

# Limitação da Deformação no REBAP

José N. Camara<sup>1</sup>  
João Vinagre<sup>2</sup>  
Júlio S. Appleton<sup>3</sup>

## SUMÁRIO

Os aspectos mais relevantes da limitação da deformação no que diz respeito aos limites de deformação aceitáveis, aos métodos simplificados de cálculo e ao controlo indirecto da deformação através da limitação de esbelteza são analisados. Paralelamente discutem-se as disposições da regulamentação portuguesa nesta matéria.

---

<sup>1</sup>Engenheiro Civil. Assistente do IST

<sup>2</sup>Engenheiro Civil. Assistente Estagiário do IST

<sup>3</sup>Engenheiro Civil. Professor Catedrático do IST

## 1. Introdução

A limitação da deformação nas estruturas é importante como garantia da qualidade das características requeridas para o bom desempenho das funções para que aquelas são concebidas. Esta matéria é tratada no REBAP [1] no seu artº72 sugerindo-se no §1 que, para cada situação, a limitação mais conveniente seja adoptada e definindo-se no §2 como estado limite de deformação, para casos correntes de vigas e lajes de edifícios, uma flecha de 1/400 do vão e, se a deformabilidade puder afectar paredes divisórias, uma deformação máxima de 1.5 cm. Finalmente no §3 do mesmo artigo são referidos os artºs 89, 102 e 113 que permitem, para os casos correntes referidos anteriormente, e se respeitados determinados valores limites da esbelteza, a dispensa da verificação explícita dos estados limites em causa.

Analisa-se de seguida as disposições referidas anteriormente chamando-se a atenção para a pouca informação referente aos valores aceitáveis de deformação para as diferentes funções do elemento estrutural e para a incompatibilidade de algumas das disposições regulamentares. Finalmente, a base de uma formulação coerente para a garantia de limites de deformação com base na limitação de esbelteza é apresentada.

## 2. Valores limites de deformação

A imposição de valores limites de deformação admissíveis nas estruturas sob o ponto de vista das características de funcionalidade para que estão previstas é um domínio sobre o qual não tem sido possível encontrar um consenso generalizado. No entanto, as recomendações da ISO 4356 [2] apresentam, para um leque bastante variado de situações, propostas de tais limites. Nos quadros 1 e 2 apresentam-se, respectivamente:

- Os limites propostos pelo ACI [3,4] e pelo Manual do CEB [5] para evitar danos em elementos não estruturais
- Os valores limites para outras condições de funcionamento de acordo com o ACI [3]

	Elemento não estrutural	Tipo de material	Deformação Limite	Parcela da deformação
ACI	Paredes	Alvenaria	$l/600$ ou 0.75 cm	Deformação incremental depois da construção das paredes
	Paredes	Divisórias amovíveis	$l/240$ ou 2.5 cm	Deformação incremental
	Tectos	Rebocos	$L/360$	Deformação incremental após construção do tecto
CEB	Paredes	Em geral	$l/500$ ou 1 cm	Deformação incremental depois da construção das paredes

Quadro 1 - Limites de deformação para evitar danos em elementos não estruturais

Condições de funcionamento em serviço	Tipo de utilização	Deformação Limite	Parcela da deformação
Áreas que deverão drenar água	coberturas, terraços	$l/240$	Deformação total
Pavimentos que deverão ficar planos	Ginásios, pavimentos de jogos especiais	$l/360+$ contraflecha $l/600$	Deformação total Def. increm. após instalação do pav.
Pavimentos suportando equip. sensível	Equip. especiais, maquinaria, etc	Recomendação do fabricante	Deformação increm. após instalação do equipamento

Quadro 2 - Indicações de limites de deformação para condições de funcionamento particulares

O REBAP [1] indica como valores limites de deformação em edifícios para as combinações frequentes de acções o valor de  $l/400$  e, no caso de haver possibilidade de fendilhação de paredes de alvenaria, define ainda o máximo absoluto de 1.5 cm. Este valor é, portanto, condicionante para vãos superiores a 6.0 m.

### 3. Cálculo de deformações em elementos de betão armado

A avaliação da deformação das estruturas de betão armado deve ter em consideração a fendilhação e os efeitos do comportamento diferido no tempo do betão.

O método dos coeficientes globais proposto pelo Manual do CEB [5] é aquele que, de uma forma simples e com resultados testados experimental e analiticamente, melhor permite ter em consideração aqueles efeitos.

De uma forma genérica a deformação é dada pela expressão seguinte

$$a = \left(\frac{h}{d}\right)^3 K_t \eta a_c = K a_c \quad (1)$$

Em que  $K_t \left(\frac{M_R}{M_D}, \alpha\rho, \frac{h}{d} = 1\right)$  tem em consideração o nível de fendilhação e a quantidade de armadura (ver fig. 1 a)) e  $\eta(\alpha\rho_1, \rho_2/\rho_1)$  avalia a influência da armadura de compressão (ver fig. 1 b)). Realce-se da expressão a importância do posicionamento da armadura na deformação.

De acordo com o desenvolvimento de trabalho recente de investigação é proposto para elementos estruturais com continuidade que  $K$  seja dado por (ver fig. 2)

$$K = \frac{2 K_v + \sum_{i=1}^n K_{ap}^i}{2 + n} \quad (2)$$

onde  $n$  é o número de apoios com continuidade e  $K_v$  e  $K_{ap}$  são os coeficientes  $K$  determinados nas secções determinantes do vão e apoio.

Assim é tido em consideração, de uma forma realista, quer o comportamento na zona do vão quer sobre os apoios.

### 4. Limitação de deformação através da esbelteza

A esbelteza de um elemento estrutural é um factor fundamental da sua maior ou menor deformabilidade. Tal facto resulta claro da relação deformação elástica/vão:

$$\text{Vigas} : \frac{a_c}{l} = 12 k \frac{g}{b E_c} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \quad (3)$$

$$\text{Lajes} : \frac{a_c}{l} = 12 (1 - \nu^2) k \frac{g}{E_c} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \quad (4)$$

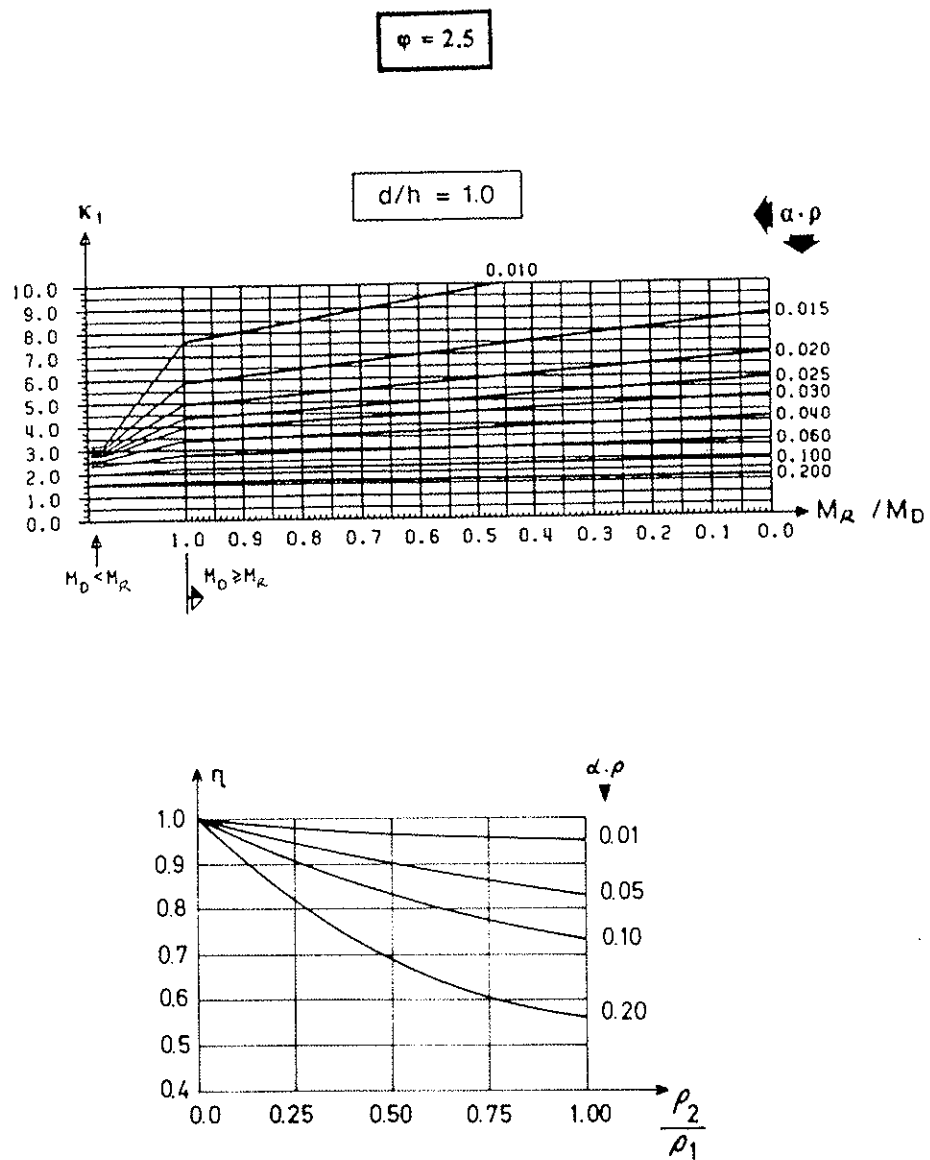


Figura 1: Indicação dos coeficientes  $K_i$  (a) e  $\eta$  (b) do método dos coeficientes globais

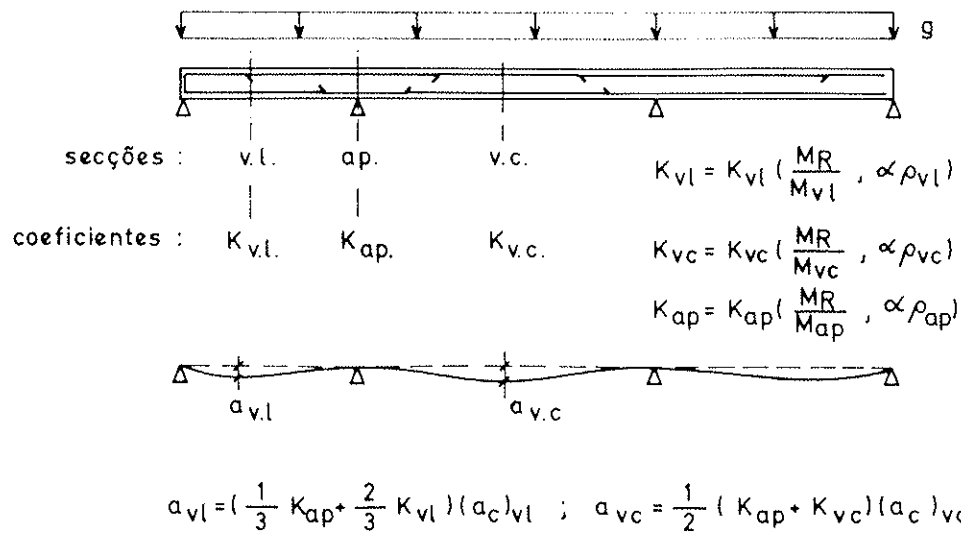


Figura 2: Ilustração da aplicação da expressão (2) à avaliação da deformação de elementos estruturais contínuos

em que  $k$  é uma constante dependente das condições de fronteira.

Alguns regulamentos, como o REBAP [1], permitem a dispensa explícita da verificação do Estado Limite de Deformação se forem respeitados determinados valores de esbelteza e se estiver verificada a segurança em relação aos Estados Limites Últimos.

De acordo com o §3 do artº72 do REBAP [1] os limites de deformação referidos no §2 ficam garantidos se forem obedecidas as condições dos artºs 89 e 102 respectivamente para vigas e lajes. Assim, para garantir a deformação limite  $l/400$  impõe-se que:

$$\text{Para vigas : } \alpha \frac{l}{h} \leq 20 \eta \quad (5)$$

$$\text{Para lajes : } \alpha \frac{l}{h} \leq 30 \eta \quad (6)$$

Por outro lado para que a deformação máxima seja limitada a 1.5 cm são indicadas as seguintes expressões:

$$\text{Para vigas : } \frac{l_1}{h} \leq \frac{120}{l_1} \eta \quad (7)$$

$$\text{Para lajes : } \frac{l_1}{h} \leq \frac{180}{l_1} \eta \quad (8)$$

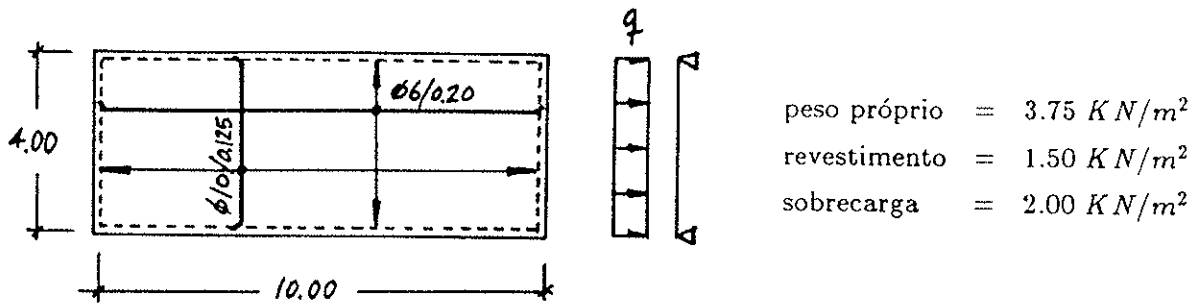


Figura 3: Representação do pánel de laje simplesmente apoiado considerado no exemplo

Refira-se que, como exposto em comentário nos artigos mencionados, aquelas se baseiam nas expressões gerais:

$$\text{Para vigas : } \frac{l_i}{h} \leq 8000 \frac{a}{l_i} \eta \quad (9)$$

$$\text{Para lajes : } \frac{l_i}{h} \leq 12000 \frac{a}{l_i} \eta \quad (10)$$

após substituição de  $a/l_i$  por  $1/400$  e de  $a$  por 1.5 cm.

Saliente-se que não é coerente a limitação, pelo artº72, da relação deformação/vão a  $\frac{1}{400} \left( \frac{a}{l} \leq \frac{1}{400} \right)$  com a substituição de  $a/l_i$  por  $1/400$  nas expressões (9) a (10) para elementos estruturais que não sejam simplesmente apoiados.

A deformação dos edifícios é particularmente sentida nas lajes e é, portanto, para estes elementos que o seu controlo se torna na prática mais importante. Tem sido constatado em alguns exemplos de lajes que, apesar de respeitados os limites de esbelteza e garantida a sua capacidade resistente, os limites de deformação regulamentares não são verificados. Apresenta-se de seguida um exemplo ilustrativo.

## 5. Exemplo ilustrativo

Apresenta-se na fig. 3 um pánel de laje simplesmente apoiado em vigas, submetido às cargas indicadas e dimensionado com B25 e A400NR.

A condição (6) é verificada para esta geometria:

$$h = 15 \text{ cm} \geq \frac{l_i}{30 \eta} = \frac{400}{30} = 13.33 \text{ cm}$$

Dimensionamento aos Estados Limites Últimos:

$$M_{sd} = \frac{1.5 (3.75 + 1.50 + 2.0) 4.0^2}{8} = 21.75 \text{ KNm/m}$$

$$\mu = 0.114 \rightarrow A_s = 5.64 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (\phi 10/0.125)$$

Cálculo de deformação para as combinações frequentes de acções:

$$q = 5.25 + 0.3 \times 2.0 = 5.85 \text{ KN/m}^2$$

$$a_c = \frac{5}{384} (1 - \nu^2) \frac{q l^4}{EI} = 0.23 \text{ cm}$$

Como

$$\frac{d}{h} = \frac{0.12}{0.15} = 0.8; \quad \varphi = 2.5; \quad \alpha\rho = \frac{E_s A_s}{E_c b d} = 6.9 \times 0.0052 = 0.036;$$

e

$$M_R = f_{ctm}^{flexao} \times \frac{h^2}{6} = 10.3 \text{ KNm/m}; \quad M_D = \frac{q l^2}{8} = 11.7 \text{ KNm/m}; \quad \frac{M_R}{M_D} = 0.88$$

Método dos coeficientes globais

$$\eta = 1.0; \quad K_t \left( \frac{d}{h} = 1 \right) = 3.75$$

$$a = \left( \frac{h}{d} \right)^3 K_t \eta a_c = \left( \frac{0.15}{0.12} \right)^3 \times 3.75 \times 1.0 \times 0.23 = 1.7 \text{ cm}$$

Este valor é claramente superior à deformação limite

$$a = \frac{l}{400} = 1 \text{ cm}$$

## 6. Formulação para uma coerente limitação de deformação com base na esbelteza

Formulações de limitação de deformações com base na esbelteza têm sido apresentadas por diversos autores como Beeby [6,7], Rangan [8], Gilbert [9] e mais recentemente Camara [10].

Apresentam-se seguidamente os princípios para um correcto relacionamento de  $a/l$  com  $l/h$  e  $\rho$  (percentagem de armadura necessária à garantia do E.L. Último).

Considere-se uma laje simplesmente apoiada armada numa só direcção e considere-se a parcela das cargas com carácter de permanência. Assim (ver exps. (1) e (4))

$$\frac{a}{l} = \left( \frac{h}{d} \right)^3 K_t \left( \alpha\rho, \frac{M_R}{M_D}, \frac{d}{h}, \varphi \right) \eta \left( \alpha\rho, \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{5}{384} \frac{g}{E_c} \left( \frac{l}{h} \right)^3 \quad (11)$$

Como

$$M_g = \frac{1}{8} g l^2 \quad (12)$$

$$M_R = \frac{1}{6} h^2 f_{ctm} \quad (13)$$

e, se se adoptar o B25:

$$\frac{f_{ctm}}{E_c} = \frac{2.2}{29 \times 10^3} \approx 7.6 \times 10^{-5}$$

Obtém-se

$$\frac{l}{h} \approx c \frac{a}{l} \quad (14)$$

com

$$c = \frac{66000}{K \left( \alpha \rho, \frac{M_R}{M_g}, \frac{d}{h}, \varphi \right) \cdot \frac{M_g}{M_R}} \quad (15)$$

Considerando  $\gamma_g = 1.35$  e  $\gamma_q = 1.5$  e admitindo que a carga com carácter de permanência é 1.5 vezes superior à sobrecarga  $q$ , o momento de dimensionamento à rotura é dado por:

$$M_{sd} = 1.35 M_g + 1.5 \frac{M_g}{1.5} = 2.35 M_g \quad (16)$$

e, portanto,

$$M_g = 0.425 M_{sd} \quad (17)$$

Por outro lado, definida a qualidade do aço e a percentagem de armadura o momento reduzido,  $\mu_{rd}$ , fica definido tendo-se:

$$M_{rd} = \mu_{rd} (\rho, \text{Aço}) d^2 f_{cd} \quad (18)$$

Admitindo estar a peça correctamente dimensionada à rotura e fazendo  $M_{Rd} = M_{sd}$  tem-se:

$$M_g = 0.425 \mu_{Rd} d^2 f_{cd} \quad (19)$$

e

$$\frac{M_g}{M_R} = \frac{0.425 \mu_{Rd} d^2 f_{cd}}{\frac{h^2}{6} f_{ctm}} = 15.4 \mu_{Rd} \left( \frac{d}{h} \right)^2 \quad (20)$$

pois para o B25

$$\frac{f_{cd}}{f_{ctm}} = \frac{13.3}{2.2} = 6.05$$

Se se atender às expressões (14), (15) e (20) verifica-se que, para uma dada relação  $d/h$ , coeficiente de fluência  $\varphi$  e qualidade de aço, o coeficiente  $c$  (exp. 15), que relaciona a esbelteza com a relação flecha/vão, fica unicamente dependente de percentagem de armadura.

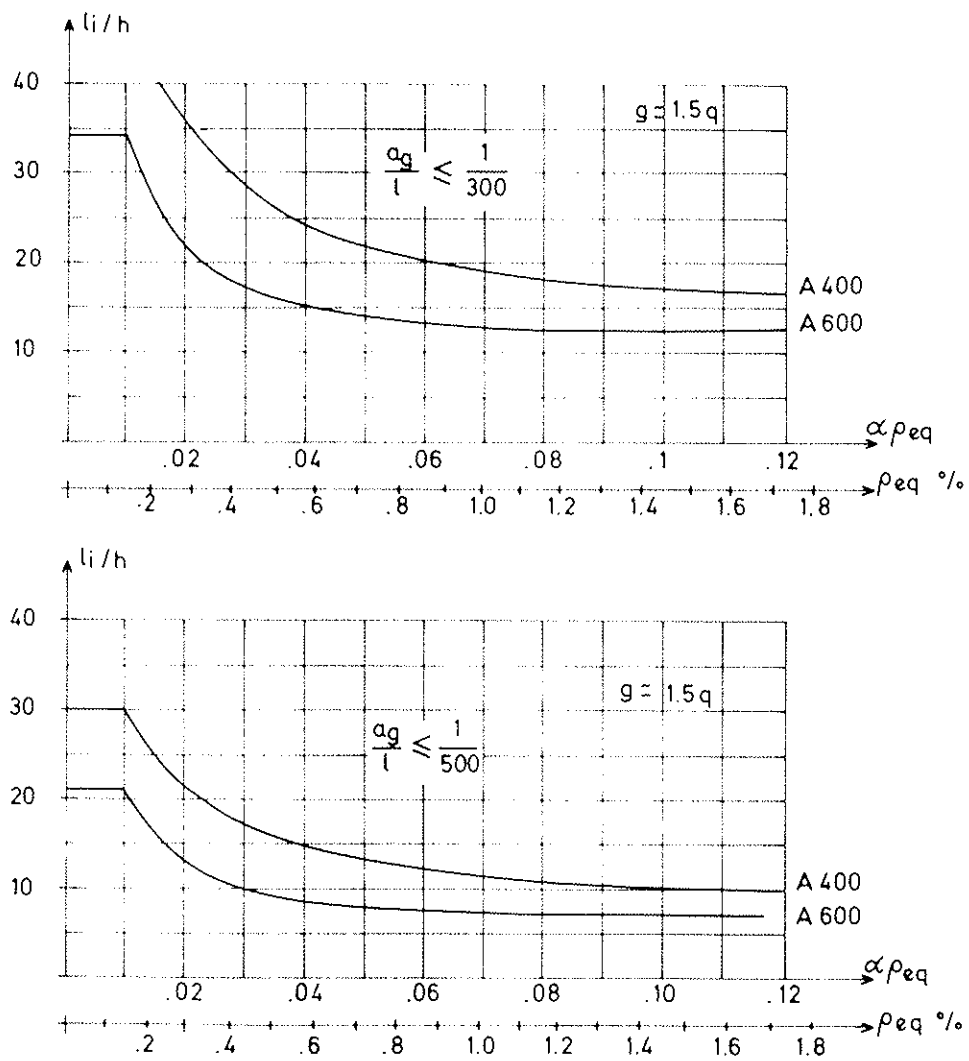


Figura 4: Representação dos limites de esbelteza para a garantia de determinados níveis de deformação

Para  $d/h = 0.9$ ;  $\varphi = 2.5$  representa-se na fig. 4 para o caso do A400 e do A600 as esbeltezas limites função da percentagem de armadura para uma limitação de deformação com carácter de permanência a  $l/300$  e  $l/500$  nas hipóteses admitidas anteriormente. É importante mencionar que esta percentagem de armadura é só aquela que é estritamente necessária à garantia de capacidade resistente. Evidentemente que, com percentagens de armadura superiores às mencionadas, tais limites de deformação poderiam ser garantidos com maiores esbeltezas.

Admitiu-se no traçado dos gráficos da fig. 4 que, quando a estrutura não está fendilhada para as cargas permanentes ( $M_j/M_R < 1$ ), situação corrente em lajes necessitando de baixas percentagens de armadura para a capacidade resistente,  $M_j/M_R = 1$ . Tal procedimento justifica-se pois a fendilhação pode verificar-se por outros efeitos (actuação de sobrecargas, efeitos da retracção do betão e variações de temperatura) não considerados nesta análise.

Nas curvas da fig. 4 verifica-se que a indicação de um limite de esbelteza único que garanta à partida um dado limite de deformação será sempre discutível a menos que se definam valores de esbelteza conservativos. Isto deve-se ao facto de tal valor ser extremamente sensível ao nível de carga (expresso na figura pela percentagem de armadura necessária à capacidade resistente).

## 7. Conclusão

Neste artigo discute-se a limitação e cálculo das deformações das estruturas de betão armado e as disposições do REBAP em relação a esta matéria. Os limites de deformação impostos na nossa regulamentação são pouco detalhados, correspondendo certamente a um objectivo de simplificação, mas deixando poucas indicações em relação às situações em que é importante a sua consideração.

Por outro lado, os limites de deformação impostos para edifícios podem, em geral, não ser verificados em muitas situações correntes de lajes para as quais o REBAP permite a dispensa de verificação do Estado Limite de Deformação. Chama-se a atenção, nesta comunicação, para este aspecto através de um exemplo simples.

Finalmente, apresenta-se com base no método dos coeficientes globais uma formulação que permite clarificar a dependência da garantia dos limites de deformação de dois parâmetros importantes a saber: a esbelteza e o nível de carga (representado pela percentagem de armadura necessária à garantia da capacidade resistente). Fica assim realçado que a dispensa da verificação de um Estado Limite de deformação só com base num limite de esbelteza é discutível, a menos que se tomem valores bastante conservativos.

## Referências

1. REBAP - "Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado". Maio 1983
2. Norme Internationale ISO 4356-1977 - "Base du calcul des constructions - Déformations des Bâtiments à l'Etat Limite d'Utilization"
3. ACI 318.83 - "Building Code Requirements for Reinforced Concrete" 1983
4. ACI Committee 435 - "Allowable Reflections (ACI 435.3R-68) (Reapproved 1984). ACI - Detroit 1968
5. Bulletin n°158 CEB - "Fissuration et Deformations" Lausanne 1983
6. Beeby, A.W. - "Span/Effective Depth Ratios" Concrete - February 1979, pp. 29-31
7. Beeby, A.W. - "Modified Proposals for Controlling Deflections by Means of Ratios of Span to Effective Depth" Cement and Concrete Association, London 1971, Technical Report 42-465
8. Rangan, B.V. - "Control of Beam Deflections by Allowable Span / Depth Ratios" ACI Journal proceeding, Vol.79, No.5 Sept/Oct 1982, pp. 372-377
9. Gilbert, R.I. - "Deflection Control of Slabs using Allowable Span to Depth Ratios" ACI Journal, Jan/Feb 1985, pp. 67-72
10. Camara, J.; Appleton, J.; Gomes, A. - "Verificação dos Estados Limites de Utilização em Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado". Vol.I, Curso de Especialização no IST, Fevereiro 1986