



# ESCOLA NAVAL



ta sãntõr bñ-fairr

João Maria Vasconcelos Caetano Pires Fáiça

Determinação da Longitude por alturas próximas  
da meridiana

*Método de Littrow*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha



Escola Naval, 25 de setembro de 2025





# ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



João Maria Vasconcelos Caetano Pires Faísca

*Determinação da Longitude por alturas próximas da  
meridiana  
Método de Littrow*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha

Orientação de: CMG RES António Costa Canas

Coorientação de: Professora Teresa Maria Sousa

*O Aluno Mestrando,*

---

*O Orientador,*

---

Escola Naval, 25 de setembro de 2025



Dedico esta tese à minha família



# Agradecimentos

A realização desta dissertação representa o culminar de um percurso académico e uma oportunidade de crescimento pessoal e profissional. Neste contexto, importa expressar o meu profundo agradecimento a todos aqueles que, de diferentes formas, contribuíram para a concretização deste trabalho.

Agradeço em primeiro lugar ao CMG Costa Canas, meu orientador, pela confiança depositada na realização deste trabalho, e por ter cultivado em mim o interesse pela navegação astronómica logo no segundo ano da Escola Naval, sempre disponível para esclarecer as minhas dúvidas. A sua experiência foi determinante no desenvolvimento deste estudo. À Professora Teresa Sousa, coorientadora, agradeço a atenção constante, os conselhos valiosos e em particular o tempo investido em explicar a componente matemática deste método.

Aos meus camaradas do curso Costa e Almeida, que comigo partilharam este percurso e contribuíram para o meu crescimento ao longo dos anos na Escola Naval, deixo um agradecimento especial. Em particular, à camarata 112, pela amizade e companheirismo constantes. Agradeço também aos meus imediatos, Jorge de Pina e Manteigas Rodrigues por tudo o que me ensinaram que certamente me prepararam melhor para os desafios do futuro.

Agradeço à guarnição do *NRP Andrómeda*, pela colaboração prestada durante o embarque e pela disponibilidade demonstrada para que fosse possível recolher os dados necessários.

Agradeço ainda à minha família, em particular à minha mãe, ao meu pai e à Catarina, pelo apoio incondicional, pela compreensão e pela paciência demonstradas ao longo de todo este percurso. Sem a sua presença e incentivo, nada disto teria o mesmo sentido.

A todos, o meu obrigado.



# Resumo

Nesta dissertação de mestrado estuda-se o método proposto por Charles de Littrow em 1842, destinado ao cálculo aproximado da longitude por observações solares próximas da passagem meridiana. Ao contrário dos métodos tradicionais que calculam separadamente a latitude ao meio-dia solar e a longitude em momentos distintos, o processo de Littrow permite reduzir o intervalo entre ambas as observações, aproximando-se de uma solução simultânea para a posição astronómica.

Para além da análise do método, foi realizado um embarque, durante o qual se efetuaram observações com recurso ao sextante e a um cronómetro. As alturas solares foram observadas em pares, antes e depois da passagem meridiana do Sol, de forma a testar o método nas condições sugeridas por Littrow e por autores posteriores. Os dados recolhidos foram tratados em folhas de cálculo, aplicando-se a fórmula de Littrow para a obtenção da longitude, a qual foi posteriormente comparada com a posição GPS registada no instante da passagem meridiana.

Os resultados revelaram erros variáveis, em parte explicáveis por erros de leitura, pelas condições de mar e pela reduzida dimensão da amostra. No entanto, quando se substituíram as alturas observadas por alturas verdadeiras calculadas com base em trigonometria esférica, verificou-se uma melhoria significativa na precisão dos resultados. Esta constatação reforça a sensibilidade do método aos erros de observação e a importância do rigor nos dados utilizados.

O método de Littrow, embora aproximado, demonstra utilidade como ferramenta auxiliar na navegação astronómica, especialmente em circunstâncias onde os sistemas eletrónicos possam estar inoperacionais.

**Palavras-chave:** Longitude, Navegação Astronómica, Alturas Extra Meridianas, Littrow, Ângulo Horário



# Abstract

In this master's thesis, the Littrow method proposed by Charles de Littrow in 1842 is studied, intended for the approximate calculation of longitude by means of solar observations close to the meridian passage. Unlike traditional methods that calculate latitude at local noon and longitude at different times, the Littrow process allows reducing the interval between both observations, approaching a quasi-simultaneous solution for astronomical positioning.

In addition to the theoretical analysis of the method, a sea trial was carried out, during which observation data were collected using a sextant and a chronometer synchronized with the ship's GPS system. Solar altitudes were observed in pairs, one before and one after the Sun's meridian passage, so as to test the method under the conditions suggested by Littrow and by later authors. The collected data were processed using spreadsheets, applying the Littrow formula to obtain longitude, which was later compared with the GPS position recorded at the moment of meridian passage.

The results revealed variable errors, partly explicable by reading errors, sea conditions, and the small sample size. However, when the observed altitudes were replaced with true solar altitudes computed through spherical trigonometry, a significant improvement in precision was observed. This finding reinforces the sensitivity of the method to observational errors and the importance of data quality.

The Littrow method, though approximate, proves its usefulness as an auxiliary tool in astronomical navigation, especially in circumstances where electronic-based systems may be inoperative.

**Keywords:** Longitude, Astronomical Navigation, Extrameridian Altitudes, Littrow, Hour Angle.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexto Histórico</b>	<b>5</b>
A navegação até ao século XV . . . . .	5
Metodo de rumo e estima . . . . .	6
A Navegação Astronómica . . . . .	8
Cálculo da latitude na passagem meridiana do Sol . . . . .	11
Processo para obtenção da Latitude . . . . .	11
Cálculos Matemáticos . . . . .	12
Outros Métodos de cálculo da Latitude . . . . .	14
<b>2 O Cálculo da Longitude</b>	<b>17</b>
Evolução do Cálculo da Longitude . . . . .	17
Método das Distâncias Lunares . . . . .	18
Longitude pelo Cronómetro . . . . .	20
Cronómetro e Ângulo Horário . . . . .	20
Desvantagens do método . . . . .	22
<b>3 Método de Charles de Littrow</b>	<b>23</b>
Contextualização . . . . .	23
Princípios do método . . . . .	23
O método . . . . .	24
Aplicação e validação do método por Littrow . . . . .	28
Limitações do método . . . . .	29
<b>4 Aplicação prática do método</b>	<b>31</b>
Contexto e condições da recolha de dados . . . . .	31
Cálculo da posição . . . . .	33
<b>Conclusão</b>	<b>42</b>



# Lista de Figuras

1.1	Erro pelo método de rumo e estima na deslocação para os Açores . . . . .	7
1.2	Imagem de um quadrante . . . . .	9
1.3	Imagem de um astrolábio náutico . . . . .	10
1.4	Imagem de um sextante . . . . .	10
1.5	Esfera Celeste . . . . .	12
3.1	Dados Iniciais do Problema . . . . .	26
3.2	Resolução da equação . . . . .	26
3.3	Resolução da equação . . . . .	27

# Lista de Tabelas

4.1	Tabela 1A – Alturas observadas, horas de observação e posição GPS (graus, minutos e segundos) . . . . .	33
4.2	Tabela 1B – Declinação, passagem meridiana e equação do tempo (graus, minutos, segundos) . . . . .	34
4.3	Tabela 2A – Conversão de alturas, horas e coordenadas para formato decimal e radianos (latitude e longitude apenas em radianos) . . . .	35
4.4	Tabela 2B – Declinação e equação do tempo em formato decimal e radianos . . . . .	35
4.5	Alturas observadas, horas de observação e posição GPS (graus e minutos) . . . . .	36
4.6	Tabela 4.5 – Resultados intermédios da aplicação do método de Littrow	37
4.7	Tabela 4.4 – Longitude obtida e erro associado ( <i>NRP Andrómeda</i> ) .	38
4.8	Longitude obtida e erro associado ( <i>NRP Sagres</i> ) . . . . .	39
4.9	Distribuição dos erros em intervalos . . . . .	40
4.10	Análise do erro — cálculo com alturas verdadeiras (em graus e minutos)	41



# Introdução

Durante séculos, a navegação oceânica foi limitada por um conjunto de dificuldades práticas relacionadas com a determinação precisa da posição do navio no mar. Num meio sem referências visuais permanentes, como é o oceano, a capacidade de estabelecer com exatidão as coordenadas geográficas — latitude e longitude — era fundamental para a segurança das viagens. A evolução da navegação astronómica, que tornou possível esta determinação a partir da observação de corpos celestes, constituiu um dos grandes avanços do saber náutico.

A latitude foi, historicamente, a primeira coordenada a ser determinada com relativo rigor. O método da passagem meridiana do Sol, que consiste na observação da altura máxima do astro ao meio-dia solar, tornou-se um procedimento amplamente disseminado entre os navegadores. Era simples, eficaz e exigia apenas um instrumento ótico de medição angular e tábuas ou um almanque náutico. No entanto, apresentava uma limitação operacional importante: dependia da possibilidade de observar o Sol no instante exato da sua culminação. Quando o céu se encontrava encoberto, ou quando a observação era comprometida por fatores atmosféricos ou instabilidade da embarcação, a latitude não podia ser determinada, obrigando a esperar pelo dia seguinte. Além disso, o cálculo da longitude exigia um momento de observação distinto, afastado no tempo, geralmente realizado antes ou depois do meio-dia solar.

A longitude, por sua vez, sempre representou um desafio técnico mais complexo. Ao contrário da latitude, que pode ser obtida a partir de uma observação direta e uma relação angular com o Equador, o cálculo da longitude exige a comparação entre a hora local — determinada por observação astronómica — e a hora de um meridiano de referência, normalmente Greenwich. Com o advento do cronómetro, tornou-se possível manter a hora de referência a bordo com um grau de exatidão aceitável, permitindo calcular a longitude através do ângulo horário do astro. Ainda assim, este processo exigia que a latitude já estivesse conhecida ou estimada, o que obrigava a realizar observações separadas no tempo para cada coordenada.

Esta dissociação temporal entre os instantes de cálculo da latitude e da

longitude introduz um problema operacional significativo. O navio encontra-se em constante movimento, sujeito a corrente, vento e ondulação. Qualquer intervalo de tempo entre observações traduz-se num erro de posicionamento, agravado pelas incertezas instrumentais e pelas condições de mar. A impossibilidade de determinar ambas as coordenadas de forma simultânea tornava-se, por isso, uma limitação concreta à obtenção de um ponto astronómico completo com precisão satisfatória.

Foi precisamente para dar resposta a este problema que, no século XIX, Charles de Littrow propôs um método inovador. Baseando-se na observação de duas alturas solares realizadas próximas da passagem meridiana, o método permite calcular a longitude com base na diferença angular entre essas observações e no tempo decorrido entre elas. Ao mesmo tempo, permite aproximar o instante do cálculo da latitude, bem como, utilizar a latitude calculada pela passagem meridiana ao contrário de outros métodos que necessitavam de estimar a mesma. Embora inicialmente tenha sido apresentado como um método baseado em observações anteriores ao meio-dia solar, os primeiros testes realizados pouco tempo após a sua proposta demonstraram que a sua precisão aumentava consideravelmente quando se utilizava uma altura antes e outra depois da culminação do Sol. Esta simetria permitia minimizar os efeitos de variações sistemáticas e conduzia a resultados mais próximos da realidade, sem comprometer a simplicidade operacional do processo. O processo foi concebido para ser aplicado numa janela de tempo curta, reduzindo o efeito do movimento do navio e maximizando a coerência entre as duas coordenadas. O seu principal mérito reside, assim, na aproximação simultânea das medições de latitude e longitude, com o mínimo de meios e complexidade, utilizando apenas observações solares, um cronómetro e as tábuas náuticas.

Trata-se de um método aproximado, pensado para uso prático a bordo, que procura conciliar simplicidade com resultados suficientemente fiáveis para fins de navegação oceânica. O seu mérito reside menos na exatidão teórica absoluta e mais na viabilidade da sua aplicação em contexto real, com recursos limitados e num curto intervalo de tempo. Embora tenha sido testado com bons resultados pouco tempo após a sua formulação, o método de Littrow acabou por não integrar de forma expressiva os manuais e práticas de navegação mais comuns. Esta ausência não invalida a sua utilidade, mas levanta naturalmente o interesse em perceber até que ponto o processo se ajusta às condições reais de navegação e qual o nível de precisão que poderá oferecer atualmente. Foi com esse intuito que se realizou um embarque destinado a testar a aplicação prática do método, avaliando a sua exequibilidade, os fatores que influenciam a sua implementação e o grau de aproximação da posição

determinada face à posição real obtida por meios modernos.

Com base nestas questões, a presente dissertação propõe-se a estudar o método de Littrow de forma integrada. O seu principal objetivo é avaliar a pertinência teórica do processo, compreender a sua estrutura matemática e testar, em condições reais de navegação, a sua exequibilidade prática. Para tal, foi realizado um embarque no qual se efetuaram observações com sextante em instantes apropriados ao método, registando com rigor o tempo decorrido entre medições e aplicando posteriormente o modelo de cálculo proposto. A comparação com a posição determinada por sistemas modernos de navegação permitiu aferir o erro associado e discutir as condições de aplicabilidade do método.

O estudo do método de Littrow, aliado à sua aplicação em contexto real, permite compreender melhor as condições em que este processo pode ser utilizado e qual a precisão que oferece. Numa altura em que os sistemas modernos de navegação são amplamente utilizados, continua a ser importante conhecer métodos alternativos que permitam determinar a posição com meios próprios. Pela sua simplicidade e estrutura, o método de Littrow justifica uma análise prática que permita avaliar o seu potencial como recurso complementar na navegação.

Com o objetivo de contextualizar e explicar o método de Charles de Littrow a dissertação encontra-se organizada em quatro capítulos. No primeiro, apresenta-se o enquadramento histórico da navegação, com especial atenção à evolução dos métodos utilizados para a determinação da latitude. O segundo capítulo é dedicado à longitude, explorando os processos que permitiram a sua determinação ao longo do tempo. O terceiro capítulo centra-se no método de Littrow, analisando em detalhe a sua formula e aplicação prática. Por fim, no quarto capítulo procede-se à análise dos testes realizados com base no método de Littrow, avaliando a sua eficácia.



# Capítulo 1

## Contexto Histórico

### A navegação até ao século XV

A evolução dos métodos e instrumentos de navegação, culminando na navegação astronómica, representa um processo gradual de aperfeiçoamento técnico impulsionado pela necessidade de maior precisão e segurança na determinação da posição no mar. Esta progressão revelou-se particularmente determinante nas grandes viagens oceânicas, onde a ausência de referências costeiras exigia soluções mais fiáveis do que os métodos empíricos tradicionais. Apesar de o aperfeiçoamento dos métodos e instrumentos de navegação ter ocorrido de forma contínua ao longo do tempo, registaram-se inovações que representaram verdadeiros marcos de progresso, traduzindo-se em avanços significativos da navegação<sup>1</sup>. Neste capítulo, proceder-se-á a uma análise da evolução da navegação, dos seus métodos e instrumentos, estruturada em duas fases distintas: numa primeira parte, será abordado o período anterior ao desenvolvimento da navegação astronómica, numa segunda fase, será explorado o surgimento e a consolidação da navegação astronómica, com ênfase nas transformações técnicas e conceptuais que permitiram uma navegação mais precisa e independente das referências costeiras.

Nos primórdios da navegação, as rotas marítimas desenvolviam-se sobretudo em zonas costeiras como o Mar Mediterrâneo, o Mar Vermelho e o Golfo Pérsico, respondendo a necessidades essenciais como o comércio, a pesca e a expansão territorial. Nessa fase, a navegação era predominantemente apoiada em métodos empíricos e observacionais. Os navegadores orientavam-se por pontos de referência visíveis, como ilhas, promontórios e formações rochosas, e recorriam à observação dos astros em particular da estrela Polar, cuja direção indicava, aproximadamente,

---

1. António Costa Canas, *Naufágios e Longitude* (Lisboa: Comissão Cultural da Marinha, 2003), p.21, ISBN: 972-80004-55-9.

o Norte, enquanto a sua altura em relação ao horizonte indica a latitude aproximada do observador.

Com o aumento das trocas comerciais e a intensificação das ligações marítimas, sobretudo a partir do final do primeiro milénio, surgiu a necessidade de melhorar a segurança e a previsibilidade das viagens. Neste contexto, dá-se uma reconfiguração profunda dos processos e instrumentos utilizados para navegar. Este contexto favoreceu a introdução, na Europa, da agulha de marear por volta do século XIII, instrumento que permitia manter um rumo estável mesmo na ausência de referências visuais ou celestes, contribuindo significativamente para o progresso da navegação em áreas oceânicas. Apesar das suas capacidades a agulha de marear apresenta limitações, como por exemplo, a divisão do seu mostrador em apenas 32 partes correspondendo cada divisão a 11,25 graus, uma quarta. Esta escala dificultava a precisão na obtenção das leituras, originando margens de erro significativas. Outro erro associado a este instrumento é por exemplo a diferença entre o Norte Geográfico e o Norte Magnético<sup>2</sup>.

## Metodo de rumo e estima

Para melhor se compreender a necessidade de evolução da arte de navegar e o “salto” para as navegações oceânicas, é importante perceber os erros associados aos métodos antigos. Para isso iremos abordar o método de rumo e estima, bem como as limitações do mesmo. O método de rumo e estima foi uma forma primitiva e fundamental de determinar a posição de um navio no mar, praticado desde a idade média<sup>3</sup>, a utilização deste processo permaneceu durante muito tempo como a principal forma de obter a posição no mar. O princípio básico para o rumo e estima era conhecer a direção do navio através de uma agulha magnética, e era estimada a distância percorrida pelo piloto. O método anteriormente referido necessitava apenas de 2 elementos: uma carta-portulano, que consistia na representação gráfica dos locais praticados e agulha magnética. Tal como refere António Canas no livro *Naufágios e Longitude* «Usando simplesmente essa agulha magnética para conhecer a direção para onde se dirigiam e estimando o piloto a distância percorrida, marcando na carta as posições do navio, em função desses dois elementos: direção e distância»<sup>4</sup>. Para além dos instrumentos referidos os navegadores utilizavam ainda como complemento prumos, utilizados para sondar o fundo do mar e determinar a profundidade da água, a Toleta de Marteloio que consistia numa tabela auxiliar que

---

2. Canas, *Naufágios e Longitude*, p. 13.

3. **livroacademiab.**

4. Canas, *Naufágios e Longitude*.

permitia calcular o avanço e afastamento lateral em relação à direção pretendida, utilizava-se ainda o Astrolábio Noturno ou Roda que determinava horas durante a noite, importa salientar que este instrumento não era utilizado para observar alturas de astros mas sim para calcular horas durante o período noturno<sup>5</sup>.

Este método era perfeitamente adequado às necessidades de navegação no Mediterrâneo, onde as distâncias percorridas sem terra à vista nunca eram muito extensas, permitindo que a posição fosse regularmente corrigida pela observação de pontos de referência em terra, no entanto, estava sujeito a erros que aumentavam com o aumento da distância percorrida pelo navio, as agulhas magnéticas apontavam para o norte magnético que não coincide com o norte geográfico o que, apesar do conhecimento da declinação magnética, levava a erros. A menor divisão das agulhas de marear, como referido anteriormente, era de uma quarta (11,25 graus) dificultando a leitura do rumo. A necessidade de bolinar (navegar com vento contrário) aumentava os erros da previsão da distância percorrida pelo piloto. O movimento do navio em relação ao fundo do mar era afetado por correntes e ventos, cujos efeitos muitas vezes não eram conhecidos ou quantificados. As cartas de portulano eram também imperfeitas, com erros na representação de distâncias.

Utilizando como exemplo uma navegação entre Lisboa e a ilha de São Miguel nos Açores em qua distância é cerca de 760 Milhas Náuticas, um erro de 7 graus no rumo origina um afastamento aproximadamente de 93 milhas náuticas.

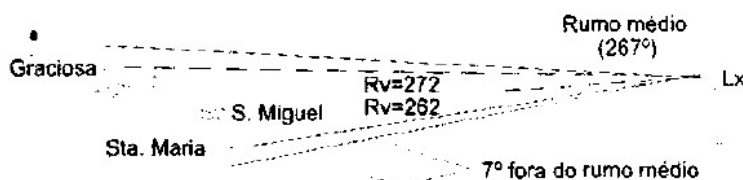


FIGURA 1.1: Erro pelo método de rumo e estima na deslocação para os Açores. Fonte: António Costa Canas, *Naufágios e Longitude* (Lisboa: Comissão Cultural da Marinha, 2003), ISBN: 972-80004-55-9

Todos estes fatores contribuíam para a falta de rigor do método de rumo e estima, quanto maior fosse a distância percorrida maior era o erro acumulado. Na época das grandes viagens oceânicas este erro tornou-se cada vez menos aceitável pelo que o método se tornou insuficiente para garantir segurança em viagens oceânicas, surgem assim alternativas, como a navegação astronómica.

---

5. Canas, p.18.

## A Navegação Astronómica

O desenvolvimento da navegação astronómica resultou da necessidade de superar as limitações, anteriormente referidas, do método de rumo e estima. A Navegação Astronómica é impulsionada na época das grandes expansões dos descobrimentos, no Oceano Atlântico, quando os navegadores começaram a realizar longas viagens oceânicas, perdendo assim referências em terra o que agravava os erros acumulados pela estima. Ao cruzar o Equador, a estrela polar deixava de ser visível, obrigando a procurar novos métodos que fossem aplicáveis em ambos os hemisférios, Como tal, o Sol e a Lua surgem como resposta a esta limitação.

Para estudar a navegação astronómica é importante excluir os conceitos de obtenção da posição a partir de simples observações de astros, como tal, usar-se-á o conceito referido por Luis Albuquerque- «convencionou-se que apenas se devia chamar astronómica a náutica baseada em processos que permitam definir a posição rigorosa ou aproximada de um navio por observações dos astros, usando aqui a palavra observação com o significado de medição de ao menos uma coordenada astronómica de um astro, e não no sentido de observação contemplativa»<sup>6</sup>.

De forma geral, a navegação astronómica consiste na determinação da posição de um navio no globo terrestre através da medição de ângulos entre corpos celestes, como o Sol, a Lua, estrelas ou planetas e o plano do horizonte. O tratamento matemático destas observações permite obter as coordenadas geográficas (latitude e longitude) do ponto de observação. Entre o desenvolvimento inicial das técnicas e a adoção de instrumentos específicos, a navegação astronómica beneficiou de uma evolução gradual dos dispositivos de observação. De forma geral, estes instrumentos tinham como objetivo comum medir com a maior precisão possível a altura de um astro em relação ao horizonte, sendo a sua eficácia determinada pela estabilidade, facilidade de uso e capacidade de fornecer leituras fiáveis mesmo em condições adversas no mar. Ao longo dos séculos, foram concebidas diferentes soluções, desde dispositivos simples de observação direta, que dependiam fortemente da habilidade do navegador, até mecanismos mais complexos que incorporavam elementos óticos e escalas graduadas para reduzir o erro humano e melhorar a precisão. Esta progressão tecnológica refletiu-se numa diversificação de formas e materiais, mas também numa crescente sofisticação no tratamento das medições, preparando o caminho para a introdução e aperfeiçoamento de cada instrumento específico.

---

6. Luís de Albuquerque, *Estudos de História* (1975).

O quadrante, usado desde o século XIII<sup>7</sup>, foi um dos primeiros instrumentos aplicados à navegação astronómica. Embora conhecido anteriormente, foi sobretudo ao longo do século XV que se tornou amplamente utilizado. Formado por um arco de 90° com uma escala graduada e um fio de prumo, permitia leituras na ordem do meio grau o que era suficiente para o cálculo da latitude. Era feito de madeira ou latão.



FIGURA 1.2: Quadrante. Fonte: <https://www.fcsh.unl.pt/devp/dictionary/quadrante/>

O astrolábio náutico surge mais tarde, no final do século XV. Passou a ser o instrumento mais utilizado, uma vez que era o mais adequado para realizar observações ao Sol na sua passagem meridiana. Era composto por um disco metálico com uma alidade rotativa para permitir medir a altura do Sol ou de uma estrela. Era um instrumento eficaz, no entanto, difícil de manusear com mar agitado o que causava imprecisão na leitura. Contudo, o maior avanço tecnológico dá-se com o aparecimento do sextante, que pelos seus espelhos permite ao observador alinhar o astro com a linha do horizonte sendo por isso um instrumento mais preciso nas suas medições.

---

7. João Tomás Ramalho Pires Trigo, «Cálculo da Posição pelo Método de Sumner: Método de Sumner». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha» (2024), p.6.



FIGURA 1.3: Astrolábio náutico. Fonte: <https://www.lojadomuseudemarinha.pt/pt/astrolabio-aveiro-com-estojo.html>

Contudo, o maior avanço tecnológico dá-se no século XVIII com o aparecimento de instrumentos baseados no princípio da dupla reflexão, pelos seus espelhos permitem ao observador alinhar o astro com a linha do horizonte sendo por isso um instrumento mais preciso. As medições através destes instrumentos possuíam um rigor de um minuto de grau, na própria escala do instrumento.



FIGURA 1.4: Sextante. Fonte: <https://cultura.marinha.pt/en/museumarinhaweb/colecoesweb/>

## **Cálculo da latitude na passagem meridiana do Sol**

Um dos primeiros passos na navegação pelos astros foi o cálculo da latitude, que era essencial para viagens ao longo da costa africana muito realizadas pelos navegadores portugueses. Numa primeira fase, em meados de 1460 a latitude era determinada através da observação da Estrela Polar, cuja altura angular no momento da passagem meridiana correspondia aproximadamente à latitude do local de observação, era apenas necessário fazer uma correção, positiva ou negativa, dependendo da posição do astro relativamente ao polo<sup>8</sup>. A passagem meridiana designa o momento em que um astro cruza o meridiano do observador, atingindo nesse instante a sua altura máxima.

Contudo, à medida que as viagens portuguesas se estendiam progressivamente para o hemisfério Sul, a Estrela Polar deixava de ser visível no horizonte tornando-se inviável como referência para a determinação da latitude. Face a esta limitação e não existindo no hemisfério Sul uma estrela tão brilhante e próxima do Polo Sul como era o caso da Estrela Polar, os navegadores portugueses passaram a recorrer à observação do Sol, este método aproveitava o facto de que a posição do Sol variava de forma constante em relação à latitude do observador. Este assunto é referido por Ana Filipa Teorgas Queirós, na sua dissertação de mestrado<sup>9</sup>.

### **Processo para obtenção da Latitude**

O processo de cálculo da latitude era, em termos conceptuais, relativamente simples: o piloto necessitava de observar a altura do astro e de conhecer a declinação solar correspondente à data da observação<sup>10</sup>. No que respeita à medição da altura do Sol, esta era realizada, geralmente, com recurso ao astrolábio, embora pudessem também ser utilizados o quadrante ou a balestilha como refere Luís de Albuquerque no livro *Curso da história náutica*<sup>11</sup>. Apesar da evolução progressiva dos instrumentos de observação astronómica, culminando com o aparecimento do sextante, que permitiu observações mais precisas. A técnica base manteve-se praticamente

---

8. Trigo, «Cálculo da Posição pelo Método de Sumner: Método de Sumner». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha».

9. Ana Filipa Teorgas Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marq Saint-Hilaire: Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha» (2022).

10. Luís Mendonça de Albuquerque, *Curso de História da Náutica* (Coimbra: Livraria Almedina, 1972), pp.57-58.

11. L. M. d. Albuquerque.

inalterada. Quanto à determinação da declinação solar os pilotos recorriam a regras, gráficos e tábuas. Para entender as variáveis no cálculo da latitude torna-se necessário perceber ao que corresponde cada uma:

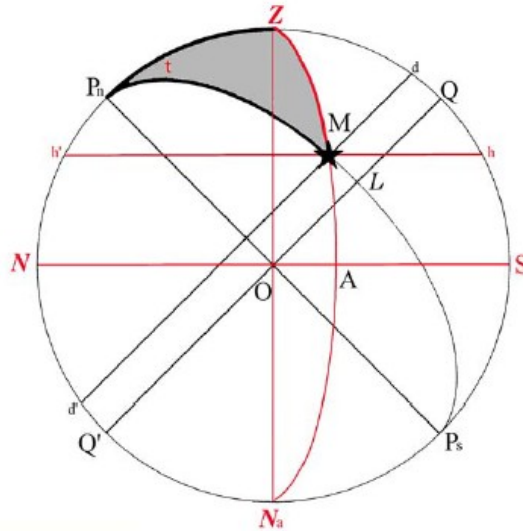


FIGURA 1.5: Representação da Esfera Celeste. Fonte: Nathaniel Bowditch, *American Practical Navigator an epitome of navigation* (Springfield, Virginia: National Geospatial-Intelligence Agency, 2019)

Na figura está representada a esfera celeste com o triângulo de navegação destacado. O zênite, **Z**, corresponde ao ponto na esfera celeste situado verticalmente acima do observador, sendo o Nadir, **Na**, o ponto diametralmente oposto. A linha **NS** representa o meridiano celeste do observador. Os pontos **P<sub>n</sub>** e **P<sub>s</sub>** representam, respetivamente, os polos norte e sul celestes. A reta **QQ'** corresponde à projeção do equador celeste sobre a esfera. Por último, **M** representa a posição de um corpo celeste.

## Cálculos Matemáticos

Tendo sido já analisados os fatores e variáveis fundamentais para o cálculo da latitude, procede-se agora a uma abordagem de carácter matemático, com vista à formalização do processo de determinação desta coordenada geográfica. Considerando a fórmula fundamental da trigonometria esférica obteve-se a expressão:

$$\cos(\zeta) = \cos(C\varphi) \cdot \cos(\Delta) + \sin(C\varphi) \cdot \sin(\Delta) \cdot \cos(H) \quad (1.1)$$

Onde:

- $\zeta$  — distância zenital, ou seja,  $90^\circ$  menos a altura do astro.

- $C\varphi$  — colatitude, isto é,  $90^\circ$  menos a latitude do observador.
- $\Delta$  — distância polar do astro, correspondente a  $90^\circ$  menos a declinação.
- $H$  — ângulo no polo do astro no momento da observação.

A fórmula pode ser reescrita através da substituição de determinadas variáveis pelos respectivos complementos, por forma a exprimir-se nas variáveis habitualmente utilizadas em navegação astronómica, nomeadamente altura do astro, declinação e latitude.

$$\sin(a) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H) \quad (1.2)$$

Cujas variáveis correspondem a (a) altura do astro, ( $\varphi$ ) latitude, ( $\delta$ ) declinação e (H) ângulo no polo, este último representa o ângulo do arco formado entre o meridiano do observador e o meridiano do astro. Como referido anteriormente a passagem meridiana representa o momento em que o astro, neste caso o sol, atinge o meridiano do observador, ou seja coincide com o zénite. Por isso, para este cálculo considera-se que o ângulo no polo é 0 podendo-se simplificar a expressão acima mencionada obtendo-se:

$$\sin(a) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \quad (1.3)$$

Utilizamos a fórmula do cosseno da diferença:

$$\cos(\varphi - \delta) = \cos(\varphi) \cos(\delta) + \sin(\varphi) \sin(\delta) \quad (1.4)$$

Portanto, podemos escrever:

$$\sin(a) = \cos(\varphi - \delta) \quad (1.5)$$

Por fim resolve-se a equação por forma a obter a latitude, obtendo-se a seguinte expressão final:

$$\begin{cases} \varphi = -90 + a + \delta \\ \varphi = 90 - a + \delta \end{cases} \quad (1.6)$$

Esta expressão, que constitui a fórmula final utilizada para o cálculo da latitude pela passagem meridiana do Sol, destaca-se pela sua simplicidade e elevada precisão, características que a tornaram, ao longo de séculos, o principal método adotado pelos navegadores para a determinação da latitude no mar. A sua estrutura acessível permitia uma aplicação prática e eficiente, mesmo em condições adversas, consolidando-se como uma ferramenta essencial na navegação astronómica.

## Outros Métodos de cálculo da Latitude

O método anteriormente descrito, embora eficaz, apresentava uma limitação significativa: a medição da altura do Sol tinha de ser realizada no exato momento da sua passagem meridiana. Pelo que, se no instante da observação o céu ficasse encoberto o cálculo da latitude nesse dia ficava comprometido. Este problema foi descrito por vários autores bem como tentativas para a solução do mesmo.<sup>12</sup>

Surge então o processo de cálculo da latitude por extra meridianas, proposto por Pedro Nunes<sup>13</sup>. Para este método o piloto para além do astrolábio e das tábuas de declinação solares necessitava de um compasso de pontas curvas, um globo ou «poma» e de uma agulha magnética que permitisse observar azimutes do Sol<sup>14</sup>. Este método, para além de ultrapassar a limitação imposta pela necessidade de observação no momento da passagem meridiana, apresentava ainda a vantagem de dispensar cálculos matemáticos complexos. A resolução deste método consistia em reconstituir sobre a poma, os triângulos de posição correspondentes às duas observações. O processo tinha como limitação o facto do observador mudar de posição entre as duas observações, no entanto se as medições não estivessem separadas de um longo intervalo os círculos traçados ficariam muito próximos<sup>15</sup>.

Já no século XVII, o Padre Valentim Estancel (1621–1705) também reconheceu o problema das observações na passagem meridiana e apresentou um método que, embora mantivesse uma componente instrumental e prática, com recurso ao “polímetro” ou a uma meia esfera, introduziu uma abordagem mais analítica,

---

12. **livroacademiab.**

13. Pedro Nunes (1502-1578) matemático e Cosmógrafo-mor foi uma das principais figuras na história da navegação. Destacou-se pelas suas obras como *O Tratado da Sphera*, bem como pelos métodos para determinar a latitude por alturas extrameridianas do Sol e aperfeiçoou o uso de instrumentos como a poma, marcando uma transição da navegação prática para fundamentos matemáticos

14. L. M. d. Albuquerque, *Curso de História da Náutica*.

15. L. M. d. Albuquerque.

baseada em funções trigonométricas e na analogia dos senos. No entanto, não correu ainda à função logarítmica, já conhecida na época e potencialmente útil para simplificar os cálculos<sup>16</sup>.

Cornelis Douwes, em 1740, desenvolveu o primeiro método inteiramente algorítmico e analítico para o cálculo da latitude por alturas extrameridianas, que se tornaria a base de grande parte dos métodos posteriores. Em Portugal, Militão da Mata adaptou e divulgou este procedimento na obra *O Destro Observador* (1781), sublinhando a sua utilidade em situações em que o Sol estivesse encoberto no momento da passagem meridiana. Estes métodos passaram a exigir o conhecimento prévio da latitude estimada, a correção da altura observada e o uso de tabelas auxiliares — solares, de declinação, de senos e de logaritmos. Paralelamente, assistiu-se à substituição de instrumentos tradicionais como o astrolábio e a balestilha pelo octante, e mais tarde pelo sextante, que aumentavam a precisão das medições, bem como à difusão de cronómetros mais fiáveis, que acrescentavam a variável tempo ao cálculo<sup>17</sup>.

No século XIX, James Ivory e Edward Riddle aperfeiçoaram o método de Douwes, sendo o de Riddle amplamente divulgado por Norie e transcrito por Peregrino Leitão na sua *Guia Náutica* (1868). A época foi também marcada por inovações como a introdução, por Thomas Sumner (1837), do conceito de “reta de altura” ou “reta de posição”, permitindo determinar a posição por interseção de duas retas obtidas a partir da observação de astros, método que exigia a determinação rigorosa da hora da observação. Posteriormente, Marcq Saint-Hilaire (1875) propôs um processo que viria a tornar-se o mais utilizado a nível mundial, possibilitando a obtenção simultânea de latitude e longitude<sup>18</sup>. A prática corrente, no entanto, mantinha a determinação da latitude pela passagem meridiana do Sol e da longitude pelo ângulo horário com recurso ao cronómetro, método conhecido em Portugal como “capote e lenço”<sup>19</sup>.

---

16. Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marq Saint-Hilaire: Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha», p.19.

17. Pires<sup>21</sup>.

18. Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marq Saint-Hilaire: Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha», p.1.

19. **livroacademiab.**



# Capítulo 2

## O Cálculo da Longitude

### Evolução do Cálculo da Longitude

Até ao momento, foi desenvolvido o cálculo da latitude, uma vez que esta consistiu, historicamente, a primeira coordenada geográfica a ser determinada com alguma precisão pelos navegadores. A longitude, segundo Bowditch, aplica-se apenas a posições à superfície da terra e é medida a partir do meridiano de Greenwich ( $0^\circ$ ), para leste e oeste até aos  $180^\circ$ <sup>20</sup>. Esta coordenada manteve-se por vários anos difícil de determinar, essencialmente porque é calculada de forma relativa.

«Podemos dizer que a grande distinção entre a latitude e a longitude reside no facto de a primeira poder ser medida em termos absolutos, enquanto que a segunda apenas o pode ser em termos relativos.»<sup>21</sup>.

A procura de uma solução fiável para o cálculo da longitude intensificou-se ao longo dos séculos, impulsionada essencialmente pelos inúmeros naufrágios e acidentes causados pelo desconhecimento desta coordenada. António Canas no seu livro *Naufrágios e a Longitude*, relata três casos de navios da marinha britânica que sofreram incidentes precisamente pela dificuldade em conhecer a longitude<sup>22</sup>. O primeiro ocorreu em 1591, com o naufrágio da esquadra comandada por George Raymond. Partindo de Plymouth com três navios rumo à Índia, Raymond viu a sua viagem prolongar-se durante meses devido ao desconhecimento das correntes do Golfo da Guiné, alcançando o Cabo apenas após um longo atraso. Depois de atacar navios portugueses em Zanzibar e prosseguir para a Índia, a frota foi desviada para Sumatra por ventos e correntes desfavoráveis. No regresso, calmarias no Atlântico provocaram abatimento para Oeste, levando os navios às Antilhas. O navio de

---

20. Nathaniel Bowditch, *American Practical Navigator an epitome of navigation* (Springfield, Virginia: National Geospatial-Intelligence Agency, 2019).

21. Canas, *Naufrágios e Longitude*, p.60.

22. Canas, pp.59-60.

Raymond acabou à deriva, com apenas seis sobreviventes. Este episódio demonstra como a falta de conhecimento preciso da posição Leste-Oeste e a ausência de dados sobre ventos e correntes podiam desviar consideravelmente o rumo. O segundo caso foi o desastre das Ilhas Scilly, em 1707, no qual uma esquadra britânica se afundou, vitimando grande parte das tripulações. O incidente, amplamente noticiado, gerou intenso debate, e em 1713 dois matemáticos sustentaram que a causa principal fora o desconhecimento da longitude, afirmando que poderia ter sido evitado. A gravidade do desastre levou o Parlamento Britânico a instituir um prêmio destinado a incentivar a descoberta de um método eficaz para a determinação desta coordenada no mar. O terceiro exemplo remonta a 1739, durante a expedição do Comodoro George Anson ao Pacífico. Ao procurar o arquipélago de Juan Fernández, Anson não sabia se se encontrava a leste ou a oeste das ilhas. As fortes correntes agravaram a incerteza e dificultaram a aproximação, prolongando a viagem. A demora e a escassez de mantimentos resultaram na morte de dois terços da tripulação.

Existiram inicialmente duas diferentes abordagens para o cálculo da longitude no mar, a abordagem por métodos mecânicos e a abordagem por métodos astronômicos. As soluções mecânicas tinham por base o uso de um cronômetro que pudesse manter, com rigor a bordo dos navios, a hora de um meridiano de referência. A longitude era assim obtida comparando a hora de bordo com a hora do meridiano de referência, convertendo o tempo para graus obtinha-se a longitude. As soluções astronômicas baseavam-se na observação de fenômenos celestes que ocorressem simultaneamente em diferentes locais, eram mais complexas uma vez que era necessário conhecer a hora em que esse fenômeno ocorre no meridiano de referência, calcular a hora de bordo e posteriormente fazer a comparação das mesmas.

## Método das Distâncias Lunares

O método das distâncias lunares é apresentado em 1514 por Johann Werner <sup>23</sup>, este consistia na observação simultânea de dois astros, nomeadamente a Lua e um segundo astro de referência, como uma estrela ou planeta. A relevância da utilização da Lua neste método decorre do facto de a maioria dos astros apresentar movimentos demasiado uniformes em diferentes longitudes, o que os tornava inadequados como referência para a determinação desta coordenada. Pelo contrário, a Lua descreve uma órbita aproximadamente mensal em torno da Terra, o que se

---

23. Johann Werner (1468-1522) foi um matemático, astrónomo, cartógrafo e sacerdote alemão que desenvolveu várias técnicas matemáticas aplicadas à navegação

traduz num movimento aparente de cerca de meio grau por hora em relação aos restantes corpos celestes.

O processo baseava-se na medição da distância angular entre a Lua e outro astro, inicialmente usava-se uma balestilha para efetuar a medição, no entanto, a sua precisão era apenas na ordem dos trinta minutos de grau, o que era insuficiente para o cálculo da longitude, para esta um erro de apenas cinco minutos de grau pode resultar em erros superiores a dois graus, o que no equador, equivale a cento e vinte milhas<sup>24</sup>. A limitação imposta pela incerteza dos instrumentos como a balestilha, quadrante e astrolábio apenas foi ultrapassada com o surgimento de instrumentos com sistemas de dupla reflexão como o sextante e octante, no século XVIII que permitiam leituras mais precisas, na ordem do minuto de grau. Outro obstáculo ao método das distâncias lunares residia na imprecisão das tabelas de efemérides da Lua, que na época não forneciam dados suficientemente rigorosos para permitir a determinação precisa da longitude. Esta limitação só foi contornada no final do século XVII uma vez que a necessidade de observações mais precisas levou à criação de observatórios como o de Paris (1667) e de Greenwich (1675).

Após a obtenção da distância angular observada entre a Lua e o outro astro, o navegador tinha que realizar um conjunto de cálculos complexos, com o objetivo de determinar a hora correspondente no meridiano de referência. Estes cálculos eram tecnicamente exigentes e demoravam algumas horas para ser resolvidos e por isso não estavam ao alcance dos navegadores. Para contornar este impedimento, passou a ser publicado anualmente um livro que continha os cálculos das distâncias lunares para o Sol e outras estrelas, em intervalos de 3 horas, calculadas para o meridiano de Greenwich<sup>25</sup>. Por interpolação, era possível determinar a hora em Greenwich correspondente à distância medida. Conhecendo a hora local, e a hora de Greenwich, bastava determinar a diferença horária entre ambas. Essa diferença, convertida em graus, sabendo que a terra percorre 360° em 24 horas conclui-se que 1 hora corresponde a 15°, permitia calcular a longitude do local de observação.

Mesmo após a adoção dos cronómetros, que permitiam medir diretamente a diferença horária entre Greenwich e o local, o método das distâncias lunares manteve-se em uso uma vez que era utilizado como forma de verificar o erro do cronómetro Canas, *Naufágios e Longitude*.

---

24. Canas, *Naufágios e Longitude*, p.85.

25. **Coimbra.**

## Longitude pelo Cronómetro

O segundo método referido era o do cálculo da longitude pelo cronómetro, este método foi possível devido ao trabalho de um carpinteiro inglês John Harrison que construiu vários cronómetros que tinham a capacidade de manter uma marcha regular conservando a hora do meridiano de referência<sup>26</sup>, inicialmente este objeto era de acesso muito limitado devido ao seu preço bastante elevado, como tal não foi amplamente utilizado logo após a sua criação. A partir do segundo quartel do século XIX o uso do cronómetro generalizou-se, tornando-se o método dominante para a determinação da longitude a bordo dos navios.

O método do cronómetro para a determinação da longitude baseia-se na relação direta entre o tempo e a rotação da terra. Como referido anteriormente sabe-se que 1 hora corresponde a 15° de longitude. Assim se for possível conhecer com precisão a diferença entre a hora do local e a hora de um meridiano de referência, normalmente é utilizado o de Greenwich, torna-se possível calcular diretamente a Longitude do ponto de observação. Este método exige rigor na medição do tempo, visto que um erro de apenas 4 segundos na diferença horária corresponde a um minuto de arco de longitude o que equivale a uma milha no Equador. Como tal, a precisão depende da qualidade do cronómetro e da correção dos seus erros ao longo das navegações.

Apesar de ser um método mecânico o cálculo da longitude pelo cronómetro não dispensava observações astronómicas para ser realizado, estas observações eram depois utilizadas para o cálculo da hora no local que por sua vez seria comparado com a hora no meridiano de referência.

## Cronómetro e Ângulo Horário

Entre as aplicações práticas do cronómetro, destaca-se o cálculo da longitude pelo ângulo horário. Este consiste na observação da altura de um astro<sup>27</sup>, neste caso o Sol, e simultaneamente registar as horas, minutos e segundos indicados no cronómetro, a precisão do método é tanto maior quanto mais próximo o vertical do astro estiver dos pontos leste ou oeste, sendo preferencialmente realizada entre uma hora e meia a três horas antes ou depois da sua passagem meridiana. A altura

---

26. António Costa Canas, «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal Contributo de Monteiro da Rocha» (Escola Naval).

27. Normalmente retiravam-se várias alturas num curto intervalo de tempo e registavam-se as leituras do cronómetro, para posteriormente se calcular a altura média e a hora média das observações

retirada do Sol (altura instrumental) era depois corrigida tendo em conta a paralaxe, depressão do horizonte e refração obtendo-se a altura calculada.

Em seguida, era necessário saber a declinação do Sol, a distância angular do astro em relação ao Equador, que varia ao longo do ano. Este valor é obtido em tabelas ou almanaques náuticos. Por último efetuava-se a estima da latitude para a hora da medição, a exatidão do cálculo da longitude depende da precisão na estima da latitude.

Após extraídos os dados anteriormente referidos era necessário resolver o triângulo de posição com o qual se obtinha o ângulo horário e por sua vez a hora verdadeira no local. Para explicar o triângulo de posição usar-se-á a 1.5:

O ângulo horário corresponde ao ângulo  $ZP_nM$ . Para resolver a equação é necessário conhecer os lados do triângulo:

O lado  $ZM$  corresponde à distância zenital, sendo esta a subtração da altura obtida na observação a 90.

O lado  $P_nM$ , distância polar, obtem-se ao subtraindo a 90 a declinação do Sol.

o lado  $ZP_n$  é calculado na subtração da latitude estimada a 90 e tem o nome de colatitude.

Conhecidos os lados do triângulo pode-se agora aplicar a formula fundamental da trigonometria, com as variáveis referidas, para calcular o ângulo horário ( $ZP_nM$ ):

$$\cos(ZM) = \cos(ZP_n) \cdot \cos(P_nM) + \sin(ZP_n) \cdot \sin(P_nM) \cdot \cos(ZP_nM) \quad (2.1)$$

Substituindo as variáveis:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos(t) \quad (2.2)$$

Simplificando:

$$\sin(h) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(P_n) \quad (2.3)$$

Resolvendo em ordem à variável que queremos determinar:

$$\cos P_n = \frac{\sin a - \sin \varphi \cdot \sin \delta}{\cos a \cdot \cos \varphi} \quad (2.4)$$

## Desvantagens do método

O cálculo da longitude pelo ângulo horário constituiu, sem dúvida um importante avanço técnico na obtenção da posição no mar tanto que a fórmula que o fundamenta continua válida e eficaz nos dias de hoje, podendo ser utilizada como um meio alternativo fiável em caso de falha de um sistema eletrónico. Apesar deste avanço o método apresentava ainda algumas limitações como o intervalo de tempo para a observação das alturas era restrito, a dependência da latitude estimada e as variações ou erros do cronómetro.

A principal limitação associada ao método do cálculo da longitude pelo ângulo horário residia no facto de não permitir, na prática, obter simultaneamente as duas coordenadas — latitude e longitude — no mesmo instante. Com efeito, a latitude era normalmente determinada a bordo pela observação da passagem meridiana do Sol, enquanto a longitude, pelo método do ângulo horário, era obtida noutra fase do dia. Esta diferença temporal obrigava o navegador a transpor a linha de posição da longitude para o momento da obtenção da latitude, o que implicava considerar o movimento do navio nesse intervalo, tendo em conta o rumo e a velocidade. Contudo, como essas variáveis eram frequentemente instáveis devido à ação do vento, corrente ou manobras de navegação, o transporte da linha de posição introduzia erros significativos.

Para contornar a dificuldade referida, alguns autores apresentam métodos alternativos com o objetivo de calcular simultaneamente, ou num curto intervalo de tempo, a latitude e a longitude, evitando assim os erros de transposição de uma das coordenadas. Surgem então vários métodos para o cálculo da latitude por extrameridianas, dos quais se destacam o de Cornelis Douwes no século XVIII, que foi o primeiro a utilizar funções logarítmicas para simplificar os cálculos de trigonometria esférica. E os métodos de James Ivory e Edward Riddle, século XIX. Ambos são aprofundados por Ana Queirós na sua dissertação de mestrado<sup>28</sup>.

---

28. Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marq Saint-Hilaire: Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha».

# Capítulo 3

## Método de Charles de Littrow

### Contextualização

Como foi referido no final do capítulo anterior a determinação da longitude e da latitude em diferentes instantes estava associada a erros. Surgem então métodos que procuram aproximar a hora do cálculo da latitude para a hora de cálculo da longitude. No entanto, o método que vamos estudar sugere o contrário, ou seja, tem como objetivo calcular ambas as coordenadas num intervalo de tempo relativamente próximo da hora do meio dia solar.

Charles de Littrow foi diretor do Observatório Imperial e Real de Viena e em janeiro de 1842 publicou nos *Annales de l'Observatoire de Vienne* um método para calcular a longitude no mar, especialmente para ser aplicado num intervalo de tempo próximo da passagem meridiana, o que contornava a questão da latitude e longitude serem calculadas para diferentes fases do dia. A explicação do método que se irá desenvolver ao longo deste capítulo tem como referência principal a publicação do método traduzida de alemão para francês<sup>29</sup>

### Princípios do método

O estudo apresentado por Charles Littrow assenta em três princípios fundamentais, o primeiro e já anteriormente referido, foi a tentativa de aproximar, no tempo e espaço, a determinação da longitude à da latitude. Esta abordagem tinha como objetivo evitar erros introduzidos pelo movimento do navio entre as observações. Além disso, a realização de observações separadas em fases distintas do dia tornava os processos mais dependentes das condições meteorológicas uma vez que necessitava que as mesmas fossem favoráveis em diferentes períodos.

---

29. M. Charles de Littrow, *Sur une Nouvelle Méthode pour Déterminer en Mer L'Heure et la Longitude par Les Différences de Hauteurs Circumméridiennes* (Vienne: Charles Gerold Fils, 1868).

Outro princípio defendido por Littrow foi a integração do cálculo da longitude com a observação da latitude na passagem meridiana. O processo de determinação da latitude pela passagem meridiana do sol era na época o mais utilizado devido à sua simplicidade e exatidão. Charles de Littrow procurou assim transportar o cálculo da longitude para um instante próximo do meio-dia solar permitindo obter tanto a latitude como a longitude de forma quase simultânea. Para além disso, o método permitia ainda, utilizar a latitude calculada como entrada na fórmula da longitude, evitando assim que se utilizasse uma latitude estimada, que era menos precisa e levaria a mais erros.

Por último, Littrow sublinhava a impotência de existirem métodos simples e aplicáveis na prática, isto é, era necessário distinguir métodos rigorosos e matematicamente complexos, de métodos mais práticos e adaptados às necessidades da navegação e dos navegadores que tinham formações básicas de astronomia.

## O método

O método proposto por Littrow consistia em observar um par de alturas do Sol antes da passagem meridiana, registando as horas minutos e segundos indicados pelo cronómetro de bordo. Essas observações deveriam ser feitas nunca mais de meia hora antes da hora do meio-dia solar, e separadas por um intervalo de 5 a 15 minutos.

Após estas medições, seria necessário aplicar às alturas observadas correções para obter valores mais fiáveis. As principais correções incluem: paralaxe, depressão do horizonte, refração atmosférica, semidiâmetro solar e a altura do observador em relação à da linha de água.

Em seguida, determinava-se a altura do Sol ao meio-dia solar, a partir da qual se calculava a latitude, que era depois aplicada na fórmula de Littrow. Era também necessário retirar de almanaques ou tabelas a declinação para a hora da passagem meridiana.

Sabendo as variáveis referidas podemos agora aplicar a fórmula geral que sustenta a método proposto:

$$\sin\left(\frac{p+p'}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{h'-h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{h'+h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{p-p'}{2}\right) \cdot \cos L \cdot \cos D} \quad (1)$$

Onde:

- $h$  e  $h'$  representam as alturas retiradas antes do meio-dia solar;
- $p$  e  $p'$  são os ângulos horários correspondentes;
- $D$  é a declinação na hora da passagem meridiana;
- $L$  é a latitude do local de observação;
- $p' - p$  representa o intervalo de tempo entre as duas observações, expresso em graus.

O cálculo implica, em primeiro lugar, obter a meia soma e a meia diferença das alturas observadas, bem como o meio intervalo de tempo decorrido entre as duas observações, este último expresso em graus.

Em segundo lugar, calculam-se diretamente os valores trigonométricos correspondentes. Na época em que o método foi proposto não existiam calculadoras a bordo dos navios pelo que na explicação efetuada por Peregrino Leitão a resolução é feita com logaritmos o que permitia transformar as multiplicações, em somas mais simples de efetuar pelos navegadores<sup>30</sup>.

Estes valores são então multiplicados entre si de acordo com a fórmula estabelecida, permitindo obter o seno da meia soma dos ângulos horários do astro. A partir desse valor, determina-se o ângulo horário médio, ou seja, a média entre os ângulos horários das duas observações.

Este ângulo é finalmente convertido em tempo médio, e comparado com a meia soma das horas registadas no cronómetro. A diferença entre ambos corresponde à diferença entre o tempo local e o tempo de Greenwich, permitindo assim calcular a longitude aproximada do ponto de observação.

Para complementar a explicação do método vamos analisar o exemplo prático de Peregrino Leitão na sua obra *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*<sup>31</sup>: "A 25 de agosto de 1864, antes do meio dia se obtiveram os seguintes elementos. Pede-se a longitude ao meio dia empregando a formula de mr. de Littrow."

---

30. João Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação* (Lisboa: Tyf. da Sociedade Typographica Franco Portugueza, 1865).

31. Leitão, pp.127-130.

<b>Alt. verd. do cent. do sol</b> = $h = 78^{\circ} 6' 19''$	<b>H. do chr.</b> = $t = 3\text{h.} 41' 5''$
»            »            = $h' = 79 52 49$	»            »            = $t' = 3 56 5$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$h + h' = 157 59 8$	$(t + t') = 7 37 10$
$\frac{1}{2}(h + h') = 78 59 34$	$\frac{1}{2}(t + t') = 3 48 35$
$h' - h = 1^{\circ} 46' 30''$	$\frac{1}{2}(h' - h) = 0^{\circ} 53' 15''$

Ao meio dia achou-se que a latitude foi  $20^{\circ} N$ ,  
 que a declinação ao meio dia de bordo. .  $10 33' N$ ,  
 e que a equação do tempo á mesma hora.  $1 45$  additiva ao  
 tempo verdadeiro.

FIGURA 3.1: Fonte: João Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação* (Lisboa: Tyf. da Sociedade Typographica Franco Portugueza, 1865)

Nesta figura são apresentados os dados do problema, os valores das duas alturas observadas assim como, as horas do cronómetro correspondentes<sup>32</sup>. Com os dados referidos, Peregrino Leitão, calcula o valor da meia soma das horas registadas, a meia soma e a meia diferença das alturas observadas. São ainda apresentados os valores da latitude, declinação e a equação de tempo para que se possa aplicar a fórmula.

**Tendo determinado os elementos vamos entrar na resolução da formula:**

Log. sen.	$\frac{1}{2}(h' - h) = 0^{\circ} 53' 15''$	. . . . . 8.190033
» cos.	$\frac{1}{2}(h' + h) = 78 59 34$	. . . . . 9.280884
» cosec.	$\frac{1}{2}(P - P') = 1 52 30$	. . . . . 11.485199
» sec.	$L . . . . = 20 00 00$	. . . . . 10.027014
» sec.	$D . . . . = 10 33 00$	. . . . . 10.007404
	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	
	$\frac{1}{2}(P + P') = 5 36 54$	Log. sen. = $\frac{8.990534}{9} =$

FIGURA 3.2: Fonte: João Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação* (Lisboa: Tyf. da Sociedade Typographica Franco Portugueza, 1865)

32. Os instantes indicados pelo cronómetro referem 3h uma vez que na época o tempo era contado a partir do meio dia e não da meia noite como acontece atualmente, tal acontecia essencialmente por haver maior facilidade em achar o meio dia pelo sol.

Após o cálculo dos elementos que constituem a equação de Littrow, o autor do exemplo, efetua a resolução da fórmula, utilizando logaritmos para facilitar os cálculos, uma vez que não existiam calculadoras suficientemente capazes de efetuar diretamente as multiplicações das funções trigonométricas. A partir deste logaritmo, determina-se que  $\frac{1}{2} (P+P')$  (a semisoma das distâncias do astro ao meridiano) é de  $5^\circ 36' 54''$  que será multiplicada por 4 para que seja traduzida para tempo.

<b>(Taboa XIX) ou <math>\times 4 = 00h.22'27''</math> dist. méd. do astr. ao merid.</b>		
<b>24</b>		
<b>Hora verd. a bordo. . . . .</b>	<b>23 37 33</b>	<b>contada de 24 de agosto ao</b>
<b>Equação do tempo . . . . .</b>	<b>+ 1 45</b>	<b><math>\frac{1}{2}</math> dia.</b>
<b>Hora média a bordo . . . . .</b>	<b>23 39 18</b>	
<b>Hora méd. em Green. . . . .</b>	<b>27 48 35</b>	<b><math>= \frac{1}{2} (t+t')</math> contada de 24 de</b>
<b>Long. em tempo . . . . .</b>	<b>4 9 17</b>	<b>agosto.</b>
<b>Long. em graus . . . . .</b>	<b>62° 19 15</b>	<b>OG</b>

FIGURA 3.3: Fonte: João Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação* (Lisboa: Tyf. da Sociedade Typographica Franco Portuguesa, 1865)

Por fim, convertidos já os  $5^\circ 36' 54''$  para a mesma distância em tempo, determina-se a hora verdadeira a bordo. Como as observações foram feitas “antes do meio dia”, o “ $00h.22'27''$ ” representa a distância horária média do Sol ao meridiano superior (meio-dia). Para obter a hora verdadeira a bordo, esta distância é subtraída de 24 horas, resulta da subtração  $23h 37' 33''$ .

Utiliza-se agora a equação do tempo ( $1' 45''$ ) retirada para o meio dia para a partir da hora verdadeira de bordo se obter a hora média de bordo ( $23h 39' 18''$ ).

A longitude é então determinada pela diferença entre a hora média em Greenwich e a hora média a Bordo. A hora média em Greenwich utilizada é a semi soma das horas do cronómetro (já corrigidas):  $3h 48' 35''$ , que é interpretada como  $27h 48' 35''$ . Da subtração resulta a longitude em tempo:  $4h 09' 17''$ .

O ultimo passo deste processo é a transformação da longitude em tempo para graus obtendo-se  $62^\circ 19' 15''$ OG (Oeste de Greenwich), a atribuição oeste à longitude prende-se com o facto da hora média de Greenwich ser superior à hora média de bordo.

## Aplicação e validação do método por Littrow

A proposta apresentada por Charles de Littrow foi bem recebida tendo sido feitas tentativas de a integrar nas navegações. em 1843 o método foi traduzido para italiano e publicada uma discussão sobre o mesmo na revista *Nautical Magazine*<sup>33</sup>, também João Peregrino Leitão em 1865 refere este método<sup>34</sup>.

Foram realizadas várias experiências para testar o método, entre as quais se destacam o relatório de B. de Wüllerstorff em 1843, o qual confirma que o método conjugava simplicidade e precisão na determinação aproximada da longitude. Os erros observacionais provocavam desvios máximos de 12 segundos de tempo, sendo que a maioria se situava entre 4 e 5 segundos para o cálculo da hora. Wüllerstorff considerou que seria mais vantajoso realizar uma observação antes e outra depois da culminação do Sol, em vez de fazer ambas do mesmo lado.

Destaca-se também o relatório de Achille Bucchia, em 1843, que apesar de os resultados obtidos não serem muito próximos da realidade, os erros foram atribuídos à qualidade das observações realizadas e não à metodologia proposta por Littrow.

Apesar do interesse inicial e da adoção parcial, o método carecia ainda de uma validação prática mais extensa e conclusiva. Essa oportunidade surgiu em 1853, quando Wüllerstorff publicou um artigo no qual integrava uma correção para o movimento do navio na fórmula original de Littrow para a longitude. Reforçou também as vantagens de utilizar alturas correspondentes, ou quase idênticas, por serem mais práticas.

A validação definitiva do método de Littrow foi alcançada com a sua aplicação durante a expedição da fragata *Novara*, entre 1858 e 1859, sob o comando de Wüllerstorff. Durante essa viagem, o método foi aplicado com frequência e produziu resultados consistentemente satisfatórios, inclusive em medições de posição de elevada precisão. Os resultados práticos indicaram erros muito reduzidos e a margem de erro era inferior a um minuto de arco, o que correspondia, no máximo, a uma milha náutica.

Apesar dos resultados positivos, Littrow observou que as condições durante as observações da *Novara* foram especialmente favoráveis. O Sol encontrava-se numa posição próxima do zénite ao meio-dia (distâncias zenitais entre 2 e 5 graus), o que

---

33. Littrow, *Sur une Nouvelle Méthode pour Déterminer en Mer L'Heure et la Longitude par Les Différences de Hauteurs Circumméridiennes*, p.7.

34. Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, pp.127-131.

significa que os testes ocorreram em regiões próximas do equador. Ainda assim, o método também foi aplicado com sucesso em latitudes mais elevadas, iguais ou superiores a 43°.

## Limitações do método

Apesar das suas vantagens, o método de Littrow apresenta algumas limitações que devem ser tidas em conta. A sua maior precisão é alcançada quando as observações são realizadas nas proximidades do meridiano, o que pode constituir uma desvantagem em situações em que a visibilidade seja limitada ou irregular nesse período. Além disso, em latitudes muito elevadas, a precisão do método depende fortemente da qualidade da observação. Em condições de mar muito agitado, os limites de exatidão do método podem aumentar. No entanto, é importante notar que outros métodos de obtenção da posição também são afetados. Outro fator a considerar é o intervalo entre as observações, intervalos demasiado longos podem exigir correções adicionais para a mudança de posição do navio durante esse período o que faria o método perder um dos seus princípios fundamentais.

Importa salientar que o método desenvolvido por Charles de Littrow não tinha como objetivo a obtenção de posições com elevada precisão, mas sim oferecer uma solução prática e relativamente simples de aplicar pelos homens do mar. O método não era recomendado para situações em que fosse necessário um conhecimento rigoroso da posição, por exemplo, perto de perigos ou na aproximação a terra.

Contudo, revelou-se um método bastante eficaz e satisfatório quando aplicado em navegação astronómica, a sua simplicidade, aliada à boa margem de precisão obtida nas observações, torna-o uma ferramenta útil e confiável para saber a posição em navegação oceânica. Peregrino Leitão conclui que o método é preferível ao método anteriormente referido para o cálculo da longitude pelo ângulo horário<sup>35</sup>.

---

35. Leitão, "Conclue-se do que deixamos dito ácerca d'este calculo, que é muito aproveitavel, e até mesmo preferivel ao methodo ordinario do angulo horario, sómente no decorrer da viagem, mas nunca quando se queira demandar ou dar resguardo a um ponto qualquer".



# Capítulo 4

## Aplicação prática do método

### Contexto e condições da recolha de dados

Com o objetivo de aplicar em contexto real o método de Charles de Littrow, foi realizado um embarque a bordo do Navio da República Portuguesa (NRP) *Andrómeda*, entre os dias 28 de abril e 9 de maio de 2025. As observações decorreram ao largo de Viana do Castelo, zona onde o navio se encontrava a cumprir uma missão de sondagem do fundo. Durante este período, a unidade navegou a velocidades reduzidas, variando entre 3 e 6 nós, e manteve-se, na maioria do tempo, dentro de uma área geográfica limitada, o que favoreceu a estabilidade das condições necessárias à realização das observações astronómicas.

Para a observação das alturas do Sol foi utilizado o sextante disponível a bordo, cujo erro de índice se encontrava nulo, não sendo necessário proceder a qualquer correção nesse parâmetro. A marcação do tempo foi realizada com recurso a um conta-segundos, lançado com base na hora fornecida pelo sistema GPS do navio, correspondente ao fuso horário Zulu (hora de Greenwich). Este procedimento permitiu garantir a sincronização adequada entre as observações e os dados temporais necessários para a aplicação do método.

A recolha de dados foi possível em apenas quatro dias do embarque. Nos restantes dias, a impossibilidade de observação ficou a dever-se à natureza da missão do navio, cujas exigências operacionais não permitiram a realização de medições no horário previsto. Foram observados três pares de alturas por dia, com o objetivo de aumentar a amostra disponível e verificar se algum dos intervalos de tempo utilizados se traduzia em resultados mais precisos na aplicação do método.

As observações foram realizadas em instantes próximos da hora da passagem meridiana do Sol, previamente calculada através do programa NAV32. Para cada dia de observação, foram registados três pares de alturas solares. O intervalo máximo

entre as alturas de cada par foi de aproximadamente 20 minutos, procurando-se assegurar uma distribuição simétrica em torno do meio-dia solar verdadeiro. O primeiro par foi constituído por uma altura medida cerca de 10 minutos antes da passagem meridiana e outra 10 minutos após. O segundo par teve um intervalo de 15 minutos, com observações realizadas aproximadamente 7 minutos e 30 segundos antes e depois da culminação solar. O terceiro par, por sua vez, teve um intervalo de 10 minutos, com alturas observadas cerca de 5 minutos antes e 5 minutos depois do meio-dia solar. Importa referir que estes intervalos temporais serviram apenas como referência, uma vez que os instantes reais das observações não coincidiram exatamente com os valores definidos, mas situaram-se em torno dos mesmos, conforme permitido pelas condições a bordo e pela operacionalidade do momento.

Após o registo das alturas observadas, foram aplicadas as correções necessárias para obter a altura verdadeira do Sol e, assim, garantir maior rigor nos cálculos. A primeira correção diz respeito ao limbo observado: como as medições foram efetuadas tendo como referência o limbo inferior do Sol, foi necessário adicionar o valor do semidiâmetro solar, de forma a obter a altura do centro do astro. A segunda correção aplicada corresponde à depressão do horizonte, resultante da altura do observador acima da superfície do mar. No caso presente, o observador encontrava-se a aproximadamente 3 metros de altura, o que implicou a subtração do valor correspondente da tabela de correção, de forma a compensar o desnível entre o horizonte visível e o horizonte verdadeiro.

Foram ainda adicionados novos dados, recolhidos durante a conclusão da dissertação e da análise anteriormente apresentada. Esses dados provêm da navegação do *NRP Sagres* durante a sua missão e foram obtidos no Mar do Norte, entre a Dinamarca e a Alemanha, a cerca de 30 milhas da costa, com o navio a praticar velocidades baixas. A inclusão desta informação permitiu aumentar a amostra inicialmente obtida no embarque realizado no *NRP Andrómeda*. Na sua análise, não se consideraram apenas pares de alturas antes e depois da passagem meridiana, mas seguiu-se o procedimento sugerido no método original de Charles de Littrow, pelo que foram avaliados pares de alturas observadas antes da passagem meridiana, com intervalos de tempo entre 5 e 15 minutos, nunca ultrapassando meia hora relativamente à hora da meridiana.

## Cálculo da posição

Para auxiliar os cálculos, foi elaborada uma folha de cálculo em Excel, na qual foram inicialmente registados os dados recolhidos pelo observador, nomeadamente as alturas solares e os instantes das respetivas observações. Foram também inseridos os valores da posição obtida por GPS no momento da passagem meridiana, bem como os dados retirados do almanaque náutico, como a declinação do Sol e a equação do tempo. A realização dos cálculos através desta ferramenta permite, além de uma maior rapidez de execução, reduzir significativamente a possibilidade de erro humano.

Nesta folha de cálculo, os dados são introduzidos em diferentes formatos conforme a variável em causa: os instantes da observação e da passagem meridiana são registados em horas, minutos e segundos; as alturas, a posição na passagem meridiana e a declinação solar são inseridas em graus e minutos; e a equação do tempo é registada em minutos e segundos. As tabelas seguintes apresentam esses dados de forma organizada, para facilitar a compreensão do processo:

TABELA 4.1: Tabela 1A – Alturas observadas, horas de observação e posição GPS (graus, minutos e segundos)

Altura 1		Altura 2		Hora 1			Hora 2			Latitude		Longitude	
graus	min	graus	min	h	min	s	h	min	s	graus	min	graus	min
63	30	63	27	12	22	16	12	43	46	41	40.94	8	54.85
63	37	63	30	12	25	58	12	40	46	41	40.94	8	54.85
63	34	63	34	12	29	50	12	37	30	41	40.94	8	54.85
64	59	64	59	12	23	9	12	42	53	41	41.1	9	4.2
65	0	65	2	12	25	50	12	38	56	41	41.1	9	4.2
65	1	65	4	12	28	1	12	36	55	41	41.1	9	4.2
65	18	65	14	12	22	27	12	43	54	41	41.3	9	2
65	18	65	15	12	26	37	12	40	34	41	41.3	9	2
65	20	65	18	12	28	14	12	37	50	41	41.3	9	2
65	29	65	32	12	21	53	12	41	18	41	41.3	8	55.6
65	33	65	34	12	24	41	12	38	21	41	41.3	8	55.6
65	35	65	37	12	26	47	12	36	49	41	41.3	8	55.6

TABELA 4.2: Tabela 1B – Declinação, passagem meridiana e equação do tempo (graus, minutos, segundos)

Declinação		Passagem Meridiana			Equação do Tempo	
graus	min	h	min	s	min	s
15	12.5	12	32	33	-2	-57
15	12.5	12	32	33	-2	-57
15	12.5	12	32	33	-2	-57
16	39.4	12	32	17	-3	-25
16	39.4	12	32	17	-3	-25
16	39.4	12	32	17	-3	-25
16	56.7	12	32	39	-3	-28
16	56.7	12	32	39	-3	-28
16	56.7	12	32	39	-3	-28
17	14.1	12	32	11	-3	-32
17	14.1	12	32	11	-3	-32
17	14.1	12	32	11	-3	-32

De forma a permitir a aplicação direta dos valores na fórmula do método de Littrow, foi necessário converter todas as variáveis apresentadas nas tabelas anteriores para formato decimal e radianos:

TABELA 4.3: Tabela 2A – Conversão de alturas, horas e coordenadas para formato decimal e radianos (latitude e longitude apenas em radianos)

Altura 1 decimal	Altura 1 radianos	Altura 2 decimal	Altura 2 radianos	Hora 1 decimal	Hora 2 decimal	Latitude radianos	Longitude radianos
63.5000	1.1083	63.4500	1.1074	12.3711	12.7294	0.2654	0.7275
63.6167	1.1103	63.5000	1.1083	12.4328	12.6794	0.2654	0.7275
63.5667	1.1094	63.5667	1.1094	12.4972	12.6250	0.2654	0.7275
64.9833	1.1342	64.9833	1.1342	12.3858	12.7147	0.2907	0.7275
65.0000	1.1345	65.0333	1.1350	12.4306	12.6489	0.2907	0.7275
65.0167	1.1348	65.0667	1.1356	12.4669	12.6153	0.2907	0.7275
65.3000	1.1397	65.2333	1.1385	12.3742	12.7317	0.2957	0.7276
65.3000	1.1397	65.2500	1.1388	12.4436	12.6761	0.2957	0.7276
65.3333	1.1403	65.3000	1.1397	12.4706	12.6306	0.2957	0.7276
65.4833	1.1429	65.5333	1.1438	12.3647	12.6883	0.3008	0.7276
65.5500	1.1441	65.5667	1.1444	12.4114	12.6392	0.3008	0.7276
65.5833	1.1446	65.6167	1.1452	12.4464	12.6136	0.3008	0.7276

TABELA 4.4: Tabela 2B – Declinação e equação do tempo em formato decimal e radianos

Declinação decimal	Declinação radianos	Equação do Tempo decimal
63.5000	1.108284	-0.049167
63.6167	1.110320	-0.049167
63.5667	1.109448	-0.049167
64.9833	1.134173	-0.056944
65.0000	1.134464	-0.056944
65.0167	1.134755	-0.056944
65.3000	1.139700	-0.057778
65.3000	1.139700	-0.057778
65.3333	1.140282	-0.057778
65.4833	1.142900	-0.058889
65.5500	1.144063	-0.058889
65.5833	1.144645	-0.058889

Relativamente aos dados recolhidos a bordo do *NRP Sagres*, elaborou-se a seguinte tabela, estruturada de forma análoga à construída para os dados obtidos em maio no *NRP Andrómeda*. As tabelas e folhas de cálculo utilizadas na organização dos dados, bem como aquelas onde se encontram os cálculos para a aplicação do método com as alturas recolhidas em agosto (*NRP Sagres*), mantêm o mesmo formato das anteriormente apresentadas, diferindo apenas nos valores.

TABELA 4.5: Alturas observadas, horas de observação e posição GPS (graus e minutos)

Altura 1		Altura 2		Hora 1			Hora 2			Latitude		Longitude	
graus	min	graus	min	h	min	s	h	min	s	graus	min	graus	min
50	51	50	57	11	14	34	11	24	37	54	19.9	7	16.7
50	52	50	59	11	15	53	11	20	41	54	19.9	7	16.7
50	54	50	59	11	17	28	11	22	46	54	19.9	7	16.7
50	59	51	2	11	22	46	11	26	56	54	31.5	7	5.9
50	16	50	23	11	11	42	11	16	47	54	31.5	7	5.9
50	19	50	35	11	13	44	11	23	43	54	31.5	7	5.9
50	29	50	41	11	21	41	11	31	12	54	31.5	7	5.9
50	33	50	35	11	25	46	11	35	1	54	19.9	7	16.7
51	1	51	2	11	24	37	11	47	37	54	19.9	7	16.7
51	3	51	3	11	26	56	11	45	32	54	31.5	7	5.9
50	35	50	35	11	31	12	11	43	30	54	31.5	7	5.9
50	33	50	32	11	25	46	11	46	7	54	31.5	7	5.9

Após a conversão das variáveis observadas e auxiliares para formato decimal e radianos, procedeu-se à aplicação da fórmula do método de Littrow. Para esse efeito, foi utilizada uma segunda folha de cálculo, estruturada especificamente com as expressões necessárias à realização dos cálculos e à determinação da longitude.

TABELA 4.6: Tabela 4.5 – Resultados intermédios da aplicação do método de Littrow

$ T_1 - \text{PML} $	$ T_2 - \text{PML} $	$T = T_2 - T_1$	$\frac{1}{2}(P + P')$ (rad)	$\frac{1}{2}(P + P')$ (°)	$(\frac{1}{2}(P + P')) \times 4$ (h)	H. Verd. Bordo	H. Méd. Bordo	H. Méd. GW	Lon. (h)
0,171	0,187	0,09381	0,00074	0,04244	0,00283	24,00283	23,95366	24,55028	0,59662
0,110	0,137	0,06458	0,00227	0,12995	0,00866	24,00866	23,95950	24,55611	0,59661
0,045	0,082	0,03345	0,00358	0,20496	0,01366	24,01366	23,96450	24,56111	0,59661
0,152	0,177	0,08610	0,00011	0,00603	0,00040	24,00040	23,94346	24,55028	0,60682
0,108	0,111	0,05716	0,00266	0,15228	0,01015	24,01015	23,95321	24,53972	0,58651
0,071	0,077	0,03883	0,00229	0,13144	0,00876	24,00876	23,95182	24,54111	0,58929
0,170	0,188	0,09359	0,00173	0,09914	0,00661	24,00661	23,94883	24,55292	0,60408
0,101	0,132	0,06087	0,00355	0,20332	0,01355	24,01355	23,95578	24,55986	0,60408
0,074	0,086	0,04189	0,00111	0,06375	0,00425	24,00425	23,94647	24,55056	0,60408
0,172	0,152	0,08472	0,00306	0,17552	0,01170	23,98830	23,92941	24,52653	0,59712
0,125	0,103	0,05963	0,00339	0,19426	0,01295	23,98705	23,92816	24,52528	0,59712
0,090	0,077	0,04378	0,00215	0,12342	0,00823	23,99177	23,93288	24,53000	0,59712

Na tabela pode se verificar as operações matemáticas para obter a longitude em tempo, a primeira expressão  $|T_1 - \text{PML}|$  e  $|T_2 - \text{PML}|$  calcula em módulo a diferença entre cada uma das observações e a hora da passagem meridiana, ou seja permite saber a distância temporal entre cada altura e o meio dia solar, se a distância mais curta for da primeira altura, a observada antes da passagem meridiana, terá que se somar 24 horas ao valor calculado enquanto que se a segunda distância for a mais pequena terá que se subtrair o valor calculado a 24.

Em seguida é calculada a diferença temporal entre as duas observações  $T = T_2 - T_1$  (**radianos**), uma vez que está em número decimal é multiplicada por 15 para ser obtida em graus e poder ser convertida para radianos pelo Excel.

Depois, é aplicada a fórmula desenvolvida por Charles de Littrow:

$$\frac{1}{2}(P + P') = \left| \arcsin \left( \frac{\sin \left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{a_2 + a_1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{T}{2} \right) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta} \right) \right|$$

Obtém-se assim o valor de  $\frac{1}{2}(P + P')$  em radianos, que é posteriormente convertido em graus. Esse valor em graus é então multiplicado por 4, de forma a ser expresso em tempo, em minutos, e por fim, dividido por 60 para ser convertido em horas decimais.

Para se obter a hora verdadeira de bordo é feita a soma ou subtração do valor a 24 horas consoante a distância das duas alturas à passagem meridiana, como referido anteriormente. A esse valor é somado o valor da equação de tempo obtida para o dia no almanque náutico para se obter a hora média de bordo.

Em seguida é calculada a hora média de Greenwich das observações feitas  $\frac{t_1 + t_2}{2}$  e soma-se 12 uma vez que na época, o almanaque fornecia os dados em tempo

astronómico, que se começava a contar do meio-dia e a bordo usava-se o tempo civil, que começa à meia-noite.

Por fim, calcula-se a diferença em módulo entre a hora média de Greenwich e a hora média de bordo, para obter o valor da longitude em tempo.

As últimas colunas desta folha de cálculo foram utilizadas para converter a longitude obtida em graus, minutos e segundos, formato habitualmente utilizado. No final, a longitude calculada através do método de Charles de Littrow foi comparada com a longitude registada por GPS no instante da passagem meridiana, o que permitiu determinar o erro associado à posição obtida pelo método. Como se verifica na seguinte tabela:

TABELA 4.7: Tabela 4.4 – Longitude obtida e erro associado (*NRP Andrómeda*)

Longitude			Erro	
Graus	Min	Seg	Graus	Min
8	40	41	0	15,2
7	58	46	0	57,1
9	9	15	0	14,4
9	6	30	0	2,3
8	36	21	0	27,9
8	13	41	0	51,5
8	45	35	0	17,4
8	47	1	0	15,0
8	40	35	0	22,4
9	7	28	0	11,9
8	55	29	0	0,120
9	16	28	0	20,9

TABELA 4.8: Longitude obtida e erro associado (*NRP Sagres*)

Longitude			Erro	
graus	min	seg	graus	min
7	10	28	0	6.2
7	18	57	0	1.2
7	16	57	0	0.7
7	3	43	0	14.0
6	44	52	0	22.0
6	52	42	0	14.2
6	57	8	0	8.8
7	35	51	0	29.0
7	27	21	0	9.4
7	31	32	0	13.8
7	40	45	0	33.9
7	6	51	0	0.1

Uma primeira conclusão a retirar desta análise é que o número de observações disponíveis constitui uma amostra reduzida, o que limita a avaliação dos erros associados. Ainda assim, é possível verificar que a quantidade de resultados com erro inferior a 20 minutos é superior à daqueles com erro superior a esse valor. Esta distribuição sugere que, apesar de o método apresentar uma precisão aceitável em diversas situações, também é suscetível a desvios consideráveis. Importa recordar que o processo de Littrow é, desde a sua origem, caracterizado como um método aproximado para determinação da posição, pelo que a existência de algum erro é expectável. Ainda assim, os resultados obtidos sugerem que o método poderá ser particularmente sensível a pequenas imprecisões nas alturas observadas ou nos instantes registados, o que contribui para variações significativas nos valores da longitude calculada.

Em alguns casos, o erro é particularmente reduzido, como no par correspondente a uma longitude de  $8^{\circ}55'29''$ , em que o desvio foi praticamente nulo (0,120 minutos). Por outro lado, também se identificaram situações com erros mais expressivos, nomeadamente 57,1 minutos, indicando uma possível menor qualidade na observação ou condições menos favoráveis no momento da medição.

Como referido anteriormente, com os dados recolhidos a bordo do *NRP Sagres* procurou aplicar-se o método proposto inicialmente por Charles de Littrow,

recorrendo a pares de alturas observadas antes da passagem meridiana. A análise dos resultados obtidos evidencia que estes diferem pouco dos verificados para os pares constituídos por uma altura antes e outra depois da meridiana. Contudo, na presente amostra, composta apenas por oito pares de alturas, observa-se que os erros não atingem valores tão elevados, sendo o maior registado de 29,0 minutos de longitude.

Foi elaborada a seguinte tabela para melhor se visualizar a distribuição dos erros:

TABELA 4.9: Distribuição dos erros em intervalos

Intervalo de erro (min)	#	%
$0 < \text{erro} < 5$	5	21
$5 \leq \text{erro} < 10$	3	13
$10 \leq \text{erro} < 20$	8	33
$20 \leq \text{erro}$	8	33
<b>Total</b>	<b>24</b>	<b>100</b>

Após a análise dos erros associados aos dados recolhidos durante o embarque, e com o objetivo de compreender melhor a origem desses desvios, recorreu-se ao cálculo das alturas verdadeiras do Sol a partir da fórmula de determinação da altura aplicada à posição real obtida por GPS. Este procedimento fornece a altura exata para a posição considerada, sem erros de observação, permitindo uma comparação com as alturas obtidas experimentalmente. Dessa forma, é possível avaliar o impacto de pequenas imprecisões no desempenho do método de Littrow, uma vez que as alturas reais calculadas não apresentam erro. Importa salientar que este cálculo foi realizado apenas para as alturas observadas no embarque a bordo do *NRP Andrómeda*.

O método calcula as alturas através da seguinte expressão:

$$a = \arcsin(\sin \varphi_{\text{GPS}} \cdot \sin \delta + \cos \varphi_{\text{GPS}} \cdot \cos \delta \cdot \cos(\text{LHA}))$$

- $a$  — altura verdadeira do Sol;
- $\varphi_{\text{GPS}}$  — latitude obtida pelo GPS;
- $\delta$  — declinação do Sol;

- LHA — ângulo horário local.

Com as alturas verdadeiras obtidas através da folha de cálculo (a partir da posição GPS) obteve-se a seguinte tabela:

TABELA 4.10: Análise do erro — cálculo com alturas verdadeiras (em graus e minutos)

<b>Erro</b>	
Graus	Min
0	2,1
0	2,1
0	2,1
0	1,9
0	16,3
0	13,8
0	1,7
0	1,7
0	1,7
0	1,8
0	1,8
0	1,8

A análise dos erros apresentados na Tabela 4.10, obtidos com base nas alturas verdadeiras calculadas teoricamente a partir da posição GPS, demonstra que os desvios em relação à posição de referência são extremamente reduzidos, situando-se quase sempre abaixo dos 2 minutos, com exceção de dois valores próximos dos 15 minutos de erro. Este resultado permite concluir que o método de Littrow, quando alimentado com alturas calculadas sem influência de erro observacional, é capaz de fornecer resultados com elevada precisão. Assim, torna-se evidente que os erros mais significativos detetados anteriormente estão maioritariamente associados a imprecisões na medição das alturas com o sextante. Esta constatação reforça a sensibilidade do método às variáveis de entrada mas indica que tem bastante precisão quando bem aplicado.

Através dos resultados obtidos e devido à amostra reduzida de pares de alturas solares, não foi possível distinguir se o método fornecia maior rigor para intervalos mais curtos entre observações ou para intervalos maiores entre as mesmas.

Os erros verificados nas observações podem estar associados a um conjunto de fatores. Entre os mais comuns encontra-se a utilização incorreta do sextante, seja por falhas na leitura, postura inadequada ou mau alinhamento do limbo inferior do sol com o horizonte. Outro aspeto é a verificação do erro de índice, que, se não for correta, introduz um desvio sistemático em todas as medições. Para além disso, o próprio instrumento pode não estar devidamente afinado, uma possibilidade, especialmente em equipamentos armazenados sem os devidos cuidados. O balanço do navio, constitui igualmente um fator de erro pois dificulta a estabilização do sextante, comprometendo a exatidão da leitura. Pode haver também erros na determinação ou registo do instante da observação, como lapsos na leitura do cronómetro ou na identificação da altura exata, contribuem também para erros nos resultados. Por último, o movimento do navio apesar de ser ignorado devido à proximidade temporal com que os pares de alturas são observados constitui um pequeno erro, por exemplo, a uma velocidade de três nós o navio em 20 minutos (um dos intervalos considerados) desloca-se uma milha. No caso concreto deste embarque, o navio deslocava-se a velocidades baixas, contudo era no sentido este-oeste e oeste-este, fazendo variar maioritariamente a longitude.

# Conclusão

O principal objetivo da presente dissertação foi estudar e aplicar o método astronómico proposto por Charles de Littrow, com o intuito de avaliar a sua viabilidade e precisão enquanto alternativa para o cálculo da longitude em navegação oceânica. Trata-se de um processo desenvolvido no século XIX, pensado como um método prático, simples e aproximado que permitiria ao navegador obter a longitude com base em duas alturas do Sol observadas perto da passagem meridiana.

Ao longo do trabalho foi realizada uma abordagem teórica e histórica que permitiu compreender o enquadramento do método de Littrow, bem como os fundamentos trigonométricos e operacionais que o sustentam. A simplicidade do método, tanto no plano matemático como na execução prática, constitui o seu principal atractivo, especialmente em contextos onde os recursos disponíveis são limitados.

Para testar a precisão do processo, realizou-se um embarque, durante o qual foram recolhidas alturas do sol através de um sextante, sendo registada a Hora Média de Greenwich de cada observação. O objetivo era recolher pares de observações próximas do meio dia solar com diferentes intervalos de tempo, de forma a perceber não só a aplicabilidade do método, como também identificar se existe intervalo de tempo entre alturas que conduza a resultados mais precisos. A recolha foi limitada por fatores operacionais da missão e pelas condições meteorológicas, tendo sido possível obter dados completos em apenas quatro dias, com três pares de observações em cada um deles. Adicionalmente, recorreu-se ainda a alturas recolhidas no *NRP Sagres*, o que permitiu aumentar a dimensão da amostra.

Os dados recolhidos foram tratados numa folha de cálculo desenvolvida em Microsoft Excel, onde se aplicaram as fórmulas do método e se automatizou os cálculos. A utilização desta ferramenta permitiu não só reduzir a margem de erro de cálculo humano, como também para facilitar a organização e visualização dos resultados.

A análise dos dados revelou que, embora o método de Littrow atinja em alguns casos resultados com erros bastante reduzidos, inferiores a 5 minutos, os valores de erro observados não foram uniformes. Em cerca de um terço dos casos,

o erro ultrapassou os 20 minutos, o que, numa situação prática de navegação, pode não ser razoável. Esta variabilidade sugere que o método é sensível a pequenos erros nas variáveis de entrada: desde a leitura do sextante à estabilidade do navio.

Para validar os resultados obtidos, compararam-se as longitudes calculadas com as coordenadas GPS recolhidas no momento da passagem meridiana. Esta comparação permitiu aferir o erro associado a cada par de observações, com o objetivo de verificar a eficácia do método. Os desvios variaram entre valores baixos, aceitáveis para navegação astronómica, e erros significativos, reforçando a importância do rigor na execução do processo.

Com o objetivo de verificar a influência dos erros observacionais, foram ainda calculadas alturas verdadeiras do Sol, determinadas teoricamente a partir da posição GPS, as quais não apresentam erro observacional. A comparação entre os erros obtidos com alturas observadas e os obtidos com alturas teóricas permitiu concluir que quando se utilizam alturas calculadas com base em parâmetros precisos, os erros praticamente desaparecem. Este resultado confirma que a maior parte das imprecisões se deve, de facto, às dificuldades práticas na execução da observação, e não a falhas no método.

A aplicação do método de Littrow demonstrou, portanto, que, apesar de ser um processo teórico sólido, é relativamente sensível a pequenos desvios nas variáveis de entrada. A sua utilidade prática depende essencialmente do rigor na medição das alturas e no controlo do tempo. Ainda assim, é de sublinhar que, mesmo com erros consideráveis em algumas situações, o método revelou capacidade de fornecer resultados com exatidão aceitável.

De um ponto de vista mais prático, este trabalho mostra que os métodos clássicos de navegação astronómica, como o de Littrow, podem continuar a ter utilidade como alternativa em situações onde os sistemas eletrónicos, como o GPS, estejam indisponíveis ou sujeitos a interferências (jamming) ou falhas técnicas. Em cenários operacionais, o domínio de processos independentes e não eletrónicos representa uma importante mais-valia.

A maior limitação deste estudo reside na dimensão da amostra. Ainda que os resultados sejam coerentes, o número reduzido de observações não permite uma análise suficientemente robusta para se tirarem conclusões definitivas. Por esse motivo, propõe-se como sugestão de trabalho futuro a realização de um embarque com o objetivo específico de aumentar significativamente o número de observações. Com mais dados recolhidos em diferentes latitudes, condições meteorológicas e horários de

observação, seria possível aprofundar a compreensão do comportamento do método, validar de forma mais abrangente os intervalos ideais entre observações e verificar a consistência dos erros registados.

Em suma, esta dissertação demonstrou que o método de Littrow é exequível, historicamente relevante e conceptualmente sólido. Com rigor nas observações, pode revelar-se uma ferramenta útil e precisa.



# Bibliografia

- Albuquerque, Luís de. *Estudos de História*. 1975.
- Albuquerque, Luís Mendonça de. *Curso de História da Náutica*. Coimbra: Livraria Almedina, 1972.
- Bowditch, Nathaniel. *American Practical Navigator an epitome of navigation*. Springfield, Virginia: National Geospatial-Intelligence Agency, 2019.
- Canas, António Costa. «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal Contributo de Monteiro da Rocha». Escola Naval.
- . *Naufágios e Longitude*. Lisboa: Comissão Cultural da Marinha, 2003. ISBN: 972-80004-55-9.
- Leitão, João Peregrino. *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*. Lisboa: Typ. da Sociedade Typographica Franco Portugueza, 1865.
- Littrow, M. Charles de. *Sur une Nouvelle Méthode pour Déterminer en Mer L'Heure et la Longitude par Les Différences de Hauteurs Circumméridiennes*. Vienne: Charles Gerold Fils, 1868.
- Queirós, Ana Filipa Teorgas. ««A Navegação Astronómica antes do Método Marq Saint-Hilaire: Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha», 2022.
- Trigo, João Tomás Ramalho Pires. ««Cálculo da Posição pelo Método de Sumner: Método de Sumner». Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha», 2024.