

# APLICAÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLO A UMA ESTENOSE IDEALIZADA

*Telma Guerra*

Escola Superior de Tecnologia do Barreiro (IPS)  
Rua Américo da Silva Marinho  
2839-001 Lavradio, Portugal  
e-mail: [telma.guerra@estbarreiro.ips.pt](mailto:telma.guerra@estbarreiro.ips.pt)

*Jorge Tiago*

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa  
Avenida Rovisco Pais 1049-001 Lisboa, Portugal  
e-mail: [jftiago@math.ist.utl.pt](mailto:jftiago@math.ist.utl.pt)

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos, de forma sucinta, simulações numéricas de fluidos, de problemas do tipo Assimilação de Dados numa abordagem variacional. Apresentamos resultados aplicados à Hemodinâmica considerando uma geometria tridimensional na forma de uma estenose idealizada e recuperamos o perfil da velocidade do sangue nesta geometria.

**Abstract:** In this work, numerical simulations of fluids of Data Assimilation problems in a variational approach are briefly presented. We obtain some results applied to Hemodynamics in a 3D idealized stenosis and we recover the blood velocity profile in this geometry.

**palavras-chave:** Controlo óptimo; Hemodinâmica; Equações de Navier-Stokes generalizadas.

**keywords:** Optimal control; Hemodynamics; Generalized Navier-Stokes equations.

## 1 Introdução

As simulações numéricas de fluidos, e em particular aplicadas à circulação do sangue, aliadas ao avanço nas técnicas de imagiologia, constituem uma poderosa ferramenta na prevenção de doenças e eventualmente no seu tratamento. A introdução de dados médicos reais nas simulações vem torná-las mais realistas e mais precisas do ponto de vista das aplicações. Este procedimento em que se inclui dados conhecidos nas simulações tem o nome de Assimilação de Dados (DA) e, ainda que recentes, existem agora alguns trabalhos que aplicam estas técnicas à modelação de fluidos [1, 2, 3]. Neste

trabalho consideramos dados gerados artificialmente através da resolução das equações que modelam o fluido, as equações de Navier-Stokes, que são equações diferenciais às derivadas parciais.

Apresentamos um funcional de custo diferente do habitual que contém um termo relacionado com a componente tangencial da tensão na parede do vaso (WSS) com a forma de uma estenose idealizada tridimensional.

## 2 Descrição do Problema

O objectivo é obter soluções numéricas que nalgumas partes do domínio ( $\Omega_{part}$ ) são iguais, a menos de um determinado erro pré-definido, aos dados observados. Para isso definimos um critério a otimizar, o que corresponde a resolver um problema de controlo. Neste trabalho consideramos como critério a velocidade do sangue. Definimos o seguinte funcional de custo que inclui um termo para a velocidade, representada por  $\mathbf{y}$ , outro para o WSS, representado por  $\mathbf{w}$  e um termo regularizador para o controlo:

$$\min \mathbf{J}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = w_1 \int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2 dx + w_2 \int_{\Gamma_{\Omega_{part}}} |\mathbf{w} - \mathbf{w}_d|^2 ds + w_3 \int_{\Gamma_{in}} |\nabla \mathbf{u}|^2 ds, \quad (1)$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} -div \tau + \rho(\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} + \nabla p = 0 & \text{em } \Omega \\ div \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Gamma_{wall} \\ \mathbf{y} = \mathbf{u} & \text{em } \Gamma_{in} \\ (-p\mathbf{I} + \tau) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{em } \Gamma_{out} \end{cases} \quad (2)$$

A variável  $p$  representa a pressão, e os parâmetros  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  dos termos do funcional de custo, são escolhidos de acordo com critérios empíricos. As variáveis  $\mathbf{y}_d$  e  $\mathbf{w}_d$  representam os dados para a velocidade e para o WSS, respectivamente. O conjunto  $\Gamma_{\Omega_{part}}$  é a fronteira de  $\Omega_{part}$ . O tensor das tensões viscosas  $\tau$  é dado por  $\tau = 2\mu(D\mathbf{y})D\mathbf{y}$  onde  $\mu$  representa a viscosidade que é aqui definida usando o modelo generalizado de Cross  $\mu(\eta) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (\lambda\eta)^b)^a}$ . Neste modelo  $\mu_0$ ,  $\mu_\infty$ ,  $\lambda$ ,  $a$  e  $b$  são constantes e  $D\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{y} + (\nabla\mathbf{y})^T)$ . A variável  $\mathbf{u}$  representa o controlo como função definida na fronteira de entrada.

Para resolver o problema de controlo numericamente, primeiro discretizamos e depois optimizamos. Começamos assim por usar o Método dos

elementos finitos com elementos do tipo  $P1 - P1$  estabilizados, com os espaços funcionais adequados para as funções teste e de forma, obtendo o problema discreto

$$\min J(Y, U) = w_1 \|Y - Y_d\|_{N_y}^2 + w_2 \mathbf{W}(Y) + w_3 \|U\|_{N_u}^2 \quad (3)$$

sujeito a

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(Y) + \mathbf{G}(Y)Y + B^T P = F \\ BY = 0 \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\|\cdot\|_{N_y}$  e  $\|\cdot\|_{N_u}$  são normas especiais que resultam da discretização. Para este efeito utilizámos o programa COMSOL Multiphysics.

De seguida é utilizado o método SQP (sequencial quadratic programming) implementado na biblioteca SNOPT para resolver o problema (3)-(4). Este é um problema de optimização não linear, em dimensão finita, cuja solução é obtida através da resolução de sub-problemas de programação quadrática e cujas restrições são linearizações das restrições originais.

### 3 Resultados Numéricos para a Estenose

Consideramos uma estenose idealizada de comprimento  $L = 10R$  com  $R = 3.162 \text{ mm}$ , como podemos observar na Figura 1, à esquerda.

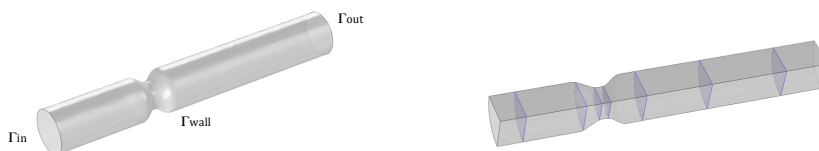


Figura 1: Esquerda: representação do domínio computacional da estenose. Direita: representação das secções,  $\Omega_{part}$ .

As simulações numéricas foram efectuadas em  $1/4$  da geometria, por se tornarem menos exigentes do ponto de vista computacional, e os resultados foram estendidos ao restante domínio por simetria. Os dados conhecidos considerados correspondem à região representada pelas secções que se observam na Figura 1 à direita. Para gerar a solução da qual se extraem os dados, resolvemos as equações que modelam o movimento do fluido com condição de fronteira na entrada, no sentido longitudinal da geometria (correspondente ao eixo dos  $z$ ) dada por  $\mathbf{y} = U_m \left( 1 - \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right)^2 \right)$  (condição

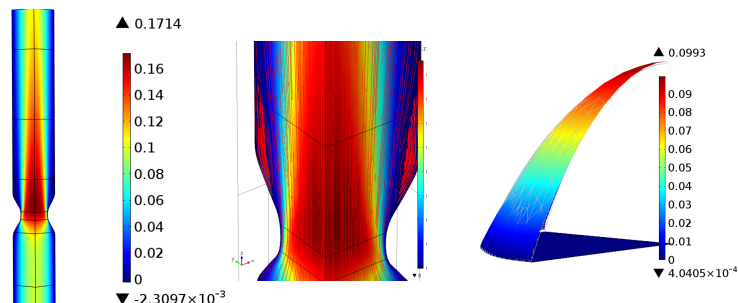


Figura 2: Esquerda e centro: componente longitudinal da velocidade pretendida. Direita: comparação do controlo obtido com o perfil original.

parabólica de Poiseuille). Aqui  $U_m = 0.0993$  ( $m/s$ ) corresponde à velocidade máxima na entrada. A malha foi construída com 336500 graus de liberdade para a velocidade, sendo esta também utilizada para o problema de controlo. Na Figura 2, à direita, podemos ver como o controlo obtido aproximou bem o perfil utilizado para gerar os dados (à esquerda). Na Tabela 1 podemos ver a precisão da solução obtida.

Norma da solução desejada $y_d$	Erro Absoluto $E_a$	Erro Relativo $E_r$	Custo Final $J$
$3.2 \times 10^{-5}$	$9.73 \times 10^{-8}$	0.003	$1.61 \times 10^{-5}$

Tabela 1: Precisão da solução obtida relativamente à solução desejada, para o problema da Estenose. Parâmetros  $(w_1, w_2, w_3) = (10^4, 10^4, 10^{-3})$ .  $E_a = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2$  e  $E_r = E_a / \|\mathbf{y}_d\|$ .

## Referências

- [1] M. D'Élia, M. Prego, A. Veneziani, “A Variational Data Assimilation Procedure for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Hemodynamics”, *J. of Sci. Comp.*, Vol. 52(2), (2012), pp. 340-359.
- [2] T. Guerra, J. Tiago, A. Sequeira, “Optimal Control in Blood Flow Simulations”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 64, (2014), pp. 57-69.
- [3] T. Guerra, “Controlo Óptimo de Fluidos Não Newtonianos”, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Portugal, 2014.