INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E
ADMINISTRAÇÃO DE COIMBRA

Estrutura temporal de taxas de juro – o caso das bunds Alemãs

Joaquim Paulo Ferreira Santiago Nº 7904

Dissertação de Mestrado em Análise Financeira

Orientador: Professor Doutor José Carlos Dias

Coimbra, Setembro de 2013

Índice

Agradecimentos

A realização deste trabalho só foi possível devido ao apoio incondicional do meu orientador, Professor Doutor José Carlos Dias, a quem agradeço todo o empenho e ajuda demonstrado ao longo das várias fazes de desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador a disponibilização do ficheiro em excel que permitiu realizar os cálculos para o estudo empírico deste trabalho e a GoBulling Banco da Carregosa que disponibilizou os dados para a implementação deste estudo.

Agradeço ainda aos meus pais por todo o apoio demonstrado desde o inicio de todo o meu percurso académico até ao culminar deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estuda-se a estrutura temporal de taxas de juro. Faz-se uma revisão da literatura de algumas das várias abordagens existentes para estimar a estrutura temporal de taxas de juro, estudando-se o contributo dessas abordagens para o tema, centrando-se a investigação na implementação de um modelo e no estudo do mesmo para um caso real.

O modelo objecto de estudo é o de Nelson e Siegel (1987), sendo utilizada a ferramenta Solver do Excel para aplicar o modelo aos preços das bunds Alemãs para várias maturidades, obtendo-se assim os resultados para o modelo em estudo.

Nesta investigação coloca-se uma questão importante acerca da precisão da estimativa de taxas de juro para obrigações, utilizando-se para testar essa mesma precisão os resultados obtidos anteriormente.

Esta investigação contribui para testar a eficácia do modelo e as suas limitações ao estimar taxas de juro para obrigações, obtendo-se importantes conclusões acerca da eficácia dos modelos na estimativa de taxas de juro futuras e as limitações que podem existir nessas mesmas estimativas.

Abstract

In this work we study the term structure of interest rates. It is a literature review of some of the various existing approaches for estimating the term structure of interest rates, studying the contribution of these approaches to the subject, focusing on the research and implementation of a model for the study of the same a real case.

The model under study is the Nelson and Siegel (1987), using the Excel Solver tool to apply the model to the prices of German Bunds for various maturities, thus obtaining the results for the model under study.

In this investigation arises an important question about the accuracy of the estimate of interest rates for bonds, using the same precision to test results obtained previously.

This research contributes to test the effectiveness of the model and its constraints to estimate interest rates for bonds to yield important conclusions about the efficacy of the models in estimating future interest rates and limitations that may exist in those estimates.

1. Introdução

Ao longo deste trabalho vai-se estudar a estrutura temporal de taxas de juro. O estudo da estrutura temporal de taxas de juro é importante para captar o comportamento das taxas de juro futuras e é um elemento importante da política monetária.

Ao longo dos anos, vários autores têm estudado a problemática da estrutura temporal de taxas de juro, existindo vários modelos da estrutura temporal de taxas de juro, que se dividem em modelos de equilíbrio ou fundamentais, modelos de não arbitragem e modelos empíricos, sendo que esses modelos podem ser modelos de um factor ou vários factores. Os vários modelos existentes diferem fundamentalmente nas suas implicações para a avaliação dos activos contigentes e cobertura de risco de taxa de juro. Os vários estudos têm encontrado algumas dificuldades no processo de modelagem da estrutura temporal de taxas de juro, como garantir que não existem taxas de juro negativas e garantir a ausência de arbitragem.

Os objectivos deste trabalho são: estudar alguns dos vários modelos existentes para a determinação da estrutura temporal de taxas de juro, os seus resultados e fazer um estudo empírico do modelo de Nelson e Siegel (1987), analisando os resultados obtidos e a forma como o modelo captura o comportamento real das taxas de juro.

Este trabalho está dividido em quatro partes. Na primeira parte é abordada a estrutura temporal de taxas de juro, onde se analisa os modelos de equilíbrio ou fundamentais, os modelos de não arbitragem, os modelos empíricos, a importância da estrutura temporal de taxas de juro como indicadores da política monetária, alguns dos modelos existentes da estrutura temporal de taxas de juro, as dificuldades dos modelos de estrutura temporal de taxas de juro, o processo de modelagem de taxas de juro dinâmicas e o cálculo da estrutura temporal de taxas de juro através de instrumentos financeiros. Na segunda parte são abordados os principais resultados do estudo da estrutura temporal de taxas de juro. Na terceira parte é estudado o modelo de Nelson e Siegel. E na quarta parte é feito um estudo empírico do modelo de Nelson e Siegel aplicado às obrigações Alemãs.

2. A estrutura temporal de taxas de juros

A estrutura temporal de taxas de juro representa o rendimento de títulos, que só diferem em relação à maturidade. A relação existente entre a taxa de juro esperada (*yield*) e a sua maturidade é designada por estrutura temporal de taxas de juro e é representada pela *yield curve*.

A curto prazo, as taxas de juro sem risco são um dos preços mais importantes e fundamentais determinados em mercados financeiros. Mais modelos têm sido propostos para explicar o seu comportamento do que para qualquer outro assunto em finanças. Muitos dos modelos mais populares utilizados actualmente por investigadores académicos e profissionais têm sido desenvolvidos num ambiente de tempo contínuo, que fornece um quadro rico para especificar o comportamento dinâmico das taxas de juro sem risco. Apesar da existência de uma grande quantidade de modelos, como os modelos de Merton (1973), Brennan e Schwartz (1977, 1979, 1980), Vasicek (1977), Dothan (1978), Cox, Ingersoll e Ross (1980, 1985), Constantinides e Ingersoll (1984), Schaefer e Schwartz (1984), Sundaresan (1984), Feldman (1989), Hull e White (1990), Black e Karasinski (1991) e Longstaff e Schwartz (1992), pouco se sabe sobre como esses modelos se comparam em termos da sua capacidade para captar o comportamento real das taxas de juro sem risco. A principal razão para que isso aconteça deve-se provavelmente à falta de um quadro comum em que diferentes modelos podem ser alinhados e assim aferir-se o seu desempenho. Sem a existência desse quadro comum, é difícil avaliar o desempenho relativo de forma consistente. A questão de como esses modelos se comparam uns com os outros é particularmente importante. No entanto, cada modelo difere fundamentalmente nas suas implicações para a avaliação dos activos contingentes e cobertura de risco de taxa de juro.

No estudo da modelação da estrutura temporal de taxas de juro existem duas abordagens populares: os modelos de não arbitragem e os modelos de equilíbrio ou fundamentais. Os modelos de não-arbitragem consistem na modelização da estrutura a termo num ponto do tempo para assegurar que não existem possibilidades de arbitragem e os modelos de equilíbrio consistem na dinâmica da taxa instantânea usando modelos *affine*, após o qual os rendimentos noutras maturidades podem ser obtidos através de várias hipóteses sobre o prémio de risco. Para além destas duas abordagens existe ainda a abordagem de modelos empíricos.

2.1. Modelos de equilíbrio ou fundamentais

Nos modelos de equilíbrio, a estrutura temporal de taxas de juro é derivada teoricamente, assumindo a maximização da utilidade do consumidor e, algumas vezes, funções de produção. A dinâmica temporal das taxas de juro instantâneas, dada pelos modelos de equilíbrio ou fundamentais, segue uma equação diferencial estocástica. Nos modelos de equilíbrio as taxas de juro de outras maturidades são obtidas assumindo um modelo *affine* da estrutura de prazo e algumas hipóteses acerca do preço de mercado do risco. Por essa razão, os modelos empíricos de alguma forma descuram o ajustamento em *cross-section* da estrutura temporal de taxas de juro e mostram a capacidade de previsão limitada. Os modelos de Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985) incluem-se nesta classe de modelos. Duffie e Kan (1996) desenvolveram uma generalização multifactorial destes modelos.

Nos vários modelos de equilíbrio de preços, o mais conhecido é o de Cox-Ingersoll-Ross (1985). Este modelo fornece soluções para os preços dos títulos e uma caracterização completa da estrutura a termo que incorpora os prémios de risco e as expectativas para as taxas de juro futuras. Estes modelos são frequentemente apresentados como modelos de um factor, podendo incorporar múltiplos factores. Estes modelos são importantes por várias razões: fornecem uma ligação entre a teoria intertemporal de preços de activos e da estrutura a termo das taxas de juro, preservam a exigência de que as taxas de juro permanecem não negativas, e produzem soluções analíticas relativamente simples para os preços dos títulos.

Estes modelos de equilíbrio de preços são úteis como uma ferramenta para a valorização de valores mobiliários derivativos de taxas de juro. Estimam versões multi-factor do modelo de Cox-Ingerssoll-Ross usando um modelo em que as estimativas das variáveis não observáveis são geradas por um filtro de Kalman. Modelos de um, dois e três factores são estimados, e vários testes são realizados para determinar se esses modelos podem capturar com precisão a variabilidade da estrutura a termo ao longo do tempo.

2.2. Modelos de não-arbitragem

Os modelos de não-arbitragem (como o Hull e White, 1990 e Heath, Jarrow Morton, 1987) foram desenhados para serem perfeitamente consistentes com a actual estrutura temporal de taxas de juro, assumindo estes modelos uma representação funcional numericamente tratável da estrutura temporal de taxas de juro. Os modelos de não-arbitragem são estimados sob a condição de que a evolução dinâmica das taxas de juro é consistente ao longo do tempo com a forma da estrutura temporal de taxas de juro em qualquer momento do tempo, de forma a eliminar qualquer oportunidade de arbitragem. Apesar de os modelos de não-arbitragem serem ferramentas flexíveis de modelização, falta-lhes motivação económica. Por outro lado, ainda que consigam um bom ajustamento da estrutura temporal de taxas de juro aos dados de mercado em *cross-section*, não conseguem representar eficazmente a sua dinâmica temporal. Para resolver este problema, alguma literatura sugere que se faça uma recalibração destes modelos com frequência.

Muitos modelos de estrutura temporal de taxas de juro assumem que, nos preços das obrigações observadas, não existem oportunidades de arbitragem sem risco não exploradas. Este pressuposto teórico é consistente com a observação de títulos de várias modalidades de obrigações simultaneamente nos mercados mais líquidos. De facto, a suposição de que não existem oportunidades de arbitragem não exploradas é central na literatura de finanças dedicada à análise dos preços de títulos, mas, como referenciado por Duffee (2002), os modelos associados de não arbitragem podem demonstrar um desempenho empírico decepcionante, especialmente no que diz respeito a previsões *out-of-sample*.

Em contraste, muitos outros investigadores têm utilizado representações que são empiricamente atraentes mas não muito bem baseadas na literatura. Mais concretamente, Nelson e Siegel (1987) fornecem uma curva de ajuste notavelmente boa para a secção transversal de rendimentos em diversos países, tornando-se uma especificação amplamente utilizada entre os profissionais do mercado financeiro e bancos centrais. Também Diebold e Li (2006) desenvolvem um modelo dinâmico baseado nesta curva, com rendimentos que estão *affine* em três factores latentes, que têm uma interpretação padrão de nível, inclinação e curvatura. Tal dinâmica do modelo de Nelson e Siegel é fácil de estimar e prevê a curva de rendimentos muito bem. Apesar do seu bom desempenho empírico, o modelo dinâmico de Nelson e Siegel não impõe a restrição teórica presumivelmente desejável de ausência de arbitragem.

Christenssen et al. (2006) impõem uma ausência de arbitragem, e argumentam que, embora a popular extensão de Svensson (1995) da curva de Nelson-Siegel possa melhorar o ajuste do rendimento, não existe um modelo sem arbitragem da curva de rendimentos que corresponda as suas cargas factoriais. No entanto, mostram que há uma generalização de cinco-factores natural, a qual adiciona um factor de inclinação segundo a juntar-se ao factor curvatura adicional na extensão de Svensson, que não conseguiu a liberdade de arbitragem. Por fim, mostram que a estimativa deste modelo generalizado livre de arbitragem de Nelson-Siegel pode ser um bom elemento para as ferramentas de bancos centrais e os profissionais que agora usam a não-extensão livre de arbitragem de Svensson da curva de rendimentos de Nelson-Siegel. Em particular, dada a sua estimativa tratável, o modelo livre de arbitragem de Nelson-Sigel básico pode ser facilmente ampliado para incorporar outros elementos, tais como a volatilidade estocástica, os rendimentos de títulos indexados à inflação ou as taxas de empréstimos interbancários (Christensen et al. 2008 a, b, c). Estas extensões seriam difíceis de incluir num modelo *affine* estimado de forma muito flexível, mas pode ajudar a esclarecer várias questões importantes.

Análises que não imponham restrições de não arbitragem são análises incomuns. No entanto, como existe a possibilidade de uma restrição ser violada, essa restrição pode tornar-se indesejável. Além disso, se a restrição de não-arbitragem for de facto utilizada, então, serão pelo menos, capturados aproximadamente pelas curvas de rendimento, porque são aproximações flexíveis para os dados.

Na extensão do modelo Nelson-Siegel existe um problema da amostra principal com a curva de rendimentos regulares que se deve, ao factor de inclinação e ao factor de curvatura decairem rapidamente para zero como uma função da maturidade. Assim, apenas o factor de nível está disponível para ajustar a estimativa para um prazo igual ou superior a dez anos. Numa estimativa empírica, esta limitação mostra-se como uma falta de adequação dos rendimentos de longo prazo.

Uma critica levantada por Filipovic (1999) contra a versão dinâmica do modelo de Nelson-Siegel também se aplica à versão dinâmica do modelo de Svensson. Assim, este modelo não é consistente com o conceito de ausência de arbitragem.

2.3. Modelos empíricos

O ajuste de curvas de rendimento para produzir dados remonta pelo menos aos esforços pioneiros de Durand (1942), cujo método de modelização foi desenhar uma curva de rendimentos monótona sob a dispersão de pontos de uma forma que lhe parecia subjectivamente razoável. McCulloch (1971, 1975) propõe a aproximação da função valor presente por um polinómio por partes *spline fitted* com dados de preços. Shea (1982, 1985) mostrou que o resultado de rendimentos no final da amostra observada tende a ser uma curva brusca. Esta parece ser mais uma propriedade pouco provável de uma verdadeira relação da curva de rendimentos, e também sugere que esses modelos não seriam úteis para a previsão *out-of-the-sample* da faixa de maturidade.

McCulloch (1971, 1975) recomendou o uso de funções matemáticas como polinómios para ajustar empiricamente a função de desconto em determinados momentos do tempo. Depois disso, várias funções foram sendo propostas para ajustar a estrutura temporal de taxas de juro em factores de desconto, taxas de juro *spot* e taxas de juro *forward*.

Svensson (1994) refere que a estimativa de taxas de juro *forward* e *spot* segue McCulloch (1971, 1975) na adaptação para cada data de negociação de uma função de desconto, mas usa uma extensão de Nelson e Siegel (1987) em vez do *spline* cúbico original de McCulloch. O *spline* cúbico tem a bem conhecida desvantagem de as estimativas de taxas *forward* poderem ser bastante instáveis, especialmente nos vencimentos mais longos (Shea (1984)).

De acordo com a metodologia conhecida como *splines* cúbicas, se o intervalo da amostra for dividido em diferentes intervalos, a estrutura temporal de taxas de juro pode ser representada por um polinómio do 3º grau diferente em cada um desses intervalos. Podem aparecer problemas nos pontos de transição ou nós, isto é, onde se muda de polinómio. Para garantir que a estrutura temporal de taxas de juro é contínua e suave para todas as maturidades, os coeficientes dos polinómios em dois intervalos adjacentes são estimados e sujeitos à restrição de as primeiras derivadas serem iguais e as segundas também, simultaneamente.

Esta metodologia é suficientemente flexível para ajustar a estrutura temporal de taxas de juro com formas complexas. Dado que é determinada pelas observações em cada grupo, quantas mais partições se definirem melhor será o ajustamento às observações. No entanto, um sobre-ajustamento, que resulta da divisão do intervalo em demasiados intervalos, pode resultar em formas desapropriadas da estrutura temporal de taxas de juro, tais como as que implicam taxas de juro *forward* negativas. Para resolver este problema, Fisher et al. (1996) propuseram ajustar a estrutura temporal de taxas de juro directamente em taxas *forward* em vez de taxas *spot* ou factores de desconto, e em vez de "*splines* de regressão", sugeriram usar "*splines* suaves" de maneira a evitar o sobre-ajustamento que produz formas estranhas da estrutura temporal de taxas de juro.

Apesar de ser usada com sucesso para ajustar a estrutura temporal de taxas de juro em *cross-section*, esta metodologia não é usada para prever ou simular a evolução futura da estrutura temporal de taxas de juro. Algumas das razões para que isto aconteça são, por um lado, a definição dos nós em cada momento do tempo é sempre uma tarefa subjectiva e, por outro lado, não é fácil interpretar os coeficientes estimados dos polinómios e modelizá-los em série temporal pode ser ainda mais complicado. Estas dificuldades, em conjunto, tornam inviável usar *splines* cúbicas para prever ou simular taxas de juro de uma forma efectiva.

A limitação mais importante dos modelos *spline* é o elevado número de parâmetros que é necessário estimar. Sendo esta uma grande fraqueza porque os participantes no mercado e os bancos centrais preferem ajustar funções parcimoniosas no número de parâmetros e fáceis de implementar. De acordo com o BIS (2005), nove dos treze bancos centrais abrangidos no seu estudo vinham usando a metodologia de Nelson e Siegel ou a extensão de Svensson (1994), que são funções da estrutura temporal de taxas de juro com apenas quatro e cinco coeficientes, respectivamente.

Recentemente, este tipo de modelos recebeu um novo impulso com Diebold e Li (2006), que interpretam os coeficientes da função de Nelson e Siegel como factores latentes e modelizaram-nos como processos auto-regressivos obtendo bons resultados na previsão da estrutura temporal de taxas de juro um período adiante. Na mesma linha de investigação, Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) e Diebold, Piazzesi e Rudebusch (2005) incorporam variáveis macroeconómicas relacionadas com os factores que ajudam a previsão.

2.4. Importância da estrutura temporal de taxas de juro como indicadores de política monetária

Ao longo do tempo tem-se assistido ao estudo da influência que a estrutura temporal de taxas de juro tem na definição da política monetária, indicando as taxas de juro *forward* as expectativas futuras de taxas de juro e de taxas de inflação.

Svensson (1994), motivado pela necessidade de encontrar novos indicadores da política monetária, tentou demonstrar que as taxas de juro *forward* são um importante indicador da política monetária. Sendo que a introdução desses novos indicadores da política monetária é crucial para avaliar o estado da orientação da política monetária.

O padrão de taxa de juro é uma variável chave da economia. Isso afecta directamente a estrutura de taxas de juro, o que tem implicações no preço dos títulos de rendimento fixo e derivados. Além disso, como os retornos de equilíbrio esperados dos activos são expressos em relação a taxa livre de risco, estes são um ponto de referência geral para definir preços de activos. A taxa de juro é um dado importante para a análise devido ao seu impacto no custo de crédito, da sua sensibilidade para a orientação da política monetária e das expectativas inflacionárias.

Com taxas de cambio flexíveis, a política monetária na Europa terá de confiar mais nos indicadores do que anteriormente sob taxas fixas, especialmente uma vez que posteriormente será difícil, encontrar objectivos intermédios adequados e fiáveis da politica monetária. Vários indicadores diferentes terão de ser utilizados. Um dos indicadores potenciais, a curva das taxas de juro *forward*, pode ser usado para indicar expectativas de mercado futuras de taxas de juro *spot*, política monetária, taxas de inflação e taxas de depreciação da moeda.

A curva de taxas de juro *forward* contém as mesmas informações que a curva de taxas de juro *spot*, mas apresenta a informação de uma forma que se torna mais fácil de interpretar para fins de política monetária. Assim a curva de taxas de juro *forward* separa as expectativas do mercado para o curto, médio e longo prazo de forma mais fácil que a curva da taxa *spot*.

2.5. Modelos da estrutura temporal de taxas de juro

Ao longo do tempo têm sido desenvolvidos vários modelos da curva de rendimentos. Alguns desses modelos têm sido desenvolvidos por macro economista e outros por economistas financeiros. Uma grande lacuna existente entre os modelos da curva de rendimentos desenvolvidos por macro economistas e os modelos desenvolvidos pelos economistas financeiros prende-se com o facto de os macro economistas incidirem sobre o papel das expectativas de inflação e actividade real da economia futura na determinação do rendimento e os economistas financeiros não incidirem sobre qualquer papel explícito desses determinantes.

Alguns dos mais conhecidos modelos de avaliação da estrutura temporal de taxas de juro, são, o modelo de Nelson e Siegel (1987), modelo de Svensson (1994), modelo de Vasicek (1977) e o modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985). Outros investigadores têm proposto uma variedade de modelos paramétricos para curvas de rendimento, incluindo Cohen, Kramer e Waught (1966), Echols e Elliot (1976), Dobson (1978), Heller e Khan (1979) e Chambers, Carleton e Waldman (1984). Alguns destes são baseados em regressão polinomial, e todos incluem pelo menos um termo linear que obrigaria a extrapolar bastantes taxas de juro de longo prazo, apesar das suas capacidades para ajustar o intervalo de dados.

Para a construção da curva de rendimentos, primeiro estabelece-se a notação, introduzindo a construção de três teorias principais e as relações entre elas: a curva de desconto, a curva *forward*, e a curva de rendimento, que devem ser estimadas a partir de preços observados de obrigações. Uma abordagem popular para a construção da curva de rendimento procede calculando um desconto suave da curva convertendo depois para rendimentos nos prazos relevantes. Uma segunda abordagem da curva de desconto de rendimento é a construção de Vasicek e Fong (1982), que são *splines* exponenciais para a curva de desconto, utilizando uma transformação negativa de maturidade em vez da maturidade em si, o que garante que as taxas *forward* de rendimentos de cupão zero convergem para um limite fixo com o aumento da maturidade. Por isso o modelo de Vasicek-Fong é mais bem-sucedido em curvas de rendimento mais longas. Ele tem os seus próprios problemas, no entanto, porque a sua estimativa requer um processo iterativo não linear e a optimização pode ser difícil para restringir as taxas *forward* implícitas de serem positivas. Uma terceira abordagem muito popular é a de Fama e

Bliss (1987), que constroem não através de uma curva de desconto aproximada, mas sim através da aproximação de taxas futuras nos prazos observados.

Existem modelos da curva de rendimentos que incorporam ambos os factores de produção (nível, inclinação e curvatura) e variáveis macroeconómicas (actividade real, a inflação, e a orientação da política monetária). Estes modelos são convenientes para a representação do espaço de estado, porque facilita a estimativa e a construção da curva de factores de rendimentos e testes de hipóteses sobre as interacções dinâmicas entre a macroeconomia e a curva de juros. Encontram-se fortes evidências de efeitos macroeconómicos na curva de juros futuros para desenvolvimentos macroeconómicos. Assim, embora a causalidade bidireccional, os efeitos na tradição de Ang e Piazzesi (2003) parecem relativamente mais importante do que os da tradição de Estrella e Hardouvelis (1991), Estrella e Mishkin (1998) e Stock e Watson (2000). Também relaciona-se uma abordagem de modelagem da curva de rendimentos para uma abordagem macroeconómica tradicional baseada na hipótese das expectativas. Os resultados indicam que as hipóteses das expectativas podem ser razoáveis em certos períodos, mas não possuem a amostra como um todo.

Um dos modelos mais importante da estrutura temporal de taxas de juro é o modelo de Nelson e Siegel (1987), o qual tem o objectivo de introduzir um modelo simples e parcimonioso que seja suficientemente flexível para representar a variedade de formas geralmente associadas às curvas de rendimento: monótona, *humped* e *S shaped*. Potenciais aplicações de modelos da curva de rendimento parcimoniosa incluem funções de procura, o teste da estrutura a termo de taxas de juro e a representação gráfica para fins informativos, sendo este modelo considerado um modelo empírico ou estatístico, permitindo esta classificação separar o modelo de Nelson e Siegel dos modelos de equilíbrio ou não fundamentais e os modelos de não-arbitragem.

Muitos trabalhos têm modelado a curva de rendimentos, o que pode ser útil devido à extensão e natureza das ligações permitidas entre as variáveis financeiras e macroeconómicas. Muitos modelos da curva de rendimentos simplesmente ignoram as ligações macroeconómicas, especialmente aqueles modelos que impõem uma restrição de não-arbitragem.

Alguns dos vários métodos de estimar a estrutura temporal de taxas de juro que sejam atraentes que têm sido estudados, são: Svensson (1994) que usou um método simples e robusto para estimar taxas *forward,* método esse que parece ter mais precisão que a necessária para a finalidade da política monetária. Christensen et al. (2009) mostram um modelo generalizado livre de arbitragem de Nelson-Siegel novo da curva de taxas de juro que não só mostra a consistência teórica, mas também mantém as propriedades importantes de tratabilidade empírica. Estimam as versões independentes de modelos de quatro e cinco factores livre de arbitragem e a versão independente do modelo de cinco factores generalizado livre de arbitragem de Nelson-Siegel. Diebold et al. (2006) apresentam um modelo de um factor da curva de rendimentos sem variáveis macroeconómicas

Vasicek e Fong (1982) recomendam *splines* exponenciais como uma alternativa a *splines* polinomiais. Numa comparação das duas metodologias *spline,* Shea (1984) descobre que *splines* exponenciais estão sujeitos às mesmas insuficiências que *splines* polinomiais, essencialmente porque *splines* exponenciais são usados depois de uma mudança de variáveis.

Uma abordagem que é muito popular entre os participantes no mercado e bancos centrais baseia-se no ajustamento da curva de Nelson e Siegel (1987) a dados *cross-section*, seguindo-se a modelização dinâmica das séries temporais dos coeficientes estimados, como propuseram Diebold e Li (2006). Na verdade, esta representação é um modelo dinâmico de três factores relacionados com nível, inclinação e curvatura da estrutura temporal de taxas de juro. Diebold e Li (2006) fizeram uma previsão *out-of-sample*, não utilizando as abordagens de não arbitragem e de equilíbrio. Como alternativa usaram o quadro de componentes exponenciais de Nelson e Siegel (1987) para ajustar toda a curva de rendimentos, período a período, num parâmetro tridimensional que se desenvolve dinamicamente. Ao contrário da análise factorial, em que se estima os factores observados e *factors loadings*, do quadro de Nelson-Siegel que impõe estruturas nos *factors loadings*, o que facilita a estimativa de factores, e permite interpretar os factores como nível, declive e curvatura. Estimaram também modelos auto regressivos para factores, e em seguida fizeram uma previsão da curva dos factores. Este modelo produz previsões mais precisas com um ano de antecedência em relação ao *benchmarks* padrão.

O modelo multi-factor proposto por Diebold e Li (2006) apresenta um quadro para a modelação e previsão da curva de rendimento, demonstrando que o bem conhecido modelo de Nelson e Siegel (1987) é adequado para os propósitos de previsão final, e introduziram uma nova curva de interpretação, mostrando que os três coeficientes da curva de Nelson-Siegel podem ser interpretados como nível, declive e factores de curvatura, e que a natureza dos *factors loadings* implícitos no modelo de Nelson-Siegel facilitam a coerência com várias propriedades empíricas da curva de rendimentos que foram catalogados durante anos.

Ao longo do seu trabalho Diebold e Li (2006), usaram uma aproximação conveniente de três componentes exponenciais. Em particular, a curva de taxa forward, dada por

$$f_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}e^{-\lambda_t\tau} + \beta_{3t}e^{-\lambda_t\tau}, \tag{1}$$

onde β_{1t}, β_{2t} e β_{3t} são os factores de nível, inclinação e curvatura.

Alguns dos factores mais importantes da capacidade deste modelo para reproduzi-los, são: a curva de rendimento médio; a curva de rendimento assume uma variedade de formas através do tempo, incluindo inclinação ascendente, descendente, *humped* e invertida *humped*, pode assumir todas essas formas; a dinâmica de rendimento é persistente, e a dinâmica de *spread* é muito menos persistente; a extremidade a curto prazo da curva de rendimentos é mais volátil do que a extremidade a longo prazo; e as taxas de longo prazo são mais persistentes do que as taxas de curto prazo.

Uma parte importante dos modelos multi-factor, é a importante percepção de que os modelos de três factores, que na sequência da literatura até agora chamada de longo prazo, de curto prazo e médio prazo, também podem ser interpretados em termos de nível, declive e curvatura.

Um bom modelo da dinâmica da curva de rendimentos deve ser capaz de reproduzir as características históricas essenciais sobre a forma média da curva de rendimento, a variedade de formas assumidas em diferentes momentos, a persistência de fortes rendimentos e persistência de fracos *spreads*, e assim por diante.

Alguns modelos utilizam um modelo espaço de estado para estimar versões multi-factor do modelo Cox-Ingersoll-Ross da estrutura a termo das taxas de juro. As estimativas das variáveis de estado não observáveis são geradas por um filtro de Kalman não-linear. Estes modelos multi-factor são necessários para explicar as mudanças ao longo do tempo na inclinação e forma da curva de rendimentos. Em testes estatísticos, os modelos de dois factores são rejeitados com o modelo de três factores como a hipótese alternativa. Os testes de diagnóstico destes modelos sugerem que o modelo de dois factores tem frequentemente um desempenho tão bom como o modelo de três factores, mas há períodos em que o modelo de três factores é necessário para capturar a forma geral da curva de rendimento. O modelo de três factores tem a flexibilidade necessária para explicar as variações aleatórias nas taxas de juro de curto prazo, taxas de juro de longo prazo e volatilidade. Nos modelos multi-factor, a variação de taxas de juro de longo prazo é explicada por factores que experimentam uma muito lenta reversão à média. Este aspecto dos resultados empíricos é um reflexo do comportamento aleatório de taxas de juro de longo prazo.

Os testes empíricos efectuados aos modelos multi-factor identificam várias vantagens associadas a modelos de três factores. Alguns modelos de um factor fornecem estimativas consistentes para os parâmetros do modelo de dois factores de tempo contínuo e para a taxa de juro sem risco. Uma especificação eficazmente resultante destes modelos estende o modelo Cox-Ingersoll-Ross padrão para a definição de volatilidade estocástica. A incorporação do factor de volatilidade não observável melhora substancialmente a capacidade do modelo para ajustar os dados, simplificando, o factor de volatilidade estocástica para uma parte integrante da taxa de juro dinâmica. Por implicação, suspeita-se que as técnicas de estimação que incidem sobre a estimativa de modelos de um factor de taxa de juro podem revelar-se de aplicabilidade limitada. Nelson e Siegel (1987) e a curva associada ao modelo dinâmico de Diebold e Li (2006) ambos têm problemas de ajuste de vencimento de rendimentos longos.

2.6. Dificuldades dos modelos de estrutura temporal de taxas de juro

No processo de modelagem e estimativa de taxas de juro dinâmicas as dificuldades intrínsecas de desenvolver modelos que sejam atraentes a partir de uma perspectiva teórica e um desempenho satisfatório em aplicações empíricas tornaram-se cada vez mais evidentes.

Um impulso importante para a generalização dos modelos paramétricos padrão resulta das numerosas rejeições estatísticas destes. No entanto os trabalhos de Dybvig (1989), Longstaff e Schwartz (1992), Brenner et al. (1994), Koedijk et al. (1994) e Gallant e Tauchen (1995) são fortemente sugestivos das direcções em que os modelos padrão falham. Em particular, estes trabalhos apontam para a importância de se incorporar um factor de volatilidade estocástica nos modelos.

Nas agências de gestão da dívida pública e nos bancos centrais, os modelos de estrutura temporal de taxas de juro podem ser uteis para calcular medidas de risco ou para determinar a composição óptima de *portfolio benchmark*.

A primeira dificuldade que estes modelos enfrentam na procura deste objectivo é a estrutura temporal de taxas de juro, ser uma função contínua do prazo até à maturidade, e que não é directamente observável, porque não existem instrumentos de cupão zero que sejam negociados em toda a amostra.

Na realidade mesmo nos mercados líquidos da dívida pública, apenas existem alguns pontos da estrutura temporal de taxas de juro. Por esta razão, se for necessário uma taxa de juro para uma maturidade para a qual nenhum instrumento é negociado, um modelo da estrutura temporal de taxas de juro terá de ser estimado. Esta necessidade fez com que se desenvolvesse uma enorme linha de investigação com o objectivo de alcançar a melhor representação possível de toda a estrutura temporal de taxas de juro apenas a partir dos pontos directamente disponíveis a partir de preços de mercado.

Apesar dos muitos avanços recentes na modelização da estrutura temporal de taxas de juro, apenas na última década se tem concentrado esforços na previsão da dinâmica da estrutura temporal de taxas de juro ou evolução ao longo do tempo. Até então, as preocupações centram-se principalmente no ajustamento da forma da estrutura temporal de taxas de juro, em *cross-section*, em determinados momentos do tempo.

Actualmente, sabe-se que apenas é suficiente um pequeno número de factores para resumir quase toda a informação contida nas *yields* de diferentes maturidades ou nos preços de bilhetes e obrigações do tesouro. Por esta razão, normalmente os modelos da estrutura temporal de taxas de juro são estruturas compostas por um pequeno número de factores e os seus correspondentes pesos ou ponderações relacionando as yields de diferentes maturidades com aqueles factores.

A abordagem de Nelson e Siegel impõe uma restrição sobre os pesos dos factores aplicando-lhes uma estrutura paramétrica pré-definida de acordo com a equação característica desta metodologia, restringindo o número de formas admissíveis que a estrutura temporal de taxas de juro pode tomar. Ainda que pareçam restritivas, as condições impostas sobre os pesos dos factores têm o único propósito de manter aderência a hipóteses fundamentais como as taxas de juro serem positivas e os factores de desconto tenderem para zero com a maturidade. Sendo estes aspectos importantes na previsão da estrutura temporal de taxas de juro.

Estudiosos da maturidade da estrutura a termo de taxas de juro têm invariavelmente descrito curvas de rendimento que são essencialmente monótonas, *humped* ou ocasionalmente *S shaped.* Esta consistência é extremamente evidente no longo registo histórico de curvas desenhadas e apresentadas subjectivamente por Wood (1983).

2.7. Processo de modelagem de taxas de juro dinâmicas

No processo de modelagem de estimativa de taxas de juro dinâmicas as dificuldades intrínsecas de desenvolver modelos que sejam atraentes a partir de uma perspectiva teórica com um desempenho satisfatório em aplicações empíricas tornaram-se cada vez mais evidentes. Os principais modelos teóricos para taxas de juro especificam processos contínuos no tempo, originários na aritmética Browniana de representação do modelo de Merton (1973).

Na maior parte dos casos um ajuste do rendimento para prazos curtos é muito pouco satisfatório, mas minimizando os erros produzidos, o ajuste melhora, geralmente apenas com uma pequena deterioração do ajuste do preço.

Na maioria dos casos, o modelo original de Nelson e Siegel dá um ajuste satisfatório. Em alguns casos quando a estrutura a termo é mais complexa, o ajuste do modelo original de Nelson e Siegel é insatisfatório, sendo que o modelo estendido melhora consideravelmente o ajuste.

Uma representação padrão para a generalização das taxas de juro dinâmicas é considerar que o comportamento das taxas de juro é desenvolvido por uma equação diferencial estocástica:

$$dr_t = \mu_t(r_t)d_t + \sigma_t(r_t)dW_t\,, \qquad (2)$$

onde CIR: $\mu_z(r_z) = k(\theta - r_z)$ E $\sigma_t(r_t) = \sigma\sqrt{r_z}$; e

VASICEK: $\mu_z(r_z) = k(\theta - r_t)$ E $\sigma_z(r_t) = \sigma$.

2.8. Cálculo da estrutura temporal de taxas de juro através de instrumentos financeiros

No cálculo de taxas de juro *forward* podem acontecer duas situações: podem existir ou não existir taxas explícitas de mercado. Quando não existem taxas *forward* explícitas de mercado, as taxas de juro *forward* implícitas têm de ser estimadas através de instrumentos financeiros existentes.

No cálculo de taxas de juro *forward* se existirem obrigações de cupão zero, torna-se fácil efectuar o cálculo da taxa de juro implícita através de taxas de juro *spot* para obrigações de cupão zero. Já para calcular a taxa de juro implícita até à maturidade é mais complicado.

Para estimar taxas *forward* através de obrigações com cupão existem duas etapas: primeiro são estimadas as taxas de juro *spot* implícitas a partir de rendimentos para a maturidade em obrigações de cupão e depois são calculadas as taxas de juro *forward* a partir de taxas de juro spot implícitas.

3. Principais resultados do estudo da estrutura temporal de taxas de juro

Alguns dos principais resultados obtidos no estudo dos modelos de estrutura temporal de taxas de juro, assentam no pressuposto de que o prémio *forward* é insignificante e as taxas de juro *forward* podem ser interpretadas como as taxas *spot* futuras esperadas. A suposição de prémios de risco iguais a zero e a chamada hipótese das expectativas para a estrutura temporal de taxas de juro tem sido frequentemente testadas e muitas vezes rejeitadas. Por outro lado, as tentativas para estimar os prémios de risco *forward* resultam em estimativas bastantes pequenas.

A hipótese das expectativas é útil para comparar a representação da curva de rendimentos com outras que têm aparecido na literatura. Relaciona-se com a modelagem da curva de rendimentos e com a abordagem tradicional macroeconómica baseada na hipótese das expectativas. Qualquer termo ou prémios de risco são assumidos constantes ao longo do tempo.

Muitos estudos empíricos sobre a estrutura a termo concluíram que mudanças na política monetária resultam numa quebra estrutural no processo da estrutura temporal de taxas de juro.

Nos poucos casos em que a versão original de Nelson e Siegel (1987) é insuficiente, uma versão estendida do modelo de Nelson e Siegel (1987) dá um ajuste muito bom. A versão estendida do modelo de Nelson e Siegel (1987), pressupõe a manutenção de prémios de risco muito pequenos para justificar a utilização de taxas de juro *forward* como uma indicação de taxas de juro *spot* futuras, taxas de inflação futuras e taxas de depreciação da moeda futuras.

Com os resultados do estudo da estrutura temporal de taxas de juro, pode mostrar-se no contexto da curva de rendimento que a perspectiva de redução, que tende a produzir os modelos de forma aparentemente simples, são porém realmente sofisticados.

Muitos resultados de estudos da estrutura temporal de taxas de juro indicam que, os modelos que melhor descrevem a dinâmica de taxas de juros ao longo do tempo são aqueles que permitem uma volatilidade condicional de alterações das taxas de juros com o altamente dependente nível das taxas de juros. De forma comum, utilizam-se modelos de estrutura a termo. No entanto, esses modelos têm um problema na volatilidade, uma vez que a volatilidade das taxas de juros tem uma importância fundamental na valorização de contingências e riscos de taxas de juros.

Um motivo provável para o sucesso das abordagens da estrutura temporal de taxas de juro, depende fortemente de uma ampla interpretação do princípio da redução. A essência é impor intencionalmente uma estrutura substancial prévia, numa tentativa explícita de aumentar a capacidade de previsão *out-of-sample*, inclui o ajustamento de um modelo paramétrico, que utiliza uma estrutura rigorosa de *factors loadigs*, de acordo com a função de desconto. Interpreta-se o princípio da redução como o conhecimento de que a imposição de restrições, pode ser útil para previsões *out-of-sample*, mesmo que as restrições sejam falsas.

4. Modelo de Nelson e Siegel

4.1. Introdução

No modelo paramétrico que Nelson e Siegel propõem, existe uma relação entre as taxas de juro e a maturidade, que é derivada da hipótese de que as taxas de juro *spot* seguem uma equação diferencial de segunda ordem e as taxas de juro *forward*, uma vez que são previsões das taxas *spots*, são a solução dessa equação com duas raízes idênticas.

A classe de funções que facilmente geram a curva de rendimentos de formas típicas são as que se relacionam com soluções para diferenciais ou diferenciar equações. A teoria da expectativa da estrutura a termo de taxas de juro fornece motivação heurística para investigar esta classe, pois, se as taxas *spot* são geradas por uma equação diferencial, as taxas *forward*, sendo previsões, serão a solução para as equações. Por exemplo se a taxa instantânea *forward* na maturidade m, denotada r(m), é dada pela solução para uma equação diferencial de segunda ordem com real e desigual raízes, teríamos

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-\frac{m}{\tau_1}) + \beta_2 * \exp(-\frac{m}{\tau_2}), \qquad (3)$$

onde τ_1 e τ_2 são constantes de tempo associadas com a equação, e β_0, β_1 e β_2 são determinados pelas condições iniciais.

Esta equação gera uma família de curvas de taxas *forward* que assumem formas monótonas, *humped*, ou *S Shaped* dependendo dos valores de β_1 e β_2, que também tem assíntota β_0. O rendimento até à maturidade, denotada R(m), é a média das taxas forward

$$R(m) = \frac{1}{m}\int_0^m r(x)dx \tag{4}$$

e da curva de rendimentos implícita pelo modelo exibe o mesmo intervalo de formas.

Esta estrutura tem as características adequadas para capturar as formas usuais da estrutura temporal de taxas de juro. Sendo uma delas a existência de limites para as taxas de juro de muito longo prazo e curto prazo.

A abordagen de Nelson e Siegel (1987) para modelos de um factor exprime um conjunto potencialmente grande de rendimento de vários prazos como uma função de apenas um conjunto de factores não observados. Sendo esta uma representação muito usada entre os profissionais e especialmente bancos centrais e sendo que uma representação muito popular da secção transversal de rendimentos em qualquer ponto é a curva de Nelson e Siegel (1987), dada por

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_3\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right), \tag{5}$$

onde β_1, β_2 e β_3 são os factores de nível, inclinação e curvatura.

4.2. Nelson e Siegel como um modelo dinâmico de 3 factores

O modelo de Nelson e Siegel foi originalmente desenhado para ajustar em *cross-section* toda a estrutura temporal de taxas de juro numa abordagem estática, em momentos do tempo determinados. Recentemente, Diebold e Li (2006) adaptaram a estrutura de componentes exponenciais de Nelson e Siegel para modelizar a estrutura temporal de taxas de juro como um modelo com três parâmetros evoluindo dinamicamente no tempo.

Diebold e Li reinterpretam à luz de um modelo dinâmico o modelo de Nelson e Siegel e mostram que, apesar da sua estrutura simples, é capaz de representar as propriedades empíricas da estrutura temporal de taxas de juro observadas e obtêm bons resultados quando as previsões das taxas de juro são comparadas com as de modelos alternativos. Estes resultados abriram caminho para o estudo do comportamento das séries temporais dos factores bem como da sua relação com variáveis macroeconómicas relevantes. Acrescentando estes trabalhos um conteúdo económico à abordagem de Nelson e Siegel da qual carecia inicialmente.

4.3. Previsão fora de amostra: Preços de obrigações longo prazo

Um dos critérios usados para um modelo satisfatório da curva de juros é que ele seja capaz de prever rendimentos além da faixa de vencimento da amostra.

Um teste exageradamente exigente e difícil seria prever o rendimento ou preço de um título de longo prazo. Pode estimar-se o preço de um título como o valor presente da série de fluxos de caixa com desconto de acordo com o valor da curva de rendimentos no prazo de cada pagamento. Uma ligação pode ser pensada consistindo em cupões com vencimentos espaçados em intervalos de 6 meses e o valor da obrigação pago na data de vencimento da obrigação. Cada componente paga um montante igual no cupão semestral, excepto a última, que também paga o valor da obrigação. Valores de uma curva de rendimentos podem ser usados para descontar cada componente no fluxo. O valor total resultante pode ser comparado com o preço cotado da obrigação, ajustando primeiro os juros a partir da data do último cupão, que o comprador deve pagar para o vendedor. O preço do título previsto dependerá principalmente na parte da curva de rendimento que está além do alcance dos dados da amostra porque no projecto apenas os dois primeiros pagamentos de cupões semestrais podem ser devidos no prazo de um ano. Os preços, portanto, são determinados em grande medida pelo nível da curva dada pela intercepção no modelo.

4.4. Conclusões do modelo de Nelson e Siegel

O objectivo do trabalho de Nelson e Siegel foi propor uma classe de modelos, não dependentes da teoria das expectativas do termo estrutura, que oferece uma representação parcimoniosa das formas tradicionalmente associadas com curvas de rendimento. Os dados sugerem que um modelo muito simples, com apenas um parâmetro de forma única é capaz de caracterizar a forma da estrutura a termo. O modelo impõe suavidade suficiente para revelar um padrão de vencimentos específicos que podem ser relacionados com os custos de transacção mais baixos para o vencimento da emissão da obrigação. Se o modelo reflecte a forma básica da estrutura a termo e não apenas uma aproximação local, então deve ser capaz de prever rendimentos e preços com prazos além do alcance da amostra. Confirmando isso, encontra-se uma alta correlação entre o valor presente de um título de longo prazo implícito nas curvas ajustadas e os preços efectivos da obrigação. A metodologia usada no modelo de Nelson e Siegel é fiável para simular a estrutura temporal de taxas de juro.

5. Estudo empírico do modelo de Nelson e Siegel aplicado às obrigações Alemãs

Para fazer o estudo empírico do modelo de Nelson e Siegel, vai comparar-se as curvas de taxas de juro das obrigações Alemãs do modelo de Nelson e Siegel com o modelo de Nelson e Siegel extendido, para 37 obrigações alemãs. Estes dois modelos diferem no número de parâmetros usados por cada modelo, sendo que o modelo de Nelson e Siegel têm 4 factores e o modelo de Nelson e Siegel extendido têm 6 factores. A curva de Nelson e Siegel é dada por:

$$y(\tau) = \beta_0 + \beta_1 (\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}) + \beta_2 (\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}) \tag{6}$$

E a curva de Nelson e Siegel extendida é dada por:

$$y(\tau) = \beta_0 + \beta_1 (\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}) + \beta_2 (\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}) + \beta_3 (\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}) + \beta_4 (\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}) . \tag{7}$$

5.1. Dados

Os dados foram obtidos através da GoBulling Banco da Carregosa. Os dados obtidos correspondem ao preço das 37 obrigações da dívida pública Alemã existentes no mercado na data de 04 de Julho de 2013.

Os dados obtidos foram os seguintes:

ISIN Code	Mid Price	Frequency	ctype	coupon	dayconv	firstcp	Issue Type	Country	last_cpn	mat_date	bullet	Int Acc Date	redemption
DE0001135242	102,085	Annual	Fixed	4,250	Actual/Actual	04-01-2005	Government - Sovereign	Germany	04-01-2014	04-01-2014	Yes	21-10-2003	100% of par
DE0001135259	104,140	Annual	Fixed	4,250	Actual/Actual	04-07-2005	Government - Sovereign	Germany	04-07-2014	04-07-2014	Yes	18-05-2004	100% of par
DE0001135267	105,500	Annual	Fixed	3,750	Actual/Actual	04-01-2006	Government - Sovereign	Germany	04-01-2015	04-01-2015	Yes	16-11-2004	100% of par
DE0001135283	106,255	Annual	Fixed	3,250	Actual/Actual	04-07-2006	Government - Sovereign	Germany	04-07-2015	04-07-2015	Yes	10-05-2005	100% of par
DE0001135291	108,295	Annual	Fixed	3,500	Actual/Actual	04-01-2007	Government - Sovereign	Germany	04-01-2016	04-01-2016	Yes	15-11-2005	100% of par
DE0001134468	116,930	Annual	Fixed	6,000	Actual/Actual	20-06-1987	Government - Sovereign	Germany	20-06-2016	20-06-2016	Yes	28-05-1986	100% of par
DE0001135309	111,230	Annual	Fixed	4,000	Actual/Actual	04-07-2007	Government - Sovereign	Germany	04-07-2016	04-07-2016	Yes	09-05-2006	100% of par
DE0001134492	117,010	Annual	Fixed	5,625	Actual/Actual	20-09-1987	Government - Sovereign	Germany	20-09-2016	20-09-2016	Yes	02-09-1986	100% of par
DE0001135317	111,960	Annual	Fixed	3,750	Actual/Actual	04-01-2008	Government - Sovereign	Germany	04-01-2017	04-01-2017	Yes	07-11-2006	100% of par
DE0001135333	115,160	Annual	Fixed	4,250	Actual/Actual	04-07-2008	Government - Sovereign	Germany	04-07-2017	04-07-2017	Yes	15-05-2007	100% of par
DE0001135341	115,480	Annual	Fixed	4,000	Actual/Actual	04-01-2009	Government - Sovereign	Germany	04-01-2018	04-01-2018	Yes	06-11-2007	100% of par
DE0001135358	117,775	Annual	Fixed	4,250	Actual/Actual	04-07-2009	Government - Sovereign	Germany	04-07-2018	04-07-2018	Yes	20-05-2008	100% of par
DE0001135374	116,225	Annual	Fixed	3,750	Actual/Actual	04-01-2010	Government - Sovereign	Germany	04-01-2019	04-01-2019	Yes	04-11-2008	100% of par
DE0001135382	115,575	Annual	Fixed	3,500	Actual/Actual	04-07-2010	Government - Sovereign	Germany	04-07-2019	04-07-2019	Yes	12-05-2009	100% of par
DE0001135390	114,590	Annual	Fixed	3,250	Actual/Actual	04-01-2011	Government - Sovereign	Germany	04-01-2020	04-01-2020	Yes	03-11-2009	100% of par
DE0001135408	113,285	Annual	Fixed	3,000	Actual/Actual	04-07-2011	Government - Sovereign	Germany	04-07-2020	04-07-2020	Yes	20-04-2010	100% of par
DE0001135416	108,060	Annual	Fixed	2,250	Actual/Actual	04-09-2011	Government - Sovereign	Germany	04-09-2020	04-09-2020	Yes	10-08-2010	100% of par
DE0001135424	109,695	Annual	Fixed	2,500	Actual/Actual	04-01-2012	Government - Sovereign	Germany	04-01-2021	04-01-2021	Yes	16-11-2010	100% of par
DE0001135440	115,180	Annual	Fixed	3,250	Actual/Actual	04-07-2012	Government - Sovereign	Germany	04-07-2021	04-07-2021	Yes	26-04-2011	100% of par
DE0001135457	107,365	Annual	Fixed	2,250	Actual/Actual	04-09-2012	Government - Sovereign	Germany	04-09-2021	04-09-2021	Yes	23-08-2011	100% of par
DE0001135465	104,945	Annual	Fixed	2,000	Actual/Actual	04-01-2013	Government - Sovereign	Germany	04-01-2022	04-01-2022	Yes	22-11-2011	100% of par
DE0001135473	102,065	Annual	Fixed	1,750	Actual/Actual	04-07-2013	Government - Sovereign	Germany	04-07-2022	04-07-2022	Yes	10-04-2012	100% of par
DE0001135499	99,610	Annual	Fixed	1,500	Actual/Actual	04-09-2013	Government - Sovereign	Germany	04-09-2022	04-09-2022	Yes	04-09-2012	100% of par
DE0001102309	98,860	Annual	Fixed	1,500	Actual/Actual	15-02-2014	Government - Sovereign	Germany	15-02-2023	15-02-2023	Yes	15-01-2013	100% of par
DE0001102317	98,485	Annual	Fixed	1,500	Actual/Actual	15-05-2014	Government - Sovereign	Germany	15-05-2023	15-05-2023	Yes	14-05-2013	100% of par
DE0001134922	143,770	Annual	Fixed	6,250	Actual/Actual	04-01-1995	Government - Sovereign	Germany	04-01-2024	04-01-2024	Yes	28-12-1993	100% of par
DE0001135044	154,570	Annual	Fixed	6,500	Actual/Actual	04-07-1998	Government - Sovereign	Germany	04-07-2027	04-07-2027	Yes	01-07-1997	100% of par
DE0001135069	143,965	Annual	Fixed	5,625	Actual/Actual	04-01-1999	Government - Sovereign	Germany	04-01-2028	04-01-2028	Yes	20-01-1998	100% of par
DE0001135085	133,445	Annual	Fixed	4,750	Actual/Actual	04-07-1999	Government - Sovereign	Germany	04-07-2028	04-07-2028	Yes	06-10-1998	100% of par
DE0001135143	155,330	Annual	Fixed	6,250	Actual/Actual	04-01-2001	Government - Sovereign	Germany	04-01-2030	04-01-2030	Yes	11-01-2000	100% of par
DE0001135176	146,145	Annual	Fixed	5,500	Actual/Actual	04-01-2002	Government - Sovereign	Germany	04-01-2031	04-01-2031	Yes	17-10-2000	100% of par
DE0001135226	139,175	Annual	Fixed	4,750	Actual/Actual	04-07-2004	Government - Sovereign	Germany	04-07-2034	04-07-2034	Yes	21-01-2003	100% of par
DE0001135275	128,255	Annual	Fixed	4,000	Actual/Actual	04-01-2006	Government - Sovereign	Germany	04-01-2037	04-01-2037	Yes	18-01-2005	100% of par
DE0001135325	135,085	Annual	Fixed	4,250	Actual/Actual	04-07-2008	Government - Sovereign	Germany	04-07-2039	04-07-2039	Yes	16-01-2007	100% of par
DE0001135366	145,790	Annual	Fixed	4,750	Actual/Actual	04-07-2009	Government - Sovereign	Germany	04-07-2040	04-07-2040	Yes	15-07-2008	100% of par
DE0001135432	117,260	Annual	Fixed	3,250	Actual/Actual	04-07-2011	Government - Sovereign	Germany	04-07-2042	04-07-2042	Yes	13-07-2010	100% of par
DE0001135481	101,155	Annual	Fixed	2,500	Actual/Actual	04-07-2013	Government - Sovereign	Germany	04-07-2044	04-07-2044	Yes	24-04-2012	100% of par

5.2. Estimação dos parâmetros do modelo de Nelson e Siegel

Para se estimar os parâmetros do modelo de Nelson e Siegel utilizou-se a ferramente Solver do Excel e minimizou-se a soma dos quadrados das diferenças entre o valor da obrigação no momento 0 e no momento t_0=0, obtendo-se assim os seguintes parâmetros para o modelo de Nelson e Siegel,

Trade Date	β0	β1	β2	β3
04-07-2013	0,026331	-0,0183467	0,010837	5,33

e os seguintes parâmetros para o modelo de Nelson e Siegel extendido,

Trade Date	β0	β1	β2	β3	β4	β5
04-07-2013	0,035087	-0,04017	-0,0005	5,329468	0,0669829	0,076488661

5.3. Construindo o modelo de Nelson e Siegel

Para calcular os modelos, construiu-se uma tabela para cada modelo e obtiveram-se os resultados nelas inseridos, de onde se obtiveram os seguintes resultado para o modelo de Nelson e Siegel:

#	Bond	VC	AL	VT	B(0)	B(0)-VT	ABS[B(0)-VT]/VT
1	DE0001135242	102,085%	-0,020%	102,065%	103,762%	1,697%	1,663%
2	DE0001135259	104,140%	0,040%	104,180%	103,161%	-1,019%	0,978%
3	DE0001135267	105,500%	0,050%	105,550%	105,686%	0,136%	0,129%
4	DE0001135283	106,255%	0,090%	106,345%	103,892%	-2,453%	2,307%
5	DE0001135291	108,295%	0,160%	108,455%	106,967%	-1,488%	1,372%
6	DE0001134468	116,930%	0,230%	117,160%	113,378%	-3,782%	3,228%
7	DE0001135309	111,230%	0,220%	111,450%	111,450%	0,000%	0,000%
8	DE0001134492	117,010%	0,270%	117,280%	127,619%	10,339%	8,816%
9	DE0001135317	111,960%	0,300%	112,260%	118,347%	6,087%	5,422%
10	DE0001135333	115,160%	0,400%	115,560%	124,906%	9,346%	8,088%
11	DE0001135341	115,480%	0,500%	115,980%	123,282%	7,302%	6,296%
12	DE0001135358	117,775%	0,620%	118,395%	128,806%	10,411%	8,793%
13	DE0001135374	116,225%	0,730%	116,955%	125,226%	8,271%	7,072%
14	DE0001135382	115,575%	0,820%	116,395%	126,858%	10,463%	8,989%
15	DE0001135390	114,590%	0,920%	115,510%	124,739%	9,229%	7,990%
16	DE0001135408	113,285%	1,020%	114,305%	125,642%	11,337%	9,918%
17	DE0001135416	108,060%	1,070%	109,130%	119,177%	10,047%	9,207%
18	DE0001135424	109,695%	1,140%	110,835%	121,186%	10,351%	9,339%
19	DE0001135440	115,180%	1,240%	116,420%	130,547%	14,127%	12,135%
20	DE0001135457	107,365%	1,290%	108,655%	121,085%	12,430%	11,440%
21	DE0001135465	104,945%	1,380%	106,325%	118,630%	12,305%	11,573%
22	DE0001135473	102,065%	1,500%	103,565%	117,901%	14,336%	13,842%
23	DE0001135499	99,610%	1,550%	101,160%	115,296%	14,136%	13,974%
24	DE0001102309	98,860%	1,630%	100,490%	115,168%	14,678%	14,606%
25	DE0001102317	98,485%	1,670%	100,155%	115,097%	14,942%	14,918%
26	DE0001134922	143,770%	1,670%	145,440%	141,811%	-3,629%	2,495%
27	DE0001135044	154,570%	1,990%	156,560%	157,453%	0,893%	0,571%
28	DE0001135069	143,965%	2,080%	146,045%	144,217%	-1,828%	1,251%
29	DE0001135085	133,445%	2,120%	135,565%	136,005%	0,440%	0,324%
30	DE0001135143	155,330%	2,210%	157,540%	157,100%	-0,440%	0,279%
31	DE0001135176	146,145%	2,270%	148,415%	148,208%	-0,207%	0,139%
32	DE0001135226	139,175%	2,360%	141,535%	143,786%	2,251%	1,591%
33	DE0001135275	128,255%	2,410%	130,665%	130,386%	-0,279%	0,213%
34	DE0001135325	135,085%	2,420%	137,505%	139,249%	1,744%	1,268%
35	DE0001135366	145,790%	2,420%	148,210%	150,489%	2,279%	1,538%
36	DE0001135432	117,260%	2,420%	119,680%	119,680%	0,000%	0,000%
37	DE0001135481	101,155%	2,450%	1,03605	103,082%	-0,523%	0,504%

e os seguintes resultados para o modelo de Nelson e Siegel extendido:

#	Bond	VC	AL	VT	B(0)	B(0)-VT	ABS[B(0)-VT]/VT
1	DE0001135242	102,085%	-0,020%	102,065%	103,893%	1,828%	1,791%
2	DE0001135259	104,140%	0,040%	104,180%	103,881%	-0,299%	0,287%
3	DE0001135267	105,500%	0,050%	105,550%	106,952%	1,402%	1,328%
4	DE0001135283	106,255%	0,090%	106,345%	105,648%	-0,697%	0,655%
5	DE0001135291	108,295%	0,160%	108,455%	109,183%	0,728%	0,671%
6	DE0001134468	116,930%	0,230%	117,160%	116,091%	-1,069%	0,912%
7	DE0001135309	111,230%	0,220%	111,450%	114,099%	2,649%	2,377%
8	DE0001134492	117,010%	0,270%	117,280%	120,246%	2,966%	2,529%
9	DE0001135317	111,960%	0,300%	112,260%	112,401%	0,141%	0,125%
10	DE0001135333	115,160%	0,400%	115,560%	117,836%	2,276%	1,969%
11	DE0001135341	115,480%	0,500%	115,980%	115,687%	-0,293%	0,253%
12	DE0001135358	117,775%	0,620%	118,395%	120,188%	1,793%	1,514%
13	DE0001135374	116,225%	0,730%	116,955%	116,166%	-0,789%	0,674%
14	DE0001135382	115,575%	0,820%	116,395%	117,094%	0,699%	0,601%
15	DE0001135390	114,590%	0,920%	115,510%	114,195%	-1,315%	1,138%
16	DE0001135408	113,285%	1,020%	114,305%	114,288%	-0,017%	0,015%
17	DE0001135416	108,060%	1,070%	109,130%	108,069%	-1,061%	0,973%
18	DE0001135424	109,695%	1,140%	110,835%	109,160%	-1,675%	1,511%
19	DE0001135440	115,180%	1,240%	116,420%	116,852%	0,432%	0,371%
20	DE0001135457	107,365%	1,290%	108,655%	107,785%	-0,870%	0,801%
21	DE0001135465	104,945%	1,380%	106,325%	104,768%	-1,557%	1,465%
22	DE0001135473	102,065%	1,500%	103,565%	103,087%	-0,478%	0,462%
23	DE0001135499	99,610%	1,550%	101,160%	100,269%	-0,891%	0,881%
24	DE0001102309	98,860%	1,630%	100,490%	99,084%	-1,406%	1,399%
25	DE0001102317	98,485%	1,670%	100,155%	98,439%	-1,716%	1,713%
26	DE0001134922	143,770%	1,670%	145,440%	146,834%	1,394%	0,959%
27	DE0001135044	154,570%	1,990%	156,560%	161,779%	5,219%	3,334%
28	DE0001135069	143,965%	2,080%	146,045%	148,028%	1,983%	1,357%
29	DE0001135085	133,445%	2,120%	135,565%	139,289%	3,724%	2,747%
30	DE0001135143	155,330%	2,210%	157,540%	160,394%	2,854%	1,812%
31	DE0001135176	146,145%	2,270%	148,415%	150,766%	2,351%	1,584%
32	DE0001135226	139,175%	2,360%	141,535%	144,429%	2,894%	2,045%
33	DE0001135275	128,255%	2,410%	130,665%	129,568%	-1,097%	0,839%
34	DE0001135325	135,085%	2,420%	137,505%	137,362%	-0,143%	0,104%
35	DE0001135366	145,790%	2,420%	148,210%	148,263%	0,053%	0,036%
36	DE0001135432	117,260%	2,420%	119,680%	116,272%	-3,408%	2,848%
37	DE0001135481	101,155%	2,450%	103,605%	98,829%	-4,776%	4,610%

onde VC é o valor de mercado de cada obrigação, AL é o valor dos juros vencidos e VT é a soma de VC com AL.

Para se poder calcular o valor de B(0) construíram-se duas tabelas auxiliares, uma tabela com os pagamentos de cupão em cada momento e outra com os tempos para a maturidade até ao pagamento de cada cupão, de onde se obtiveram as seguintes tabelas para ambos os modelos:

Pagamentos de cupão

104,250%																															
104,250%																															
3,750%	103,750%																														
3,250%	103,250%																														
3,500%	3,500%	103,500%																													
6,000%	6,000%	106,000%																													
4,000%	4,000%	4,000%	104,000%																												
5,625%	5,625%	5,625%	105,625%																												
3,750%	3,750%	3,750%	103,750%																												
4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	104,250%																											
4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	104,000%																											
4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	104,250%																										
3,750%	3,750%	3,750%	3,750%	3,750%	103,750%																										
3,500%	3,500%	3,500%	3,500%	3,500%	3,500%	103,500%																									
3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	103,250%																									
3,000%	3,000%	3,000%	3,000%	3,000%	3,000%	3,000%	103,000%																								
2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	102,250%																								
2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	102,500%																								
3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	103,250%																							
2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	2,250%	102,250%																							
2,000%	2,000%	2,000%	2,000%	2,000%	2,000%	2,000%	2,000%	102,000%																							
1,750%	1,750%	1,750%	1,750%	1,750%	1,750%	1,750%	1,750%	1,750%	101,750%																						
1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	101,500%																						
1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	101,500%																						
1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	1,500%	101,500%																						
6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	106,250%																					
6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	6,500%	106,500%																	
5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	5,625%	105,625%																	
4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	104,750%																
6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	6,250%	106,250%															
5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	5,500%	105,500%														
4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	104,750%										
4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	4,000%	104,000%								
4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	4,250%	104,250%					
4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	4,750%	104,750%				
3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	3,250%	103,250%		
2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	2,500%	102,500%

Tempo para a maturidade

0,504																															
1																															
0,504	1,504																														
1	2																														
0,504	1,504	2,504																													
0,964	1,964	2,964																													
0,003	1,003	2,003	3,003																												
0,216	1,216	2,216	3,216																												
0,507	1,507	2,507	3,507																												
0,003	1,003	2,003	3,003	4,003																											
0,507	1,507	2,507	3,507	4,507																											
0,003	1,003	2,003	3,003	4,003	5,003																										
0,507	1,507	2,507	3,507	4,507	5,507																										
0,003	1,003	2,003	3,003	4,003	5,003	6,003																									
0,507	1,507	2,507	3,507	4,507	5,507	6,507																									
0,006	1,005	2,005	3,005	4,005	5,005	6,005	7,005																								
0,175	1,175	2,175	3,175	4,175	5,175	6,175	7,175																								
0,509	1,509	2,509	3,509	4,509	5,509	6,509	7,509																								
0,005	1,005	2,005	3,005	4,005	5,005	6,005	7,005	8,005																							
0,175	1,175	2,175	3,175	4,175	5,175	6,175	7,175	8,175																							
0,509	1,509	2,509	3,509	4,509	5,509	6,509	7,509	8,509																							
0,005	1,005	2,005	3,005	4,005	5,005	6,005	7,005	8,005	9,005																						
0,175	1,175	2,175	3,175	4,175	5,175	6,175	7,175	8,175	9,175																						
0,625	1,625	2,625	3,625	4,625	5,625	6,625	7,625	8,625	9,625																						
0,868	1,868	2,868	3,868	4,868	5,868	6,868	7,868	8,868	9,868																						
0,509	1,509	2,509	3,509	4,509	5,509	6,509	7,509	8,509	9,509	10,509																					
0,008	1,008	2,008	3,008	4,008	5,008	6,008	7,008	8,008	9,008	10,008	11,008	12,008	13,008	14,008																	
0,512	1,512	2,512	3,512	4,512	5,512	6,512	7,512	8,512	9,512	10,512	11,512	12,512	13,512	14,512																	
0,011	1,011	2,011	3,011	4,011	5,011	6,011	7,011	8,011	9,011	10,011	11,011	12,011	13,011	14,011	15,011																
0,515	1,515	2,515	3,515	4,515	5,515	6,515	7,515	8,515	9,515	10,515	11,515	12,515	13,515	14,515	15,515	16,515															
0,515	1,515	2,515	3,515	4,515	5,515	6,515	7,515	8,515	9,515	10,515	11,515	12,515	13,515	14,515	15,515	16,515	17,515														
0,013	1,013	2,013	3,013	4,013	5,013	6,013	7,013	8,013	9,013	10,013	11,013	12,013	13,013	14,013	15,013	16,013	17,013	18,013	19,013	20,013	21,013										
0,521	1,521	2,521	3,521	4,521	5,521	6,521	7,521	8,521	9,521	10,521	11,521	12,521	13,521	14,521	15,521	16,521	17,521	18,521	19,521	20,521	21,521	22,521	23,521								
0,016	1,016	2,016	3,016	4,016	5,016	6,016	7,016	8,016	9,016	10,016	11,016	12,016	13,016	14,016	15,016	16,016	17,016	18,016	19,016	20,016	21,016	22,016	23,016	24,016	25,016	26,016					
0,019	1,019	2,019	3,019	4,019	5,019	6,019	7,019	8,019	9,019	10,019	11,019	12,019	13,019	14,019	15,019	16,019	17,019	18,019	19,019	20,019	21,019	22,019	23,019	24,019	25,019	26,019	27,019				
0,019	1,019	2,019	3,019	4,019	5,019	6,019	7,019	8,019	9,019	10,019	11,019	12,019	13,019	14,019	15,019	16,019	17,019	18,019	19,019	20,019	21,019	22,019	23,019	24,019	25,019	26,019	27,019	28,019	29,019		
0,022	1,022	2,022	3,022	4,022	5,022	6,022	7,022	8,022	9,022	10,022	11,022	12,022	13,022	14,022	15,022	16,022	17,022	18,022	19,022	20,022	21,022	22,022	23,022	24,022	25,022	26,022	27,022	28,022	29,022	30,022	31,022

Seguidamente calcularam-se todos os pagamentos de cupão pagos por cada obrigação até à maturidade, de onde se obtiveram os seguintes resultados para o modelo de Nelson e Siegel:

103,762%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
103,161%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,732%	101,953%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,216%	100,676%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,484%	3,439%	100,044%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
5,940%	5,854%	101,584%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,000%	3,958%	3,900%	99,592%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
5,615%	5,550%	5,465%	5,364%	105,625%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,732%	3,685%	3,625%	3,555%	103,750%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,250%	4,205%	4,144%	4,070%	3,987%	104,250%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,981%	3,931%	3,866%	3,792%	3,711%	104,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,250%	4,205%	4,144%	4,070%	3,987%	3,899%	104,250%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,732%	3,685%	3,625%	3,555%	3,480%	3,400%	103,750%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,500%	3,463%	3,413%	3,352%	3,284%	3,211%	3,136%	103,500%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,235%	3,194%	3,141%	3,081%	3,016%	2,947%	2,876%	103,250%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,000%	2,968%	2,925%	2,873%	2,814%	2,752%	2,688%	2,622%	103,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
2,247%	2,221%	2,187%	2,147%	2,103%	2,056%	2,007%	1,958%	102,250%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
2,488%	2,457%	2,416%	2,370%	2,320%	2,267%	2,212%	2,157%	102,500%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,250%	3,216%	3,169%	3,112%	3,049%	2,982%	2,912%	2,840%	2,768%	103,250%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
2,247%	2,221%	2,187%	2,147%	2,103%	2,056%	2,007%	1,958%	1,908%	102,250%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,991%	1,965%	1,933%	1,896%	1,856%	1,813%	1,770%	1,726%	1,682%	102,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,750%	1,732%	1,706%	1,676%	1,642%	1,605%	1,568%	1,529%	1,491%	1,452%	101,750%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,498%	1,481%	1,458%	1,432%	1,402%	1,371%	1,338%	1,305%	1,272%	1,239%	101,500%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,491%	1,471%	1,447%	1,419%	1,388%	1,356%	1,323%	1,290%	1,257%	1,225%	101,500%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,487%	1,466%	1,440%	1,411%	1,380%	1,348%	1,315%	1,282%	1,249%	1,217%	101,500%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
6,220%	6,141%	6,041%	5,925%	5,799%	5,666%	5,530%	5,392%	5,255%	5,118%	84,723%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
6,500%	6,431%	6,337%	6,224%	6,098%	5,963%	5,823%	5,680%	5,537%	5,394%	5,253%	5,114%	4,978%	4,846%	77,277%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
5,598%	5,527%	5,436%	5,332%	5,219%	5,099%	4,977%	4,853%	4,729%	4,606%	4,485%	4,366%	4,250%	4,137%	75,603%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,750%	4,700%	4,631%	4,548%	4,456%	4,357%	4,255%	4,150%	4,046%	3,941%	3,838%	3,737%	3,638%	3,541%	3,446%	73,971%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
6,220%	6,141%	6,040%	5,924%	5,798%	5,666%	5,529%	5,392%	5,254%	5,117%	4,983%	4,851%	4,722%	4,596%	4,473%	4,354%	72,040%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
5,474%	5,404%	5,315%	5,213%	5,102%	4,986%	4,866%	4,745%	4,623%	4,503%	4,385%	4,269%	4,155%	4,044%	3,936%	3,831%	3,729%	69,626%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,750%	4,700%	4,631%	4,548%	4,455%	4,357%	4,254%	4,150%	4,045%	3,941%	3,838%	3,737%	3,638%	3,541%	3,446%	3,354%	3,265%	3,178%	3,093%	3,011%	2,931%	62,925%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,981%	3,930%	3,865%	3,791%	3,710%	3,625%	3,538%	3,450%	3,362%	3,275%	3,189%	3,104%	3,022%	2,941%	2,862%	2,786%	2,712%	2,639%	2,569%	2,501%	2,435%	2,370%	2,308%	58,421%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,249%	4,205%	4,143%	4,069%	3,986%	3,898%	3,806%	3,713%	3,619%	3,526%	3,434%	3,343%	3,254%	3,168%	3,083%	3,001%	2,921%	2,843%	2,767%	2,694%	2,622%	2,553%	2,485%	2,420%	2,356%	2,294%	54,796%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,749%	4,699%	4,630%	4,547%	4,455%	4,356%	4,254%	4,150%	4,045%	3,941%	3,837%	3,736%	3,637%	3,540%	3,446%	3,354%	3,264%	3,177%	3,093%	3,010%	2,931%	2,853%	2,778%	2,704%	2,633%	2,564%	2,496%	53,610%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,250%	3,215%	3,168%	3,111%	3,048%	2,981%	2,911%	2,839%	2,767%	2,696%	2,626%	2,556%	2,488%	2,422%	2,358%	2,295%	2,233%	2,174%	2,116%	2,060%	2,005%	1,952%	1,900%	1,850%	1,802%	1,754%	1,708%	1,663%	1,620%	50,112%	0,000%	0,000%
2,500%	2,473%	2,437%	2,393%	2,345%	2,293%	2,239%	2,184%	2,129%	2,074%	2,020%	1,966%	1,914%	1,863%	1,813%	1,765%	1,718%	1,672%	1,628%	1,584%	1,542%	1,501%	1,462%	1,423%	1,386%	1,349%	1,314%	1,279%	1,246%	1,213%	1,182%	47,177%

e os seguintes resultados para o modelo de Nelson e Siegel extendido:

103,893%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
103,881%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,737%	103,215%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,238%	102,410%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,488%	3,482%	102,213%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
5,979%	5,953%	104,159%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,000%	3,986%	3,967%	102,146%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
5,608%	5,602%	5,570%	103,466%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,737%	3,731%	3,703%	101,230%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,250%	4,235%	4,215%	4,174%	100,961%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,986%	3,979%	3,950%	3,903%	99,868%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,250%	4,235%	4,215%	4,174%	4,116%	99,197%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,737%	3,731%	3,703%	3,659%	3,601%	97,735%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,500%	3,488%	3,471%	3,438%	3,390%	3,330%	96,477%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,239%	3,233%	3,209%	3,171%	3,121%	3,062%	95,160%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,000%	2,989%	2,975%	2,946%	2,905%	2,854%	2,796%	93,820%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
2,244%	2,241%	2,229%	2,205%	2,173%	2,134%	2,089%	92,753%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
2,491%	2,487%	2,469%	2,439%	2,401%	2,355%	2,304%	92,214%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,250%	3,238%	3,223%	3,192%	3,147%	3,092%	3,029%	2,960%	91,719%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
2,244%	2,241%	2,229%	2,205%	2,173%	2,134%	2,089%	2,041%	90,428%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,993%	1,990%	1,975%	1,951%	1,920%	1,884%	1,843%	1,799%	89,412%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,750%	1,744%	1,736%	1,719%	1,695%	1,665%	1,631%	1,594%	1,555%	87,999%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,496%	1,494%	1,486%	1,470%	1,449%	1,423%	1,393%	1,361%	1,327%	87,371%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,495%	1,491%	1,480%	1,461%	1,437%	1,410%	1,379%	1,346%	1,311%	86,275%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1,495%	1,489%	1,476%	1,456%	1,431%	1,402%	1,371%	1,337%	1,302%	85,680%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
6,229%	6,218%	6,172%	6,098%	6,002%	5,887%	5,760%	5,623%	5,479%	5,330%	88,038%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
6,500%	6,477%	6,447%	6,384%	6,294%	6,184%	6,058%	5,920%	5,774%	5,621%	5,465%	5,307%	5,148%	4,991%	79,209%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
5,606%	5,596%	5,555%	5,488%	5,401%	5,298%	5,184%	5,060%	4,930%	4,797%	4,660%	4,523%	4,386%	4,250%	77,293%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,750%	4,733%	4,711%	4,665%	4,600%	4,519%	4,427%	4,326%	4,219%	4,107%	3,993%	3,878%	3,762%	3,647%	3,532%	75,420%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
6,229%	6,217%	6,172%	6,097%	6,001%	5,887%	5,759%	5,622%	5,478%	5,329%	5,178%	5,025%	4,873%	4,722%	4,573%	4,426%	72,805%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
5,481%	5,471%	5,431%	5,366%	5,281%	5,180%	5,068%	4,947%	4,820%	4,690%	4,556%	4,422%	4,288%	4,156%	4,024%	3,895%	3,769%	69,918%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,750%	4,733%	4,711%	4,665%	4,599%	4,519%	4,427%	4,326%	4,219%	4,107%	3,993%	3,877%	3,762%	3,646%	3,532%	3,420%	3,309%	3,201%	3,096%	2,993%	2,893%	61,651%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,986%	3,979%	3,950%	3,902%	3,840%	3,767%	3,685%	3,598%	3,505%	3,410%	3,313%	3,216%	3,118%	3,022%	2,926%	2,832%	2,740%	2,650%	2,563%	2,477%	2,394%	2,314%	2,235%	56,145%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,250%	4,235%	4,215%	4,174%	4,115%	4,043%	3,961%	3,870%	3,774%	3,675%	3,572%	3,469%	3,365%	3,262%	3,160%	3,060%	2,961%	2,864%	2,770%	2,678%	2,588%	2,501%	2,417%	2,335%	2,255%	2,179%	51,616%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
4,750%	4,733%	4,711%	4,664%	4,599%	4,518%	4,426%	4,325%	4,218%	4,106%	3,992%	3,877%	3,761%	3,646%	3,532%	3,419%	3,309%	3,201%	3,095%	2,992%	2,892%	2,795%	2,701%	2,609%	2,521%	2,435%	2,352%	50,084%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
3,250%	3,238%	3,223%	3,191%	3,147%	3,092%	3,028%	2,959%	2,886%	2,810%	2,732%	2,653%	2,573%	2,494%	2,416%	2,339%	2,264%	2,190%	2,118%	2,047%	1,979%	1,912%	1,848%	1,785%	1,725%	1,666%	1,609%	1,554%	1,501%	46,042%	0,000%	0,000%
2,500%	2,491%	2,479%	2,455%	2,420%	2,378%	2,329%	2,276%	2,220%	2,161%	2,101%	2,040%	1,979%	1,919%	1,859%	1,799%	1,741%	1,684%	1,629%	1,575%	1,522%	1,471%	1,421%	1,373%	1,326%	1,281%	1,238%	1,195%	1,154%	1,115%	1,076%	42,619%

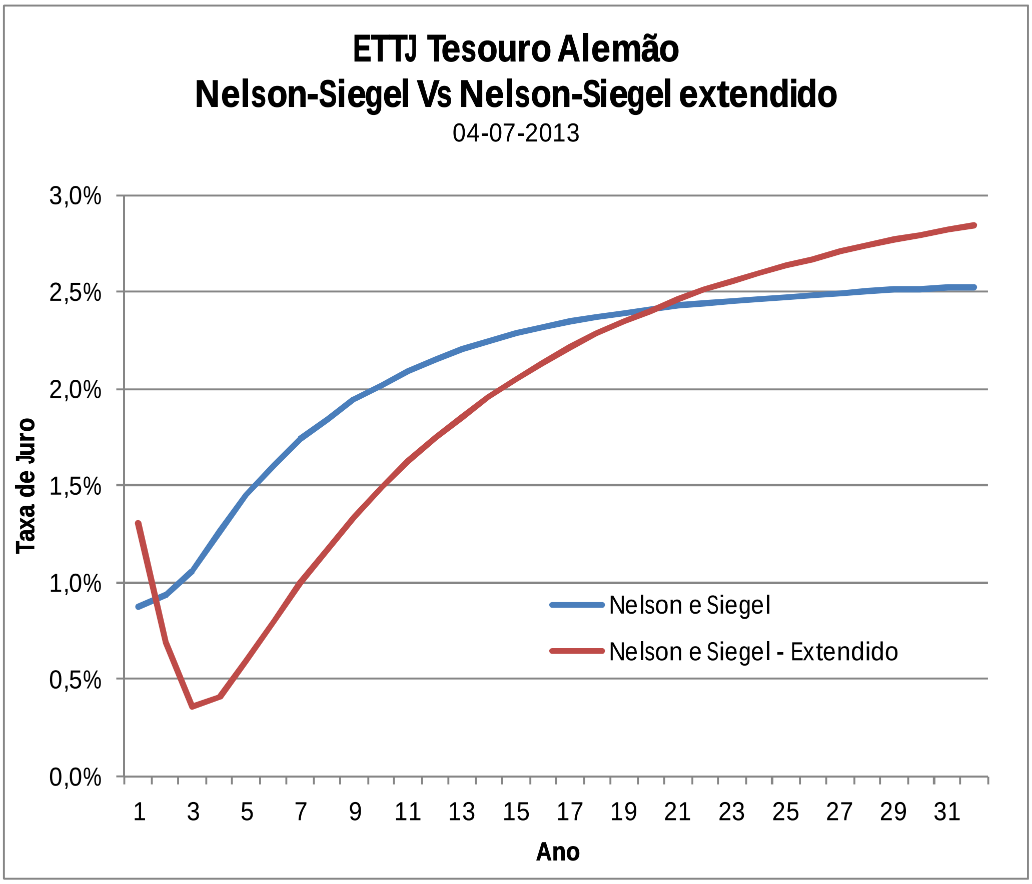
Seguidamente somaram-se todos os pagamentos de cupão para cada obrigação, obtendo-se assim o valor de B(0) para cada obrigação.

5.4. Comparação do Modelo de Nelson e Siegel com o modelo de Nelson e Siegel extendido

Para comparar o modelo de Nelson e Siegel com o modelo de Nelson e Siegel extendido, construi-se a seguinte tabela com o cálculo de ambos os modelos para várias maturidades:

tj	Nelson e Siegel	Nelson e Siegel - Extendido
0,25	0,869%	1,309%
0,5	0,934%	0,688%
1	1,056%	0,355%
2	1,270%	0,409%
3	1,452%	0,600%
4	1,606%	0,803%
5	1,737%	0,997%
6	1,848%	1,177%
7	1,942%	1,341%
8	2,023%	1,490%
9	2,092%	1,625%
10	2,151%	1,747%
11	2,202%	1,859%
12	2,245%	1,960%
13	2,283%	2,052%
14	2,316%	2,135%
15	2,344%	2,212%
16	2,369%	2,282%
17	2,391%	2,346%
18	2,410%	2,404%
19	2,427%	2,458%
20	2,442%	2,508%
21	2,455%	2,554%
22	2,467%	2,597%
23	2,477%	2,636%
24	2,487%	2,673%
25	2,495%	2,707%
26	2,503%	2,738%
27	2,510%	2,768%
28	2,516%	2,796%
29	2,522%	2,822%
30	2,528%	2,846%

Seguidamente construi-se o seguinte gráfico comparativo dos dois modelos:



5.5. Conclusão aos resultados obtidos pelos dois modelos

Neste estudo empírico o objectivo essencial era aplicar e comparar o modelo de Nelson e Siegel com o modelo de Nelson e Siegel extendido e analisar os resultados obtidos. Os dados usados foram os das obrigações do tesouro Alemãs e utilizou-se a ferramenta Solver do Excel para implementar os modelos e compará-los.

Este estudo empírico permitiu verificar que ambos os modelos permitem obter bons resultados para o cálculo da estrutura temporal de taxas de juro ao longo do tempo.

No curto prazo o modelo de Nelson e Siegel extendido permite obter melhores resultados que o modelo de Nelson e Siegel. Enquanto no longo prazo observa-se uma convergência muito boa entre o modelo de Nelson e Siegel e a curva de juros das Bunds Alemãs.

As diferenças que se verificam no gráfico entre o modelo de Nelson e Siegel e o modelo de Nelson e Siegel extendido, resultam de o modelo de Nelson e Siegel extendido ter mais 2 factores que o modelo de Nelson e Siegel. A introdução destes dois factores permite que exista uma maior convergência no curto prazo entre a curva de juros das Bunds Alemãs e o modelo de Nelson e Siegel extendido. Torna-se necessário acrescentar estes novos factores ao modelo de Nelson e Siegel devido as dificuldades do modelo obter bons resultados no curto prazo, enquanto no longo prazo os resultados obtidos pelo modelo de Nelson e Siegel são muitos bons.

6. Conclusão

Muitos modelos utilizados por académicos e profissionais têm sido desenvolvidos num ambiente de tempo contínuo, conseguindo esses modelos uma boa especificação do comportamento de taxas de juro sem risco, sendo que, em contraste, outros investigadores têm utilizado outras representações que são boas empiricamente, mas sem uma boa base na literatura.

Os modelos empíricos mostram uma capacidade de previsão limitada, porque as taxas de juro de outras maturidades são obtidas assumindo um modelo *affine*, descurando o ajustamento em *cross-section*. Estes modelos são apresentados como modelos de um factor, podendo incorporar múltiplos factores, sendo modelos importantes por garantirem taxas de juro não negativas e produzirem soluções analíticas relativamente simples para os preços dos títulos. São modelos uteis para a valorização de valores mobiliários derivativos de taxas de juro.

Os modelos de não-arbitragem são concebidos para eliminar qualquer oportunidade de arbitragem, faltando-lhes motivação económica. Estes modelos conseguem um bom ajustamento da estrutura temporal de taxas de juro, mas não conseguem representar eficazmente a sua dinâmica temporal, sendo sugerido para resolver este problema a recalibração dos modelos com frequência.

Existe uma evidência das cada vez maiores dificuldades de desenvolver modelos que sejam atraentes a partir de uma perspectiva teórica. Um bom modelo deve ser capaz de reproduzir as características históricas essenciais sobre a forma média da curva de rendimentos.

Nos modelos multi-factor, existe uma variação de taxas de juro de longo prazo explicada por uma muito lenta reversão à média, sendo este aspecto um reflexo do comportamento aleatório das taxas de juro de longo prazo.

Os testes empíricos efectuados aos modelos multi-factor identificam várias vantagens associadas a modelos de três factores. Alguns modelos de um factor fornecem estimativas consistentes para os parâmetros do modelo de dois factores de tempo contínuo e para a taxa de juro sem risco. Os vários testes empíricos efectuados a modelos multi-factor identificam várias vantagens associadas aos modelos de três factores.

Nos mercados líquidos da dívida pública, apenas existem alguns pontos da estrutura temporal de taxas de juro, o que levou a que se desenvolve-se uma linha de investigação com o objectivo de obter a melhor representação possível da estrutura temporal de taxas de juros através dos pontos disponíveis a partir do mercado.

Sabe-se actualmente que um pequeno número de factores é suficiente para resumir quase toda a informação nas *yields* de diferentes maturidades, razão pela qual normalmente os modelos da estrutura temporal de taxas de juro são compostos por um pequeno número de factores.

O modelo de Nelson-Siegel reflete a forma básica da estrutura a termo e é capaz de prever rendimentos e prazos para além da amostra, sendo esta metodologia fiável para estimar a estrutura temporal de taxas de juro.

A extensão do modelo de Nelson-Siegel tem um problema da amostra com a curva de rendimentos devido, aos factores de inclinação e curvatura decaírem rapidamente para zero, ficando apenas disponível o factor de nível para ajustar a estimativa no longo prazo. Esta limitação nos estudos empíricos, mostram problemas de estimativa no longo prazo.

Bibliografia

Ang, A., Piazzesi, M. (2003). A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. Journal of Monetary Economics, Vol. 50, pp. 745-787

BIS (2005). Zero-coupon yield curves: technical documentation. Bank for Internacional Settlements, BIS Papers, Nº 25

Black, F., Karasininski, P. (1991). Bond and option pricing when short rates are lognormal. Financial Analysts Journal, pp. 52-59

Brennan, M. J., Schwartz, E. S. (1977). Savings bonds, retractable bonds, and callable bonds. Journal of Financial Economics 3, pp. 133-155

Brennan, M. J., Schwartz, E. S. (1979). A continuous time approach to the pricing of bonds. Journal of Banking and Finance 3, pp. 133-155

Brennan, M. J., Schwartz, E. S. (1980). Analyzing convertible bonds. Journal of Financial and Quantitative Analysis 15, pp. 907-929

Brenner, R. J., Harjes, R. H., Kroner, K. F. (1994). Another look at alternative models of the short-term interest rate. Manuscript (Wells Fargo Nikko Investment Advisors, San Francisco, CA)

Chambers, D. R., Carleton, W. T., Waldman, D. W. (1984). A new approach to the estimation of the term structure of interest rates. Journal of Financial and Quantitative Analyses, pp. 233-252

Christensen J. H., Diebold, F. X., Rudebusch, G. D. (2006). The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models. NBER Working Paper Nº 13611, National Bureau of Economic Research.

Christensen, J. H., Lopez, J. A., F. X., Rudebusch, G. D. (2008a). Inflation expectations and risk premiums in an arbitrage-free model of nominal and real bond yields. Working Paper, Federal Reserve Bank of San Francisco

Christensen, J. H., Lopez, J. A., F. X., Rudebusch, G. D. (2008b). Do central bank liquidity facilities affect interbank lending rates? Working Paper, Federal Reserve Bank of San Francisco

Christensen, J. H., Lopez, J. A., F. X., Rudebusch, G. D. (2008c). Stochastic volatility in arbitrage-free Nelson-Siegel models of term structure. Working Paper, Federal Reserve Bank of San Francisco

Christensen J. H. E., Diebold, F. X., Rudebusch, G. D. (2009). An arbitrage-free generalized Nelson-Siegel term structure model. Econometrics Journal, Volume 12, pp. C33-C64

Cohen, K. J., Kramer, R. L., Waugh, W. H. (1966). Regression yield curves for U. S. government securities. Management Science, B-168 – B-175

Constatinides, G. M., Ingersoll, J. E. (1984). Optimal bond trading with personal taxes. Journal of Financial Economics 13, pp. 299-335.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S.A. (1980). An analysis of variable rate loan contracts. Journal of Finance 35, pp. 389-403

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. Econometrica 53, pp. 385-407

Diebold, F., Piazzesi, M. e Rudebusch, G. (2005). Modeling bond yields in finance and macroeconomics. American Economic Review 95, pp. 415-420

Diebold, F., Li, C. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. Journal of Econometrics, vol. 130, Nº 2, pp. 337-364

Diebold, F., Rudebusch, G. e Arouba, B. (2006). The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. Jounal of Econometrics, vol. 131, pp. 309-338

Dobson, S. W. (1978). Estimating term structure equations with individual bond data. Journal of Finance 33, pp. 75-92

Dothan, U. L. (1978). On the term structure of interest rates. Journal of Financial Economics 6, pp. 59-69

Duffee, G. (2002). Term premia and interest rate forecasts in affine models. Journal of Finance 57, pp. 405-443

Duffie, D., Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rates. Mathematical Finance 6, pp. 379-406

Durand, D. (1942). Basic yields of corporate bonds, 1900-1942. Technical Paper nº 3. Cambridge, Mass., National Bureau of Economic Research

Dybvig, P. H. (1989). Bond and bond option pricing based on the current term structure. Manuscript (Washington University, St. Louis, MO)

Echols, M. E., Elliot, J. W. (1976). A quantitative yield curve model for estimating the term structure of interest rates. Journal of Finance and Quantitative Analysis 11, pp. 87-114

Estrella, A., Hardouvelis, G. A. (1991). The term structure as a predictor of real economic activity. Journal of Finance 46, pp. 555-576

Estrella, A., Mishkin, F. S. (1998). Predicting US recessions: financial variables as leadings indicators. Review of Economics and Statistics 80, pp. 45-61

Fama, E., Bliss, R. (1987). The information in long-maturity forward rates. American Economics Review 77, pp. 680-692

Feldman, D. (1989). The term structure of interest rates in a partially observable economy. Journal of Finance 44, pp. 789-812

Filipovic, D. (1999). A note on the Nelson-Siegel family. Mathematical Finance 9, pp. 349-359

Fisher, S., Sahay, R., Véhg, C. A. (1996). Economies in transition: The beginnings of growth. The American Economic Review, papers and Proceedings, Vol. 86, pp. 229-233

Gallant, A. R., Tauchen, G. E. (1995). SNP: A program of nonparametric time series analysis. Version 8.4, Manuscript (Duke Univeersity, Durham, NC)

Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. (1987). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims Valuation. Unpubl, manuscript, Cornell Univ..

Heller, H. R., Khan, M. S. (1979). The demand for money and the term structure of interest rates. Journal of Political Economy 87, pp. 109-129

Hull, J., White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. Review of Financial Studies 3, pp. 573-592

Koedijk, K. G., Nissen, F. G. J. A., Schotman, P. C., Wolff, C. C. P. (1994). The dynamics of short-term interest rate volatility reconsidered. Manuscript (Limburg Institute of Financial Economics, Maastricht)

Longstaff, F., Schwartz, E. S. (1992). Interest rate volatility and term ttructure: A two-factor general equilibrium model. Journal of Finance 47, pp. 1259-1282

McCulloch, J. H. (1971). Measuring the term structure of interest rates. Journal of Business 34, pp. 19-31

McCulloch, J. H. (1975). The tax adjusted yield curve. Journal of Finance 30, pp. 811-830

Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management Science 4, pp 141-183

Nelson, C., Siegel, A. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. The Journal of Business, Vol. 60, pp. 473-489

Schaefer, S., Schwartz, E. S. (1984). A two-factor model of the term structure: an approximate analytical solution. Journal of Financial and Quantitative Analysis 19, pp. 413-424

Shea, G. S. (1982). The Japanese term structure of interest rates. Ph. D. dissertation, University of Washington

Shea, G. S. (1984). Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: Equilibrium models and spline approximations. Journal of Finance and Quantitative Analysis 19, pp. 253-269

Shea, G. S. (1985). Interest rate term structure estimation with exponential splines: A note. Journal of Finance 11, pp. 339-348

Stock, J. H., Watson, M. W. (2000). Forecasting output and inflation: the role of asset prices. Manuscript, Kennedy School of Government

Sundaresan, S. M. (1984). Consumption and equilibrium interest rates in stochastic production economies. Journal of Finance 39, pp. 77-92

Svensson, L. E. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. Centre for Economic Policy Research Discussion Paper 1051

Svensson, L. E. O. (1995). Estimating forward interest rates with the extended Nelson & Siegel method. Quarterly Review, Sveriges Riksbank, pp. 13-26

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics 5, pp. 177-188

Vasicek, O. A., Fong, H. G. (1982). Term structure modeling using exponential splines. Journal of Finance 37, pp. 339-348

Wood, J. H. (1983). Do yield curves normally slope up? The term structure of interest rates, 1862-1982. Economic Perspectives Federal Reserve Bank of Chicago 7, pp. 17-23