

# Análise Crítica ao Método $P-\delta$ Simplificado Proposto pelo MC90

Vinagre, J.\*

## Resumo

Neste artigo procede-se à análise e discussão do método simplificado de avaliação dos efeitos de 2ª ordem em elementos comprimidos inseridos em estruturas de edifícios correntes, preconizado pelo Model Code 90 CEB-FIP.

## 1 Introdução

Neste artigo procede-se à análise e discussão do método simplificado de avaliação dos efeitos de 2ª ordem em elementos comprimidos inseridos em estruturas de edifícios correntes, preconizado no MC90 [1]. Sendo este método substancialmente diferente dos usualmente preconizados pelos regulamentos europeus de estruturas de betão armado (método da excentricidade adicional), o principal objectivo deste artigo é estabelecer a sua comparação e compreender as razões das diferenças obtidas. Assim, procede-se à análise comparativa das respectivas formulações a qual possibilita uma melhor clarificação das diferenças entre as metodologias. Em seguida, procede-se à avaliação dos resultados obtidos por aplicação de ambos os métodos a uma estrutura simples, composta por um elemento isolado encastrado na base (coluna modelo).

## 2 Método do Acréscimo de Forças Horizontais

A aplicação do método da excentricidade adicional na verificação da segurança de elementos comprimidos isolados, aceite pelos principais códigos europeus e inserida no EC2 [2] e no MC90 [1], permite alcançar os dois grandes objectivos pretendidos com um método simplificado: ser de simples aplicação e conduzir à obtenção de resultados fiáveis (conforme demonstrado em [4] e [5]).

A generalização da sua aplicação ao dimensionamento de pilares inseridos em estruturas é, no entanto, controversa [3]. Para que a análise por

este método seja possível é necessário que seja efectuada com base num pilar isolado com características semelhantes (secção e esbelteza) e sujeito aos mesmos esforços. Na análise do comportamento do elemento isolado será sempre difícil a inclusão e a correcta simulação de algumas características do comportamento do pilar quando inserido na estrutura, como sejam:

- a influência da deformação dos pisos superiores, nos efeitos de 2ª ordem dos pilares de um dado piso (pelo consequente deslocamento das acções verticais neles actuantes, introduzindo acréscimos de esforços);
- o equilíbrio dos esforços totais, incluindo os efeitos de 2ª ordem, nos diferentes nós dos elementos que compõem a estrutura (pilares, vigas e fundações);
- a compatibilização dos deslocamentos dos nós extremos dos pilares, ao nível dos pisos, dada a grande rigidez axial do conjunto lajes-vigas;
- a complexa avaliação das restrições impostas à deformação pelos restantes elementos concorrentes nos nós dos pilares (correcta quantificação da relação de rigidez entre os diversos elementos, nos nós extremos dos pilares, tendo em conta as suas diferentes dimensões, tipos de esforços actuantes, níveis de fendilhação que apresentam, etc.).

Em contrapartida, a adopção dos mesmos critérios base de dimensionamento para qualquer pilar, isolado ou inserido em estruturas, é bastante vantajosa em termos de utilização e, conceptualmente, mais coerente dado o problema ser, de um modo genérico, o mesmo. Assim, quando os

\* Professor Auxiliar do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Director da Escola Superior de Tecnologia do Barreiro do Instituto Politécnico de Setúbal, joao.vinagre@estbarreiro.ips.pt



$$\Delta\delta_{\text{topo}}(\Delta H_{sd}) = \frac{\theta'' \sum (V_{sd} \cdot x)}{\sum (H_{sd} \cdot x)} \cdot \delta_{\text{topo}}^H \quad (6)$$

Introduzindo a equação anterior na equação (4) e explicitando em ordem a  $\theta''$ , é possível obter a inclinação total da estrutura, a partir do deslocamento de 1ª ordem, na forma

$$\theta'' = \frac{1}{1 - \frac{\sum (V_{sd} \cdot x)}{\sum (H_{sd} \cdot x)} \cdot \frac{\delta_{\text{topo}}^{H+V}}{L_{\text{tot}}}} \cdot \frac{\delta_{\text{topo}}^{H+V}}{L_{\text{tot}}} \quad (7)$$

Conhecida a inclinação total da estrutura, é possível calcular os acréscimos de forças horizontais associados às diferentes solicitações (a cada acção corresponderá um conjunto de forças horizontais que simulam os efeitos de 2ª ordem por elas induzidos). Os acréscimos passam a fazer parte integrante da solicitação devendo ser considerados com o sentido mais desfavorável de actuação.

Para melhorar a qualidade dos resultados que o modelo permite alcançar, é conveniente que os deslocamentos de 1ª ordem sejam calculados tendo em consideração a redução de rigidez que ocorre devida à fendilhação dos elementos. O MC90 [1] aceita que, quando os acréscimos da força horizontal não excedam 25% do valor das acções horizontais, se admita que o deslocamento do topo da estrutura seja igual ao dobro do obtido numa análise linear de 1ª ordem, considerando que a rigidez dos elementos é igual a  $E_{cm} I_c$  (hipótese equivalente a admitir uma redução de 50% na rigidez da estrutura).

No entanto, a não existência de qualquer ligação entre esta metodologia e a preconizada para os pilares nas restantes situações (pilares isolados ou inseridos em estruturas com deslocamentos laterais desprezáveis), em que a esbelteza assume um papel de relevo, coloca algumas reservas. Sendo a esbelteza um factor considerado determinante no comportamento da estrutura, em função do qual é avaliada a importância dos efeitos de 2ª ordem, a sua não inclusão no método é discutível. Além disso, os acréscimos de força horizontal apresentam uma acentuada dependência com o nível da solicitação horizontal, com adiante se demonstrará, o que pode conduzir a resultados de fraca qualidade.

### 3. Comparação entre o método da excentricidade adicional e o P-δ simplificado

Formalmente, este método P-δ simplificado é aplicável a qualquer tipo de estrutura, conduzindo a

resultados diferentes dos obtidos pelo método da excentricidade adicional. Para clarificar a razão e a origem dessas diferenças procede-se de seguida à avaliação e comparação dos efeitos de 2ª ordem obtidos pelas duas metodologias aplicadas a uma mesma estrutura simples: pilar em consola, de secção rectangular, solicitado na extremidade livre por duas cargas concentradas, uma vertical,  $N$ , e outra horizontal,  $H$ , como indicado na Figura 2.

De acordo com o método da excentricidade adicional o dimensionamento do pilar deve ser efectuado para o par de esforços  $(N'_{sd}, M'_{sd})$  em que

$$M'_{sd} = M_I + M_{II} = H_{sd} \cdot L + N_{sd} \cdot e_2 \quad (8)$$

sendo  $e_2$  é a excentricidade de 2ª ordem e  $L$  a altura do pilar e desprezando a contribuição da excentricidade accidental dado ser introduzida da mesma forma, nas duas metodologias em comparação. A expressão (8) pode ainda ser escrita na forma

$$M'_{sd} = (H_{sd} + \Delta H_2) \cdot L \quad (9)$$

com

$$\Delta H_2 = N_{sd} \cdot \frac{e_2}{L} \quad (10)$$

em que  $\Delta H_2$  corresponde a um acréscimo de força horizontal que traduz os efeitos de 2ª ordem (a introdução de  $\Delta H_2$  é equivalente a considerar o elemento inclinado de um ângulo  $\theta''$  igual a  $e_2/L$ ).

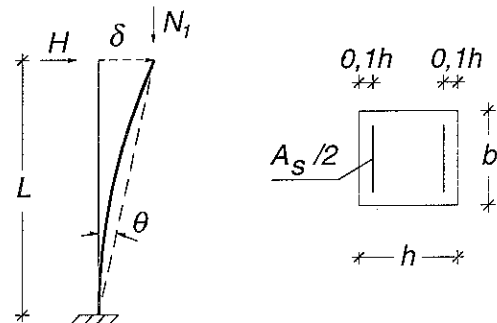


Figura 2 - Características geométricas da estrutura adoptada para a comparação entre o método da excentricidade adicional e o P-δ simplificado.

A excentricidade de 2ª ordem pode ser obtida com boa aproximação pela expressão (EC2 [2]).

$$e_2 = k_r \cdot k_\phi \cdot \frac{\epsilon_{syd}}{0,45d} \cdot \frac{l_o^2}{10} \quad (11)$$

O processo de dimensionamento da estrutura sujeita a um dado esforço axial actuante,  $N_{sd}$ , consiste em determinar, para a secção mais esforçada (secção da base do pilar) a armadura de cálculo necessária para

assegurar um momento resistente igual ou superior ao provocado pela acção horizontal e pelos acréscimos introduzidos pela deformação do pilar.

Para facilitar a comparação posterior com o método  $P-\delta$  simplificado, apresenta-se na Figura 3, uma construção gráfica que pretende exemplificar, para um pilar de secção genérica, os processos de dimensionamento que conduzem às situações extremas de armadura (mínima e máxima) pelo método da excentricidade adicional. Na Figura 3 encontram-se traçadas as duas envolventes resistentes (designadas por  $A_{s,min}$  e  $A_{s,max}$ ) e o andamento dos momentos de 2ª ordem com o esforço axial, para as duas quantidades de armadura ( $M_{II}^{A_{s,min}}$  e  $M_{II}^{A_{s,max}}$ ). Assim, conhecido o esforço axial actuante,  $N_{Sd}$ , e determinados os momentos de 2ª ordem associados a cada uma daquelas quantidades de armadura (pontos A e B na Figura 3), as máximas forças horizontais aplicáveis ao pilar ( $H_{Sd}^{min}$  e  $H_{Sd}^{max}$ ) são as que conduzem aos momentos resistentes das secções ( $M_{Rd}^{min}$  e  $M_{Rd}^{max}$ ). Os seus valores podem ser obtidos pelas expressões

$$H_{Sd}^{min} = \frac{M_{Rd}^{min} - M_{II}^{A_{s,min}}}{L}; \quad H_{Sd}^{max} = \frac{M_{Rd}^{max} - M_{II}^{A_{s,max}}}{L} \quad (12)$$

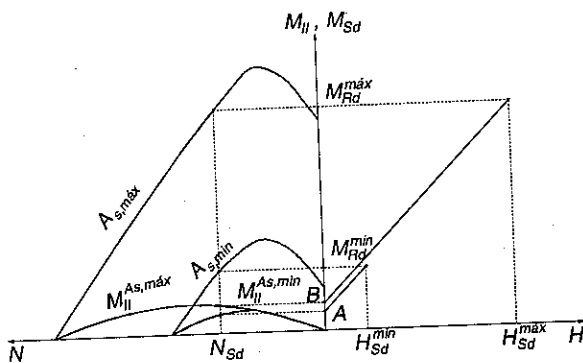


Figura 3 - Dimensionamento de uma secção pelo método da excentricidade adicional: forças horizontais correspondentes às armaduras mínima e máxima.

Considere-se, agora, a aplicação do método  $P-\delta$  simplificado ao mesmo pilar. O cálculo elástico conduz a um deslocamento do topo,  $\delta_E$ , dado por

$$\delta_E = \frac{H_{Sd} L^3}{3 E_{cm} I_c} \quad (13)$$

em que  $E_{cm}$  é o módulo de elasticidade do betão e  $I_c$  a inércia da secção cheia. A rotação da corda do elemento resulta, assim,

$$\theta_E = \frac{\delta_E}{L} = \frac{H_{Sd} L^2}{3 E_{cm} I_c} \quad (14)$$

Admitindo que o acréscimo de força horizontal, que simula os efeitos de 2ª ordem, é inferior a 25% de  $H_{Sd}$ , é possível, de acordo com o MC90 [1], introduzir de modo simplificado o efeito da fendilhação adoptando  $\theta = 2 \theta_E$ . Assim, a inclinação global do pilar, tendo em conta aqueles efeitos, resulta

$$\theta'' = \frac{2\theta_E}{1 - 2\theta_E \frac{N_{Sd}}{H_{Sd}}} \quad (15)$$

Introduzindo a equação (14) em (15) é possível escrever

$$\theta'' = \frac{2H_{Sd} L^2}{3 E_{cm} I_c - 2N_{Sd} L^2} \quad (16)$$

pelo que, o incremento de força horizontal a aplicar à estrutura,  $\Delta H_{Sd}$ , resulta finalmente

$$\Delta H_{Sd} = \theta'' N_{Sd} = \frac{2N_{Sd} H_{Sd} L^2}{3 E_{cm} I_c - 2N_{Sd} L^2} \quad (17)$$

ficando realçada a dependência directa, deste acréscimo de força, da solicitação horizontal (no caso limite de não existência de forças horizontais actuantes, o acréscimo de força é nulo, independentemente do nível de esforço axial a que o elemento está sujeito).

A secção crítica do pilar terá, assim, de ser dimensionada em flexão composta, para um momento dado por

$$M_{Sd}' = (H_{Sd} + \Delta H_{Sd}) \cdot L = H_{Sd} \left( L + \frac{2N_{Sd} L^3}{3 E_{cm} I_c - 2N_{Sd} L^2} \right) \quad (18)$$

o qual é diferente do obtido pelo método da excentricidade adicional. Na Figura 4, e para uma melhor compreensão das diferenças, procede-se à comparação entre os momentos de 2ª ordem resultantes dos dois métodos em análise, para um dado esforço axial.

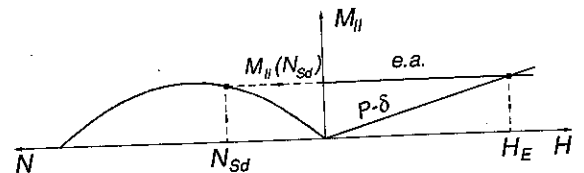


Figura 4 - Comparação, para um dado esforço axial, dos momentos de 2ª ordem resultantes do método da excentricidade adicional (EC2 [2]) e do método  $P-\delta$  simplificado (MC90 [1]).

Assim, pelo método da excentricidade adicional, admitindo conhecida a quantidade de armadura da secção, é possível traçar a evolução, com o nível de esforço axial, dos momentos de 2ª ordem, possibilitando o cálculo do momento associado ao esforço axial actuante (o qual é independente da intensidade da solicitação horizontal — linha *e.a.* horizontal na figura). Pelo método P-δ simplificado, o momento de 2ª ordem fica dependente da intensidade da solicitação e das características geométricas da estrutura, resultando a recta designada por P-δ na Figura 4. A diferença nos procedimentos de quantificação dos efeitos de 2ª ordem dá origem à existência de duas regiões em que cada um dos métodos, alternadamente, conduz a dimensionamentos com menores efeitos de 2ª ordem. A fronteira entre as duas regiões (iguais momentos de dimensionamento) é definida para uma força horizontal actuante,  $H_E$ , dada por

$$H_E = e_2 \cdot \frac{3E_{cm}I_c - N_{Sd}L^2}{2L^3} \quad (19)$$

A análise dos valores de  $H_E$  para diferentes secções (inseridas em elementos com diferentes esbeltezas, quantidades de armadura e níveis de esforço axial actuante) permite retirar algumas conclusões importantes.

No Tabela 1 apresentam-se, para duas secções com diferentes características, as forças horizontais que conduzem ao dimensionamento com percentagens de armadura iguais a 0,6% (armadura mínima) e 4%, por aplicação das duas metodologias (denominadas por  $H^{e.a.}$  e  $H^{P-\delta}$ ). No mesmo quadro é ainda apresentada a força  $H_E$ , que representa o valor para o qual os dois métodos conduzem aos mesmos resultados. Nesse quadro são também indicadas as relações  $M_{II}/M_I$ , para cada um dos métodos, as quais realçam a disparidade de resultados entre as duas metodologias, em particular para taxas de armadura menores e esbeltezas maiores.

Na Figura 5 exemplifica-se, para um caso genérico, o processo de dimensionamento de acordo com os dois métodos em estudo. Nas Figuras foram assinaladas as duas situações extremas, conducentes

**Tabela 1** - Máximas forças actuantes em pilares em consola, de diferentes geometrias e solicitações, resultantes dos métodos de excentricidade adicional ( $H^{e.a.}$ ) e do método P-δ simplificado ( $H^{P-\delta}$ ).

Secção	$\lambda$	$L$	$n$	$\rho$	$N_{Sd}$	$M_{Rd}$	$H^{e.a.}$	$H^{P-\delta}$	$H_E$	$\frac{M_{II}}{M_I} = \frac{M_{Rd} - M_I}{M_I}$	
( $b \times h$ )			(m)			(kN)	(kNm)	(kN)	(kN)	(kN)	<i>e.a.</i> P-δ
0,50x0,20	35	1,01	0,4	0,6%	532,0	47,8	42,7	45,4	110,7	10,81%	4,26%
				4,0%	532,0	142,5	136,4	135,3	110,7	3,38%	4,26%
			0,8	0,6%	1064,0	32,5	27,8	29,5	51,7	15,84%	8,89%
				4,0%	1064,0	79,8	71,2	72,5	91,4	10,93%	8,89%
	70	2,02	0,4	0,6%	532,0	47,8	14,4	19,8	51,9	64,02%	19,52%
				4,0%	532,0	142,5	61,3	59,0	51,9	15,06%	19,52%
			0,8	0,6%	1064,0	32,5	7,3	10,8	22,5	120,69%	48,51%
				4,0%	1064,0	79,8	23,9	26,6	39,9	65,02%	48,51%
0,20x0,50	35	2,53	0,4	0,6%	532,0	119,6	42,7	45,4	110,7	10,80%	4,26%
				4,0%	532,0	356,2	136,4	135,3	110,7	3,38%	4,26%
			0,8	0,6%	1064,0	82,1	28,1	29,8	51,7	15,65%	8,89%
				4,0%	1064,0	298,6	110,4	108,6	91,4	7,04%	8,89%
	70	5,05	0,4	0,6%	532,0	119,6	14,4	19,8	51,9	63,93%	19,52%
				4,0%	532,0	356,2	61,3	59,0	51,9	15,07%	19,52%
			0,8	0,6%	1064,0	82,1	7,5	10,9	22,5	117,96%	48,51%
				4,0%	1064,0	298,6	43,5	39,8	39,9	35,73%	48,51%

Sombreado: não aplicável ( $DH > 0,25 H$ )

Materiais: C20/25 ( $f_{cd}=13,3$  MPa,  $E_{cd}=26,6$  GPa); A400

à armadura mínima e máxima da secção, bem como o posicionamento da força  $H_E$ .

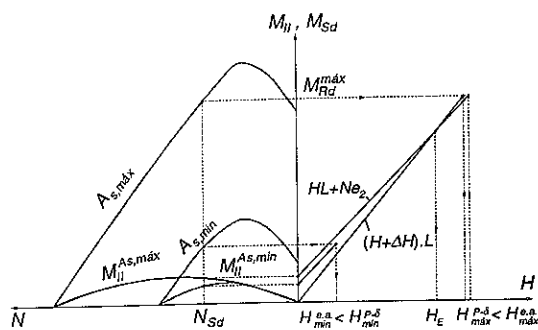


Figura 5 - Forças horizontais, de acordo com os métodos da excentricidade adicional e P-δ simplificado, que conduzem às armaduras mínima e máxima de uma secção.

Relativamente ao método P-δ simplificado, refira-se que a limitação imposta ao acréscimo de forças horizontais, para que seja válida a simplificação de consideração de um deslocamento duplo do elástico para ter em conta a fendilhação, é equivalente, em termos de esforços, à condição  $M_{H1} < 0,25 M_f$ .

A análise conjunta do quadro 1 e da Figura 5 permite concluir que o método P-δ simplificado, traduzindo uma filosofia diferente de contabilização dos efeitos de 2ª ordem conduz, de um modo geral e tal como está expresso no MC90 [1], à consideração de menores efeitos em projecto. Estes efeitos serão tanto menores quanto maior a esbelteza do elemento e menor a quantidade de armadura existente na secção.

Tendo-se verificado em [4] que, para níveis de armadura próximos da armadura mínima e para o tipo de história de carga em análise (valores baixos de  $H_{Sd}$ , conforme demonstrado em [4] e [5]), o método de excentricidade adicional conduz a resultados coerentes, é possível afirmar que, nestas situações, o método P-δ simplificado avalia, por defeito, os efeitos de 2ª ordem. Somente nas situações que exijam quantidades elevadas de armadura se obtêm resultados idênticos aos do método da excentricidade adicional.

Atendendo a que o dimensionamento da grande maioria dos pilares de estruturas correntes de edifícios de betão armado conduz a percentagens de armadura inferiores a 2%, não parece aceitável a utilização do método P-δ simplificado. No entanto, é conveniente reter e realçar as principais qualidades que este modelo evidencia para a análise dos efeitos de 2ª ordem em estruturas porticadas:

- a sua simplicidade de utilização num processo de dimensionamento (passando a estar associada, a cada acção, um conjunto de forças horizontais que introduzem os acréscimos resultantes da deformação da estrutura);
- a introdução dos efeitos de 2ª ordem a partir

da análise global da estrutura, eliminando os problemas de equilíbrio e compatibilidade nos elementos concorrentes nos nós extremos dos pilares.

A análise da expressão (10) — tradução dos efeitos de 2ª ordem, definidos pelo método da excentricidade adicional, por uma força horizontal equivalente — permite perspectivar que, desde que devidamente seleccionada a excentricidade de 2ª ordem, é possível incluir os efeitos associados à deformação da estrutura com recurso a forças horizontais. Estas forças, além das vantagens acima enunciadas, corresponderiam à aplicação da mesma metodologia a pilares isolados ou inseridos em estruturas. Estas ideias constituem o ponto de partida que conduziram à apresentação de um método simplificado proposto em [4].

## 5. Conclusões

Neste artigo foi apresentado e discutido o método P-δ simplificado proposto pelo MC90 [1]. A partir da comparação com o método da excentricidade adicional, quando aplicados a um pilar em consola, foi explicada a diferente filosofia de contabilização de efeitos de 2ª ordem que as duas propostas traduzem. Atendendo à qualidade dos resultados alcançados pelo método da excentricidade adicional, as notórias diferenças obtidas entre as duas metodologias colocam algumas reservas à adopção do método P-δ simplificado, tal como estipulado no MC90 [1], no dimensionamento de pilares esbeltos de betão armado. Estes resultados foram confirmados através da elaboração de estudos paramétricos apresentados em Vinagre, [4], com recurso a análises física e geometricamente não lineares.

## Referências

- [1] CEB-FIP Model Code 1990. Design Code – Comité Euro-International du Béton, 1993.
- [2] Eurocódigo 2 – Projecto de estruturas de betão. Parte 1: regras gerais e regras para edifícios – ENV 1992-1.1, 1991.
- [3] Vinagre, J.; Bártolo, A.; Camara, J. – Avaliação e discussão dos efeitos de 2ª ordem em edifícios – 5º Encontro Nacional Sobre Estruturas Pré-Esforçadas, FEUP, Porto, Novembro, 1994.
- [4] Vinagre, J. – Avaliação dos efeitos de 2ª ordem em edifícios de betão armado – Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, Março de 1997.
- [5] Vinagre, J.; Camara, J. – Método da excentricidade adicional: análise das propostas regulamentares – artigo submetido a publicação na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, Fevereiro, 1998.