações" (p. 12). Este objetivo apenas estava delineado no programa anterior no final do 2.º CEB. Diferenciado do pressuposto delineado pelo programa de 2007, este afirma que:

> Os alunos deverão, à entrada do 3.º ciclo, mostrar fluência e desembaraço na utilização de números racionais em contextos variados, relacionar de forma eficaz as suas diversas representações (frações, dízimas, numerais mistos, percentagens) e tratar situações que envolvam proporcionalidade direta entre grandezas (p. 14).

Por outro lado, o NCTM (2007) afirma que do 6.º ao 8.º ano é que os alunos deverão "comparar e ordenar, eficazmente, números representados por frações, decimais e percentagens, e determinar a sua localização, aproximada, numa reta numérica" (p. 457).

Várias são as diferenças entre os programas, desde o PMEB de 1991 onde as frações apenas eram trabalhadas como operador, até hoje. Contudo, importa salientar que o programa datado de 2013 entrou em vigor no início do ano letivo, mas a meio do percurso escolar de muitos alunos. Por exemplo, no 3.º ano de escolaridade tiverem que o seguir sem terem aprendido o que o programa preconizava para o 1.º e 2.º anos. O mesmo aconteceu com os alunos do 5.º ano, no que se refere ao 2.º ciclo. Esta mudança não foi algo consensual entre professores e tornou-se bastante confuso para os alunos.

3. Desafios

Há diversos aspetos que poderão justificar as dificuldades no universo dos números racionais por parte dos alunos, tais como: a multiplicidade de significados, a perceção da quantidade, a utilização precoce de regras – representada sob a forma de fração, maioritariamente – entre outros aspetos. Estas dificuldades dos alunos são, consequentemente, um desafio para os professores.

Ainda que as frações façam parte da linguagem por nós utilizada todos os dias (meia chávena de leite, um quarto de maçã), os alunos demonstram algumas dificuldades na atribuição de significado à fração.

A passagem do número natural para a fração é sempre complicada; passamos de um algarismo para uma fração e, assim sendo, começamos por encontrar um motivo de dificuldade dos alunos: a representação de fração (Monteiro & Pinto, 2007).

A compreensão do que é uma fração não é uma tarefa simples pois, a fração é um conceito multifacetado do qual fazem parte diversos subconceitos.

Quaresma (2010, referindo Monteiro & Pinto) aponta algumas razões que poderão estar na origem das dificuldades dos alunos:

> (i)o facto de uma fração ter uma construção multifacetada, ou seja, apresentar diferentes significados; (ii) a concepção da unidade; (iii) o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos; e (iv) a sua representação ser constituída por dois números, facto que leva os alunos a interpretar uma fração como dois números separadamente. (p. 22)

Torna-se preferível que os alunos, numa primeira abordagem às frações, o façam intuitivamente, sem recorrer a regras para que, gradualmente, se apercebam que existem e não se limitem a recorrer à memorização pois, ao fazê-lo, poderão estar a impedir a interiorização do conceito e estarão a criar uma teia de conceitos que se interligam ao invés de apenas mais um conceito (Sequeira & Pinto, 2005). Deste modo, será feita uma matematização progressiva (idem). Monteiro e Pinto (2007), também fazem referência ao uso de estratégias alternativas afirmando que "as estratégias informais dos alunos não são o objetivo final do ensino, elas são o principio" (p. 16).

Numa fase embrionária do estudo das frações, os alunos optam por encontrar alternativas para resolver um problema ou tarefa, ou seja, tendem a utilizar uma representação visual para facilitar a compreensão do significado da fração, tal como referem Monteiro e Pinto (2005):

> O treino permite a alguns alunos respostas corretas a situações de cálculo rotineiro, o que pode criar a ilusão de que compreendem o que fazem. Por outro lado, há situações em que os alunos resolvem bem um problema com desenhos ou esquemas, mas que não conseguem resolvê-lo recorrendo a símbolos. (p. 2)

Para além disso, pode tornar-se mais fácil para os alunos compreender um número racional como percentagem, e, neste caso, estamos a trabalhar o número racional representado sob a forma de percentagem utilizando rótulos, ou seja, exemplos familiares; o aluno procura incessantemente algo que conhece, que está presente no seu dia-a-dia, para compreender tarefas matemáticas. Desta forma, compreende-se uma vez mais que o entendimento da fração é facilitado pela compreensão visual do seu significado constituindo uma mais-valia para o estudo das operações com frações (Sequeira et. al., 2009).

Outros autores, tais como Quaresma e Ponte (2012), afirmam também que os alunos demonstram dificuldades na aprendizagem dos números racionais. Os mesmos autores refletem sobre investigações que apontam para a possível falta de noção quantitativa do número racional (Quarema & Ponte, 2012, baseando-se em Post, Behr e Lesh) pois, os alunos não compreendem que os números racionais podem ser representados de várias formas: numerais decimais, frações, percentagens, pontos de uma reta numérica, entre outros.

Apesar das razões explicitadas que justificam as dificuldades exibidas pelos alunos, é necessário que estes tenham de operar com os símbolos respeitando o seu significado e tenham de compreender o conceito de fração no seu múltiplo significado, atribuindo-lhe sentido. O facto de realizarem múltiplas tarefas neste âmbito, poderá criar a ilusão, para o professor, de que o conceito foi interiorizado; existem tarefas em que "o aluno resolve bem um problema com desenhos ou esquemas, mas que não conseguem resolvê-lo recorrendo a símbolos (Monteiro & Pinto, 2007, p. 2). Monteiro e Pinto (2007) referem, também, que é mais usual ser trabalhado o significado parte-todo, nomeadamente nas situações de partilha equitativa e de medida. No que diz respeito à relação parte-todo "a fração surge da comparação entre a parte e o todo" (p. 5) e na medida "compara uma grandeza com outra tomada como unidade" (p. 6).

No decorrer de cada situação didática, é importante salientar a fração enquanto relação, o que, segundo as mesmas autoras, poderá apresentar inconvenientes porque os alunos podem confundir a “relação da parte com o todo, com a relação da parte com a outra parte” (Monteiro & Pinto, 2007, p. 16).

Em termos pedagógicos, o professor deverá colocar-se a si próprio algumas questões orientadoras do trabalho: “O que significa compreender os números racionais? Quais serão os obstáculos conceptuais para as crianças enquanto fazem a transição do número natural ao número racional?” (Lamon, citado por Silva, 2012, p. 62). Em suma, as frações são um tópico que se torna desafiante para o professor na medida em que este terá de ponderar um encadeamento de tarefas onde os conceitos a abordar consigam estar interligados para que façam sentido para os alunos e, gradualmente, para os conseguir interligar, gerando um fio condutor de conhecimentos. Desta forma, poderão ser reconhecidas as potencialidades de uma fração e compreender o porquê das suas múltiplas facetas.

No que diz respeito ao professor, as várias formas de representações dos números racionais poderão ser encaradas como um desafio; o professor terá de começar por ser ele próprio a estabelecer relações para as transmitir aos alunos (Fosnot & Dolk, 2002). O grande objetivo e desafio do professor será refletir sobre como ajudar os alunos a desenvolver o sentido de número racional. Segundo os mesmos autores, Fosnot e Dolk (2002) este é um desafio difícil de concretizar e têm de ser criadas as condições necessárias para que tal aconteça: os materiais indicados devem ser fornecidos aos alunos, as tarefas têm que ser devidamente pensadas e trabalhadas para que as crianças consigam fazer a ponte entre os conhecimentos intuitivos e desprovidos de regras matemáticas e os métodos e técnicas adequadas à resolução de cada tarefa.

Para tentar ajudar os alunos a fazerem face às suas dificuldades, o professor poderá selecionar e sequenciar tarefas tendo por pano de fundo a ideia de trajetória hipotética de aprendizagem ao perspetivar o ensino, com base na construção de uma trajetória de aprendizagem, beneficia o professor uma vez que todos os objetivos, conteúdos e ideias chave de cada tarefa são delineados e é definido o encadeamento sequencial de cada uma (Delgado, 2013). Este é um processo que “obriga o professor a refletir acerca das atividades desenvolvidas na sala de aula e nos seus efeitos na aprendizagem dos alunos” (Delgado, 2013, p. 80). A par de todos os benefícios acima descritos, encontram-se os desafios colocados ao professor pois:

> Exige (do professor) um forte conhecimento dos seus alunos, no sentido em que, neste processo, o professor terá de prever o tipo de atividade mental que é desenvolvido por eles que permita a construção dos conceitos e a sua progressão. (Delgado, 2013, p. 80, baseando-se em Clements & Sarama e Simon & Tzur)

Tentar construir uma trajetória de aprendizagem sequencial é um grande desafio no que diz respeito à articulação das tarefas, aspeto sublinhado por Delgado (2013).

Em suma, as frações não são um conteúdo de fácil aprendizagem para os alunos nem é fácil, para o professor ensiná-lo. No entanto, se se partir dos conhecimentos informais dos alunos, se se escolherem tarefas, com contextos adequados e que permitam trabalhar os vários significados de fração, é possível conseguir que os alunos aprendam frações numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Capítulo III

Metodologia

Neste capítulo apresentarei os principais contornos da metodologia usada neste estudo. Na primeira secção, refiro as principais opções metodológicas. Em seguida, apresento os contornos essenciais da intervenção pedagógica que realizei numa turma do 5.º ano de escolaridade. Posteriormente refiro as técnicas de recolha de dados usadas e sua fundamentação. Finalizo, com uma seção em que foco o processo de análise de dados.

1. Principais opções metodológicas

O objetivo deste estudo é compreender de que modo posso preparar e concretizar um ensino favorável à aprendizagem dos números racionais não negativos representados sob a forma de fração. Em particular, pretendo analisar a que aspetos devo dedicar atenção durante a fase da preparação das aulas e quais são, especialmente, relevantes, como conduzi as aulas e que desafios experienciei.

Tendo em conta este objetivo optei, do ponto de vista metodológico, por uma abordagem qualitativa de cariz interpretativo. "O paradigma interpretativo valoriza a compreensão e a explicação, tendo em vista desenvolver e aprofundar o conhecimento de um fenómeno ou situação, num dado contexto" (Bogdan & Biklen, citados por Silva, 2012, p. 66)

Na investigação qualitativa, o investigador frequenta "os locais em que normalmente se verificam os fenómenos nos quais está interessado" (Bogdan & Biklen, 2013, p. 17) e os dados empíricos "são ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas" (idem, p. 16). Esta abordagem tem cinco características fundamentais:

> (1) A fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal (...) (2) A investigação qualitativa é descritiva; (...) (3) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (...). (4) tendem a analisar os dados de forma indutiva; (...) [e] (5) o significado é de importância vital. (Bogdan & Biklen, 2013, pp. 47-50)

A abordagem qualitativa é adequada ao estudo que desenvolvi por várias razões: recolhi os dados nas aulas de Matemática da turma do 5.º ano de escolaridade em que realizei o estágio, isto é num ambiente natural; fui a agente de recolha de dados, pois, para além de professora, fui, também, investigadora; os dados recolhidos são palavras ou imagens e são ricos em pormenores descritivos; e refleti sobre a minha prática preocupando-me com o significado do que fazia e dizia bem como com o significado que os alunos atribuíam à atividade matemática que desenvolviam a partir das tarefas que lhes propunha.

Como referi na introdução deste documento, o estudo que desenvolvi é uma investigação sobre a minha própria prática.

Ponte (2002) salienta que um professor, no dia-a-dia se depara com variados problemas que são resolvidos intuitivamente tendo por base a experiência profissional. Contudo, como refere o autor, este facto não conduz a soluções completamente satisfatórias uma vez que "o ensino é mais do que uma atividade rotineira onde se aplicam simplesmente metodologias pré-determinadas" (Ponte, 2002, p. 62).

Ponte (2002) interroga-se sobre as potencialidades de olhar para aquilo que fazemos como sendo algo importante para a forma como conduzimos as nossas aulas. No fundo, trata-se, sobretudo, de tentar compreender e encontrar significado para as inúmeras dificuldades com que um professor se pode deparar, partam elas do próprio professor (condução das aulas/ ensino) ou dos alunos (aprendizagem/ apropriação de conhecimentos).

Segundo Ponte (2002), investigar a própria prática é "clarificar os problemas da prática e procurar soluções" (p. 62). Assim, uma investigação sobre a própria prática "começa com a identificação de um problema" (p. 63). Neste caso, a investigação que um professor faz sobre a sua prática traduz-se em querer encontrar e seguir um outro caminho para além dos que já conhece e que se traduza em algo benéfico para o ensino e aprendizagem. Para o mesmo autor, a nesta forma de investigação "o investigador tem uma relação muito particular como objeto de estudo - ele estuda não um objeto qualquer mas um certo aspeto da sua prática profissional." (Ponte, 2002, p. 64). Pode-se dizer, então, que um professor que estude a sua própria prática privilegia a sua construção de conhecimento profissional, uma vez que tenta evoluir procurando respostas para as suas necessidades em sala de aula. Em suma, "este campo de investigação, essencialmente profissional, tem como grande finalidade contribuir para clarificar problemas da prática e procurar soluções" (Ponte, 2003, p. 154).

Ponte (2002) refere quatro grandes razões para que os professores investiguem a sua própria prática:

> (i)para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa mesma prática; (ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional; (iii) para contribuírem para a construção de um património de cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional; e (iv) como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos. (p. 3)

Assim, a investigação, pelo professor, sobre a sua prática, favorece a capacidade de tomar decisões sob pressão, contribui para que se questione sobre as decisões que toma e para permite o aprofundamento do seu conhecimento profissional de modo a que seja capaz de delinear estratégias de ação mais favoráveis à aprendizagem dos alunos.

A ação e atitude de investigar a própria tem ressonâncias com a perspetiva defendida por Alarcão (2001) quanto ao que considera ser o trabalho de um professor:

> Realmente não posso conceber um professor que não questione sobre as razões subjacentes às suas decisões educativas, que não se questione perante o insucesso de alguns alunos, que não faça dos seus planos de aulas meras hipóteses de trabalho a confirmar ou infirmar no laboratório que é a sala de aula, que não leia criticamente os manuais ou as propostas didáticas que lhe são feitas, que não se questione sobre as funções da escola e sobre se elas estão a ser realizadas. (Alarcão, 2001, citada por Ponte, 2002, p. 2)

O estudo que desenvolvi é uma investigação sobre a própria prática porque decidi ter um olhar crítico sobre o trabalho que desenvolvi durante este estágio curricular de modo a compreender que práticas favorecem a aprendizagem das frações.

Uma questão que poderá colocar-se é se o estudo que desenvolvi se enquadra na modalidade de investigação-ação. Com efeito, há uma proximidade entre investigação sobre a própria prática e investigação-ação, como Ponte (2002).

O significado de investigação-ação não é consensual. Ponte (2002), citando Kemmis, refere que,

> A investigação-ação é uma forma de pesquisa auto-refletida, realizada pelos participantes em situações sociais (incluindo situações educacionais) com vista a melhorar a racionalidade e a justiça: (i) das suas práticas sociais ou educacionais; (ii) da sua compreensão dessas práticas; e (iii) das situações em que essas práticas têm lugar. (Ponte, 2002, p. 6)

Afonso (2005), por seu turno, sublinha que a investigação-ação se destina a "ajudar professores e grupos de professores a enfrentarem os desafios e problemas das suas práticas, e a concretizarem inovações de uma forma reflexiva" (p. 74, citando Altrichter et al.).

Por outro lado, Máximo-Esteves (2008) caracteriza a investigação-ação como sendo uma "investigação intencional, sistemática, efetuada pelos professores sobre o trabalho de sala de aula" (p. 38, citando Cochran-Smith & Lytle). A mesma autora salienta que "a investigação-ação é concebida, atualmente, como um processo de investigação conduzido pelas pessoas que estão diretamente envolvidas numa situação e que desempenham, simultaneamente, o duplo papel de investigadores e participantes" (p. 42).

Compreende-se, assim, que a investigação-ação pressupõe uma autorreflexão e um olhar autocrítico de modo a que cada profissional melhore a sua prática, a sua compreensão sobre a mesma e as soluções que poderão advir. Na investigação-ação todo este processo é reflexivo de uma mudança e o investigador tem um duplo papel: é professor e investigador (Afonso, 2005). Ao agir, há todo um esforço incessante para ligar, relacionar e confrontar ação e reflexão de modo a melhorar a prática para que o fator mudança esteja presente quer para o professor, quer para os alunos (idem).

O estudo que desenvolvi tem contornos/características de investigação-ação pois, pretendo que ocorra uma mudança/melhoria das minhas práticas enquanto professora. Com efeito, em termos pessoais, a razão pela qual decidi estudar a minha prática prendeu-se com a necessidade de refletir sobre um problema relevante e para o qual procuro respostas: de que modo posso, enquanto professora, equacionar as minhas práticas perante a dificuldade que os alunos, em geral, sentem no estudo dos números racionais não negativos representados sob a forma de fração. Assim, torna-se essencial compreender e analisar a minha prática de modo a compreender o eco da mesma junto dos alunos, o que vai ao encontro do que é referido por Ponte (2002):

> Torna-se necessária a exploração constante da prática e a sua permanente avaliação e reformulação. (…). Para isso, é indispensável compreender bem os modos de pensar e as dificuldades dos alunos. (…) A base natural para essa atuação tanto na sala de aula como na escola, é a atividade investigativa, no sentido de atividade inquiridora, questionamento e fundamentada. (p. 2)

Neste âmbito, foi realizada uma investigação numa turma de 5.º ano durante cerca de cinco semanas.

2. Intervenção pedagógica

Nesta secção começo por descrever o contexto em que foi concretizada a intervenção pedagógica e, em seguida, apresento, globalmente os principais contornos desta intervenção. No capítulo 4, dedicado à análise de dados, retomarei esta intervenção.

2.1. Contexto: A escola e a turma

O último momento de estágio curricular foi desenvolvido, numa turma do 5.º ano de escolaridade, pertencendo a uma escola no concelho do Seixal. Esta escola situa-se num meio urbano-rural onde predomina a tendência urbana. A habitação circundante da escola é predominantemente familiar. A população habitante deste meio é proveniente de um nível socioeconómico heterogéneo (médio), sendo que a maioria dos encarregados de educação dos alunos têm a escolaridade básica e estava empregada.

A escola sede, onde decorreu o estágio, está em funcionamento desde o ano de 1995 e tem capacidade para 30 turmas. O edifício da escola encontra-se em bom estado e é composto por três blocos interligados por corredores; além disso, existe um bloco separado que dá assistência às aulas de Educação Física – Balneários.

A escola, no seu exterior, conta com espaços agradáveis tendo inclusive uma pequena horta desenvolvida pelos alunos, sob a orientação de alguns professores. Nesta escola, é notória a grande preocupação que os/as professores/as mostram ter em termos do bem-estar dos seus alunos. Por exemplo, tentam sempre que estes possam usufruir ao máximo dos seus direitos preocupando-se, também, com os seus deveres e, no caso da turma do 5.º ano em que realizei o estágio, as aulas de formação cívica são utilizadas para discutir assuntos como: a comida do refeitório, o chão da escola, os animais abandonados em redor da escola, a interação entre alunos, a envolvência de todas as turmas na comunidade escolar. Os alunos utilizam estas aulas para debater determinadas ideias com a finalidade de encontrar uma solução para apresentar à direção da escola. O mesmo se passa com as outras turmas. No geral, o ambiente dentro da sala de professores é bastante agradável bem como a relação entre professores e funcionárias.

Toda a dinâmica da escola está orientada para que os alunos tenham o melhor acompanhamento possível no que diz respeito à sua educação escolar: a biblioteca da escola funciona das 8h15 até às 18h15, nomeadamente para os alunos poderem ter um lugar para onde ir visto que muitos dos pais trabalham desde cedo; existem *ateliês* de apoio a algumas disciplinas, como é o caso do português, e é aqui que os alunos poderão fazer os trabalhos de casa com a ajuda da professora que está a dinamizar o *ateliê* naquele momento – este é um trabalho rotativo entre as professoras de português.

No que diz respeito à caracterização da turma onde estagiei, esta conta com 22 alunos, sendo que 11 são raparigas e 11 são rapazes. Em geral, o grupo revela um excelente comportamento dentro da sala de aula mostrando sempre bastante interesse em todas as aulas, o que, segundo a diretora de turma com quem conversei informalmente em diversas ocasiões, os leva a ser bastante participativos e permite um ambiente propício a qualquer tipo de atividade.

Paralelamente ao que observei e às informações que a diretora da turma forneceu, pude constatar que a turma se encontra dividida em quatro grupos: um grupo de três alunos referenciados como tendo Necessidades Educativas Especiais (NEE); um grupo de seis alunos que revelam algumas dificuldades em todas as áreas curriculares; um grupo de nove alunos considerados médios; e, por fim, um pequeno grupo de três alunos que se destacam pela facilidade de aprendizagem que revelam em todas as áreas. Perante isto, os lugares da sala de aula distribuídos aos alunos são escolhidos tendo em conta a entreajuda e cooperação. Apesar de se encontrarem sentados, tradicionalmente, dois a dois, virados para o quadro, os parceiros de mesa dos alunos que revelam mais dificuldades, são os que têm mais facilidade de aprendizagem sendo responsáveis por orientar os colegas. Ainda que um grupo restrito de alunos tenha algumas dificuldades em trabalhar a pares, esta disposição de sala de aula é reveladora do bom ambiente que se pode presenciar em qualquer aula.

É, ainda, de salientar que os alunos com NEE eram acompanhados semanalmente por uma professora de Educação Especial na aula de Matemática. Este tempo destinava-se a apoiar os referidos alunos nas atividades desenvolvidas no momento e, no fim de cada aula, a professora de educação especial dava *feedback* à professora responsável pela disciplina.

2.2. Intervenção pedagógica: principais contornos

Tendo em conta o objetivo deste estudo e as questões associadas, foi selecionado um conjunto de tarefas para ensinar o que Silva (2012), apoiando-se, nomeadamente em Van Walle e Lovin e, ainda, Fosnot e Dolk (2001), designa por *big ideas* associadas ao estudo das frações.

As tarefas propostas à turma foram criteriosamente selecionadas pela professora cooperante e por mim. Saliento a importância da ajuda da professora cooperante, nomeadamente, para me apoiar na compreensão das potencialidades matemáticas das tarefas escolhidas para a aprendizagem dos alunos.

Inicialmente foram selecionadas dez tarefas a serem exploradas com os alunos, tendo por base uma trajetória de aprendizagem para o estudo das frações utilizada por Silva (2012). Na tabela 3 encontram-se identificadas todas as tarefas escolhidas integradas nesta trajetória.

Tabela 3 - Trajetória inicial inspirada em Silva (2012)

Trajetória definida	Tarefas (designação)	Nº de aulas
1. Do trabalho intuitivo com a parte fracionária à simbologia da fração	**Tarefa 1 –** "Partilhas justas"	Aula 1
	Tarefa 2 – "Pintando azulejos"	
2. Da simbologia da fração ao sentido de número racional na forma de fração	**Tarefa 3 –** "As tampinhas do Carlos"	Aula 2
	Tarefa 5 – "Maior, menor ou igual à unidade?"	Aula 4
	Tarefa 6 – "Das partes ao todo"	Aula 5
	Tarefa 7 – "As bolas de pingue-pongue"	Aula 6
	Tarefa 8 – "Do todo às partes"	Aulas 7 e 8
	Tarefa 9 – "Exploração da reta numérica"	Aula 9
	Tarefa 10 – "A discussão do João e da Maria	Aulas 10 e 11
3. Do sentido de número racional representado na forma de fração à noção de equivalência de frações	**Tarefa 4 –** "Exploração dos queijinhos"	Aulas 3 e 4

Um aspeto que a professora cooperante salientou durante as nossas conversas informais foi o facto de que esta trajetória poderia não ser estanque, isto é, poderia existir a necessidade de reajustar consoante o desenrolar das aulas. Foi o que aconteceu. De facto, ao longo das aulas a ordenação das tarefas foi sofrendo alterações, uma vez que foi imprescindível dar resposta às dúvidas e dificuldades dos alunos. A trajetória utilizada com a turma, bem como o número de aulas dedicado a cada tarefa e a sua data de exploração é apresentada na tabela 4:

Tabela 4 -Trajetória de trabalho final inspirada em Silva (2012)

Trajetória utilizada	Tarefas (designadas)	Nº de aulas	Data de exploração
1. Do trabalho intuitivo com a parte fracionária à simbologia da fração	**Tarefa 1 –** "Partilhas justas"	Aula 1	25 de fevereiro de 2014
	Tarefa 2 – "Pintando azulejos"		25 de fevereiro de 2014
2. Da simbologia da fração ao sentido de número racional na forma de fração	**Tarefa 3 –** "A discussão do João e da Maria"	Aula 2 e 3	27 de fevereiro de 2014
	Tarefa 5 – "Maior, menor ou igual à unidade?"	Aula 4	11 de março de 2014
	Tarefa 6 – "Quanto passa da unidade ou falta para a unidade?"	Aula 5	13 de março de 2014
	Tarefa 7 – "As tampinhas do Carlos"	Aula 6	17 de março de 2014
	Tarefa 8 – "Das partes ao todo"	Aulas 7 e 8	18 de março de 2014
	Tarefa 9 – "As barras de chocolate" (*Chocolat bar*)	Aula 9	24 de março de 2014
	Tarefa 10 – "Exploração da reta numérica"	Aulas 10 e 11	25 e 27 de março de 2014
	Tarefa 11 – "As bolas de pingue-pongue"	Aulas 12, 13, 14 e 15	22, 24, 28 e 30 de abril de 2014
3. Do sentido de número racional representado na forma de fração à noção de equivalência de frações	**Tarefa 4 –** "Exploração dos queijinhos"	Aulas 3 e 4	10 e 11 de março de 2014

Como é visível, houve um reajuste na trajetória pensada ao longo do caminho que ia sendo percorrido. As tarefas "Partilhas justas" e "Pintando azulejos" mantiveram-se. A terceira tarefa sofreu um ajuste pois, inicialmente, estava planeado que iriamos explorar "As tampinhas do Carlos", mas passamos para a tarefa "A discussão do João e da Maria". As tarefas "Exploração dos queijinhos" e "Maior, menor ou igual à unidade" não sofreram nenhuma alteração. A sexta tarefa a ser explorada foi "Quanto passa da unidade ou falta para a unidade?" ao invés de ser a tarefa "Das partes ao todo". O mesmo se verificou com a tarefa 7; era para ter sido proposta a tarefa “As bolas de pingue-pongue”, mas decidi, em conjunto com a professora cooperante, explorar com a turma “As tampinhas do Carlos”. A oitava tarefa, “Das partes ao todo”, foi mantida de acordo com a planificação da trajetória pensada inicialmente. Consoante o avançar das aulas, surgiu a necessidade de introduzir uma nova tarefa, designada “As barras de chocolate”. Esta foi a nona tarefa a ser trabalhada, ao invés da “Exploração da reta numérica” que passou para a aula seguinte, como décima tarefa. Por fim, e para darmos por concluída esta trajetória, abordámos a tarefa “As bolas de pingue-pongue” que, estava planificada para ser a sétima tarefa.

Esta inflexão na trajetória é justificável pelas notórias dificuldades com a exploração das primeiras duas tarefas por parte dos alunos. Assim, houve a necessidade de redefinir o trabalho planificado.

As atividades dos alunos, desencadeadas a partir das tarefas propostas, foram estruturadas em três níveis: (i) apresentação da tarefa; (ii) exploração da tarefa; (iii) discussão coletiva e têm como objetivo transversal desenvolver a capacidade de expressar ideias matemáticas com linguagem matemática correta.

No que diz respeito à condução e concretização do ensino, de um modo geral, todas as tarefas foram apresentadas de forma semelhante; foram projetadas na tela ou era feita a distribuição do enunciado de cada tarefa para colar no caderno. Em qualquer dos casos, tinham sempre a possibilidade de contactar com o registo escrito da tarefa.

Seguia-se uma fase de trabalho autónomo dos alunos. As tarefas eram realizadas a pares ou em pequenos grupos para que as ideias fluíssem e para que os alunos explicassem, através de argumentos matemáticos, o seu ponto de vista ao grupo organizados em pares ou pequenos grupos, resolviam as tarefas. Neste momento circulava sempre pela sala com o objetivo de compreender as estratégias que cada aluno/ grupo utilizava e as explicações/justificações que iam sendo apresentadas e que poderiam ser úteis na fase seguinte da aula dedicada a uma discussão coletiva das estratégias de resolução usadas pelos alunos durante o trabalho autónomo.

Durante a discussão coletiva, os alunos foram encorajados a partilhar com a turma as suas formas de pensar e a explicar e justificar os seus raciocínios. A participação dos alunos foi gerida de acordo com as necessidades do momento: se era ou não indicado intervir, que tipo de intervenção, se instituiria como objeto de reflexão uma dúvida geral, se uma estratégia bem conseguida ou uma ideia mal delineada. Neste âmbito, coloquei diversos tipos de questões, algumas previamente pensadas outras não, procurando centrar a atenção dos alunos em aspetos que considerei relevantes e tentando levá-los a interagir de diferentes formas: aluno – professor; professor – aluno; aluno – aluno. Tentei, também, que os alunos assumissem um duplo papel: o de ouvintes atentos ao que os colegas diziam para que se pudessem pronunciar sobre as ideias apresentadas; e o de avaliadores críticos do que ouviam numa perspetiva de crítica construtiva. Esta discussão era encerrada com uma sistematização das principais ideias matemáticas trabalhadas procurando, assim, que os alunos fossem progredindo na sua aprendizagem da Matemática.

3. Recolha de dados

Uma parte fundamental de todo o processo de investigação é a recolha de dados empíricos que nos permitem analisar e refletir sobre o objeto de estudo.

Uma vez que este projeto assenta na preparação e condução do ensino, privilegiei a recolha de dados através da observação participante e da recolha documental. Na tabela 5, apresento as técnicas de recolha de dados, a proveniência dos dados, as formas de registo utilizadas e os tipos de documentos que foram submetidos ao processo de análise:

Tabela 5 - Técnicas de recolha de dados

Técnicas de recolha de dados	Proveniência dos dados	Forma de registo	Tipos de documentos
Recolha documental	Professora estagiária; Alunos	Documentos escritos	Planificações das aulas; Produções dos alunos (resolução das tarefas); Reflexões pessoais sobre a prática

Observação participante	Aulas lecionadas sobre os números racionais não negativos representados sob a forma de fração	Gravação áudio e vídeo de 5 aulas; Notas de campo	Transcrição de extratos das gravações; Notas de campo pessoais e registos feitos pelo par de estágio sobre episódios das aulas

A tabela 5 permite destacar que os dados para o estudo que desenvolvi incluem Documentos pessoais (planificações das aulas e reflexões escritas) transcrições de gravações em vídeo e áudio de momentos de trabalho na sala de aula, notas de campo associadas a estas aulas, e produções dos alunos (imagens das suas estratégias de resolução de cada tarefa).

3.1. Recolha documental

No que diz respeito à recolha documental, esta complementa "as informações obtidas por outras técnicas, seja por descoberta de novos aspetos sobre um tema ou problema" (Sousa & Baptista, 2011, p. 89).

Os documentos recolhidos no âmbito do estudo que desenvolvi foram produções dos alunos, uma vez que fizeram registos relativos à resolução de todas as tarefas propostas, reflexões pessoais sobre as aulas lecionadas e planificações elaboradas para as aulas. A recolha documental foi importante no decorrer da recolha de dados pois permitiu-me analisar muitas das dificuldades dos alunos, através das suas produções.

3.2. Observação participante

A observação, para vários autores tais como Afonso (2005) e Bogdan e Biklen (2013), é uma fonte fidedigna e útil de recolha de dados uma vez que a informação não pode ser distorcida com base em comentários ou conversas com os participantes da investigação.

Afonso (2005) salienta que existem dois tipos de observação: estruturada e não estruturada. A primeira faz-se através do registo em grelhas ou tabelas do que observamos, sendo estas previamente elaboradas em função dos objetivos da investigação. Por sua vez, a observação não estruturada é realizada através de notas de campo, que podem ser registadas durante o momento de recolha de ou logo após este momento.

Um dos tipos de observação, é a observação participante que,

> Permite recolher dois tipos de dados. Os dados registados nas "notas de campo" são do tipo descrição narrativa e aquelas que o investigador anota no seu "diário de bordo" pertencem ao tipo da compreensão, pois fazem apelo à sua própria subjetividade. (Michelle Lessard-Hébert et al, 2008, p. 157)

No estudo que desenvolvi fui observadora participante, pois registei acontecimentos depois de terem ocorrido. Este tipo de participação:

> Significa que o observador está envolvido nos acontecimentos e que os regista após eles terem tido lugar. Na sua forma ativa, o observador deve registar os seus dados após o período de observação, ao passo que, numa forma mais passiva, os pode registar durante esse período. (Michelle Lessard-Hébert et al, 2008, p. 156)

O primeiro contacto com a escola foi estabelecido em meados de fevereiro, através da apresentação à professora cooperante. O primeiro momento de estágio, nomeadamente, o primeiro contacto com a turma foi, no 2.º período escolar, nos dias 17 a 23 de fevereiro de 2014. Nesta semana, apenas interagi com os alunos colaborando com a professora cooperante nas aulas por si lecionadas tendo como objetivo o conhecimento do contexto, da professora cooperante e da sua dinâmica de trabalho e dos alunos da turma de estágio. Seguiu-se o período de intervenção que teve início no dia 24 de fevereiro de 2014 e terminou no dia 30 de março de 2014 devido à interrupção letiva, e recomeçou no dia 22 de abril, terminando a 25 de maio do mesmo ano.

Como referi no capítulo 1, a investigação que desenvolvi partiu de um problema da turma identificado durante a semana de reconhecimento do contexto. A partir daqui este estudo começou a tomar forma e, posteriormente, apresentei o tema do projeto à professora cooperante numa reunião informal. Em resposta, a professora cooperante salientou a importância do tema e frisou que apesar de ser trabalhoso era um interessante objeto de estudo.

Léssard-Hébert et al. (2008) indicam que a compreensão da realidade baseada unicamente na observação pode ter riscos para a investigação, nomeadamente porque o observado pode ser condicionada pela olhar do investigador que, inconscientemente poderá fazer juízos de valor baseando-se apenas neste olhar. Assim, durante a intervenção pedagógica decidi proceder à gravação áudio e vídeo de cinco aulas para, posteriormente, poder revisitar o meu modo de agir. Esta forma de registo de dados foi um importante auxílio no processo de análise de dados. Com efeito, possibilitou recolher dados "descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo (…) desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam (Bogdan & Biklen, 2013, p. 137).

4. Processo de análise de dados

De acordo com Bodgan e Biklen (2013) "a análise de dados é o processo de busca e de organização sistemática de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados (…) para depois apresentar aos outros aquilo que se encontrou (p. 205)". Ou seja, no momento de análise é feita uma triagem dos dados recolhidos para, posteriormente, serem organizados. Aqui, é tida em conta toda a informação recolhida; em suma, há uma seleção dos dados a analisar tendo em conta o objetivo e questões do estudo.

Tal como anteriormente referi, analisei todos os documentos recolhidos no que diz respeito à prática que desenvolvi e às produções orais e escritas dos alunos, bem como as aulas gravadas em suporte áudio e vídeo. Para o efeito, optei por uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas. Segundo Bardin (2015), a análise de conteúdo "aparece como um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens" (p. 38).

Deste modo, considerei três dimensões orientadoras da análise: a) preparação das aulas: seleção e seriação de tarefas bem como eventuais dúvidas e intervenções a fazer; b) condução do ensino: apresentação das tarefas, monitorização do trabalho dos alunos e orquestração de discussões coletivas; por fim, c) desafios: origem e natureza dos mesmos.

Afonso (2005) revela que existem três momentos fundamentais durante a fase de análise de dados: descrição, análise e interpretação. A descrição diz respeito à produção escrita de textos resultantes (notas de campo); a análise corresponde à organização dos dados pelo investigador de modo a salientar os aspetos essenciais; e por fim, a interpretação, diz respeito às ilações retiradas com toda a análise bem como à atribuição de significados (Afonso, 2005).

Para compreender o que me propus investigar, comecei por analisar as tarefas matemáticas antes de serem propostas aos alunos e tracei, em conjunto com a professora cooperante, uma trajetória de aprendizagem que foi sofrendo alterações/ ajustes sempre que considerássemos necessário. A sequência de tarefas que resultaram numa trajetória de aprendizagem inspirada em Silva (2012), foi concebida tendo como objetivo encadear as ideias matemáticas para fomentar a construção do conceito de fração, trabalhando os seus múltiplos significados recorrendo a materiais e modelos diversificados.

Em seguida, no que concerne às planificações por mim formuladas, comecei por explorar cada tarefa matemática a apresentar à turma, a resolvê-la, enquanto aluna, e a conhecê-la enquanto professora com a finalidade de compreender as suas potencialidades e o que pretendia que os alunos retirassem, em termos de aprendizagens. Estudei, também, as minhas intervenções bem como todos os momentos da aula (apresentação das tarefas, monitorização do trabalho dos alunos e orquestração de discussão coletiva). Por fim, conversei e discuti com a professora cooperante eventuais modos de dar resposta às necessidades dos alunos durante as aulas: o que dizer, como focar os aspetos importantes de cada tarefa, como corrigir os alunos levando-os à resposta correta sem condicionar ou retirar as potencialidades matemáticas das tarefas, entre outros aspetos.

No que concerne às gravações em áudio e vídeo de um conjunto de seis aulas, estas foram transcritas e em seguida devidamente analisadas. Ao analisar as estas transcrições procurei compreender, relativamente a cada aula lecionada, o modo como a condução das mesmas conduziu a uma prática de ensino favorável para o estudo das frações.

Em síntese, através da análise de dados tentei responder às questões de investigação formuladas num registo que, nas palavras de (Afonso, 2005) fosse "coerente com o enquadramento teórico e conceptual mobilizado" (p. 123).

No processo de análise de dados posso considerar várias fases. A primeira iniciou-se com a leitura de notas de campo e reflexões mensais e diárias, e com a avaliação dos registos fotográficos recolhidos após a exploração de algumas tarefas.

Em seguida, foram analisadas as gravações de cinco aulas bem como as transcrições das mesmas de modo a complementar o trabalhado realizado. Posteriormente, organizei os dados recolhidos por tópicos, de modo a facilitar a sua análise:

A. Apresentação da tarefa;
B. Exploração da tarefa pelos grupos;
C. Monitorização do trabalho;
D. Discussão da tarefa: apresentação das estratégias de cada grupo;
E. Conclusões.

A tarefa "As bolas de pingue-pongue", explorada em quatro aulas integralmente gravadas, foi analisada em detalhe. Na análise das transcrições procurei perceber as opções que tomei ao longo da tarefa, a níveis vários: tipo de perguntas que formulei; forma como esclareci os alunos; atitude face ao erro dos alunos; ênfase em determinado aspeto/ intervenção dos alunos; gestão das discussões coletivas (o que faço, o que os alunos fazem, o que eu faço com as intervenções dos alunos e vice-versa).

Para finalizar, os resultados provenientes da análise de todas as tarefas em geral, e da última tarefa em particular, foram confrontados com a revisão da literatura, o objetivo principal deste estudo e as questões de investigação, originando uma conclusão.

Capítulo IV

Ensinando Frações no 5.º ano de escolaridade

O presente capítulo visa analisar os dados provenientes da intervenção pedagógica, tendo em vista o objeto de estudo deste projeto e as questões. Divido-o em três secções: uma primeira onde apresento uma visão macroscópica sobre a preparação e condução do ensino; uma segunda e terceira onde analiso microscopicamente duas tarefas "A discussão do João e da Maria" e "As bolas de pingue-pongue", nomeadamente.

1. Preparando e conduzindo as aulas: Perspetiva geral

Como referi no capítulo 3, concebi a intervenção pedagógica delineando, em conjunto com a professora cooperante, uma trajetória hipotética de aprendizagem, dividida em três fases, que foi composta por onze tarefas. Além disso, resolvi antecipadamente todas as tarefas, tentei inventariar varias estratégias de intervenção, previ modalidades de trabalho com os alunos, sempre em conjunto com a professora cooperante.

Decidi que a generalidade das tarefas seria explorada em pares pelos alunos, com exceção das tarefas "A discussão do João e da Maria", "Exploração da reta numérica" e "As bolas de pingue-pongue".

Todas as tarefas selecionadas foram exploradas em três fases: apresentação, monitorização e discussão.

A primeira abordagem ao conceito de fração foi feita na primeira etapa da trajetória, intitulada: "Do trabalho intuitivo com a parte fracionária à simbologia da fração". Nesta etapa foram exploradas duas tarefas "Partilhas justas"[3] e "Pintando azulejos"[4]. Ambas têm objetivos semelhantes, concretamente ajudar os alunos a:

- Compreender que o conceito de fração envolve a divisão de um todo em partes iguais;
- Quanto mais partes se usam para "compor" uma unidade, mais pequenas são essas partes.

---

[3] Anexo 1
[4] Anexo 2

O enunciado de tarefa "Partilhas justas" incluía um conjunto de figuras geométricas divididas em 4 partes (figura 3) solicitava se aos alunos q indicassem que figuras estavam divididas em quartos. Intencionalmente, algumas figuras estavam divididas em partes não iguais e o objetivo era analisar com os alunos se qualquer uma das partes poderia ser designada por um quarto. Tal como o episódio 1 ilustra, nem sempre esta ideia foi óbvia para os alunos:

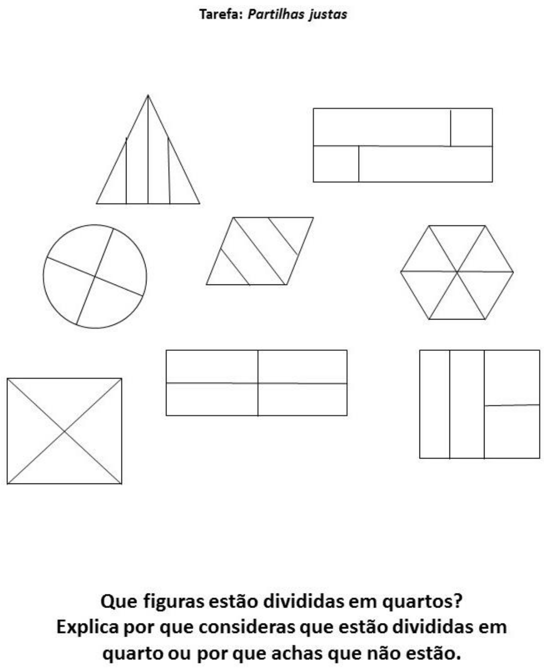


Figura 3 - Enunciado da tarefa "Partilhas justas"

Episódio 1: Vamos olhar para as figuras

1. **Professora Joana:** [dirigindo-me a Márcio e Marta M.] vamos olhar para as figuras… O que acham do triângulo? Está dividido em quartos?
2. **Márcio:** Este triângulo está dividido em quartos mas não estão divididos por igual; há partes maiores que outras.
3. **Marta M.:** Professora, foi igual com o retângulo ao lado; tem quatro partes mas há quadrados e retângulos dentro do retângulo (…) mas na última figura isso acontece. Está dividida de formas diferentes mas têm as mesmas medidas!
4. **Márcio:** Não professora, está errado! Está dividido em quartos mas não está igual!
5. **Professora Joana:** E o que sabemos acerca dos quartos?
6. **Marta M.**: Têm que ser todos iguais, acho eu…

N.C.[5]

Ao questionar Márcio e Marta M. acerca do triângulo, pretendi compreender o que entendiam por "uma figura dividida em quartos" (§1, 5). Fiz esta intervenção porque quis perceber se consideravam que uma figura podia estar dividida em quartos mesmo que as partes e que está dividida não sejam iguais.

A tarefa "Pintando azulejos" foi escolhida para que os alunos compreendessem, que existem várias formas de representar metade, um quarto e um oitavo de algo. As figuras 4, 5 e 6 são exemplos do enunciado da tarefa. A mesma foi introduzida com a seguinte

[5] N.C – Notas de Campo

informação: "Suponham que vos pedem para pintar os azulejos do pátio da escola de três formas diferentes; primeiro pintam metade dos azulejos, depois um quarto dos azulejos e depois um oitavo".

Tarefa: ***Pintando azulejos***

Aqui representados tens alguns azulejos. Pinta metade de cada azulejo como quiseres.
A única regra é: tenta pintá-los de formas diferentes!

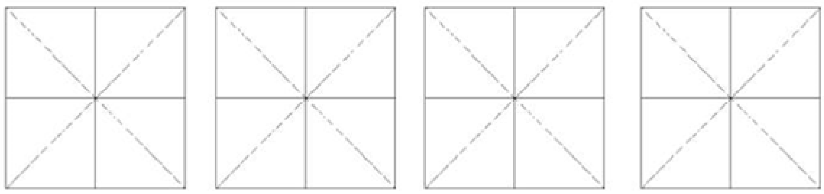


Figura 4 - Enunciado da tarefa "Pintando azulejos" - Parte I

Voltamos a ter mais azulejos! Agora pinta um quarto dos azulejos de novo com a mesma regra.

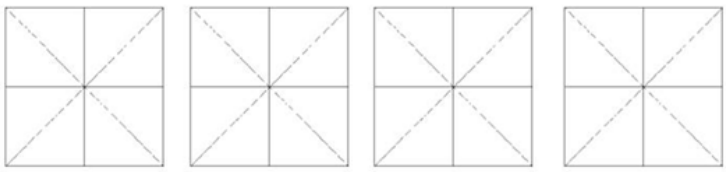


Figura 5 - Enunciado da tarefa "Pintando azulejos" - Parte II

Para finalizar toda a pintura, desta vez tens apenas que colorir um oitavo de cada azulejo utilizando a mesma regra.

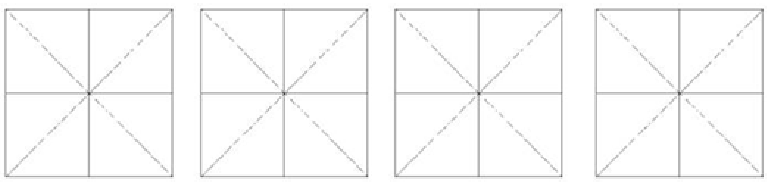


Figura 6 - Enunciado da tarefa "Pintando azulejos" - Parte III

Esta tarefa não gerou muitas dificuldades e apareceu para salientar a noção de divisão ao meio, em quatro partes e em oito partes onde, de cada parte, só pintavam a fração pedida, ½, ¼ ou 1/8.

Foi a partir desta tarefa que trabalhamos a "árvore das metades" (figura 7):

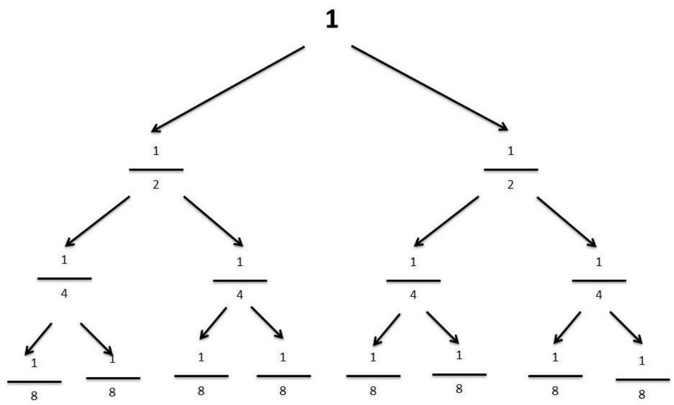


Figura 7 - Esquema em árvore designado "A árvore das metades"

Para construir o esquema representado na figura 7, parti de um sector circular que registei no quadro e identifiquei-o como uma unidade. Comecei por perguntar a um aluno o que obteria se o dividisse ao meio. A resposta foi "dois meios". Vimos, então, que se a unidade pode ser dividida em duas partes iguais cada uma se designa por metade e, portanto, numa unidade há dois meios. O mesmo procedimento foi adotado relativamente aos quartos e oitavos.

Esta esquematização de ideias foi bastante útil por variadas razões, a saber: (i) os alunos estavam a trabalhar apenas com metades, o que numa primeira abordagem facilita a aprendizagem; (ii) foi possível rever todo o trabalho desenvolvido em ambas as tarefas pois, os alunos compreenderam o porquê de, na tarefa 2, representarem a metade pintando apenas quatro triângulos em oito, e assim sucessivamente; (iii) este esquema seria útil em tarefas subsequentes; (iv) é um modo de organizar o pensamento dos alunos quando realizarem o mesmo esquema em árvore para os números racionais representados na forma de decimal e em percentagem.

A terceira tarefa explorada na turma "A discussão do João e da Maria"[6], incluída na segunda etapa da trajetória de aprendizagem, cujo título é "Da simbologia da fração ao sentido de número racional na forma de fração", será analisada detalhadamente na secção 2 deste capítulo.

A quarta tarefa proposta aos alunos intitulou-se "Exploração dos queijinhos"[7] e considerei-a incluída na terceira parte da trajetória, designada "Do sentido de número racional representado na forma de fração à noção de equivalência de frações".

[6] Anexo 3
[7] Anexo 11

Para a exploração desta tarefa os alunos usaram como modelo de apoio *queijinhos*, palavra adotada na turma para designar sectores circulares, de várias cores, obtidos a partir da divisão equitativa de círculos iguais num diferente número de partes iguais por exemplo, metades, terços, quartos, sextos, oitavos e décimos. Cada aluno tinha um envelope com os vários setores circulares e eram usadas cores diferentes para representar quantidades diferentes havendo, no entanto, o cuidado da mesma quantidade ser representada sempre pela mesma (figura 8):

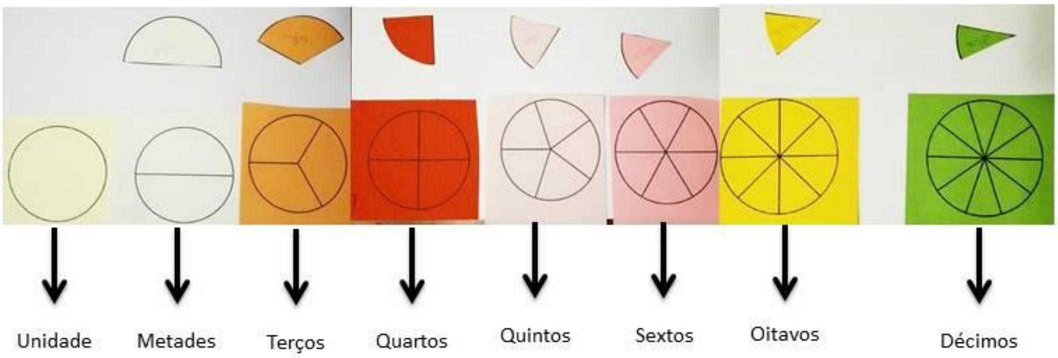


Figura 8 - Sectores circulares obtidos a partir da divisão equitativa de círculos iguais num diferente número de partes iguais - *Queijinhos*

Para esta tarefa foram delineados os seguintes objetivos:

- Desenvolver a capacidade de explorar diferentes formas de formar a quantidade;
- Reconstruir a quantidade a partir das suas partes;
- Desenvolver a adição no que diz respeito às frações.

Tal como a figura x representa, por detrás de cada parte de cada sector circular, os alunos escreveram a sua representação nas mais diversas formas (figura 9):

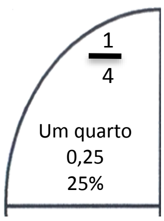


Figura 9 - Exemplo de identificação da parte de um sector circular

Com este modelo de área, os alunos formaram várias quantidades tendo como referência um sector circular e, gradualmente, adquiriram o conceito de equivalência de frações por compreenderem que, por exemplo "dois quartos é o mesmo de um meio" – Tomás.

Começaram por formar várias quantidades utilizando este material e, mais tarde, fizeram os seus registos no caderno da disciplina.

Uma vez que cada sector tinha a sua cor, os alunos ao fazerem o registo no caderno do sector circular pintavam cada parte de acordo com as suas cores, tal como se pode observar na figura 10:

Figura 10 - Trabalho desenvolvido por Gonçalo

Tomei esta decisão para que os alunos relacionassem a cor de cada parte do sector circular com a fração a que correspondia e, também, porque iria surgir a necessidade de pedir a todos os alunos que indicassem, por exemplo, 2/4 (episódio 2):

Episódio 2: Oiçam com atenção!

1. **Professora Joana:** Oiçam com atenção! Existem grandes dúvidas por aqui… Quero pedir a todos que levantem um quarto (…). Bruno, se eu juntar mais um quarto a esse que já tens, o que obtenho?
2. **Bruno:** Dois quartos? [Margarida tinha o dedo no ar]
3. **Professora Joana:** Muito bem, dois quartos… Mas também posso obter algo diferente… Diz lá Margarida!
4. **Margarida:** Oh professora pode ser ½ porque se formos ver dá!
5. **Professora Joana:** Exatamente! Vamos pegar todos em um meio! E dentro desse meio vamos colocar os dois quartos. O que acontece? Catarina…
6. **Catarina:** Eles cabem!
7. **Paulo:** Vimos isso na árvore das metades… Dois quartos é um meio.

N.C.

Tomei a decisão de criar os sectores com diferentes cores para que os alunos diferenciassem as diferentes partes. Assim, ao analisar o episódio, comprovo que foi a decisão mais acertada. Os alunos conseguiram identificar ¼ e indicá-lo (§1, 2). Esta opção que tomei, em conjunto com a professora cooperante, uma vez que foi ela a indicar-me este material de apoio, é também justificada pela necessidade de sobrepor diferentes frações para que os alunos compreendessem o significado de equivalência de frações; conseguiram compreender que 2/4 equivale a ½ (§3, 4, 5, 6, 7).

A atividade desenvolvida pressupôs que, com diferentes partes de cada sector, uma unidade fosse construída (figura 11):

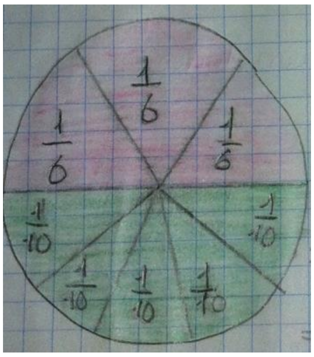


Figura 11 - Trabalho desenvolvido por Paulo

Para que o conceito de equivalência de frações fosse trabalhado, pedi aos alunos que transformassem numa expressão o que tinham representado e que encontrassem um outro caminho (equivalente) para o representar (figura 12):

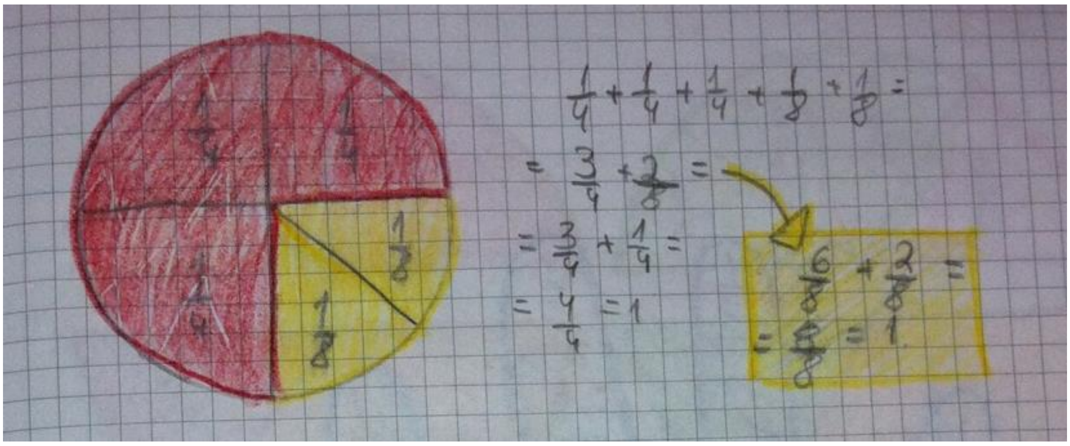


Figura 12 - Trabalho desenvolvido por Margarida

A incidência da sistematização desta aula recaiu sobre a equivalência de frações, onde foram anotadas no quadro vários exemplos de equivalências, bem como o seu significado.

Posteriormente, foram propostas 7 tarefas incluídas na segunda etapa da trajetória. Estas tarefas intitularam-se: “Maior, menor ou igual à unidade”, “Quanto passa da unidade?”, "Tampinhas do Carlos", "Das partes do todo", "As barras de chocolate", "Exploração da reta numérica" e "As bolas de pingue-pongue".

Para a tarefa "Maior, menor ou igual à unidade"[8] foram então traçados os seguintes objetivos:

- Comparar uma fração com a unidade;
- Conhecer o significado de numeral misto e representar números racionais não negativos como numerais mistos;

Com esta tarefa, os alunos ao terem em conta as frações da nuvem, tinham de as colocar no sítio correto (ver figura 13).

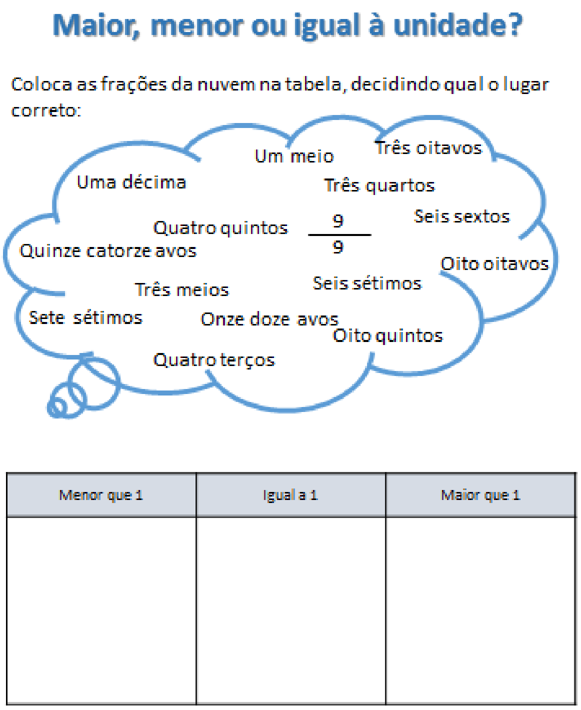


Figura 13 - Enunciado da tarefa "Maior, menor ou igual à unidade"

Com esta tarefa pretendeu-se introduzir o conceito de numeral misto, como acima referi. Nesta atividade os alunos tinham que comparar uma determinada fração com uma quantidade; tomando como exemplo 3/2: compreendemos que temos uma unidade, que é 2/2, mais ½. Então sabemos que é maior que uma unidade. Durante a exploração desta tarefa os alunos usaram como modelo de apoio *queijinhos*.

[8] Anexo 4

A sistematização desta tarefa incidiu sobre o conceito de numeral misto com o registo do conceito no caderno da disciplina.

Com a tarefa "Quanto passa da unidade ou quanto falta para a unidade"[9] pretendi que os alunos comparassem diversas frações com a unidade. Para esta tarefa tracei os seguintes objetivos:

- Comparar um número representado sob a forma de fração com a unidade;
- Interpretar uma unidade como um todo;
- Aprofundar o conceito de numeral misto.

Para apresentar a tarefa decidi partir de três exemplos: 8/5, 1/10 e 6/6 e informei os alunos que se sentissem necessidade podiam utilizar os *queijinhos* que tinham consigo. Escolhi-os porque um dos números é maior que a unidade, outro é menor e outro é igual. Um destes exemplos (8/5) fazia parte do enunciado da tarefa anteriormente explorada e, portanto, daria continuidade à atividade já iniciada. Comecei pela fração 8/5 e por colocar perguntas retóricas, ou seja, perguntas a que eu própria respondia para que os alunos compreendessem como proceder: "Qual é a minha unidade? São 5/5 então se tenho 8/5 não me falta nada para a unidade. Se a unidade são 5/5 e eu tenho 8/5, passa da unidade. Passa quanto? 3/5. Posso representar como numeral misto? Posso. Então tenho uma unidade mais 3/5, ou seja, 1 3/5". Fi-lo para que os alunos compreendessem como tinham de pensar para preencherem a tabela.

Apesar de terem sido abordados vários exemplos no quadro, durante a discussão coletiva, as intervenções dos alunos revelaram que persistiam dúvidas, como o episódio 3 permite ilustrar:

Episódio 3: Vem ao quadro explicar como fizeste

1. **Professora Joana:** Marta vem ao quadro explicar como fizeste.
2. **Marta M.:** [desenhou sectores circulares divididos em partes iguais no quadro e pintou-os com giz de cor diferente - figura 14] Eu desenhei terços até pintar sete terços então tenho uma unidade mais quatro terços.

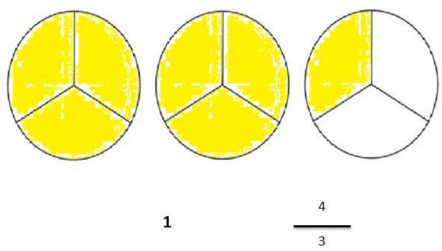


Figura 14 - Estratégia de Marta M.

[9] Anexo 5

3. **Gonçalo:** Eu não concordo!
   [mais alunos disseram o mesmo]
4. **Professora Joana:** Por que razão não concordas?
5. **Gonçalo:** Porque nós não preenchemos só uma unidade como foi com os outros exemplos. Aqui podemos pintar duas unidades completas e pintar só um terço [apagando o que a colega tem errado – figura 15].

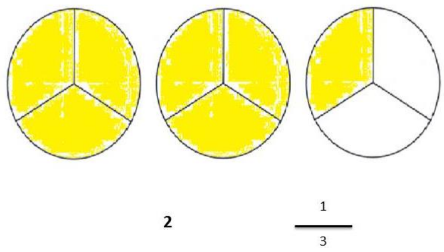


Figura 15 - Estratégia de Marta M. corrigida por Gonçalo

N.C.

Ao percorrer a sala enquanto os alunos trabalhavam autonomamente, detetei um erro na estratégia de uma aluna e pedi que fosse ao quadro expor a sua resolução (§1). Tomei esta decisão para que todos os alunos da turma tivessem contacto com o erro. Ao longo da apresentação da aluna optei por não intervir e esperei que fosse a turma a identificar o erro (§2). Quando Gonçalo expressou o seu desacordo relativamente à resolução da colega (§3) solicitei ao aluno que justificasse a sua posição esperando que por esta via, Marta e, eventualmente outros colegas, compreendessem por que é que a sua resposta não estava correta (§4).

A tarefa “As tampinhas do Carlos”[10], foi selecionada com a intenção de trabalhar a relações parte-todo e todo-parte e, também, o significado de operação enquanto operador (neste caso com grandezas discretas). Os objetivos delineados foram os seguintes:

- Compreender os significados de fração enquanto relação parte-todo e todo-parte e operador;
- Compreender que o denominador de uma fração corresponde ao número de partes em que a unidade foi dividida e que o numerador corresponde ao número de partes consideradas.

Esta tarefa dividiu-se em três questões: na primeira questão os alunos tinham que utilizar a fração como operador para construir a parte (figura 16); a segunda questão

[10] Anexo 6

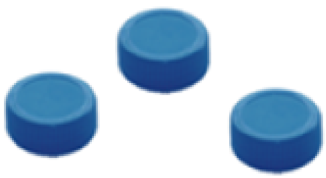
remete para o surgimento de frações equivalentes (figura 17); por fim, a terceira questão pede para reconstruir a unidade a partir de uma parte (figura 18).

O Carlos coleciona tampinhas de garrafas de água. Quando tinha 6 tampinhas perdeu um terço das tampinhas. Quantas tampinhas perdeu o Carlos?

Figura 16 - Enunciado da tarefa "As tampinhas do Carlos" – Parte I

O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fração das suas 12 tampinhas deu ao Carlos?

Figura 17 - Enunciado da tarefa "As tampinhas do Carlos" - Parte II



O Carlos continuou a colecionar tampinhas de garrafas de água. Passado algum tempo, três tampinhas correspondiam a um quarto do número total de tampinhas da sua coleção. Quantas tampinhas passou a ter o Carlos?

Figura 18 - Enunciado da tarefa "As tampinhas do Carlos" - Parte III

A relação parte-todo torna-se conflituosa em termos de mobilização de conhecimentos e, neste caso, a dificuldade estava acrescida tratando-se de trabalhar com unidades discretas. Assim sendo, foram distribuídas a cada par de aluno seis tampas de garradas de água. À semelhança de tarefas anteriores, os alunos podiam utilizar as estratégias que entendessem: desenhos, palavras, esquemas, cálculos ou materiais.

A primeira questão da tarefa pedia que os alunos retirassem 1/3 de 6 tampas de garrafas de água. Alguns alunos mobilizaram conceitos anteriores bem como materiais, tal como se pode verificar na figura 19:

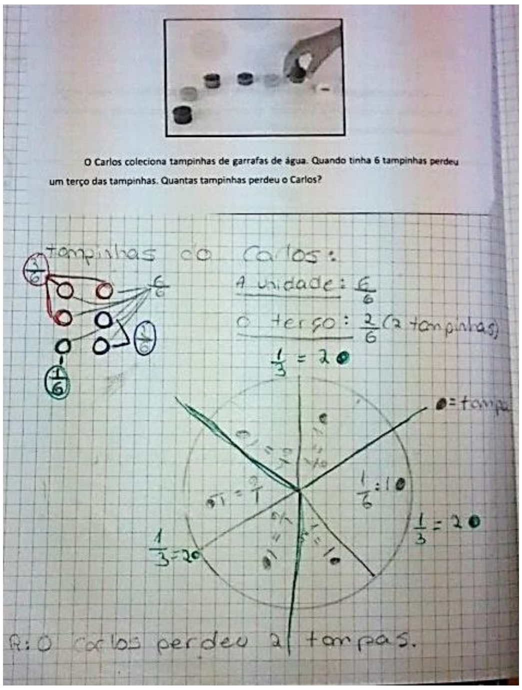


Figura 19 - Resolução de Gonçalo da tarefa "As tampinhas do Carlos" - Parte I

O aluno demonstrou com esta tarefa que a utilização dos setores circulares obtidos a partir da divisão equitativa de círculos iguais num diferente número de partes iguais, tornou-se num recurso de referência para explorar qualquer tarefa.

Ao conversar com o aluno, acerca da sua resolução esta demonstrou um grande à vontade e convicção no que estava a explicar e, de facto, o seu raciocínio estava correto. Podemos observar que mobilizou conhecimentos de tarefas anteriores ao explicitar que a unidade são 6/6 porque o Carlos tinha seis tampinhas. Em seguida, dividiu o seu sector circular em terços, sabendo que dois sextos são dois terços – equivalência de frações.

Este esquema fez-me perceber que a seriação da trajetória utilizada bem como da utilização e exploração das tarefas até este momento estavam adequadas ao contexto da turma.

Realço que, apenas apresentando um exemplo, pude constatar que quando o aluno foi ao quadro explicar o seu raciocínio, muitos alunos afirmaram ter utilizado estratégias semelhantes dando como justificação "porque me lembrei dos *queijinhos* e dos diferentes caminhos que podemos usar" – Alunas: Rita, Mariana e alunos Paulo, Hélder, Márcio e Tiago.

A segunda parte desta tarefa falava de 12 tampas de garrafas de água das quais 9 tinham sido oferecidas a um colega. Era pedido que os alunos encontrassem a fração das 12 tampas oferecidas. Para obterem 12 tampas de garrafas de águas, cada grupo de dois alunos juntou as suas tampas.

Ao circular pela sala, constatei que Rita não estava a conseguir resolver a segunda questão com a sua colega (episódio 4):

Episódio 4: Não estás a compreender…

1. **Professora Joana:** Rita, não estás a compreender…
2. **Rita:** Não professora. Não percebo como é que posso saber o que são as 9 tampas que ele deu e já usei as minhas e da Mariana [colega do lado de Rita]
3. **Professora Joana:** Vamos pensar as duas: temos 12 tampinhas, certo?

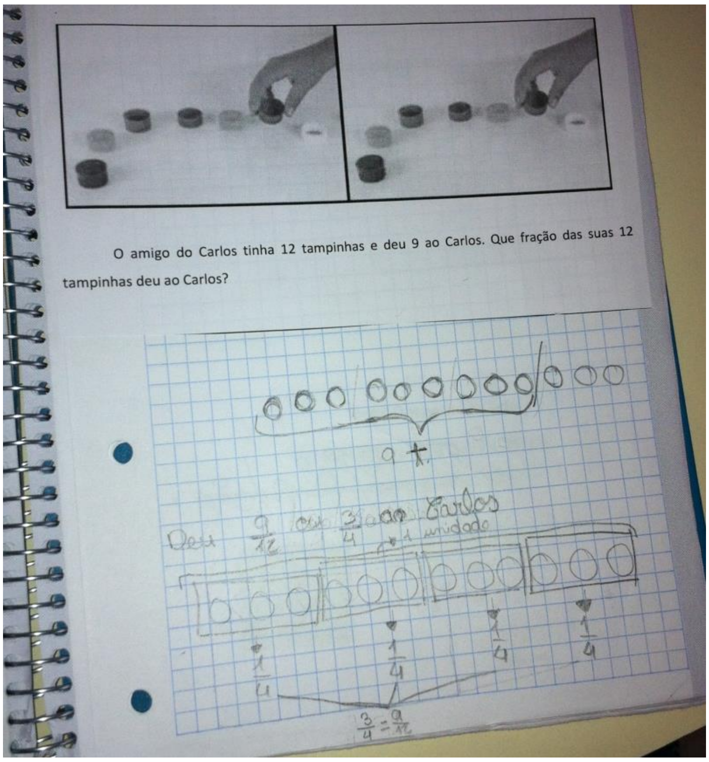


Figura 20 - Resolução de Rita da tarefa "As tampinhas do Carlos" - Parte II

E quero dar 9 ao Carlos. Então, vou dar-lhe 9 tampinhas do meu total que são…

4. **Rita:** 12 tampinhas! Já percebi… Mas a Mariana falou em três quartos…
5. **Professora Joana**: Calma… Ainda posso representar de outra forma… Então se eu as quisesse arrumar para dar ao Carlos como fazia? (silêncio) [peguei nos *queijinhos* de Rita, nos quartos e formei a quantidade] Eu tenho quatro quartos e tenho 12 tampinhas… Como as posso arrumar dentro de cada *queijinho*?
6. **Rita:** Podem ficar 3 tampas…
7. **Professora Joana:** Em cada quarto, muito bem! Então fico com três quartos…
8. **Rita:** Ocupados! E um quarto livre!

N.C.

Verifiquei que Rita não compreendia algo e decidi intervir (§1). Expliquei á aluna a relação entre um todo e uma parte (§3). Fi-lo para que a aluna compreendesse a necessidade de existir esta relação. A aluna queria utilizar outra fração para representar as tampinhas que tinham sido dadas ao Carlos, como lhe disse a sua colega. O facto de ter decidido dividir as tampinhas pelos *queijinhos* justificou-se por utilizar um material de referência e levar a aluna a pensar na divisão equitativa de um todo por diferentes partes (§5). A aluna compreendeu então que de um total de 12 tampinhas, 9 passaram a pertencer ao Carlos.

Nesta parte da tarefa foi necessário que tivesse de realçar algumas vezes que é importante haver uma relação entre uma parte e um todo, e um todo com uma parte; deste modo, os alunos compreenderam a relação entre o numerador e o denominador.

Por fim, a terceira parte, referenciava uma parte, 3 tampas, que correspondiam a ¼ do total e os alunos teriam de saber quantas eram as tampinhas no total. Aqui os alunos teriam de pensar em 3 tampas como uma parte de um todo que está dividido em 4 partes iguais, como lhes disse enquanto circulava pela sala e os alunos exploravam a tarefa.

O foco desta tarefa foi que os alunos compreendessem que o denominador corresponde ao número de vezes que a unidade foi dividida e o numerador ao número de partes escolhidas. Nesta tarefa foi importante realçar que tem de haver uma relação entre uma parte e um todo, e um todo e uma parte e foi sobre esse aspeto que incidiu a sistematização da aula.

A tarefa "Do todo às partes"[11] deu continuidade ao estudo da relação parte-todo e, por isso, os objetivos eram semelhantes aos da tarefa anterior.

A apresentação da tarefa foi realizada através da distribuição de um quadrado cor de laranja a cada aluno. Comecei por distribuir apenas a primeira parte da tarefa (figura 21) por considerar que poderia facilitar do trabalho dos alunos; focaram-se apenas numa questão da tarefa e trabalharam com algo em concreto, não apenas observando ou esquematizando no caderno, poderia favorecer o trabalho dos alunos.

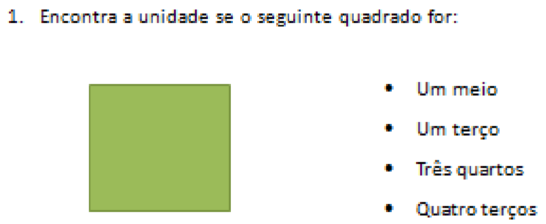


Figura 21 - Enunciado da tarefa "Do todo às partes" - Parte I

Na primeira alínea da tarefa, os alunos teriam de descobrir como seria a figura completa se o quadrado que tinham na mão correspondesse a um meio. Os alunos justificavam a sua resposta com algo muito simples "Se eu juntar o meu quadrado com o dele (colega do lado) temos a unidade porque sabemos que isto é metade" - Diana.

Em seguida, teriam de encontrar a restante figura se o quadrado representasse um terço.

Na terceira alínea desta tarefa pedi que os alunos representassem a unidade se o quadrado que tinham representasse ¾ da figura completa.

A quarta e última alínea, tratava o quadrado dos alunos como 4/3 e tinham que encontrar a unidade.

[11] Anexo 7

Este é um exemplo de resolução desta parte da tarefa por Gonçalo:

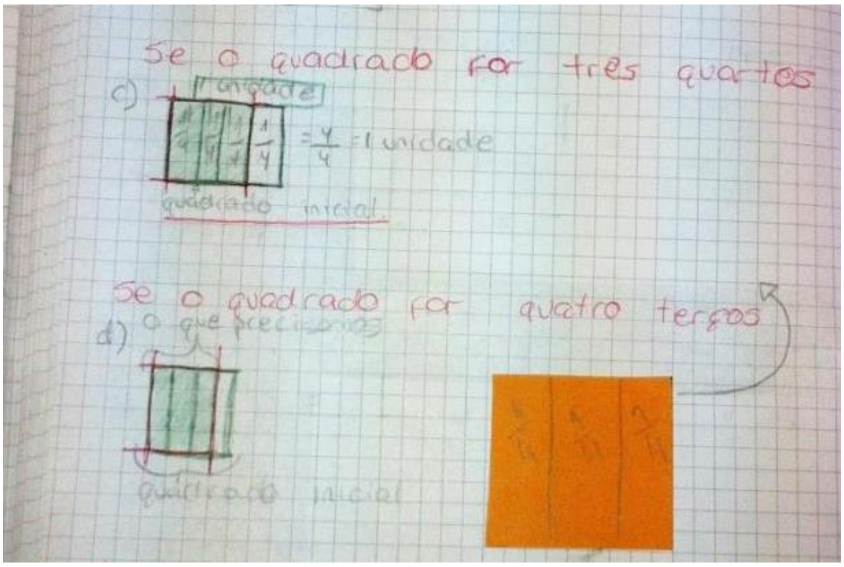


Figura 22 - Resolução de Gonçalo da tarefa "Do todo às partes"

Os alunos sentiram dificuldades na terceira alínea, como mostra o episódio 5:

Episódio 5: Não estou a perceber os três quartos

1. **Rita:** Professora não estou a perceber os três quartos. Com é que é possível este quadrado ser três quartos se é só um quadrado? Tenho que acrescentar eu quatro quadrados?
2. **Professora Joana:** Vamos pensar: aqui diz-nos que este quadrado que tens na mão representa três quartos. Antes de pensarmos no quadrado e na tarefa, desenha três quartos de alguma coisa [Rita desenhou quatro bolas e pintou três – Figura 23)]. Então temos três bolas pintadas de quatro. Qual é a tua unidade?
3. **Rita:** São quatro quartos.
4. **Professora Joana**: Então se formos pensar no nosso quadrado temos um quadrado que representa três quartos. Só o quadrado que tens na mão são os três quartos.

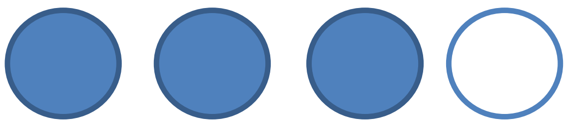


Figura 23 - Ilustração da estratégia de Rita referente a três quartos

5. **Rita:** Ah! Então podia dividir um quadrado [desenhou o quadrado] em três partes e depois só acrescento uma tirinha para serem os quatro quartos.

N.C.

O episódio 5 ilustra a minha opção ao mostrar à aluna um exemplo diferente para entender que o quadrado já representava três quartos (§2). Tomei esta decisão para que a aluna conseguisse compreender o que era pedido através de outro exemplo pois, considero que o professor deve tentar sempre encontrar outros exemplos, de forma a contornar a questão e possibilitar que a criança tenha outra visão da mesma situação.

A quarta alínea também gerou algumas dúvidas por um quadrado representar 4/3. Esta é uma parte delicada pois corresponde a algo que é mais do que o todo: “Professora isto *passa da unidade* porque se está dividida em terços isto podia ser um numeral misto”, disse-me um aluno. Aqui os alunos teriam de cortar ou riscar 1/3 do quadrado para que ficassem com 3/3.

Em seguida, foi distribuída a segunda parte da tarefa (figura 24) e dez molinhas de florista, que representariam rebuçados, a cada grupo de quatro elementos. As dificuldades previstas para esta parte foram referenciadas como sendo a passagem de algo contínuo (quadrado) para algo discreto (molinhas de florista) mas, ainda assim, não foram devidamente previstas na planificação da tarefa.

Figura 24 - Enunciado da tarefa "Das partes ao todo" - Parte II

Uma vez que os alunos já teriam tido a primeira experiência com este tipo de problemas, na primeira parte da tarefa, mobilizaram conhecimentos para a última parte, nomeadamente para as duas primeiras alíneas.

A tarefa “Barras de chocolate”[12] incidiu sobre as várias representações de quantidade cujo objetivo seria que os alunos recordassem como representar a mesma quantidade sob a forma de fração, numeral decimal, percentagem e numeral misto. A principal ideia a desenvolver era a de que existem

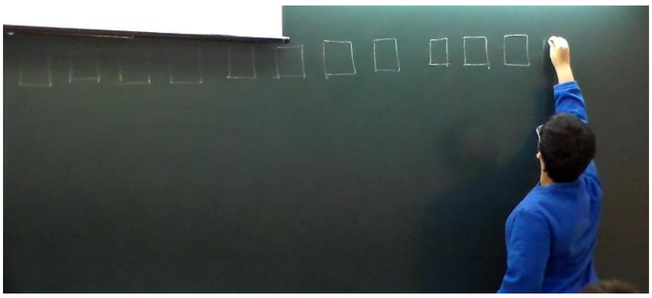


Figura 25 - Estratégia de Márcio sobre a tarefa "Barras de chocolate"

[12] Anexo 8

diferentes representações para a mesma quantidade: fração, decimal, percentagem e numeral misto.

Perante cada figura os alunos teriam de encontrar a sua representação sabendo que uma barra de chocolate era 1 unidade, 4/4 e 100%.

A tarefa "Exploração da reta numérica"[13] surgiu depois de terem sido trabalhados os sectores circulares obtidos a partir da divisão equitativa de círculos iguais num diferente número de partes iguais e as diferentes representações de quantidade nos números racionais: numeral decimal, percentagem, numeral misto e sob a forma de fração pois, a mesma, justifica-se pela capacidade de aliar todas estas aprendizagens, partindo de uma tarefa de referência para os alunos, "A visita de estudo e a distribuição de baguetes".

Para esta tarefa tracei os seguintes objetivos:

- Representar quantidades sob a forma de fração, numeral decimal e percentagem;
- Identificar a "reta numérica" como a reta suporte de uma semirreta utilizada para representar números não negativos;
- Representar números racionais não negativos na reta numérica;
- Reconhecer que frações com diferentes numeradores e denominadores podem representar o mesmo ponto na reta numérica;
- Ordenar números racionais utilizando a reta numérica;
- Representar números racionais não negativos como numerais mistos.

O trabalho com a reta numérica é complexo e de difícil compreensão por parte dos alunos. Para que esta ferramenta seja utilizada de acordo com a sua utilidade, é importante que os alunos desenvolvam um conjunto de ideias importantes:

- A representação na reta numérica permite-nos visualizar a ordenação de números;
- Entre dois números representados sob a forma de fração, decimal ou percentagem existem infinitos números;
- A reta numérica possibilita a ordenação dos números de uma forma organizada permitindo que seja mais fácil encontrá-los.

[13] Anexo 9

A introdução desta tarefa relacionou-se com a recordação da tarefa referência para os alunos com a reta numérica que já conhecem do 1º ciclo e com algumas tarefas de referência para os alunos, já trabalhadas no 5º ano. Decidi contextualizar a tarefa desta forma por uma questão de familiarizar os alunos com a reta numérica. Ao fazê-lo, parti de algo que os alunos já conheciam o que possibilitou uma boa abordagem inicial; todos compreenderam que era uma reta numérica e que iriamos ter que trabalhar com frações, fazendo a divisão das baguetes e marcando as frações ao longo da mesma.

A minha intenção ao abordar a tarefa desta forma era extrair o máximo de informação sobre o que os alunos já conheciam da reta numérica de anos anteriores e, com a imagem das baguetes, pude encadear a informação já existente (reta numérica – 1.º ciclo) com informação adquirida recentemente (tarefa de referência – 2.º ciclo).

Para se tornar mais fácil para todos os alunos puderem visualizar o que estava a ser feito e para todos caminharmos ao mesmo ritmo, foi colada no quadro a mesma representação de reta numérica, baguete e barra mas em tamanho superior (figura 26).

Figura 26 - Exposição da tarefa "Exploração da reta numérica" no quadro

Figura 27 - Exploração da tarefa "Exploração da reta numérica"

Em seguida, cada aluno tirou três cores: azul, verde e vermelho que, respetivamente, iriam marcar as metades, os quartos e os oitavos na sua reta numérica (figura 27). Eu fi-lo na reta exposta no quadro.

Nesta tarefa, as maiores dificuldades foram ao nível da marcação de quartos e oitavos. Perante esta dificuldade, disse aos alunos para irem dobrando a reta/ faixa/ baguete para irem marcando com as diferentes cores.

Para que o trabalho ficasse registado, coloquei algumas questões a que os alunos teriam de dar resposta oralmente e por escrito:

- Uma/ duas/ três/ quatro baguete(s) tem/ têm:
  a) Quantos meios?
  b) Quantos quartos?
  c) Quantos oitavos?

A última tarefa explorada na turma "As bolas de pingue-pongue"[14], incluída na segunda etapa da trajetória de aprendizagem, cujo título é "Da simbologia da fração ao sentido de número racional na forma de fração", será analisada detalhadamente na secção 3 deste capítulo.

2. A propósito da tarefa "A discussão do João e da Maria"

Através desta tarefa pretendeu-se que os alunos compreendessem que "a fração é uma relação entre dois números e que portanto, a quantidade que representa depende da unidade considerada" (Silva, 2012, p. 101). Os objetivos e ideias-chave traçados para esta tarefa foram os seguintes:

- Desenvolver o sentido de fração tendo em conta o todo e a parte;
- As partes fracionárias são partes iguais da mesma figura ou porções iguais da unidade;
- As partes em que se divide a unidade têm nomes especiais e "dizem-nos" quantas são necessárias para fazer a unidade;
- Quanto mais partes se usam para fazer uma unidade, mais pequena é cada parte;
- O denominador da fração indica em quantas partes foi dividida a unidade, de forma a produzir a parte pretendida logo, o denominador é o divisor e o numerador indica a parte considerada pelo que é um multiplicador;

[14] Anexo 10

- Duas frações equivalentes são dois “caminhos” para descrever a mesma quantidade usando diferentes partes fracionárias.

Nesta tarefa, era pedido que os alunos tentassem descobrir quem tinha comido mais: o João que comeu metade de um chocolate que o avô lhe deu ou a Maria que comeu um quarto de um chocolate (figura 28). O seu enunciado é familiar às crianças pois, no seu foro privado é natural que os avôs mimem os seus netos e as crianças identificam-se com esta ideia.

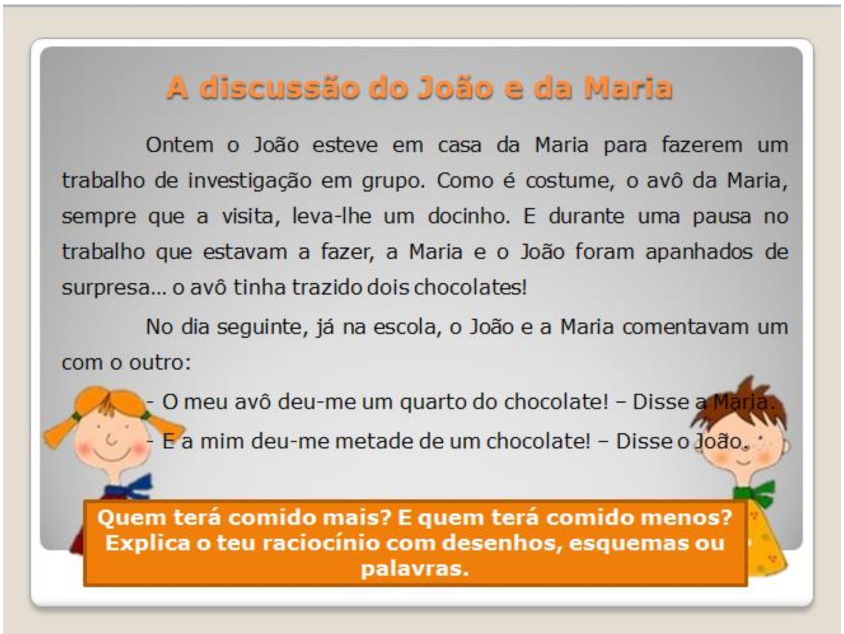


Figura 28 - Enunciado da tarefa "A discussão do João e da Maria"

A apresentação, exploração e discussão desta tarefa teve duração de uma aula de 90 minutos.

Preparação da atividade letiva

Considero imprescindível que um professor se prepare devidamente antes de conduzir uma aula e, neste caso, comecei por analisar um artigo relacionado com esta tarefa, consultei planificações e tive conversas informais com outras professoras da escola que já a haviam trabalhado; além disso, reuni com a professora cooperante e com a professora orientadora.

Para me preparar para a aula e de forma a antecipar as resoluções e ideias dos alunos, resolvi eu própria a tarefa e tomei nota de perguntas/ intervenções que considerei que iriam gerar uma boa discussão se colocadas à turma, em geral, ou a alunos em particular, focando os aspetos essenciais da tarefa. Concretamente, na minha planificação, anotei o seguinte:

1. Caso consideres que foi o João a comer mais, o mesmo acontece para qualquer caso?
2. Há colegas que dizem que a Maria poderá ter comido mais chocolate que o João; será possível? Como?
3. Não sabemos o tamanho do chocolate que o avô ofereceu, temos que pensar acerca disso.
4. Estão apenas a considerar chocolates iguais? E se fossem diferentes?
5. Será que há alguma forma de comerem a mesma quantidade de chocolate?
6. Porque é que ¼ de chocolate pequenino e ¼ de chocolate grande não é a mesma quantidade?

Decidi que, durante a fase do trabalho autónomo, os alunos seriam organizados em pares. Decidi, também, que as questões/ intervenções atrás apresentadas não seriam feitas junto de todos os pares, mas consoante o desenvolvimento do pensamento de cada aluno para que não fossem dadas demasiadas pistas sobre a tarefa e também porque nem todos os alunos tinham uma noção, mesmo que intuitiva, do conceito de fração.

O facto de o professor resolver a tarefa antes de a explorar com a turma beneficia a aprendizagem dos alunos na medida em que poderá antever muitas das suas estratégias e pode, inclusive, testar diferentes materiais de apoio e ver o que melhor se adequa.

Ainda durante a preparação desta aula, senti dificuldades em identificar como iria perceber, junto dos alunos, se se estavam a apropriar da ideia chave desta tarefa: quando se comparam frações, o todo importa. Uma das características desta tarefa é tratar-se de uma questão aberta porque apresenta mais do que uma possibilidade de resposta correta: (i) Maria come mais que João; (ii) João come mais que Maria; (iii) Maria e João comem o mesmo. Receei que os alunos não tivessem em conta o conjunto dessa possibilidade. Além disso, tinham pouca experiência relativamente à comparação de frações, mesmo quando o todo é o mesmo. Por exemplo, ainda não tinha sido trabalhado qualquer modelo de área.

Uma outra dificuldade que senti foi ao nível de recear dar demasiadas pistas e não deixar que fossem os alunos a seguir os raciocínios que consideravam adequados. Neste sentido, a professora cooperando ajudou-me.

Por fim, e como já é hábito, no fim da aula teria de haver um trabalho de casa que levasse a pensar, de novo, sobre o que havia sido feito. Como fruto da atividade que seria desenvolvida na aula, a professora cooperante pediu que o trabalho de casa fosse um parágrafo sobre as aprendizagens que cada um sentiu que adquiriu. Este trabalho de casa serviria para mim, para que pudesse compreender o meu papel na exploração desta tarefa e para a professora cooperante avaliar os alunos.

Apresentação da tarefa à turma

A apresentação da tarefa teve início com a projeção do enunciado e com leitura do mesmo por um aluno que, em seguida, o explicou à turma; eu concluí sublinhando que lhes era pedido que encontrassem uma solução para este problema, para colocar fim à discussão dos protagonistas deferidos no enunciado.

Considerei, também, importante disponibilizar aos alunos folhas brancas de tamanho A4. Estas folhas serviriam como material de apoio à resolução da tarefa e seriam entregues a cada par de alunos pois, de modo a facilitar a sua exploração.

Monitorização do trabalho dos alunos

Num primeiro momento de exploração da tarefa muitos dos alunos começaram por desenhar chocolates de tamanhos iguais e por representar a parte comida por Maria e a parte comida por João, um quarto e metade respetivamente. Na sua maioria, afirmaram que quem comeria mais era João justificando que metade de algo é sempre maior que um quarto.

Ainda assim, um par de alunas considerou que Maria havia comido mais pois, no seu esquema, o chocolate de Maria era maior do que o de João.

Ao circular pela sala observei que quase todos os pares tinham a mesma resposta, considerando que metade é sempre superior a um quarto independentemente do todo considerado, ou seja, parecia não terem consciência de que um quarto de algo apenas é superior a metade de algo se esse algo representar a mesma quantidade. Fiquei curiosa com este facto e decidi questionar os alunos se, a seu ver, João come mais do que Maria em qualquer circunstância. O episódio 6 ilustra a justificação apresentada por um aluno:

Episódio 6: Metade será sempre maior que um quarto?

1. **Professora Joana:** Por que razão consideras que metade será sempre maior que um quarto?

2. **Márcio:** Porque se desenharmos conseguimos ver que é maior e sabemos que se desenharmos uma piza [desenhou a piza], numa metade da piza cabem duas fatias [referindo-se a ¼].

Apesar de compreender a explicação de Márcio (§2) e desta estar correta, pois referia-se ao mesmo todo (uma pizza), ela era insuficiente para avançar na exploração.

Passei, então, a questionar os alunos, acerca de pontos que considero importantes na exploração da tarefa. Fi-lo com a intenção de querer analisar os seus raciocínios/ estratégias, quer de fazer surgir dúvidas quer lhes permitisse ir mais além.

O episódio 7 mostra algumas das conversas que fui tendo com diferentes alunos:

Episódio 7: O que fizeram?

1. **Professora Joana:** O que fizeram? Expliquem-me…
2. **Tomás:** Nós fizemos dois chocolates na folha e vimos que o João come sempre mais…
3. **Marta S.:** Mas nem era preciso fazer desenhos, um meio é mais do que um quarto.
4. **Professora Joana:** É sempre assim? Seja qual for o tamanho do meio e do quarto? (…) vocês desenharam estes chocolates, porque é que decidiram que era este tamanho?
5. **Marta S.:** Pois, podemos fazer diferentes…

(…)

6. **Margarida:** Professora eu já sei, o João come mais!
7. **Professora Joana:** De certeza? Há colegas teus que dizem que não… Acham que é a Maria que come mais…
8. **Margarida:** Oh professora não dá! Um quarto é menos [desenha uma pizza], neste meio cabem dois quartos…
9. **Professora Joana:** Essa pizza corresponde ao tamanho do chocolate?
10. **Margarida:** Sim, pode ser…

11. **Professora Joana:** E não pode ser diferente?
12. **Margarida:** Oh professora só se a metade fosse minúscula não é!
13. **Professora Joana:** É uma hipótese, sim! Pensa nisso… Até porque não sabemos o tamanho dos chocolate que o avô deu… (…) Oh Gonçalo será que há alguma maneira do João e da Maria comerem a mesma quantidade?
14. **Gonçalo:** Acho que não… [só tinha desenhado chocolates de tamanhos iguais]
15. **Professora Joana:** E se os chocolates fossem de tamanhos diferentes?
16. **Gonçalo:** Assim sim… [desenhou um chocolate grande e outro pequeno]

N.C.

Tomei a atitude de questionar os alunos sobre o seu trabalho para poder ter contacto com as suas resoluções (§1). Perante as suas respostas, senti necessidade de mobilizar questões pensadas durante a inventariação de intervenções/questões, ainda na preparação das aulas (§4, 7, 11, 13 e 15) para levar os alunos a ponderar todas as hipóteses de resposta.

A maioria dos alunos teve em conta as hipóteses que fui levantando. Durante o tempo em que circulei pela sala, dois captaram a minha atenção: ainda não tinham pegado na folha branca que lhes tinha sido distribuída. Este par dizia não compreender para que servia (episódio 8):

Episódio 8: Ainda não utilizaram a folha branca…

1. **Professora Joana:** Estou a ver que ainda não utilizaram a folha branca.
2. **Marta M.:** Não percebemos para que serve, podemos fazer desenhos no caderno.
3. **Professora Joana:** Sim, podem. Mas se preferirem podem utilizar a folha para a dobrarem e puderem comprovar aquilo que desenham. (…) O que desenhaste aqui Tiago?
4. **Tiago:** Desenhei o chocolate da Maria, que comeu um quarto do chocolate e ela desenhou o chocolate do João.
5. **Professora Joana:** Então, podem pegar nas vossas folhas para dobrar e perceber se está certo [referindo-me ao que desenharam].

N.C.

Ao abordar Marta M. e Tiago, tentei compreender por que razão ainda não tinham utilizado a folha branca (§1). Em seguida, expliquei-lhes a sua utilidade pois, pensei que poderiam não ter compreendido para que servia (§3). Depois de fazê-lo questionei Tiago (§3). Fi-lo para ter contacto com a estratégia do aluno e, perante a mesma, incentivei-o a utilizar a folha branca (§5).

Depois abordar este par, questionei-me acerca da importância da distribuição das folhas brancas e algumas dúvidas surgiram: será que ao entregá-las condicionei a atividade? Os alunos terão considerado que o tamanho de ambos os chocolates é o tamanho da folha? Estas eram algumas das questões que me inquietavam.

Discussão em grande grupo

Durante a monitorização da atividade dos alunos, selecionei e seriei os pares que iriam ao quadro apresentar as suas resoluções.

Decidi que seriam três pares de alunos, pela seguinte ordem:

1. Alunos com apenas uma hipótese de resposta: a Maria comeu mais chocolate;

2. Alunos com apenas uma hipótese de resposta: por considerarem os chocolates iguais: o João comeu mais chocolate;

3. Alunos com todas hipóteses de resposta: O João e a Maria comeram a mesma quantidade de chocolate; o João comeu mais chocolate; a Maria comeu mais chocolate.

Esta seriação prende-se com o facto de proporcionar uma evolução na organização do pensamento, diferentes tipos de resposta, respostas incompletas, para que no fim a resposta completa fosse explicada.

O quadro foi dividido em três partes e o primeiro par (Rita e colega) desenhou dois chocolates semelhantes aos representados na figura 29:

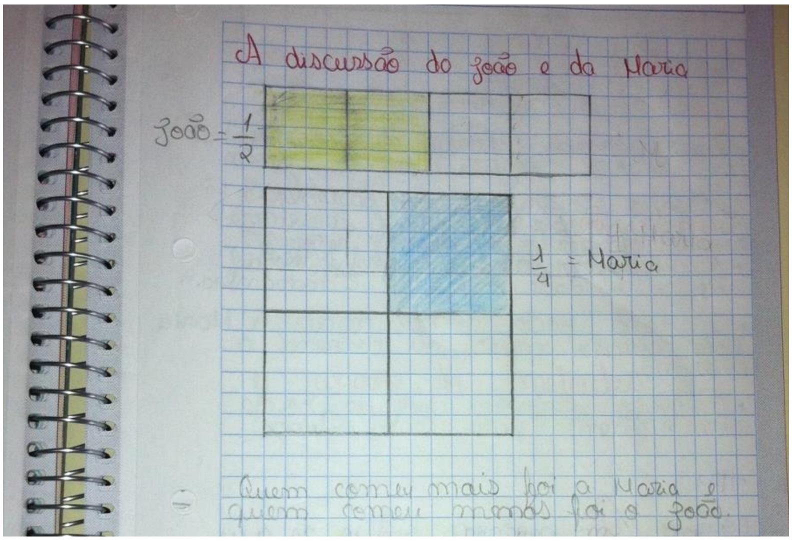


Figura 29 - Resolução de Rita e colega

Rita justificou o seu esquema afirmando: "*a Maria comeu mais porque o quarto dela era maior que a metade do João professora*". Com efeito, metade do chocolate de João corresponde a 32 (8 x 4) quadrículas e um quarto do de Maria a 36 (6 x 6).

O segundo par (Catarina e colega) desenhou dois chocolates com o mesmo tamanho e pintou um quarto do chocolate de Maria e um meio do chocolate de João. Este par usou a folha branca para representar os chocolates (episódio 9):

Episódio 9: Chocolates do mesmo tamanho

1. **Professora Joana:** Por que desenharam os chocolates do mesmo tamanho?
2. **Catarina:** Porque usamos as folhas que a professora deu… A minha folha [foi buscar a folha ao lugar] é o chocolate da Maria e a dele [do colega de mesa, seu par] é o chocolate do João.
3. **Professora Joana:** Então como usaram as folhas?
4. **Hélder:** Então, primeiro dobramos mas estava tudo mal dobrado e depois com a régua fizemos divisões mais ou menos certas e marcamos os quartos e o meio.

N.C.

Comecei por contactar com a estratégia dos alunos (§1). Quando ouvi a intervenção de Catarina (§2) pensei, uma vez mais, no papel das folhas brancas nesta tarefa a na sua utilidade, ou não, para apoiar a resolução da tarefa (§3).

Por fim, o último par (Gonçalo e colega) apresentou a sua resolução de acordo com o que tinham registado (figura 30). Usou a terceira parte do quadro onde desenhou chocolates de diferentes tamanhos e as diversas possibilidades de resposta. Saliento que este foi um dos pares a quem coloquei a questão "E se os chocolates fossem de tamanhos diferentes?".

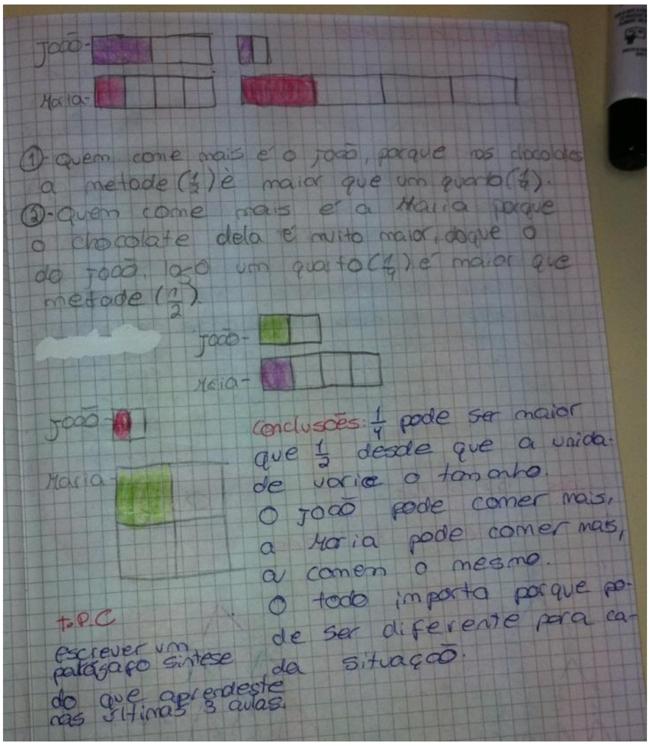


Figura 30 - Resolução de Gonçalo e colega

Depois de terem sido apresentadas no quadro todas as hipóteses de resposta, iniciamos uma discussão em grande grupo sobre as várias resoluções. O episódio 10 ilustra o início desta dinâmica:

Episódio 10: Não há apenas uma resposta para esta tarefa…

1. **Professora Joana:** Como podemos ver, não há apenas uma resposta para esta tarefa… Vamos pensar porquê… Vamos olhar para o quadro e tentar perceber…

2. **Gonçalo:** Professora, eu acho que sei…

3. **Professora Joana:** Deixa que os outros pensem um bocadinho Gonçalo. (…) Então?

4. **Diana:** Oh professora eu acho que é por causa dos chocolates, por exemplo: a Rita e a Mariana fizeram como se os chocolates fossem diferentes mas a Maria comia mais, depois a Catarina explicou aquilo da folha. Eu fiz como ela… Mas depois o Gonçalo fez muitos chocolate de tamanhos diferentes.

5. **Gonçalo:** Fiz porque achei que podiam ser diferentes…

6. **Márcio:** Sim, porque não sabemos o tamanho! Ninguém disse!

7. **Professora Joana:** Exatamente! Nunca foi dito o tamanho de nenhum chocolate; era de um chocolate. Podia ser um pequeno para o João, um grande para a Maria, ao contrário, ou dois iguais… Se o chocolate do João fosse mais pequeno que o da Maria e ele comesse metade, comida sempre menos mesmo que ½ seja maior que ¼ , percebem?

8. **Vários alunos:** Sim!

9. **Paulo:** Professora, eu pensei como a Catarina mas depois percebi que podiam ser diferentes… [o aluno pensou que podiam ser diferentes quando eu o remeti para essa possibilidade através da questão que coloquei].

10. **Professora Joana:** [ao reparar que Sérgio tinha uma expressão facial que denotava confusão] Então Sérgio? Está compreendido?

11. **Sérgio:** Mais ou menos… Eu não percebo porque é que um meio é menos que um quarto.

12. **Professora Joana:** Alguém quer explicar?

13. **Gonçalo:** Eu! (…) [levantou-se e foi ao quadro. Desenhou um chocolate pequeno e um chocolate grande] Se deste chocolate pequeno o João comer ½ ele vai sempre comer menos, é como se fosse aquele chocolate que compramos na gomaria… E se a Maria comer ¼ dos chocolates grandes que há no Continente come sempre mais porque é maior, mesmo que sobre mais chocolate porque ela só comeu ¼ .

14. **Professora Joana:** Isso mesmo! É precisamente isso…

N.C.

Com este episódio compreende-se que alguns alunos mobilizaram realmente a noção de fração o que ajudou compreender que um quarto é menor que metade, apenas se se considerar o mesmo todo, ou seja, chocolates iguais (§4, 5, 13).

As minhas intervenções ao longo do episódio tiveram vários propósitos. Em primeiro lugar pretendi que todos os alunos tivessem oportunidade para refletir sobre o que estava em discussão (§3). Esperava que, por esta via, todos conseguissem ter uma opinião ao invés de serem só os que tinham com mais facilidade. Em segundo lugar, redigo o que já tinha sido explicitado por Diana de modo a realçar uma ideia importante, a possibilidade de os chocolates terem tamanhos diferentes (§7).

Acreditando que aquilo que é trabalhado na sala de aula deve ser entendido por todos os alunos, observo as suas expressões faciais e tenho em atenção as suas intervenções. Neste caso, suspeitei que um aluno não acompanhava a discussão. Decidi dar-lhe a palavra por considerar que todos os alunos têm o direito de compreender (§10).

Nem sempre a linguagem usada pelos professores é clara para todos os alunos; além disso as dúvidas de alguns podem ser esclarecidas por colegas. Neste sentido, recorri à turma para que pudesse esclarecer Sérgio (§12). Decidi remeter para os alunos a responsabilidade de explicar aos colegas o que já tinha sido discutido e compreendido por alguns. Considero que foi uma boa opção. Com efeito, Gonçalo apresentou uma explicação clara, utilizando exemplos do dia-a-dia de Sérgio, o que eu não conseguiria fazer (§13). Este tipo de interações enriquece a discussão em grande grupo. Se não surgisse uma explicação clara e correta eu interviria. Neste caso, não foi necessário (§14).

No fim da discussão, foi colocada uma questão com o intuito de realçar a ideia chave desta tarefa (episódio 11):

Episódio 11: De que depende a nossa resposta?

1. **Professora Joana:** O que podemos compreender com a discussão do João e da Maria? De que é que depende a nossa resposta?

2. **Alguns alunos:** Do tamanho do chocolate professora!

N.C.

Depois de concluída a discussão, foram anotadas no quadro as ideias chave associadas à exploração desta tarefa referidas pelos alunos e todos as copiaram para o caderno (figura 31):

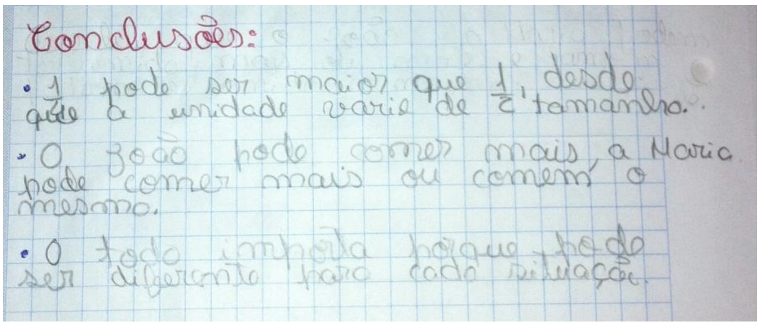


Figura 31 - Conclusões da tarefa "A discussão de João e Maria"

Por fim, e como sistematização da atividade desenvolvida, reforcei e completei as ideias apresentadas pelos alunos de modo a realçar:

1. As partes fracionárias são partes iguais da mesma figura ou porções iguais da unidade;

2. As partes em que se divide a unidade dizem-nos quantas são necessárias para fazer a unidade;

3. Quanto mais partes se usam para fazer uma unidade, mais pequena é cada parte.

4. O todo importa.

No que diz respeito às perguntas colocadas, penso que focaram os aspetos essenciais da tarefa conduzindo assim ao desenvolvimento da tarefa e, consequentemente, a uma discussão com o contributo dos alunos e com vários esquemas representativos. Durante a exploração autónoma da tarefa pelos alunos, considerei importante percorrer as mesas ouvindo as ideias dos alunos, levando-os a explicitar as suas ideias pois, ao verbalizar aquilo que esquematizam estão a organizar o seu pensamento e a desenvolver o raciocínio matemático. Valorizei sempre as suas intervenções e tive em consideração as suas dúvidas fornecendo-lhes as chamadas "pistas" sobre a tarefa.

Considero que o facto de serem os alunos a ler o enunciado da tarefa e a explicarem o que leram torna a aula interativa e benéfica na medida em que contribui para que os alunos aprendam a ouvir diferentes vozes, diferentes tons, a preocupar-se com as intervenções dos colegas, a corrigi-los quando não concordam com o que está a ser dito.

No que diz respeito às decisões tomadas, às questões colocadas, estas devem-se a preocupações pessoais no que diz respeito à exploração de todos os pontos poderosos desta tarefa que iniciou todo o trabalho no que diz respeito á relação parte-todo. O facto de organizar a turma em pares possibilita que alunos com um maior nível de aproveitamento auxiliem os alunos com mais dificuldades até porque, como já referi, a disposição da sala feita pela professora cooperante e diretora de turma, foi criteriosamente pensada com esse intuito.

Considero que os alunos, inclusive os com um maior nível de dificuldade, se começaram a apropriar de ideias importantes sobre frações.

Esta é uma tarefa que, sendo apresentada no início do estudo das frações, poderá ser desafiante para os alunos a vários níveis.

Normalmente, em matemática, só há uma resposta correta. Para esta tarefa existiam três respostas possíveis a serem discutidas o que, à partida, pode não ser considerado pelos alunos. As dificuldades que sentiram nesta tarefa poderão também ser explicadas pelo sentido de fração. Ao estarem habituados a trabalhar apenas com números naturais, é confuso para os alunos e gera imensas dúvidas e dificuldades haver uma relação entre dois números (numerador e denominador). Por fim, o facto de ainda não ter sido trabalhado nenhum modelo de área com a turma dá aso a dúvidas e a terem como referência as "pizas" como foram referindo ao longo da exploração do assunto.

Desafios

Fazendo um balanço da atividade desenvolvida, considero que esta tarefa tem várias potencialidades no que diz respeito ao trabalho e à compreensão, pelos alunos, do conceito de fração.

No entanto, confrontei-me com vários desafios.

Quando preparei a aula considerei que a folha branca seria útil para apoiar a atividade desenvolvida pelos alunos só que foi utilizada em demasia por alguns pares ou nada por outros. A situação não correspondeu ao que esperava; alguns pares consideraram que o tamanho das folhas era o tamanho dos chocolates dos protagonistas da tarefa. Outros preocuparam-se em representar os chocolates no seu caderno e a colorir as diferentes partes.

Durante a monitorização do trabalho dos alunos tentei percorrer todos os pares algumas vezes para conseguir anotar as suas resoluções e, se necessário, auxiliá-los.

Neste âmbito, coloquei a todos os pares a questão crucial desta tarefa: "E se os chocolates fossem de tamanhos diferente?". Foi importante pensar nesta questão durante a preparação da aula. Fi-lo a propósito das minhas dúvidas e inquietações. Contudo, durante a aula, deveria ser feito, sim, se necessário durante a discussão. Na altura, foi complicado enveredar por outro caminho. Considero que não a coloquei no tempo certo.

Só posteriormente, e em conversa com a professora cooperante, é que compreendi que as minhas intervenções nesta tarefa foram em demasia o que condicionou a exploração da tarefa. A questão que coloquei tornou a discussão, em grande grupo, menos rica. Mesmo tendo-a colocado a todos os pares houve alguns que não consideraram todas as possíveis respostas à tarefa.

Um dos pontos que considerei menos positivos na exploração da tarefa foi o papel que desempenhei; esse foi o meu maior desafio. Não contive a minha ansiedade de professora e dei demasiadas pistas sobre a resolução da tarefa, empobrecendo a discussão, como já referi. Um professor não pode ser colocado no centro das aprendizagens, deve dar a voz aos alunos, deixa-los interagir gerindo sempre a sua participação.

Com efeito, no final da aula, pedi a cada aluno que, como trabalho de casa, escrevesse em três ou quatro linhas o que tinha aprendido nas últimas aulas.

Para mim, professora da turma, o maior desafio ainda é o não saber o que dizer ou fazer perante dúvidas ou inquietações dos alunos. Tudo acontece no momento e é aí que temos de dar uma resposta assegurando sempre que está correta e dá-la para que chegue a todos os alunos.

3. A propósito da tarefa “As bolas de pingue-pongue”

A última tarefa apresentada à turma, designada “As bolas de pingue-pongue”, foi explorada durante quatro aulas lecionadas nos dias 22, 24, 28 e 30 de abril de 2014. Esta tarefa insere-se na etapa da trajetória de aprendizagem intitulada: (ii) Da simbologia da fração ao sentido de número racional na forma de fração, como foi referido no capítulo 3. Surgiu para terminar o trabalho conduzido por mim com supervisão da professora cooperante e teve como principais objetivos:

- Compreender e utilizar um número racional como relação parte-todo;
- Reconstruir a unidade a partir das suas partes;
- Utilizar as frações para designar grandezas formadas por um certo número de partes equivalentes a uma que resulte de divisão equitativa de um todo;
- Desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações.

Esta tarefa é composta por duas partes. A primeira consiste na observação de uma imagem que representa um pacote de bolas de pingue-pongue com as respetivas bolas ao seu redor. Seis bolas são amarelas e duas bolas são brancas (figura 32):

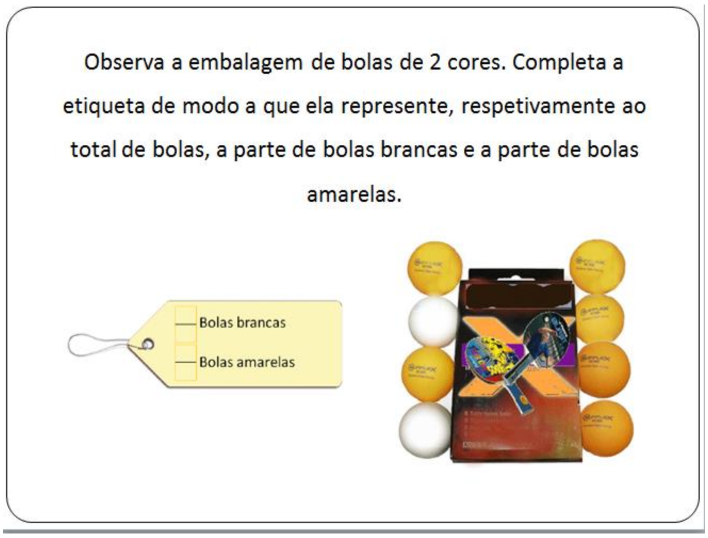


Figura 32 - Enunciado da tarefa "As bolas de pingue-pongue" – Parte I

Os alunos terão de completar a etiqueta representando, sob a forma de fração, a quantidade de bolas amarelas e brancas.

Na segunda parte os alunos terão de encontrar o número de bolas brancas e amarelas que poderá ter uma embalagem, sabendo que 1/5 dessas bolas são brancas e as restantes amarelas (figura 33).

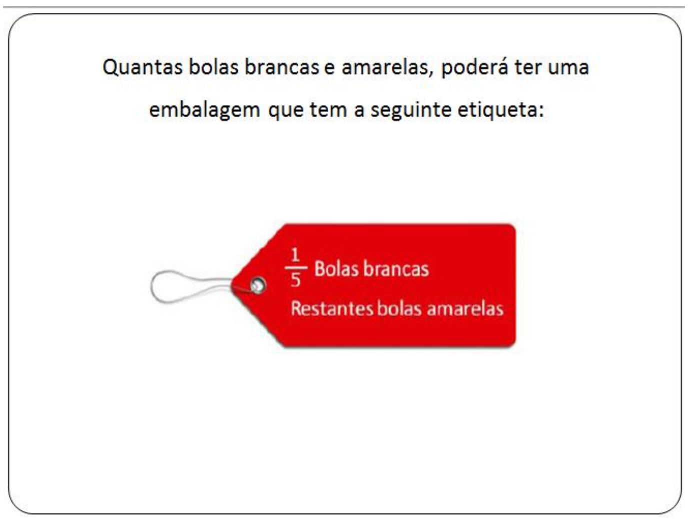


Figura 33 - Enunciado da tarefa "As bolas de pingue-pongue" - Parte II

Nesta segunda parte, o objetivo é que os alunos consigam pensar na generalização da tarefa, ou seja, identifiquem uma expressão que permita denominar o número de bolas brancas de cada cor, seja ela qual for.

Na realização desta tarefa foram utilizados os materiais de cada aluno, computador, projetor e tela e cartolinas brancas.

O enunciado da tarefa foi projetado na tela faseadamente e os alunos copiaram-no. Começaram por copiar a primeira parte, em seguida resolveram-na, a mesma foi alvo de discussão e só depois passaram para a segunda parte da tarefa.

Preparação da atividade letiva

No que diz respeito à preparação das quatro aulas comecei por resolver a tarefa enquanto professora e, em seguida, enquanto aluna para que conseguisse antecipar as respostas dos alunos, preparar perguntas a serem colocadas no decorrer da aula e identificar sugestões a apresentar, se necessário, aos alunos nos momentos em trabalhavam autonomamente.

Algumas das estratégias de resolução que identifiquei, para a primeira parte da tarefa, está representada na figura 34:

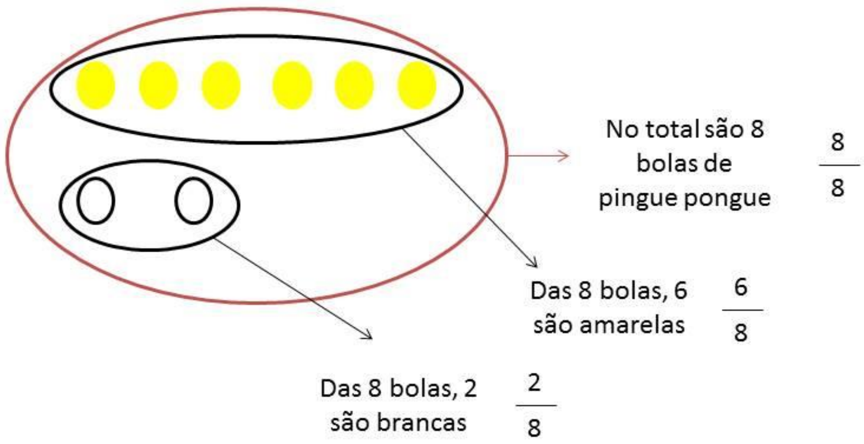
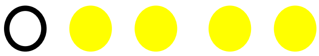
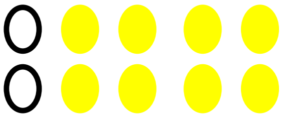
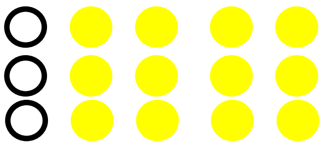


Figura 34 - Possível referência da tarefa "As bola de pingue-pongue" - Pate I

Para a segunda parte da tarefa, registei na planificação a tabela 6:

Tabela 6- Exemplos de resolução da tarefa "As bolas de pingue-pongue" – Parte II

Nº total de bolas na embalagem	**Bolas brancas (1/5)**	**Bolas amarelas (4/5)**
5 	1 Ou 1/5 x 5 = 1	1 + 1 + 1 + 1 = 4 Ou 4 x 1 = 4 Ou 4/5 x 5 = 4
10 	1 x 2 = 2 Ou 1/5 x 10 = 2	2 + 2 + 2 + 2 = 8 Ou 4 x 2 = 8 Ou 4/5 x 10 = 8
15 	1 x 3 = 3 Ou 1/5 x 15 = 3	3 + 3 + 3 + 3 = 12 Ou 4 x 3 = 12 Ou 4/5 x 15 = 12

Ainda na preparação da aula, surgiu a necessidade de ser abordada a generalização da tarefa para que os alunos pudessem testar a tarefa com infinitos números (tabela 7).

Tabela 7- Exemplo de resolução da generalização da tarefa "As bolas de pingue-pongue"

Nº total de bolas na embalagem	Bolas brancas (1/5)	Bolas amarelas (4/5)
n	1/5 x n	4/5 x n

Qualquer coleção de bolas que se pretenda considerar

Ao resolver a tarefa compreendi que, em qualquer das duas partes, os alunos trabalhavam com unidades discretas o que poderia trazer algumas dificuldades. A segunda parte tinha um maior grau de desafio pois os alunos teriam que considerar um qualquer número de bolas. Uma das possíveis dificuldades era algum grupo descobrir apenas uma estratégia e não pensar em mais possibilidades; outra dificuldade era na discussão e apresentação do cartaz à turma.

Para que nenhuma das potencialidades da tarefa se perdesse, aconselhei-me junto a professora cooperante e da professora orientadora deste projeto. De modo a complementar informação, conversei com outros professores que haviam trabalhado esta tarefa com os seus alunos e recorri às planificações de um deles.

Durante a reunião semanal de preparação das aulas com a professora cooperante formulei algumas questões/ intervenções para enriquecer as discussões coletivas das resoluções dos alunos quando surgisse necessidade:

1. O que podemos dizer sobre as frações deste cartaz? O que representam?
2. O que nos indica o numerador? E o denominador?

Por último, optei por propor que a exploração da tarefa fosse feita em grupos pelo que os alunos formaram cinco grupos constituídos por 4 ou 5 elementos cada, consoante a sua distribuição em sala de aula. Tomei esta última decisão porque a professora cooperante distribuiu os alunos de maneira a que um aluno com um bom aproveitamento ficasse junto de outro com mais dificuldades para promover a entreajuda. Deste modo, em cada grupo haveria um aluno com mais dificuldades, dois alunos razoáveis e um aluno com um bom aproveitamento. A professora cooperante concordou com os grupos assim formados que integraram os seguintes elementos:

- Grupo 1 – Gonçalo, Catarina, Paulo e Sérgio;
- Grupo 2 – Margarida, Marta M., Flávio, Daniela e Hélder;
- Grupo 3 – Mariana, Rita, Rodrigo e Bruno;
- Grupo 4 – Ângela, Érica, Diana e Cláudio;
- Grupo 5 – Marta S., Sofia, Tiago, Tomás e Márcio.

Primeira parte da tarefa

Apresentação da tarefa "As bolas de pingue-pongue" à turma

À semelhança de tarefas anteriores, na apresentação da tarefa pedi que fosse um aluno a ler o enunciado da primeira parte da tarefa (episódio 12):

Episódio 12: Vamos ler…

1. **Professora Joana:** Diana vamos ler. (…) O que é que temos de fazer?
2. **Diana:** Temos que completar a etiqueta de acordo com a imagem.

3. **Professora Joana:** É como se estivéssemos a arrumar a nossa caixa de bolas de pingue-pongue e colássemos uma etiqueta para saber quantas bolas estavam; aqui temos que representar em fração a nossa quantidade de bolas amarelas e brancas.

T.A.[15]

Decidi que na apresentação da tarefa tentaria envolver os alunos apelando à sua experiência. Com efeito, é normal que estes arrumem os seus materiais e, neste caso, disse à turma que imaginassem que eram eles a arrumar as suas bolas de pingue-pongue e para saberem quantas bolas tinham que etiquetar a caixa (§3).

Os alunos começaram por copiar a etiqueta para o caderno e por resolver a tarefa em grupos, sabendo que, posteriormente, as suas resoluções iriam ser discutidas na turma.

Monitorização do trabalho dos alunos

Enquanto os alunos trabalhavam em grupo, circulei pela sala com o objetivo de tentar compreender as suas estratégias de resolução bem como os argumentos que usavam para explicar e justificar as suas ideias.

Durante a monitorização do trabalho dos alunos e em consonância com a professora cooperante, optei por me centrar nos que me parecia terem mais dificuldades. Tomei esta decisão por notar que estes alunos estavam um pouco de parte na atividade que era desenvolvida no âmbito do seu grupo e quis entender se tinham compreendido o enunciado. Tomás e o colega são dois destes alunos e o episódio 13 é ilustrativo do modo como agi:

Episódio 13: Explica-me o que estão a fazer…

1. **Professora Joana:** Tomás explica-me o que estão a fazer se fazes favor…
2. **Tomás:** Então temos as bolas de pingue-pongue (…) Temos 6 bolas amarelas e 2 bolas brancas
3. **Professora Joana:** No total temos quantas bolas?
4. **Tomás:** 8
5. **Professora Joana:** Então o que é que temos de saber? Qual é a fração das bolas brancas, certo? E amarelas. Temos que começar por perceber em quantas partes vamos dividir a nossa unidade, que são 8 bolas, para depois sabermos a que parte se refere as 6 e as 2 bolas.

T.A.

[15] T.A. – Transcrições de aulas

Como ilustra o episódio, comecei por pedir para explicar o que estavam a fazer (§1). Em seguida, foquei a atenção dos alunos na unidade a considerar (§2) para tentar ajudá-los a avançar (§3).

Quando todos os grupos terminaram a exploração da primeira parte da tarefa, conversei com a professora cooperante sobre qual a melhor forma de delinear a discussão coletiva. Por uma questão de gestão de tempo e porque as estratégias de resolução não matematicamente diferentes decidimos que o melhor seria centrar-me num grupo e dar a palavra a um aluno desse grupo.

Discussão coletiva

Como evidencia o episódio 14, solicitei a um aluno de um grupo que explicasse como o seu grupo chegou à conclusão final:

Episódio 14: Discussão da primeira parte da tarefa

1. **Professora Joana:** Vamos começar a ver os trabalhos dos grupos. Grupo do Gonçalo, Catarina, Paulo… Vamos ver como pensaram; tínhamos uma caixa com bolas de pingue-pongue e…
2. **Gonçalo:** Então a caixa tinha 8 bolas [desenha as bolas no quadro] em que duas eram brancas e seis eram amarelas – não há giz amarelo – e nós tínhamos que saber em fração quanto representava as bolas amarelas e brancas. Então as bolas brancas dois oitavos [regista no quadro] porque a nossa unidade está dividida em 8 partes iguais e nós temos duas pintadas, ou seja, é dois de oito por isso é que é dois oitavos ou podia ser também ¼ porquê? Porque um quarto vezes dois é dois oitavos, ou seja, dentro de um quarto cabia dois oitavos como nós já tínhamos visto com os queijinhos.
3. **Professora Joana:** Não… um quarto vezes dois não são dois oitavo… Peguem nos queijinhos! [desenhei no quadro dois quartos e um oitavo] o que vimos foi que duas vezes um oitavo cabiam dentro de um quarto. Correto?
4. **Turma:** Sim!
5. **Gonçalo:** Ah sim, é isso! Expliquei mal mas eu sabia…
6. **Professora Joana:** Toda a gente compreendeu as bolas brancas?
7. **Gonçalo:** Agora, com as amarelas nós tínhamos seis oitavos porque nós tínhamos 6 bolas de oito que era a nossa unidade e também podia ser três quartos.
8. **Professora Joana:** Dúvidas? Quem concorda, quem não concorda? Comentários? (…) Sérgio?
9. **Sérgio:** Ainda não percebi aquela parte ali [apontando para as bolas amarelas].
10. **Professora Joana:** Ainda não percebeu as amarelas. Gonçalo?

11. **Gonçalo:** [Apaga os registos que entretanto fez nas bolas de pingue-pongue desenhadas] A nossa unidade, a caixa (…) Vamos imaginar que nós comprámos uma caixa e tirámos as bolas e tinha 8 bolas que é a nossa unidade. E se nós tínhamos 6 bolas amarelas – que neste caso são as pintadas – nós temos 6 bolas amarelas e 2 brancas mas a unidade toda são 8 bolas por isso as bolas amarelas são 6 bolas de oito.
12. **Professora Joana:** São 6 de oito que é o total, 8 partes.
13. **Sérgio:** Já percebi!

T.A.

Analisando o episódio 14, constata-se que Gonçalo utiliza argumentos matemáticos corretos. Constata-se, também, que o aluno para justificar uma ideia que apresentou recorre a um material de referência para a turma, os *queijinhos*, embora o que diz não esteja matematicamente correto (§2) por sua palavra "expliquei mal" (§5).

Perante a explicação errada de Gonçalo, decidi solicitar à turma que pagasse nos *queijinhos* para verificarem que 2/8 é equivalente a ¼ (§3).

Este episódio ilustra o modo como conduzi este momento da aula; passei a palavra a um bom aluno com um esquema elucidativo que estava claro e correto.

Mais tarde, interpelei Sérgio (§8), um aluno com dificuldades, por notar na sua expressão facial que algo não estava completamente claro. Quando referiu não ter percebido uma parte da apresentação (§9) decidi dar, de novo, a palavra a Gonçalo (§10). Decidi tomar essa atitude porque se foi Gonçalo a explicar algo e se esse algo suscitou dúvidas é ele que o deve explicar.

A figura 35 mostra como Rita resolveu a tarefa, tal como a maioria dos alunos o fez:

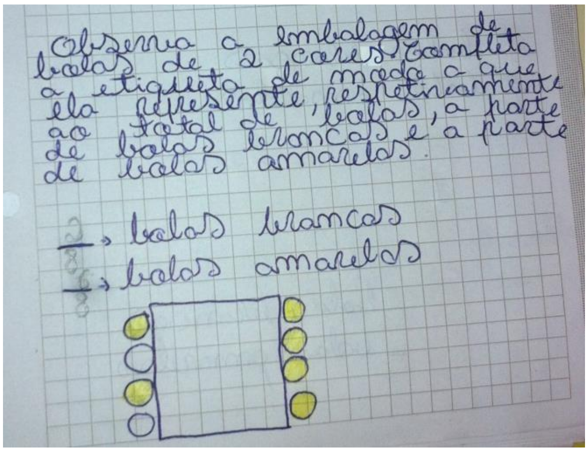


Figura 35- Resolução de Rita da tarefa "As bolas de pingue-pongue" – Parte I

Segunda parte da tarefa

Apresentação da tarefa "As bolas de pingue-pongue" à turma

À semelhança da primeira parte da tarefa, a segunda parte foi projetada na tela e os alunos copiaram o seu enunciado para o caderno. Solicitei que fosse um aluno a ler o enunciado e que depois o explicasse à turma.

Monitorização do trabalho dos alunos

No que diz respeitos à exploração autónoma pelos alunos da segunda parte da tarefa, as dificuldades que antecipei na planificação da aula revelaram-se em alguns grupos. Como tinha percebido, alguns alunos consideraram que só poderiam ter 5 bolas, já que o enunciado referia quintos. O episódio 15 é ilustrativo deste facto:

Episódio 15: Só 5 bolas?

1. **Professora Joana:** Este quinto quantas bolas são?
2. **Daniela:** São 5 bolas.
3. **Professora Joana:** Só?
4. **Margarida:** Não, pode não ser.
5. **Professora Joana:** Então explorem essa ideia, discutam-na! Vejam quem tem razão grupo! Porque se eu tiver um queijinho [desenhei um círculo na folha de rascunho do grupo] posso colocar dentro de cada quinto as bolas que me apetecer… pensem nisso…

T.A.

As minhas intervenções nesta fase da aula (§3 e 5) tiveram por intenção incentivar os alunos a avançarem no seu raciocínio. Assim que acabei de fazer a segunda tive receio que tivesse constrangido as potencialidades da tarefa por ter sugerido que poderiam por no sector circular quantas bolas quisessem (§5). No entanto, isto não aconteceu. As alunas continuaram a debater-se com o caminho a seguir.

No decorrer da exploração da tarefa pelos vários grupos de alunos não me preocupei, exclusivamente, com as estratégias que usavam, tive em conta também o funcionamento de cada grupo, bem como as intervenções de cada aluno para que pudesse anotar tópicos que fossem valorizar e enriquecer a discussão em grande grupo, como ilustra o episódio 16:

Episódio 16: Afinal podemos encontrar mais…

1. **Professora Joana:** Acho melhor começarem a explicar porque eu não sei se o Tiago e o Tomás estão a perceber; isto é um trabalho de grupo.
2. **Professora cooperante:** Vocês consideraram que…
3. **Marta Solas:** Eram 5 bolas e que uma era bola branca, em 5.
4. **Professora Joana:** Mas agora a que conclusão estão a chegar?
5. **Sofia:** Afinal podemos encontrar mais.
6. **Professora Joana:** Porquê?
7. **Sofia:** Porque…
8. **Márcio:** O que ela está a tentar explicar é que nós fizemos em quintos mas havia outra maneira que era em décimos e assim há *bués*.
9. **Professora Joana:** Há *bués*? Como é isso?
10. **Márcio:** Há o 20, o 40,… [aqui refiro-me ao número de bolas que pode ter o pacote]
11. **Professora Joana:** Então quantas bolas é que podem considerar?
12. **Márcio:** Um quinto e décimos.

    (…)
13. **Professora Joana:** E só pode ser essa a unidade? [referindo-me ao número de bolas da embalagem] (…) Só? (…) Sofia só? (…) O que achas? O que vocês acham? (…) Há dúvidas?
14. **Tiago:** Eu não sei se há com 20.
15. **Professora Joana:** Então vão lá ver, vá! (…)
16. **Márcio:** *Opá* fazemos de 3 maneiras: 5, 10 e 15.

T.A.

A análise do episódio permite destacar que a primeira intervenção que fiz prendeu-se com o funcionamento do grupo. Como pareceu que dois alunos não estavam a compreender a atividade e estavam um pouco à parte do trabalho desenvolvido, salientei a importância de todos os elementos serem integrados no trabalho, como me preocupei em fazer com os outros grupos (§1).

Além disso, optei por não corrigir a intervenção de Márcio (§12) por considerar pertinente para a discussão em grande grupo por verificar que o aluno mobilizou conhecimentos que havíamos discutido em aulas anteriores quando explorámos os *queijinhos*; verificámos que 1/10 não são 2/5 mas confundiu-se um pouco. O que Márcio quis referir foi a utilização de uma embalagem com dez bolas como unidade, isto é, duas bolas seriam 1/5 de 10 e não 1/10 de 10.

Ao circular pela sala, comprovei que o que os alunos indicavam eram frações equivalentes a 1/5 e não a quantidade de bolas que a embalagem poderia ter, ou seja, um número múltiplo de 5. O episódio 17 é ilustrativo deste facto:

Episódio 17: Então expliquem-me!

1. **Gonçalo:** Acho que já chegamos a uma conclusão.
2. **Professora Joana:** Já?
3. **Gonçalo:** Já, há infinitas maneiras!
4. **Professora Joana:** Então expliquem-me!
5. **Gonçalo:** Nós fizemos 1/5 é igual a 2/10 e 2/10 é igual a 4/20 e 4/20 é igual a 8/40 e isto é igual a 16/80 e assim…
6. **Professora Joana:** E porque é que pegaram ali nos dois décimos?
7. **Gonçalo:** Porque um quinto é dois décimos.
8. **Professora Joana:** Quantas bolas?
9. **Gonçalo:** Uma bola branca e quatro amarelas.
10. **Paulo:** Mas eu não concordo!
11. **Professora Joana:** O que é que pede a tarefa?
12. **Paulo:** Quantas bolas brancas e amarelas poderá ter uma embalagem com aquela etiqueta; pede um quinto.
13. **Catarina:** A embalagem tem 5/5.

T.A.

Ao abordar com este grupo, notei a mesma ideia de equivalência; o que os alunos estavam a "manipular" eram bolas de pingue-pongue e não sabiam a que quantidade correspondia 1/5. Os alunos associaram esta tarefa aos *queijinhos* pois, ao explorarmos este material, constatamos que "dentro" de 1/5 "cabia" 2/10 para que os alunos compreendessem a equivalência de frações (§5, 6 e 7). Pretendia que os alunos compreendessem que 1/5 representava uma das 5 partes em que um todo está dividido (§11).

Em conversa com a professora cooperante decidimos auxiliar os alunos sem alterar as estratégias que estavam em discussão. Ainda assim, tentei compreender melhor a estratégia dos alunos que estavam com a ideia de equivalência de frações,

Perante a situação, tentei tirar partido do trabalho que os alunos tinham realizado e da explicação, que nos pareceu coerente – tanto a mim como à professora cooperante –

mas a ideia estava confundida com frações equivalentes. Não era o que pretendíamos (episódio 18):

Episódio 18: Compreensão do erro

1. **Professora Joana:** (…) Comecem pela pergunta; o que estamos a tentar encontrar?
2. **Paulo:** Quantas bolas podem haver onde um quinto são bolas brancas e o resto amarelas. (…)
3. **Gonçalo:** Nós temos um quinto que é o nosso dedo. Se nós dividirmos o nosso dedo ao meio é dois décimos, podemos ver também pelos queijinhos [com os queijinhos em cima da mesa] e se nos dividíssemos o nosso dedo em quatro era quatro vinte avos [Os alunos tinham os seus registos organizados em tabela].
4. **Professora Joana:** Vamos pensar primeiro só nos quintos porque é o que a etiqueta nos pede, certo?
5. **Gonçalo:** Certo.
6. **Professora Joana:** Aqui sabemos que as bolas brancas são um quinto e as restantes quatro quintos. Não é? E se eu quisesse ter esse raciocínio (apontando para tabela) mas com os quintos? Só com quintos (Silêncio) Pensa nos quintos Gonçalo (Silêncio) Se eu tiver 5 bolas, um quinto quanto é?
7. **Gonçalo:** 1 Bola.
8. **Professora Joana:** E se eu tiver 10 bolas?
9. **Paulo:** 2 bolas.
10. **Gonçalo:** Ah mas isso é o que nós temos mas não trabalhamos só em quintos; estamos com décimos, doze avos, etc.

T.A.

Neste episódio, Gonçalo tenta explicar como o seu grupo pensou (§3) fazendo a ligação com os *queijinhos*. Ao ouvir o aluno, tentei que o grupo se desfocasse da ideia de equivalência de frações e se centrasse no significado de 1/5 (§6). Decidi partir de cinco bolas de pingue-pongue onde, uma bola corresponderia a 1/5, tal como os alunos tinham referido (§7). Em seguida decidi aumentar a dimensão da unidade (§8) para que compreendessem que o que muda é o número de bolas de cada cor mesmo continuando a ser 1/5 de bolas brancas e 4/5 de bolas amarelas. Esta estratégia pareceu ter dado bons frutos (episódio 19):

Episódio 19: O que muda só é a nossa unidade

1. **Gonçalo:** Então o que muda só é a nossa unidade *né*?
2. **Professora Joana:** Sim, exatamente. E porquê?
3. **Paulo:** Porque não sabemos quantas bolas temos.

4. **Professora Joana:** Exatamente.
5. **Gonçalo:** Então temos que fazer 5, 10, 15, 20, 25, 30…
6. **Paulo:** Ah já percebi! É sempre a multiplicar por 5.

T.A.

Depois dessa altura, os alunos usaram as ideias debatidas para completarem o que haviam feito até então. Compreenderam que não sabendo a quantidade de bolas é possível ter várias hipóteses.

Alguns grupos pensaram em números maiores pois compreenderam que há infindáveis hipóteses de responder corretamente à tarefa. O episódio 20 ilustra este facto relativamente a um dos grupos:

Episódio 20: Assim nunca mais acaba

1. **Márcio:** Professora, nós já explicámos ao Tomás e ao Tiago a nossa conclusão: nós pensamos que podemos variar o número de bolas porque a etiqueta só nos diz que é um quinto de bolas e quatro quintos. Podemos inventar nós o total por isso estamos a testar hipóteses, mas só algumas!
2. **Professora Joana:** Só algumas? Porquê?
3. **Sofia:** Porque assim nunca mais acaba, tínhamos que arranjar maneira de saber um número que desse para qualquer número de bolas.

T.A.

A análise do episódio 20 revela que existiu colaboração do grupo de modo a que os alunos com mais dificuldades, Tomás e Tiago, não sejam excluídos da tarefa mas que, pelo contrário, possam acompanhá-la (§1). Além disso, os alunos salientaram que só iriam testar algumas hipóteses devido ao número infinito de possibilidades; ou seja, o total de bolas tem que ser múltiplo de cinco. Saliento por uma justificação (§2) pois, queria perceber se o grupo tinha chegado a esta conclusão e o que iriam fazer perante as várias hipóteses de unidade. Considerei interessante a justificação de Sofia ao indicar, nas suas palavras, que “porque assim nunca mais acaba, tínhamos que arranjar maneira de saber um número que desse para qualquer número de bolas”.

Depois do episódio, os alunos continuaram o trabalho autonomamente mas com outro propósito: encontrar uma generalização para o número de bolas da embalagem.

A exploração pelos grupos da segunda parte da tarefa teve a duração de 70 minutos e, só na aula seguinte, é que se procedeu às apresentações dos trabalhos e realizada, posteriormente, a discussão. Para isso, foi distribuído a cada grupo uma cartolina branca e dois marcadores de cores diferentes.

O tempo indicado aos alunos para preparação das apresentações foi 20 minutos. Neste âmbito, os alunos utilizaram o que tinham escrito na sua folha de rascunho para elaborarem um cartaz a apresentar à turma e refletirem sobre o que iriam dizer durante esta apresentação.

Enquanto os alunos preparavam os cartazes seriei, em conjunto com a professora cooperante as apresentações dos grupos tendo em vista a partilha de resoluções. Decidimos que seria apresentado os trabalhos realizados por todos os grupos porque a sequência de apresentações prendeu-se com estratégias utilizadas pelos alunos. Neste caso, decidimos partir de estratégias incorretas ou incompletas para a estratégia com o pensamento mais organizado.

Esta foi a ordem estabelecida:

- Grupo 1 – Gonçalo, Catarina, Paulo e Sérgio;
- Grupo 5 – Marta S., Sofia, Tiago, Tomás e Márcio;
- Grupo 3 – Mariana, Rita, Rodrigo e Bruno;
- Grupo 4 – Ângela, Érica, Diana e Cláudio;
- Grupo 2 – Margarida, Marta M., Flávio, Daniela e Hélder.

Discussão coletiva

No início de cada apresentação, os alunos de cada grupo começaram por se apresentar, como se se tratasse de um congresso matemático por terem como referência a tarefa “A visita de estudo e a distribuição das baguetes”, proposta, anteriormente, pela professora cooperante.

Considerei importante que cada grupo explicasse em que consistia a tarefa para entender se tinham compreendido o enunciado.

Decidi que todos os cartazes seriam colocados no quadro, lado a lado, para que pudessem ser estabelecidas conexões entre as várias apresentações.

Primeira apresentação

O primeiro grupo (Gonçalo, Catarina, Paulo e Sérgio) a apresentar optou por usar uma tabela (figura 36).

O episódio 21 ilustra a apresentação feita pelo grupo:

Episódio 21: Aprender com os erros

1. **Gonçalo:** Nós começamos a fazer como achávamos e só tínhamos feito para cinco bolas. A professora depois perguntou que mais maneiras é que podiam ser sem ser as cinco bolas.
2. **Sérgio:** Com cinco bolas as brancas era só uma bola e o resto eram 4 bolas.
3. **Gonçalo:** Sim, e depois nós vimos que se em vez de termos 5 bolas tivéssemos 10 a nossa unidade ia ficar dividida em 10 partes e nós vimos que para um quinto ser uma bola aqui era duas bolas e assim ficava dois décimos e depois para as amarelas em vez de serem 4 bolas iam ser 8, oito décimos. E a unidade ficava dividida em 10 décimos e dois décimos mais oito décimos iam ser dez décimos. [A mesma explicação aconteceu para as restantes unidades, variando o número de bolas]. No fim conseguimos ver que se fossemos acrescentando mais 5 bolas: 60, 85, 95, 100 então vimos que esta tabela era infinita… Então pusemos reticências (…) então é infinita [ver figura 36].

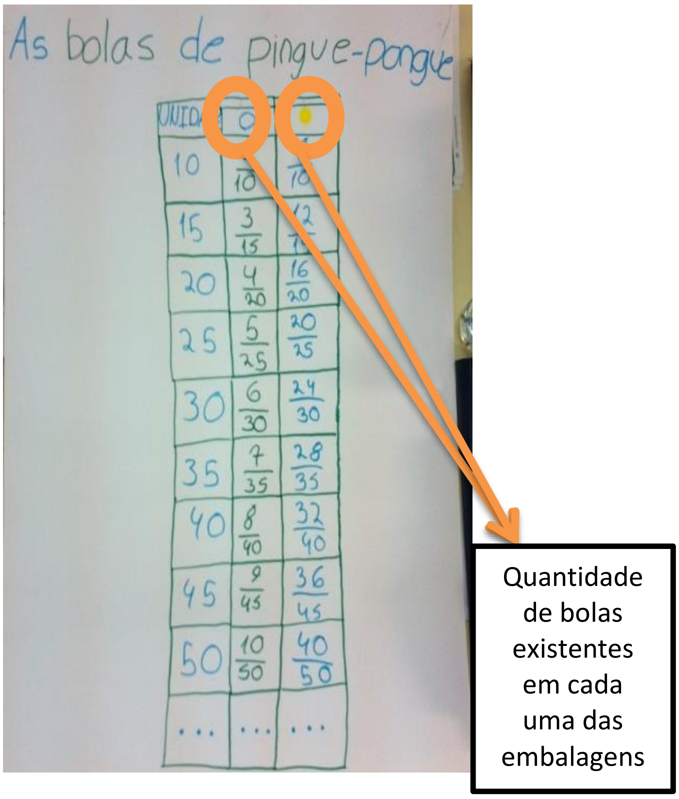


Figura 36 - Estratégia utilizada pelo grupo 1 na resolução da tarefa "As bolas de pingue-pongue" - Parte II

4. **Professora Joana:** Então, o que é que a turma acha? Concordam?
5. **Márcio:** Eles fizeram uma regularidade, a unidade vai sempre de 5 em 5, as bolas brancas vão de 1 em 1 e as amarelas é a tabuada do 4.
6. **Gonçalo:** Sim mas nós aqui fomos sempre acrescentando mais 5 porque era 1/5 tínhamos que ter mais 5 bolas porque se nós queríamos ter a unidade dividida em quintos tínhamos que ter 5 bolas se nos tivéssemos quartos em vez de começar em 10 começava em 4.

7. **Professora Joana:** Então olha lá Gonçalo, doze quinze avos onde é que a tabuada do 4 está?
8. **Gonçalo:** Então porque oito mais quatro são doze então as bolas brancas vai de 1 em 1 porque é um quinto e as amarelas vão de 4 em 4 porque são quatro quintos.
9. **Professora Joana:** Então a coluna das bolas brancas equivale a quê?
10. **Gonçalo:** Um quinto (…) ou seja estas frações é tudo igual a um quinto!
11. **Professora Joana:** Ok, e as amarelas são…?
12. **Gonçalo:** Quatro quintos (…) Nós aqui também podíamos ver que eram cinco bolas mas fizemos em fração.
13. **Professora Joana:** Mas não é isso que está lá Gonçalo, pois não? O que explicaste oralmente está certo, mas o que está aí não está correto. Por exemplo, se pegarmos em dois décimos e quisermos transformar em numeral decimal, quanto é?
14. **Paulo:** Dois décimos?
15. **Professora Joana:** Certo. Então isto [apontando para a tabela] é um quinto das tuas 10 bolas?
16. **Gonçalo:** Então acrescentávamos mais uma tabela…
17. **Professora Joana:** Coluna…
18. **Gonçalo:** Sim, coluna e púnhamos o número de bolas!
19. **Professora Joana:** Não, isso é a tua unidade Gonçalo; isso já cá está! (…) O que é que a turma acha?
20. **Diana:** A unidade é o número de bolas que há!
21. **Professora Joana:** O que aqui falta é que todas estas frações são equivalentes a um quinto [bolas brancas] e esta coluna é equivalente a quatro quintos porque se formos dividir um quinto por dois tenho o quê? [apontando para o numerador e denominador de 2/10]
22. **Gonçalo:** Um quinto.
23. **Professora Joana:** Então isto são frações…
24. **Paulo:** Equivalentes.
25. **Professora Joana:** Equivalentes a…
26. **Paulo:** Um quinto [apontando para as bolas brancas].
27. **Professora Joana:** E aí é que está mal!
28. **Gonçalo:** Então é como eu disse: riscávamos isto aqui [apontando para o denominador] e estava bom!
29. **Professora Joana:** Exatamente. Porque esta parte aqui de baixo que é o…
30. **Turma:** Denominador!
31. **Professora Joana:** Denominador, muito bem! Diz-nos o quê?
32. **Turma:** Em quantas partes está dividida a unidade!

T.A.

Ao ouvir a explicação de Gonçalo constatei que o problema com que se debateram durante o trabalho de grupo e que eu tinha tentado que ultrapassassem sem uma explicação em demasia, subsistiu (§3). Talvez este facto se deva ao pouco domínio da linguagem matemática pois o raciocínio estava, em parte, correto. Ainda que no pouco que os alunos compreenderam que a quantidade iria variar no conjunto dos múltiplos de cinco, penso que não entenderam o sentido da fração neste contexto; o que os indicaram era uma relação entre uma parte e um todo e não o que tinha sido pedido. O raciocínio de Gonçalo podia estar correto porque era 2/10 em 10 bolas. Relativamente às reticências, referidas por Gonçalo (§3), remetem-me para o número de bolas da embalagem, ou seja, para o todo.

Entretanto, tentei que a turma comentasse a apresentação dos colegas (§4). Tentei instruir a explicação de Gonçalo como objeto de reflexão, submetendo-a à turma.

Face à resolução do grupo, explorei o assunto (§7) por saber, de antemão, que este erro aconteceu com mais grupos. Fi-lo para levar os restantes grupos a analisar o cartaz dos colegas e a pensar nas suas estratégias.

Com as questões que coloquei (§21, 23, 25, 29 e 31) compreendi que o grupo percebeu o porquê de dividir a unidade em cinco partes pela referência à comparação de quartos em vez de quintos.

Decidi incentivar a participação dos outros grupos (§19), sem querer desvendar as estratégias que utilizaram para tornar a discussão mais rica e para compreender se o erro estava visível a todos os alunos. Com esta intervenção, decidi questionar os alunos, procurando que identificassem o erro.

Decidi dar visibilidade à relação entre a fração 2/10 e o numeral decimal que a representa (§15) para que compreendessem que se tratava de uma pequena parte da unidade. Além disso, abordei a equivalência de frações.

Depois do episódio, questionei a turma acerca das suas dúvidas. A maioria dos alunos disse que não. Mesmo que existissem alunos que não estavam esclarecidos, a segunda apresentação poderia contribuir para as ultrapassar.

Segunda apresentação

A segunda apresentação teve início com a sua colagem no quadro.

O segundo grupo a apresentar (Marta S., Sofia, Tiago, Tomás e Márcio) optou por dividir a cartolina em cinco partes e registar as suas conclusões (figura 37).

O episódio 22 mostra como os vários elementos do grupo procederam à explicação do seu cartaz:

Episódio 22: Pensamento correto e registo incorreto

1. **Tiago:** Nas bolas de pingue-pongue nós pensámos que 5 bolas era a unidade…
2. **Alguns alunos:** Tens que explicar o problema senão assim ninguém percebe nada! Faz de conta que não sabíamos o que estavas a fazer!
   (silêncio)
3. **Professora Joana:** A turma está a pedir para explicares a etiqueta Tiago, a que está aí ao lado.
4. **Tiago:** Então pedir para sabermos que um quinto eram bolas brancas e o resto eram amarelas. Então nós pensamos que 5 bolas era a unidade e um quinto de bolas brancas é igual a 1 bola branca e quatro quintos de bolas é igual a 4 bolas amarelas. Se somarmos um quinto mais quatro quintos dá cinco quintos por isso temos a unidade, que são 5 bolas que é 1 bola branca mais 4 bolas amarelas.
5. **Marta S.:** Na unidade pusemos outro exemplo que eram 40 bolas e vimos que oito quarenta avos é igual a um quinto e para vermos a fração que falta para a unidade vimos que era trinta e dois quarenta avos…
6. **Gonçalo e Bruno:** Não estou a perceber muito bem (…)
7. **Marta S.:** Se nós temos 40 bolas que é a unidade e vimos que 1/5 das bolas são 8/40 avos e o resto, como foram os quatro quintos é trinta e dois quarenta avos avos que são 32 bolas amarelas. Já percebeste?
8. **Gonçalo:** Não!
9. **Marta S.:** Opá são 8 bolas brancas de 40 e 32 bolas amarelas de 40!
10. **Gonçalo:** Ah, assim percebo!
    (…)
11. **Márcio:** A nossa unidade foi dividida em 80 partes…
12. **Gonçalo:** Mas como é que vocês sabiam que 80 dava?
13. **Márcio:** Espera, isso já vou explicar! (…) Dezasseis oitenta avos são bolas amarelas, são 16 em 80.
14. **Gonçalo:** Mas como é que sabem isso? Como chegaram a essa conclusão?
15. **Márcio:** Posso acabar de explicar? Já vou dizer isso!
16. **Gonçalo:** Ok.

17. **Márcio:** Dezasseis oitenta avos são 16 bolas brancas e sessenta e quatro oitenta avos são 64 bolas amarelas (…) Doze oitenta avos é equivalente a um quinto e sessenta e quatro oitenta é equivalente a quatro quintos.

T.A.

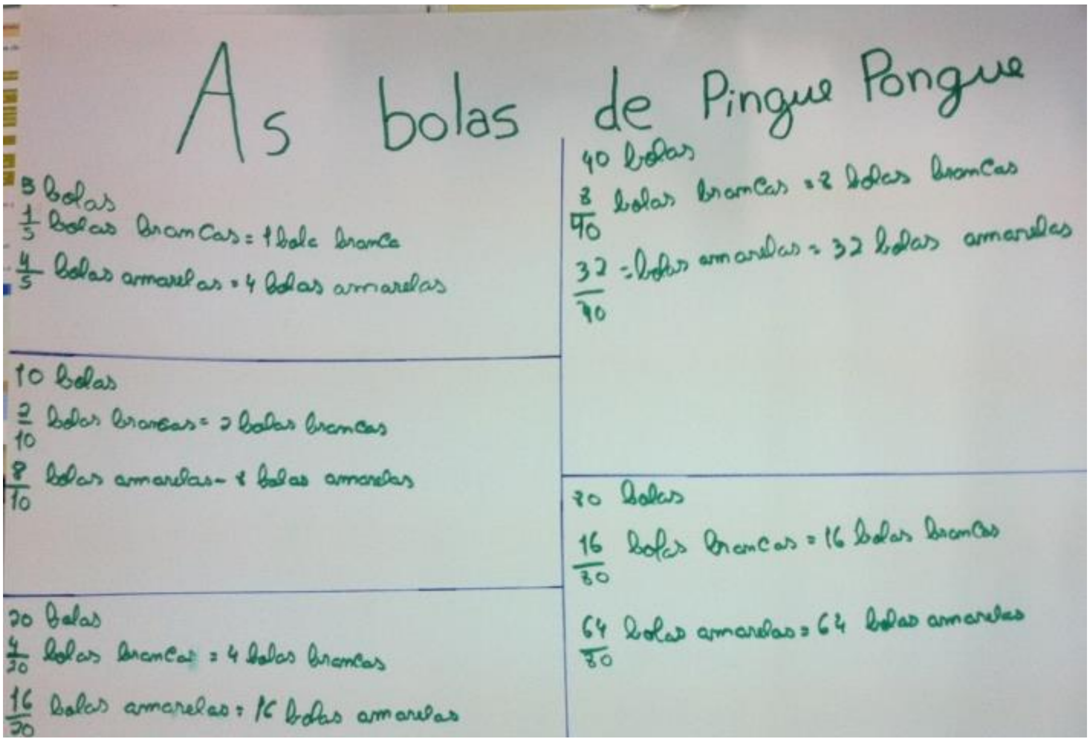


Figura 37- Estratégia utilizada pelo grupo 5 na resolução da tarefa "As bolas de pingue-pongue" - Parte II

O facto de alguns alunos terem chamado a atenção do colega para a necessidade de apresentar com clareza o seu raciocínio (§2) indica-me que na turma já é considerado importante, nomeadamente, a necessidade de explicar o trabalho realizado.

Com a explicação dos alunos (§4 e 5) pude compreender as semelhanças com a explicação do grupo anterior; aqui a única coisa que estava errada era o uso do sinal de igual.

O grupo, durante a explicação conseguiram mobilizar diversos conhecimentos para esclarecer os colegas.

Terminada a apresentação do grupo, procurei averiguar se subsistiam dúvidas, como ilustra o episódio 23:

Episódio 23: Não há duvidas?

1. **Professora Joana**: Não há dúvidas?
2. **Turma:** Não!

3. **Professora Joana:** Então e entres dois cartazes, estas duas apresentações, que diferenças encontramos? Sem ser a representação em tabela.
4. **Diana:** Porque o grupo do Gonçalo fizeram de diferentes unidades, fizeram de 5 em 5, e o do Márcio preferiram fazer de 10 em 10.
5. **Gonçalo:** Professora, isto pode-se fazer de várias maneiras.
6. **Marta Solas:** Eu acho que a diferença é que o grupo do Gonçalo na unidade foi de 5 em 5 e nós de 10 em 10 mas acaba por ser o mesmo raciocínio.
7. **Márcio:** Sim, essa é a única diferença!
8. **Professora Joana:** Sim, mas que diferenças encontramos? Qual era a etiqueta?
9. **Diana:** Era para representar um quinto de bolas brancas e as restantes amarelas.
10. **Professora Joana:** E o que é que o grupo do Gonçalo respondeu? (…) O que eles fizeram foi dizer que em um quinto existem duas vezes um décimo que, em decimal, é dois décimos. Isso estava certo?
11. **Alguns alunos:** Não!
12. **Alguns alunos:** Sim!
13. **Professora Joana:** Então?
14. **Margarida:** Está errado porque não disseram quantas bolas é que cabiam num quinto mas o exercício está certo na mesma.
15. **Marta S.:** Mas nós sabemos logo que se a unidade são 5 bolas, um quinto é uma bola.
16. **Gonçalo:** Oh professora se no nosso trabalho tirássemos os denominadores estava certo, porque assim já dizíamos quanto era um quinto e quatro quintos e assim já estava certo
17. **Professora cooperante:** Exatamente! É isto mesmo!

T.A.

Os cartazes dos grupos 1 e 5 estavam expostos no quadro, pelo que, em primeiro lugar procurei que os alunos relacionassem as duas apresentações (§3) e identificassem diferenças, tentando por esta via, averiguar se a incorreção no primeiro cartaz era identificada e se os alunos que o apresentaram estavam esclarecidos. Aparentemente sim, pois foi precisamente um elemento do primeiro grupo a referir a incorreção, explicando o que alterava (§16). Pretendi, deste modo, que as apresentações estivessem encadeadas o que poderia facilitar, à compreensão, pelos alunos do conceito de fração.

Terceira apresentação

O terceiro cartaz foi igualmente colado no quadro.

Na terceira apresentação, o grupo (Mariana, Rita, Rodrigo e Bruno) optou por dividir a folha em quatro partes, fazendo-se acompanhar por esquemas e algoritmos da divisão (figura 38).

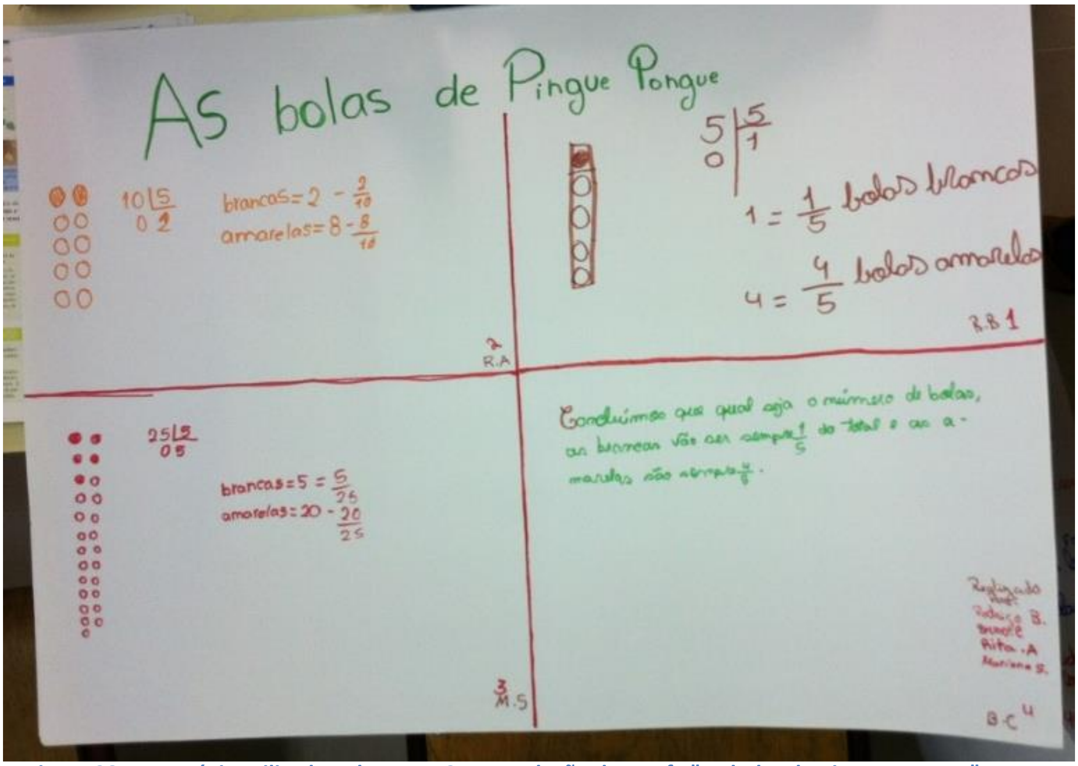


Figura 38 - Estratégia utilizada pelo grupo 3 na resolução da tarefa "As bolas de pingue-pongue" - Parte II

O episódio 24 ilustra como os alunos explicaram a sua estratégia:

Episódio 24: Mudanças com o aparecimento das bolas de pingue-pongue

1. **Rodrigo:** Nós (…) o problema era: um quinto das bolas eram brancas e o resto eram amarelas e temos que descobrir quantas bolas eram. (…) *A gente* (…) Nós começámos por descobrir os exemplos: *a gente* começou por cinco a dividi por cinco, deu-nos um e resto zero, depois desenhamos 5 bolas e pintamos só uma e vimos que um quinto era uma bola e quatro quintos eram as outras quatro bolas.
   (…)
2. **Gonçalo:** Então porque é que é a divisão por 5?
3. **Rodrigo:** Porque era um quinto (…) um quinto eram bolas brancas e a unidade neste caso é cinco.
4. **Bruno:** Nós pintámos a bola branca para mostrarmos qual era o quinto disto tudo.

5. **Gonçalo:** Então mas aí escreveram: um igual a um quinto de bolas brancas e quatro igual a quatro quintos de bolas amarelas (…) vocês assim iam dividir as cinco bolas por cinco pessoas.
   (silêncio)
6. **Rodrigo:** Não percebi!
7. **Márcio:** Puseste ali um é igual a um quinto e esse um é correspondente a uma unidade e em baixo puseste quatro igual a quatro quintos (…)
8. **Bruno:** Mas isso não é a unidade, é uma bola da unidade que são cinco (…) o que quisemos fazer foi que uma bola era um quinto e como sobravam quatro que não pintamos isso ia ser quatro quintos que era o restante da etiqueta
9. **Rita:** Então nós tínhamos dez bolas e fomos dividir por cinco que representa aquilo [apontando para a etiqueta] que nos deu o total de dois então as bolas brancas são dois, pintámos duas bolas e as restantes, que são oito, são as amarelas e em fração nós colocamos dois décimos e oito décimos (…) Diz Gonçalo!
10. **Gonçalo:** Se nós virmos é a mesma coisa que eu fiz, os dois décimos que é um quinto.
11. **Professora Joana:** É? É igual? [Dirigindo-me para o quadro] Então dois décimos é equivalente a um quinto? [fazendo o registo no quadro]
12. **Gonçalo:** Sim!
13. **Professora Joana:** Então porquê?
14. **Diana:** Porque se nós pusermos dois décimos dentro do quinto, que já vimos com os queijinhos, dá!
15. **Professora Joana:** Vamos todos pegar nos queijinhos; tiramos um quinto e dois décimos (…) se colocarmos os dois décimos dentro do quinto, percebemos que o que a Diana e o Gonçalo disseram está correto, verdade?
    (…)
16. **Bruno:** Nós concluímos que se nós fizéssemos… como aqui fizemos 5 a dividir por 5 deu 1 bola, pintamos uma. Depois vimos que se fizéssemos com 10 dava duas bolas para pintar e com 25 davam 5. Logo, se nós continuássemos com 15, 20, 25, 30, 35, ia sempre aumentando o número de bolas que íamos pintando que eram as bolas brancas. E nós concluímos que qualquer que seja o número de bolas, as brancas vão ser sempre um quinto do total e as amarelas vão ser sempre quatro quintos.
17. **Márcio:** Não concordo professora. (…) Por exemplo, não sabes a unidade. Um oitavo não é equivalente a um quinto.
18. **Professora Joana:** Porquê Márcio?
19. **Márcio:** Porque um quinto é maior que um oitavo.
20. **Márcio:** Sim mas se ele não soubesse a unidade, o que eles escreveram estava mal!
21. **Professora Joana:** Essa resposta que eles deram Márcio, é para este problema; é consoante a etiqueta que tínhamos para resolver.

T.A.

Gonçalo e Márcio apresentaram algumas dificuldades na compreensão da estratégia utilizada pelo grupo (§5 e 7), por os alunos terem utilizado na sua estratégia unidades discretas (bolas) e por terem pintado as bolas brancas e não as amarelas (§4).

Neste caso, os alunos mostraram algumas dificuldades no que diz respeito à compreensão da explicação de como é que o grupo chegou à apresentação final do resultado, utilizando o algoritmo da divisão (§6).

A apresentação continuou e, sem que fosse preciso salientar, os alunos começaram a estabelecer relações entre os trabalhos, como foi o caso de Gonçalo (§13). Apesar de continuar a referir-se aos décimos ao invés de quintos, compreendeu que 2/10 é equivalente a 1/5, mobilizando conceitos adquiridos em aulas anteriores. Para que ficasse claro para todos os alunos fiz o registo no quadro (§12) e pedi a todos os alunos que pegassem nos *queijinhos* (§16). Fi-lo, maioritariamente, a pensar nos alunos com mais dificuldades pois compreendi, pelas suas expressões faciais, que existiam dúvidas. Neste caso, salientei o sentido de equivalência de frações para que fosse claro para toda a turma.

Bruno, ao concluir a tarefa (§17) queria dizer que a unidade pode ser divisível por 5, porque estamos a trabalhar com quintos. Neste caso, o colega passou para um outro exemplo, contrapondo a ideia do grupo (§18). Para não gerar mal-entendidos entre os restantes alunos, decidi realçar que se tratava apenas de um outro exemplo, independente da etiqueta que estávamos a trabalhar (§22) e tentei focar o aluno no enunciado em questão. Tomei esta decisão por considerar que existiram muitas dificuldades na compreensão desta tarefa e os alunos mais frágeis da turma não estavam a acompanhar devidamente as apresentações. Incluir exemplos deste tipo poderia gerar ainda mais dúvidas.

Com a análise deste episódio concluo que é importante criar-se sempre um trabalho continuado, estabelecendo conexões entre aprendizagens e tarefas anteriores, que se possa evocar sempre que se considerar necessário. Neste caso, os alunos encontram-se ainda muito presos aos sectores circulares e considerei foi importante pegarem neles em alguns momentos da aula.

Quarta apresentação

O quarto grupo a apresentar (Ângela, Érica, Diana e Cláudio) utilizou uma estratégia que se focou igualmente na representação simbólica das bolas de pingue-pongue através de desenhos, sendo complementada com a representação em forma de tabela e com a explicação da respetiva fração para cada quantidade (figura 39).

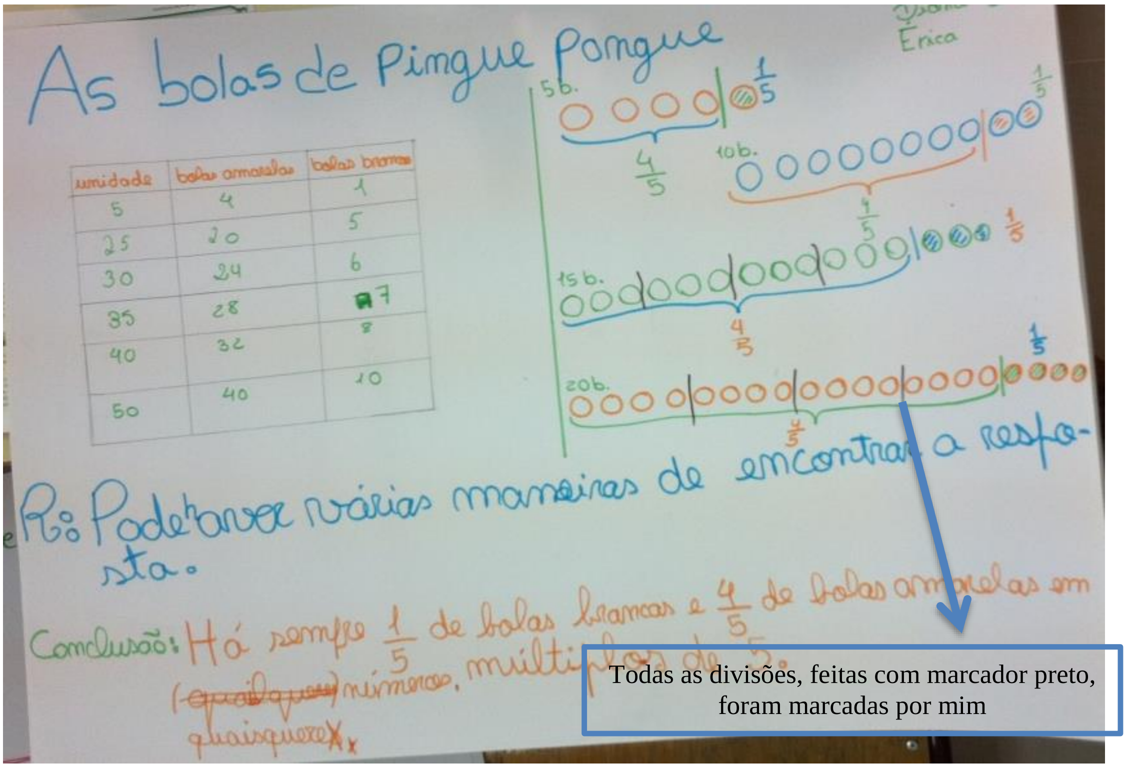


Figura 39 - Estratégia utilizada pelo grupo 4 na resolução da tarefa "As bolas de pingue-pongue" - Parte II

O episódio 25 mostra como os alunos deram início à explicação do seu trabalho, focando-se primeiro na tabela, de uma forma muito redutora:

Episódio 25: 25 unidades…

1. **Érica:** Aqui a nossa unidade era 5 bolas. As bolas amarelas eram 4 ou 4/5 e as bolas brancas 1 que é um quinto.
   (…)
2. **Cláudio:** Tínhamos 25 unidades…
3. **Diana:** Não tínhamos 25 unidades; temos uma unidade que são 25 bolas…
4. **Cláudio:** Sim, isso. E depois 20 são bolas amarelas e 5 são bolas brancas.
   [Explicações idênticas sucederam-se para diferentes quantidades]
5. **Diana:** Nós encontramos outra maneira de explicar [apontando para os esquemas, figura 37]. Era a mesma maneira disto [apontando para a tabela do grupo anterior, figura 36] mas é mais fácil de explicar e perceber. Por exemplo: eram 5 bolas e nós vimos que isto eram cinco quintos, uma bola destas era um quinto e o resto era quatro quintos e é igual para as

outras mas com unidade diferentes que são as mesmas da tabela. (…) A conclusão que nós chegamos é que há sempre um quinto de bolas brancas, que foi o que foi pedido, e quatro quintos de bolas amarelas para conseguirmos fazer a unidade em quaisquer números multiplicados por 5.

6. **Professora Joana:** Certíssimo! Então olhem lá, aqui têm 15 bolas, não é? [apontando para a tabela e marcando com caneta preta] Cada quinto tem quantas bolas?
7. **Diana:** 3!
8. **Professora Joana:** Então três mais três mais três mais três dá…
9. **Márcio:** 12 bolas
10. **Professora Joana:** Que são…
11. **Flávio:** Quatro quintos.
12. **Professora Joana:** Sobram 3 que é…
13. **Ângela:** O outro quinto que falta.

T.A.

Com esta apresentação, importa salientar que aquando da explicação da estratégia simbólica feita por Diana (§5), servindo de síntese ao trabalho realizado pelo grupo, tive que intervir marcando, com caneta preta, cada quinto. Fi-lo para que fosse mais percetível para os alunos com mais fragilidades (§6); no cartaz não estava identificado cada quinto e, para quem observava, ficou mais claro.

Em seguida, interpelei os alunos para compreender se tinham percebido a estratégia que utilizei (§8, 10 e 12). Compreendi, então, que a estratégia que adotei resultou, pois conseguiam olhar para o cartaz e compreender o que estava a ser falado; passou a ser percetível o número de partes em que cada conjunto de bolas estava dividido, salientando o aparecimento da quinta parte.

Tendo em conta estratégias anteriores, considerei que este grupo mobilizou corretamente o sentido de fração que, neste caso, não foi tratado como razão (duas bolas amarelas de dez, por exemplo).

Depois do episódio, e à semelhança do que aconteceu com os grupos anteriores, considerei importante focar aspetos semelhantes entre os cartazes anteriores para que as apresentações não fossem independentes entre si mas, que se completassem.

Quinta apresentação

Tratando-se do quinto e último grupo a apresentar (Margarida, Marta M., Daniela e Hélder), a sua estratégia estava mais organizada e corretamente esquematizada (figura 40).

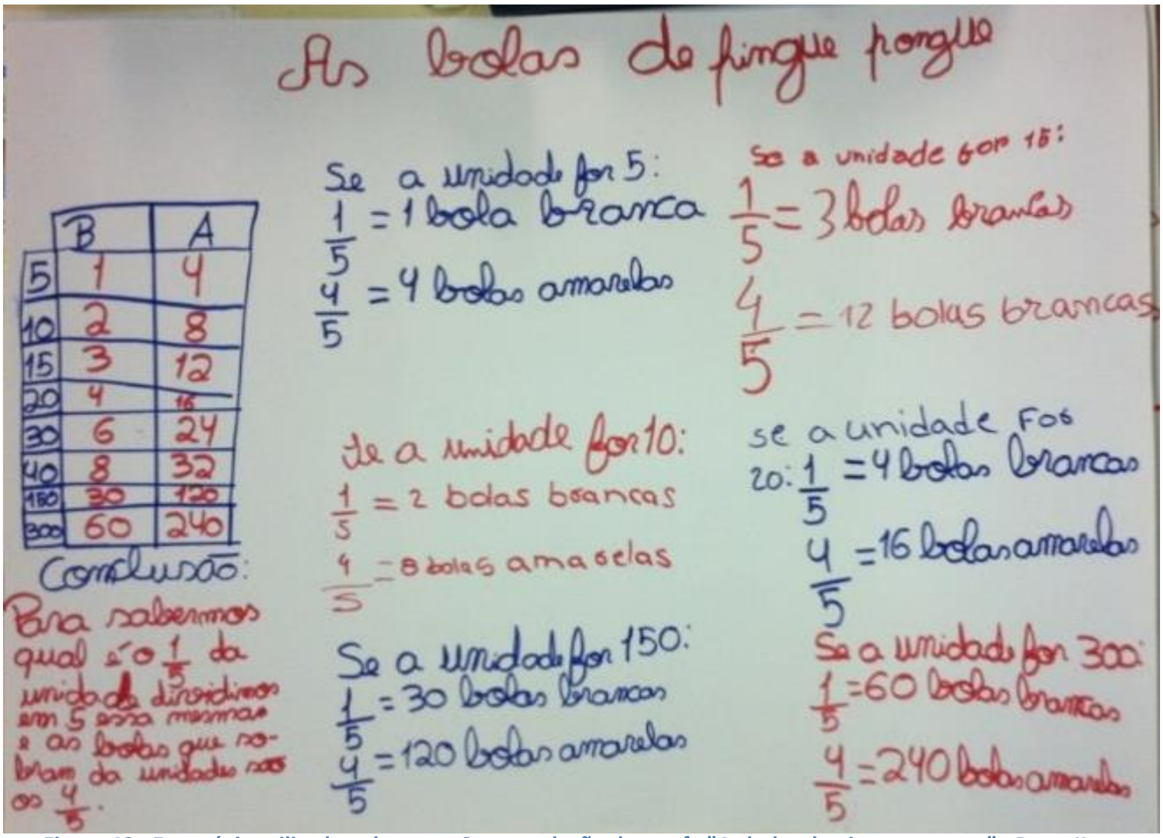


Figura 40 - Estratégia utilizada pelo grupo 2 na resolução da tarefa "As bolas de pingue-pongue" - Parte II

O grupo optou por utilizar a explicação em tabela focando depois a explicação em pequenas frases síntese, tal como ilustra o episódio 26:

Episódio 26: Como é que chegaram até aí?

1. **Margarida:** O problema surgiu… é que… nós fomos tentar resolver o problema que dizia… que perguntava… era sobre as bolas de pingue-pongue! E o problema perguntava quantas bolas brancas cabia num quinto e as restantes quantas eram do pacote. Então nós fomos ver e fizemos esta tabela porque se a unidade for 5 as bolas brancas têm que ser 1 e as bolas amarelas têm que ser 4.
2. **Daniela:** 150…
3. **Alguns alunos:** Cento e quê?!
4. **Professora Joana:** Aqui deram um grande salto, pensaram mais além, muito bem…
5. **Daniela:** Das 150 bolas, as brancas são 30 e bolas amarelas são 120.

6. **Professora Joana:** E como é que chegaram até aí? Agora apresentam a unidade com 300 bolas...
7. **Margarida:** Nós fomos sempre dividindo a unidade por cinco que dá o resultado para as bolas brancas e como sobra quatro quintos é o restante. Depois nós fizemos o último exemplo com 300 vimos que as bolas brancas eram 60 e as amarelas 240. Mas estes dois [apontando para o 100 e 300] foram mais fáceis porque como estava aqui o 0 nós fingimos que não estava; o 150 fomos ver ao 15 e era só acrescentar o 0 e a mesma coisa para os outros números.
8. **Professora Joana:** Como é que souberam que um quinto são 30 bolas? Explica lá outra vez. Há colegas teus que me perguntaram agora e não perceberam…
9. **Margarida:** Nós vimos que se dividíssemos os 150 por 5 ia dar 30 e esse era um quinto e o restante era quatro quintos que eram 120 bolas
10. **Gonçalo:** E porque quatro quintos nós tínhamos que dividir 150 por 5 e nós tínhamos que… imagine que fosse 50, dava-nos 10 e depois quatro vezes dez que era quatro quintos ia dar 40.
11. **Margarida:** Professora…
12. **Professora Joana:** Não percebes-te Margarida?
13. **Margarida:** Não…
14. **Professora Joana:** Gonçalo…
15. **Gonçalo:** Se a unidade for 50 a nossa unidade está dividida em 10 para termos um quinto que são 10 bolas neste caso, que era 10 das 50, e quatro vezes dez, que era quatro vezes um quinto, quatro quintos, ia dar 40.
16. **Professora Joana:** Não, não vamos dividir por 10 Gonçalo… [desenhei 5 sacos] O que o Gonçalo quis dizer foi que se a unidade fossem 50 bolas e tivéssemos que encontrar um quinto e quatro quintos, podíamos começar por dividir 50 por 5… [fiz o algoritmo no quadro] Tínhamos que saber quantas bolas, do total que são 50, podíamos colocar em cada saco… Então 50 a dividir por 5 são 10 bolas [escrevi 10 em cada saco]. Se um saco corresponde a um quinto então sabemos que um quinto são 10 bolas e o resto, os 4 sacos, são quatro quintos [marcando com giz um quinto e quatro quintos, respetivamente].
17. **Margarida:** Então é a mesma coisa mas aqui temos 150 e achamos que é mais simples de fazer!

T.A.

Na explicação da etiqueta da tarefa, reparei que a aluna não soube bem como começar e, por isso, foi tentando encontrar as palavras certas (§1). No fim, explicou no que consistia o trabalho que iriam apresentar. Em seguida, foi dado início à explicação do trabalho que realizaram.

Os alunos deram início aos “grandes números”, como lhes chamámos na sala de aula (§2).

O facto de este ser o último grupo a apresentar, como já referi, prendeu-se com o desenvolvimento do raciocínio matemático que pude compreender durante a exploração autónoma da tarefa, aquando da discussão em pequenos grupos. Tomei a decisão, face a isso, de os incentivar (§4). Estes alunos consideraram pertinente a escolha de números maiores por terem descoberto que podiam trabalhar com infinitos de números para testar a etiqueta e tentaram representá-lo. O facto de o terem feito, provou nos restantes grupos alguma confusão por não conseguirem ainda pensar dessa forma e, por isso, decidi interrogá-los de forma a ajudar a turma a compreender o trabalho deste grupo (§6).

Consoante o avançar da apresentação, ao serem utilizados números maiores, decidi pedir que Margarida voltasse a explicar (§8) porque, durante a apresentação, alguns alunos apresentaram dúvidas, afirmando não estar a compreender o raciocínio dos colegas. Uma vez que era a vez de Margarida explicar o cartaz, pedi que fosse ela a explicar, uma vez mais, para retificar a explicação que deu. Entretanto, Gonçalo decidiu intervir, apresentando outra forma de explicar a ideia da colega (§10), e Margarida não entendeu (§11 e 13) a explicação do colega. Voltei a tomar a mesma atitude (§14).

Ao notar que a turma não estava a acompanhar o raciocínio dos colegas, decidi encontrar uma outra estratégia para o explicar (§16). Comecei por partir de um “grande número” que o cartaz apresentava, o 50, pois foi com este número que a turma apresentou dúvidas. Fiz a divisão da quantidade de bolas pelo denominador para que conseguisse obter a quantidade que iria colocar em cada saco. Utilizei esta estratégia porque me pareceu ser mais simples; os alunos não iriam desenhar 50, 150 ou 300 bolas. Em seguida, questionei a turma para averiguar se subsistiam dúvidas (episódio 27):

Episódio 27: Toda a gente percebeu?

1. **Professora Joana:** Toda a gente percebeu?
2. **Alguns alunos:** Não…
3. **Professora cooperante:** Pois, é uma ideia mais complexa…
4. **Professora Joana:** O que o Gonçalo quis dizer foi que se a unidade for 300 [desenhei um pacote e escrevi 300], se houver 300 bolas dentro de um pacote, um quinto representa 60

como o grupo da Margarida escreveu e bem porque 300 a dividir por 5 é igual a 60 [fiz o algoritmo no quadro]. Depois, para encontrarmos os quatro quintos, em vez de apenas contabilizarmos o que sobra, poderíamos fazer sessenta vezes quatro e porquê o 60? Porque 60 bolas é um quinto e se sobram quatro quintos temos que ter 60 mais 4 vezes, ou seja, sessenta vezes quatro que vai dar as 240 bolas. Certo Gonçalo?

5. **Gonçalo:** Sim, nós só precisávamos de saber quanto era um quinto, o resto era mais fácil porque era a partir daí.
6. **Márcio:** Sim, porque sessenta mais sessenta é 120 e cento e vinte mais cento e vinte é 240. Eu já percebi!
7. **Diana:** Sim, e 240 com 60 dá 300.
8. **Professora cooperante:** Muito bem (…) quem não está a perceber que diga já para não se avançar mais.
   (silêncio)
9. **Sérgio:** Não percebi…
10. **Professora Joana:** Márcio se já percebeste explica lá tu se fazes favor…
11. **Márcio:** Ou seja, um quinto são 60 bolas quatro quintos são 240 bolas. Sessenta mais duzentos e quarenta são 300 bolas que a unidade. Podíamos fazer assim ou fazer sessenta vezes quatro como a professora e o Gonçalo disseram mas assim com contas de mais é mais fácil se calhar para ti.
12. **Sérgio:** Acho que já percebi…
13. **Professora Joana:** Se nós tivermos 5 bolas [desenhei 5 bolas no quadro] se cada uma destas bolas representar um quinto e como sobram 4 bolas, que são quatro quintos, podemos fazer um vezes quatro que vai dar as 4 bolas. Percebeste Sérgio?
14. **Sérgio:** Sim, isso sim! Com o outro número não…
15. **Margarida:** A professora não ia desenhar 300 bolas no quadro…

T.A.

A professora cooperante pensou da mesma forma que eu; os alunos com mais fragilidades não estavam a acompanhar a aula (§8). Por isso, considerei melhor explicar com um número mais pequeno pois, ao reduzirmos o problema, neste caso a quantidade, facilitamos o trabalho aos alunos (§13).

Saliento que em vários momentos da aula, e tal como demonstra o episódio 26, opto por solicitar a participação de determinados alunos para explicaram o que outros não compreenderam (§10). Tomo esta decisão por considerar benéfico quer para o aluno com mais dificuldades, porque ouve e compreende raciocínios mais simples e com uma linguagem mais próxima da sua, quer para o aluno com mais facilidades que desenvolve a sua linguagem matemática e o raciocínio.

Conclusões da aula

Quando a aula terminou, considerei que poderia ter levado para a sala de aula uma caixa com bolas de pingue-pongue ou imagens de bolas de pingue-pongue impressas, para que pudesse distribuir pela turma. Seria útil, em ambas as partes da tarefa. Mesmo que não o tenha feito, o trabalho realizado, culminando com a apresentação de todos os grupos, resultou em várias estratégias expostas no quadro, pertencentes à mesma tarefa de onde foram retiradas elações, como fui descrevendo ao longo da presente secção. A figura 41 ilustra de que forma os alunos puderam observar os cartazes ao longo das apresentações.

Figura 41 - Resultado final da apresentação de todos os trabalhos referentes à tarefa "As bolas de pingue-pongue", Parte II

Pensando em bolas de pingue-pongue com uma tabela

Ao analisar as intervenções e estratégias dos alunos para a tarefa "As bolas de pingue-pongue" decidi, em conjunto com a professora cooperante, realizar uma nova tarefa de apoio ao trabalho realizado na sala de aula, que iria ser benéfica para encontrar a generalização da tarefa e sistematizar as aprendizagens realizadas.

Assim, criámos uma tabela dividida em duas partes: número de bolas e resolução. Cada número de bolas, até ao 25, tinha as bolas desenhadas e, a partir daí, decidimos deixar em branco para que os alunos desenhassem caixas de bolas de pingue-pongue. Por baixo de cada linha que poderiam esquematizar o número de bolas. Decidimos deixar, ainda, uma linha em branco. Nesta linha, os alunos escreveriam os cálculos que fizeram para cada quantidade (tabela 8).

Tabela 8 - Tabela utilizada para sistematizar a tarefa "As bolas de pingue-pongue"

Nº bolas	$\frac{1}{5}$ das bolas são brancas e as restantes são amarelas
5	○○○○○
10	○○○○○○○○○○
15	○○○○○○○○○○○○○○○
20	○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
25	○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
50	
100	

No início da aula seguinte, os trabalhos dos alunos foram expostos de novo e questionei-os acerca das mudanças que poderia fazer para que os trabalhos ficassem corretos, tal como mostra o episódio 28:

Episódio 28: Mudanças

1. **Gonçalo:** Eu no meu trabalho mudava algumas coisas: fazia à mesma 3 colunas; aqui dizia a unidade [primeira coluna], depois dizia nº de bolas brancas [segunda coluna] e nº de bolas amarelas [terceira coluna] e apagava estas partes [apontando para os denominadores] todas para não partir as bolas como tínhamos dito na outra aula.
2. **Professora Joana:** Certo, apagavas os…
3. **Gonçalo:** Denominadores.

   (…)
4. **Márcio:** Nós é igual, também fizemos esse erro.

   (…)
5. **Rita:** Nós podíamos ter pintado as bolas amarelas em vez das brancas.

   (…)

6. **Margarida:** No nosso trabalho podíamos ter feito caixinhas como a professora fez e assim era mais fácil de compreender.

   (…)
7. **Professora Joana:** Todas as resoluções são parecidas e já discutimos os pontos fortes, fracos e errados de cada uma delas. Agora antes de partirmos para a parte que ficou pendente na nossa tarefa, que era a generalização, que é encontrarmos uma forma, uma conta que nos permita calcular um número qualquer, vamos resolver uma tarefa também sobre as bolas de pingue-pongue que vai servir para organizarmos ideias e vai ajudar-nos a dar o pulo que queremos dar. Vamos colar no caderno. (…) O que é que esta tarefa nos pede? O que é que temos de fazer? Aqui temos que pegar na etiqueta que tínhamos e fazer estas divisões; temos 5 bolas, 10 bolas, 15 bolas, 20 bolas, 25 bolas, 50, 100.
8. **Diana:** Oh professora, nós vamos ter que desenhar 100 bolas?!
9. **Professora Joana:** Na aula passada vimos que podíamos fazer caixas de bolas de pingue-pongue e em cada uma colocar o número de bolas que considerarmos necessário. Por exemplo, tinha uma caixa com 60 bolas, tendo cinco caixas tinha 300 bolas. Era o exemplo da Margarida, lembram-se? (…) Aqui é uma hipótese. (…) O que aqui queremos é continuar com a nossa etiqueta: encontrar um quinto de bolas brancas e as restantes bolas amarelas, dependendo do número de bolas.

T.A.

Como ilustra o episódio 27, comecei por recordar com a turma as apresentações dos trabalhos (§1 a 6) o que serviu de introdução e apresentada para o trabalho que iriamos desenvolver com a tabela (§7).

Uma vez mais, ficou notória a dificuldade dos alunos ao terem como quantidade, por exemplo, 100 bolas de pingue-pongue (§8). Para fazer a ligação com a aula anterior e com as apresentações, decidi utilizar um exemplo trabalhado (§9). Considerei importante começar por aí para que os alunos pudessem recordar o que havia sido tratado na aula anterior.

Enquanto os alunos preenchiam a tabela, percorri a sala, com a professora cooperante, para ajudar os alunos na resolução da tabela. Enquanto o fazia, um aluno perguntou: "*Pintamos as bolas amarelas?*"; foi algo que nem eu nem a professora cooperante nos lembrámos de pedir aos alunos mas que ambas consideramos uma boa sugestão. Aqui fica evidente que os contributos dos alunos em cada aula são valiosos e poderão tornar cada aula mais rica em termos de aprendizagem.

Enquanto percorria cada grupo, tive como preocupação centrar-me nos alunos com mais dificuldades para que estes conseguissem acompanhar a aula da melhor forma. O mesmo aconteceu com a professora cooperante.

Devo salientar que não descurámos dos alunos com mais facilidades e, com esses, preocupámo-nos em desenvolver o pensamento, incentivando-os a encontrar a generalização da tarefa.

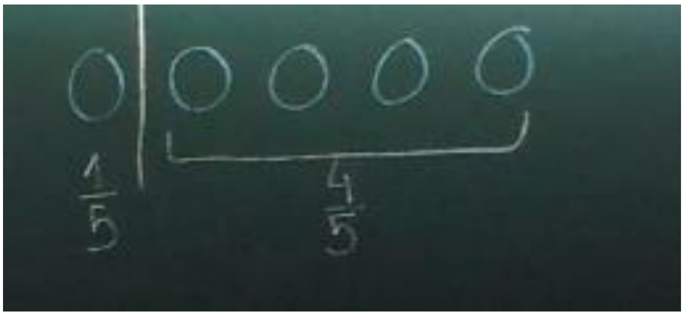


Figura 42 - Esquematização do exemplo realizado em grande grupo na exploração da tabela da tarefa "As bolas de pingue-pongue"

Os alunos com menos facilidades apresentaram algumas dúvidas que a professora cooperante não achou justificáveis depois de já termos discutido este tema em aulas anteriores. Assim, pediu-me que resolvesse com a turma o primeiro exemplo da tabela (figura 42). À medida que explorava o primeiro exemplo da tabela, solicitei a participação dos alunos com mais dificuldades levando-os a compreender porque é que estava a dividir as 5 bolas de pingue-pongue.

Ao continuar a circular pela sala percebi que as dificuldades, na sua maioria, se centravam ao nível da esquematização e não tanto da compreensão. Nesse sentido, percorri cada par de aluno para que pudesse auxiliar a sua esquematização de ideias e verificar se estavam num bom caminho. Enquanto o fazia, Sofia abordou-me indicando que não sabia trabalhar com 50 bolas de pingue-pongue (episódio 29):

Episódio 29: Eu não sei fazer com as 50 bolas…

1. **Sofia:** Professora…
2. **Professora Joana:** Sim Sofia?
3. **Sofia:** Eu não sei como fazer com as 50 bolas.
4. **Professora Joana:** [pegando no caderno e no lápis] Lembras-te como pensamos na apresentação do grupo da Margarida e como eu expliquei há bocado? Eu fiz caixinhas e imaginei que cada uma delas tinha quantas bolas?
5. **Sofia:** 60…
6. **Professora Joana:** Sim, 60. Porquê?
7. **Sofia:** Porque eram 300 a dividir por 5.
8. **Professora Joana:** Exatamente. Então e aqui quanto é?
9. **Sofia:** Ah, aqui são 50 bolas a dividir por 5 caixas dá 10 bolas em cada caixa, já sei!

T.A.

Para ajudar esta aluna, decidi recordar o exemplo anterior remetendo-o para a sua dúvida levando a aluna a compreender a tarefa (§4) O facto de utilizarmos como referência alguns exemplos já trabalhados na sala de aula, estamos a ajudar os alunos a desenvolver o seu pensamento e a estabelecerem ligações.

Não foi só Sofia que apresentou dúvidas deste género, outros alunos também o fizeram (episódio 30):

Episódio 30: O que é que nós vimos?

1. **Catarina:** Oh professora eu percebi com 5 bolas mas agora com 10 eu acho que as bolas brancas são dois décimos porque há bocado era um quinto e deixávamos branca 1 bola…
2. **Professora Joana:** O que é que nós vimos? Que dois décimos era uma bola partida em vários bocadinhos, que dava dois décimos, não foi? Aqui tendo 10 bolas isto é a nossa unidade, tal como 5 bolas era a nossa unidade. Independentemente disso continuamos a trabalhar com quintos! Os dois décimos é uma relação, por assim dizer; são duas bolas brancas de 10 no total. Então 2 bolas representam um quinto de bolas brancas depois, se formos dividindo sempre por 2 vamos ver que temos mais 4 conjuntos com 2 bolas cada um e aí estão os quatro quintos. Percebeste Catarina?
3. **Catarina:** Acho que sim. Então se já não é dois décimos dividia aqui [apontando para 5 bolas brancas e as restantes seriam 5 amarelas].
4. **Professora Joana:** Gonçalo, ajuda lá a Catarina… [O Gonçalo é colega de mesa da Catarina].
5. **Gonçalo:** Não podem ser 5 bolas brancas porque isso é a metade. Se fores contar 5 bolas como um quinto tinhas que acrescentar bolas porque tinhas que ter em cada quinto 5 bolas porque a unidade eram cinco quintos. É como se cada queijinho de quinto tivesse desenhado 5 bolas.
6. **Professora Joana:** Ou seja [desenhei um queijinho porque a Catarina não os tinha na mesa]: o que o Gonçalo disse foi que se tivesses um queijinho aqui tinhas só pintado um quinto mais um quinto. Ainda te faltavam mais três quintos, percebes?

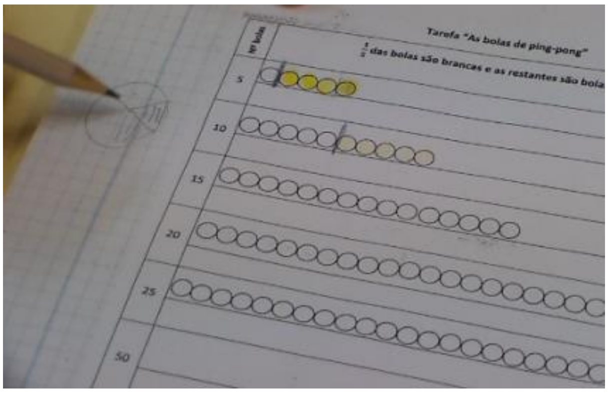


Figura 43 - Estratégia utilizada com Catarina

7. **Catarina:** Então um quinto nestas bolas [nas 10 bolas] era uma bola, é como em cima

8. **Gonçalo:** Não, porque ainda te sobrava bolas e não pode sobrar. Se escrevermos em cada bola 1 2 3 4 5, vemos que o número 1 repete-se duas vezes então um quinto são duas bolas e depois vemos também que os outros números também se repetem e assim fazemos sempre conjuntos de 2 números. Então cada quinto tem 2 bolas
9. **Professora Joana:** Entendeste Catarina? Muito bem Gonçalo!
10. **Catarina:** Acho que sim…
11. **Professora Joana:** Então tenta fazer sozinha.

T.A.

Devido às fragilidades da aluna (§1), decidi encontrar um exemplo com uma unidade concreta, neste caso os *queijinhos* (§6), por se tratar de um material de referência para os alunos. Decidi também pedir ajuda ao colega do lado (§3) por ter uma linguagem mais próxima da sua idade. Ainda que a aluna tivesse compreendido o que era dois décimos de uma bola, não compreendeu que traçando um quinto na metade das bolas estaria incorreto. O colega foi uma ajuda valiosa. Acabei por encorajá-la a resolver os restantes exemplos sozinha (§11).

Se Catarina apresentou dificuldades, Gonçalo já pensava na generalização, como ilustra o episódio 31:

Episódio 31: Já? Explica-me lá então…

1. **Gonçalo:** Professora como já acabei estive a olhar para isto e acho que já encontrei a generalização!
2. **Professora Joana:** Já? Explica-me lá então…
   [Na folha tinha escrito: 4 x 1 = 4 + 1 = 5 – nº de bolas = 5 4 x n = n + n = nº de bolas]
3. **Gonçalo:** Então eu sei que um quinto é 1 bola quando a unidade são 5 bolas e quatro quintos são 4 bolas então o nosso n pode ser o nº que quisermos. Aqui também falamos que cinco a dividir por cinco é um porque são os quintos.
4. **Professora Joana:** Calma, vamos só pensar primeiro com um exemplo [desenhei 5 bolas no caderno e fiz a divisão 1 bola 1/5 e 4 bolas 4/5] vamos traduzir isto para linguagem matemática: 1 bola e um quinto e 4 bolas de quatro quintos (…) A palavra "de" em matemática é o sinal de vezes.
5. **Gonçalo:** Ah! Então o *n* é um quinto e quatro quintos!
6. **Professora Joana:** Não, porque se formos olhar para a tabela [virei a página do caderno para a tarefa que estávamos a fazer] vemos que um quinto e quatro quintos mantem-se para todas as unidades; isso é o que é pedido que façamos.
7. **Gonçalo:** Ah sim, pois é, está na etiqueta…
8. **Professora Joana:** Exatamente! Então mas lê lá isso que escrevi agora que já sabes que o "de" na matemática é o sinal de vezes.

9. **Gonçalo:** Um quinto de 5 é 1 bola branca.
10. **Professora Joana:** Sim, isso é quando a nossa unidade são 5 bolas. E para 10 bolas?
11. **Gonçalo:** Oh, assim já sei o que tinha mal! Fui mesmo burro! O *n* é o número de bolas porque é o que muda *né* professora?
12. **Professora Joana:** Sim…
13. **Gonçalo:** [Apaga tudo o que tinha escrito e escreve o que descobriu: 1/5 x n e ¼ x n] Fica assim! Já sei!

T.A.

Comecei por contactar com a estratégia de Gonçalo (§1). Perante o pensamento do aluno, o que fiz foi ajudá-lo a melhorar as suas anotações privilegiando as suas descobertas, ao observar o resultado final da tabela (§4, 6, 8 e 10). Neste caso, apenas ensinei a forma como poderia representar a sua expressão. Ao conversar com o aluno, consegui compreender o desenvolvimento do seu pensamento matemático e a facilidade com que mobiliza conhecimentos que vão além do que já tinha sido trabalhado na sala de aula.

Durante a exploração da tabela as mesmas dúvidas, sobre a forma como trabalhar com quantidades superiores ao que poderiam desenhar, mantiveram-se ao longo da tarefa. Para fazer face a essas dificuldades em conjunto com a professora cooperante, evidenciámos, uma vez mais, a utilidade de fazer quadrados que representavam caixas de bolas de pingue-pongue, como ilustra o episódio 32:

Episódio 32: Apontamentos importantes

1. **Professora Paula:** Temos que pensar quantas caixinhas temos que desenhar para caber a nossa unidade e nada ficar de fora, para nunca ficar de fora nenhuma bola de pingue-pongue. As caixinhas todas somadas devem ter a nossa unidade.
2. **Professora Joana:** Não dá jeito nenhum desenhar 100 bolas, por exemplo, por isso temos que desenhar caixinha que é bem mais fácil. O que aqui temos de saber é quantas caixinhas desenhamos, que vão ser sempre 5 porque estamos a trabalhar com os quintos, e quantas bolinhas de pingue-pongue colocamos em cada caixinha.

T.A.

Considerámos importante focar a atenção dos alunos neste aspeto por facilitação esquemática e de compreensão. Ainda assim, alguns alunos erraram no número de caixas (episódio 33):

Episódio 33: Dez caixinhas

1. **Bruno:** Professora eu fiz assim [desenhou 10 caixas para fazer 100 bolas, que entretanto apagou (figura 44)].
2. **Professora Joana:** Aqui tens 10 caixinhas, cada uma tem 10 bolas de pingue-pongue. Mas estamos a trabalhar com décimos ou com quintos?
3. **Bruno:** Com quintos.
4. **Professora Joana:** Então por que é que desenhaste 10 caixas?
5. **Paulo:** É tipo isto aqui, tens que ter sempre os quintos [apontando para a unidade com 5 bolas].
6. **Professora Joana:** Exatamente. Olha aqui, tinhas 10 bolinhas mas não foste dividir uma a uma, pois não? Como é que fizeste?
7. **Bruno:** Então vi que podia fazer 5 conjuntos de 2 bolas porque cinco vezes dois é dez.
8. **Professora Joana:** Então pensa dessa forma para 100 bolinhas; é só acrescentar um…
9. **Bruno:** zero! Então faço conjuntos de 2 bolas que neste caso são 20.
10. **Professora Joana:** Sim!

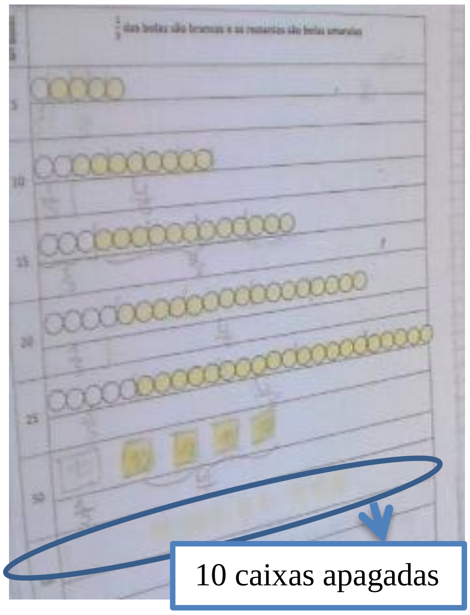


Figura 44 - Erro de Bruno ao representar dez caixas (apagou as caixas erradas)

T.A.

Ao conversar com Sérgio (§3 a 12) compreendi que não percebeu o porquê de ter de dividir as bolas apenas por cinco caixas e visto que muitos outros alunos pensavam desta forma, a professora cooperante decidiu intervir na aula, tal como ilustra o episódio 34:

Episódio 34: Posso só referir uma coisa?

1. **Professora cooperante:** Joana posso só referir uma coisa? Isto é básico, mas há aqui meninos que não estão a perceber e já me estou a cansar de repetir sempre o mesmo-
2. **Professora Joana:** Claro que sim!

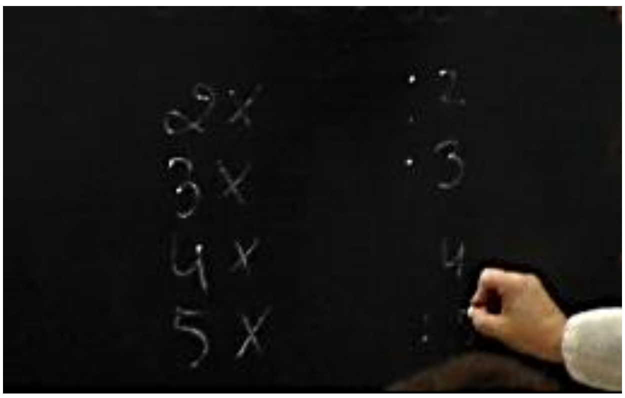


Figura 45 - Explicação da professora cooperante

3. **Professora cooperante:** Oh meninos! Vocês têm que ir sempre ao 1º ciclo, quando vocês no 1.º ciclo a professora dizia algo que era o dobro como é que faziam? Vezes 2. E o triplo? Vezes 3. E o quádruplo? Vezes 4. E o quíntuplo? Vezes 5. Muito bem! [os alunos foram respondendo à medida que a professora cooperante perguntava (figura 45)]. Então e se a professora Joana tivesse pedido em vez dos quintos, a metade como fazíamos? Dividíamos por 2! E se fosse a sexta parte? Dividíamos por 6! E a oitava parte? Dividíamos por 8! Mas como é a quinta parte é só dividir por quanto? Por 5! Então como aparece o um quinto é o quê? A dividir por 5! Porquê?
4. **Alguns alunos:** A quinta parte!
5. **Professora cooperante:** Então concentrem-se sff! E se aparecesse um quarto?
6. **Alguns alunos:** A dividir por 4!
7. **Professora cooperante:** Porque era a quarta…
8. **Alguns alunos:** Parte!
9. **Professora cooperante:** Então se esqueçam disso porque já trabalharam isso no 1º ciclo!

T.A.

Considero que a intervenção da professora cooperante (§1 a 9) tenha sido um reforço importante no decorrer da aula até porque cimentou algumas ideias que os alunos tinham, nomeadamente na razão de poderem apenas desenhar cinco caixas.

Quando todos os alunos preencheram a tabela e todas as dúvidas pontuais foram esclarecidas, a esquematização das bolas de pingue-pongue, para cada quantidade à exceção de números maiores, foram analisadas em grande grupo. Para isso, desenhei 5, 10, 15, 20 e 25 bolas no quadro e pedi aos alunos com mais dificuldades que me ajudassem a resolver (episódio 35):

Episódio 35: Oiçam todos agora!

1. **Professora Joana:** Oiçam lá todos agora: nós tínhamos visto que se a nossa unidade for 5 bolinhas, um quinto, Flávio, eram quantas bolas?
2. **Flávio:** 1 bola.
3. **Professora Joana:** Um quinto era uma bola. E quatro quintos?
4. **Flávio:** 4 bolas porque sobram 4 bolas e porque é um quinto mais um quinto mais um quinto mais um quinto.
5. **Professora Joana:** Certo! Marta, agora a nossa unidade muda; passa para 10 bolas. Então agora quando é que é um quinto?
6. **Marta M.:** Um quinto é uma bola de 10 [Neguei o que Marta tinha dito] Ai são 2 bolas, eu disse o de cima professora…
7. **Professora Joana:** Ah! Então um quinto de 10 bolas são 2 bolas. Porquê Marta?
8. **Marta M.:** Porque é um quinto e é 1 bola.

9. **Professora Joana:** Não, um quinto é 1 bola se a nossa unidade for 5 bolinhas, agora temos 10 bolinhas… [Márcio com a mão no ar] ajuda lá a Marta, Márcio.
10. **Márcio:** Já que o 10 também é múltiplo de 5, podemos dividir 10 por 5 e vai dar 2 bolas porque cinco vezes dois é 10 então um quinto, que é a quinta parte, são 2 bolas.
11. **Professora Joana:** Certo! O que aqui fizemos Marta [apontando para as 5 bolas da alínea anterior] foi dividir 5 bolas por cinco quintos porque é a nossa unidade; nós estamos à procura de um quinto de bolas brancas por isso dividimos sempre, sempre, sempre por 5. Percebes?
12. **Marta M.:** Sim…

T.A.

O mesmo se passou para os restantes exemplos. Considero que o facto de outros alunos, para além dos que peço, intervirem como uma mais-valia na discussão na medida em que ajudam na construção do pensamento dos outros alunos. Noto que alguns alunos ainda têm dificuldades em utilizar linguagem matemática correta e preferem resolver o que é pedido no quadro.

No fim da aula, perguntei aos alunos a que conclusões tinham chegado, o excerto do episódio 36 ilustra algumas intervenções:

Episódio 36: Conclusão

1. **Gonçalo:** Chegamos à conclusão que seja qual for a unidade, se estivermos a trabalhar com quintos, temos que dividir sempre por 5…
2. **Bruno:** Por exemplo, se fossem sextos era por 6!
3. **Diana:** Sim, e também vimos que trabalhando com quintos é a quinta parte de alguma coisa.

T.A.

Os alunos compreenderem e justificaram o porquê de dividirem a quantidade por cinco e relacionaram-no com ouros exemplos. Com isto, a sistematização da tabela, uma parte fundamental da aula em que se focam os aspetos essenciais, ficou estabelecida.

Em consenso com a professora cooperante, decidi retratar nesta aula apenas as quantidades cujas bolas estavam desenhadas na folha para que fosse mais fácil abordar, na aula seguinte, para os restantes números. Tínhamos planificado terminar a tarefa toda contudo, face às dificuldades dos alunos, decidimos não avançar e retomar a tarefa na aula seguinte.

Para concluir o estudo da tarefa, decidi ampliar a tabela que entreguei aos alunos para colar no quadro. Fi-lo para dar visibilidade à tabela aquando da discussão em grande grupo (figura 46).

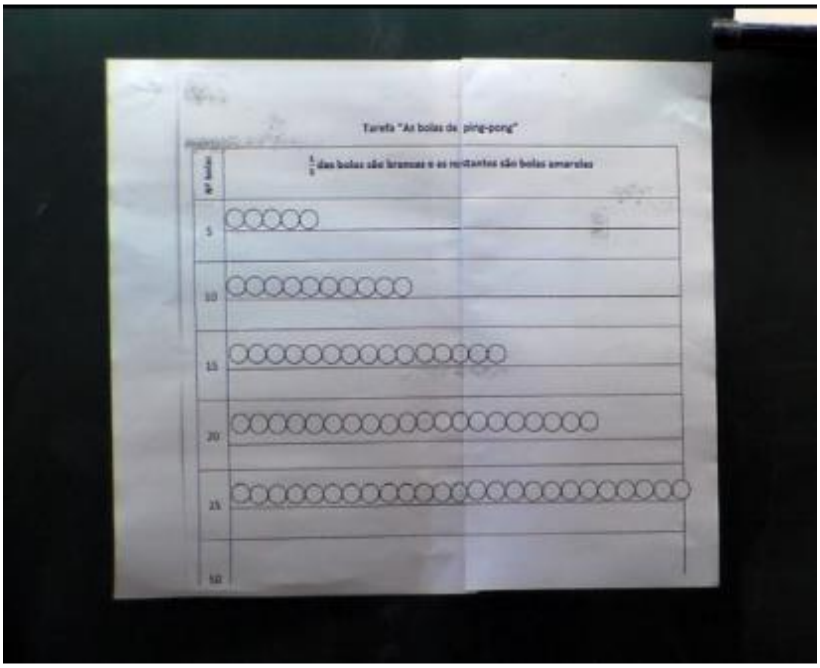


Figura 46 - Ampliação da tabela entregue aos alunos colada no quadro

O excerto da aula mostra como a tarefa foi abordada em grande grupo (episódio 37):

Episódio 37: Encerrar a análise das bolas de pingue-pongue

1. **Professora Joana:** Hoje vamos encerrar a análise das bolas de pingue-pongue com a utilização da nossa tabela. Para isso, trouxe esta tabela um bocadinho maior. Vamos todos abrir o caderno de matemática na tabela que estávamos a trabalhar que serviu de sistematização da atividade. (…) O que é que tínhamos de fazer com nesta tabela?
2. **Diana:** Tínhamos que encontrar um quinto de bolas brancas, como pedia a etiqueta da tarefa, e o resto eram as bolas amarelas, que eram quatro quintos.
3. **Professora Joana:** Muito bem! Então agora rapidamente vamos recapitular… tendo 5 bolas, como é que encontramos um quinto?
4. **Flávio:** Dividimos a unidade em 5 partes porque os quintos são 5 e depois vemos que cada parte tem 1 bola por são 5 bolas.
5. **Professora Joana:** Muito bem, vou então dividir estas bolas em 5 partes [escrevi com marcador na tabela ampliada do quadro] …
6. **Gonçalo:** Professora é isso; a nossa unidade está dividida em 5 partes iguais e se nós queremos que isso seja um quinto tem que ser 1 de 5.
7. **Professora Joana:** Exatamente! Então isto era como se eu tivesse 5 caixas e... [desenhei as 5 caixas no quadro]
8. **Bruno:** E só pintasse uma bola.

9. **Professora Joana:** E só desenhasse uma bola Bruno, porque cada caixa tem só uma bola
10. **Bruno:** Sim, isso!
11. **Professora Joana:** Então eu sei que uma caixa é um quinto, certo? E isto aqui quanto é que é?
12. **Alguns alunos:** Quatro quintos!
13. **Professora Joana:** Então tenho uma bola mais uma bola mais uma bola mais uma bola, ou seja, quatro bolas. Tendo isto, sei que posso transformar numa conta simplificada; é o mesmo que ter quatro vezes um. Porquê 4? Dedos no ar. Rodrigo?
14. **Rodrigo:** Porque temos 4 vezes 1 bola em cada caixa.
15. **Professora Joana:** Exatamente! Tenho 4 bolas brancas e 1 amarela. Isto que eu aqui escrevi agora têm que escrever vocês na vossa tabela, na linha por baixo das bolas de pingue-pongue que pintaram.

T.A.

Ao querer recapitular o trabalho que foi feito e discutido na aula anterior, pretendi que, mais tarde, fosse traduzido em linguagem matemática através da adição e multiplicação. Os alunos recapitularam o que foi feito (§1, 3 e 5).

Tendo em conta as dúvidas dos alunos em aulas anteriores, decidi começar por desenhar as caixas de bolas de pingue-pongue no início da tarefa, mesmo que o número de bolas fosse inferior a 50 para que os alunos compreendessem que a regularidade era dividir sempre a unidade por 5 partes.

Em seguida, traduzi o que desenhei no quadro e dividi na tabela em linguagem matemática (§13).

O mesmo aconteceu para os restantes exemplos: desenhei caixas de bolas, marquei um quinto e quatro quintos na tabela e fiz a passagem para expressões.

Dando por terminada a análise da tabela, o quadro ficou repleto de resoluções onde poderíamos observar as várias transformações, consoante o número de bolas selecionadas (figura 47).

Figura 47 - Conclusão da análise da tabela pertencente à nova tarefa "As bolas de pingue-pongue"

Como anteriormente referi, quando planifiquei esta aula com a professora cooperante, queríamos inserir as frações de quantidade onde os alunos iriam passar as expressões e cálculos efetuados para um quinto de bolas brancas e as restantes amarelas, para o trabalho com essas frações e, mais tarde, iriam chegar à generalização da tarefa. Isto não foi possível pelo facto de considerar, em consenso com a professora cooperante, que alguns alunos ainda sentiam dificuldades.

De modo a concluir a atividade, disse aos alunos que teríamos de encontrar a generalização por não podermos trabalhar com infinitas bolas dentro de cinco caixinhas, neste caso.

Ao terminar a exploração da tarefa, até este ponto, deixei bem claro aos alunos o porquê da divisão por cinco, uma vez que estávamos a trabalhar a quinta parte de algo e a necessidade de encontrarmos uma generalização para o problema.

Considero que foi uma tarefa bem conseguida e que todos os tópicos fulcrais da mesma foram trabalhados com os alunos, a saber:

- As partes fracionárias são partes iguais da mesma unidade;
- As partes em que se divide a unidade transmitem-nos quantas são necessárias para formar a unidade;
- O denominador indica por que número foi dividido a unidade de forma a produzir cada parte; logo, o denominador é o divisor.

- O numerador refere quantas partes da fração são consideradas. O numerador é um multiplicador indicando o múltiplo da parte fracionária.

Desafios

Um dos desafios com que me deparei nesta tarefa foi o de inventariar estratégias de resolução dos alunos durante a fase de preparação das aulas. Apesar de ter estudado a tarefa, como aluna e como professora, os alunos conceberam outro tipo de resoluções das que tinha imaginado. Esta situação provocou-me algum desconforto durante as aulas pois, como não tinha pensado nessas estratégias tive que tentar entendê-las e, ao mesmo tempo, apoiar os alunos.

Foi, igualmente, desafiante lidar com algumas das estratégias dos alunos uma vez que, como referi, incidiram sobre a equivalência de frações. Este não era o caminho que pretendia que a turma seguisse. Foram importantes os conselhos da professora cooperante para contornar a situação.

A inventariação de questões a colocar e de outras intervenções a fazer ainda durante a planificação, também foi um desafio. Pretendia que o que dissesse impelisse os alunos a justificarem as ideias, processos e resultados matemáticos registados nos seus cartazes. Ainda que tenha circulado, constantemente, pela sala para esclarecer algumas dúvidas e tomar conhecimento das estratégias dos alunos, houve a sempre a necessidade de formular novas questões, perante as resoluções dos vários grupos.

No que diz respeito à orquestração da discussão coletiva, o primeiro desafio prendeu-se com a ordem pela qual foi os grupos iriam apresentar os seus cartazes. Também aqui a colaboração da professora cooperante foi decisiva: aconselhou-me a começar por delinear o caminho que pretendia seguir de modo a poder estabelecer conexões entre as resoluções que seriam apresentadas, o que considero ter sido uma boa opção. O facto de ter tentado manter a discussão ativa traduziu-se num desafio pelo facto de algumas vezes, os alunos não participarem e nem ser fácil, mesmo incentivando-os, conseguir que o fizessem.

Capítulo V

Conclusão

Este capítulo encontra-se dividido em cinco seções: a primeira diz respeito a uma breve síntese do estudo que realizei; na segunda e terceira seções apresentarei as suas principais conclusões; em seguida – terceira secção – farei o levantamento de desafios que experienciei; e por fim, na última seção, farei uma reflexão global onde realçarei o contributo deste estudo para o meu desenvolvido profissional enquanto futura professora, e também a nível pessoal.

1. Sintetizando o estudo

Este estudo tem como objetivo compreender de que modo posso preparar e concretizar um ensino favorável à aprendizagem dos números racionais não negativos representados sob a forma de fração.

Perante este objetivo, formulei três questões:

1) A que aspetos dei especial atenção na preparação das aulas? Quais se destacaram como favorecedores da aprendizagem das frações?
2) Como conduzi as aulas orientadas para a aprendizagem das frações?
3) Que desafios experienciei?

Quanto à primeira questão (1) pretendi investigar o modo como preparava as aulas ao nível da escolha das tarefas a propor aos alunos bem como a sua seleção e seriação. Pretendi ainda compreender como poderia preparar eventuais questões a colocar e o tipo de intervenções a fazer. No que concerne à segunda questão (2), foquei-me na condução do ensino nos três momentos da aula que considerei importantes: apresentação da tarefa (como apresentava a tarefa à turma e por que razão o fiz de determinada forma e não de outra); monitorização do trabalho dos alunos (que questões coloquei e intervenções que fiz, e com que finalidade; orquestração de discussões coletivas (como abri o discurso da aula à voz dos alunos, que perguntas e intervenções fiz e as suas funções, como lidei com os erros que surgiram); e sistematização dos conhecimentos. Relativamente à última questão (3), tentei compreender quais os desafios com que me deparei ao longo da preparação e condução das aulas.

Do ponto de vista metodológico, o estudo enquadra-se numa abordagem qualitativa de cariz interpretativo e constitui uma investigação sobre a minha própria prática. Neste âmbito, desempenhei um duplo papel: o de professora e investigadora numa turma do 2.º ciclo no 5.º ano de uma escola no concelho do Seixal. No que diz respeito à recolha dos dados empíricos, deste estudo recorri a duas técnicas: recolha documental e observação participante.

Na recolha documental, considerei documentos meus, enquanto professora da turma (planificações e reflexões pessoais sobre a prática,) e produções dos alunos. No que diz respeito à observação participante, os dados provieram de catorze aulas lecionadas sobre frações. Relativamente a algumas delas registei notas campo e tive a ajuda da minha colega de estágio que fez registos de interações entre mim e os alunos. Noutras, e para além destas notas, os dados foram registados através da gravação em suporte áudio e vídeo. Posteriormente, transcrevi extratos destas gravações.

Apresento, em seguida, as conclusões do estudo estruturadas em torno de três eixos: a) preparação das aulas; b) condução das aulas; c) desafios.

2. Preparando as aulas

Perspetivando o ensino das frações, estudei o currículo e selecionei, em conjunto com a professora cooperante, algumas tarefas a abordar com a turma, inspiradas numa trajetória de aprendizagem apresentada por Silva (2012). Esta escolha não foi fácil; pelo contrário. Reuni formal e informalmente várias vezes com a professora cooperante para conseguir tomar decisões sobre as tarefas que iriamos propor à turma. No entanto, este foi um aspeto a que dediquei especial atenção pois, como refere Canavarro et al. (2011, referindo Stein et al), "a seleção de uma tarefa adequada e valiosa é muito importante pois ela tem implícita uma determinada oportunidade de aprendizagem, mas, uma vez selecionada, é crucial que o professor equacione como explorar as suas potencialidades junto dos alunos" (p. 256).

Decidimos delinear uma trajetória de aprendizagem para o ensino das frações, partindo do conhecimento prévio dos alunos para as novas aprendizagens. Esta trajetória teve em conta as grandes ideias — *big ideas*, segundo Fosnot e Dolk (2002) — que pretendíamos que os alunos aprendessem; o conhecimento dos alunos; as dificuldades dos alunos.

De acordo com Delgado (2013), referindo-se a Cobb et al., a construção de trajetórias de aprendizagem beneficia os alunos mas, também, os professores na medida em que serve para o professor estudar a melhor forma de equacionar as suas práticas de ensino.

Neste ponto da minha formação, penso que não possuo experiência suficiente para compreender, em profundidade, só por mim, se uma tarefa é poderosa, ou não e, por isso, utilizei como referência o trabalho desenvolvido por Silva (2012). Debati, em conjunto com a professora cooperante, uma trajetória de aprendizagem para o ensino das frações inspirada em Silva (2012), no âmbito da qual seriam propostas aos alunos 10 tarefas. Mais tarde, decidimos reorganizar a trajetória efetuando algumas mudanças, como expliquei no capítulo 3. Para mim foi muito útil toda a atividade que desenvolvi com a professora cooperante na conceção da trajetória de aprendizagem, tanto mais que, no início, os conhecimentos prévios dos alunos só a professora cooperante os conhecia. Eu fui contactando com os mesmos apenas com o passar do tempo e a com a atividade desenvolvida com as primeiras tarefas.

O facto de ter existido uma reorganização na trajetória faz com que o caminho pensado pelo professor se torne “uma conjetura acerca do processo que conduz à aprendizagem” (Silva, 2012, p. 40). Neste caso, a responsabilidade da reorganização foi minha e da professora cooperante por questões de dificuldade dos alunos no estudo dos números racionais. Esta ideia vai ao encontro de Silva (2012), que reforça esta reorganização como “peça chave do trabalho do professor” (p. 40).

A referida reorganização foi decisiva para todo o trabalho subsequente pelo que, considero que a seriação de tarefas bem como a sua organização numa trajetória de aprendizagem são uma mais-valia pois proporcionaram-me uma maior segurança.

O facto de os alunos apresentarem dificuldades na aprendizagem do conceito do conceito de fração, facto que, como referi, conduziu à reorganização da trajetória, vai ao encontro do que sublinham vários autores. Entre estes estão Quaresma e Ponte (2012) que referem não só dificuldades associadas à sua representação — os alunos passam a considerar dois números como um só — mas a multiplicidade de significados que o referido conceito tem.

Em todo este encadeamento de tarefas, considerei importante estudar cada uma detalhadamente, numa primeira fase enquanto aluna e, mais tarde, como professora.

Pretendia, nomeadamente, identificar as suas potencialidades, antecipar estratégias, e resoluções dos alunos e inventariar algumas questões que me pudessem ser úteis na sala de aula e enriquecer a atividade dos alunos uma vez que é importante conhecer como os alunos pensam, tal como afirma, nomeadamente Delgado (2013).

Para o efeito, sempre que possível, li artigos e planificações de outros professores, tal como aconteceu na tarefa “A discussão do João e da Maria”. Além disso, resolvi cada tarefa e debati as suas resoluções com a professora cooperante em reuniões informais e formais. Toda esta atividade corresponde à primeira das cinco práticas referidas por Smith et al. (2009): antecipar.

Considero que esta prática constituiu-se como uma mais-valia pois permitiu que tivesse em conta aspetos importantes relacionados com as tarefas que, certamente, no momento em que as pusesse em prática não iria conseguir ter em atenção porque na aula há muitos aspetos a que atender em simultâneo. Por exemplo, quando preparei a aula associada à primeira versão da tarefa “Quanto passa da unidade ou falta para a unidade”, a professora cooperante referiu que, com esta tarefa, poderia introduzir o conceito de numeral misto e, por isso, fiz pequenas alterações no seu enunciado, criando espaço para os alunos pensarem no neste conceito. Também na tarefa “Exploração dos *queijinhos*” a professora cooperante chamou-me à atenção para a utilização dos sectores circulares obtidos a partir da divisão equitativa de círculos iguais num diferente número de partes, em diferentes cores para que todas as partes da unidade fossem para todos os alunos da mesma cor para que a comunicação fosse mais simples e eficaz.

De modo a favorecer a aprendizagem dos alunos, considero também que os materiais a utilizar enquanto modelos para apoiar a exploração das tarefas são fundamentais e é no momento de preparação das aulas que os professores poderão analisar qual o material que mais se adequa à atividade que pretende desenvolver tendo em conta a foco das aprendizagens visadas. No que diz respeito a este ponto, analisei com a professora cooperante materiais de apoio que, a meu ver, se adequavam a determinadas tarefas. Por exemplo, na tarefa “as tampinhas do Carlos” utilizei tampas de garrafas de água para que os alunos trabalhassem a relação parte-todo; na tarefa “Exploração da reta numérica” sugeri à professora cooperante que a reta numérica que cada aluno possuía fosse ampliada e colada no quadro para que a exploração da tarefa fosse realizada ao mesmo tempo, por todos; na tarefa “Do todo às partes” introduzi as molinhas de florista e quadrados em cartolina.

Ao trabalhar para minimizar esta sensação de “não sei”, comecei a ter um maior conhecimento sobre os Programas de Matemática do Enino Básico e sobre como organizar o trabalho tentando ter em conta dois programas, em simultâneo, que têm diferenças bastante significativas entre si. Além disso, fiquei mais consciente sobre toda a estrutura matemática relativa ao estudo das frações, nomeadamente ideias-chave e significados.

Com o passar das aulas, comecei a ser capaz de inventariar estratégias que podia utilizar para determinada tarefa, bem como eventuais dúvidas dos alunos e modo de lhes fazer face e, ainda, questões a colocar. Tomando como exemplo a tarefa “A discussão do João e da Maria”. inventariei todas as possíveis hipóteses de solução dos alunos, uma vez que se trata de uma questão aberta com várias respostas corretas. Para esta tarefa, formulei também várias questões/intervenções que me permitiram ter em conta vários aspetos relacionados com a tarefa: (i) Caso consideres que foi o João a comer mais, o mesmo acontece para qualquer caso?; (ii) Há colegas que dizem que a Maria poderá ter comido mais chocolate que o João; será possível? Como?; (iii) Não sabemos o tamanho do chocolate que o avô ofereceu, temos que pensar acerca disso; (iv) Estão apenas a considerar chocolates iguais? E se fossem diferentes?; (v) Será que há alguma forma de comerem a mesma quantidade de chocolate?; (vi) Porque é que ¼ de chocolate pequenino e ¼ de chocolate grande não é a mesma quantidade?.

A formulação de questões prévias permitiu-me pensar sobre a tarefa e sobre os objetivos da mesma. Também contribuiu para que a aula, em situações de impasse, ganhasse outro ritmo e que os alunos fossem levados a refletir sobre as ideias-chave associadas a cada uma.

Uma forma de favorecer o trabalho dos alunos relaciona-se com a sua organização. Privilegiei o trabalho entre pares ou em pequenos grupos de 4 ou 5 elementos, seguindo-se sempre uma discussão coletiva onde pretendia que os alunos adquirissem espaço para partilhar as suas estratégias e explicarem como raciocinaram. Enquanto estudei as tarefas, considerei que o trabalho entre pares e pequenos grupos seria o mais indicado por julgar fundamental que os alunos discutissem ideias trabalhando em prol de um objetivo comum: a resolução da tarefa.

No que diz respeito à incidência da sistematização pretendi que esta surgisse com a função de institucionalização dos conhecimentos matemáticos trabalhados, isto é, preparei esta fase da aula pensando retomar em frases e intervenções da turma para focar as ideias matemáticas importantes da aula. Por exemplo, na tarefa "As tampinhas do Carlos" foi fortemente relacionado o denominador com o numerador partindo da intervenção de Margarida: "Oh professora temos que olhar para o denominador e o numerador!" (N.C.).

3. Conduzindo as aulas

Apresentação das tarefas

No que diz respeito à apresentação das tarefas à turma, procurei sempre fazê-lo oralmente sendo que, ou começava eu por ler o enunciado da tarefa em voz alta, explicando-o à turma, mas sem avançar com informações sobre a sua resolução, ou pedia a algum aluno que o fizesse incentivando-o a explicar e, no fim, eu realçava os aspetos essenciais da tarefa.

Boavida et al. (2008), referem que para resolver problemas, entre outros aspetos, "os alunos necessitam de ler (ou que alguém lhes leia o problema)" (p. 22). Ao agir da forma que mencionei, pretendi que os alunos compreendessem o enunciado da tarefa de modo a conseguirem resolvê-la.

Para apresentar as tarefas à turma, comecei, no início da trajetória, nomeadamente com a tarefa "Pintando azulejos", por tentar criar um contexto familiar aos alunos referindo-me à pintura da fachada da escola. Fi-lo porque, Vale e Pimentel (2004), referindo-se a Pólya, salientam a necessidade de "procurar algo que se relacione com o problema em causa" (p. 21). Também nas tarefas "As bolas de pingue-pongue" e "A discussão do João e da Maria" invoquei um contexto familiar aos alunos.

No que diz respeito ao contacto dos alunos com o enunciado de cada tarefa, utilizei duas estratégias: projeção na tela branca; distribuição do anunciado. Em ambas os casos, e sempre que se tratava de tarefas com mais que uma parte, começava por distribuir/projetar a primeira parte do enunciado para focar a atenção dos alunos no trabalho. Fazia-o para que os alunos explorassem cada tarefa faseadamente. Realço que quer com projeção ou entrega de enunciado, a resolução de todas as tarefas originou registos escritos no caderno diário.

Monitorização do trabalho dos alunos

No que diz respeito à monitorização do trabalho dos alunos, nomeadamente no acompanhamento da atividade que desenvolviam, circulei sempre pela sala com o objetivo de me conhecer essa atividade e, também, para compreender seus raciocínios, para conseguir selecionar e seriar os que seriam apresentados à turma. Todo este trabalho corresponde a três das cinco práticas referidas Smith et al. (2009): monitorizar, selecionar e seriar.

Para este efeito, e quando necessário, fiz intervenções e coloquei questões variadas. Por exemplo, na tarefa "As bolas de pingue-pongue" quando pedi a Tomás que me explicasse o que o seu grupo estava a fazer pretendi conhecer o raciocínio dos alunos. Quando, várias vezes ao longo de cada tarefa, perguntava aos alunos "Há dúvidas?" fazia-o com a função de inventariar dúvidas que, posteriormente, pudessem ser esclarecidas ou debatidas.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, tentei acompanhar de perto os alunos que apresentavam mais dificuldades. Fi-lo, não descurando os restantes, com o propósito de tentar manter o mesmo nível de desenvolvimento da aula em cada aluno/par/ grupo.

Durante a fase de exploração da tarefa, ao percorrer cada grupo e, no caso de tarefas como "A discussão do João e da Maria", "As bolas de pingue-pongue" e "A exploração dos queijinhos" tentei que os alunos considerassem outras hipóteses, sem dar demasiadas pistas sobre a sua resolução e sem me envolver em demasia no percurso seguido por cada um. Por exemplo, na "Exploração dos queijinhos" ao pretender que criassem a unidade pedi, aos alunos com mais dificuldades que começassem por utilizar os meios e os quartos por uma questão de facilitar a passagem para frações maiores; e na tarefa "As bolas de pingue-pongue" reforcei o facto de não se saber quantas bolas correspondiam 4/5.

Uma grande preocupação que tive, ao longo da exploração de cada tarefa, foi a envolvência de todos os elementos de cada grupo para que existisse uma harmonia no trabalho. Nomeadamente, na tarefa "As bolas de pingue-pongue", reforcei junto de alguns grupos a importância de todos participarem na atividade e de todos ajudarem na descoberta de estratégias de resolução.

Durante a atividade em pequenos grupos, tive em consideração também a compreensão da tarefa por todos os elementos do grupo e tentei sempre focar a atenção dos alunos na tarefa. Tomando como exemplo a tarefa “Partilhas justas”. Durante a sua resolução os alunos inventariam hipóteses tomando outros exemplos (metades) e, durante a discussão da tarefa, reforcei o trabalho com a quarta parte interrogando à turma “O que sabemos acerca dos quartos?” ao que me responderam “têm que ser todos iguais”.

Uma vez que antecipei algumas das dificuldades que poderiam surgir aliadas a esta tarefa, muitas das vezes optei por recorrer a problemas mais simples para que os alunos, com mais fragilidades e não só, conseguissem progredir no seu pensamento e estratégias de resolução. Na tarefa “As bolas de pingue-pongue”, fi-lo algumas vezes pedindo aos alunos: “Vamos pensar primeiro só nos quintos porque é o que a etiqueta nos pede, certo?”.

Ao circular pela sala durante o trabalho autónomo dos alunos, tomei algumas notas sobre a organização da discussão coletiva. Estas eram úteis para sequenciar as apresentações dos alunos e, no caso da tarefa “As bolas de pingue-pongue”, foram úteis para tomar a decisão de não corrigir as estratégias dos alunos de modo a enriquecer a discussão coletiva.

Em suma, comecei por “identificar o conjunto de estratégias (corretas e incorretas)” (Equipa PFCM, 2010/2011, p. 2); depois, observei e interagi com os alunos para “tentar compreender os raciocínios matemáticos e estratégias de resolução que utilizam” (idem) enquanto resolviam a tarefa em pequenos grupos; em seguida selecionei “quem partilhará o seu trabalho com o resto da turma” (idem) fazendo uma escolha intencional “sobre esta ordem” (idem); por fim, pretendi que os alunos estabelecessem “conexões entre as suas resoluções e a de outros alunos” (p. 3).

As decisões para a organização das discussões coletivas foram tomadas em conjunto com a professora cooperante. Em algumas das tarefas, como foi o caso de “As bolas de pingue-pongue”, não houve uma seleção de trabalhos a serem apresentados, mas sim uma sequenciação. Esta decisão justificou-se pelas estratégias utilizadas pelos alunos; optámos por partir de estratégias incorretas ou incompletas para a estratégia com o pensamento mais organizado pois, as estratégias incorretas ou incompletas foram as mais utilizadas pelos alunos. Em outros casos, como a tarefa “A discussão do João e da Maria”, partimos de alunos com uma resposta parcialmente certa para alunos com a resposta totalmente correta. Diferentemente, na tarefa “Exploração dos *queijinhos* “, parti de respostas erradas para a discussão da resposta correta.

Orquestração da discussão coletiva

Para a orquestração de discussões coletivas, tive que ter em conta vários aspetos: como organizar a exposição das estratégias dos alunos; perceber qual seria o melhor momento para colocar ou não questões previamente selecionadas; incentivar os alunos a terem uma voz cada vez mais ativa nas apresentações (quer os alunos que estavam a apresentar, quer os que estavam a assistir às apresentações); tentar não interferir em demasia durante as explicações dos alunos; salientar posições divergentes; abrir o discurso da aula à voz dos alunos tentando que cheguem a conclusões matemáticas válidas, controlando o andamento da discussão e possibilitando que haja espaço para diferentes vozes. Boavida (2005) realça estes aspetos salientando-os como essenciais para a prática de boas discussões coletivas.

Para me preparar para orquestrar estas discussões, preocupei-me, ainda na fase de preparação das aulas, por inventariar um conjunto de questões a colocar. Com o desenvolver da atividade dos alunos, formulei outras questões e, em alguns casos, durante as apresentações à turma, decidi apenas intervir quando todos os alunos de cada grupo apresentassem o seu trabalho e a turma o comentasse, como foi o caso da tarefa “As bolas de pingue-pongue”. Em outras tarefas, intervim consoante o desenrolar da discussão coletiva, como foi o caso da tarefa “As barras de chocolate”.

Assim, optei por disponibilizar espaço na aula para emergirem diferentes vozes tentando, assim, que não existisse a tradicional forma de ‘dar a aula’ onde o professor é a figura central; decidi valorizar a explicação dos alunos e a justificação das suas estratégias por considerar um aspeto essencial da para a aprendizagem da Matemática pois favorece a construção de significados. Exceto na fase de sistematização, as intervenções que fiz derivaram, sobretudo, da função do papel de moderadora e falei, maioritariamente, quando os alunos mostravam fragilidades ou erros que não conseguiam ultrapassar interagindo entre si.

Ao longo das apresentações das estratégias de resolução, a minha atitude face ao erro não foi procurar que os alunos refletissem de modo a identificarem a incorreção e apenas tentava ajudá-los a chegar à resposta correta. Por exemplo, na tarefa “as bolas de pingue-pongue" durante a apresentação do primeiro cartaz, interroguei os alunos acerca da estratégia que tinham utilizado levando-os a descobrir a imprecisão. Pretendi, ainda, que não fosse só o grupo que estava a apresentar, mas sim os alunos no geral, a compreender o que não estava correto e porquê.

Procurei também realçar pontos importantes de cada tarefa tentado sempre fazer a ligação com outras tarefas e conteúdos já estudados, como aconteceu na tarefa "A exploração da reta numérica", ao utilizar uma tarefa de referência da turma — "A visita de estudo e a distribuição das baguetes" — para introduzir a representação de frações na reta numérica. Procurei, também, após cada apresentação, que os alunos participassem ativamente na discussão e colocassem dúvidas e questões aos colegas e não avançava para apresentações seguintes se sentisse que subsistiam dúvidas sobre algum tópico apresentado, o que foi bastante frequente no estudo da fração como relação parte-todo, nas tarefas "Do todo às partes" e "Tampinhas do Carlos". Para que as apresentações não fossem uma sucessão de estratégias escritas no quadro ou cartazes expostos, procurei que os alunos estabelecessem conexões entre apresentações e observassem as suas diferenças e/ou semelhanças, como aconteceu na tarefa "As bolas de pingue-pongue".

Durante a discussão coletiva, senti necessidade de mobilizar materiais de referência para os alunos (sectores circulares obtidos a partir da divisão equitativa de círculos iguais num diferente número de partes, por exemplo). Fi-lo porque para alguns alunos ainda se tornava complicado compreender certos conceitos, como por exemplo, a equivalência de frações.

Para iniciar as discussões coletivas do trabalho de cada aluno/ par/ grupo, comecei por dar a voz aos alunos, pedir à turma para colocar questões a quem explicava levando-os a confrontarem as suas ideias/ estratégias. Sempre que observava que os alunos não estavam, na sua maioria, a acompanhar e compreender a estratégia do(s) colega(s), a minha intervenção aumentava.

Moderei cada discussão privilegiando o raciocínio matemático dos alunos pois, pretendi que explicassem, argumentassem e provassem o seu ponto de vista. Ao explicarem, estavam a tornar as suas estratégias inteligíveis para os colegas e ao argumentarem estavam a tornar públicas as razões que os levaram a enveredar por determinado caminho e não por outro.

Nesta fase da aula, desejei que os alunos desenvolvessem a sua capacidade de argumentar matematicamente incentivando-os a fundamentar as suas ideias através de figuras, desenhos, esquemas ou cálculos. A argumentação matemática é, segundo Boavida (2011), "um hábito de pensamento relacionado com o entendimento do "porquê das coisas" (p.).

Em suma, nas discussões coletivas, pretendi encorajar os alunos "a partilharem, explicarem e justificarem os seus raciocínios, a apresentarem as suas dúvidas ou dificuldades, a questionarem os colegas e a pronunciarem-se sobre o que ouvem" (Equipa PFCM, 2010/2011, p. 1).

Ao tomar a decisão de dedicar tempo de aula para a discussão coletiva considero que tomei a opção correta pois, tal como alguns alunos me disseram "temos que tentar algumas vezes para acertar na resposta e por ouvirmos os colegas é mais fácil de chegarmos todos à resposta certa" (Gonçalo). Este é, sem dúvida, um momento de grande importância numa aula de Matemática e os alunos entendem a importância desta atividade.

4. Desafios experienciados

No que diz respeito à preparação das aulas, vários foram os desafios com que me confrontei. O primeiro foi a falta de experiência profissional no que concerne à seleção e seriação de tarefas poderosas para favorecer a aprendizagem das frações. Para colmatar esta dificuldade, contei com a preciosa ajuda da professora cooperante: foi o meu grande apoio durante a preparação e condução das aulas, a minha 'muleta' e, com ela, aprendi que aspetos devem ser tidos em conta no trabalho de ensino. Aprendi que, tal como Canavarro (2011) refere, que par os alunos terem contacto com tarefas/ aprendizagens enriquecedoras temos que "ir além de conceitos e treinos de procedimentos – estes continuam a ter o seu papel mas não esgotam a Matemática que os alunos precisam atualmente de aprender" (pp. 16 e 17).

Aliado a este desafio, senti um outro no que diz respeito à previsão das resoluções dos alunos. Nas primeiras planificações das aulas era-me complicado antecipar respostas dos alunos pelo que, procurei apoio na professora cooperante e na professora orientadora. Procurei também ler artigos, como referi anteriormente. Este desafio foi sendo colmatado ao longo do estágio com a experiência que fui adquirindo com as aulas e ao reunir formal e informalmente com a professora cooperante. Também Canavarro

(2011) salienta este desafio como bastante recorrente. Como professora da turma, procurei “conhecer muito bem” (Canavarro, 2011, p. 13) cada tarefa e resolvê-la o “maior número de vezes” (idem). Só assim, consegui adquirir confiança suficiente para preparar questões e intervenções sobre cada tarefa.

Um desafio que se colocou, ainda durante da preparação das aulas, foi a gestão do currículo. Tornou-se num grande desafio ter que corresponder a dois programas em simultâneo, não só para mim mas também para os alunos, pelos motivos explicitados em capítulos anteriores.

No que diz respeito à condução do ensino, a gestão de aulas de 90 minutos foi, nas primeiras aulas, um desafio. Inicialmente, muitas das vezes, deixava a sistematização das aprendizagens realizadas para a aula seguinte e comecei a aperceber-me que não era uma boa opção pois, havia um afastamento, por parte dos alunos, do que tínhamos trabalhado na aula anterior; no que diz respeito às intervenções dos alunos, muitas não eram retomadas por serem retiradas da discussão coletiva para incidirem na síntese da aula. Assim, comecei a verificar com mais regularidade o tempo que me restava de aula no início de cada discussão coletiva e reservava um pequeno espaço de tempo (10 ou 15 minutos) para a sistematização da aula. Canavarro (2011) faz referência à gestão das aulas reforçando a importância de completar a atividade em torno de cada tarefa “evitando ao máximo adiar para a aula seguinte a discussão e/ou síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos” (p. 17). Assim, é necessário “gerir sem desperdícios todos os minutos” (idem) de uma aula.

Foi, também, um desafio lidar com intervenções excessivas da minha parte, como aconteceu, por exemplo, na exploração das duas primeiras tarefas — “Partilhas justas” e “Pintando azulejos” — na tarefa “A discussão do João e da Maria”. No início do trabalho com a trajetória, reduzi o interesse de discussões coletivas por dar demasiadas pistas sobre a tarefa durante o trabalho autónomo. No fim da primeira aula, reconheci este erro e, subsequentemente concedi maior abertura à voz dos alunos. Apesar de ter estudado a “A discussão do João e da Maria”, que era poderosa por trabalhar a relação parte todo, através da leitura de artigos, e em reuniões com a professora cooperante, diminuí significativamente as suas potencialidades. Canavarro (2011) faz referência a este aspeto ao afirmar que um professor deve “resistir a validar as resoluções dos alunos durante o respetivo trabalho autónomo de modo a não reduzir o seu interesse (…) na discussão" (p. 17). Também Delgado (2013) e Ponte (2003) fazem referência para este desafio que, muitas das vezes, se poderá traduzir numa dificuldade.

Com a prática, adquiri mais facilidade em antever os recursos a utilizar para cada tarefa. Inicialmente constitui-se num desafio pois 'desperdiçava' demasiado tempo na discussão coletiva ao pedir que, por exemplo, na tarefa "Maior, menor ou igual à unidade?" vários alunos fossem ao quadro explicar como resolveram a tarefa. Na aula seguinte, durante a discussão da tarefa "Quanto passa da unidade ou falta para a unidade?" utilizei o *PowerPoint* como recurso e o ritmo da aula diferiu bastante. Canavarro (2011) salienta a importância da previsão de "recursos que agilizem a comunicação dos alunos na fase da discussão para que não se gaste preciosos minutos com o «passar para o quadro»" (p. 17).

Por fim, destaco como algo desafiante a orquestração de discussões coletivas pois tive que ter em conta variados aspetos entre eles os mais importantes: desenvolver as capacidades e conhecimentos matemáticos.

5. Encerrando o estudo: reflexão pessoal

"Para ensinar latim ao João, é preciso saber latim, mas também conhecer o João"

Provérbio inglês

Ao refletir acerca deste estudo recordo todas as aprendizagens que realizei. Apesar deste ter sido um caminho pessoal, a julgar pelo título deste estudo em primeiro lugar, tive a oportunidade de entrar na sala de aula de uma excelente professora com a qual aprendi bastante.

As suas práticas exploram não só os conhecimentos dos alunos como também questões de didática, mostrando que uma aula de Matemática é muito mais do que resolver exercícios e observar a correção, feita pelo professor, no quadro.

Com esta professora, aprendi duas vezes: enquanto aluna, ao observar as suas práticas, e enquanto professora, ao discutir questões de aula onde ambas trabalhámos com o objetivo de facilitar as aprendizagens dos alunos tornando-os capazes de comunicarem em matemática utilizando linguagem e conhecimentos apropriados. Deste modo, posso afirmar que durante quatro semanas, partilhei com a professora dúvidas, inquietações, inseguranças e seguranças, ideias e reflexões que me permitiram aprofundar os meus conhecimentos. Em suma, foi um privilégio poder ter contacto com esta professora pois, de imediato, me disponibilizou todos os materiais de apoio e, sobretudo, me deu a segurança do 'isto não é nenhum bicho-de-sete-cabeças e vais conseguir'.

Soube, deste cedo, que este era o tema que pretendia seguir devido às minhas inseguranças, enquanto jovem professora, e também pelo pensamento constante de 'por que é que digo isto e não aquilo?' o que me faz ter uma atitude questionante acerca do ensino pois, sempre tive algum receio de lecionar pelo instinto e de o fazer de forma errada.

O facto de ter estudado a minha própria prática fez com que tivesse contacto com dois tipos de professoras: a professora que fui quando iniciei o estágio e a professora que era quando o terminei. Todas as alterações que fui efetuando nas minhas práticas não foram apenas fruto da leitura de artigos ou livros; foram fruto também da experiência. Inicialmente, comecei por ter atitudes que revelaram algum 'egocentrismo', ao centrar a aula apenas em mim. Contudo mudei em muito a minha prática não só na abertura da aula aos alunos mas também na monitorização da atividade da turma. Estas alterações surgiram a partir de reflexões pessoais e de desafios que sentia que tinha de ultrapassar. Em suma, procurei identificar os problemas/ desafios/ erros associados à minha prática para que os pudesse transformar ao longo das aulas.

Importa salientar que todas as aprendizagens que realizei ao longo deste estudo servirão para apoiar as minhas práticas futuras pois, esta experiência proporcionou o meu desenvolvimento profissional.

Atualmente, tendo consciência de que tenho um longo caminho pela frente, questiono-me acerca do termo 'boas práticas'. Considero que não existe uma boa prática definida mas sim, professores empenhados em proporcionar momentos enriquecedores de aprendizagem desenvolvendo, junto dos alunos, o ensino e que, ao serem confrontados todos os dias com novos desafios, revelam a boa atitude de se interessarem pelas suas próprias práticas e de repensarem a sua forma de ensinar. Deste modo, a pergunta que me coloco é se existirá mesmo uma boa prática ou o modelo de um bom professor.

Considero que um professor, por si só, não conduz ao sucesso do ensino; existem outros fatores importantes, tais como a partilha entre colegas, o estudo do currículo, os alunos.

O erro primordial de muitos professores é olhar apenas para a prática dos outros mas, tal como Ponte (2004) refere, "Porque não olhar também para a sua própria prática?".

Referências bibliográficas

Alarcão, I. (2001). *Professor-investigador: que sentido? Que formação?* In B. P. Campos (Org.), Formação profissional de professores no ensino superior (Vol. 1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora.

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: um guia prático e crítico*. Lisboa: Asa.

Bardin, L. (2015). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bivar, A., Grosso. C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Boavida, A., M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Boavida, A. M. (2011). *A aula de matemática: diferentes perspetivas*.115. pp 53-63.

Boavida, A. M., Gonçalves, A., & Oliveira, H. (2008). Sentido de número e resolução de problemas de adição e subtração no 1.º ano de escolaridade. In J. Fernandes, H. Martinho & S. Viseu (Eds), *Actas do XX seminário de investigação em educação matemática* (pp. 278-291). Braga: Universidade do Minho.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua para Professores do 1º e do 2º ciclo do Ensino Básico.* DGIDC: Lisboa.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Botas, D., & Moreira, D. (2013). A utilização de materiais didáticos nas aulas de Matemática - Um estudo no 1º ciclo. *Revista Portuguesa de Educação* (pp. 253-286).

Brocardo, J. (2010). *Trabalhar os números racionais numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.* Educação em Matemática 109 (pp. 15-23)

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido de número no currículo de Matemática. J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha. (Eds) (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.

Canavarro, A. P. (2011). *Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios*. Educação e Matemática.115. pp. 11-17.

Cavell, L. K. (2009). Teaching Fractions. *Teaching Children Mathematics.* 15(8), 494-501.

Delgado, C. (2013). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número: um estudo no 1º ciclo* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM

Fonseca, P. (2012). *A avaliação reguladora das aprendizagens em contexto de congresso matemático* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM

Fosnot, M. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction* . Portsmith: Heinemann.

Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (2003). *A Reserch Companion to Principles and Standards for School Mathematics*.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten–grade 8*. Essential Understanding Series. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Ação.* Lisboa: Porto Editora.

Mendes, M. d. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º ciclo.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Revista Quadrante. 14* (1) 1-30.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sente. *For the Learning of Mathematics*. 2-8 e 44.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

PFCM. (2010/2011). *Orquestrar discussões coletivas: cinco práticas essenciais*. Retirado a 24 de novembro de 2015 de http://www.projectos.ese.ips.pt/pfcm/wp-contentuploads/2010/12/texto-Orquest-disc-colectivas-2010-2011.pdf

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (p. 7-51). Lisboa: Lidel.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.) *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM

Ponte, J. P. (2003). *Investigar, ensinar e aprender*. Retirado a 12 de dezembro de 2015, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. PNA, 2(4), 153-180.

Ponte, J. P., Brocardo, J., Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

M.E. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de número racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2012). Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: O caso de Leonor. *Interações, 20*. pp. 37-69.

Sequeira, L., Freitas, P. J., & Nápoles, S. (2009). *Números e Operações: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e do 2º ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

Serrazina, L. (1991). *Aprendizagem da matemática: A importância da utilização de material didático.* Noesis.

Silva, M. (2012). *Do número natural ao número racional: Um projeto de colaboração com uma professora do 3º ano de escolaridade.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Silva, M. N., Boavida, A. M., & Oliveira, H. (2012). Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática. pp. 201-214. Recuperado em: http://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/5716/1/Desenvolvendo%20o%20sentido%20do%20n%C3%BAmero%20racional.pdf

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orquestrating Discussions. *Mathematics Teaching In The Middle School* 14 (9) pp. 548-556.

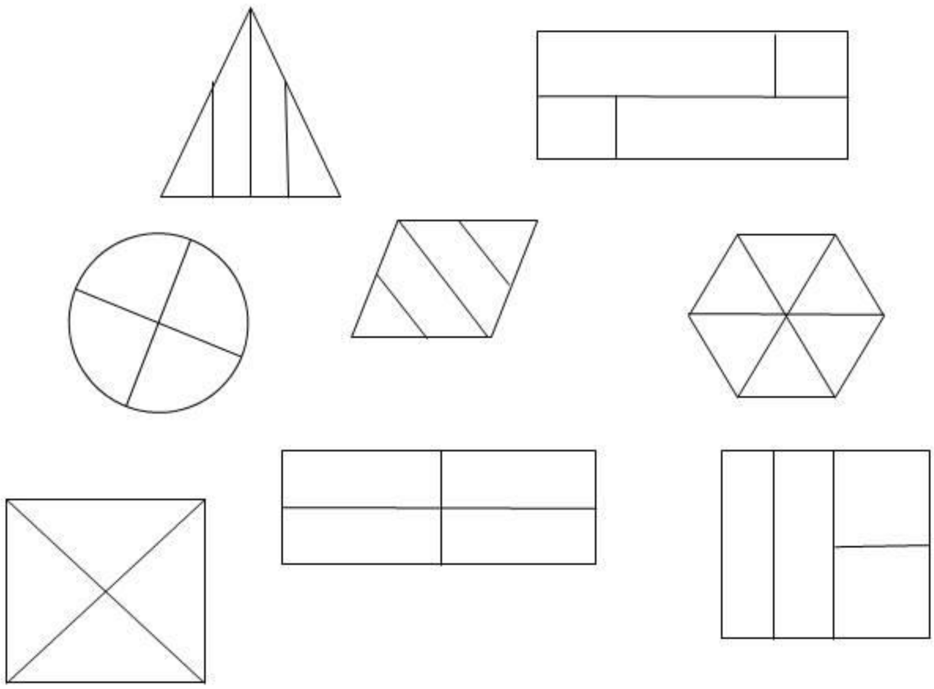
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathmatical Discussions: Five Pratices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10* (4). 313-340.

Williams, J. M., & Martine, S. L. (2003). Thinking Racionally about Number and Operations in the Middle School. *Mathematics Teaching In The Middle School*, 8 (6) 282-287.

Anexos

Anexo 1 – Tarefa "Partilhas justas"

Tarefa: ***Partilhas justas***

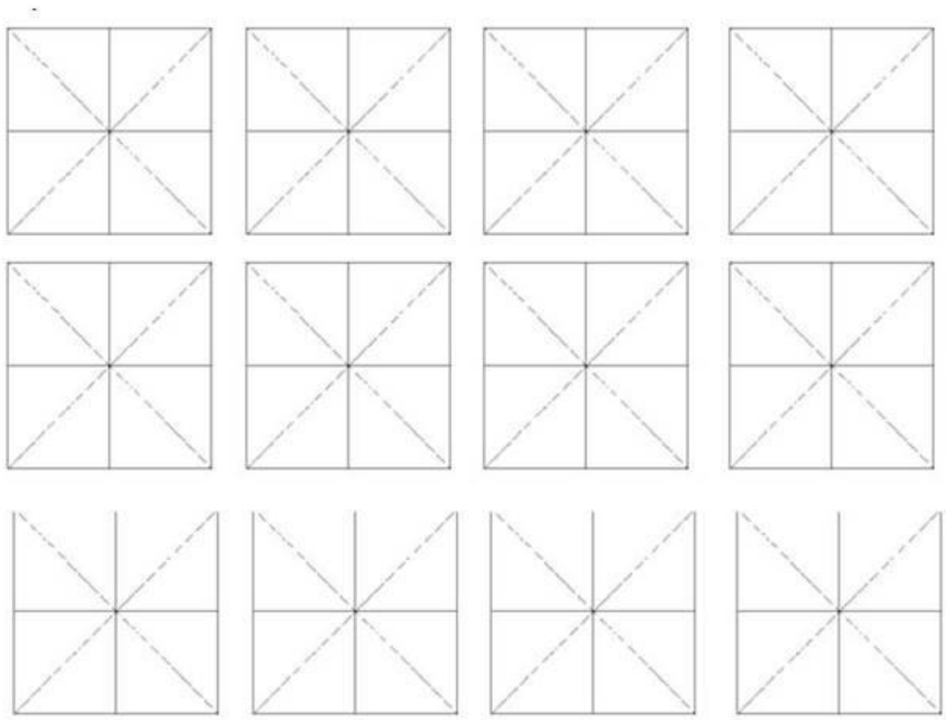


Que figuras estão divididas em quarto?
Explica por que consideras que estão divididas em quarto ou por que achas que não estão.

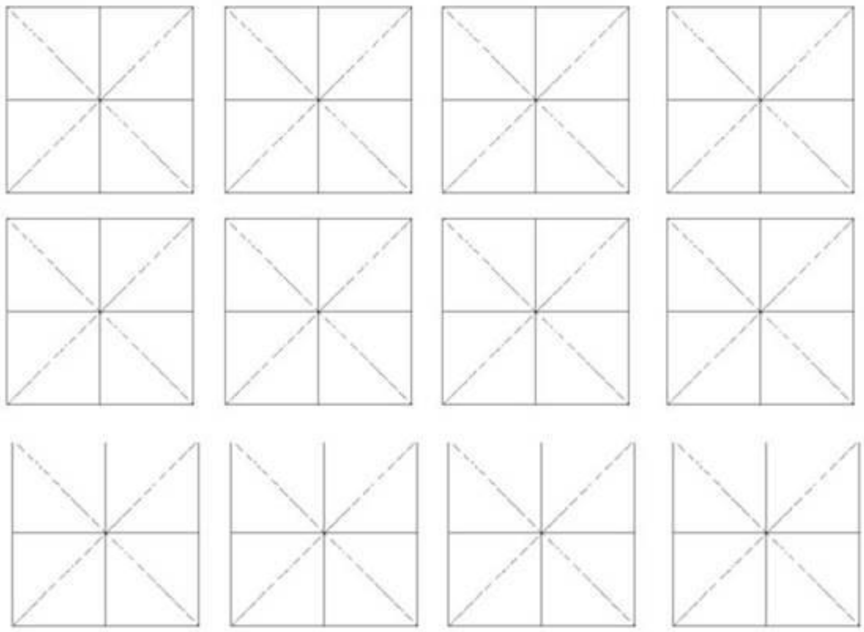
Anexo 2 – Tarefa "Pintando azulejos"

Tarefa: ***Pintando azulejos***

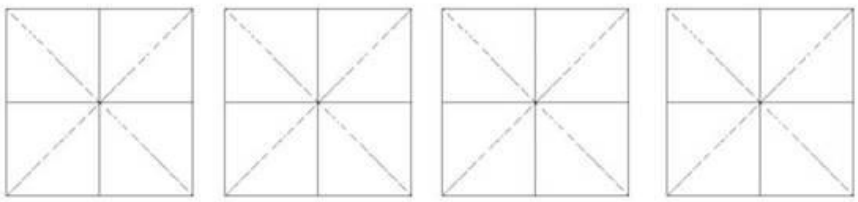
Aqui representados tens alguns azulejos. Pinta metade de cada azulejo como quiseres.
A única regra é: tenta pintá-los de formas diferentes!



Voltamos a ter mais azulejos! Agora pinta um quarto dos azulejos de novo com a mesma regra.



Para finalizar toda a pintura, desta vez tens apenas que colorir um oitavo de cada azulejo utilizando a mesma regra.

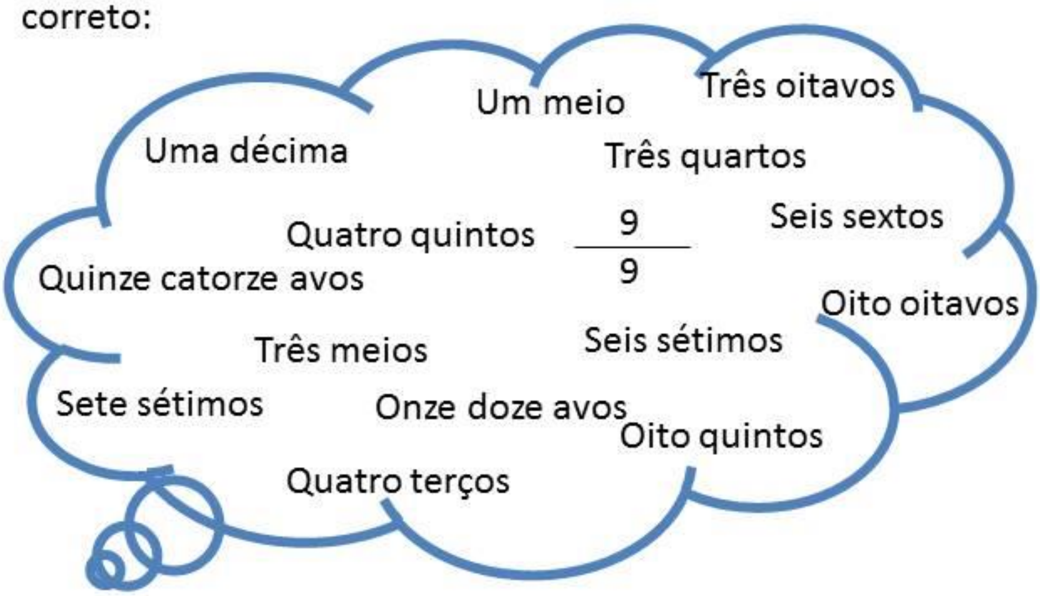


Anexo 3 – "A discussão do João e da Maria"

Anexo 4 – Tarefa “Menor, maior ou igual à unidade?”

Maior, menor ou igual à unidade?

Coloca as frações da nuvem na tabela, decidindo qual o lugar correto:

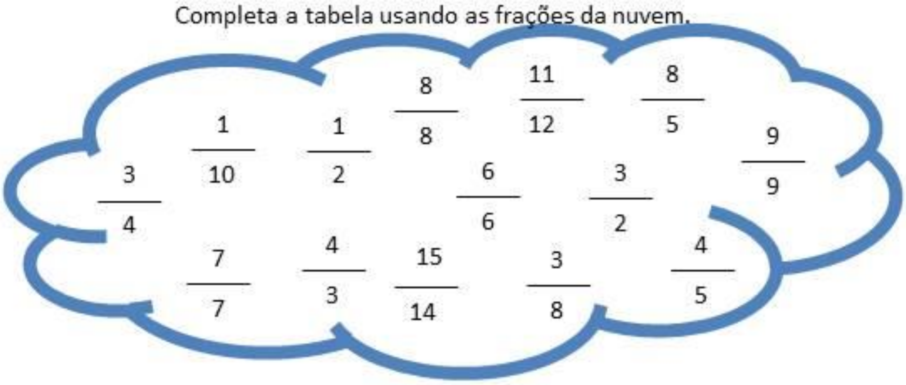


Menor que 1	Igual a 1	Maior que 1

Anexo 5 – Tarefa "Quanto passa da unidade ou quando falta para a unidade?

Tarefa: Quanto falta para a unidade e quanto passa da unidade?

Completa a tabela usando as frações da nuvem.



Fração	A unidade	Falta para a unidade	Passa da unidade	Numeral misto

Anexo 6 – Tarefa "As tampinhas do Carlos"

Tarefa: ***As tampinhas do Carlos***

<u>Resolve cada parte da tarefa utilizando palavras, desenhos, esquemas ou cálculos!</u>

O Carlos coleciona tampinhas de garrafas de água. Quando tinha 6 tampinhas perdeu um terço das tampinhas. Quantas tampinhas perdeu o Carlos?

O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fração das suas 12 tampinhas deu ao Carlos?

O Carlos continuou a colecionar tampinhas de garrafas de água. Passado algum tempo, três tampinhas correspondiam a um quarto do número total de tampinhas da sua coleção. Quantas tampinhas passou a ter o Carlos?

Anexo 7 – tarefa “Das partes ao todo”

Tarefa *Das partes ao todo*

<u>Desenha as figuras no teu caderno</u>

1. Encontra a unidade se o seguinte quadrado for:

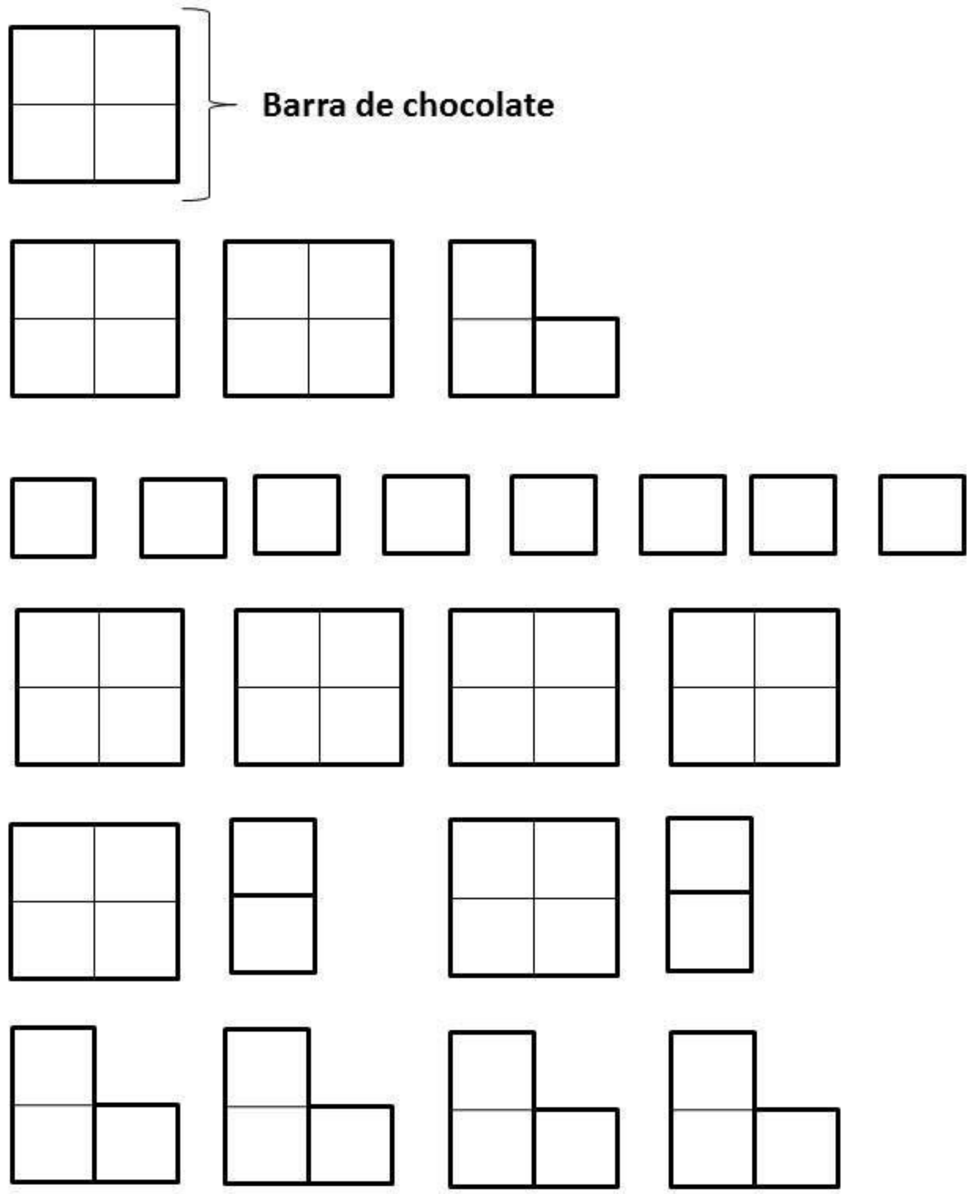
- Um meio
- Um terço
- Três quartos
- Quatro terços

2. Encontra a unidade se o seguinte conjunto de rebuçados for:

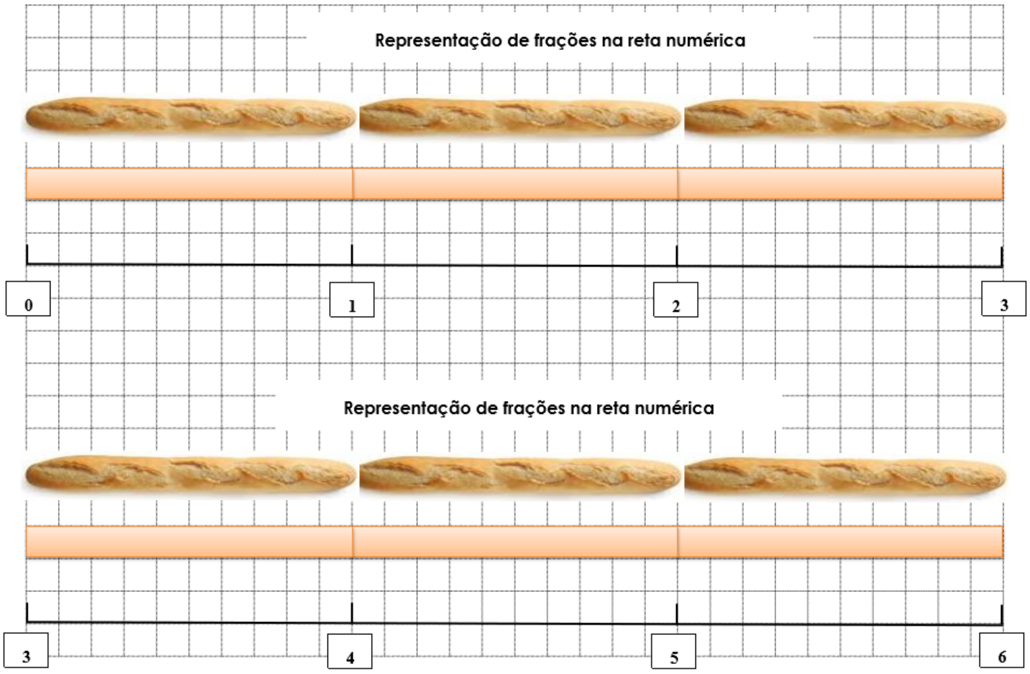
- Um meio
- Um terço
- Quatro terços

Anexo 8 – Tarefa "As barras de chocolate"

Escreve o número representado nas figuras usando diversas representações: fração, decimal, percentagem e numeral misto (sempre que possível).



Anexo 9 – Tarefa "Exploração da reta numérica"



Anexo 10 – Tarefa "As bolas de pingue-pongue"

Parte 1

Observa a embalagem de bolas de 2 cores. Completa a etiqueta de modo a que ela represente, respetivamente ao total de bolas, a parte de bolas brancas e a parte de bolas amarelas.

Parte 2

Quantas bolas brancas e amarelas, poderá ter uma embalagem que tem a seguinte etiqueta:

Anexo 11 – Sectores circulares