



# ESCOLA NAVAL

ta sante de bi-faire



**Pedro Miguel Sampaio Pereira**

*Railgun*

*Estudo do funcionamento de um sistema railgun*

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais,  
na especialidade de Engenharia Naval Ramo de Armas e Eletrónica**



**Alfeite**

**2016**





# ESCOLA NAVAL

talantõe & biẽ-faire



**Pedro Miguel Sampaio Pereira**

## *Railgun*

### *Estudo do funcionamento de um sistema railgun*

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia Naval Ramo de Armas e Eletrónica**

**Orientação de:** Professor Doutor Mário Gatta

**Coorientação de:** Professora Filomena Teodoro

O Aluno Mestrando,

O Orientador,

---

ASPOF EN-AEL Sampaio Pereira

---

Professor Doutor Mário Gatta

**Alfrite**

**2016**



*Hoje serei melhor que ontem e amanhã serei melhor que hoje.*

(Ribeiro de Carvalho)



## **Dedicatória**

Aos meus pais, Fernando Rangel e Margarida Sampaio, pelo apoio incondicional durante estes cinco anos, principalmente nos de incerteza, mostrando sempre que é possível lutar pelos objetivos de uma vida.

Ao meu irmão, João Pereira, por ser o modelo de pessoa que sigo cegamente e pela coragem que me transmitiu ao longo da minha vida. Sem ti os meus sonhos ainda seriam sonhos.

À mulher da minha vida, Joana Vieira, por tornar tudo isto possível, obrigado por seres o meu porto seguro.



## **Agradecimentos**

Ao Professor Mário Gatta pela oportunidade de realizar este trabalho ao lado de alguém com tamanho conhecimento e paixão pela sua profissão. Agradeço ainda a sua disponibilidade para discutir os problemas que surgiram e a sua companhia nas longas sessões de laboratório. Este trabalho, que começou por ser um mar de incertezas, deu-me um prazer inigualável de ultrapassar, espero que tenha apreciado tanto como eu esta aventura. Espero que esta dissertação vá ao encontro com as suas expectativas e que lhe seja motivo de orgulho.

À Joana Vieira pela disponibilidade e força que me deste no desenvolvimento deste documento, um enorme obrigado pela ajuda nas revisões que fizemos a este documento.

Ao Professor Vítor Lobo e ao CINAV (Centro de Investigação Naval) pelo financiamento que tornou possível este projeto ver a luz do dia.

Ao Departamento de Armas e Eletrónica que prontamente me proporcionou um local para efetuar todos os trabalhos de laboratório, e em especial ao Eng. CFR Ribeiro de Correia pelos esclarecimentos que me prestou em algumas questões de eletrónica.



## Resumo e palavras-chave

Com a presente evolução das *railguns* na Marinha dos Estados Unidos da América e possível instalação em seus navios num futuro muito próximo, outras marinhas se seguirão. Creio que será do interesse da Marinha Portuguesa acompanhar esta evolução tecnológica, considerando as vantagens que advém da adoção deste tipo de armamento.

Neste documento são abordados os princípios básicos subjacentes ao funcionamento da *railgun*, com principal foco nas questões eletrodinâmicas. Pretende-se adquirir familiaridade com este novo tipo de armamento através do estudo crítico dos seus princípios de funcionamento.

O princípio básico de funcionamento de uma *railgun*, à primeira vista, parece bastante simples, à luz da aplicação imediata da expressão da força de Lorentz sobre um condutor percorrido por corrente elétrica. No entanto, tudo se torna mais complicado no caso de uma variação rápida dos parâmetros envolvidos (regime transitório), que exige uma análise mais aprofundada do comportamento da corrente, campos elétrico e magnético, e todos os materiais envolvidos neste sistema.

Este trabalho envolveu ainda a construção de duas *railguns*, uma primeira de dimensões mais pequenas para ganhar familiaridade com o sistema, e uma última de dimensões de laboratório na qual foram feitos vários disparos para testar diferentes tipos de material e dimensões de projétil.

Em suma, é demonstrado neste documento uma análise, no domínio do tempo, da distribuição espacial do campo eletromagnético, corrente elétrica e conseqüente fluxo de energia, complementados por uma parte experimental.

**Palavras-chave:** *Railgun*, campo elétrico, campo magnético, vetor de Poynting e energia.



## **Abstract and keywords**

With the present evolution of railguns of the United States of America Navy and the likely installation in their ships in a near future, other navies will follow. I believe that it is the interest of Portuguese Navy to pursue this technological evolution, evaluating the advantages of the adoption of this kind of weapon.

In this document it is addressed the basic principles underlying the function of the railgun focusing in the electrodynamic questions. It is intended to acquire familiarity with this new kind of weapon through the critical study of his functional principles.

At first glance, the basic principle of operation of a railgun may seem simple in the light of the immediate application of the Lorenz force in a conductor driven by current. However, everything becomes more complicated in the case of a rapid change of the parameters involved (transitional regime), which requires a more thorough analysis of current behavior, electric and magnetic fields, and all materials involved in this system.

This project also involved the construction of two railguns, initially a smaller size one to gain familiarity with the system, and lastly a laboratory proportion one in which was performed and analyzed a number of tests with different materials and projectile sizes.

In short, it is shown in this paper an analysis in the time domain, of the spatial distribution of the electromagnetic field, electrical current and energy flow complemented by an experimental part.

**Keywords:** railgun, electric field, magnetic field, Poynting vector and energy.



# Índice geral

<b>Dedicatória</b> .....	vii
<b>Agradecimentos</b> .....	ix
<b>Resumo e palavras-chave</b> .....	xi
<b>Abstract and keywords</b> .....	xiii
<b>Índice geral</b> .....	xv
<b>Índice de figuras</b> .....	xix
<b>Índice de tabelas</b> .....	xxv
<b>Índice de equações</b> .....	xxvii
<b>Lista de abreviaturas, siglas e acrónimos</b> .....	xxxiii
<b>Introdução</b> .....	1
<b>1. Princípios de uma railgun</b> .....	3
1.1. Funcionamento básico .....	3
1.2. Constituição de uma <i>railgun</i> .....	3
1.3. Modelos de <i>railguns</i> .....	5
1.3.1. Railgun convencional .....	5
1.3.2. Augmented railgun (Multi-carris) .....	7
1.3.3. <i>Railgun</i> coaxial .....	7
1.4. Fontes de alimentação .....	8
1.5. Problemática nos sistemas <i>railgun</i> .....	9
1.5.1. Escavamento ou <i>Gouging</i> .....	10
1.5.2. Arcos de corrente ou <i>Arcing</i> .....	11
1.5.3. Excesso de depósitos .....	12
<b>2. Campo eletromagnético em redor de circuitos</b> .....	15
2.1. As cargas de superfície .....	15

2.1.1. Potencial num circuito RC .....	16
2.1.2. Fluxo de energia .....	19
2.1.3. Manutenção da corrente dentro de um condutor .....	24
2.2. Visualização do vetor de Poynting .....	29
<b>3. Caracterização do campo eletromagnético em railguns .....</b>	<b>33</b>
3.1. Caso eletrostático .....	33
3.1.1. Campo elétrico .....	33
3.2. Caso eletrodinâmico .....	35
3.2.1. Sistema de carris.....	35
3.2.2. Projétil .....	64
<b>4. Carga e descarga de condensadores .....</b>	<b>71</b>
4.1. Fase de carga.....	71
4.1.1. Tempo de carregamento .....	75
4.2. Fase de descarga .....	78
4.2.1. Estudo comportamento da resistência durante a descarga .....	80
4.3. Otimização do banco de condensadores .....	83
<b>5. Parte experimental .....</b>	<b>87</b>
5.1. Medidas de segurança .....	87
5.2. Railgun com carris de alumínio .....	88
5.2.1. Detalhes dos disparos .....	88
5.2.2. Danos no sistema.....	92
5.2.3. Análise dos resultados e lições aprendidas .....	92
5.3. Railgun com carris de cobre .....	93
5.3.1. Detalhes dos disparos .....	95
5.3.2. Danos no sistema.....	100
5.3.3. Análise dos resultados e lições aprendidas .....	102

<b>Conclusão .....</b>	<b>105</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>109</b>
<b>Anexo 1 - Circuitos analisados por Muller.....</b>	<b>115</b>
<b>Anexo 2 – Descrição do lubrificante condutor à base de prata utilizado na <i>railgun</i> .....</b>	<b>116</b>
<b>Anexo 3 – Foto da garrafa de ar comprimido utilizado na <i>railgun</i> .....</b>	<b>117</b>
<b>Apêndice A - Cálculos efetuados para chegar à expressão do potencial numa linha de transmissão.....</b>	<b>119</b>
<b>Apêndice B – Campo elétrico no projétil.....</b>	<b>125</b>
<b>Apêndice C – Código Matlab utilizado para traçar linhas equipotenciais e fluxos de campos elétrico, magnético e vetor de Poynting .....</b>	<b>126</b>
<b>Apêndice D – Código Matlab utilizado para a construção dos gráficos do andamento do vetor potencial (A) e sua derivada (<i>dAdt</i>) .....</b>	<b>129</b>
<b>Apêndice E – Código Matlab utilizado para traçar o andamento de <math>\sigma</math> (densidade de cargas de superfície) ao longo de <math>\varphi</math>.....</b>	<b>133</b>



## Índice de figuras

<b>Figura 1.1</b> - Montagem da segunda railgun construída nesta tese. Legenda: 1 – Carris paralelos; 2 – Banco de condensadores (Fonte de Alimentação); 3- Interruptor. ....	4
<b>Figura 1.2</b> – Esquema da interação do campo magnético $B$ com a corrente que flui no projétil.....	4
<b>Figura 1.3</b> - À esquerda um dos protótipos que vai ser testado no navio destroyer “Zumwalt” pertencente à Marinha dos Estados Unidos da América. À direita um esquemático de uma railgun convencional que utiliza um sabot para fechar o contacto elétrico. ....	6
<b>Figura 1.4</b> - Sabot a separar-se do projétil após a saída dos carris. Imagem retirada de um vídeo divulgado pela Marinha dos Estados Unidos.....	6
<b>Figura 1.5</b> - Esquema de uma Augmented Railgun em que a corrente passa pelos carris exteriores criando um campo magnético mais intenso entre os carris interiores. ....	7
<b>Figura 1.6</b> - Arquitetura da railgun coaxial. A azul mostra o percurso da corrente, saindo da fonte, atravessando cilindro interior, o projétil e a voltar pelo cilindro exterior. Da interação do campo magnético e da corrente a atravessar o projétil resulta a Força de Lorentz (cor vermelha) na direção paralela aos carris, acelerando o projétil (cor castanha). ....	8
<b>Figura 1.7-</b> Escavamento em carris de cobre. A seta a preto indica o sentido do movimento.....	10
<b>Figura 1.8</b> - Danos efetuados pelos arcos na railgun construída pela PowerLabs. ....	12
<b>Figura 1.9</b> - Exemplo de depósito de alumínio verificado na Railgun MK 1.1. ....	13
<b>Figura 2.1</b> - Circuito elétrico com uma bateria ( $C1$ ), interruptor ( $S1$ ) e uma resistência ( $R1$ ).....	16
<b>Figura 2.2</b> - Circuito da figura 2.1, aplicando as linhas equipotenciais descritas em (Muller, 2012).....	17
<b>Figura 2.3</b> - Circuito da Figura 2.1, com o circuito fechado surge uma nova distribuição de cargas. ....	17
<b>Figura 2.4</b> - Comparação do comportamento do campo elétrico na ausência e presença de corrente. ....	19

<b>Figura 2.5</b> - Circuito utilizado por Sefton para explicar a transferência de energia.....	21
<b>Figura 2.6</b> - Uma possível distribuição de cargas de superfície num fio reto. Neste caso o elétron representado com o sinal (-) é puxado pelas cargas positivas concentradas na parte superior do fio. A situação inversa com cargas negativas de superfície também é possível. O campo elétrico (setas vermelhas) é perpendicular às linhas equipotenciais (tracejado). .....	24
<b>Figura 2.7</b> – Distribuição de cargas de superfície num circuito com resistência uniforme. Como é possível observar, quanto mais próximo de cada terminal da bateria, maior é a concentração de cargas, quer positiva quer negativa, consoante o polo da bateria. ....	25
<b>Figura 2.8</b> – Distribuição de cargas numa zona de curvatura do circuito, modelo utilizado por Sefton. ....	25
<b>Figura 2.9</b> - Ilustração de zonas de curvatura do mesmo circuito e a sua respetiva distribuição de cargas. ....	26
<b>Figura 2.10</b> - Distribuição de cargas semelhante a um quadripolo em torno de uma zona de curvatura, figura utilizada por Muller. As setas apontam na direção do campo elétrico. Na figura está apenas representado o campo elétrico gerado pelas cargas de superfície. ....	27
<b>Figura 2.11</b> – Distribuição de cargas de superfície e configuração do campo elétrico num circuito de resistividade uniforme. Neste circuito foi aplicado o método semiqualitativos de Muller. ....	28
<b>Figura 2.12</b> - Representação do Vetor de Poynting (setas) no exterior de um condutor elétrico cilíndrico de dimensões infinitas. ....	29
<b>Figura 3.1</b> - Condutor cilíndrico de raio $R$ (preto), superfície de Gauss de raio $a$ (castanho) e $ds$ um elemento de superfície. ....	34
<b>Figura 3.2</b> - Dois condutores cilíndricos paralelos carregados simetricamente, ( $\sigma +$ ) à esquerda e ( $\sigma -$ ) à direita. ....	36
<b>Figura 3.3</b> - Condutores paralelos carregados simetricamente, pretende-se calcular o potencial para o ponto $P(x, y)$ .....	37
<b>Figura 3.4</b> - Sistema de dois condutores cilíndricos paralelos percorridos por correntes contrárias e uniformes. ....	39
<b>Figura 3.5</b> - Linhas equipotenciais geradas a partir da Equação 3.25 em $(x, y)$ com $z = 0$ . ....	41

<b>Figura 3.6</b> - Linhas equipotenciais geradas pela Equação 3.25, no plano (x, y) com z = 0.....	42
<b>Figura 3.7</b> - Campo Elétrico de dois cilindros percorridos por correntes contrárias em (x,y) e com z = 0. ....	43
<b>Figura 3.8</b> - Campo Elétrico de dois cilindros, percorridos por correntes contrárias, em (x, z) com y = 0. ....	44
<b>Figura 3.9</b> - Campo Elétrico de dois cilindros, percorridos por correntes contrárias, em (x,z) com y = 0. Este sistema tem como dimensões $R = 0.6m$ e $a = 0.1m$ .....	45
<b>Figura 3.10</b> - Figura qualitativa de uma secção reta de dois cilindros condutores. É visível que existe uma concentração de cargas positivas e negativas na zona de maior proximidade dos condutores.....	46
<b>Figura 3.11</b> - Sistema de coordenadas cilíndricas para cada um dos condutores.....	47
<b>Figura 3.12</b> - Densidade de cargas à superfície do condutor esquerdo. ....	48
<b>Figura 3.13</b> - Sistema de um cilindro percorrido por corrente, decomposto em componentes das coordenadas cartesianas. ....	50
<b>Figura 3.14</b> - Sistema de um cilindro percorrido por corrente, decomposto em componentes das coordenadas cartesianas. Em cima com a corrente a fluir para dentro da folha e em baixo com a corrente a fluir para fora da folha.....	51
<b>Figura 3.15</b> - Campo Magnético exterior de um cilindro condutor percorrido por corrente, à esquerda corrente a fluir para dentro da folha, à direita corrente a fluir para fora da folha. ....	52
<b>Figura 3.16</b> - Vetor de Poynting gerado pela Equação (3.45). A energia segue as linhas as setas vermelhas verticais. ....	55
<b>Figura 3.17</b> - Vetor de Poynting, no plano (x, y) com z = 0, representado pelas setas vermelhas.....	56
<b>Figura 3.18</b> - Contribuição do potencial vetor de um segmento de condutor $dz'$ . Figura adaptada de Jeffimenko (Jackson J. D., 1999). ....	58
<b>Figura 3.19</b> - Potencial vetor gerado pelas Equações (3.65) e (3.66) dentro e fora do condutor respetivamente, com $a=1mm$ . O eixo dos x corresponde à distância ao centro do condutor cilíndrico em metros, y o tempo em segundos e z a magnitude do potencial vetor em volts segundo por metro ( $V \cdot s \cdot m^{-1}$ ). Resistência elétrica $\zeta = 10^{-6} \Omega$ . ....	61

<b>Figura 3.20</b> - $dAdt$ no interior e exterior do condutor percorrido por corrente variável no tempo, com $\zeta = 10^{-6} \Omega$ .....	62
<b>Figura 3.21</b> - $dAdt$ no interior e exterior do condutor, com $\zeta = 10^{-2} \Omega$ .....	63
<b>Figura 3.22</b> - $dAdt$ para dois cilindros percorridos por correntes contrárias, à esquerda a corrente flui para dentro da folha, à direita a corrente flui para fora da folha. Resistência elétrica, $\zeta = 10^{-2} \Omega$ .....	64
<b>Figura 3.23</b> - Sobreposição de 3 campos elétricos referentes às três secções do projétil. ....	67
<b>Figura 3.24</b> - Vetor de Poynting no projétil, no plano $(x, z)$ com $y = 0$ . ....	69
<b>Figura 4.1</b> - Diagrama de um circuito RC. ....	71
<b>Figura 4.2</b> - Curvas de tensão e corrente em função do tempo, respetivamente. ....	73
<b>Figura 4.3</b> - Diagrama do circuito de carregamento dos condensadores.....	74
<b>Figura 4.4</b> - Circuito de carregamento adquirido. Posteriormente este circuito foi adaptado e colocado dentro da caixa de plástico e adicionado um interruptor para efeitos de segurança. ....	74
<b>Figura 4.5</b> - Imagem retirada do osciloscópio durante o carregamento dos condensadores. Esta imagem vai de acordo com a curva teórica esperada na Equação (4.1) e Figura 4.2. ....	76
<b>Figura 4.6</b> - Sinal à saída do circuito de carregamento dos condensadores medido em osciloscópio. ....	77
<b>Figura 4.7</b> - Diagrama de funcionamento de um carregador baseado em retificadores. ....	77
<b>Figura 4.8</b> - Circuito de descarga da railgun. ....	78
<b>Figura 4.9</b> - Curvas de descarga dos condensadores, em cima a curva da tensão em função do tempo Equação (4.26), em baixo a curva da corrente em função do tempo Equação (4.27). ....	80
<b>Figura 4.10</b> - Movimento do projétil numa railgun ao longo dos carris.....	81
<b>Figura 4.11</b> - Esquema da cascata de dependências devido ao aumento da resistência do sistema. ....	81
<b>Figura 4.12</b> - Evolução do aumento de R em função do tempo em comparação com R estático. ....	82
<b>Figura 5.1</b> - Material de proteção utilizado no manuseamento da railgun. ....	87

<b>Figura 5.2</b> - Esferas de aço utilizadas como projéteis na primeira railgun, com os seguintes diâmetros, $D$ , $D_{esquerda} = 2\text{ cm}$ , $D_{centro} = 1\text{ cm}$ e $D_{direita} = 0.5\text{ cm}$ . .....	88
<b>Figura 5.3</b> - À esquerda uma foto antes da descarga e à direita logo após a descarga, de notar que nas zonas negras à volta da esfera existiu deformação dos carris devido a aquecimento excessivo. ....	89
<b>Figura 5.4</b> - Figura qualitativa dos pontos de estrangulamento de corrente, devido a secções de projétil e carris incompatível. ....	89
<b>Figura 5.5</b> - Carris com a zona de contacto, com a esfera, em V. ....	90
<b>Figura 5.6</b> - Testes efetuados com diferentes tensões. À esquerda disparo efetuado com tensão 350V nos condensadores. À direita teste efetuado com uma tensão de 80 V. ....	91
<b>Figura 5.7</b> - Distâncias percorridas pela esfera em função da tensão: linha à esquerda corresponde a 0 V e linha à direita a 350 V. ....	91
<b>Figura 5.8</b> - À esquerda esfera antes dos disparos e à direita esfera após 4 disparos com 350V de tensão. ....	92
<b>Figura 5.9</b> - Comparação do comprimento dos vários projéteis de cobre. De cima para baixo, comprimento, $L = 2.0\text{ cm}$ , $L = 1.8\text{ cm}$ e $L = 0.6\text{ cm}$ . ....	94
<b>Figura 5.10</b> - Câmara não condutora colocada no início dos carris. ....	94
<b>Figura 5.11</b> - À esquerda fisga sem tensão e à direita fisga com tensão. ....	95
<b>Figura 5.12</b> - Imagem capturada durante o primeiro disparo da segunda ronda de testes. ....	96
<b>Figura 5.13</b> - Montagem de condensadores utilizada na terceira e quarta ronda de testes da railgun. ....	97
<b>Figura 5.14</b> - Carris com a massa lubrificante aplicada. ....	98
<b>Figura 5.15</b> - Danos nos carris após a última ronda de disparos, com a massa lubrificante aplicada aos carris. ....	99
<b>Figura 5.16</b> - Danos causados pelo efeito de escavamento do projétil nos carris. ....	100
<b>Figura 5.17</b> - Danos causados pelos arcos de corrente na zona inicial (à direita) do projétil. De notar a semelhança do desgaste causado com os desgastes encontrados noutras railguns (ver Figura 1.7). ....	101
<b>Figura 5.18</b> - À esquerda a geometria adotada pela General Atomics e à direita pelo EM Gun Project. ....	104



## Índice de tabelas

<b>Tabela 1.1</b> - Escala de energia armazenada em diferentes projetos de railguns.....	9
<b>Tabela 3.1</b> - Parâmetros utilizados para construir a Figura 3.23. Para este caso pressupõe-se que não existiu queda de potencial nos carris, ou seja, o potencial nos terminais do condensador é aproximadamente igual ao potencial nos contactos entre carris e projétil. .....	66
<b>Tabela 4.1</b> - Representação da estratégia para descrever o comportamento da resistência e as suas consequências nos restantes parâmetros.....	82
<b>Tabela 5.1</b> - Dados dos resultados obtidos após os quatro conjuntos de disparos da railgun.....	99



## Índice de equações

Equação (1.1).....	3
Equação (1.2).....	3
Equação (1.3).....	5
Equação (1.4).....	5
Equação (2.1).....	18
Equação (2.2).....	18
Equação (2.3).....	18
Equação (2.4).....	18
Equação (2.5).....	19
Equação (2.6).....	20
Equação (2.7).....	20
Equação (2.8).....	23
Equação (2.9).....	23
Equação (2.10).....	23
Equação (2.11).....	23
Equação (2.12).....	23
Equação (2.13).....	24
Equação (2.14).....	27
Equação (3.1).....	34
Equação (3.2).....	34
Equação (3.3).....	34
Equação (3.4).....	35
Equação (3.5).....	35
Equação (3.6).....	35

Equação (3.7).....	36
Equação (3.8).....	36
Equação (3.9).....	37
Equação (3.10).....	37
Equação (3.11).....	37
Equação (3.12).....	37
Equação (3.13).....	38
Equação (3.14).....	38
Equação (3.15).....	38
Equação (3.16).....	38
Equação (3.17).....	38
Equação (3.18).....	38
Equação (3.19).....	38
Equação (3.20).....	38
Equação (3.21).....	39
Equação (3.22).....	39
Equação (3.23).....	39
Equação (3.24).....	40
Equação (3.25).....	40
Equação (3.26).....	42
Equação (3.27).....	43
Equação (3.28).....	46
Equação (3.29).....	46
Equação (3.30).....	47
Equação (3.31).....	47
Equação (3.32).....	48

Equação (3.33).....	48
Equação (3.34).....	49
Equação (3.35).....	49
Equação (3.36).....	49
Equação (3.37).....	50
Equação (3.38).....	50
Equação (3.39).....	50
Equação (3.40).....	50
Equação (3.41).....	52
Equação (3.42).....	53
Equação (3.43).....	53
Equação (3.44).....	53
Equação (3.45).....	54
Equação (3.46).....	57
Equação (3.47).....	57
Equação (3.48).....	57
Equação (3.49).....	57
Equação (3.50).....	58
Equação (3.51).....	58
Equação (3.52).....	58
Equação (3.53).....	59
Equação (3.54).....	59
Equação (3.55).....	59
Equação (3.56).....	59
Equação (3.57).....	59
Equação (3.58).....	59

Equação (3.59).....	59
Equação (3.60).....	59
Equação (3.61).....	60
Equação (3.62).....	60
Equação (3.63).....	60
Equação (3.64).....	60
Equação (3.65).....	60
Equação (3.66).....	60
Equação (3.67).....	60
Equação (3.68).....	61
Equação (3.69).....	62
Equação (3.70).....	62
Equação (3.71).....	65
Equação (3.72).....	65
Equação (3.73).....	65
Equação (3.74).....	65
Equação (3.75).....	65
Equação (3.76).....	66
Equação (3.77).....	66
Equação (3.78).....	66
Equação (3.79).....	66
Equação (3.80).....	68
Equação (4.1).....	71
Equação (4.2).....	71
Equação (4.3).....	72
Equação (4.4).....	72

Equação (4.5).....	72
Equação (4.6).....	72
Equação (4.7).....	72
Equação (4.8).....	72
Equação (4.9).....	72
Equação (4.10).....	72
Equação (4.11).....	72
Equação (4.12).....	72
Equação (4.13).....	73
Equação (4.14).....	73
Equação (4.15).....	74
Equação (4.16).....	74
Equação (4.17).....	74
Equação (4.18).....	78
Equação (4.19).....	78
Equação (4.20).....	78
Equação (4.21).....	79
Equação (4.22).....	79
Equação (4.23).....	79
Equação (4.24).....	79
Equação (4.25).....	79
Equação (4.26).....	79
Equação (4.27).....	79
Equação (4.28).....	80
Equação (4.29).....	81
Equação (4.30).....	81

Equação (4.31).....	84
Equação (4.32).....	84

## Lista de abreviaturas, siglas e acrónimos

**B** – Campo magnético (T);

**CHECMATE** – *Combat High Energy Capacitor Module Advanced Technology Experiment*;

**CINAV** – Centro de Investigação Naval;

**DC** – *Direct Current* ou corrente contínua;

**E** – Campo elétrico (V/m);

**E.U.A** – Estados Unidos da América;

**J** – Densidade de corrente ( $A/m^2$ );

**MAG** – *Magnetic acceleration gun*;

**S** – Vetor de Poynting ( $W/m^2$ );

**S<sub>1</sub>** – Interruptor 1;

**Circuito RC** – Circuito constituído por uma resistência e um condensador;

$\epsilon_0$  – Permitividade do vácuo;

$\zeta$  – Resistência elétrica ( $\Omega$ );

$\eta$  – Índice de eficiência;

$\sigma$  – Densidade de cargas de superfície ( $C/m^2$ ).



## Introdução

O início da eletrostática remonta à Idade Antiga, quando o grego Tales de Mileto esfregou âmbar com pele de carneiro e observou que pequenos fios de palha eram atraídos pelo âmbar, apesar de existirem evidências de forças ali presentes, estas eram inexplicáveis na época. No século XVI começaram a ser estudados com algum rigor científico as forças de origem elétrica e magnética por Gerolamo Cardano em 1550. Cinquenta anos depois, William Gilbert estudou a eletricidade e o magnetismo, este viria a publicar “*De Magnete*” onde explica que alguns materiais, para além do âmbar, quando friccionados adquiriam uma propriedade que atraía outros corpos. Mais tarde em 1820, Hans Christian Ørsted foi o primeiro a registar que uma corrente elétrica induzia perturbações no funcionamento de uma bússola, focando a interação que existia entre a eletricidade e o magnetismo, trabalho este que viria a ser aprofundado por André-Marie Ampère, no mesmo ano. Faraday em 1831, sem conhecimento de matemática avançada, demonstrou experimentalmente a indução eletromagnética, que viria a inspirar grandes matemáticos e físicos como Maxwell, que apresentou as quatro equações que uniam a eletricidade, magnetismo e ótica em 1864. Vinte e oito anos após, Lorentz introduz a sua equação da força em 1882. (Ronan, 1987)

Apesar da força de Lorentz ser conhecida há mais de duzentos anos, a sua aplicação numa *railgun* (ou em português Canhão de Carris) tem sido alvo de controvérsia ao longo dos anos, existindo uma panóplia de resultados e teorias em torno do tema. Nos últimos trinta anos, o interesse em armas de aceleração magnética (MAGs) como as *railguns* têm crescido consideravelmente. As aplicações têm como visão a substituição dos sistemas tradicionais de aceleração rápida em porta-aviões, lançamento de plataformas espaciais, soldagem, revestimento de superfícies e disparo de projéteis a hipervelocidades como sistema de armas.

Desde 1980, foram investidos milhões no desenvolvimento desta tecnologia pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América, nomeadamente, projetos atuais como o CHECMATE (*Combat High Energy Capacitor Module Advanced Technology Experiment*) cujo objetivo é o lançamento de mísseis balísticos através de um sistema em terra. Em 1990, o entusiasmo em torno desta pesquisa, que presumivelmente traria

*railguns* com melhor desempenho, viria a diminuir com o final da Guerra Fria. Contudo, recentemente este tipo de armamento veio despertar o interesse da Marinha dos E.U.A. na aplicação da sua nova geração de navios completamente elétricos. (Schroeder, 2007)

As *railguns* são quase tão antigas como o conceito de *coil gun* (ou em português Canhão de Gauss ou canhão eletromagnético). Estas aceleram um projétil condutor elétrico que faz ponte entre um par de carris percorridos por corrente. As vantagens que esta tecnologia traz aos sistemas de armas incluem velocidades muito altas (2km/s ou Mach 6<sup>1</sup>), munições sem propulsante, projéteis muito mais baratos por disparo e menos volumosos, maior segurança no armazenamento das munições e capacidade de utilizar as fontes de energia primárias (elétrica nos tanques e navios) de modo “parasita”, ao invés de expansão química de gases que são tóxicos para o ser humano.

Atualmente a Marinha dos E.U.A. encontra-se a investir no derradeiro objetivo de atingir a capacidade de uma arma, com dezenas de megajoules de energia, capaz de fazer disparos contínuos a velocidades superiores a Mach 6, excedendo as 200 milhas náuticas de alcance. (Schroeder, 2007)

---

<sup>1</sup> *Mach* é definida como a razão entre a velocidade do objeto e a velocidade do som.

# 1. Princípios de uma railgun

## 1.1. Funcionamento básico

Atualmente é maioritariamente aceite que o projétil de uma *railgun* é acelerado pela força de Lorentz. Esta força é descrita pela Equação (1.1) que descreve a força numa partícula com carga  $q$  a mover-se com velocidade  $\vec{v}$  na presença de campo elétrico  $\vec{E}$  e campo magnético  $\vec{B}$ :

$$\vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]. \quad (1.1)$$

No caso de uma *railgun*, o campo que interage é o magnético pelo que é possível simplesmente reescrever a Equação (1.1) em (1.2)

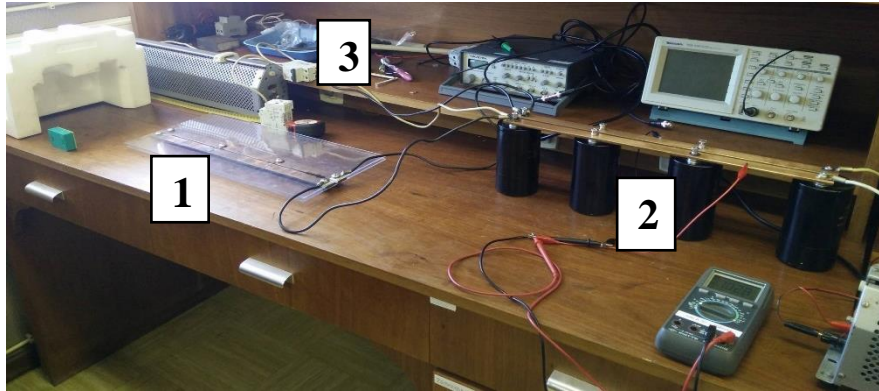
$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.2)$$

e aqui interessa-nos  $d\vec{F} = i\vec{dl} \times \vec{B}$  sobre um elemento de corrente  $i\vec{dl}$ .

## 1.2. Constituição de uma *railgun*

A constituição básica de uma *railgun* é bastante simples (ver figura seguinte), apenas é necessário:

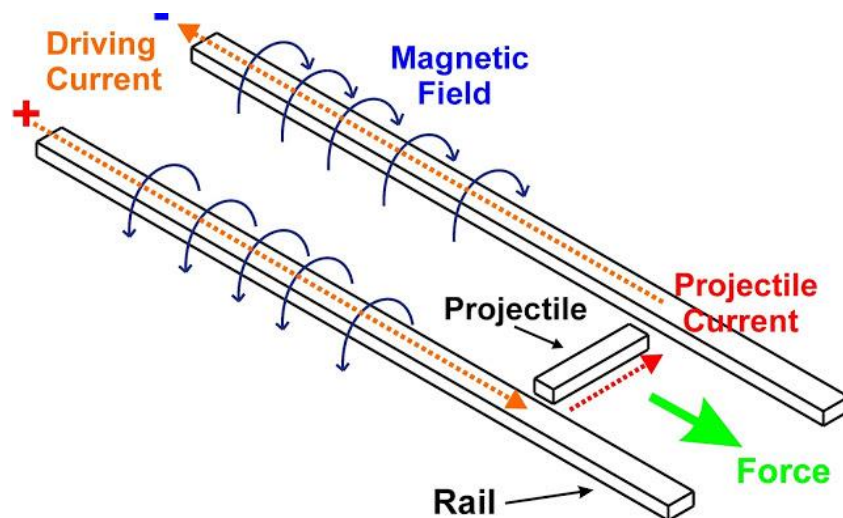
- 2 condutores metálicos (irão servir de carris);
- 1 condutor metálico que faça ponte entre os dois condutores (o próprio projétil ou suporte para projétil (armadura));
- 1 fonte de alimentação (preferencialmente de corrente contínua);
- 1 interruptor.



**Figura 1.1** - Montagem da segunda railgun construída nesta tese. Legenda: 1 – Carris paralelos; 2 – Banco de condensadores (Fonte de Alimentação); 3- Interruptor.

Os dois tipos de correntes (contínua e alternada) irão acelerar o projétil da *railgun*, no entanto, geralmente, os pulsos de corrente (contínua ou DC) são utilizados para disparos mais potentes (Graneau, 1995).

A arquitetura de uma *railgun* consiste em dois condutores metálicos que servem de carris, e um projétil condutor elétrico que fecha o circuito conectando assim os dois carris. A corrente flui por um carril, atravessa o projétil e retorna à fonte pelo outro carril, criando um campo magnético  $\vec{B}$  (ver Figura 1.2).



**Figura 1.2** – Esquema da interação do campo magnético  $\vec{B}$  com a corrente que flui no projétil.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Figura retirada de (Do it yourself gadgets, 2013).

Este campo magnético gera uma força de Lorentz, a apontar para fora, em todos componentes deste *loop* de corrente. A *railgun* aproveita este fenómeno para acelerar o projétil para fora dos carris.

A equação da força de Lorentz na sua forma original pode ser complexa para trabalhar em casos práticos como a *railgun*. Para simplificar estes casos, a Equação (1.2) foi reescrita em função da corrente  $I$  e do gradiente da indutância  $L'$ . A derivação da Equação (1.2) para a Equação (1.3) e o cálculo de  $L'$  a partir da geometria dos carris podem ser conferidos em (Schroeder, 2007).

$$F = \frac{L' I^2}{2}, \quad (1.3)$$

em que o gradiente da indutância,  $L'$ , é dado por:

$$L' = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln\left(\frac{d-r}{r}\right) \quad (\text{H/m}), \quad (1.4)$$

onde  $d$  representa o comprimento dos carris e  $r$  a distância entre eles.

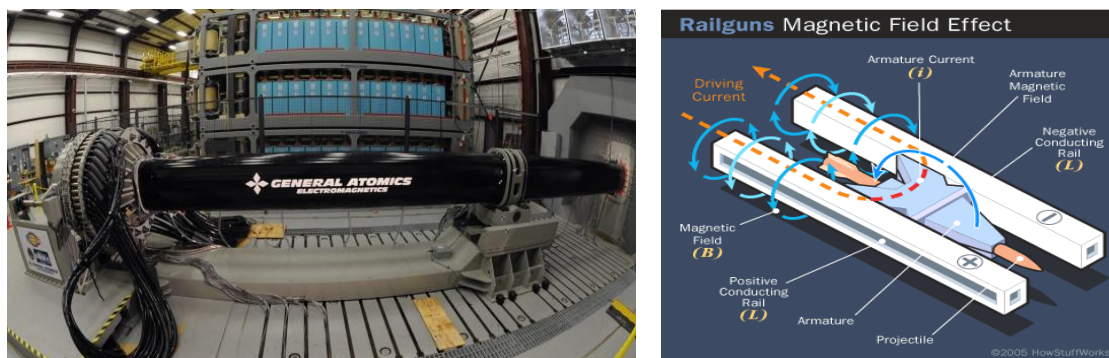
### 1.3. Modelos de *railguns*

#### 1.3.1. Railgun convencional

A montagem de uma *railgun* convencional é simples. Os carris terão de ficar paralelos e o projétil no meio dos carris e em contacto com estes, para que o projétil feche o contacto elétrico, como demonstrado na Figura 1.3<sup>3</sup>, à direita.

---

<sup>3</sup> Figura da esquerda retirada de (The Sidney Morning Herald, 2015) e da direita (Harris, 2005).



**Figura 1.3** - À esquerda um dos protótipos que vai ser testado no navio destroyer “Zumwalt” pertencente à Marinha dos Estados Unidos da América. À direita um esquemático de uma railgun convencional que utiliza um sabot para fechar o contacto elétrico.

É necessária uma fonte de alimentação de alta tensão (tipicamente bancos de condensadores de alta tensão e capacitância) que faça uma descarga rápida no circuito, acelerando o projétil.

Os objetos que as *railguns* disparam são chamados projéteis ou armaduras. Quando se pretende atingir o alvo com o objeto completo que foi disparado dá-se o nome de projétil, se for utilizado um *sabot* para fechar os contactos elétricos é chamado armadura ao conjunto (projétil e *sabot*). Atualmente nos sistemas de armas *railgun* é utilizado um *sabot* condutor para fazer o contacto com os carris. Assim que o conjunto sai dos carris o *sabot* é separado do projétil devido à sua forma menos aerodinâmica, como se pode ver na Figura 1.4

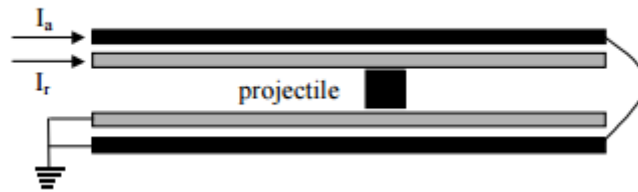


**Figura 1.4** - Sabot a separar-se do projétil após a saída dos carris. Imagem retirada de um vídeo divulgado pela Marinha dos Estados Unidos<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Figura retirada de (General atomics, 2013).

### 1.3.2. Augmented railgun (Multi-carris)

Este tipo de *railgun* utiliza vários carris em paralelo, no entanto, apenas os dois carris interiores fazem contacto com o projétil (ver Figura 1.5), existindo assim corrente em torno e dentro do sistema, resultando num campo magnético mais intenso nos carris (Gallant, 2003).



**Figura 1.5** - Esquema de uma Augmented Railgun em que a corrente passa pelos carris exteriores criando um campo magnético mais intenso entre os carris interiores<sup>5</sup>.

Um campo magnético mais intenso significa uma força de Lorentz de maior intensidade, de acordo com a Equação (1.2). Outra vantagem são os gradientes de indutância  $L'$  mais elevados em relação à geometria convencional. No entanto, surgem desafios complexos a nível estrutural da arma de modo a acomodar os vários carris exteriores.

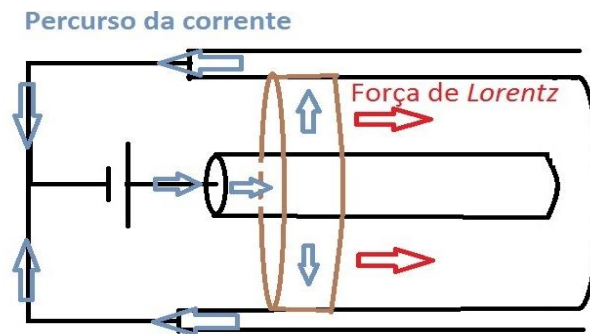
### 1.3.3. Railgun coaxial

Uma *railgun* com o formato coaxial difere pela sua geometria cilíndrica, ao contrário das convencionais que usam carris retos e paralelos. É constituída pelo cilindro interior condutor, pelo projétil cilíndrico que faz contacto com o cilindro exterior servindo de

---

<sup>5</sup> Figura retirada de (Gallant, 2003).

caminho de retorno para a corrente. Projetos mais avançados utilizam canais de plasma para efetuar o contacto entre os carris e o projétil.



**Figura 1.6** - Arquitetura da railgun coaxial. A azul mostra o percurso da corrente, saindo da fonte, atravessando cilindro interior, o projétil e a voltar pelo cilindro exterior. Da interação do campo magnético e da corrente a atravessar o projétil resulta a força de Lorentz (cor vermelha) na direção paralela aos carris, acelerando o projétil (cor castanha).

A railgun coaxial tem vantagens em comparação às geometrias convencionais. A distribuição de corrente é mais uniforme e o gradiente da indutância  $L'$  pode ser aumentado consoante a alteração do raio do projétil. No entanto, este tipo de geometria não é prático para aplicações bélicas devido ao design do projétil.

#### 1.4. Fontes de alimentação

O baixo nível de eficiência de uma *railgun* é praticamente incontornável. Mesmo utilizando técnicas para melhorar o desempenho da arma, tais como o uso de lubrificante condutor elétrico, carris de baixa resistência elétrica e pré-aceleração do projétil, continuamos com eficiências abaixo de 40% e nos melhores casos é possível chegar até 66% (Bauer, 1995).

Devido aos rendimentos baixos, para atingir velocidades superiores a *Mach* 6, como a nova arma desenvolvida pela Marinha dos E.U.A. (The Sidney Morning Herald, 2015), são necessárias enormes quantidades de energia armazenada (na ordem dos MJ), que posteriormente são libertadas quase instantaneamente para o projétil. Normalmente são utilizados bancos de condensadores para armazenar energia elétrica. Para libertar toda a energia armazenada são usados mecanismos de comutação que consigam lidar com altas

correntes. Componentes mais comuns são os tirístores ou *spark gap switches*<sup>6</sup>. A Tabela 1.1 compara diferentes configurações de *railguns* já testadas, assim como a tensão dos condensadores e modo de ativação (Power Labs, 2010); (Maniglia, 2013); (General atomics, 2013).

**Tabela 1.1** - Escala de energia armazenada em diferentes projetos de railguns.

<i>Railgun</i>	Nº de condensadores	Energia armazenada	Modo de ativação
1º Projeto desta tese	3 (385 V)	500J	Nenhum
2º Projeto desta tese	13 (400 V)	11 kJ	Nenhum
Powerlabs 2.0	32 (450 V)	20 kJ	Nenhum
Cal Poly Mk 1.0	16 (450 V)	16 kJ	Nenhum
Cal Poly Mk1.1	16 (450 V)	16 kJ	Ignitrão
Cal Poly Mk 2.0	2 (9 kV)	67 kJ	<i>Spark Gap Switch</i>
GA Blitzer	Desconhecido	2 MJ	Interruptor de estado sólido
GA/US Navy	>200 (11kV)	9 MJ	Interruptor de estado sólido
BAE/Navy	29 bancos (11kV)	>32 MJ	Desconhecido

## 1.5. Problemática nos sistemas *railgun*

O facto da Marinha dos E.U.A. estar pronta a utilizar este tipo de armamento, quer dizer que as *railguns*, que em tempos eram pouco fiáveis e de baixa longevidade, ultrapassaram ou pelo menos diminuíram o problema da danificação dos carris. Estes

---

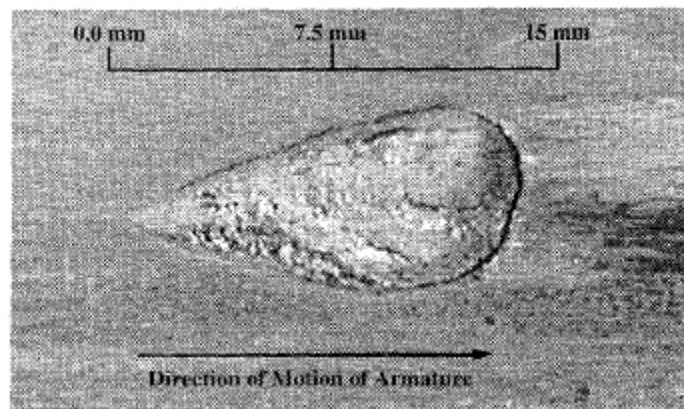
<sup>6</sup> Um *spark gap switch* consiste numa montagem com dois eléctrodos condutores separados por um espaço preenchido por ar ou gás. Este está desenhado para que permita passar uma faísca elétrica entre os condutores quando a diferença de tensão atinge a tensão de disrupção do gás naquele espaço (Bindu. S, 2012).

danos podem tomar diversas formas devido às condições extremas a que são expostos. Altas temperaturas, fricção metal/metal, velocidades elevadas do projétil são apenas algumas das condições que os carris terão de suportar para que a longevidade de uma *railgun* seja viável para uso militar.

### 1.5.1. Escavamento ou *Gouging*

O escavamento ocorre devido a altas velocidades de deslizamento, como acontece em pistas de carris para mísseis e railguns. Este efeito tem a forma de crateras semelhantes a uma gota de água (ver Figura 1.7), e ocorre acima de um valor limite de velocidade dependendo da fricção e das propriedades dos materiais envolvidos. (Persad, 1997). O escavamento é um problema por duas razões: por um lado este processo gera um stress dinâmico muito elevado que pode levar a falhas tanto nos carris como no projétil de uma *railgun*, por outro lado, o uso do material já com este efeito pode levar a zonas de não contacto com a armadura.

O mais importante é que quando ocorre o escavamento é exercida uma força tremenda na armadura no sentido inverso do movimento, reduzindo substancialmente o rendimento da *railgun*.



**Figura 1.7-** Escavamento em carris de cobre. A seta a preto indica o sentido do movimento<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> Figura retirada de (Persad, 1997)

O escavamento tornou-se um problema nas *railguns* quando começaram a ser construídos aceleradores de armaduras sólidas em 1980. Na construção de uma *railgun*, o critério mais importante na escolha do material para os carris é a sua alta condutividade elétrica. Cobre para os carris e alumínio para a armadura são as escolhas mais comuns. Trocando os carris para alumínio e o projétil para o cobre iria reduzir substancialmente este efeito, no entanto o rendimento iria baixar inevitavelmente pois o alumínio é pior condutor que o cobre. Um projétil em cobre não é a melhor escolha pois é um material mais denso que o alumínio, tornando-o mais pesado. (Pavlov, 2013)

Inicialmente pensava-se que o escavamento era devido a choques oblíquos gerado por irregularidades no material, e que a velocidade limite para o início deste efeito era dado em função da dureza do material. Estudos mais recentes (Wu, 2016), demonstram que o micro-impacto entre a armadura e a superfície dos carris a velocidades elevadas produzem trocas de energia instantâneas. Material de alta densidade sob alta pressão a fluir na superfície de contacto é expulso obliquamente para os carris, promovendo a formação de escavamento. Para cada par de material em contacto existe uma velocidade limite para a ocorrência de escavamento.

Atualmente há forma de contornar este efeito, usando armaduras e carris de material de baixa densidade e alta dureza. Uma outra forma de solucionar este problema é aplicar uma película (*coating*) sobre carris de um material bastante duro, particularmente películas de alumínio ou grafite (Pavlov, 2013). Esta película é conseguida através de disparos com velocidade inferiores ao limite de escavamento. Estes disparos vão degradando o projétil (de alumínio) deixando uma camada de 10 – 20  $\mu\text{m}$  de depósitos de alumínio, camada esta que protege os carris nos próximos disparos. Não é certo se o escavamento é prevenido devido à baixa densidade desta película ou alguma outra propriedade intrínseca a camadas finas (Watt, 2011).

### **1.5.2. Arcos de corrente ou *Arcing***

Geralmente, os arcos ocorrem quando os contactos entre os carris e o projétil não são perfeitos. Durante o percurso do projétil nos carris, foi registado que metade da sua

massa é perdida devido a aquecimento e fricção a altas velocidades (Pavlov, 2013). Quando existe um pequeno espaço entre o projétil e os carris e se o campo eletromagnético for forte o suficiente, são formados os arcos e a corrente atravessa o ar até chegar ao projétil.

Estes saltos da corrente pelo ar diminuem a eficiência da *railgun* pois a corrente atravessa zonas de altíssima resistência (ar), perdendo grande parte da energia na formação de arcos de corrente. Os danos causados pelos arcos são visíveis e deteriorantes para os carris, como se pode ver na Figura 1.8.



**Figura 1.8** - Danos efetuados pelos arcos na railgun construída pela PowerLabs<sup>8</sup>.

### 1.5.3. Excesso de depósitos

A deposição ocorre durante o disparo do projétil quando este aquece devido às elevadas velocidades e fricção, deixando parte da sua massa em estado líquido nos carris. Esta camada de alumínio em estado líquido é benéfica pois atua como lubrificante durante o disparo (Pavlov, 2013). Posteriormente estes depósitos de alumínio arrefecem e passam a estado sólido ficando muito irregulares, escamosos e porosos, diminuindo o desempenho dos disparos seguintes.

---

<sup>8</sup> Figura retirada de (Power Labs, 2010).



**Figura 1.9** - Exemplo de depósito de alumínio verificado na Railgun MK 1.1<sup>9</sup>.

A precisão na distância entre carris é crucial numa *railgun* pois qualquer distúrbio no calibre resulta em perda de contacto elétrico, menos eficiência e diminuição da longevidade da arma. Sendo assim, uma forma de diminuir a quantidade de depósitos é melhorar o contacto elétrico entre os carris e o projétil, por forma a que exista uma zona uniforme com secções compatíveis, evitando ao máximo zonas de estrangulamentos para a corrente.

---

<sup>9</sup> Figura retirada de (J. Maniglia, 2013).



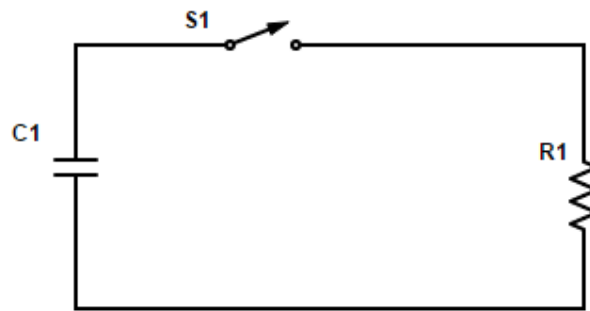
## **2. Campo eletromagnético em redor de circuitos**

Atualmente existem inúmeras demonstrações do campo eletromagnético e mapas com linhas de campo que podem ser encontradas em livros de física, no caso eletrostático. No entanto, parecem não existir métodos analíticos para a demonstração do campo elétrico em redor de corpos condutores, no caso dinâmico, exceto em configurações de circuito muito simples presentes em literatura altamente especializada. Esta ênfase no caso eletrostático leva, por vezes, a erros conceptuais na interpretação de circuitos, mesmo com geometrias simples. Neste capítulo é feita uma análise à configuração e propriedades do campo eletromagnético, no caso dinâmico, particularmente em correntes DC (Direct Current ou corrente contínua), em torno de circuitos simples.

### **2.1. As cargas de superfície**

É importante compreender a importância da distribuição de cargas à superfície de um condutor percorrido por corrente. Este assunto começou por ser analisado por Schaeffer (Schaeffer, 1932) em 1932, e mais tarde por autores bem conhecidos atualmente como Sommerfeld em 1952 (Sommerfeld, 1952) e Jefimenko em 1962 (Jefimenko, 1962). No entanto, estas discussões ou são qualitativas demais ou demasiado específicas. Mais recentemente em 1996, Jackson (Jackson, 1996) esclarece a importância das cargas de superfícies percorridas por corrente e através de métodos numéricos demonstrando como é possível saber a distribuição de cargas para circuitos simples.

Analisemos um circuito simples constituído por uma bateria, uma resistência e um interruptor, tal como exemplificado na Figura 2.1.



**Figura 2.1** - Circuito elétrico com uma bateria ( $C_1$ ), interruptor ( $S_1$ ) e uma resistência ( $R_1$ ).

Quando  $S_1$  (interruptor 1) fecha o circuito eletricamente, as cargas distribuem-se na superfície e desempenham três importantes funções:

“(1) Manter o potencial ao longo do circuito, (2) providenciar o campo elétrico no espaço fora do circuito, e (3) assegurar o fluxo de corrente confinado” (Jackson J. D., 1996).

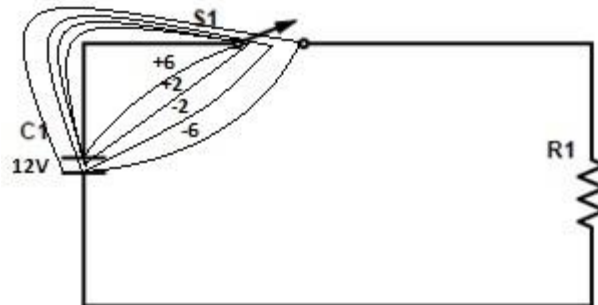
Em situações puramente eletrostáticas, as cargas estão estacionárias, isto é, em repouso, em contraste com as situações eletrodinâmicas onde estarão em movimento. Para as cargas desempenharem aquelas três funções, a sua distribuição, mesmo sendo estática, não poderá ser uniforme. Em geometrias de circuitos torna-se mesmo impossível o cálculo analítico da distribuição de cargas à superfície, recorrendo-se na maior parte das vezes a simulações feitas em *software*.

### **2.1.1. Potencial num circuito RC**

O primeiro grande papel das cargas de superfície é manter o potencial ao longo do circuito. Quando o circuito na Figura 2.1 está aberto, as cargas são distribuídas ao longo do circuito de tal forma que o potencial em cada fio é constante e igual ao do respetivo terminal do condensador, aqui utilizado como bateria. No final de cada fio, onde se encontra o interruptor, existe uma grande acumulação de cargas com sinais opostos, criando o campo elétrico nesse espaço vazio.

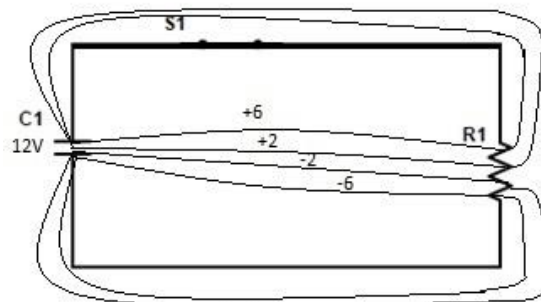
Traçando as linhas equipotenciais através de um método semiquantitativo descrito por Rainer Muller (Muller, 2012), obtém-se a Figura 2.2. Pode-se verificar que quando o

circuito se encontra aberto, todo o potencial cai na zona do interruptor, obtendo-se uma acumulação de cargas essencialmente nos terminais do interruptor.



**Figura 2.2** - Circuito da figura 2.1, aplicando as linhas equipotenciais descritas em (Muller, 2012).

Quando o circuito é fechado a corrente flui e existem mudanças na distribuição de cargas à superfície. Agora deixa de existir queda de potencial em  $S_1$  passando exclusivamente para a resistência  $R_1$ , (tendo em conta que a resistência nos fios de ligação é desprezável em relação a  $R_1$ ), segundo a Lei de Ohm. Segundo o trabalho de Jackson (Jackson J. D., 1996), existe uma concentração de cargas nos terminais da resistência (não tão notável como nos terminais do interruptor) e na própria resistência, determinando assim a queda de potencial no circuito. Aplicando o método de Muller (Muller, 2012), obtemos as linhas equipotenciais na Figura 2.3 abaixo.



**Figura 2.3** - Circuito da Figura 2.1, com o circuito fechado surge uma nova distribuição de cargas.

Como é possível observar nas Figuras 2.2 e 2.3, no mesmo circuito é possível obter diferentes distribuições de carga de superfície visto que originam diferentes distribuições

de potencial elétrico no exterior. Estes resultados não se limitam ao caso da corrente contínua, mas também ao regime quase estático<sup>10</sup>. No caso eletrostático tem-se:

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

mas de facto o produto externo do campo elétrico é dado mais geralmente por:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (2.2)$$

No limite quase estático, a corrente que percorre o fio produz um campo magnético de indução azimutal:

$$B_\varphi(t) = \frac{\mu_r I(t) r}{2\pi R^2} \quad (\text{dentro do fio}), \quad (2.3)$$

$$B_\varphi(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \quad (\text{fora do fio}), \quad (2.4)$$

em que  $\mu_0$  representa a permeabilidade do vácuo,  $I(t)$  a corrente no circuito,  $r$  a distância de observação e  $R$  o raio do condutor.

O correspondente fluxo magnético, que varia com o tempo, cria um campo elétrico axial adicional, pela lei de Faraday. Agora o campo elétrico passa a ter duas contribuições e a ser descrito em duas componentes vetoriais (ver Figura 2.4<sup>11</sup>), radial (comum no estudo eletrostático) e axial (na presença de corrente).

---

<sup>10</sup> Os limites de frequências em que se verifica este fenómeno são discutidas em detalhe em (Jackson J. D., 1996).

<sup>11</sup> Figura retirada de (Sefton, 2002).



**Figura 2.4** - Comparação do comportamento do campo elétrico na ausência e presença de corrente.

De notar que quando o fio tem resistividade,  $\rho$ , muito baixa (fio de cobre), a componente axial do campo  $E$  é também baixa. Em contrapartida quando o fio tem alta resistividade existem quedas de potencial consideráveis, aqui a componente axial é dominante em relação à radial, tornando  $\vec{E}$  quase paralelo ao condutor, como se pode comprovar pela equação abaixo, em que  $J$  é a densidade de corrente elétrica,  $\sigma$  a condutividade elétrica e  $\rho$  a resistividade elétrica,

$$E_{||} = \frac{J}{\sigma} = \rho J. \quad (2.5)$$

Este resultado é particularmente interessante na análise de uma configuração semelhante a uma *railgun*, pois de facto existe uma corrente a variar no tempo e é descrita pela curva de descarga dos condensadores, discutida no próximo capítulo.

Em suma, onde existam distribuições não uniformes de cargas de superfície, existirão as correspondentes alterações no campo elétrico, nomeadamente a adição de uma componente axial. Esta alteração no campo elétrico irá posteriormente influenciar o vetor do fluxo de potência, também conhecido por vetor de Poynting.

### 2.1.2. Fluxo de energia

O segundo papel das cargas de superfície é estabelecer um campo elétrico exterior entre os elementos do circuito. A determinação do campo elétrico toma uma grande importância no cálculo do vetor de Poynting,  $\vec{S}$ ,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{W/m}^2), \quad (2.6)$$

pois o campo magnético é simplesmente azimutal em torno do condutor, dado pela lei de Ampère (Equação 2.4).

Como o fluxo de energia é perpendicular ao campo elétrico, torna-se evidente que a energia sai da bateria em direção ao elemento resistivo do circuito. As linhas de  $\vec{S}$  são definidas em função dos campos magnético e elétrico sendo este último determinado pela resistividade da resistência e pela localização da bateria.

Uma ideia generalizada, mas errada, é que os eletrões em movimento no interior dos fios transportam energia até à resistência. Para desmistificar esta afirmação recomenda-se analisar os dois factos seguintes:

- Os eletrões são naturalmente demasiado lentos para transportarem energia da forma esperada. Quando  $S_1$  é fechado, ocorre uma queda de tensão quase imediata em  $R_1$ , aquecendo-a, indicador que a energia teve de chegar desde a bateria até à resistência de uma forma muito rápida, nomeadamente à velocidade da luz. No entanto, se a densidade de eletrões (número de eletrões por volume do fio) for conhecida, é possível fazer um simples cálculo para demonstrar que a energia não flui no interior dos fios, através da Equação (2.7). Sendo  $v_{drift}$  a velocidade de deriva de um eletrão,  $J$  a densidade de corrente elétrica,  $n$  o número de eletrões por metro cúbico,  $q$  a carga de um eletrão e  $A$  a área da secção do fio temos:

$$v_{drift} = \frac{J}{nq} = \frac{I}{nAq} \quad (\text{m/s}). \quad (2.7)$$

Para um fio de cobre com espessura de 1 mm percorrido por uma corrente de 100 mA, a velocidade dos eletrões acaba por ser da ordem de  $1 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , impossibilitando a hipótese de que a energia flui no interior dos fios;

- Alguns autores referem, erradamente, que é necessário completar uma volta fechada ao circuito para existir corrente elétrica. De facto, os eletrões não viajam através de um meio dielétrico num condensador, nem “saltam” através do espaço entre o enrolamento primário e secundário de um transformador e mesmo assim a energia chega aos elementos resistivos, ou seja, o facto dos eletrões não

conseguirem chegar a certo elemento do circuito, não implica que a energia não chegue (Sefton, 2002).

Já Sommerfeld (Sommerfeld, 1952), referia que os metais são bons condutores de elétrons ou de corrente elétrica, mas não de energia. Metais conduzem corrente, mas o espaço conduz energia e o melhor condutor de energia é o vácuo. O conceito que o campo eletromagnético exterior armazena e transmite energia é a chave para a explicação de como a energia vai de uma bateria para a resistência.

A configuração do campo elétrico na presença de corrente pode ser difícil de calcular, especialmente para geometrias muito específicas do circuito. No entanto é possível ter uma ideia do que se passa no circuito com alguns esquemas. Analisando uma figura usada em (Sefton, 2002), Figura 2.5<sup>12</sup>, torna-se intuitivo explicar como se comporta o fluxo de energia. Este circuito consiste numa bateria, uma lâmpada e fios de ligação.

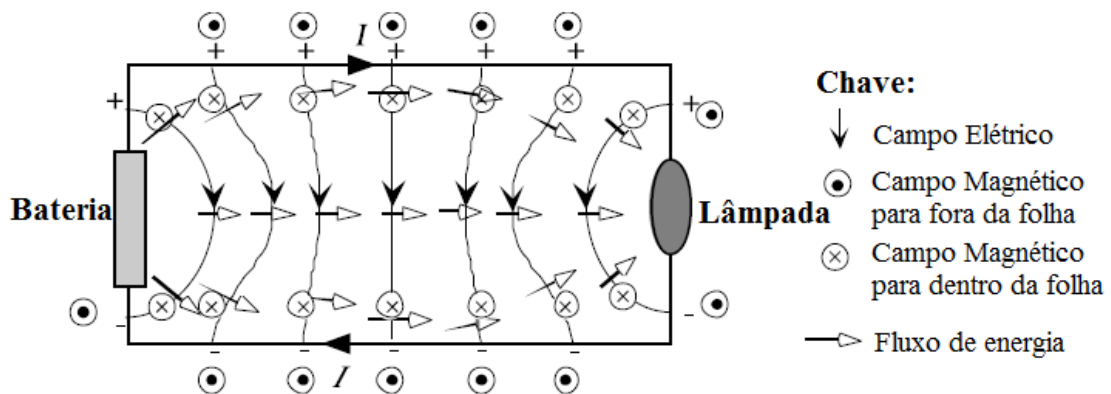


Figura 2.5 - Circuito utilizado por Sefton para explicar a transferência de energia.

Para saber o sentido do campo magnético basta aplicar a regra da mão direita em torno da corrente: este campo forma círculos em torno dos condutores e aponta em direção a esta folha dentro do circuito. Tal como discutido no subcapítulo acima, nas zonas de alta condutividade elétrica espera-se que a componente radial do campo elétrico seja predominante, daí as linhas de campo elétrico entrarem e saírem dos fios condutores praticamente a 90°. O campo elétrico associado ao potencial é, portanto, sempre

<sup>12</sup> Figura adaptada de (Sefton, 2002).

perpendicular às linhas equipotenciais. Como o vetor de Poynting é também perpendicular ao campo elétrico, é possível ver que o fluxo de energia segue as linhas equipotenciais.

A energia pode seguir muitos trajetos, inclusive por fora do circuito, no entanto, em relação à Equação (2.4), é fácil de ver que o campo magnético é mais intenso perto da superfície dos condutores. Como o vetor de Poynting (Equação (2.6)) é também proporcional à intensidade do campo magnético, existe maior fluxo de energia perto da superfície dos condutores.

#### 2.1.2.1. Dedução da dissipação de energia num fio resistivo a partir do modelo dos campos

Para entender como a energia chega a um elemento resistivo, como uma lâmpada, de um circuito, basta analisar o campo magnético e elétrico imediatamente fora da superfície. O campo magnético fora de um fio, como visto na Equação (2.4) e aplicando a regra da mão direita, forma círculos paralelos à secção circular do fio. O campo elétrico fora do fio é oblíquo à superfície do condutor, (ver Figura 2.4), então é possível distinguir duas componentes vetoriais, axial e radial. Neste caso estamos interessados na componente paralela do campo elétrico,  $E_{||}$ , à superfície do condutor, pois esta irá resultar na componente do fluxo de energia perpendicular ao fio.

O vetor  $\vec{S}$  pela Equação (2.6) tanto terá de ser perpendicular ao campo magnético como perpendicular ao campo elétrico, devido ao produto externo. Para determinar o sentido do vetor  $\vec{S}$  (para dentro ou fora do fio), basta aplicar a regra da mão direita para o produto externo, sabendo que o sentido do campo  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  estão relacionados com o sentido da corrente, o resultado é que o vetor  $\vec{S}$  aponta obliquamente para dentro do fio. O ângulo com que  $\vec{S}$  entra no fio está relacionado com a resistividade do fio, quanto mais resistivo o fio mais perto da perpendicular, à superfície, será o vetor  $\vec{S}$ .

Para calcular o valor da transferência de potência, basta multiplicar o valor da componente perpendicular à superfície do condutor do vetor de Poynting pela área de superfície do fio. Como os campos  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  fazem ângulos retos a Equação (2.6) fica (2.8):

$$|\vec{S}_{\perp}| = S_{\perp} = \frac{1}{\mu_0} E_{\parallel} B. \quad (2.8)$$

A potência que entra no fio é produto da potência por área, e a área curva de superfície do cilindro é representada por  $A$ , ou seja:

$$P = \frac{1}{\mu_0} E_{\parallel} BA. \quad (2.9)$$

A magnitude do campo elétrico, no interior do condutor, pode ser dada pela diferença potencial,  $V$ , entre o início e o fim do segmento condutor, como a lâmpada acima referida, dividido pelo seu comprimento,  $d$ ,

$$E = \frac{V}{d} \quad (\text{no interior do condutor}). \quad (2.10)$$

O campo magnético é mais uma vez dado pela lei de Ampère na Equação (2.4). Nesta situação não há interesse na dependência do tempo, ficando simplesmente:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'}, \quad (2.11)$$

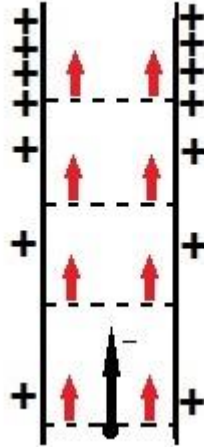
substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8) obtemos a familiar formula da dissipação de potência:

$$P = VI. \quad (2.12)$$

Em resumo, através do modelo dos campos é possível chegar ao resultado da dissipação de energia num fio resistivo e estes cálculos são igualmente válidos para imediatamente dentro do fio, pois neste caso o campo elétrico é apenas constituído pela componente axial que é igual ao caso calculado. Contudo, fora do fio existe uma componente radial do campo elétrico, sendo esta diferente de zero e em conjunto com o campo magnético, contribui para uma componente do vetor  $\vec{S}$  paralela ao fio (apenas fora do fio). Isto quer dizer que a energia poderá também estar a percorrer o espaço ao longo do circuito sem nele penetrar (Sefton, 2002).

### 2.1.3. Manutenção da corrente dentro de um condutor

Como já visto atrás, o campo elétrico dentro de um condutor percorrido por corrente aponta na direção do eixo do condutor, permitindo um fluxo de elétrons no seu interior, ver Figura 2.6.



**Figura 2.6-** Uma possível distribuição de cargas de superfície num fio reto. Neste caso o elétron representado com o sinal (-) é puxado pelas cargas positivas concentradas na parte superior do fio. A situação inversa com cargas negativas de superfície também é possível. O campo elétrico (setas vermelhas) é perpendicular às linhas equipotenciais (tracejado).

Os condutores que fazem ligação entre os componentes do circuito podem ter inúmeras geometrias e nem sempre são retos, mas mesmo assim o campo será uniforme dentro dos condutores pois a densidade de corrente é constante dentro do circuito:

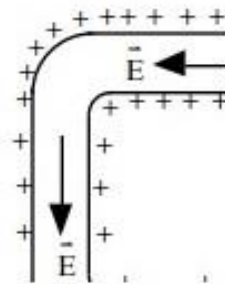
$$E_{dentro} = E_{||} = \frac{J_{||}}{\sigma} = \frac{I/A}{\sigma}. \quad (2.13)$$

Esta distribuição de cargas à superfície para além de influenciar o campo elétrico interior, altera também o campo exterior, como já vimos no sentido em que, de um modo geral, um circuito comporta-se como um dipolo, ou seja, as cargas de superfície são maioritariamente positivas quando estão mais próximas do terminal positivo da bateria. Este resultado é particularmente visível no fio uniformemente resistivo e infinitamente longo usado por Sommerfeld (Sommerfeld, 1952). Grande parte das discussões qualitativas sobre este assunto partem deste resultado, supondo uma variação linear de cargas de superfície, que é o fator dominante na maioria dos esquemas na literatura (Sherwood, 2011), (Hartel, 1987) (Goihbarg, 2005) (Sherwood, 2006). Esboços feitos por (Sherwood, 2006), ver Figura 2.7, ilustram o ponto anterior:



**Figura 2.7** – Distribuição de cargas de superfície num circuito com resistência uniforme. Como é possível observar, quanto mais próximo de cada terminal da bateria, maior é a concentração de cargas, quer positiva quer negativa, consoante o polo da bateria<sup>13</sup>.

Analisando a distribuição de cargas nas zonas de curvatura do fio condutor, é possível encontrar a seguinte configuração<sup>14</sup>:



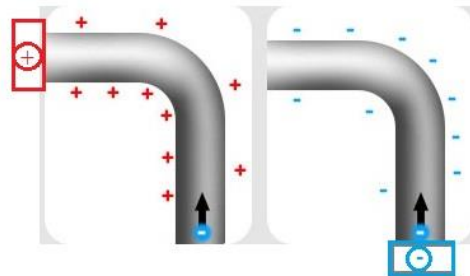
**Figura 2.8** – Distribuição de cargas numa zona de curvatura do circuito, modelo utilizado por Sefton.

Nas zonas de curvatura existe um desequilíbrio adicional de cargas, permitindo que o campo elétrico interior se mantenha paralelo ao eixo do condutor e confinando o fluxo de eletrões no interior do condutor. Caso não existisse esta distribuição de cargas nas curvaturas do circuito os eletrões continuariam até à superfície do condutor. Observando as Figuras, 2.8 e 2.9, a única maneira dos eletrões conseguirem curvar é

<sup>13</sup> Figura retirada de (Sherwood, 2006).

<sup>14</sup> Figura retirada de (Sefton, 2002).

resultante da ação do campo elétrico devido à existência de cargas de superfície à espera dos elétrons, estas empurram ou puxam consoante a polaridade.

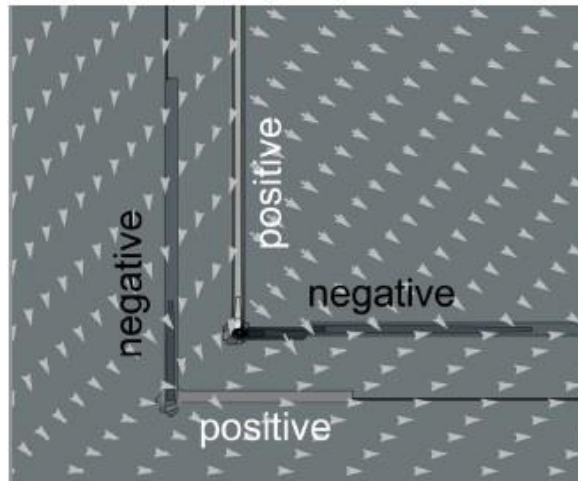


**Figura 2.9** - Ilustração de zonas de curvatura do mesmo circuito e a sua respetiva distribuição de cargas.

Na Figura 2.9<sup>15</sup>, é visível o comportamento semelhante a um dipolo. A curvatura do circuito à esquerda corresponde a uma zona próxima do terminal positivo da bateria, daí a concentração de cargas positivas. Resultado simétrico ocorre na zona perto do terminal negativo da bateria, representado à direita. No entanto, numa análise mais formal do problema, Muller conclui que a distribuição de cargas nas zonas de curvatura é um pouco mais complexa que nos exemplos apresentados nas Figuras 2.8 e 2.9 (Muller, 2012). A distribuição de cargas numa zona de curvatura terá um comportamento semelhante a um quadripolo, que guia o campo elétrico em torno da curva, ver Figura 2.10, onde é possível observar que as linhas do campo elétrico partem das cargas de superfície positivas para as negativas.

---

<sup>15</sup> Figura adaptada de (Sefton, 2002).



**Figura 2.10-** Distribuição de cargas semelhante a um quadripolo em torno de uma zona de curvatura, figura utilizada por Muller. As setas apontam na direção do campo elétrico. Na figura está apenas representado o campo elétrico gerado pelas cargas de superfície.<sup>16</sup>

É ainda possível estimar quantitativamente a magnitude das cargas de superfície<sup>17</sup>, partindo do princípio que no interior de um fio homogêneo o campo elétrico é constante e dado por:  $E = \frac{V}{L}$ , onde  $V$  é tensão nos polos da bateria,  $L$  o comprimento do fio e  $\alpha$  o ângulo entre a linha equipotencial e a superfícies do condutor. Pela lei de Gauss vem:

$$E_{\perp} A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A, \quad (2.14)$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_{\perp} = E_{\parallel} \epsilon_0 \tan(\alpha), \quad (2.15)$$

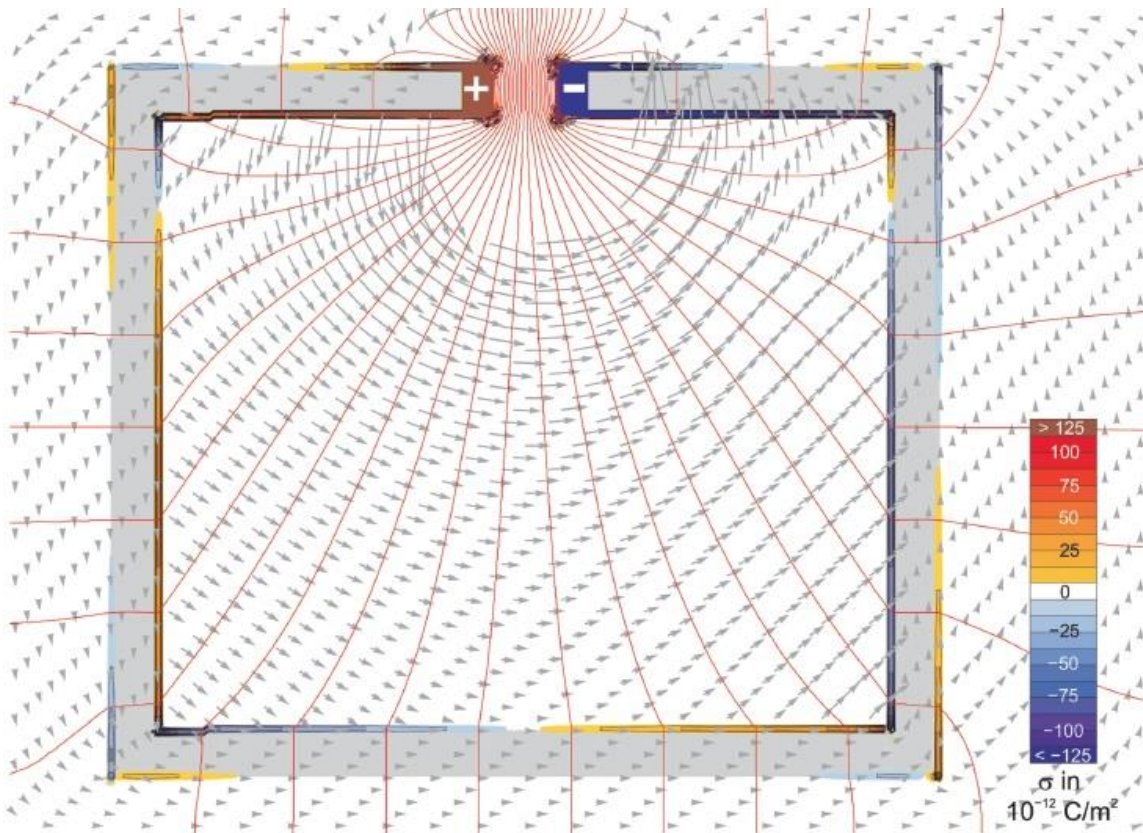
$$\sigma = \epsilon_0 \left( \frac{V}{L} \right) \tan(\alpha). \quad (2.16)$$

---

<sup>16</sup> Figura retirada de (Muller, 2012).

<sup>17</sup> Detalhes dos cálculos utilizados por Muller disponíveis em (Muller, 2012).

Aplicando o método semiquantitativo de Muller, através de linhas equipotenciais é possível chegar à configuração do campo elétrico na Figura 2.11.



**Figura 2.11**– Distribuição de cargas de superfície e configuração do campo elétrico num circuito de resistividade uniforme. Neste circuito foi aplicado o método semiquantitativo de Muller<sup>18</sup>.

Em resumo das considerações anteriores, o tratamento analítico de geometrias mais complexas continua a ser praticamente impossível, devido a todos os tópicos abordados neste capítulo. No entanto, através deste tratamento semiquantitativo da distribuição de cargas superfícies, que é possível aplicar a quase todas as geometrias de circuitos, incluindo a geometria de uma *railgun* (discutido no capítulo seguinte), podemos ter uma ideia da configuração do campo elétrico com alguma precisão. Foram realizados alguns esquemas por Muller (Muller, 2012) dedicados a geometrias mais complicadas que estão disponíveis no Anexo A. As analogias utilizadas para explicar a corrente, particularmente as comparações com água a fluir num cano, não são as mais corretas. Como é possível verificar ao longo deste capítulo, não é possível falar em corrente sem

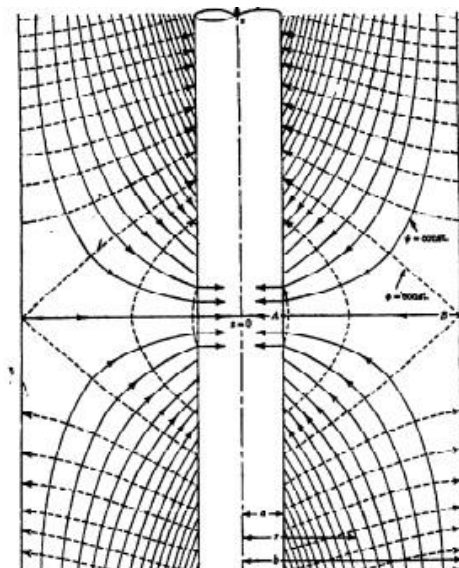
---

<sup>18</sup> Figura retirada de (Muller, 2012).

falar em cargas de superfície e, conseqüentemente, do campo elétrico que determina o vetor do fluxo de energia. Circuitos, cargas de superfície e campo eletromagnético têm tendência a serem tópicos disjuntos quando na realidade existem dependências óbvias entre eles. Apenas uma abordagem que engloba a teoria de campos é que torna possível a compreensão total das propriedades de um simples circuito.

## 2.2. Visualização do vetor de Poynting

Apresentam-se de seguida algumas ilustrações de configurações possíveis de campos e fluxos energéticos atrás referidos, recorrendo a algumas das referências usadas neste trabalho. Sommerfeld (Sommerfeld, 1952) começou por explicar o porquê da existência de duas componentes do campo elétrico e a relação com as cargas de superfície, num fio percorrido por corrente. Apesar de esclarecer e desmitificar o fluxo de energia, a geometria aplicada é demasiado particular. No exemplo utilizado na Figura 2.12<sup>19</sup>, o fio de cobre é infinitamente longo (de modo a desprezar os efeitos de extremidade), e encontra-se dentro de um condutor exterior coaxial por forma a evitar perturbações exteriores. Tais condições são impossíveis de concretizar num caso real.



**Figura 2.12** - Representação do vetor de Poynting (setas) no exterior de um condutor elétrico cilíndrico de dimensões infinitas.

<sup>19</sup> Figura retirada de (Sommerfeld, 1952).

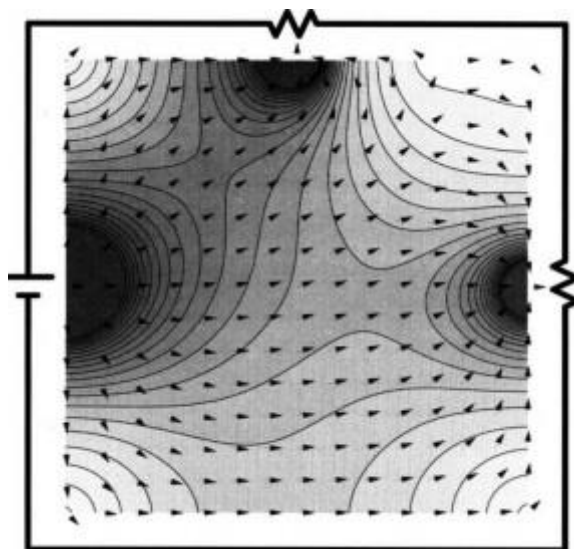
De notar que Sommerfeld refere que não existe energia a fluir paralelamente ao fio se a resistência elétrica do fio,  $\rho$ , for diferente de zero. A energia vem de todos os lados em direção à superfície do fio, depois de entrar é convertida em calor, aquecendo-o.

Recentemente este assunto tem ganho relevância novamente, com a possibilidade de aplicar métodos computacionais para a visualização de vetor de Poynting, facilitando a compreensão daqueles que não tem experiência com matemática de mais alto nível, por exemplo as “séries de Fourier-Bessel” utilizadas por Jackson em (Jackson, 1995) e as “harmônicas cilíndricas” por Heald (Heald, 1988).

Os modelos apresentados (Jackson, 1996) (Sommerfeld, 1952) (Slavko, 2000) (Norris, 2000) (Harbola, 2010) (Muller, 2012) são geralmente efetuados em duas dimensões (circuito visto de cima) para facilitar o cálculo do campo elétrico. Existem várias formas de calcular o campo elétrico, pela resolução da Equação de Poisson, (Slavko Majcen, 2000) usando o método de relaxamento<sup>20</sup>, dividindo o circuito em infinitésimas células e posteriormente aplicar a lei de Coulomb (Norris, 2000) ou simplesmente chegam ao vetor de Poynting através das linhas equipotenciais do circuito (Figura 2.10) (Muller, 2012). Apesar de se usar diferentes métodos, os resultados são coerentes entre todos eles e a distribuição não uniforme de cargas de superfície altera a configuração do campo elétrico dando consequentemente o fluxo de energia pelo espaço e em redor dos circuitos.

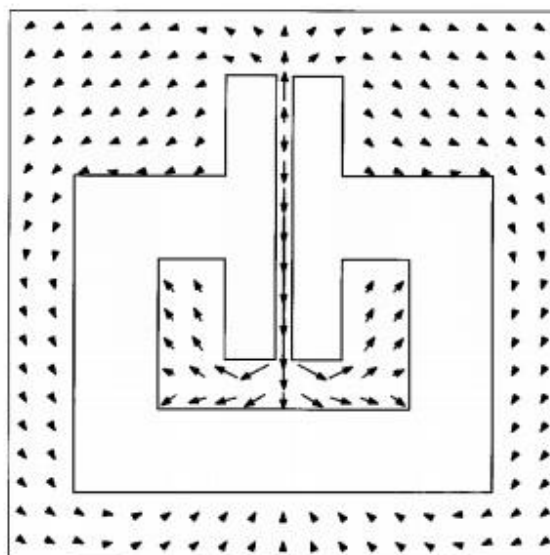
---

<sup>20</sup> Método de relaxamento é um método iterativo que simplesmente substitui o potencial num ponto pela média do potencial nos pontos à sua volta e daqui tira-se a distribuição de cargas. Destas, calcula-se o novo potencial, a nova distribuição de cargas e repete-se o processo até a convergência.



**Figura 2.13** - Circuito em duas dimensões, constituído por uma bateria e duas resistências. As linhas representam o campo elétrico e as setas a direção do vetor de Poynting (perpendiculares ao campo elétrico). A magnitude do vetor de Poynting é tão maior quanto mais escura a área<sup>21</sup>.

Através da resolução da equação de Laplace (Preyer, 2000) é possível chegar a resultados idênticos, supondo uma distribuição inicial de cargas elétricas. Neste caso, Figura 2.14, é considerado um circuito de resistência uniforme.

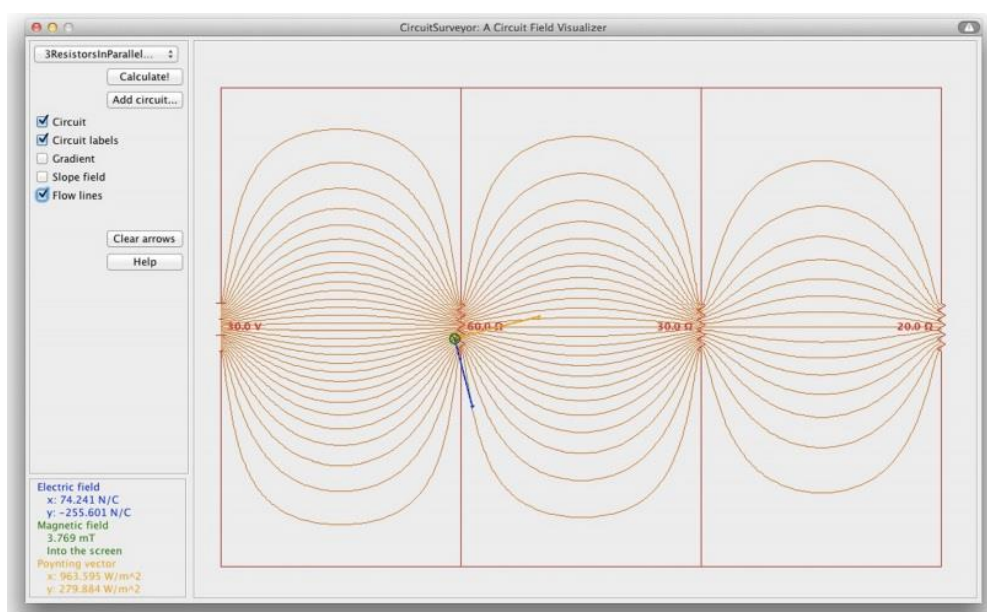


**Figura 2.14** - Representação do vetor de Poynting (setas) no exterior de um circuito<sup>22</sup>.

<sup>21</sup> Figura retirada de (Goibarg, 2005).

<sup>22</sup> Figura retirada de (Preyer, 2000).

Terá algum interesse referir ainda que, atualmente existe um *software* com o nome “*CircuitSurveyor*” (Styer, 2012) que encontra e desenha as “linhas” que o vetor de Poynting segue. Apesar da análise menos formal que este programa faz, ajuda a compreender a correlação entre as linhas equipotenciais e o fluxo de energia através de um método gráfico, ver Figura 2.15. Pois como o autor refere: “*The Poynting vector points along equipotentials, or in other words, the Poynting vector flow lines are equipotentials*”.



**Figura 2.15** – Figura gerada pelo *software* de circuito composto por uma bateria e três resistências. Estão representadas as linhas equipotenciais, que por sua vez indicam a direção do fluxo de energia.<sup>23</sup>

---

<sup>23</sup> Figura retirada de (Styer, 2012).

### **3. Caracterização do campo eletromagnético em *railguns***

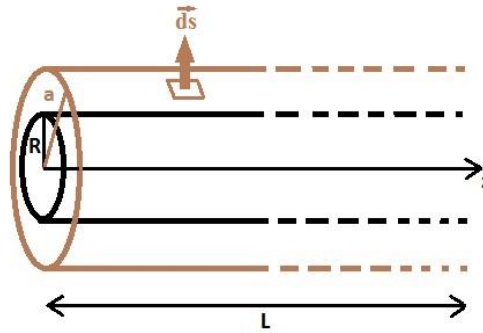
As *railguns* atualmente construídas possuem uma geometria de secção retangular de carris (Maniglia, 2013); (Power Labs, 2010); (Schroeder, 2007). No entanto, neste capítulo, devido à complexidade dos cálculos analíticos, decidiu-se simular os carris e projétil da *railgun* como condutores cilíndricos finitos. Esta alteração não só simplifica o problema, devido à simetria radial do condutor e ausência de efeitos de extremidade (por nós suposta, a não ser que seja infinito), como torna possível uma abordagem analítica do problema, sem comprometer a veracidade dos resultados.

Neste capítulo pretende-se aplicar os conhecimentos adquiridos no capítulo anterior, ou seja, caracterizar analiticamente o campo eletromagnético e respetivo fluxo de energia num sistema com geometria semelhante a uma *railgun*. Começou-se por definir o campo elétrico de um condutor cilíndrico, no caso eletrostático, comum no ensino do eletromagnetismo e posteriormente passou-se para o caso eletrodinâmico, na presença de corrente, adicionando componentes ao problema para o tornar o mais semelhante possível com a realidade.

#### **3.1. Caso eletrostático**

##### **3.1.1. Campo elétrico**

Começou-se com o exemplo onde existe apenas um condutor cilíndrico infinitamente longo não percorrido por corrente, ou seja, não existem cargas em movimento.



**Figura 3.1** - Condutor cilíndrico de raio  $R$  (preto), superfície de Gauss de raio  $a$  (castanho) e  $\vec{dS}$  um elemento de superfície.

Este é um caso de um condutor em equilíbrio eletrostático, e como seria de esperar o campo elétrico ( $\vec{E}$ ) dentro do condutor é nulo. Para calcular o campo fora do cilindro utilizou-se a lei de Gauss, Equação (3.1), em que  $d\vec{S}$  é um elemento de superfície da lateral do cilindro de Gauss,  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo ( $\epsilon_0 = 8.854\,187\,817\dots \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ) e  $Q$  a carga total dentro da superfície de Gauss que se queira considerar,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad (3.1)$$

É expectável que apenas exista fluxo de  $\vec{E}$  na superfície lateral do cilindro de Gauss (cor castanha na Figura 3.1) e não nas bases do cilindro (porque é infinito), pois o campo  $\vec{E}$  aponta de forma radial e normal à superfície do condutor.

Por razões de simetria,  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ , pois o campo e os elementos de superfície têm sempre a mesma direção. Como  $|\vec{E}|$  é constante ao longo do cilindro à mesma distância pode ser retirado do integral, ficando com a Equação (3.2):

$$E \oiint_S dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad (3.2)$$

Calculando o integral sobre o cilindro de comprimento, à escolha,  $L$  e raio  $a$ , obtém-se:

$$E \, 2\pi a L = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad (3.3)$$

Relacionando a carga total,  $Q$ , dentro do cilindro de Gauss, de comprimento  $L$ , com a densidade linear de carga,  $\lambda$ , do condutor, através da Equação (3.4):

$$Q = \sigma 2\pi RL = \lambda L, \quad (3.4)$$

obtem-se a forma de final do campo elétrico:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda}{2\pi a} \hat{r}. \quad (3.5)$$

## 3.2. Caso eletrodinâmico

Devido à complexidade na abordagem analítica deste problema, já abordado no capítulo anterior, particularmente no comportamento das cargas em sistemas com curvas (comportamento quadripolar das cargas), iremos separar o nosso sistema em dois sistemas distintos, um com os carris da *railgun* que consiste em dois condutores cilíndricos paralelos percorridos por correntes contrárias e outro que simula o projétil e os seus contactos com os carris.

### 3.2.1. Sistema de carris

#### 3.2.1.1. Campo elétrico

Na eletrodinâmica o campo elétrico, geralmente, é dado pelo gradiente do potencial,  $\nabla\varphi$ , com uma contribuição da derivada do potencial vetor,  $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ,

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt}, \quad (3.6)$$

no entanto, a derivada do potencial vetor é zero quando estamos perante campos magnéticos ou correntes não variáveis no tempo, ou seja, no caso eletrostático, ficando simplesmente  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ . Por outro lado, a relação geral entre o potencial vetor e a sua fonte, a densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r}', t')$ , é dada por (Jefimenko, 1989):

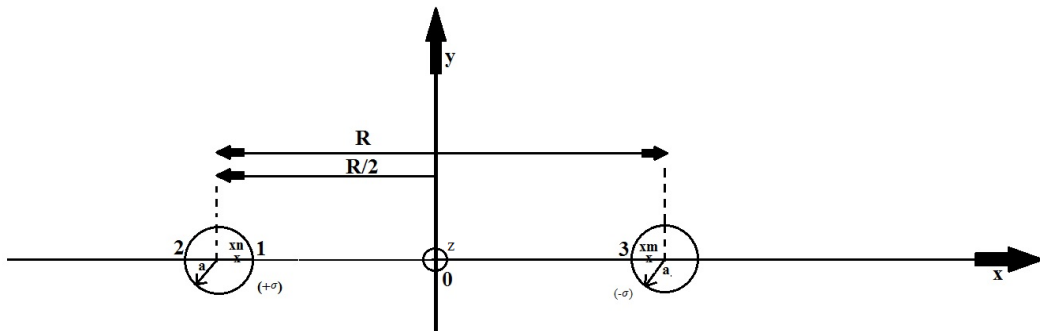
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{r'} d^3 r' \quad (3.7)$$

Inicialmente iremos assumir que a corrente,  $I$ , é constante, ou seja,  $d\vec{A}/dt = 0$ , posteriormente irá ser estudada a contribuição da derivada do potencial vetor no nosso sistema *railgun*.

Utilizando a expressão do campo elétrico na Equação (3.6) mas com  $d\vec{A}/dt = 0$ , o potencial elétrico de um fio carregado (com densidade de carga  $\sigma$  (C/m<sup>2</sup>)) é dado pela Equação (3.8), em que  $\rho$  representa a distância na perpendicular ao centro do fio e  $C$  é uma constante de integração arbitrária. Isto é o potencial de um fio carregado eletricamente, não de um fio condutor de corrente<sup>24</sup>,

$$\varphi(\rho) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + C. \quad (3.8)$$

Consideremos agora dois condutores cilíndricos que se prolongam no eixo  $z$  (para dentro da folha) carregado com  $(+\sigma)$  no fio à esquerda e  $(-\sigma)$  no fio à direita, como representado na Figura 3.2. Os cilindros têm raio  $a$  e os centros encontram-se separados por uma distância  $R$ . Esta é uma geometria semelhante à da *railgun*, na medida em que existem dois condutores paralelos.



**Figura 3.2** - Dois condutores cilíndricos paralelos carregados simetricamente,  $(\sigma +)$  à esquerda e  $(\sigma -)$  à direita.

Para que as superfícies cilíndricas sejam equipotenciais, é necessário imaginar duas linhas carregadas nas posições  $x_n$  e  $x_m$  (método das imagens), paralelas aos cilindros

<sup>24</sup> Esta expressão resulta de termos considerado um fio de carga de extensão infinita, o que explica a ocorrência de divergência quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Na realidade apenas serve para calcular diferenças de potencial, não potencial absoluto.

(Bessonov, 1976). Exigimos, entre eles, que sejam em particular,  $\varphi_1 = \varphi_2$  no cilindro da esquerda e ainda  $\varphi_1 = -\varphi_3$  entre cilindros.

Para os pontos 1 com  $x_1 = (-R/2 + a)$  e 2 com  $x_2 = (-R/2 - a)$ , vem:

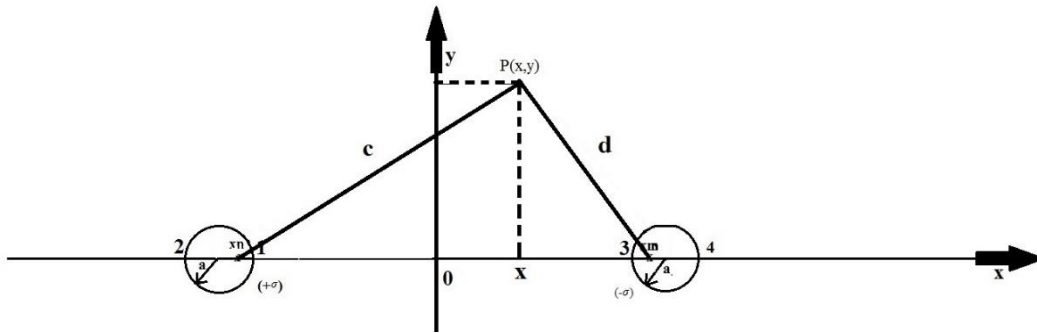
$$\varphi_1 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{|x_1 - x_m|}{|x_1 - x_n|}\right) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\left|\frac{-R}{2} + a - x_m\right|}{\left|\frac{-R}{2} + a - x_n\right|}\right), \quad (3.9)$$

$$\varphi_2 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\left|\frac{-R}{2} + a - x_m\right|}{\left|\frac{-R}{2} + a + x_n\right|}\right) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\left|\frac{-R}{2} + a - x_m\right|}{\left|\frac{-R}{2} + a + x_n\right|}\right), \quad (3.10)$$

Com  $x_n = x_m$ , e dado que a superfície é, para cada  $z$ , uma equipotencial, ou seja,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , é possível igualar as duas expressões e extrair o valor de  $x_m$  e  $x_n$ , que são as posições das linhas fictícias<sup>25</sup>:

$$x_m = \sqrt{\frac{R^2}{4} - a^2} \Rightarrow x_n = -\sqrt{\frac{R^2}{4} - a^2}. \quad (3.11)$$

Pretende-se agora expressar o potencial nas coordenadas  $x$  e  $y$  para um ponto qualquer,  $P(x, y)$ , respeitando as condições anteriormente impostas, como representa a Figura 3.3.



**Figura 3.3** - Condutores paralelos carregados simetricamente. Pretende-se calcular o potencial para o ponto  $P(x, y)$ .

As distâncias do ponto  $P(x, y)$  às linhas fictícias são dados pelas letras  $c$  e  $d$ , em que:

$$c = x + \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - 0)^2}, \quad (3.12)$$

<sup>25</sup> Detalhes dos cálculos disponíveis no Apêndice A.

$$d = x + \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - 0)^2}. \quad (3.13)$$

e substituindo as Equações (3.12) e (3.13) em (3.14),

$$\varphi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (3.14)$$

obtêm-se:

$$\varphi(x, y) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{4} - a^2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{4} - a^2}\right)^2 + y^2}. \quad (3.15)$$

Aplicando a Equação (3.15) aos pontos 2 e 4 obtêm-se respetivamente:

$$\varphi\left(-\frac{R}{2} - a, 0\right) = +\phi_0 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra - \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra + \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right), \quad (3.16)$$

$$\varphi\left(\frac{R}{2} + a, 0\right) = -\phi_0 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra + \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra - \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right). \quad (3.17)$$

Falta ainda descobrir o valor de  $\sigma/4\pi\epsilon_0$ , assumindo que este é constante ao longo dos condutores. Expressando o potencial dos dois fios ainda dependente parametricamente da densidade linear de carga  $\sigma$  (C/m) obtêm-se, com  $z = 0 \rightarrow \phi(x, y, z) = \phi_0$ ,

$$2\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \left( \ln \frac{\frac{R^2}{2} + Ra - \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra + \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} - \ln \frac{\frac{R^2}{2} + Ra + \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra - \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right). \quad (3.18)$$

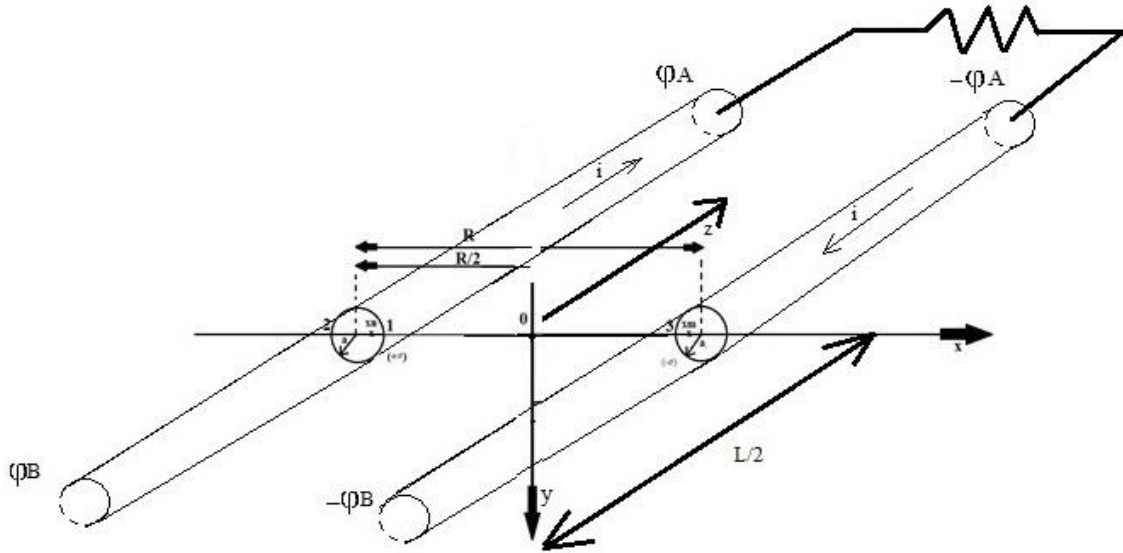
A expressão (3.18) permite extrair o valor de  $\sigma/4\pi\epsilon_0$ :

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\phi_0}{\ln \left( \frac{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}}{R + \sqrt{R^2 - 4a^2}} \right)}, \quad (3.19)$$

que completando a expressão geral (3.15) leva a:

$$\varphi(x, y) = \frac{\phi_0}{\ln \left( \frac{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}}{R + \sqrt{R^2 - 4a^2}} \right)} \ln \frac{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + y^2}. \quad (3.20)$$

Neste sistema, os fios estão posicionados paralelamente a uma distância mútua de  $R$ , têm comprimento  $L$ ,  $\varphi_B$  e  $-\varphi_B$  são a tensão nos fios para  $z = -L/2$ , e  $\varphi_A$  e  $-\varphi_A$  a tensão nos fios em  $z = L/2$ .



**Figura 3.4** - Sistema de dois condutores cilíndricos paralelos percorridos por correntes contrárias e uniformes.

A corrente percorre o fio esquerdo no sentido positivo do eixo  $z$  e volta no fio da direita. Assume-se que  $L \gg R/2$  de modo a desprezar os efeitos de extremidade. A densidade de corrente é dada pelas Equações (3.21) para o fio esquerdo e (3.22) para o fio direito,

$$\vec{j} = \left(\frac{I}{\pi a^2}\right) \hat{z}, \quad (3.21)$$

$$\vec{j} = \left(\frac{-I}{\pi a^2}\right) \hat{z}. \quad (3.22)$$

Para completar a Equação (3.20) falta adicionar a dependência em  $z$ . Como estamos perante condutores homogêneos (constituição e densidade constantes em toda a sua extensão), espera-se que exista uma queda de potencial linear. Assim sendo, e para que o potencial seja simétrico entre os dois fios para qualquer  $z$ , escolhemos,

$$\Phi_0(z) = \frac{(\varphi_A - \varphi_B)}{L} z + \frac{(\varphi_A + \varphi_B)}{2}, \quad (3.23)$$

em que por exemplo: se para  $z = 0$  no fio da esquerda tivermos 200 V no fio da direita temos que ter -200 V. Inicialmente não iremos considerar a influencia da variação do potencial ao longo do tempo, pois estamos perante corrente contínua e constante. Nestas condições, e dada a dependência do potencial vetor  $\vec{A}$  com a corrente elétrica temos:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0. \quad (3.24)$$

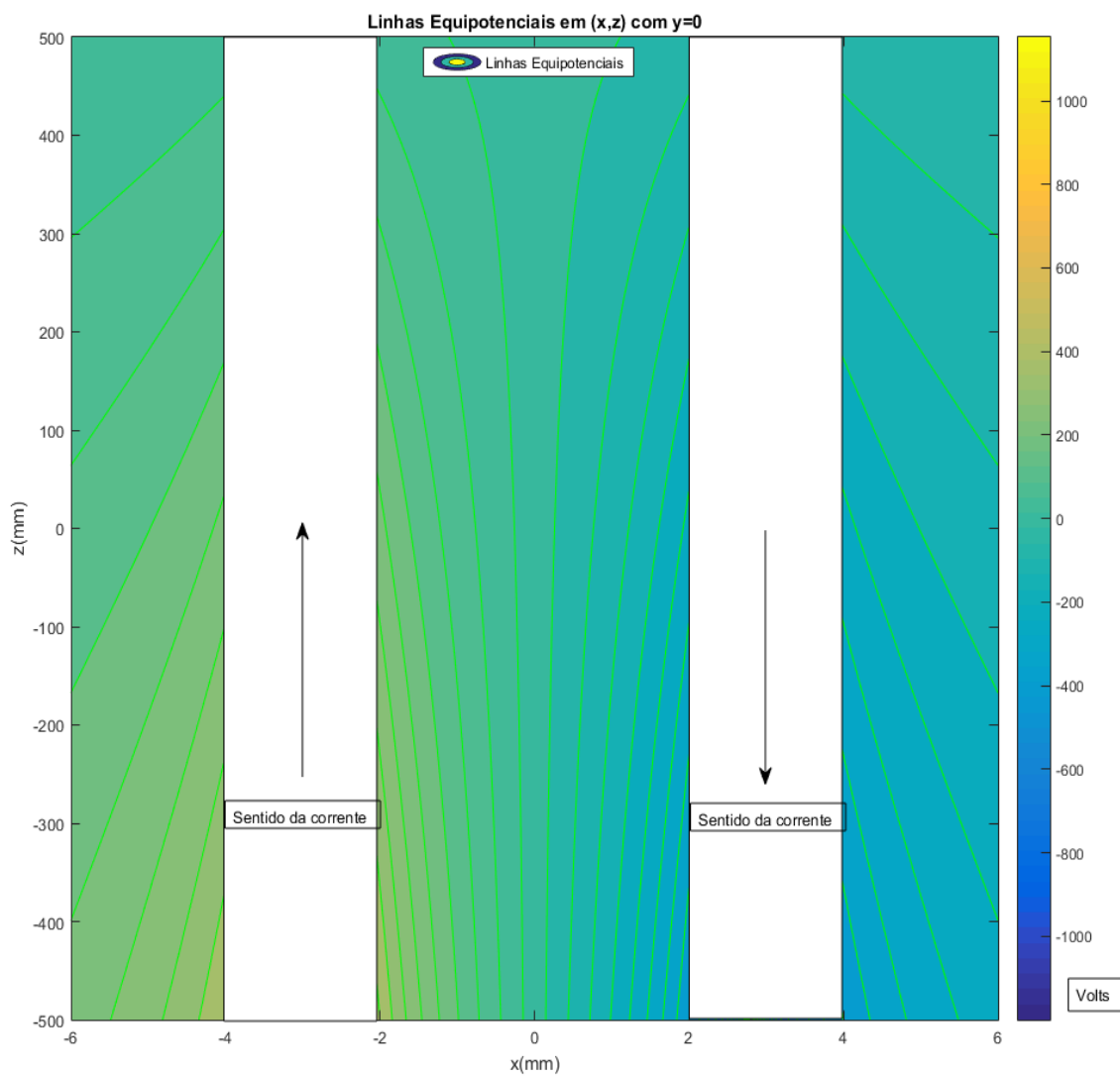
Com as Equações (3.20) e (3.23) chegamos à expressão final do potencial:

$$\varphi(x, y, z) = - \left( \frac{(\varphi_A - \varphi_B)}{L} z + \frac{(\varphi_A + \varphi_B)}{2} \right) \times \frac{1}{\ln \left( \frac{(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})} \right)} \ln \left( \frac{\left( x + \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - 4a^2} \right)^2 + y^2}{\left( x - \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - 4a^2} \right)^2 + y^2} \right). \quad (3.25)$$

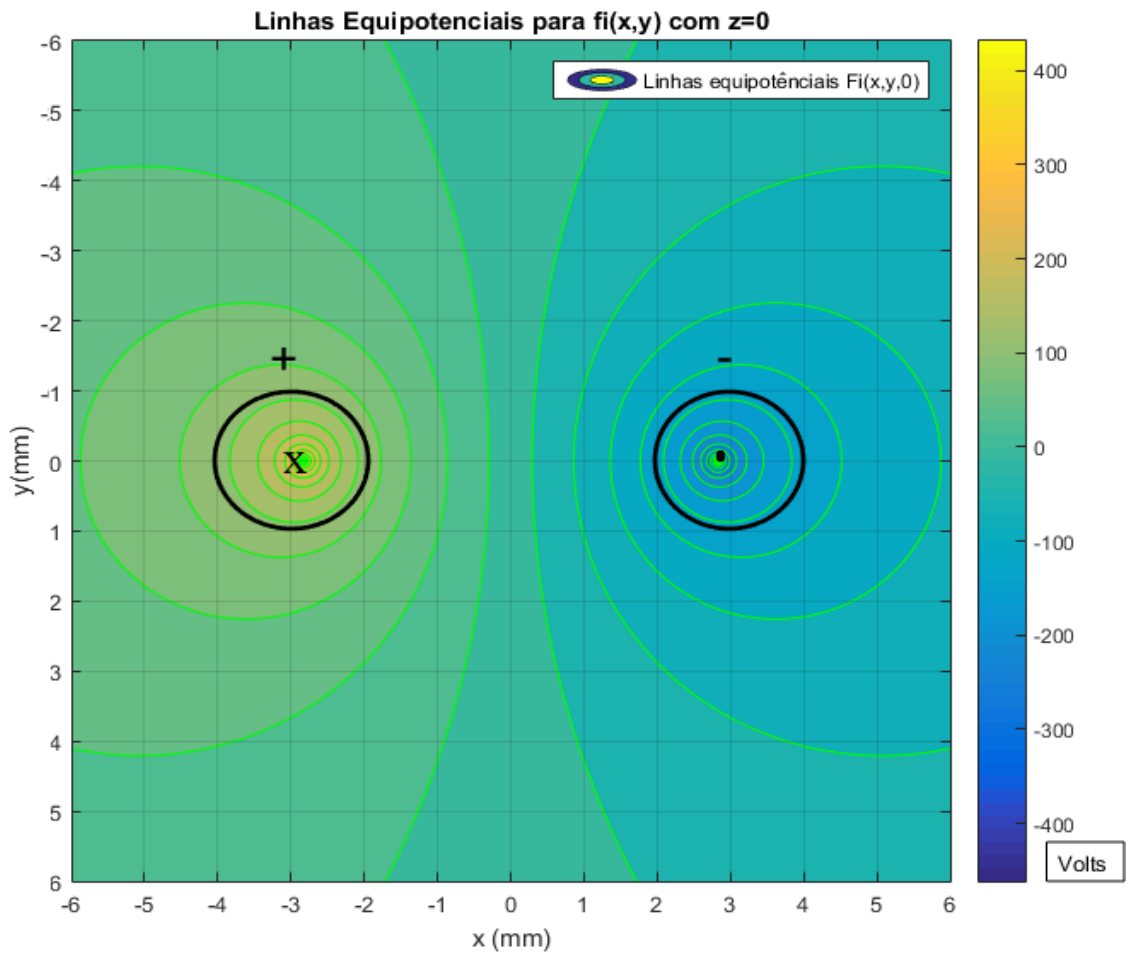
A partir da Equação (3.25) é possível traçar o mapa das linhas equipotenciais para os condutores paralelos. Para uma melhor percepção são apresentadas figuras<sup>26</sup> em planos 2D, em (x,z) com  $y = 0$  (visto de cima) e ainda em (x,y) com  $z = 0$  respectivamente, com  $R = 6 \text{ mm}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $\varphi_B = 400 \text{ V}$  e  $\varphi_A = 50 \text{ V}$ .

---

<sup>26</sup> Código Matlab para traçar as linhas equipotenciais do sistema disponível em Apêndice C.



**Figura 3.5** - Linhas equipotenciais geradas a partir da Equação 3.25 em  $(x, y)$  com  $z = 0$ .



**Figura 3.6** - Linhas equipotenciais geradas pela Equação 3.25, no plano  $(x, y)$  com  $z = 0$ .

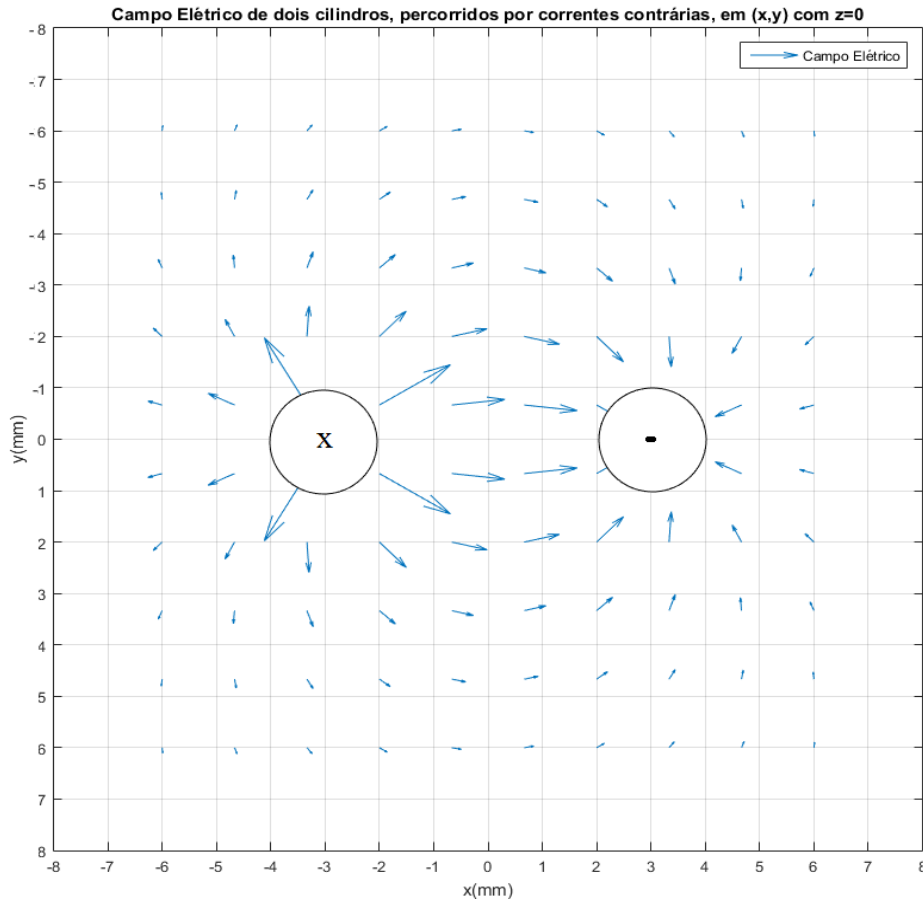
Com a expressão do potencial (Equação 3.25) é possível chegar ao valor do campo elétrico através do gradiente do potencial, com  $d\vec{A}/dt = 0$ :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\hat{x} + \frac{d\varphi}{dy}\hat{y} + \frac{d\varphi}{dz}\hat{z}\right), \quad (3.26)$$

expressando assim o resultado do campo elétrico, em todo o espaço e constante no tempo:

$$\begin{aligned}
\vec{E} = & -\left(\frac{(\varphi A - \varphi B)}{L}z + \frac{(\varphi A + \varphi B)}{2}\right) \frac{(\sqrt{R^2 - 4a^2})}{\ln\left(\frac{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})}{2a}\right)} \hat{x} \\
& \frac{(x^2 - y^2 + a^2 - \frac{R^2}{4})}{x^4 + y^4 + \frac{R^4}{16} + a^4 + 2x^2y^2 - \frac{R^2x^2}{2} + \frac{2^2x^2}{2} - 2a^2y^2 - \frac{R^2a^2}{2}}{\ln\left(\frac{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})}{2a}\right)} \hat{x} - \left(\frac{(\varphi A - \varphi B)}{L}z + \frac{(\varphi A + \varphi B)}{2}\right) \times \\
& \frac{(\sqrt{R^2 - 4a^2})}{\ln\left(\frac{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})}{2a}\right)} \times \frac{2xy}{x^4 + y^4 + \frac{R^4}{16} + a^4 + 2x^2y^2 - \frac{R^2x^2}{2} + \frac{2^2x^2}{2} - 2a^2y^2 - \frac{R^2a^2}{2}} \hat{y} + \\
& \frac{(\varphi A - \varphi B)}{L} \frac{1}{2\ln\left(\frac{(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{2a}\right)} \ln\left(\frac{(x - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2})^2 + y^2}{(x + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2})^2 + y^2}\right) \hat{z}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

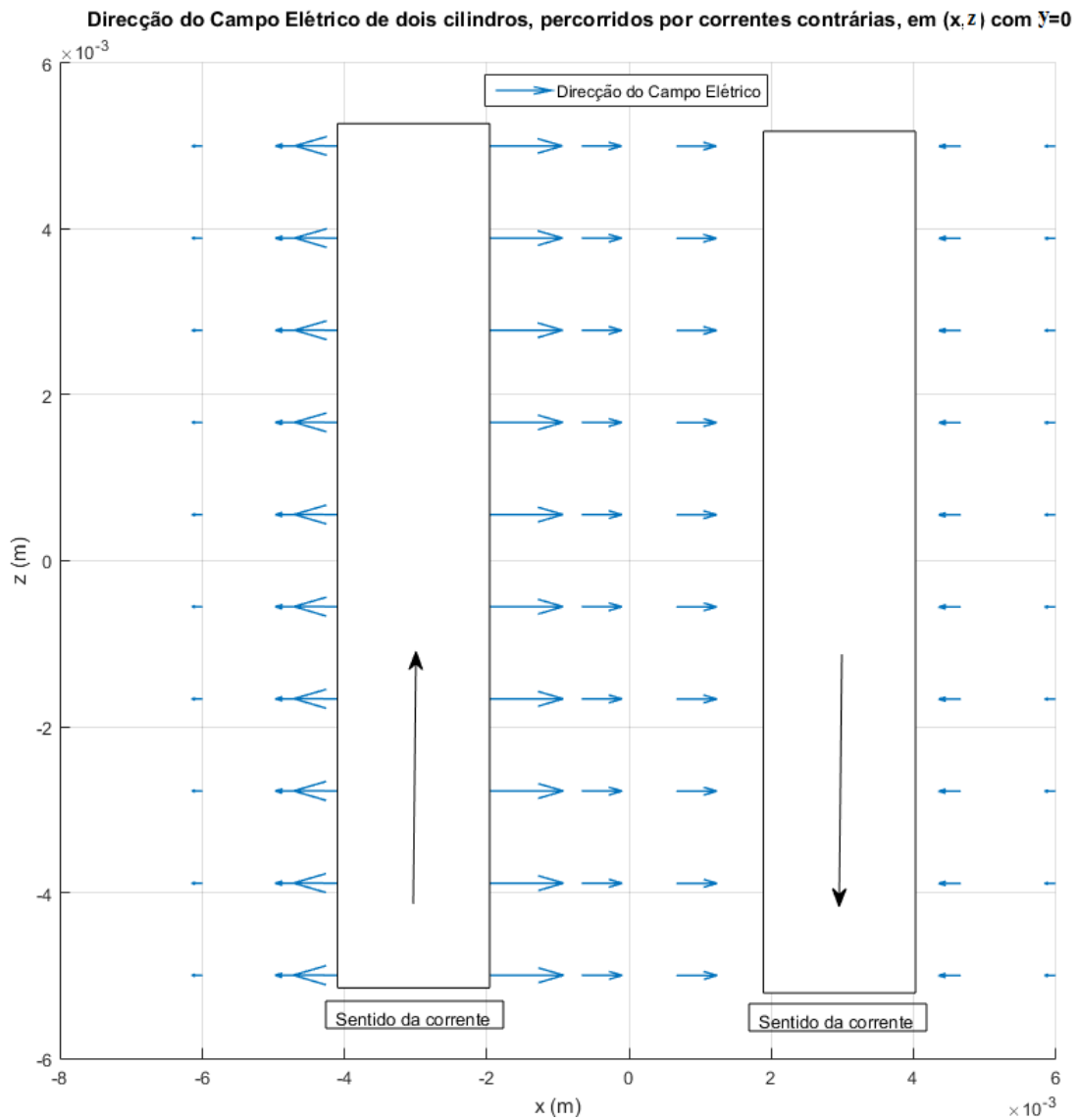
Com a expressão do campo elétrico (3.27) é possível então traçar as linhas de fluxo elétrico<sup>27</sup> entre os cilindros condutores em (x, y):



**Figura 3.7** - Campo elétrico de dois cilindros percorridos por correntes contrárias em (x,y) e com z = 0.

<sup>27</sup> Código Matlab utilizado para traçar linhas de fluxo de campo elétrico disponível em Apêndice C.

É possível observar que o campo sai do condutor onde existem predominantemente cargas positivas (condutor esquerdo) para o condutor onde existem maioritariamente cargas negativas (condutor direito). Assim acontece para o plano  $(x, z)$  como se pode ver na figura seguinte:

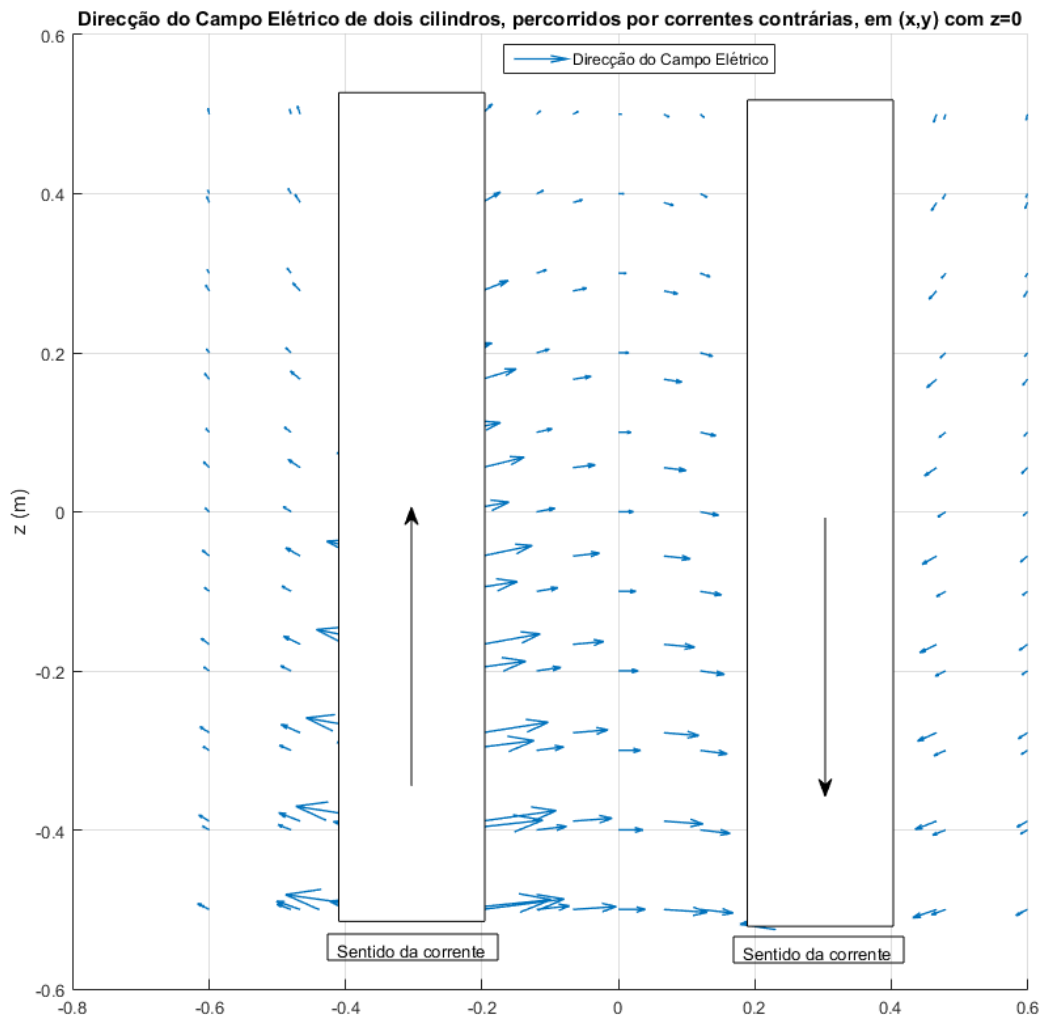


**Figura 3.8** - Campo elétrico de dois cilindros, percorridos por correntes contrárias, em  $(x, z)$  com  $y = 0$ .

Analisando esta última figura, o campo elétrico praticamente não tem distorções entre os condutores, isto deve-se à proximidade a que os centros dos condutores se encontram (6 mm), assemelhando-se ao campo elétrico entre placas de condensadores.

A componente  $z$  do campo  $\vec{E}$  entre os carris é na ordem de 1000 vezes superior à componente  $x$ .

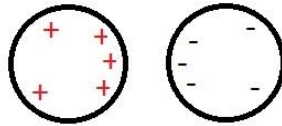
No entanto, no trabalho de Assis e Mania (Assis e Mania, 1999) é feita referência que para as dimensões do sistema por eles considerado, uma de linha de transmissão, a componente  $x$  do campo elétrico é cerca de 12 vezes superior à componente  $z$ . Isto leva a uma “distorção” do campo elétrico, que é possível obter com a mesma expressão, modificando os parâmetros do sistema. Aumentando a distância entre condutores para  $R = 0.6 \text{ m}$  e o raio dos condutores para  $a = 0.1 \text{ m}$ , obtém-se um campo que está de acordo com o obtido por Assis e Mania, como se pode ver na figura seguinte:



**Figura 3.9** - Campo elétrico de dois cilindros, percorridos por correntes contrárias, em  $(x,z)$  com  $y = 0$ . Este sistema tem como dimensões  $R = 0.6 \text{ m}$  e  $a = 0.1 \text{ m}$ .

### 3.2.1.2. Densidade de cargas superfície

Quando dois condutores paralelos são percorridos por corrente, em que um dos condutores faz o caminho de retorno da corrente, obtém-se qualitativamente uma distribuição de cargas<sup>28</sup> em superfície (Assis e Mania, 1999) do tipo:



**Figura 3.10** - Figura qualitativa de secção de dois cilindros condutores. É visível que existe uma concentração de cargas positivas e negativas na zona de maior proximidade dos condutores.

Esta maior concentração de cargas no espaço entre os condutores ocorre, pois, as cargas positivas e negativas atraem-se, logo estas irão encontrar-se maioritariamente na zona mais próxima entre eles, entre condutores.

A relação geral entre o potencial eletrostático e as cargas elétricas é dada pela lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.28)$$

da qual é possível obter a Equação (3.29). A densidade de cargas superfície,  $\sigma$ , é dada pela multiplicação entre permitividade do vácuo,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ (F. m}^{-1}\text{)}$  e a componente radial do campo elétrico na superfície do condutor,  $\vec{E}_\rho$ , ou seja:

$$\sigma = \epsilon_0 |\vec{E}_\rho| \quad (\text{C/m}^{-2}). \quad (3.29)$$

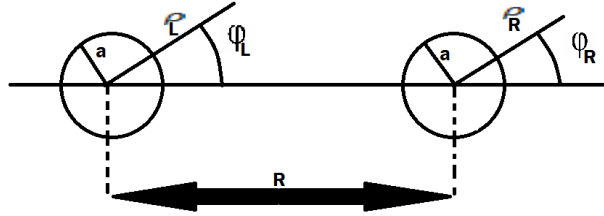
Para realizar a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas é necessário substituir:

---

<sup>28</sup> De notar que as densidades de carga são à superfície (externa).

$$\begin{aligned}
x &= \rho_L \cos \varphi_L - \frac{R}{2}; y = \rho_L \sin \varphi_L; \hat{x} = \rho_L \cos \varphi_L - \rho_L \sin \varphi_L; \hat{y} = \\
&= \rho_L \sin \varphi_L + \rho_L \cos \varphi_L.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Nesta fase estamos a utilizar um eixo de coordenadas independente para cada condutor,  $L$  para o condutor esquerdo e  $R$  para o direito, como demonstra a seguinte figura:



**Figura 3.11** - Sistema de coordenadas cilíndricas para cada um dos condutores.

Aplicando a Equação (3.29) à (3.27) fica-se, portanto, com o campo elétrico expresso em coordenadas cilíndricas referentes ao condutor da esquerda:

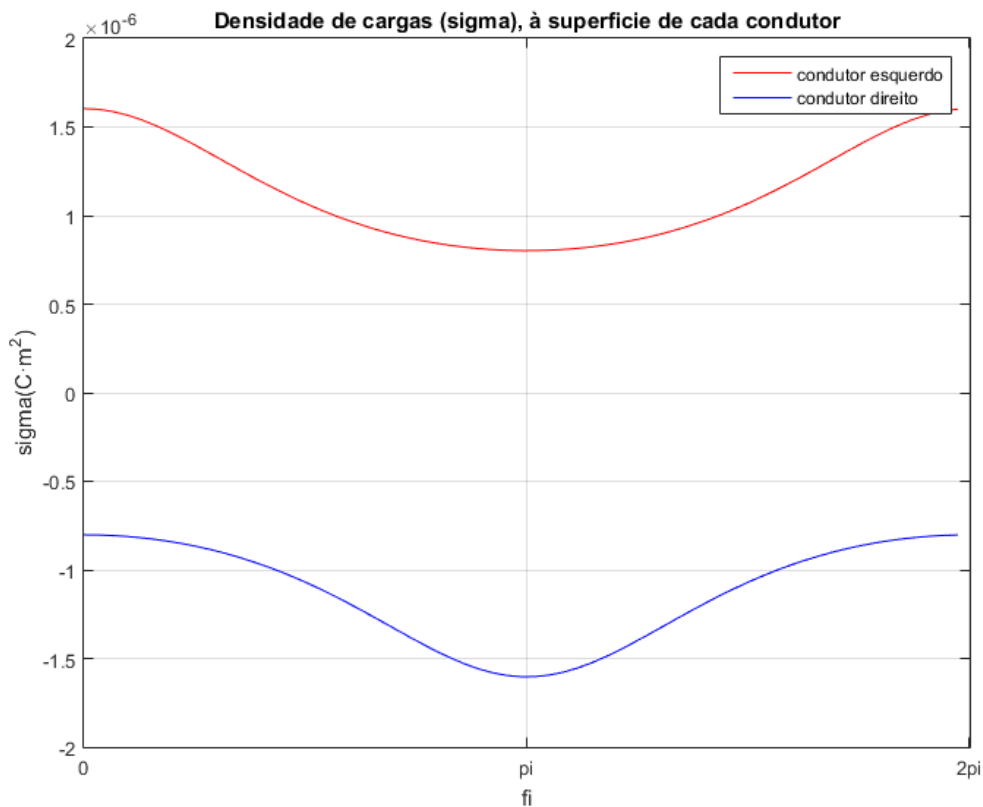
$$\begin{aligned}
\vec{E}(\rho, \varphi, z) &= - \left( \frac{(\varphi A - \varphi B)}{L} z + \frac{(\varphi A + \varphi B)}{2} \right) \frac{(\sqrt{R^2 - 4a^2})}{\ln \left( \frac{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})}{2a} \right)} \times \\
&\frac{(\rho_L^2 \cos(\varphi_L) - \rho_L R + a^2 \cos(\varphi_L))}{\rho_L^4 - 2\rho_L^3 R \cos(\varphi_L) + \rho_L^2 2R^2 + a^4 + 2\rho_L^2 a^2 (\cos^2(\varphi_L) - \sin^2(\varphi_L)) - 2\rho_L R a^2 \cos(\varphi_L)} \hat{\rho}_L \\
&- \left( \frac{(\varphi A - \varphi B)}{L} z + \frac{(\varphi A + \varphi B)}{2} \right) \frac{(\sqrt{R^2 - 4a^2})}{\ln \left( \frac{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})}{2a} \right)} \times \\
&\frac{\sin(\varphi_L)(\rho_L^2 - a^2)}{\rho_L^4 - 2\rho_L^3 R \cos(\varphi_L) + \rho_L^2 2R^2 + a^4 + 2\rho_L^2 a^2 (\cos^2(\varphi_L) - \sin^2(\varphi_L)) - 2\rho_L R a^2 \cos(\varphi_L)} \hat{\varphi}_L \tag{3.31} \\
&+ \frac{(\varphi A - \varphi B)}{L} \frac{1}{2 \ln \left( \frac{(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{2a} \right)} \times \\
&\ln \left( \frac{\rho_L^2 - \rho_L \cos(\varphi_L)(R + \sqrt{R^2 - 4a^2}) + \frac{R^2}{2} - a^2 + \frac{R\sqrt{R^2 - 4a^2}}{2}}{\rho_L^2 - \rho_L \cos(\varphi_L)(R - \sqrt{R^2 - 4a^2}) + \frac{R^2}{2} - a^2 - \frac{R\sqrt{R^2 - 4a^2}}{2}} \right) \hat{z},
\end{aligned}$$

para obter a densidade de cargas à superfície é necessário efetuar  $\rho = a$  e verificar o seu andamento em  $\varphi$  no intervalo de 0 a  $2\pi$ . Aplicando apenas a componente radial da Equação (3.31) em (3.29) vem,

$$\sigma_{L(\varphi,z)} = \left( \frac{(\varphi A - \varphi B)}{L} z + \frac{(\varphi A + \varphi B)}{2} \right) \frac{\varepsilon_0 \sqrt{R^2 - 4a^2}}{2a \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - 4a^2}}{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}}} \frac{1}{\cos(\varphi_L)}, \quad (3.32)$$

$$\sigma_{R(\varphi,z)} = - \frac{(\varphi A - \varphi B)}{L} z + \frac{(\varphi A + \varphi B)}{2} \frac{\varepsilon_0 \sqrt{R^2 - 4a^2}}{2a \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - 4a^2}}{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}}} \frac{1}{\cos(\varphi_R)}. \quad (3.33)$$

expressando as Equações (3.30) e (3.31) num gráfico com o andamento de  $\sigma^{29}$  e fazendo  $\varphi = \varphi_R = \varphi_L$ , à superfície de ambos os condutores, obtém-se:



**Figura 3.12** - Densidade de cargas à superfície dos condutores.

De notar que no condutor esquerdo, para  $\varphi = 0$  e  $\varphi = 2\pi$  o valor da densidade de cargas é maior, ou seja, existem mais cargas positivas nas zonas mais perto do condutor direito, como esperado. À medida que  $\varphi$  aumenta, o valor começa a decrescer até atingir o seu mínimo, em  $\varphi_L = \pi$ , que corresponde ao ponto mais afastado do cilindro esquerdo. De realçar também que se fixar  $\varphi_L$ , a densidade de cargas de superfície decresce linearmente desde início do condutor esquerdo,  $z = -L/2$ , até ao final,  $z = L/2$ . O oposto ocorre

<sup>29</sup> Código Matlab utilizado para construir a Figura 3.12 disponível em Apêndice E.

para  $\sigma_R$  fixando  $\varphi_R$ . À primeira vista poder-se-ia pensar que para cada  $z$ , as cargas seriam simétricas entre condutores, algo que não acontece, pois se analisarmos a figura anterior as curvas são ligeiramente diferentes. Consequência da última parcela das Equações (3.30) e (3.31),

$$\frac{1}{\frac{R}{2} - \text{acos}(\varphi_L)} \text{ vs } \frac{1}{-\frac{R}{2} - \text{acos}(\varphi_R)}, \quad (3.34)$$

porque se passar o sinal negativo no início da Equação (3.33) para a última parcela, torna-se evidente que a simetria não existe. No entanto, apesar de que para cada  $z$  as cargas não serem simétricas, o integral das cargas superfície na periferia de cada condutor dá a quantidade de cargas por unidade de área  $\lambda(z)$ ,

$$\lambda_R(z) = - \int_{\varphi_R}^{2\pi} a \sigma_{R(\varphi_R)} d\varphi_R = -\lambda_L(z), \quad (3.35)$$

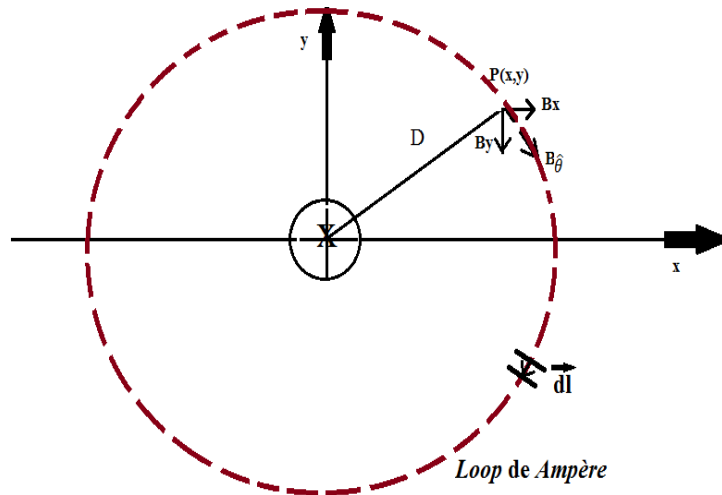
que indica que a quantidade de cargas positivas e negativas totais são iguais, como seria de esperar, pois o sistema como um todo é neutro.

### 3.2.1.3. Campo magnético

O campo magnético, para este sistema, é essencialmente a soma vetorial de dois campos magnéticos de um cilindro condutor percorrido por corrente. Tanto dentro como fora do condutor, o campo pode ser calculado pela lei de Ampère, dada a simetria da situação:

$$\oint_{loop} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}. \quad (3.36)$$

Aqui o integral é calculado sobre o contorno circular de raio  $D$  com origem no centro da secção do cilindro. Esta secção pode estar em qualquer coordenada do eixo  $z$ , pois não há razão para esperar que o campo magnético tenha intensidades diferentes ao longo do cilindro, para iguais valores do  $D$  (simetria cilíndrica). Do lado direito da equação anterior,  $\mu_0$  é a permeabilidade do vácuo ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ ) e  $I_{enc}$  é a corrente existente dentro dos limites da superfície, fluindo ao longo do eixo  $z$ .



**Figura 3.13** - Sistema de um cilindro percorrido por corrente, decomposto em componentes das coordenadas cartesianas.

As linhas de força do campo magnético formam circunferências em torno do condutor, e o seu sentido dependerá do sentido da corrente, bastando aplicar a regra da mão direita. Por exemplo, escolhendo o sentido da circulação como o mesmo que o do campo magnético formado (ver Figura 3.13), vemos que  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$ . Sendo em coordenadas cartesianas a distância  $D$  dada por  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , fica

$$\vec{B}(x, y) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\theta}, \quad (3.37)$$

onde o versor  $\hat{\theta}$  que indica a direção em que o campo magnético aponta e é dado por:

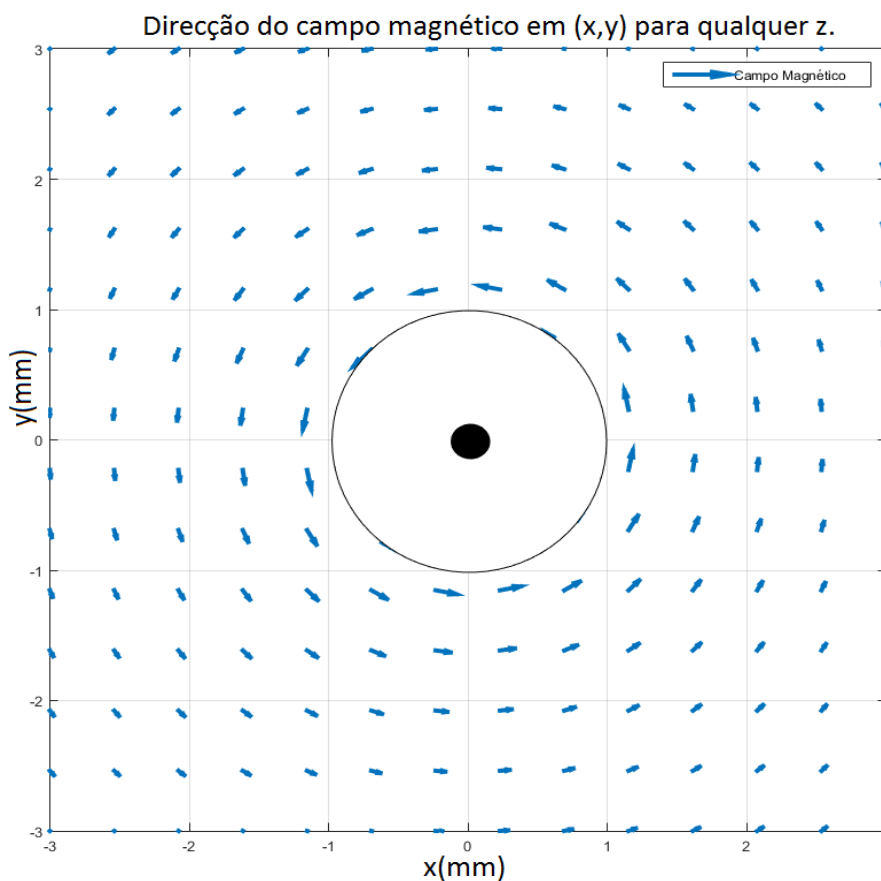
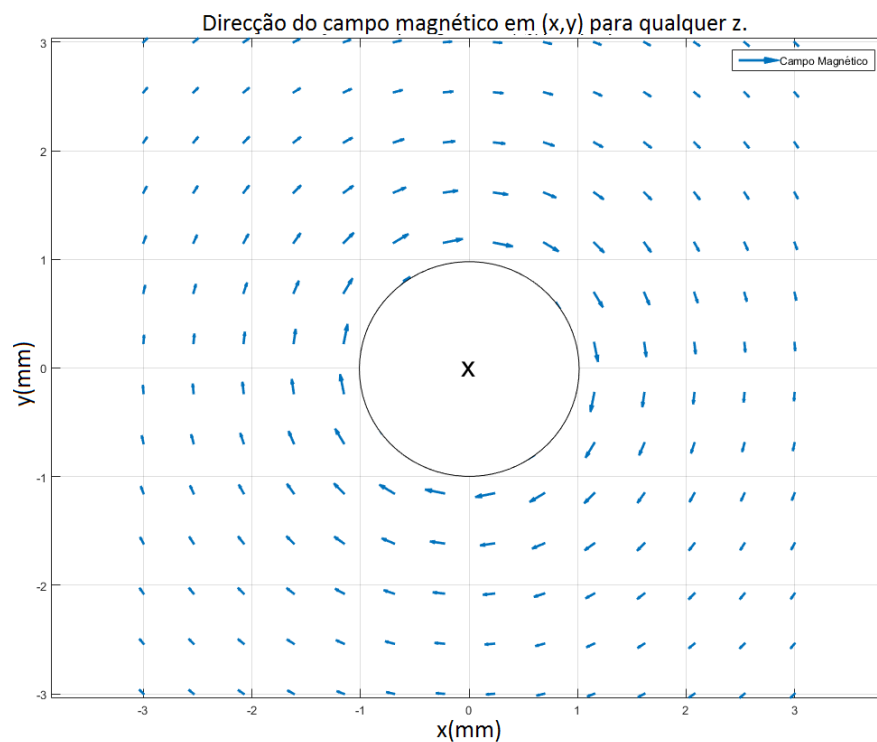
$$\hat{\theta} = \sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{y}. \quad (3.38)$$

Decompondo o campo magnético em duas componentes cartesianas, x e y, ficamos com:

$$B_x(x, y) = \frac{\mu_0 I y}{2\pi (x^2 + y^2)}, \quad (3.39)$$

$$B_y(x, y) = \frac{\mu_0 I (-x)}{2\pi (x^2 + y^2)}. \quad (3.40)$$

Graficamente o campo magnético dado pelas Equações (3.37) e (3.38) forma a seguinte figura:

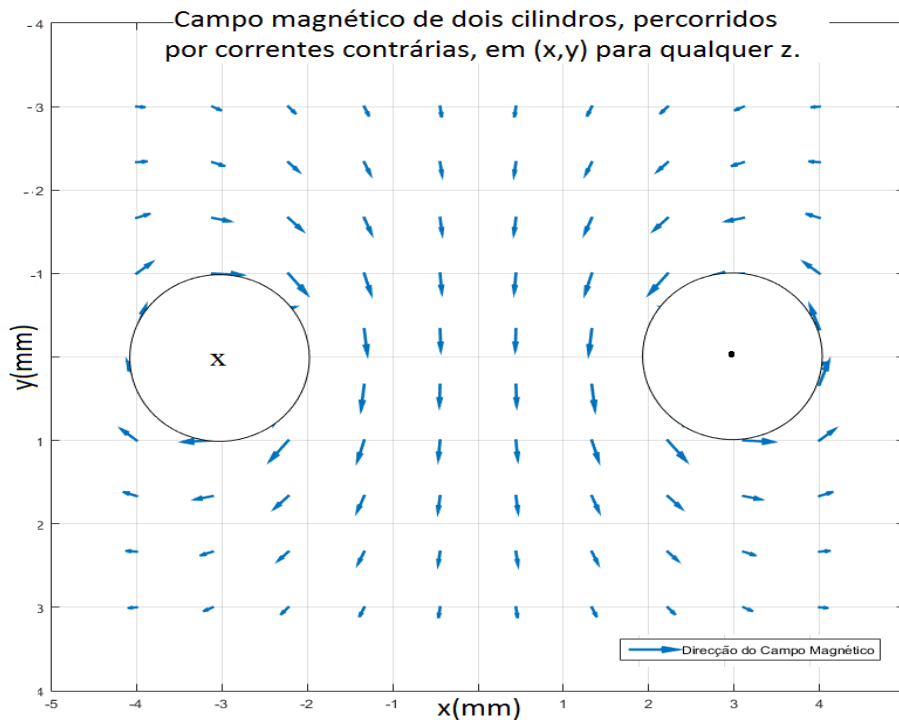


**Figura 3.14** - Sistema de um cilindro percorrido por corrente, decomposto em componentes das coordenadas cartesianas. Em cima com a corrente a fluir para dentro da folha e em baixo com a corrente a fluir para fora da folha.

Com o campo magnético para cada um dos cilindros, torna-se fácil obter o campo total do sistema com os dois cilindros condutores percorridos por correntes opostas. Antes de efetuar a soma vetorial dos dois campos é necessário passar a origem do centro de coordenadas de ambos os cilindros para um ponto em comum, nomeadamente para meio dos dois cilindros como exemplificado na Figura 3.4 atrás, ou seja, uma translação de eixo. Assumindo que os cilindros estão distanciados por uma distância  $R$ , o centro de coordenadas ficará em  $R/2$  isto faz com que  $x = R/2 + x$ . Ficando assim com campo magnético total do sistema dado pela seguinte expressão:

$$\vec{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} y \left[ \frac{1}{\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{1}{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2} \right] \hat{x} - \left[ \frac{x + \frac{R}{2}}{\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{x - \frac{R}{2}}{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2} \right] \hat{y}. \quad (3.41)$$

Com a Equação (3.41) traçou-se as linhas do campo magnético<sup>30</sup> em torno dos dois condutores paralelos percorridos por correntes contrárias:



**Figura 3.15** - Campo magnético exterior de um cilindro condutor percorrido por corrente, à esquerda corrente a fluir para dentro da folha, à direita corrente a fluir para fora da folha.

<sup>30</sup> Código utilizado para traçar as linhas de fluxo de campo magnético disponível em Apêndice B

### 3.2.1.4. Vetor de Poynting

Como estudado no capítulo anterior, o vetor de Poynting descreve a magnitude e direção do fluxo de energia por unidade de área, e é definido pela seguinte expressão:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{W/m}^2). \quad (3.42)$$

É de grande importância saber como a energia flui neste sistema e para onde vai. Um dos grandes problemas de uma *railgun* é sem dúvida o desgaste do material causado pelas temperaturas elevadas a que está exposta. Este aquecimento para além de ser gerado através da fricção dos materiais, particularmente entre carris e projétil, é também devido à transferência rápida de energia (descrita pelas curvas de descarga dos condensadores) num autêntico curto-circuito, para o interior do material condutor e para os contactos com o projétil.

Nesta fase, temos o campo elétrico e o campo magnético, dado pelas Equações (3.26) e (3.39), definidos para o nosso sistema, pelo que é possível descrever a 3 dimensões o vetor de Poynting. O produto externo de  $\vec{E}$  com  $\vec{B}$  pode ser desenvolvido por,

$$\vec{E} \times \vec{B} = (E_y B_z - E_z B_y) \hat{x} + (E_z B_x - E_x B_z) \hat{y} + (E_x B_y - E_y B_x) \hat{z}, \quad (3.43)$$

como o campo magnético não tem componente segundo o eixo z, ver Equação (3.41), o produto externo simplifica para:

$$\vec{E} \times \vec{B} = (-E_z B_y) \hat{x} + (E_z B_x) \hat{y} + (E_x B_y - E_y B_x) \hat{z}. \quad (3.44)$$

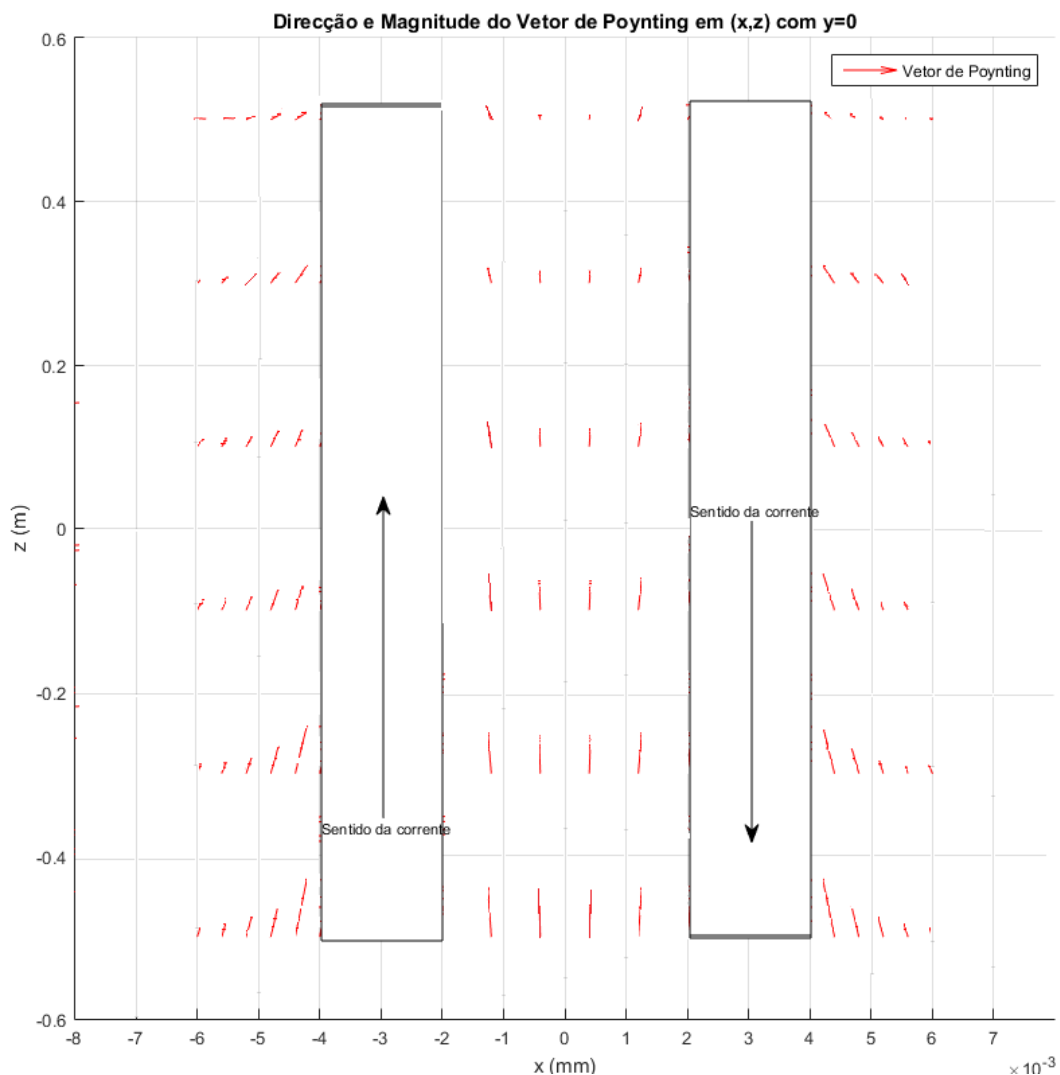
Desenvolvendo a Equação (3.44) ficamos com a expressão final do vetor de Poynting para o sistema de dois condutores cilíndricos paralelos percorridos por correntes contrárias:

$$\begin{aligned}
S_x(x, y, z) &= -\frac{(\varphi A - \varphi B)I}{4\pi L} \frac{1}{\ln\left(\frac{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}}{2a}\right)} \times \\
&\quad \ln \frac{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + y^2} - \frac{x + \frac{R}{2}}{\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{x - \frac{R}{2}}{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2}; \\
S_y(x, y, z) &= \frac{(\varphi A - \varphi B)I}{4\pi L} \frac{1}{\ln\left(\frac{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}}{2a}\right)} \ln \frac{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + y^2} \times \\
&\quad y \frac{1}{\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{1}{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2}; \\
S_z(x, y, z) &= -\left(\frac{(\varphi A - \varphi B)}{L} Z + \frac{(\varphi A + \varphi B)}{2}\right) \frac{(\sqrt{R^2 - 4a^2})}{2\pi \ln\left(\frac{R + \sqrt{R^2 - 4a^2}}{2a}\right)} \times \\
&\quad \frac{I\left(x^2 - y^2 + a^2 - \frac{R^2}{4} + 2xy\right)}{x^4 + y^4 + \frac{R^4}{16} + a^4 + 2x^2y^2 - \frac{R^2x^2}{2} + \frac{2^2x^2}{2} - 2a^2y^2 - \frac{R^2a^2}{2}} + \\
&\quad \frac{-x + y - \frac{R}{2}}{\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{x + y - \frac{R}{2}}{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Visualizando o vetor de Poynting gerado pela Equação (3.45) aplicada ao nosso sistema *railgun* obtém-se a seguinte figura<sup>31</sup>:

---

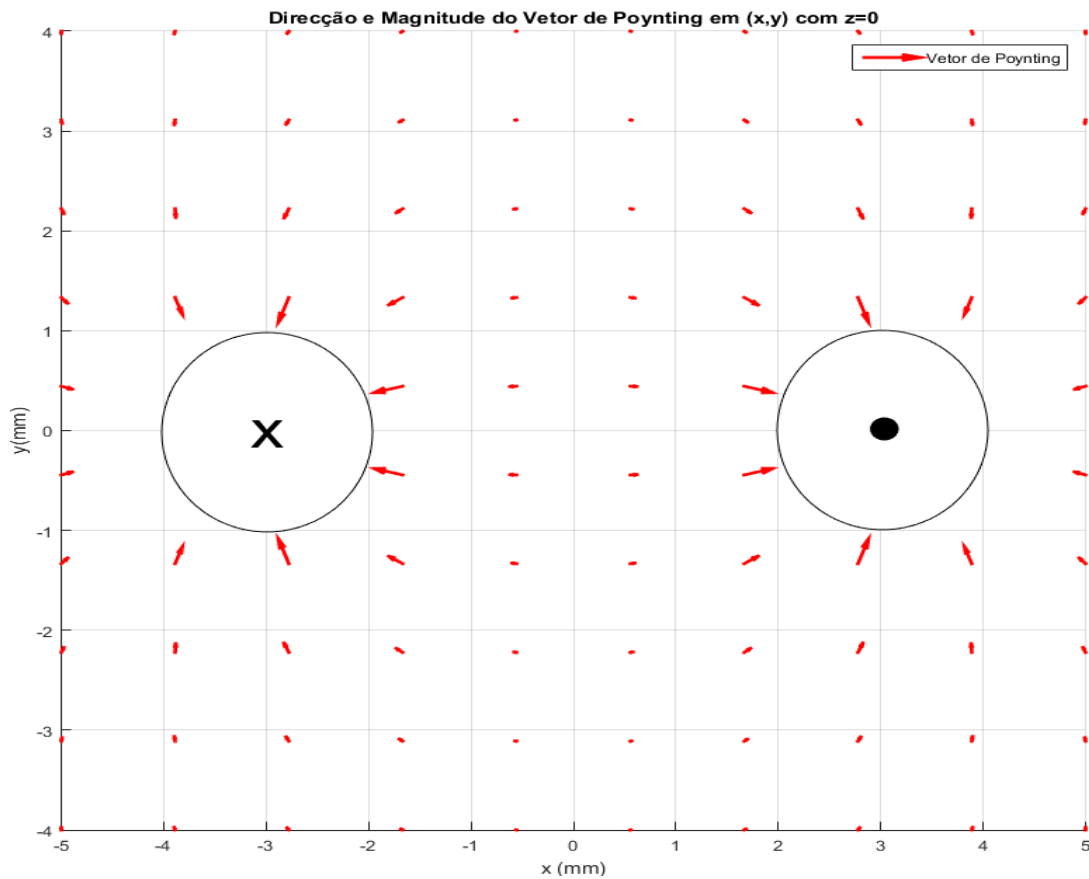
<sup>31</sup> Código utilizado para traçar as linhas de fluxo de vetor de Poynting disponíveis em Apêndice C.



**Figura 3.16** - Vetor de Poynting gerado pela Equação (3.45). A energia segue as linhas vermelhas verticais.

Com os conhecimentos adquiridos no capítulo sobre circuitos RC, não é surpreendente concluir que a energia viaje através do ar em direção aos condutores percorridos por corrente. Analisando a Figura 3.16, há dois fatores que sobressaem, nomeadamente, o facto de a transferência de energia diminuir à medida que avançamos no condutor (eixo  $z$ ) e a relação entre a quantidade de energia a viajar no ar com a proximidade do condutor. À medida que a energia entra no condutor ela é dissipada em forma de calor, existindo cada vez menos energia a fluir “paralelamente” ao condutor. Por exemplo: para  $z = 0$  a energia total é igual à energia dissipada desde  $z = -l/2$  até  $z = 0$  mais a energia a viajar pelo ar que ainda não foi dissipada, logo a energia a fluir no ar é cada vez menor à medida que avançamos no condutor. O segundo fator pode ser

explicado devido à relevância que o campo magnético tem no vetor de Poynting. Analisando a Figura 3.17, nota-se que entre os condutores o campo magnético é mais intenso devido à soma vetorial (os dois campos magnéticos praticamente têm mesma direção e sentido), e pela Equação (3.41) existe uma relação de proporcionalidade inversa entre a intensidade do campo magnético e distância ao condutor. No plano  $(x, y)$  para  $z = 0$ , o fluxo de energia tem o seguinte aspecto, pelo que é possível comprovar que a quantidade de energia (comprimento das setas) é maior quanto mais perto do condutor.



**Figura 3.17** - Vetor de Poynting, no plano  $(x, y)$  com  $z = 0$ , representado pelas setas vermelhas.

De notar ainda que devido à intensidade dos campos magnético e elétrico ser maior entre condutores, o vetor de Poynting é também de maior magnitude nessa zona, ou seja, pela Figura 3.4 se imaginarmos que os terminais do banco de condensadores estão eletricamente ligados aos condutores cilíndricos em  $z = -L/2$ , a energia sairá dos condensadores maioritariamente na direção positiva de  $z$  e na zona entre condutores  $(x = [-\frac{R}{2} + a; \frac{R}{2} - a])$  em direção a estes, provocando o seu aquecimento.

### 3.2.1.5. Potencial vetor

Até esta fase, foi considerado que estamos perante um sistema magnetostático, conseqüente de uma corrente constante ao longo do tempo, mas na realidade a corrente varia. É nomeadamente governada pela curva de descarga dos condensadores, ver Equação (4.5). Neste subcapítulo será avaliada a importância do papel do  $d\vec{A}/dt$  na configuração do campo elétrico, que não é mais que o campo elétrico induzido devido a um campo magnético variável no tempo. Diz-nos a análise vetorial que, se tivermos um campo vetorial  $\vec{V}$  tal que seja possível a igualdade  $\vec{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \vec{A}$  (com  $\varphi$  e  $\vec{A}$  quaisquer) então também se tem  $\nabla \times \vec{V} = -\nabla \times (\nabla\varphi) + \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = 0 + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  e que, sendo  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , resta  $\nabla^2 \vec{A} = -\nabla \times \vec{V}$ . Ora, comparando esta equação com a de Poisson  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ , concluímos que podemos pôr imediatamente:

$$\vec{A}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{todo o espaço}} \frac{\nabla \times \vec{V}}{r} dv'. \quad (3.46)$$

De acordo com o teorema de Poisson da análise vetorial, qualquer vetor cuja divergência é zero pode ser expresso pelo rotacional de um campo vetorial. Como a divergência do campo de indução magnético  $\vec{B}$  é zero, este campo pode ser expresso como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.47)$$

recorrendo agora à relação  $\vec{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \vec{A}$ , atrás, mas no caso partindo em que temos  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , podemos escrever imediatamente (3.46) na forma

$$\vec{A}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{todo o espaço}} \frac{\nabla \times \vec{B}}{r} dv' + \vec{A}_0. \quad (3.48)$$

De modo a simplificar a Equação (3.48) pode-se fazer  $\vec{A}_0 = 0$  sabendo que  $\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \nabla \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J}$  e ficando com:

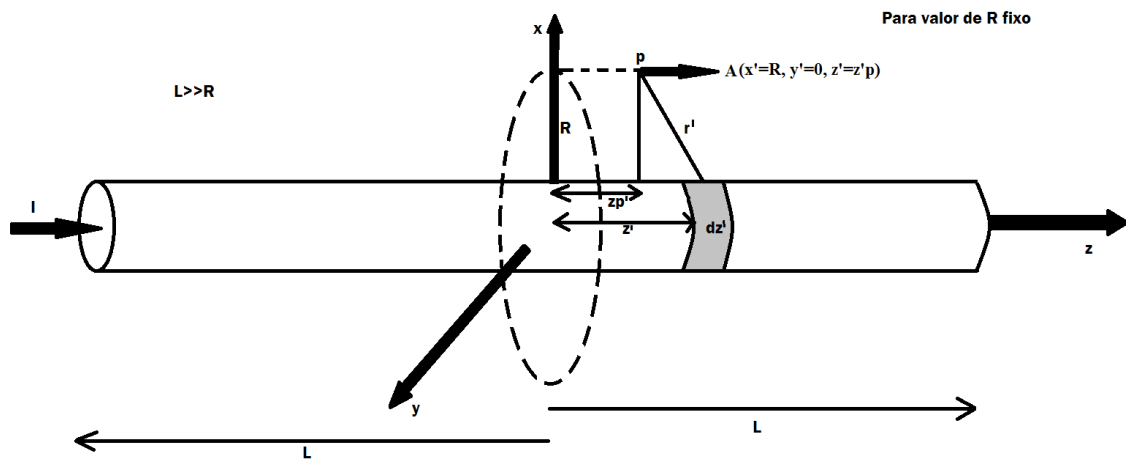
$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{todo o espaço}} \frac{\vec{J}}{r} dv', \quad (3.49)$$

que é equivalente à Equação (3.46), no entanto, mais fácil de aplicar ao nosso problema.

### 3.2.1.6. Exterior do condutor

Calculemos agora o potencial vetor criado por um condutor cilíndrico, de comprimento  $2L$  e raio muito menos que as distâncias de interesse  $R$ .

Sendo a corrente na direção  $z$ , o ponto de observação,  $P$ ,  $R$  a distância da origem à altura do ponto  $P$  e  $r$  a distância do ponto de observação até ao segmento de condutor, temos o esquema da figura seguinte:



**Figura 3.18** - Contribuição do potencial vetor de um segmento de condutor  $dz'$ . Figura adaptada de Jeffimenko (*Jackson J. D., Classical eletrodynamics, 1999*).

Aplicando a Equação (3.49) com  $J = I/s$  em que  $s$  é a área da secção cilíndrica e ainda sabendo que  $\vec{J}$  tem a mesma direção que o cilindro  $z$ , ficamos com:

$$\vec{A}(r) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{(z'_p - z')^2 + R^2}} \quad (3.50)$$

Efetuando a seguinte troca de variáveis:

$$(z'_p - z')^2 \rightarrow (z' - z'_p)^2 \wedge z' - z'_p = \gamma \begin{cases} z' = -L \rightarrow \gamma = -L - z'_p \\ z' = +L \rightarrow \gamma = +L - z'_p \end{cases} \quad (3.51)$$

vem, então:

$$\vec{A}(r) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L-z'_p}^{L-z'_p} \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + R^2}}, \quad (3.52)$$

e resolvendo o integral obtém-se:

$$\vec{A}(r) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(L-z'_p) + \sqrt{(L-z'_p)^2 + R^2}}{-(L+z'_p) + \sqrt{(L+z'_p)^2 + R^2}}. \quad (3.53)$$

Em particular o resultado da equação anterior com  $z'_p = 0$  será:

$$\vec{A}(r \geq a) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + R^2}}{R}, \quad (3.54)$$

e se  $L^2 \gg R^2$  pode-se desprezar  $R^2$  ficando apenas com:

$$\vec{A}(r \geq a) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{2L}{R} \right). \quad (3.55)$$

### 3.2.1.7. Interior do condutor

Em geral tem-se a relação na Equação (3.47) pelo que é possível escrever,

$$\vec{B}(\text{dentro}) = \nabla \times \vec{A}(\text{dentro}), \quad (3.56)$$

e, sabendo o campo magnético dentro do condutor, ver Equação (2.3), e fazendo a transformação para coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$ , vem:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \hat{\varphi} = \nabla \times \vec{A}(\text{dentro}) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{d}{dr} & \frac{d}{d\varphi} & \frac{d}{dz} \\ Ar & A\varphi & Az \end{vmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \hat{\varphi} = \frac{1}{r} \left[ \hat{r} \left( \frac{dAz}{d\varphi} - \frac{dA\varphi}{dz} \right) - r\hat{\varphi} \left( \frac{dAz}{dr} - \frac{dAr}{dz} \right) + \hat{z} \left( \frac{dA\varphi}{dr} - \frac{dAr}{d\varphi} \right) \right]. \quad (3.58)$$

No entanto, a componente segundo  $\hat{r}$  é igual a zero pois o  $\vec{B}_{\hat{r}} = 0$ , o mesmo acontece na componente  $\hat{z}$  pois o campo magnético não tem componente segundo  $z$ ,  $\vec{B}_{\hat{z}} = 0$ , ficando simplesmente,

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \hat{\varphi} = -\hat{\varphi} \left( \frac{dAz}{dr} - \frac{dAr}{dz} \right). \quad (3.59)$$

Mas  $dAr/dz = 0$  devido à simetria de translação ao longo de  $z$ , e cancelando o versor  $\hat{\varphi}$ , obtém-se,

$$-\frac{dAz}{dr} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r, \quad (3.60)$$

e integrando esta igualdade, vem:

$$A_z(r \leq a) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \left(\frac{r^2}{2}\right) + k. \quad (3.61)$$

Para descobrir o valor de  $k$ , vamos igualar  $r = a$ , pois sabemos que os valores do potencial vetor têm que coincidir na superfície do condutor, ou seja,

$$A_{interior}(r = a) = A_{exterior}(r = a), \quad (3.62)$$

$$A_z(r = a) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} r^2 \Big|_{r=a} + k = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{2L}{a}\right), \quad (3.63)$$

$$k = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2} \right]. \quad (3.64)$$

Completando a Equação (3.61) com (3.64) obtém o potencial vetor magnetostático no interior do condutor percorrido por uma corrente estacionária:

$$A_z(r \leq a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{r^2}{2a^2} + \ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2} \right). \quad (3.65)$$

### 3.2.1.8. Derivada do potencial vetor

Até aqui ainda estamos perante um condutor percorrido por uma corrente constante. No entanto, no caso da *railgun*, a corrente varia, sendo descrita pelas curvas de descarga de condensadores. Portanto, o potencial vetor não apenas dependerá da distância ao condutor, mas também do tempo. A curva da corrente da descarga de condensadores é descrita por <sup>32</sup>:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\zeta C}}. \quad (3.66)$$

Substituindo na Equação (3.54) e (3.65)  $I$  por  $I(t)$  vem, nesta aproximação “adiabática”, isto é, em que o comportamento temporal de  $\vec{A}$  reproduz simplesmente o comportamento temporal de  $I(t)$ ,

$$\vec{A}(r \leq a, t) = \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} e^{-\frac{t}{\zeta C}} \left( -\frac{r^2}{2a^2} + \ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2} \right), \quad (3.67)$$

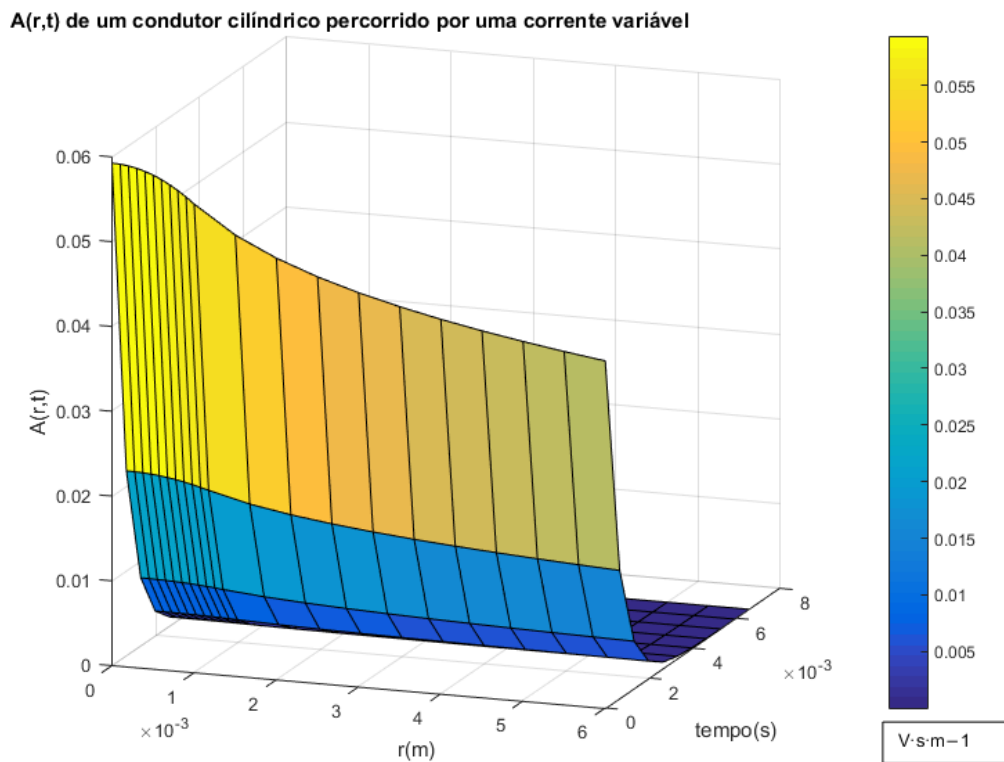
---

<sup>32</sup> Para evitar confusão com o parâmetro geométrico  $R$ , usou-se  $\zeta$  para descrever a resistência, que normalmente é designada por  $R$ .

e

$$\vec{A}(r \geq a, t) = \hat{z} \frac{\mu_0 I_0 e^{-\frac{t}{\zeta C}}}{4\pi} \ln \frac{(L-z'p) + \sqrt{(L-z'p)^2 + R^2}}{-(L+z'p) + \sqrt{(L+z'p)^2 + R^2}}. \quad (3.68)$$

Conjugando as Equações (3.65) e (3.66) num gráfico de superfície, utilizando os parâmetros  $R = 10^{-6} \Omega$ ,  $C = 0.066 \text{ F}$  que é o valor da resistência teórica do circuito e capacitância do banco de condensadores, respetivamente, utilizados neste trabalho bem como uma tensão nos condensadores de 400 V, obteve-se o comportamento revelado pelo gráfico<sup>33</sup> da Figura 3.19 abaixo.



**Figura 3.19** - Potencial vetor gerado pelas Equações (3.65) e (3.66) dentro e fora do condutor respetivamente, com  $a = 1 \text{ mm}$ . O eixo dos x corresponde à distância ao centro do condutor cilíndrico em metros, y o tempo em segundos e z a magnitude do potencial vetor em volts segundo por metro ( $V \cdot s \cdot m^{-1}$ ). Resistência elétrica  $\zeta = 10^{-6} \Omega$ .

Nela é bem visível a influência que a variação temporal do campo magnético tem no potencial vetor, pois após 5 milissegundos já não existe praticamente corrente no circuito.

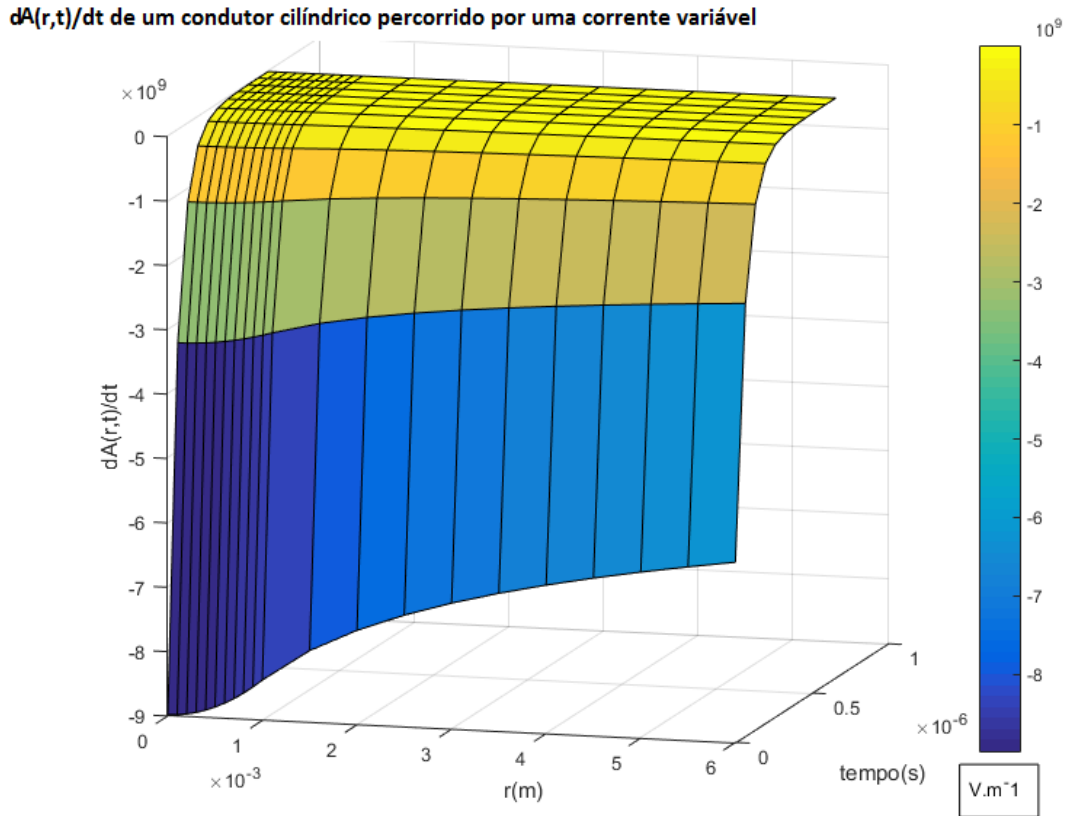
<sup>33</sup> Código utilizado para a construção da Figura 3.19 disponível em Apêndice D.

Com o potencial vetor definido, é possível avaliar a influência que o termo  $d\vec{A}(r, t)/dt$  irá ter na configuração do campo elétrico (ver Equação (3.6)), que é o nosso objetivo aqui. Derivando as Equações (3.67) e (3.68) em  $t$  vem:

$$\frac{d\vec{A}(r \leq a, t)}{dt} = \hat{z} - \frac{\mu_0 I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{2\pi\zeta C} \left( -\frac{r^2}{2a^2} + \ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2} \right), \quad (3.69)$$

$$\frac{d\vec{A}(r \geq a, t)}{dt} = \hat{z} - \frac{\mu_0 I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{4\pi\zeta C} \ln \frac{(L-z'_p) + \sqrt{(L-z'_p)^2 + R^2}}{-(L+z'_p) + \sqrt{(L+z'_p)^2 + R^2}}, \quad (3.70)$$

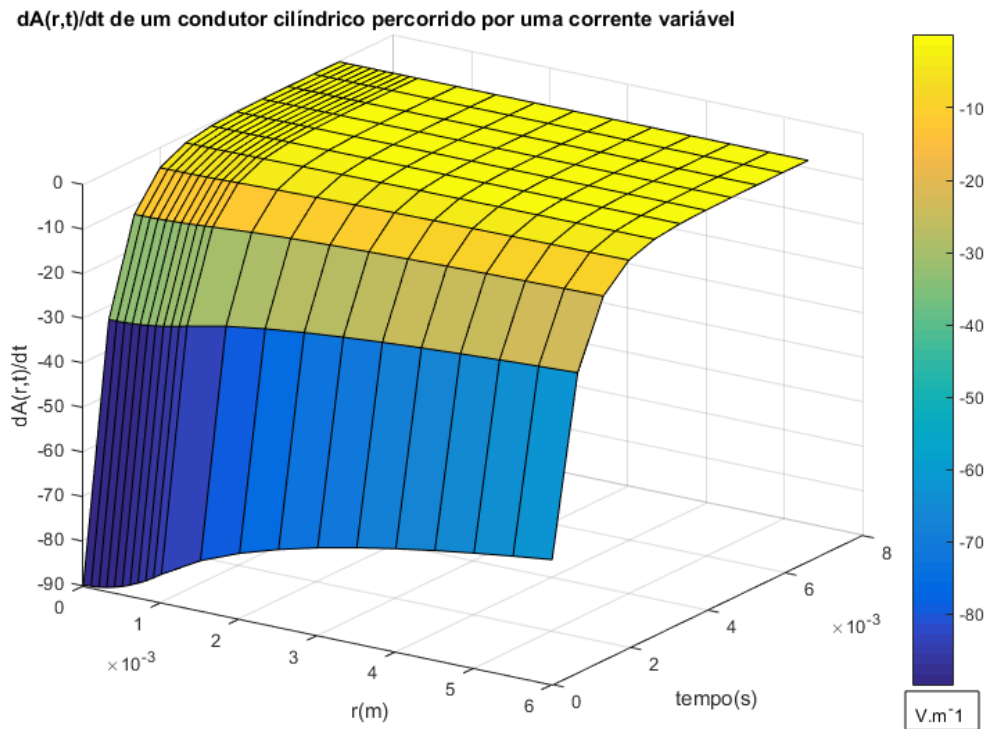
e utilizando o mesmo tipo de gráfico que o anterior com os mesmos parâmetros obteve-se a Figura 3.20 abaixo:



**Figura 3.20** -  $dA/dt$  no interior e exterior do condutor percorrido por corrente variável no tempo, com  $\zeta = 10^{-6} \Omega$ .

Para avaliar a influência que o  $d\vec{A}/dt$  tem no campo elétrico comparou-se a magnitude de ambos. Os primeiros resultados expressaram que o campo elétrico induzido,  $d\vec{A}/dt$ , era muito superior à componente  $z$  do campo elétrico, na ordem do milhão. Esta

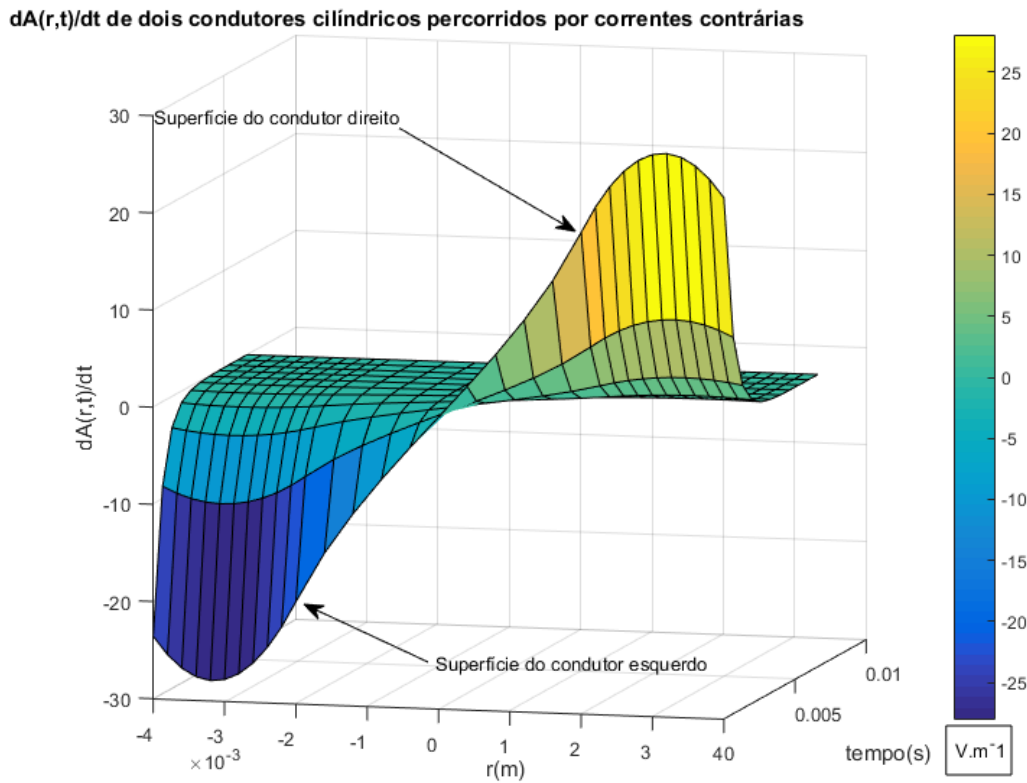
discrepância de valores levou a uma reavaliação dos parâmetros do circuito, nomeadamente, no denominador das Equações (3.67) e (3.68). Os únicos parâmetros que poderiam ser alterados são  $\zeta$ , a resistência elétrica do circuito, e  $C$ , a capacitância do banco de condensadores. No entanto, este último apenas depende dos próprios condensadores e são valores dados pelo fabricante, o que já não se verifica para a resistência do circuito, que apenas foi estipulada pelo cálculo teórico (ver Equação (4.10)), assumindo contactos perfeitos entre carris e projétil. Decidiu-se utilizar valores de  $\zeta$  medidos em outros projetos cuja aquisição dos valores já tem em conta a resistência elétrica dada pelos contactos elétricos. Utilizou-se então,  $\zeta = 10^{-2}\Omega$ , que já pressupõe técnicas de melhoramento do contacto elétrico e lubrificação. Com o novo valor de  $\zeta$  refez-se o gráfico anterior que apresentou os seguintes valores:



**Figura 3.21** -  $dA/dt$  no interior e exterior do condutor, com  $\zeta = 10^{-2}\Omega$ .

Com estes valores mais realistas de resistência, nomeadamente entre os carris e o projétil, foram comparadas as novas magnitudes de  $d\vec{A}/dt$  e a componente  $z$  do campo elétrico, pelo que se obteve  $d\vec{A}/dt/E_z \approx 0.1786$ , este resultado indica que o campo induzido é aproximadamente 17.9% do valor do campo elétrico, ou seja, é importante, mas não

preponderante para o resultado final. Conjugando os valores de  $d\vec{A}/dt$  de dois cilindros separados por 6 mm, como até agora tem sido feito, percorridos por correntes contrárias, obtivemos o gráfico<sup>34</sup> da Figura 3.22 abaixo:



**Figura 3.22** -  $dA/dt$  para dois cilindros percorridos por correntes contrárias, à esquerda a corrente flui para dentro da folha, à direita a corrente flui para fora da folha. Resistência elétrica,  $\zeta = 10^{-2} \Omega$ .

Na Figura 3.22 é possível discriminar uma simetria do eixo do  $x$  em  $x = 0$ , devida ao sentido de a corrente ser oposto em cada cilindro.

### 3.2.2. Projétil

Para simular o projétil que une os carris, no que diz respeito aos cálculos, utilizou-se um condutor cilíndrico com a mesma secção que os condutores dos carris, na direção

<sup>34</sup> Código utilizado para a construção da Figura 3.22 disponível em Apêndice D.

e sentido positivo do eixo do x, ou seja, visto de cima (x, z), a corrente flui da esquerda para a direita como representado pela Figura 3.23, entre  $x = (-R/2 + a)$  e  $x = (R/2 - a)$ .

### 3.2.2.1. Campo elétrico

Para o cálculo do campo elétrico iremos utilizar a mesma estratégia que para o caso anterior, no entanto, não existirá a complexidade desse, pois como estamos perante um condutor isolado não existe influência do campo elétrico nem das cargas superfície de um outro condutor. Consequentemente, não será necessário utilizar o método das imagens. A expressão do potencial de um condutor retilíneo já foi calculada anteriormente pela Equação (3.8). Utilizando coordenadas cartesianas temos que as distâncias transversais ao eixo do projétil são  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$  e  $\rho_0$  uma distância particular, qualquer, de  $\rho$ , assumindo que  $\sigma$  não depende de y e z vem:

$$\varphi(\rho) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right), \quad (\text{fora}) \quad (3.71)$$

que depende parametricamente de x, temos ainda:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Para } x = -\frac{L}{2}, \text{ temos } \varphi = \varphi_0, \text{ fixo (à esquerda, +200 V),} \\ \text{Para } x = +\frac{L}{2}, \text{ temos } \varphi = -\varphi_0, \text{ fixo (à direita, -200 V),} \end{array} \right. \quad (3.72)$$

portanto, à superfície vem

$$\varphi_0 - (-\varphi_0) = 2\varphi_0 = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right), \quad (\text{à superfície}) \quad (3.73)$$

em que  $A_0$  representa o raio do cilindro. Para  $x = -L/2$  fica-se com:

$$\sigma \left(x = -\frac{L}{2}\right) = 2\varphi_0 \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)}. \quad (3.74)$$

Substituindo  $\sigma$  da Equação (3.74) em (3.71) ficamos com (mantendo  $x = -L/2$ ),

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\epsilon_0\varphi_0}{\ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \frac{\varphi_0}{\ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right), \quad (3.75)$$

inserindo agora a dependência linear do potencial em x, escolheu-se (por forma que o potencial zero se encontre em  $x = 0$  e seja simétrico para distâncias mutuas à origem do eixo x):

$$\varphi_0 = \frac{-2\varphi_B}{L} x, \quad (3.76)$$

completando agora a equação do potencial em todo o espaço  $(x, \rho)$ , em que,

$$\varphi([x], \rho) = \frac{-2\varphi_B}{L} x \left( \frac{\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)}{\ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)} \right), \quad (3.77)$$

ou,

$$\varphi([x], \rho) = \frac{2\varphi_B}{L} x \left( \frac{\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{\ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)} \right). \quad (3.78)$$

Utilizar o pressuposto que se utilizou para os carris, a existência de uma variação linear do potencial ao longo de  $z$ , não será a mais correta para o caso do projétil. Para expressar mais veridicamente o nosso sistema com o projétil e seus contactos com os carris, proponho dividir o projétil em três secções, em que duas delas são troços de alta resistividade, simulando os contactos entre projétil e carris (que por vezes é ar, devido ao mau contacto elétrico, daí serem visíveis faíscas nos disparos realizados) e uma secção de alta condutividade que liga as duas secções anteriores. Foram feitos os cálculos dos campos para cada secção do projétil e no final foi realizada uma sobreposição dos campos, ficando assim com os campos finais.

Aplicando o gradiente à equação do potencial (3.78) obtêm-se o campo elétrico de um condutor cilíndrico percorrido por corrente, na aproximação em que  $d\vec{A}/dt$  é desprezável:

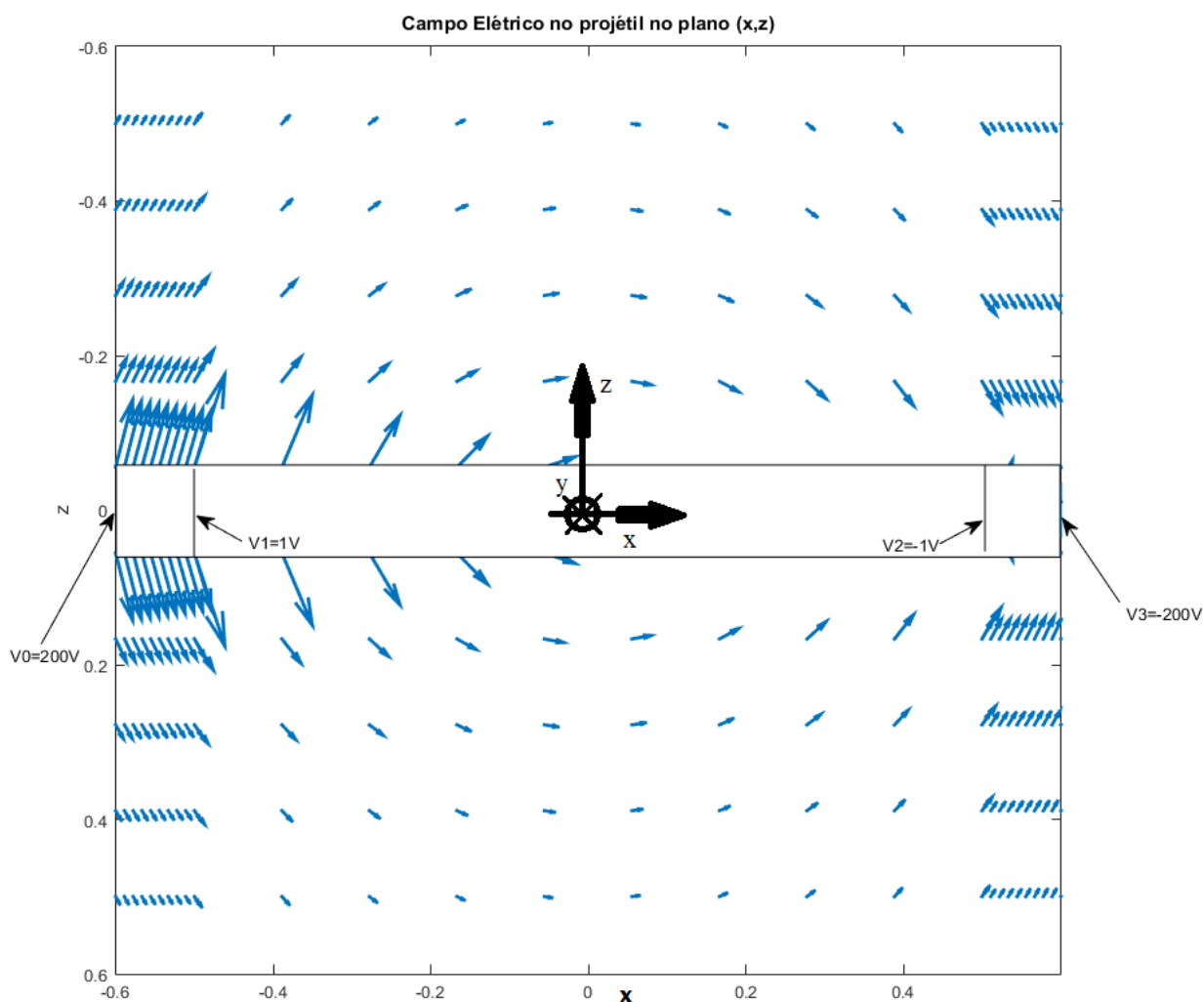
$$\vec{E}(x, \rho) = \frac{2\varphi_B}{L} \frac{\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{\ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)} \hat{x} + \frac{2\varphi_B}{L} x \frac{1}{\rho \ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)} \hat{\rho}, \quad (3.79)$$

para efetuar a construção gráfica do problema utilizou-se os seguintes parâmetros:

**Tabela 3.1** - Parâmetros utilizados para construir a Figura 3.23. Para este caso pressupôs-se que não existiu queda de potencial nos carris, ou seja, o potencial nos terminais do condensador é aproximadamente igual ao potencial nos contactos entre carris e projétil.

	Secção 1	Secção 2	Secção 3
$\varphi_B =$	V0=200V	V1=1V	V2=-1V
$\varphi_A =$	V1=1V	V2=-1V	V3=-200V
L=	0.1	1	0.1

sobrepondo os três campos elétricos obtêm-se a seguinte configuração:



**Figura 3.23** - Sobreposição de 3 campos elétricos referentes às três seções do projétil.

O campo elétrico para o caso do projétil, é bastante diferente do que no sistema de carris, particularmente nos locais em que o campo elétrico sai das zonas do condutor onde a tensão é positiva em direção às zonas de tensão negativa do projétil. Esta configuração de campo deve-se às cargas de superfície, na medida em que podemos dizer que para  $z = ]-0.6; 0[$  é uma zona onde predominam as cargas positivas ( $+\sigma$ ) e para  $z = ]0; -0.6[$  negativas ( $-\sigma$ ). O campo, como seria de esperar, sai das cargas positivas em direção às cargas negativas. Foram efetuados gráficos com as seções 1 e 3 (contactos com o projétil) com  $L$  maior, disponíveis em Apêndice B.

O campo magnético já calculado anteriormente, pela lei de Ampère (Equação (3.37)), forma circunferências em torno do condutor cilíndrico como se pode ver na

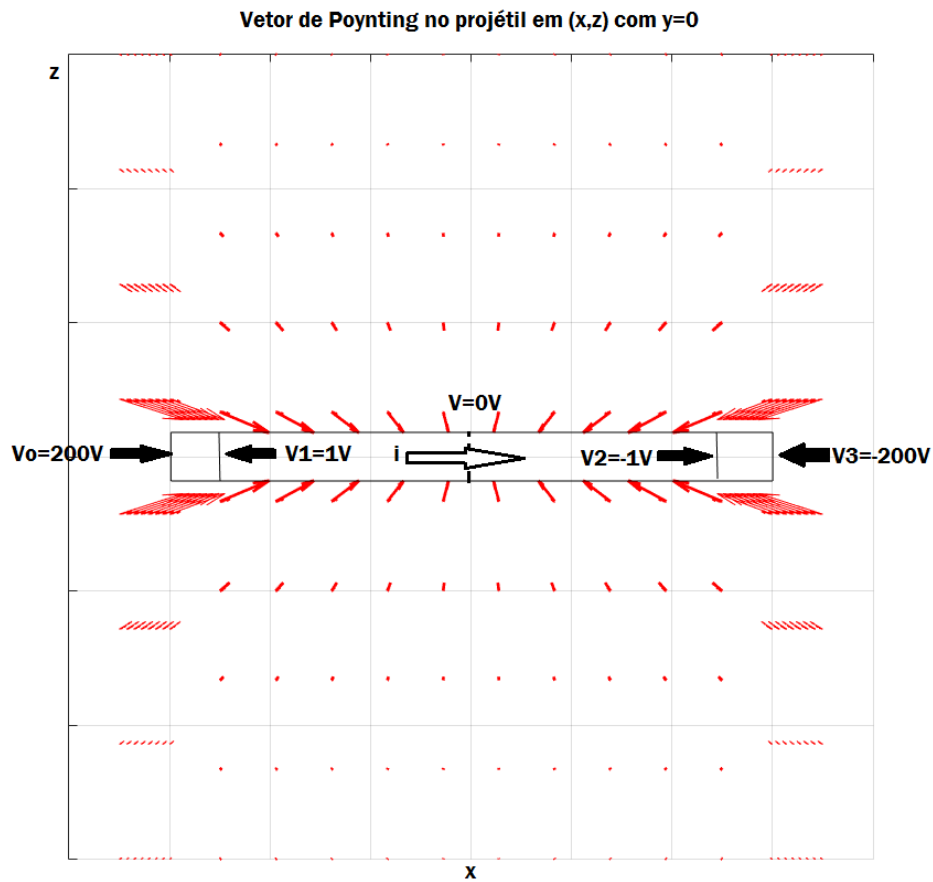
Figura 3.15. Apesar de existirem diferentes troços de resistividade no sistema, apenas existe uma malha, fazendo com que a corrente tenha o mesmo valor em toda a *railgun*.

### 3.2.2.2. Vetor de Poynting

O vetor de Poynting é dado pela Equação (3.42), aplicado ao sistema do projétil é definido por:

$$\begin{aligned}
 S_x &= \frac{2\varphi_B \mu_0 I}{L(y^2+z^2)2\pi \ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)}; \\
 S_y &= -\frac{\varphi_B}{L} \frac{\ln\sqrt{y^2+z^2}}{\ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)} \frac{\mu_0 I y}{\pi(y^2+z^2)}; \\
 S_z &= \frac{\varphi_B}{L} \frac{\ln\sqrt{y^2+z^2}}{\ln\left(\frac{\rho_0}{A_0}\right)} \frac{\mu_0 I (-z)}{\pi(y^2+z^2)}.
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

À semelhança do campo elétrico, o vetor de Poynting total foi construído por sobreposição para cada uma das secções do projétil (ver Figura 3.23) e foram utilizados os mesmos parâmetros da Tabela 3.1.



**Figura 3.24** - Vetor de Poynting no projétil, no plano (x, z) com  $y = 0$ .

Analisando a figura anterior, nota-se um aumento significativo na magnitude (comprimento das setas) no vetor de Poynting nas secções de alta resistividade (secção 1 e 3). É exatamente nessas zonas de contacto que existe um grande aquecimento e deformação do material. É visível ainda uma simetria no eixo do x, devido à simetria que existe no próprio sistema. O campo magnético dos carris é também mais intenso quanto mais perto do condutor, influência da relação de proporcionalidade inversa entre o campo magnético e distância ao condutor.



## 4. Carga e descarga de condensadores

### 4.1. Fase de carga

A energia necessária para uma *railgun* funcionar está armazenada nos condensadores, em forma de energia elétrica no campo entre placas. É importante saber, com rigor, o comportamento destes na fase de descarga, pois para além da curva de descarga típica do condensador existem outras variáveis a depender do tempo, tais como a resistência elétrica e força de Lorentz.

O circuito de carregamento de uma *railgun* pode ser abordado como um circuito que consiste numa resistência,  $R$ , um condensador  $C$  e uma fonte  $V$ , em série. Este circuito é conhecido como circuito RC, como o do diagrama seguinte:

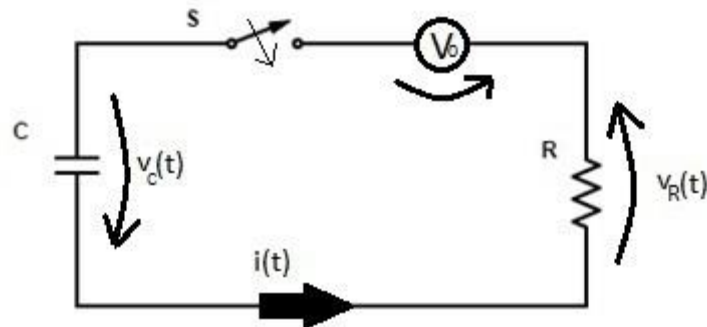


Figura 4.1 - Diagrama de um circuito RC.

O carregamento do condensador, num circuito RC, é descrito através da tensão aos seus terminais,  $v_c(t)$ , e da corrente  $i(t)$  que percorre o circuito:

$$v_c(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (4.1)$$

$$i(t) = I_0 e^{-t/RC}. \quad (4.2)$$

Na Equação (4.1),  $v_c(t)$  é a tensão no condensador em função do tempo após o fecho do interruptor  $s$ ,  $V_0$  é a tensão da fonte,  $R$  é o valor da resistência no circuito e  $C$  a

capacitância do(s) condensador(es). Na Equação (4.2),  $i(t)$  representa a corrente em função do tempo e  $I_0$  a corrente de pico, com  $I_0 = V_0/R$ .

Estas equações podem ser obtidas pela resolução da equação diferencial de um circuito RC em carga como sabemos da eletrotecnia,

$$\begin{cases} v_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq_c(t)}{dt}, \\ v_c(t) = \frac{1}{C} q_c(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

em que  $q_c(t)$  representa a carga no condensador. Após fechar o interruptor vem:

$$-v_0 + v_R(t) + v_c(t) = 0 \rightarrow \quad (4.4)$$

$$\rightarrow -v_0 + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \rightarrow \quad (4.5)$$

$$\rightarrow \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{1}{R} v_0, \quad (4.6)$$

obtendo-se as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} \text{Eq. homogénea, solução geral} &\rightarrow \frac{dq_h(t)}{dt} + \frac{1}{RC} dq_h(t) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow q_h(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. não - homogénea, solução particular} &\rightarrow q(t) = q_p(t) \rightarrow \\ &= \text{constante} = 0 + \frac{1}{RC} q_p = \frac{1}{R} v_0 \rightarrow q_p = C v_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A solução geral da equação diferencial ordinária (E.D.O.) dada é:

$$q(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + C v_0, \quad (4.9)$$

mas  $t = 0 \rightarrow q(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = ke^{\frac{0}{RC}} + C v_0 \rightarrow k = -C v_0$ , que substituindo vem:

$$q(t) = -C v_0 e^{-\frac{t}{RC}} + C v_0 \rightarrow \quad (4.10)$$

$$\rightarrow q_c(t) = C v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (4.11)$$

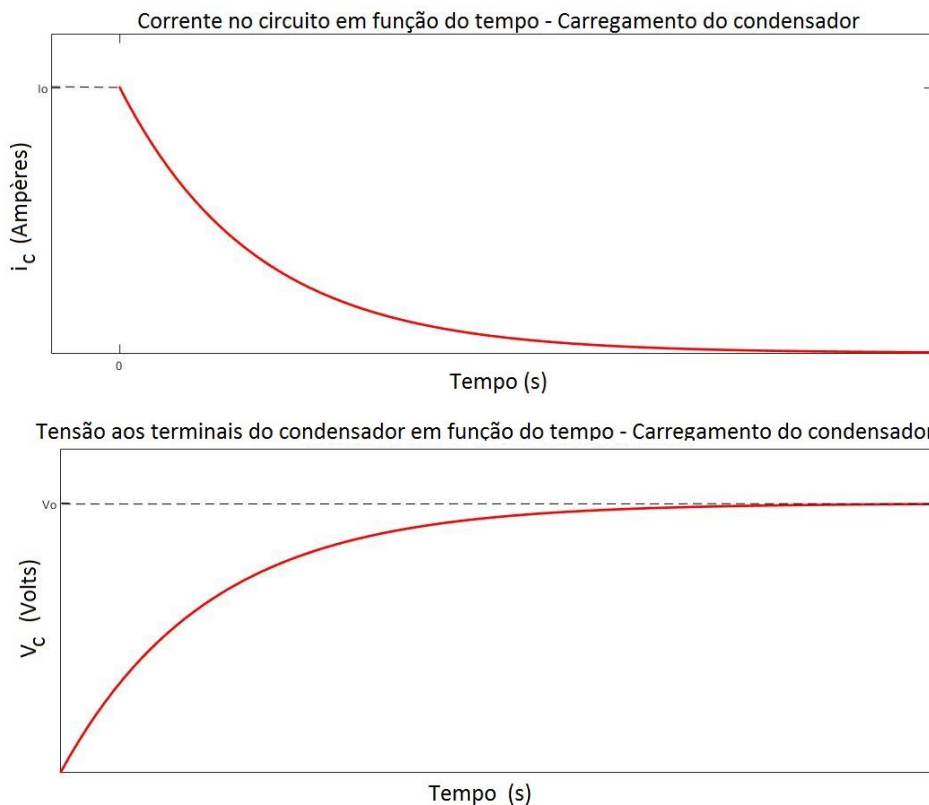
como  $q_c(t) = C v_c(t)$ , vem imediatamente:

$$v_c(t) = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (4.12)$$

e como  $i(t) = \frac{dq_c(t)}{dt}$ , vem  $i(t) = 0 - C v_0 e^{-\frac{t}{RC}} \left(-\frac{1}{RC}\right)$ , ou na sua forma mais familiar:

$$i(t) = \frac{v_0}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}, \quad (4.13)$$

confirmando assim o resultado das soluções (4.1) e (4.2). Gráficamente as soluções têm a seguinte forma:



**Figura 4.2** - Curvas de corrente e tensão em função do tempo, respectivamente.

Numa primeira fase desta dissertação utilizaram-se três condensadores, cada um com 2200  $\mu\text{F}$  e com tensão máxima de 385 V. Com estes condensadores foi montado um banco de condensadores em paralelo, ou seja, a capacitância total passa a ser a soma das 3 capacitâncias, mantendo-se a tensão,

$$C_{total} = C_1 + C_2 + C_3. \quad (4.14)$$

O primeiro problema que surgiu foi o carregamento dos condensadores, pois é necessário utilizar uma fonte de pelo menos 385 V para que os condensadores cheguem perto desse valor. Equipamento esse que não é vulgar encontrar em laboratório e porventura caro. Portanto, foi adquirido um circuito de carregamento de condensadores de alta tensão, cuja função é obter uma tensão regulável de saída deste circuito, entre os valores de 250 V a 420 V. O circuito completo de carregamento tem o seguinte diagrama:

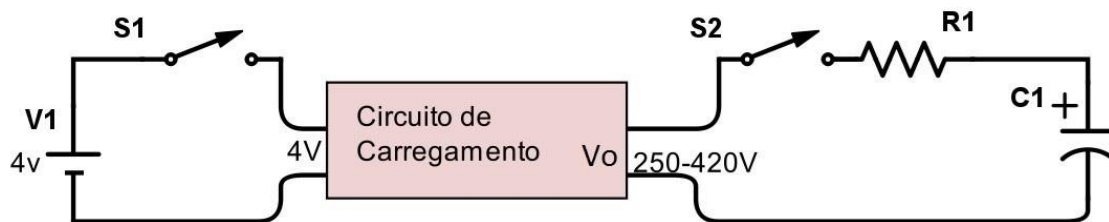


Figura 4.3 - Diagrama do circuito de carregamento dos condensadores.

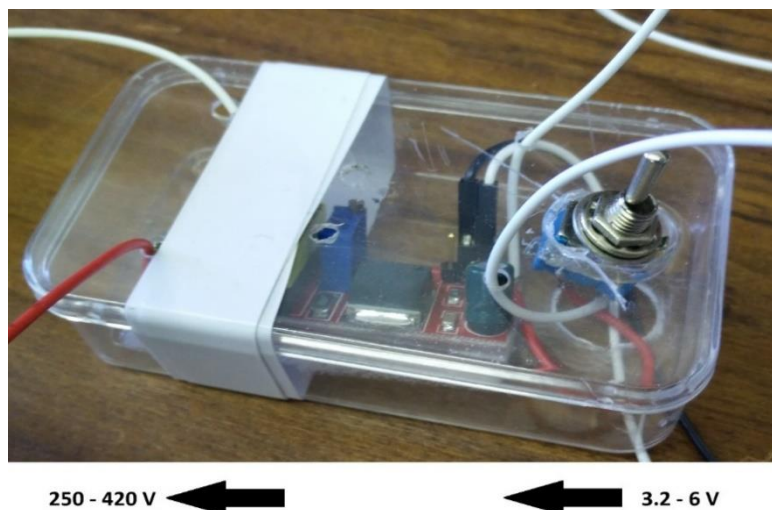


Figura 4.4 - Circuito de carregamento adquirido. Posteriormente este circuito foi adaptado e colocado dentro da caixa de plástico e adicionado um interruptor para efeitos de segurança.

Este circuito de carregamento é alimentado a uma tensão DC de 3,2 V a 6 V. Antes de ser testada a malha da direita foram efetuados os cálculos para que a energia que é dissipada na resistência,  $R_1$ , não ultrapassasse o seu limite, e conseqüentemente derretesse ou danificasse o resto dos componentes. Sabe-se que a potência dissipada é dada por:

$$P = V I \quad (W \text{ ou } J.s^{-1}), \quad (4.15)$$

e reescrevendo a corrente como:

$$I = \frac{V}{R}, \quad (4.16)$$

e substituindo em na Equação (4.15), obtém-se

$$P = \frac{V^2}{R}. \quad (4.17)$$

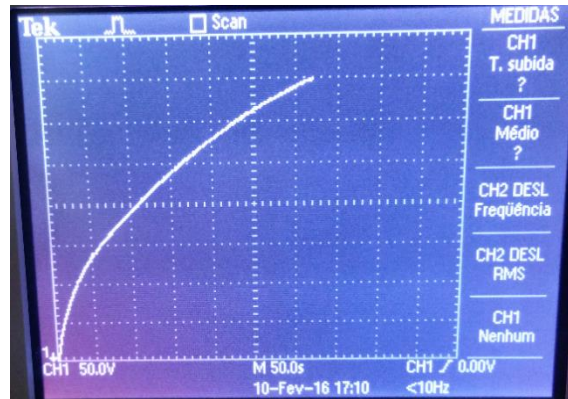
Geralmente, no caso de resistências de laboratório, estas dissipam até 1 W. Podemos então exprimir o valor de  $R_1$  para que esta não ultrapasse o seu limite de dissipação, obtendo assim o valor de  $R_1 = 160 \text{ k}\Omega$ .

#### 4.1.1. Tempo de carregamento

Com as equações de carga, facilmente é conhecida a tensão que está no condensador em cada instante, assim como a corrente máxima que irá percorrer o circuito quando fechar o interruptor  $S_2$ . Na Equação (4.2) o valor máximo da corrente é atingido no instante  $t = 0$ , pois a solução fica simplesmente igual à corrente de pico,  $I_0$ , (ver Figura 4.2). Sabe-se ainda que  $I_0$  é dado por  $V_0/R$ , então se  $R_1 = 160 \text{ k}\Omega$  e  $V_0 = 420 \text{ V}$ , o valor máximo de corrente que percorre a malha da direita é de 2,63 mA.

Para ter uma ideia de quanto tempo demora um condensador a carregar, utilizou-se a Equação (4.1). Por exemplo, para carregar um condensador a 200 V usando um  $V_0 = 400 \text{ V}$  e  $R = 160 \text{ k}\Omega$ , basta resolver a Equação (4.1) em ordem ao tempo. Portanto, um condensador demora cerca de 4 minutos e 20 segundos a carregar a 200 V.

É claro que existe ainda margem para diminuir o tempo de carga dos condensadores. Para isso, basta baixar o valor da resistência, no entanto, sem ultrapassar o seu limite de dissipação de potência. Utilizou-se um reóstato com  $R = 360 \Omega$  que aguenta correntes até 10 A. Substituiu-se pela resistência  $R_1$  de 160 k $\Omega$ , resultando assim num carregamento dos 3 condensadores a 200 V em 1,54 segundos, teóricos. Este melhoramento significativo tornou possível efetuar vários ensaios em laboratório sem a condicionante do tempo de carregamento.



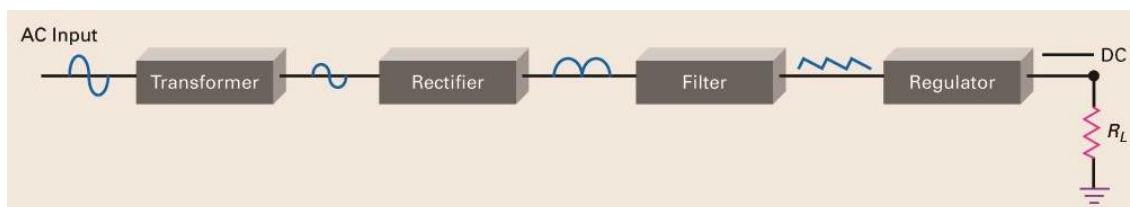
**Figura 4.5** - Imagem retirada do osciloscópio durante o carregamento dos condensadores. Esta imagem vai de acordo com a curva teórica esperada na Equação (4.1) e Figura 4.2.

Apesar da concordância da imagem anterior com as curvas de carregamento teóricas, os tempos de carregamento reais eram diferentes dos teóricos, nomeadamente mais longos. Como se pode ver na Figura 4.5, o tempo de carregamento de 3 condensadores a 200 V foi de aproximadamente 120 segundos. Após investigação do circuito de carregamento notou-se que as ligações entre os terminais do circuito de carregamento e os condensadores não eram as melhores, alguns contactos tinham sujidade e até mesmo alguma ferrugem, pois estes já eram bastante antigos. Estes fatores contribuíram para um aumento da resistência geral da malha da direita (ver Figura 4.3), e consequentemente menores valores de corrente e maior tempo de carregamento. Após limpeza dos contactos, o tempo de carga melhorou ligeiramente, no entanto, longe dos valores teóricos ( $t = 1.54$  s). Por último decidiu-se ligar os terminais do circuito de carregamento a um osciloscópio para ver que tipo de sinal é que tínhamos a entrar nos condensadores, e observou-se a seguinte imagem:



**Figura 4.6** - Sinal à saída do circuito de carregamento dos condensadores medido em osciloscópio.

Como é possível observar, não estamos perante um sinal DC limpo, como seria de esperar, mas sim um sinal que oscila até 50 V de tensão. Este fenómeno tem o nome de tensão de *ripple*. Esta ondulação é derivada da supressão incompleta de uma corrente alternada, criada no circuito de carregamento, tipicamente associada em carregadores que utilizam retificadores de corrente, como é o caso. O princípio de funcionamento de um carregador que utiliza retificadores de corrente pode ser descrito através do seguinte diagrama:



**Figura 4.7** - Diagrama de funcionamento de um carregador baseado em retificadores<sup>35</sup>.

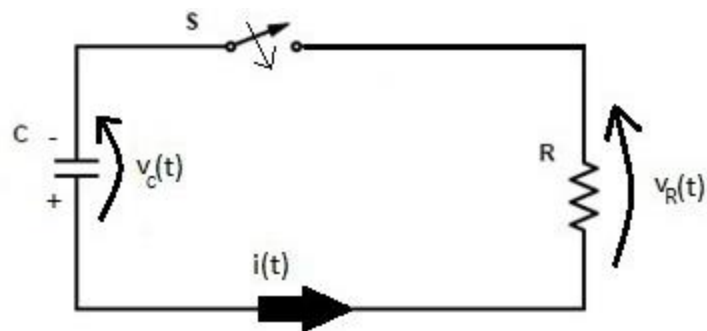
O circuito de carregamento utilizado não é o de melhor qualidade, pois seria de esperar um sinal DC constante de saída, ao invés disso temos um sinal DC pulsante, semelhante ao encontrado na Figura 4.6. Assim, pode-se explicar o baixo rendimento do circuito de carregamento, em relação aos valores teóricos esperados.

<sup>35</sup> Figura retirada de (Wendling, 2015).

Um dos grandes passos que a *railgun* desta dissertação necessitará no futuro, será efetivamente uma fonte de alimentação desenhada especificamente para o carregamento de condensadores a 400 V, com capacidade de carregamento de um banco de condensadores constituído por 10 condensadores<sup>36</sup> de 6600 uF.

## 4.2. Fase de descarga

A fase mais importante de uma *railgun* é a de descarga, pois é aqui que acontece toda a cinemática da arma. O circuito de descarga pode ser representado pelo seguinte esquemático:



**Figura 4.8-** Circuito de descarga da *railgun*.

À semelhança da fase de carga, as soluções podem ser obtidas a partir da equação diferencial de primeira ordem de um circuito RC em descarga (Equação 4.20). Pela lei de Kirchhoff tem-se a seguinte relação:

$$-v_c(t) + v_R(t) = 0 \quad (4.18)$$

com  $v_c(t) = \frac{1}{C}q_c(t)$ ,  $v_R(t) = Ri(t)$  e ainda  $i(t) = -\frac{dq_c(t)}{dt}$ , então:

$$-\frac{q_c(t)}{C} + Ri(t) = 0 \rightarrow -\frac{q_c(t)}{C} + R\frac{-dq_c(t)}{dt} = 0 \rightarrow \quad (4.19)$$

$$\rightarrow \frac{q_c(t)}{C} + R\frac{dq_c(t)}{dt} = 0, \quad (4.20)$$

---

<sup>36</sup> Condensadores estes anteriormente adquiridos, mas sem capacidade de carregamento.

resolvendo a equação diferencial de primeira ordem de um circuito RC em descarga (Equação 4.20) vem:

$$\frac{dq_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}q_c(t) = 0 \rightarrow q_c(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad (4.21)$$

como em  $t = 0$  temos  $v_c(t = 0) = v_{c_0}$ , também será  $q_c(t = 0) = Cv_{c_0} = ke^0 = k \rightarrow k = Cv_{c_0}$ , portanto:

$$q_c(t \geq 0) = Cv_{c_0}e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow \quad (4.22)$$

$$\rightarrow v_c(t \geq 0) = \frac{1}{C}q_c(t \geq 0) \rightarrow \quad (4.23)$$

$$\rightarrow v_c(t \geq 0) = v_{c_0}e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.24)$$

Além disso,  $i(t) = -\frac{dq_c(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}(Cv_{c_0}e^{-\frac{t}{RC}}) = Cv_{c_0}e^{-\frac{t}{RC}}\frac{1}{RC}$ , que simplificando se obtém:

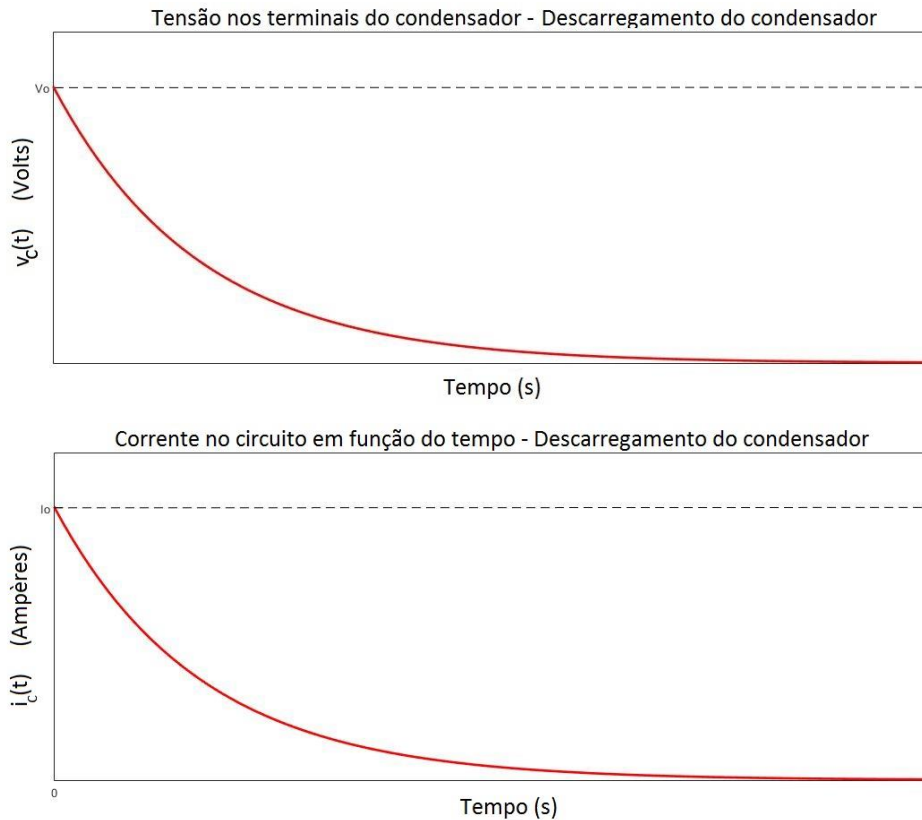
$$i(t) = \frac{v_{c_0}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (4.25)$$

ficando assim com as soluções, Equação (4.24) e (4.25), da equação diferencial de primeira ordem de um circuito RC em descarga, Equação (4.20). Em suma, as soluções que descrevem as curvas de descarga dos condensadores são:

$$v_c(t) = v_{c_0}e^{-t/RC}, \quad (4.26)$$

$$I(t) = I_0e^{-t/RC}, \quad (4.27)$$

com  $I_0 = V_{c_0}/R$ . Graficamente as soluções têm a seguinte forma, respetivamente:



**Figura 4.9** - Curvas de descarga dos condensadores, em cima a curva da tensão em função do tempo Equação (4.26), em baixo a curva da corrente em função do tempo Equação (4.27).

Este é o comportamento típico de um condensador, no entanto, para o nosso sistema temos de completar as equações de descarga para que estas se tornem o mais semelhante possível com a realidade. Para isso, é necessário analisar o comportamento da resistência elétrica do sistema.

#### 4.2.1. Estudo comportamento da resistência durante a descarga

É sabido que a resistência elétrica de um condutor de resistividade  $\rho$ , comprimento  $l$  e secção reta constante  $A$  é dada por:

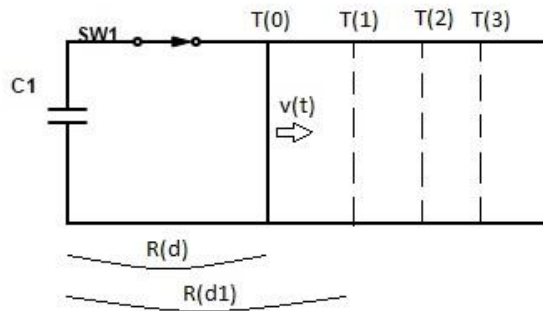
$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (\Omega), \quad (4.28)$$

em que, no caso presente, temos:

- $\rho$  é a resistividade elétrica do material  $\rightarrow$  constante;
- $l$  é o comprimento do material  $\rightarrow$  varia com o tempo;

- $A$  é a área da secção do material  $\rightarrow$  constante.

Analisando a *railgun* a partir do instante inicial ( $t = 0$ ), momento em que o interruptor,  $S_1$ , é fechado), é iniciada a descarga do condensador e é exercida uma força,  $F$ , no projétil, empurrando-o ao longo dos carris, como se pode observar na imagem abaixo.



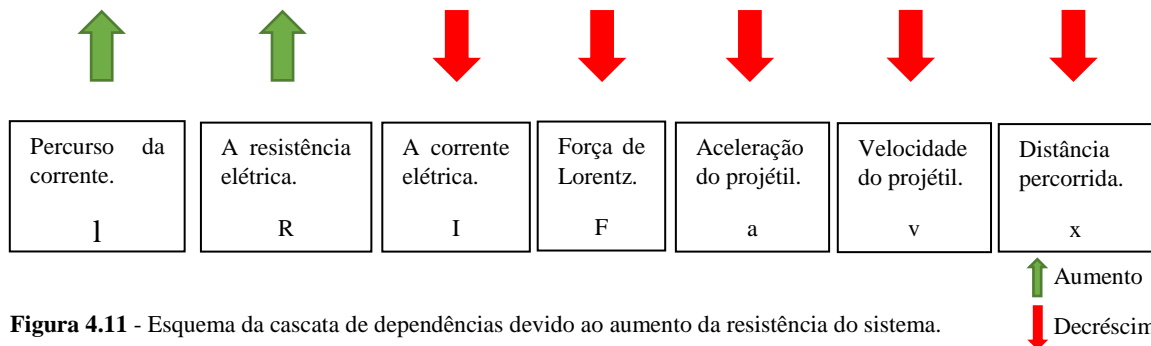
**Figura 4.10** - Movimento do projétil numa railgun ao longo dos carris.

À medida que o projétil vai avançando, a corrente tem um trajeto mais longo para percorrer, ou seja, a variável  $l$  da Equação (4.28) vai aumentar e consequentemente a resistência,  $R$ , vai aumentar. Portanto, a resistência,  $R$ , depende do comprimento do percurso da corrente,  $l$ . Completando a Equação (4.26) e (4.27) vem:

$$V(t) = V_o e^{-t/R(l(t))C}, \quad (4.29)$$

$$I(t) = I_o e^{-t/R(l(t))C}. \quad (4.30)$$

Como a resistência depende da posição do projétil nos carris, entramos numa cascata de dependências. Para esclarecer este tópico proponho o seguinte esquema:




**Figura 4.11** - Esquema da cascata de dependências devido ao aumento da resistência do sistema.

Por este motivo, foi necessário estudar o comportamento da resistência ao longo do movimento do projétil e comparar com as curvas de tensão e corrente com as da Figura

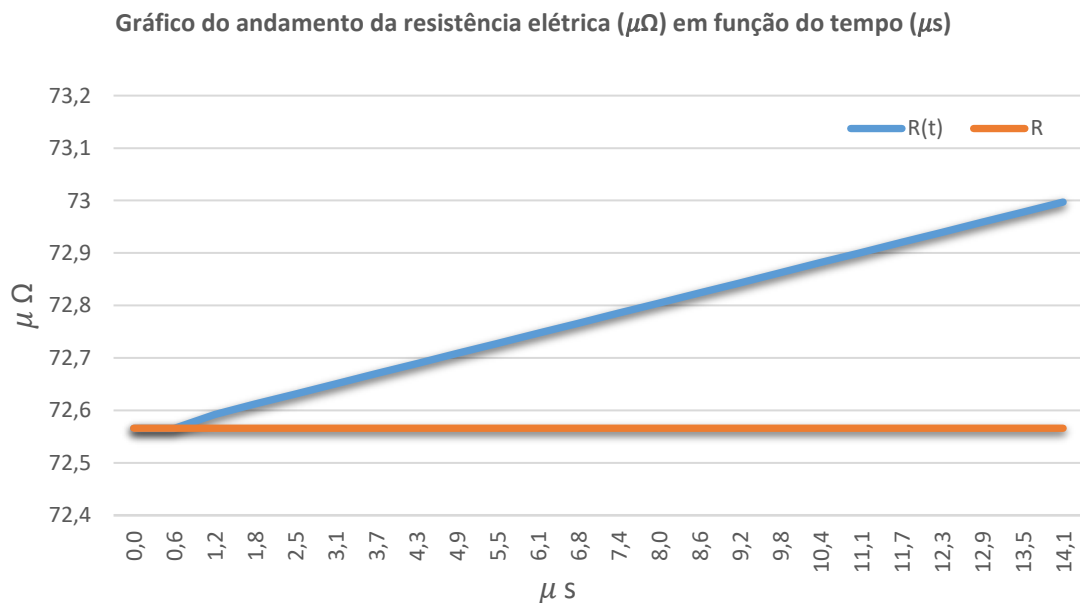
4.9. Para estudar o comportamento da resistência, foi usada a seguinte estratégia: se soubermos exatamente a posição do projétil nos carris é possível saber todos os restantes parâmetros.

**Tabela 4.1** - Representação da estratégia para descrever o comportamento da resistência e as suas consequências nos restantes parâmetros.



Tempo (s)	$x(t)$ (m)	$R(t)$ ( $\Omega$ )	$I(t)$ (A)	$F(t)$ (N)	$a(t)$ ( $m/s^2$ )	$v(t)$ (m/s)	$x(t)$ (m)
0	$x_0$	Eq. (4.11)	$I = \frac{R}{v}$	Eq. (1.3)	$a(t) = F * m$	$v(t) = (a * t) + v_0$	$x(t) = x_0 + (\frac{1}{2} * a * t^2) + (v * t)$
0.0001							

Este processo foi repetido até ao momento que o projétil se encontra fora dos carris da *railgun* (foi definido que teriam 1 metro de comprimento). Chegou-se à conclusão que a resistência teria de aumentar ao longo do tempo, e conseqüentemente atrasar a descarga dos condensadores que porventura iria influenciar a velocidade atingida pelo projétil, comparativamente a uma resistência estática.



**Figura 4.12** - Evolução do aumento de  $R$  em função do tempo em comparação com  $R$  estático.

Calculando a constante de tempo,  $\tau = RC$ , de descarga dos condensadores e se tivermos em conta que o nosso circuito é um autentico curto-circuito ( $R \ll 1 \Omega$ ), obtemos um valor de  $\tau = 0.48 \mu\text{s}$ , com  $R = 72.7 \mu\Omega$  e  $C = 6600 \mu\text{F}$ . Consideramos que após 5 constantes de tempo (ou  $2.4 \mu\text{s}$ ) os condensadores encontram-se completamente descarregados. Calculou-se que o projétil apenas tinha percorrido  $0.2 \text{ mm}$ , ou seja, o condensador descarrega muito mais rápido do que o projétil se desloca. Verificou-se que o aumento da resistência não é significativo para o ponto de vista do projétil, pois quando os condensadores se encontram descarregados, a resistência apenas aumentou  $0.6 \%$ . Notou-se ainda que a não ser que tenhamos altas capacitâncias ( $> 0.01 \text{ F}$ ), não compensa ter carris de dimensões superiores a  $1 \text{ metro}$ , pois após os condensadores estarem descarregados apenas temos atrito no projétil<sup>37</sup>.

Com o equipamento utilizado nesta dissertação chegou-se à conclusão que o aumento de resistência não influencia criticamente o valor da corrente e porventura os restantes parâmetros, tais como a velocidade do projétil. O que não implica que para *railguns* de escala real, cuja capacitância e tensão dos bancos de condensadores podem ser superiores em várias ordens de grandeza ao nosso, a variação da resistência elétrica possa vir a desempenhar um papel importante, pois os carris destas podem chegar facilmente aos  $5 \text{ metros}$  de comprimento (Baker, 2016).

### 4.3. Otimização do banco de condensadores

Com o estudo efetuado à resistência em função do tempo (ver Tabela (4.1)), foram também obtidos alguns parâmetros cinemáticos do projétil, tais como a aceleração do projétil, velocidade e distância em função do tempo. A escala temporal da Tabela (4.1) foi elaborada até o projétil sair dos carris, no entanto para o ponto de vista dos condensadores, apenas nos interessa um pequeno intervalo de tempo, nomeadamente o período de descarga dos condensadores. A partir do momento em que os condensadores

---

<sup>37</sup> De notar que os cálculos são puramente teóricos, em que não entraram parâmetros como eficiência da arma e coeficientes de atrito.

estão descarregados deixa de existir corrente a fluir no circuito e conseqüentemente a força exercida no projétil deixa de existir (ver Equação (4.27) (Schroeder, 2007)) e a velocidade estabiliza (no caso ideal, sem atritos),

$$F = \frac{L'I^2}{2}. \quad (4.31)$$

Verificou-se que a força de Lorentz é apenas exercida durante 2  $\mu$ s, ou seja, a força não é exercida gradualmente ao longo dos carris como se poderia pensar. Esta força é como se fosse um “empurrão” extremamente forte, mas de duração muito curta. Como este intervalo de tempo é muito curto, existem imensas perdas por efeito de Joule e a eficiência da arma decresce consideravelmente.

Para se chegar a uma descarga ideal dos condensadores temos de jogar com dois fatores: a energia armazenada e o tempo de descarga, pois não interessa ter muita energia armazenada e esta ser descarregada em microssegundos pois grande parte irá ser desperdiçada em efeito de Joule. Portanto, existem dois fatores que podemos manipular:

- Tensão do banco de condensadores, intimamente ligada à energia armazenada;
- Capacitância do banco de condensadores, relacionada com o tempo de descarga.

Imaginemos que temos 12 condensadores de 400 V e 6600  $\mu$ F. A forma como se constrói os bancos de condensadores irá influenciar o rendimento da *railgun*, pois 12 condensadores em série comportam-se de maneira diferente de 12 condensadores em paralelo. A energia armazenada num condensador é dada pela seguinte expressão:

$$E = \frac{1}{2}CV^2, \quad (4.32)$$

pelo que se forem montados em série obtém-se  $E_{série} = 52,8$  kJ que aplicados à nossa *railgun* são descarregados em 2.4  $\mu$ s, ou seja, grandes quantidades de energia, mas utilizadas em instantes. Caso sejam montados num banco em paralelo tem-se  $E_{paralelo} = 5,28$  kJ que são descarregados em 24  $\mu$ s, portanto, menos energia, mas utilizada durante mais tempo. Por forma a otimizar a energia e tempo de descarga, é possível fazer uma mistura de bancos em série e paralelo, por exemplo 3 bancos secundários montados em série, em que cada banco secundário estão ligados 4 condensadores em paralelo, ficando com  $E_{mistura} = 19$  kJ com um tempo de descarga igual a 9.6  $\mu$ s, semelhante ao que foi feito na *railgun* Powerlabs (Power Labs, 2010).

Em suma, quando se constrói uma *railgun* a primeira preocupação terá que ser o armazenamento de energia, otimizando esta e projetando a arquitetura dos carris (comprimento destes) em função do tempo de descarga do banco de condensadores. Idealmente pretende-se que os carris tenham um comprimento tal, que o instante de saída do projétil dos carris coincida com o instante em que os condensadores ficam descarregados.

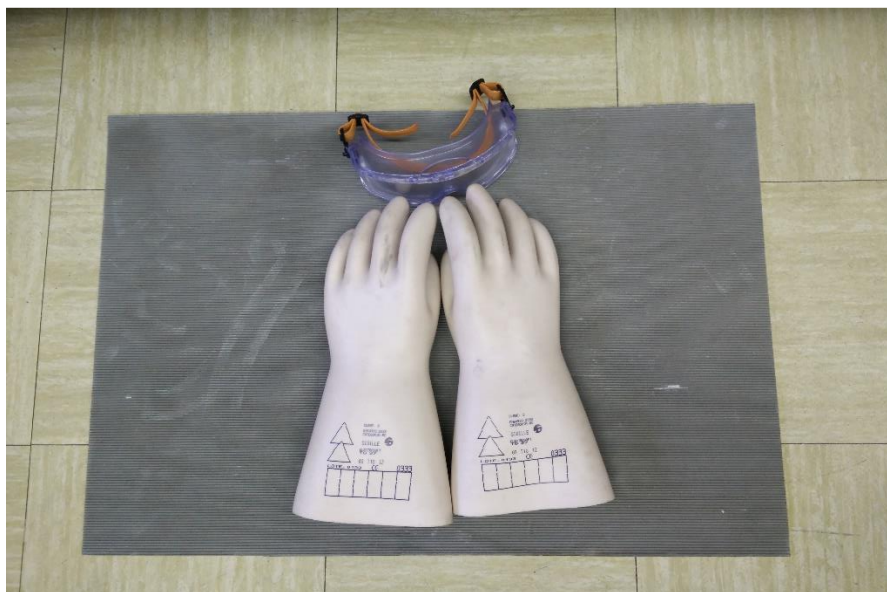


## 5. Parte experimental

Neste capítulo encontra-se descrita a construção e experimentação das *railguns* utilizadas nesta dissertação. Devido à falta de experiência em lidar com altas correntes, primeiramente construiu-se um modelo mais pequeno e mais simples de uma *railgun*, de modo a ganhar familiaridade com este tipo de sistema.

### 5.1. Medidas de segurança

Tendo em consideração que correntes acima de 0,1 A podem causar ferimentos graves ou até mesmo letais (Giovinazzo, 1987), não foram poupadas medidas de segurança. Mesmo no pequeno sistema estamos a trabalhar com milhares de amperes (supondo uma resistência total na ordem de  $10^{-2} \Omega$ ) ou até mais, pois estamos a fazer um curto circuito com 385 V. Durante todos os disparos e manuseamento do circuito tomaram-se medidas de segurança, utilizou-se luvas de borracha (seguras até 4000 V), viseira e tapete de borracha, ver Figura 5.1.



**Figura 5.1** - Material de proteção utilizado no manuseamento da *railgun*.

## 5.2. *Railgun* com carris de alumínio

A primeira *railgun*, construída para esta dissertação, é constituída por: uma fonte de alimentação de corrente DC de laboratório, o circuito de carregamento dos condensadores (abordado no quarto capítulo), três condensadores de 2200 uF / 385 V, dois carris de alumínio e projéteis esféricos de aço de três diâmetros distintos (ver Figura 5.2).



**Figura 5.2** - Esferas de aço utilizadas como projéteis na primeira *railgun*, com os seguintes diâmetros,  $D$ ,  $D_{esquerda} = 2\text{ cm}$ ,  $D_{centro} = 1\text{ cm}$  e  $D_{direita} = 0.5\text{ cm}$ .

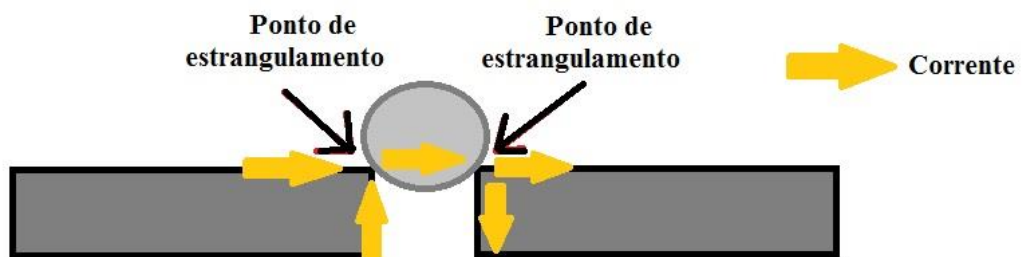
### 5.2.1. Detalhes dos disparos

Nas primeiras tentativas de disparos ocorreram falhas de fogo. O projétil (esfera) foi colocado entre os carris e efetuada a descarga dos condensadores. Durante a descarga registou-se que o projétil não se moveu, em vez disso, este aqueceu e derreteu, soldando-se aos carris e deixando parte da sua massa agarrada aos carris, danificando tanto os carris como o projétil (ver Figura 5.3), devido ao atrito estático.



**Figura 5.3** - À esquerda um fotograma antes da descarga e à direita logo após a descarga, de notar que nas zonas negras à volta da esfera existiu deformação dos carris devido a aquecimento excessivo.

Foram detetados, à partida, vários problemas, entre eles, o uso de disjuntores, de altas tensões e correntes, até 440 V e 6 kA, como interruptores. Quando o circuito fechava existia apenas parte da descarga, ou seja, os condensadores ficavam com cerca de 30 % da tensão inicial e o interruptor automaticamente abria o circuito (impedindo a passagem de corrente) quando a corrente ultrapassava o limite dos disjuntores. Outro problema assinalado foi a incompatibilidade do uso de carris de secção retangular e projéteis esféricos. Estas geometrias fazem com que existam pontos de estrangulamento de corrente, como se pode ver na seguinte figura, que aumentam a resistência do sistema e, conseqüentemente, a diminuição da corrente que flui no circuito.



**Figura 5.4** - Figura qualitativa dos pontos de estrangulamento de corrente, devido a secções de projétil e carris incompatíveis.

Após investigação de outras *railguns* já construídas, em todas é feito um pré-aceleração do projétil (Maniglia, 2013) (Schroeder, 2007) (Power Labs, 2010). Em projetos de laboratório, geralmente, são utilizadas alavancas que inserem o projétil dentro dos carris, dando uma velocidade inicial ao projétil suficiente para que este não solde aos carris (Do it yourself gadgets, 2013). Em projetos maiores é comum utilizar garrafas de ar comprimido como propulsor inicial (Power Labs, 2010). Com o pré-aceleração do projétil evita-se que o projétil se solde aos carris e permite ainda a utilização de outra fonte de energia (alavanca ou ar comprimido) para que o projétil vença o atrito estático (que é superior ao atrito cinético (Silva, 2002)) guardando a energia eletromagnética para acelerar o projétil com ele já em movimento.

Para resolver os problemas acima referidos os carris foram cortados de modo a que ficassem em forma de “V”, como é visível na Figura 5.4, evitando que a esfera contacte com os carris pelas suas arestas, melhorando assim o contacto elétrico com a esfera e evitando que esta saísse fora dos carris.



**Figura 5.5** - Carris com a zona de contacto, com a esfera, em “V”.

Além disso, para dar à esfera uma velocidade inicial foi construída uma rampa, em que a bola percorre um tubo plástico, com inclinação, e entra nos carris. Os carris foram montados com inclinação contrária, por forma a que se existisse alguma força exercida na esfera, esta saísse dos carris. Foram efetuados testes à inclinação da rampa para que a esfera rolasse até ao final dos carris, mas nunca saindo destes, na ausência de corrente. O disjuntor que conectava os condensadores à *railgun* foi retirado para que se pudesse efetuar a descarga completa.

Foram realizados testes com várias tensões nos condensadores, como demonstra a Figura 5.5. Com 80 V a esfera não saiu dos carris, uma vez que a força era pouco intensa e impercetível. No entanto, com 350 V o efeito da força de Lorentz já foi visível, pois a esfera saiu dos carris.



**Figura 5.6** - Testes efetuados com diferentes tensões. À esquerda disparo efetuado com tensão 350 V nos condensadores. À direita teste efetuado com uma tensão de 80 V.

Num outro conjunto de testes, os carris foram colocados na horizontal a 19 cm de altura e registou-se a distância que a esfera percorria até embater numa placa de esferovite, ver Figura 5.6. Foram efetuados disparos sem corrente e com os condensadores carregados a 350 V. Sem corrente a esfera apenas percorreu 11 cm, já com a tensão máxima a esfera duplicou a distância para 22 cm.



**Figura 5.7** - Distâncias percorridas pela esfera em função da tensão: linha à esquerda corresponde a 0 V e linha à direita a 350 V.

### 5.2.2. Danos no sistema

Grande parte dos danos registados nos carris foram devidos ao aquecimento que, conseqüentemente, levou a deformações, pequenas crateras onde se encontrava o projétil durante a descarga. Notou-se ainda que os carris após algumas descargas se tornavam rugosos e irregulares, tornando-se impossível efetuar mais testes sem reparação dos mesmos. Ao fim de três disparos era quase mandatória a reparação dos carris, que era feita passando uma lixa para alisar a zona de contacto com a esfera, ver Figura 5.5. Parte da massa das esferas foi deixada nos carris ao longo dos disparos alterando a forma esférica do projétil, ver Figura 5.8, ou seja, à semelhança dos carris, após 3 disparos, os projéteis ficam de tal forma irregulares e rugosos que se torna impossível reutilizá-los.



**Figura 5.8** - À esquerda esfera antes dos disparos e à direita esfera após 4 disparos com 350 V de tensão.

Ficou também claro que o aço não é o material mais indicado para os projéteis, pois é quase três vezes mais denso que o alumínio (Euroaktion, 2016), tornando o projétil demasiadamente pesado tendo em conta as dimensões da *railgun*. Concluiu-se que os critérios mais importantes na escolha do metal para o projétil são a alta condutividade elétrica, a baixa densidade (projétil leve) e a capacidade de suportar elevadas temperaturas, por esta ordem.

### 5.2.3. Análise dos resultados e lições aprendidas

Na análise feita às imagens em câmara lenta dos disparos, apesar da demonstração da força de Lorentz ser bastante visível, a eficiência desta *railgun* é muito baixa. A

existência de fagulhas a voar após a descarga e a formação de arcos são causas da baixa eficiência, pois estas desperdiçam a energia que deveria ser utilizada para acelerar o projétil.

Apesar deste projeto ter funcionado com esferas como projétil, suspeitava-se que esta forma geométrica não era a ideal para obter um bom contacto elétrico. As secções de contacto têm de ser compatíveis, ou seja, se os carris forem de secção retangular, o projétil também terá de ter secções planas. Para baixar a resistência elétrica e, conseqüentemente, aumentar a corrente no sistema, no próximo projeto foram utilizados carris de cobre visto que têm uma condutividade elétrica mais elevada (The Engeneering Toolbox, s.d.). O sistema de pré-aceleração do projétil foi adaptado pois como deixamos de ter esferas como projéteis esta rampa deixará de funcionar.

Os projéteis seguintes foram de cobre e de secção retangular, deste modo, melhoramos não só o contacto entre carris e projétil (ambos têm secções planas) como a resistência elétrica do projétil devido à maior condutividade do cobre em relação ao aço (The Engeneering Toolbox, s.d.). Com estas alterações espera-se que a eficiência aumente, tornando mais visível o efeito da força de Lorentz e ainda que a *railgun* seja capaz de múltiplos disparos sem necessidade de reparação dos carris.

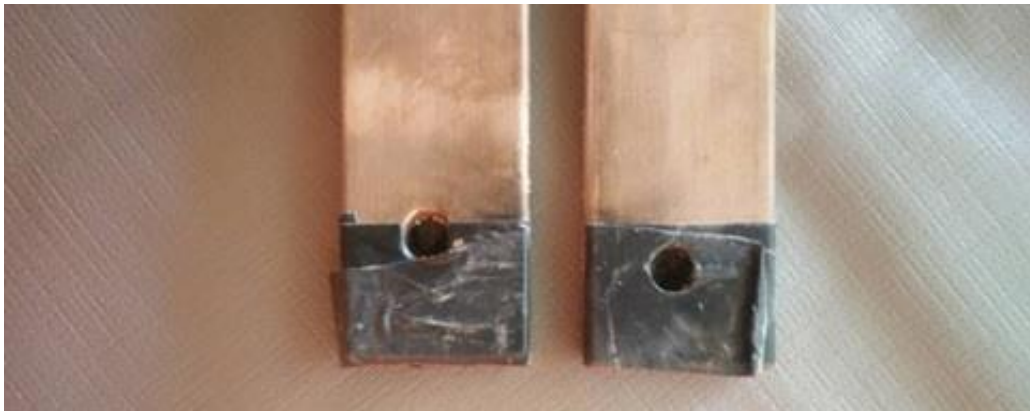
### **5.3. Railgun com carris de cobre**

Para a construção da segunda railgun, foram utilizados carris de cobre. A escolha deste material deve-se à sua alta condutividade elétrica,  $5.91 \times 10^{-9} (\Omega \cdot m)^{-1}$ , quase duas vezes melhor que o alumínio,  $3.63 \times 10^{-9} (\Omega \cdot m)^{-1}$ , utilizado anteriormente (The Engeneering Toolbox, s.d.). Decidiu-se utilizar carris com 50 cm cada, pois este comprimento permite uma descarga completa dos 10 condensadores de 6600  $\mu F$  em paralelo, segundo o estudo feito no quarto capítulo. Convencionou-se que o espaçamento entre carris seria 4 mm (que irá também ser a largura dos projéteis), no entanto, ajustável caso se queira utilizar projéteis com diferentes dimensões. Utilizaram-se projéteis de largura de 4 mm, com diferentes comprimentos (ver Figura 5.9), com objetivo de fazer vários testes e verificar com qual se obtém melhores resultados.



**Figura 5.9** - Comparação do comprimento dos vários projéteis de cobre. De cima para baixo, comprimento,  $L = 2.0\text{ cm}$ ,  $L = 1.8\text{ cm}$  e  $L = 0.6\text{ cm}$ .

Para diminuir o perigo na utilização da *railgun* foi criada uma secção isolante no início dos carris, por forma a possibilitar a colocação do projétil dentro dos carris em segurança, como se pode conferir na seguinte figura. Esta secção isolante foi feita com fita isoladora elétrica.



**Figura 5.10** - Câmara não condutora colocada no início dos carris.

Como suporte da estrutura foi utilizado acrílico ao invés de madeira, utilizado anteriormente. Colocou-se uma folha de acrílico por cima e outra por baixo, ficando os carris no meio das folhas. Assim evita-se que existam pedaços de metal derretido a voar em direção ao operador, como aconteceu no projeto anterior, ver Figura 5.6. Tanto o acrílico como os carris estão fixos por 8 parafusos e 8 porcas localizados assimetricamente evitando que os carris se afastem durante o disparo devido a força de Lorentz que também se manifesta entre estes.

### 5.3.1. Detalhes dos disparos

Realizaram-se quatro conjuntos de testes com as seguintes condições iniciais:

- Com 1 banco de condensadores de 3 condensadores a 350 V de 2200  $\mu\text{F}$ , sem lubrificante;
- Com 1 banco de condensadores de 3 condensadores a 200 V de 2200  $\mu\text{F}$ , com grafite nos carris;
- Com 1 banco de condensadores de 4 condensadores a 200 V de 6600  $\mu\text{F}$ , sem lubrificante;
- Com 1 banco de condensadores de 2 condensadores a 380 V de 6600  $\mu\text{F}$ , com uma massa lubrificante à base de prata.

Nesta segunda *railgun* testou-se uma outra forma de pré-acelaramento do projétil. Construiu-se uma pequena fisga, constituída por um tubo de plástico, um balão, uma banda de borracha fina e um pau de bambu fino, como na seguinte figura.



**Figura 5.11** - À esquerda fisga sem tensão e à direita fisga com tensão.

No primeiro conjunto de testes realizaram-se 3 disparos, um com sucesso, acertando numa placa de esferovite que estava a 20 cm da extremidade dos carris, ocorrendo ainda duas falhas de fogo nos últimos disparos. Após a falha de fogo verificou-se que já existia algum desgaste nos carris.

Por forma a diminuir o desgaste nos carris, no segundo conjunto de testes, utilizou-se grafite como lubrificante condutor nos carris e projétil, semelhante ao utilizado por Pavlov (Pavlov, 2013). Para aplicar a camada superficial de grafite, utilizou-se um lápis convencional, raspando-o contra a superfície dos carris. Nos 3 disparos realizados, registaram-se dois com sucesso (ver Figura 5.12), semelhante aos disparos no primeiro conjunto de testes.



**Figura 5.12** - Fotograma durante o primeiro disparo da segunda ronda de testes.

A falha de fogo registada deveu-se ao facto do projétil ter-se soldado aos carris, nos primeiros instantes da descarga, verificando-se um escavamento considerável nos carris. A grande diferença verificada do primeiro conjunto de disparos para o segundo foi a diminuição do desgaste dos carris, que é uma melhoria na longevidade do material.

Para a terceira ronda de testes já tinhamos disponíveis os novos condensadores de  $6600 \mu\text{F}$  e  $400 \text{ V}$ . Montaram-se quatro condensadores em paralelo, como demonstrado na seguinte figura. Com esta montagem a força de Lorentz será da mesma intensidade que no segundo conjunto de testes (ver Equação 1.3), pois estamos a utilizar a mesma tensão (e consequentemente a mesma corrente inicial<sup>38</sup>, na ordem das dezenas de milhares ampères), no entanto, esta força será exercida durante mais tempo, nomeadamente quatro vezes mais tempo devido ao aumento da capacitância do novo banco de condensadores.

---

<sup>38</sup> Visto que na descarga dos condensadores se tem  $I_0 = V_0/R$  em  $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$



**Figura 5.13** - Montagem de condensadores utilizada na terceira e quarta ronda de testes da *railgun*.

Foram efetuados três disparos, nenhum deles com sucesso, verificando-se um escavamento mais acentuado que nos casos anteriores. De realçar que neste caso tínhamos quatro vezes mais energia envolvida na descarga o que levou o projétil a aquecer ainda mais e soldar-se aos carris danificando ambos de tal forma que foi imperativo realizar reparações no carris, eliminando as irregularidades causadas pelos disparos.

Analisando as falhas de fogo dos testes anteriores, chegou-se à conclusão que o problema seria, possivelmente, ao nível do atrito que o projétil encontrava enquanto deslizava entre os carris. Tentamos encontrar um lubrificante (semelhante à grafite) que diminuísse o atrito de fricção mas que não aumentasse a resistência elétrica. Foi-nos sugerido por um especialista a utilização de uma massa lubrificante à base de prata<sup>39</sup>, que a priori preenchia os requerimentos acima referidos. Após aplicação do lubrificante nos carris (ver Figura 5.14), notou-se que a massa era um pouco densa, o que poderia aumentar o atrito em vez de diminuí-lo.

---

<sup>39</sup> Detalhes do produto disponíveis em Anexo 2.



**Figura 5.14** - Carris com a massa lubrificante aplicada.

Para a última ronda de testes, por forma a dar ao projétil uma velocidade inicial e evitar que este se solde aos carris, utilizou-se outro método para fazer a propulsão inicial ao projétil. Foi usado ar comprimido semelhante ao que é empregue para efetuar limpeza a *hardware* em eletrónica<sup>40</sup>. Ao invés de 4 condensadores em paralelo, decidiu-se utilizar 2 condensadores em paralelo, que permitiu diminuir o tempo de carga dos condensadores e utilizar uma tensão mais elevada, 380 V. Efetuaram-se três disparos com o lubrificante aplicado, e à semelhança dos testes da ronda anterior, resultaram em falhas de fogo. O projétil acabou por soldar-se aos carris no início da descarga e observou-se que os danos feitos nos carris foram ainda mais graves que nos casos anteriores (ver Figura 5.15), tanto a nível de deformação dos carris como o escavamento efetuado pelo projétil, acabando por inutilizar os carris para futuros testes.

---

<sup>40</sup> Detalhes do produto disponíveis em Anexo 3.



**Figura 5.15** - Danos nos carris após a última ronda de disparos, com a massa lubrificante aplicada aos carris.

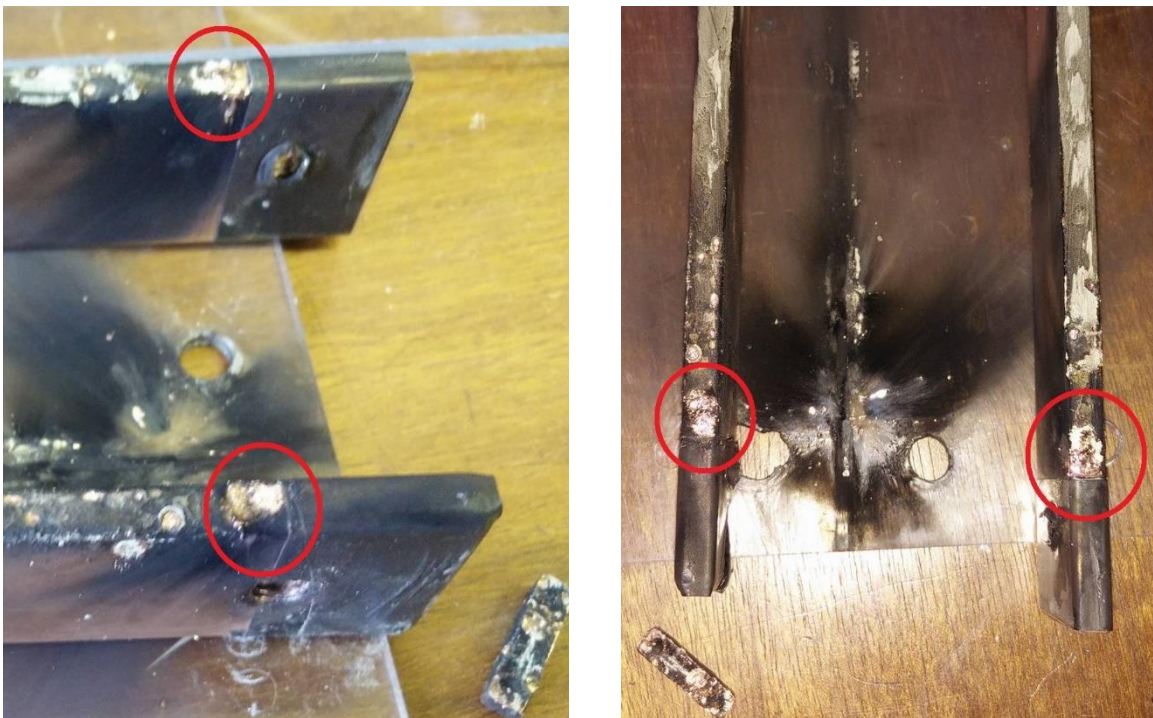
Sintetizando, numa tabela, os resultados obtidos em todos os disparos vem:

**Tabela 5.1** - Dados dos resultados obtidos após os quatro conjuntos de disparos da *railgun*.

Lubrificante	Tensão	Capacitância	Disparo com sucesso	Falhas de fogo
Sem lubrificante	350 V	6600 $\mu\text{F}$	1	2
Grafite	250 V	6600 $\mu\text{F}$	2	1
Sem lubrificante	200 V	26 400 $\mu\text{F}$	0	3
Massa lubrificante (prata)	380 V	12 000 $\mu\text{F}$	0	3

### 5.3.2. Danos no sistema

Foram registados dois tipos de danos no sistema, referidos no primeiro capítulo, o escavamento nos carris e os efeitos dos arcos de corrente nos projéteis. O escavamento nos carris foi cada vez maior à medida que se aumentou a quantidade de energia nos condensadores, sendo mais visível na última ronda de disparos. Os danos causados pelo escavamento levaram à inutilização dos carris, após 12 disparos, como se pode comprovar na seguinte figura.

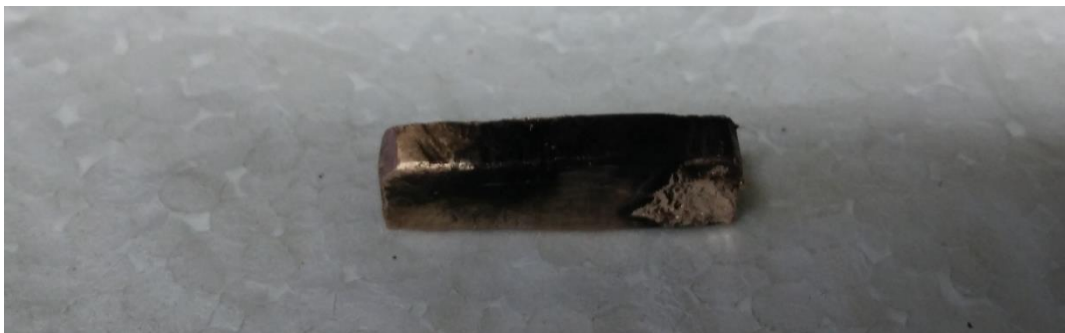


**Figura 5.16** - Danos causados pelo efeito de escavamento do projétil nos carris.

O lubrificante com que se obteve melhores resultados foi a grafite, tanto ao nível de proteção do material como eficácia da arma (menos falhas de fogo). Inicialmente pensou-se que a massa lubrificante iria trazer melhores resultados, no entanto, devido à sua elevada densidade e viscosidade acabou por aumentar ainda mais o coeficiente de atrito entre o projétil e os carris levando às falhas de fogo. Apesar do material ser de elevada qualidade, este não foi o mais apropriado tendo em conta as dimensões reduzidas da *railgun*. De realçar que a grafite é bastante menos dispendiosa (comum nos tradicionais

lápiz de grafite) e fácil de aplicar em comparação com a massa lubrificante que tem que se usar as precauções recomendadas pelos fabricantes para a sua aplicação (ver Anexo 2).

Quanto ao projétil os danos mais evidentes foram os causados pelos arcos de corrente. Estes arcos ocorrem devido à imperfeição entre o contacto com os carris e o projétil (ver subcapítulo sobre arcos de corrente no primeiro capítulo) que acaba por desgastar os materiais envolvidos, como se pode verificar na seguinte figura.



**Figura 5.17** - Danos causados pelos arcos de corrente na zona inicial (à direita) do projétil. De notar a semelhança do desgaste causado com os desgastes encontrados noutras *railguns* (ver Figura 1.7).

Após os vários disparos concluiu-se que o projétil maior, o da figura anterior, obteve melhores resultados. Os projéteis mais pequenos, e mais leves, acabaram por gerar as falhas de fogo registadas. O projétil maior, talvez por possuir uma maior inércia, resiste melhor aos primeiros atritos de fricção de carris e projétil. Devido ao desgaste do projétil, não se aconselha o uso do mesmo para mais de três disparos, uma vez que os depósitos acumulados no projétil, para além de adicionarem irregularidades, são de baixa condutividade. Quando são retiradas as irregularidades no projétil, em rigor, estamos a diminuir as dimensões do projétil. Estas pequenas alterações são suficientes para criar um ligeiro desalinhamento entre carris e projétil que poderá aumentar a probabilidade de ocorrência de escavamento e arcos de corrente.

Ao nível dos condensadores foram realizados inúmeros testes de descarga (mais de 30 descargas, além dos disparos registados) para um reóstato, que funcionou como carga, não se verificando sinais de desgaste nos condensadores nem diminuição de desempenho dos mesmos.

### **5.3.3. Análise dos resultados e lições aprendidas**

#### **5.3.3.1. Condicionantes**

Existiram duas grandes condicionantes que limitaram a análise aos resultados obtidos. A primeira foi a ausência de um equipamento que medisse a velocidade do projétil à boca dos carris. Com esta medida seria possível ter uma ideia geral do desempenho da arma, comparando velocidades com diferentes condições iniciais, e ainda confrontar os resultados práticos com os resultados previstos teoricamente. A segunda limitação foi a falta de um amperímetro de gancho ou pinça, que permitisse quantificar a corrente presente durante os disparos, caso tivéssemos esta medição seria possível prever a velocidade teórica do projétil que comparando com a velocidade real daria o índice de eficiência,  $\eta$ , da arma.

#### **5.3.3.2. Dimensão dos carris**

Uma conclusão importante que se retirou foi sobre a dimensão dos carris, onde se verificou que a descarga dos condensadores era efetuada apenas com o projétil no primeiro terço dos carris, ou seja, o resto da extensão dos carris apenas contribuiu com atrito. Apesar de não ter sido utilizada a capacitância total de uma montagem de 10 condensadores de 6600  $\mu\text{F}$  em paralelo, que iria prolongar a descarga do banco, prevê-se que metade do comprimento atual,  $L_{\text{carris}} = 25 \text{ cm}$ , seria suficiente para concluir a descarga do banco de condensadores proposto no final do capítulo quatro.

#### **5.3.3.3. Banco de condensadores e fonte de alimentação**

Nos testes efetuados foram apenas utilizados quatro de dez condensadores de 6600  $\mu\text{F}$ , devido ao circuito de carregamento não aguentar correntes tão elevadas. Tendo

inclusivamente, quando testado o carregamento de seis condensadores em paralelo, derretendo alguns dos componentes do circuito e deitando fumo. Este será um problema que inevitavelmente terá de ser endereçado em futuros projetos desta *railgun*, pois temos como objetivo efetuar o carregamento do banco de condensadores atrás proposto (dez condensadores). Realçando ainda que o próprio desenvolvimento de uma fonte de alimentação delineada para o carregamento rápido (menos de 60 segundos) de um banco de condensadores a uma tensão de 1200 V com capacitância de 26 400  $\mu\text{F}$  (montagem proposta no final do capítulo quatro) por si só constitui um desafio digno de uma dissertação, como as que já foram realizadas na Naval Postgraduate School em Monterey (Felciano, 2001).

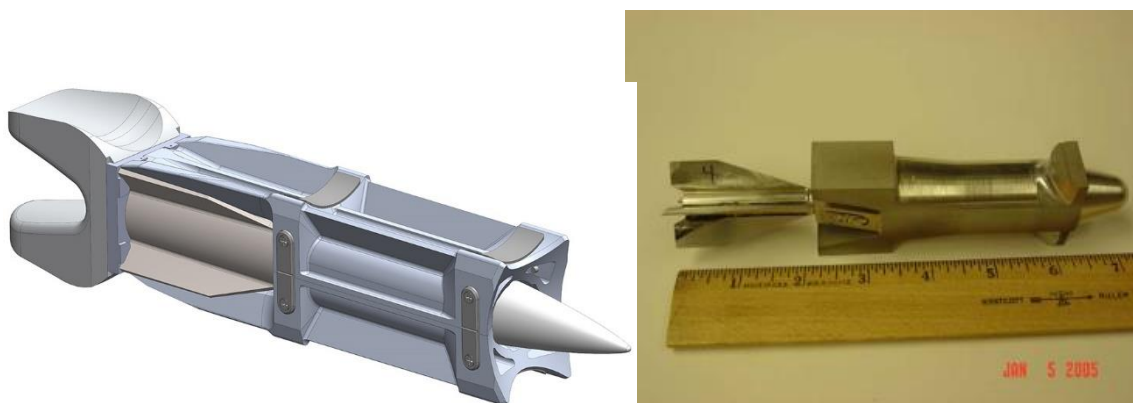
Quanto à configuração do banco de condensadores, com a alteração proposta para os carris (redução para 25 cm de comprimento) propõe-se, à semelhança da discussão no quarto capítulo, que sejam realizados testes com a configuração de um banco constituído por três bancos secundários montados em série, em que cada banco secundário estão ligados 4 condensadores em paralelo, ficando com  $E = 19 \text{ kJ}$  com um tempo de descarga igual a 9.6  $\mu\text{s}$ , semelhante ao que foi feito na *railgun* Powerlabs (Power Labs, 2010). Com esta configuração espera-se uma otimização entre a relação “tempo de descarga” e “energia disponível”.

#### **5.3.3.4. Projétil**

Apesar de terem sido testadas várias dimensões de projéteis para a *railgun*, não foi conclusivo qual seria o comprimento ótimo para o projétil, no entanto, confirmou-se que o de maior dimensão,  $L_{proj\acute{e}til} = 2.0 \text{ cm}$ , obteve melhores resultados em comparação com os menores. Encoraja-se que sejam testados outros materiais para a constituição do projétil, particularmente o alumínio apresenta-se como um forte candidato devido a sua condutividade elétrica, baixa densidade e resultados já obtidos em outros projetos (Power Labs, 2010); (Schroeder, 2007).

A própria arquitetura do projétil carece de remodelações, pois o contacto elétrico parece que é apenas efetuado na zona da cauda do projétil, não aproveitando toda a

superfície lateral do projétil para conduzir corrente, como é possível visualizar na Figura 5.18. A General Atomics, que é empresa mais avançada nesta tecnologia, propôs uma geometria para o seu projétil, encapsulando-o num *sabot*, em que a zona de contacto com os carris tem a forma de um “U” (ver figura seguinte<sup>41</sup>) (Atomics, 2016), geometria esta que é adotada por outros projetos de *railguns* (Schwartz, 2005).



**Figura 5.18** - À esquerda a geometria adotada pela General Atomics e à direita pelo EM Gun Project.

Tendo em conta as geometrias acima referidas, um dos aspetos que gostaríamos de ver melhorados em próximos projetos seria a concepção do projétil. À luz dos projetos mais avançados (Atomics, 2016) (Baker, 2016), idealmente o projétil não terá de fazer o contacto entre carris mas com o *sabot*, ou seja, como se pode ver nas figuras anteriores, o projétil encontra-se encapsulado numa estrutura metálica (*sabot*) que depois de disparado é descartado, “libertando” assim o projétil para fazer a sua trajetória. Isto leva a que o material do próprio projétil não tenha que ser obrigatoriamente bom condutor elétrico, podendo assim ser abordadas as necessidades ao nível da balística externa (arquitetura mais aerodinâmica) e terminal para a escolha do material do projétil. Assim, a boa condutividade elétrica e baixo atrito de fricção terá de ser assegurado pelo *sabot*. Esta separação de problemas é benéfico para a sua resolução, pois ao contrário do nosso projeto, o projétil tinha de preencher mais requisitos, a boa condutividade elétrica e ainda a sua integridade, dificultando a sua concepção, escolha de material e dimensão.

---

<sup>41</sup> Figura da esquerda retirada de (Atomics, 2013) e da direita (Schwartz, 2005).

## Conclusão

Ao longo da última década, várias têm sido as evoluções tecnológicas associadas ao desenvolvimento das *railguns*. Acredito que o futuro do armamento passará, inevitavelmente, por armas cuja fonte de energia é eletricidade, exemplos disso são as *railguns* e os *lasers*. Apenas com um estudo teórico crítico em paralelo com ensaios experimentais torna-se possível a evolução deste tipo de sistemas. Este projeto teve a oportunidade de englobar ambas as vertentes no seu desenvolvimento, o que enriqueceu o conteúdo, contribuindo vastamente para o esclarecimento dos envolvidos neste trabalho.

A nível teórico, que é a essência desta dissertação, os objetivos propostos foram cumpridos e superados, pois foi possível estudar o campo eletromagnético e o fluxo de energia no projétil, que não estava delineado inicialmente, mas que surgiu naturalmente como desafio. Um dos fatores que de certa forma limitou o avanço no estudo do campo eletromagnético foi, sem dúvida, a bibliografia disponível, pois o material existente demonstrou ser ou demasiado geral ou específico demais, levando a que investigação inicial fosse mais demorada ou por vezes sem os resultados esperados. Como se pode verificar ao longo desta dissertação, especialmente no terceiro capítulo, esta tem uma componente matemática/física muito forte, que levou a um esforço acrescido na confirmação dos resultados obtidos por outros autores e ainda, obviamente, dos nossos. Por último existiu também uma componente gráfica, através do *software Matlab*, que acompanhou de perto a componente matemática, pois torna-se mais fácil a compreensão e implicação dos resultados teóricos obtidos. O *Matlab* tornou-se uma ferramenta incrivelmente útil na demonstração dos resultados, no entanto, nada trivial de utilizar com expressões matemáticas tão extensas e demonstração de campos eletromagnéticos, o que acabou por inserir, ainda, uma componente de programação no projeto.

Com o estudo teórico, especialmente do terceiro capítulo, foi possível ter uma noção do que seria de esperar em termos de transferência de energia, permitindo localizar os pontos críticos numa *railgun* (contactos carris/projétil). O facto dos conceitos relativos ao eletromagnetismo, aplicados a este sistema, estarem bem consolidados permitiu que a resolução dos problemas práticos (quinto capítulo) decorresse de uma forma mais célere

e fundamentada. Creio que qualquer pessoa que pretenda iniciar-se nesta temática, tem neste documento uma base sólida ao nível do funcionamento do sistema e dos campos, e suas implicações. Conhecimentos estes que tem uma relevância crítica para a continuação da investigação desta temática. Propomos que em próximos projetos, sejam realizados estudos ao nível da distribuição espacial de forças nos carris, de modo a esclarecer a problemática da existência e localização de forças longitudinais (*recoil*) através da força de Lorentz, podendo ser comprovada experimentalmente através da montagem suspensa da railgun (semelhante a um pêndulo). No quarto capítulo, à medida que as exigências sobre o carregamento de condensadores foi aumentando, o material disponível deixou de ser suficiente, portanto, proponho ainda que seja efetuado um estudo/projeto para a construção de uma fonte de alimentação capaz de preencher os pré-requisitos descritos no mesmo capítulo. Pode ainda ser realizada uma investigação sobre a montagem do banco de condensadores, utilizando como ponto de partida a montagem sugerida também no quarto capítulo, procurando otimizar a relação “energia disponível *versus* tempo de descarga”.

No que diz respeito à componente experimental da dissertação, incluída numa base hipotética nos objetivos propostos inicialmente devido à possível falta de material necessário, complementou e enriqueceu este trabalho. Para este tipo de projeto, possuir os equipamentos adequados é mandatório. A falta de alguns equipamentos tais como: amperímetro de gancho, equipamento de aquisição de velocidade e ainda câmara de alta velocidade, limitaram a especificidade das conclusões retiradas. Devido à flexibilidade de metas delineadas, progrediu-se à medida que as dificuldades iam aparecendo. Esta liberdade provou ser benéfica pois permitiu experimentar várias configurações do sistema, adaptando este aos problemas que fomos enfrentando, sem necessidade de nos regermos por alguma metodologia pré-determinada. Com os testes e avaliações efetuados, no último capítulo, abriram-se novos caminhos para continuar a investigação. Existem inúmeras alterações, que podem ser realizadas, para melhorar o desempenho da *railgun*, como as mencionadas no quinto capítulo, das quais destaco a alteração do material do projétil para alumínio, diminuição do comprimento atual dos carris para metade, propulsão inicial do projétil a ar comprimido e ainda redefinição da arquitetura do projétil, que inclui um *sabot* em alumínio.

Numa época de investigação na área do armamento naval é importante que a Marinha Portuguesa e seus oficiais acompanhem esta evolução tecnológica e estejam preparados para os novos desafios que se aproximam. Este documento proporciona uma base sólida para a compreensão e esclarecimento de capacidades deste tipo de armamento e para todos aqueles que pretendam integrar e continuar a investigação nesta área em desenvolvimento.



## Bibliografia

- ALLEN, E. e JONES, T. V. (1990), *Relativistic recoil and the railgun*, Journal of Applied Physics, pp 18.
- ASSIS, A. K. T. e MANIA. A. (1999), *Surface Charges and Electric Field in a Two-wire Resistive Transmission Line*, Revista Brasileira de Ensino de Física, pp 469-475.
- ATOMICS, General, (2016), *Projectile Development*, <http://www.ga.com/railgun-projectile-development>, consultado em junho de 2016.
- BAKER, M. (2016), *Modified Supergun Shoots Projectiles at 4500mph*, <http://interestingengineering.com/modified-supergun-shoots-projectiles-4500mph/>, consultado em junho de 2016.
- BARRY, F. H. (2005), *EM Gun Program*, [http://proceedings.ndia.org/5560/Wednesday/Session\\_III-A/Herr.pdf](http://proceedings.ndia.org/5560/Wednesday/Session_III-A/Herr.pdf) consultado em junho 2016.
- BESSONOV, L. (1976), *Eletricidade aplicada para engenheiros*, Porto, Lopes da Silva.
- BINDU, S. (2012), *Modelling of a spark gap switch*, 2012 IEEE 10th International Conference on the Properties and Applications of Dielectric Materials, Bangalore, India: IEEE.
- BRIAN, R. (2007), *Hans Christian Ørsted and the Romantic Legacy in Science*, Boston Studies in the Philosophy of Science, pp 241.
- BAUER, D. P. et al (1995). Achieving high efficiency with conventional railgun launchers. *IEEE Transactions on*, pp 263-266.
- DECOM, (s.d.), *Circuitos RC e RL simplificados*, Unicamp, <http://www.decom.fee.unicamp.br/~baldini/EA513/Cap8.pdf>, consultado em março 2016.
- DO IT YOURSELF GADGETS, (2013), *Homemade railgun*. <http://www.doityourselfgadgets.com/2013/10/homemade-railgun.html>, consultado em outubro 2015.

- EUROAKTION, (2016), *Tabela de Densidade dos Materiais*, de euroaktion: <http://www.euroaktion.com.br/Tabela%20de%20Densidade%20dos%20Materiais.pdf>, consultado em abril 2016.
- FELCIANO, A. S. (2001), *The Design and Optimization of a Power Supply for a one-meter Eletromagnetic Railgun*, Monterey, California: Naval Postgraduate School Monterey, California.
- GALLANT, J. (2003), *Parametric Study of an Augmented Railgun*, Ieee Transactions On Magnetics.
- GENERAL ATOMICS, (2013), *Em pulse power systems*, <http://www.ga.com/railgun-programs/>, consultado em junho 2016.
- GENERAL ATOMICS, (2013), *General atomics team powers navy rail gun to new world record*, <http://www.ga.com/press-releases/older/>, consultado em fevereiro 2016.
- GIOVINAZZO, P. (1987), *The Fatal Current*, [https://www.physics.ohio-state.edu/~p616/safety/fatal\\_current.html](https://www.physics.ohio-state.edu/~p616/safety/fatal_current.html), consultado em novembro 2015.
- GLAZEBROOK, T. R. (1896), *James Clerk Maxwell: Physicist and Modern Physics*, London.
- GOIHBARG, I. G. (2005), *Energy transfer in electrical circuits: A qualitative account*, American Journal of Physics, pp 141-144.
- GRIFFITS, D. J. (1999), *Introduction to electrodynamics*, New Jersey: Prentice Hall.
- HARBOLA, M. k. (2010), *Energy flow from a battery to other circuit elements: Role of surface charges*, American Journal of Physics, pp 1203-1206.
- HARRIS, W. (2005), *How Rail Guns Work*, science.howstuffworks, <http://science.howstuffworks.com/rail-gun1.htm>, consultado em setembro 2015.
- HARTEL, H. (1987), *A qualitative approach to electricity*, Institute for Theoretical Physics and Astrophysics.
- HEALD, M. A. (1988), *Energy flow in circuits with Faraday emf*, American Journal of Physics, pp 540-547.

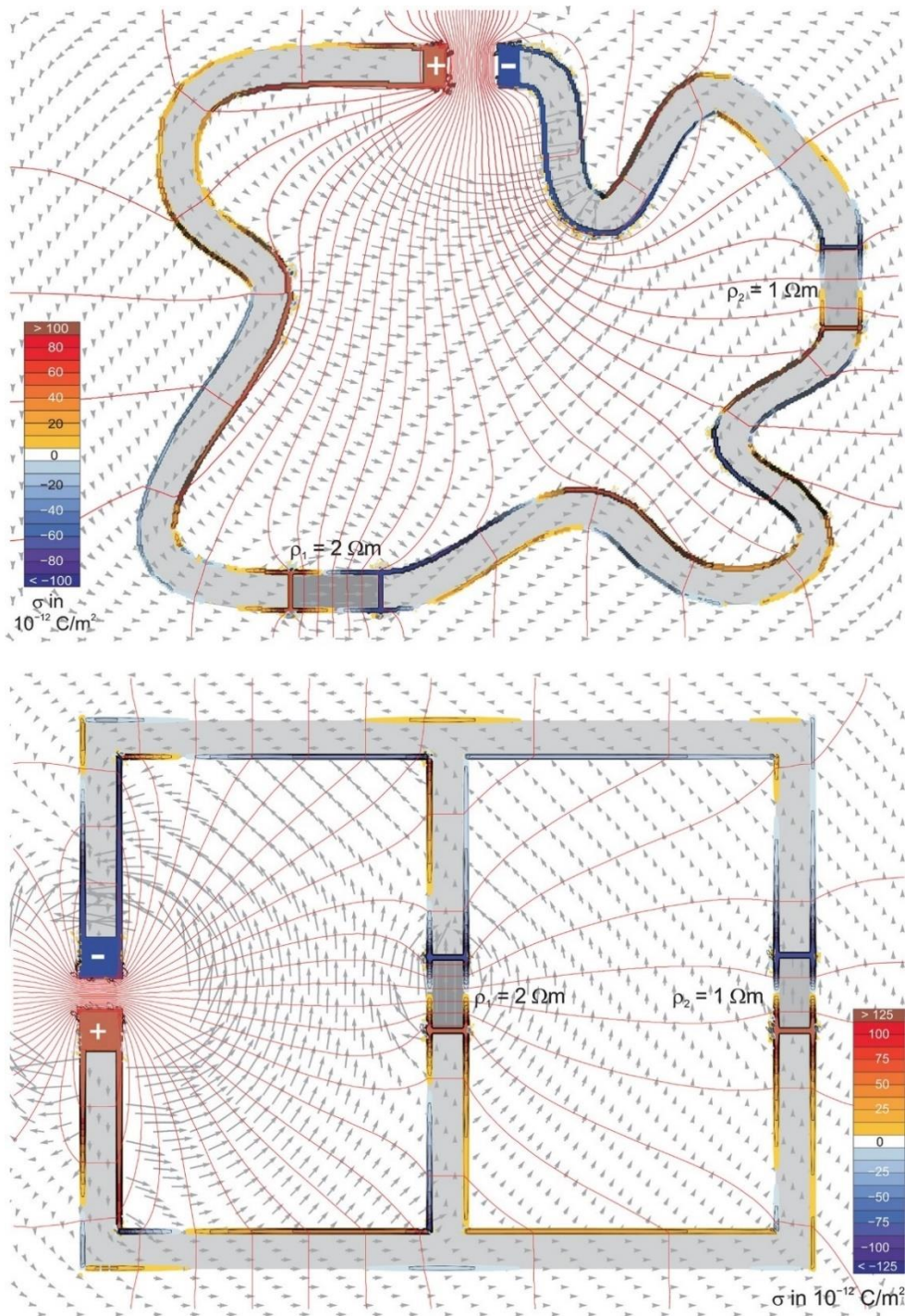
- HEATH, T. L. (1963), *A Manual of Greek Mathematics*, New York: Dover Publications, inc.
- HOFMANN, J. R. (1995), *André Marie Ampère*, Oxford.
- JACKSON, J. D. (1996), *Surface Charges on circuit wires and resistors play three roles*, American Journal of Physics, pp 855-870.
- (1999), *Classical eletrodynamics*. New York: Wiley.
- JEFIMENKO, O. (1962), *Demonstration of the electric fields of current-carrying conductors*, American Journal of Physics, pp 19-21.
- (1989), *Electricity and Magnetism*, Virginia: Electret Scientific Company Star City.
- MANIA, A. K. (1999), *Surface Charges and Eletric Field in a Two-Wire Resistive Transmission Line*, Revista Brasileira de Ensino de Física, pp 469-475.
- MANIGLIA, J. (2013), *Design, Fabrication, and testing of an emr gun based orbital debris impact testing platform*, California: Faculty of California Polytechnic State University.
- (2013), *Design, fabrication, and testing of an eletromagnetic rail gun for the repetead testing and simulation of orbital debris impacts*, digitalcommons, <http://digitalcommons.calpoly.edu/aerosp/>, consultado em janeiro 2016.
- MULLER, R. (2012), *A semiquantitive treatment of surfaces charges in DC circuits*, American Journal of Physics, pp 782-788.
- NORRIS, P. (2000), *Surface charges and fields of simple circuits*, American Journal of Physics, pp 1002-1006.
- PACKEL, E. W. (1981), *The Mathematics of Games and Gambling*, Washington DC: The Mathematical Association of America.
- PAVLOV, A. (2013), *Improvement of electromagnetic railgun barrel performance and lifetime by method of interfaces and augmented projectiles*, California: Faculty of California Polytechnic State University.

- PERSAD, C. (1997), *Characterization of Hypervelocity Gouge Craters in Rail Conductors*, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 33, No. 1.
- PETER GRANEAU, N. G. (1995), *Newtonian Electrodynamics*, Singapore: World Scientific.
- POWER LABS, (2010), *PowerLabs Rail Gun 2.0 Research!*, <http://www.powerlabs.org/railgun.html>, consultado em setembro 2015.
- PREYER, N. W. (2000), *Surfaces charges and fields of simple circuits*, *American Journal of Physics*, pp 1002-1006.
- PUMFREY, S. (2003), *William Gilbert: forgotten genius*, *Physics World*.
- SADEDIN, D. R. (1997), *Conservation of momentum and recoil in the railgun*, *IEEE Trans. Mag.*, pp 599-603.
- SCHAEFFER, C. (1932), *Einführung in die theoretische physik*, Berlin: Walter de Gruyter.
- SCHROEDER, M. K. (2007), *An investigation of the static force balance of a model railgun*, Monterey: Naval Postgraduate School.
- SEFTON, I. M. (2002), *Demolition of a Myth, Understanding Electricity and Circuits: What the Text Books Don't Tell You*, Sydney: School of Physics, The University of Sydney.
- SHERWOOD, R. W. (2006), *A unified treatment of eletrostatics*, compadre, [www.compadre.org/introphys/items/detail.cfm?ID=10026](http://www.compadre.org/introphys/items/detail.cfm?ID=10026), consultado em outubro 2015.
- SHERWOOD, R. W. (2011), *Matter & Interactions*, New York: Wiley.
- SILVA, R. T. (2002), *Notas de aula de física*, fisica.ufpb, [http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/06\\_forca\\_de\\_atrito.pdf](http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/06_forca_de_atrito.pdf), consultado em março 2016
- SLAVKO MAJČEN, R. K. (2000), *The Poyinting vector and power in a simple circuit*, *American Journal of Physics*, pp 857-859.
- SOMMERFELD, A. (1952), *Electrodynamics*, New York: Academic.

- STYER, N. A. (2012), *Visualizing Poynting vector energy flow in electric circuits*, American Journal of Physics, pp 552-554.
- THE ENGINEERING TOOLBOX, (s.d.), *Resistivity, Conductivity and Temperature Coefficients for common Materials*, The Engineering Toolbox, [http://www.engineeringtoolbox.com/resistivity-conductivity-d\\_418.html](http://www.engineeringtoolbox.com/resistivity-conductivity-d_418.html), consultado em maio 2016.
- THE SIDNEY MORNING HERALD, (2015), *US navy's new destroyer zumwal will test fire the futuristic eletromagnetic railgun*, <http://www.smh.com.au/technology/sci-tech/us-navys-new-destroyer-zumwalt-will-test-fire-the-futuristic-electromagnetic-rail-gun-20151209-gljao4.html>, consultado em janeiro 2016.
- WATT, T. J. (2011), *The Onset of Gouging in High-Speed Sliding Contacts*, Austin: The University of Texas at Austin.
- WENDLING, M. (2015), *Retificadores*, unesp.br, <http://www2.feg.unesp.br/Home/PaginasPessoais/ProfMarceloWendling/3---retificadores.pdf>, consultado em janeiro 2016.
- WU, J. G. (2016), *3D numerical simulation and analysis of railgun gouging mechanism*, Defence Technology.



## Anexo 1 - Circuitos analisados por Muller.



Campo elétrico, linhas equipotenciais, e cargas de superfície em dois circuitos com geometrias não lineares com zonas de resistência não uniforme. A densidade de cargas de superfície,  $\sigma$ , em  $10^{-12} C \cdot m^{-2}$  (Muller, 2012).

## **Anexo 2 – Descrição do lubrificante condutor à base de prata utilizado na railgun**

**Marca:** Circuit Works®

**Modelo:** Silver Conductive Grease CW7100

**Descrição da marca:** *CircuitWorks® Silver Conductive Grease provides maximum electrical and thermal conductivity, proven lubrication properties, and protection from moisture, oxidation, and other environmental hazards. This system utilizes an advanced silicone lubricant that is compatible with metal, rubber, and plastic. Use it to fill connector gaps, provide grounding for circuits, and control static discharge.*

**URL:** <https://www.chemtronics.com/p-715-circuitworks-silver-conductive-grease.aspx>



**Anexo 3 – Foto da garrafa de ar comprimido utilizado na *railgun***

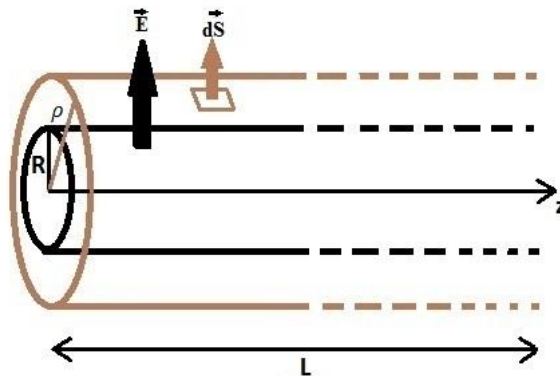




## Apêndice A - Cálculos efetuados para chegar à expressão do potencial numa linha de transmissão

O campo elétrico exterior para um cilindro carregado é dado pela Lei de Gauss,

$$\vec{E}(\rho) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma}{2\pi\rho},$$



sabemos ainda que o potencial tem a seguinte relação com o campo elétrico:

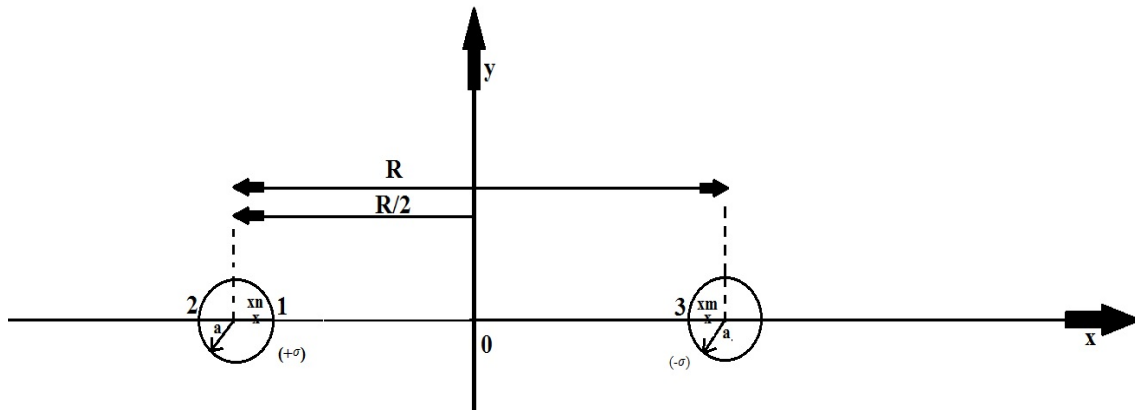
$$\varphi = - \int E dr,$$

o potencial fica simplesmente:

$$\varphi(\rho) = - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma}{2\pi} \ln(\rho) + C,$$

$$\varphi(\rho) = \frac{\sigma}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + C,$$

em que C é uma constante de valor arbitrário, como referido atrás. Consideremos agora dois condutores cilíndricos carregados com + sigma á esquerda e - sigma á direita:



$$x_1 = \frac{-R}{2} + a,$$

$$x_2 = \frac{-R}{2} - a.$$

Para que as suas superfícies cilíndricas sejam equipotenciais, é necessário imaginar duas linhas carregadas (método das imagens) nas posições  $x_n$  e  $x_m$ , paralelas aos cilindros. Exigimos, ainda, entre eles que sejam em particular,  $\varphi_1 = \varphi_2$  sobre o condutor da esquerda, devido às duas linhas fictícias de carga em  $x_n$  e em  $x_m$ . Para uma linha isolada, o potencial é:

$$\varphi(\rho) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + C,$$

Na bissetriz 1, em particular no ponto 1 com  $x_1 = -\frac{R}{2} + a$  vem:

$$\varphi_1 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{|x_1 - x_m|}{|x_1 - x_n|}\right) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\left|\left(\frac{-R}{2} + a\right) - x_m\right|}{\left|\left(\frac{-R}{2} + a\right) - x_n\right|}\right),$$

com ( $x_n = -x_m$ ):

$$\varphi_1 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\left|\left(\frac{-R}{2} + a\right) - x_m\right|}{\left|\left(\frac{-R}{2} + a\right) + x_m\right|}\right),$$

Todas as grandezas são positivas. Logo:

$$\varphi_2 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\left|\left(\frac{-R}{2} + a\right) - x_m\right|}{\left|\left(\frac{-R}{2} + a\right) + x_n\right|}\right) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\left|\left(\frac{-R}{2} + a\right) - x_m\right|}{\left|\left(\frac{-R}{2} + a\right) + x_m\right|}\right).$$

Dado que a superfície dos condutores é, para cada  $z$ , uma equipotencial, vem:

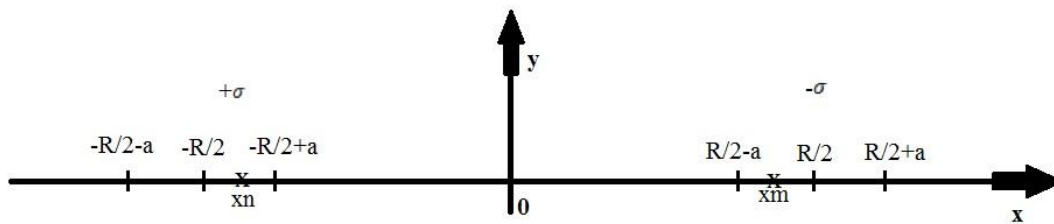
$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{|(\frac{-R}{2}+a)-x_m|}{|(\frac{-R}{2}+a)-x_m|} \right) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{|(\frac{-R}{2}+a)-x_m|}{|(\frac{-R}{2}+a)+x_m|} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{|(\frac{-R}{2}+a)-x_m|}{|(\frac{-R}{2}+a)-x_m|} \right) = \left( \frac{|(\frac{-R}{2}+a)-x_m|}{|(\frac{-R}{2}+a)+x_m|} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\frac{R}{2}-a)+x_m}{(\frac{-R}{2}+a)+x_m} = \frac{(\frac{R}{2}+a)+x_m}{(\frac{R}{2}+a)-x_m}.$$

Reescrevendo:



$$\frac{x_m + (\frac{R}{2}-a)}{x_m - (\frac{R}{2}-a)} = \frac{x_m + (\frac{R}{2}+a)}{-x_m + (\frac{R}{2}+a)}$$

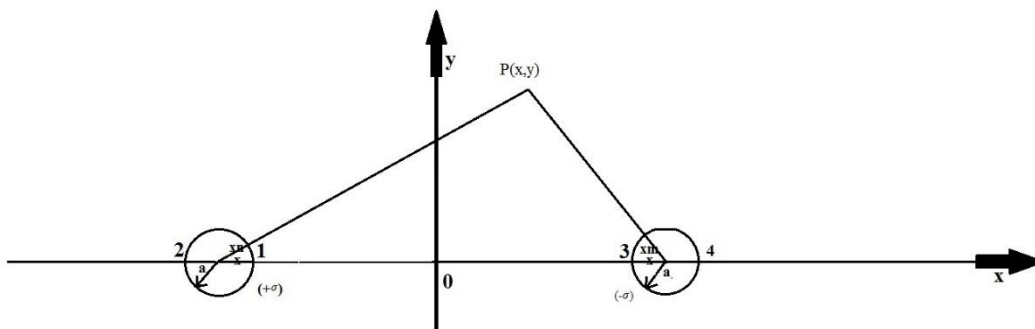
Falta agora descobrir o valor de  $x_m$ :

$$\left[ x_m + \left( \frac{R}{2} - a \right) \right] \left[ \left( \frac{R}{2} + a \right) - x_m \right] = \left[ x_m - \left( \frac{R}{2} - a \right) \right] \left[ \left( \frac{R}{2} + a \right) + x_m \right]$$

$$-x_m^2 + \left[ \left( \frac{R}{2} \right)^2 - a^2 \right] = x_m^2 - \left[ \left( \frac{R}{2} \right)^2 - a^2 \right]$$

$$x_m = \sqrt{\left( \frac{R}{2} \right)^2 - a^2} \Rightarrow x_n = -\sqrt{\left( \frac{R}{2} \right)^2 - a^2}$$

$$x_m = \sqrt{\frac{R^2}{4} - a^2} \Rightarrow x_n = -\sqrt{\frac{R^2}{4} - a^2}.$$



Supondo  $\sigma$  constante:

$$\varphi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\sqrt{(x-x_n)^2 + (y-0)^2}}{\sqrt{(x-x_m)^2 + (y-0)^2}} \right),$$

$$\varphi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\left( x + \sqrt{\frac{R^2}{4} - a^2} \right)^2 + y^2}{\left( x - \sqrt{\frac{R^2}{4} - a^2} \right)^2 + y^2} \right),$$

$$\varphi(x, y) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\left( x + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2} \right)^2 + y^2}{\left( x - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2} \right)^2 + y^2} \right),$$

$$\varphi(0, 0) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\left( \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2} \right)^2}{\left( \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2} \right)^2} \right) = 0.$$

Para o ponto 4:

$$\varphi\left(\frac{R}{2} + a, 0\right) = -\Phi_0 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{\left( \left( \frac{R}{2} + a \right) + \left( \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2} \right) \right)^2 + 0}{\left( \left( \frac{R}{2} + a \right) - \left( \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2} \right) \right)^2 + 0} \right],$$

$$\varphi\left(\frac{R}{2} + a, 0\right) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\left( \frac{R}{2} + a \right)^2 + \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2} + \frac{1}{4}(R^2 - 4a^2)}{\left( \frac{R}{2} + a \right)^2 - \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2} + \frac{1}{4}(R^2 - 4a^2)} \right),$$

$$\varphi\left(\frac{R}{2} + a, 0\right) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra + \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra - \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right).$$

Para o ponto 2:

$$\varphi\left(-\frac{R}{2} - a, 0\right) = +\Phi_0 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{\left( \left( -\frac{R}{2} - a \right) + \left( \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2} \right) \right)^2 + 0}{\left( \left( -\frac{R}{2} - a \right) - \left( \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2} \right) \right)^2 + 0} \right],$$

$$\varphi\left(-\frac{R}{2} - a, 0\right) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\left( \frac{R}{2} + a \right)^2 - \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2} + \frac{1}{4}(R^2 - 4a^2)}{\left( \frac{R}{2} + a \right)^2 + \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2} + \frac{1}{4}(R^2 - 4a^2)} \right),$$

$$\varphi\left(\frac{R}{2} - a, 0\right) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra - \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra + \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right).$$

Expressando o potencial de dois fios sem concluir a densidade linear de carga  $\sigma$  (C/m) mas só os potenciais. Temos que  $Z=0 \rightarrow \Phi(x, y, z) = 0$ . Escolhendo por exemplo os pontos 2 e 4:

$$\varphi_2 = +\Phi_0 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra - \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra + \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right),$$

$$\varphi_4 = -\Phi_0 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra + \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra - \left( \frac{R}{2} + a \right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right),$$

$$2\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \left\{ \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra - \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra + \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right) - \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra + \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra - \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right) \right\},$$

$$\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{8\pi\epsilon_0}\right) 2 \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra - \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra + \left(\frac{R}{2} + a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right),$$

$$\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \ln \left( \frac{\left(\frac{R}{2} + a\right)(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{\left(\frac{R}{2} + a\right)(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})} \right),$$

$$\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \ln \left( \frac{(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})} \right),$$

$$\left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) = \frac{\phi_0}{\ln \left( \frac{(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})} \right)}.$$

Substituindo em  $\varphi(x, y)$  vem:

$$\varphi(x, y) = \frac{\phi_0}{\ln \left( \frac{(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})} \right)} \ln \left( \frac{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + y^2} \right).$$

Para confirmar vamos utilizar:

- $\varphi_1 = +\phi_0$ ;
- $\varphi_3 = -\phi_0$ .

$$\phi_1 = \varphi \left( \frac{-R}{2} + a, 0 \right) = +\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} - Ra - \left(\frac{R}{2} - a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} - Ra + \left(\frac{R}{2} - a\right)\sqrt{R^2 - 4a^2}} \right),$$

$$\phi_1 = \varphi \left( \frac{-R}{2} + a, 0 \right) = +\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \ln \left( \frac{\left(\frac{R}{2} - a\right)(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{\left(\frac{R}{2} - a\right)(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})} \right),$$

$$\phi_1 = \varphi \left( \frac{-R}{2} + a, 0 \right) = +\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \ln \left( \frac{(R - \sqrt{R^2 - 4a^2})}{(R + \sqrt{R^2 - 4a^2})} \right),$$

$$\phi_3 = \varphi \left( \frac{R}{2} + a, 0 \right) = -\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \ln \left( \frac{\left(\left(\frac{R}{2} + a\right) + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + 0^2}{\left(\left(\frac{R}{2} + a\right) - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)^2 + 0^2} \right),$$

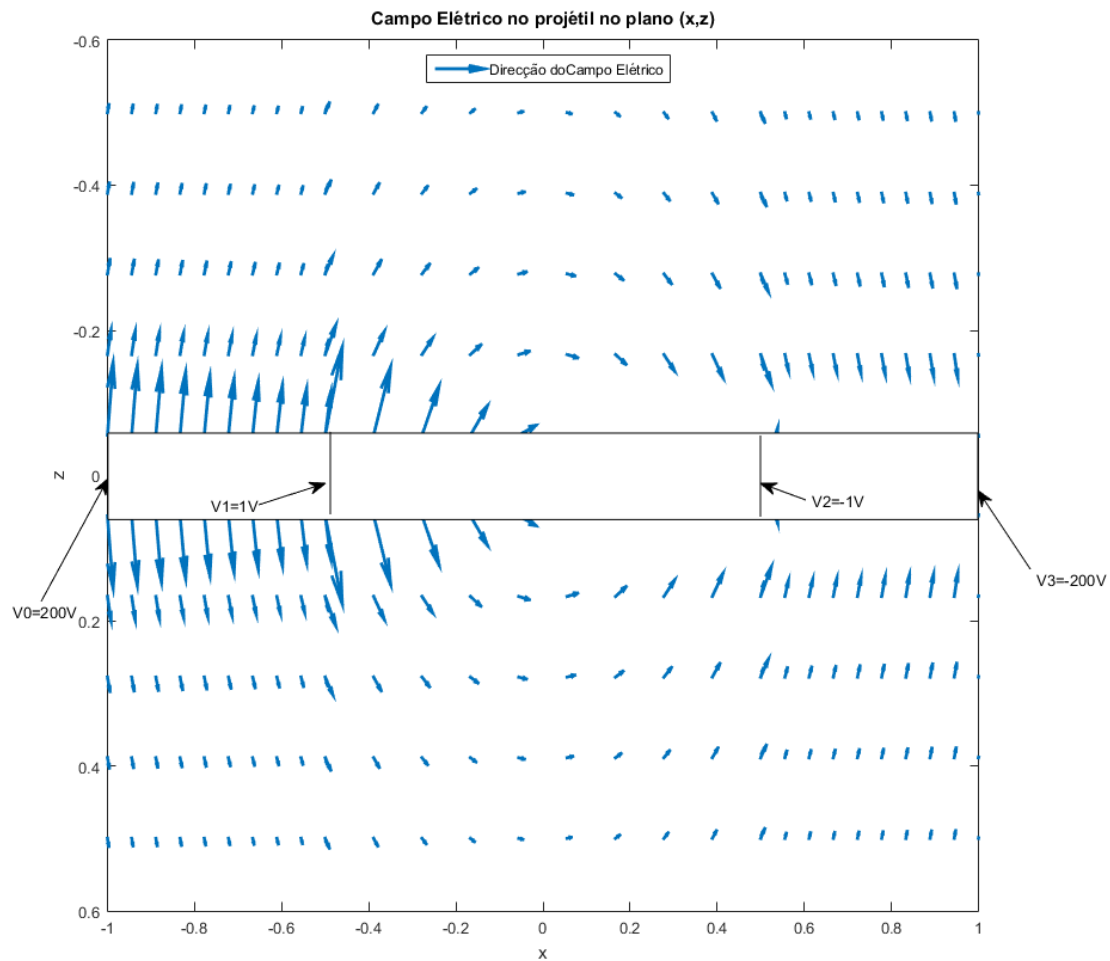
$$\phi_3 = \varphi \left( \frac{R}{2} + a, 0 \right) = -\phi_0 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\right) \ln \left( \frac{\left(\left(\frac{R}{2} + a + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)\right)^2}{\left(\left(\frac{R}{2} + a - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4a^2}\right)\right)^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \phi \left( \frac{R}{2} + a, 0 \right) = -\phi_0 = \left( \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \right) \times \\ &\ln \left( \frac{\left( \frac{R}{2} + a \right)^2 + \frac{1}{4}(R^2 - 4a^2) + \left( \frac{R}{2} + a \right) \sqrt{R^2 - 4a^2}}{\left( \frac{R}{2} + a \right)^2 + \frac{1}{4}(R^2 - 4a^2) - \left( \frac{R}{2} + a \right) \sqrt{R^2 - 4a^2}} \right), \\ \phi_3 &= \phi \left( \frac{R}{2} + a, 0 \right) = -\phi_0 = \\ &\left( \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \right) \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + a^2 + Ra + \frac{R^2}{4} - a^2 + \left( \frac{R}{2} + a \right) \sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + a^2 + Ra + \frac{R^2}{4} - a^2 - \left( \frac{R}{2} + a \right) \sqrt{R^2 - 4a^2}} \right), \\ \phi_3 &= \phi \left( \frac{R}{2} + a, 0 \right) = -\phi_0 = \left( \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \right) \ln \left( \frac{\frac{R^2}{2} + Ra + \left( \frac{R}{2} + a \right) \sqrt{R^2 - 4a^2}}{\frac{R^2}{2} + Ra - \left( \frac{R}{2} + a \right) \sqrt{R^2 - 4a^2}} \right), \\ &\boxed{\phi_3 = \phi \left( \frac{R}{2} + a, 0 \right) = -\phi_0 = \left( \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \right) \ln \left( \frac{R + \sqrt{R^2 - 4a^2}}{R - \sqrt{R^2 - 4a^2}} \right)}. \end{aligned}$$

Confirmando assim que o potencial,  $\phi_3$ , é simétrico ao potencial em,  $\phi_1$ , ou seja, para cada  $z$  o potencial é simétrico em cada cilindro.

## Apêndice B – Campo elétrico no projétil

Sobreposição de campos elétricos gerados para cada secção do projétil, com  $L=0.5$  para a Secção 1,  $L = 1$  para Secção 2 e  $L = 0.5$  para a Secção 3, ou seja, secções de contacto entre carris e projéteis maiores do que o exemplificado no terceiro capítulo.



## Apêndice C – Código Matlab utilizado para traçar linhas equipotenciais e fluxos de campos elétrico, magnético e vetor de Poynting

```

clc;close all;clear all;

%Coordenadas x,y,x

z=-0.5:0.1:0.5; % (m)
% z=z.*0;
x=-0.005:0.001:0.005; % (m)
% x=x';
% x=(0.*x)+1;
% y=-0.005:0.001:0.005; (m)
y=0; % (m)
% y=y';
% y=0.*y;
[x,z]=meshgrid(x,z); % criar grelha
% syms x y z % para usar vectline_a --> descomentar
% z=0; % fixar o z?
a = 0.001; % raio dos cilindros (mm)
R = 0.006; % distancia entre centros dos cilindros (mm)
oa=-50; % tensão no terminal positivo da bateria (V)
ob=-400; % tensão no terminal negativo da bateria (V)
l= 1; %comprimento dos cilindros (mm)
I=1000; %intensidade da corrente em A (estimada)

%-----

%Componentes das equações do campo elétrico
fi=-(((oa-ob)*z)/l)+((oa+ob)/2));
D = 1 ./ (x.^4+y.^4+(R^4/16)+a^4+2.*x.^2.*y.^2-
((R^2.*x.^2)./2)+(2*a^2.*x.^2)+((R^2.*y.^2)/2)-
(2.*a^2.*y.^2)-((R^2.*a^2/2)));
% fi=-(((oa-ob)*z)/l)+((oa+ob)/2));
% lnz2=lnz2/10000;
c=sqrt(R^2-4*a^2);
e= (x.^2-y.^2+a^2-(R^2/4));
g=2.*x.*y;
t=log((R+c)/(2*a));
fiz=(oa-ob)/l;
lnz=1/(2*log((R-c)/(2*a)));
lnz2=log(((x-(1/2).*c).^2+y.^2)./( (x+(1/2).*c).^2+y.^2));

%-----

%campo elétrico

```

```

Ex=(sqrt(R^2-4*a^2)/log((R+c)/(2*a))).*(1 ./
(x.^4+y.^4+(R^4/16)+a^4+(2.*x.^2.*y.^2)-
((R^2.*x.^2)./2)+(2*a^2.*x.^2)+(R^2.*y.^2)/2)-
(2*a^2.*y.^2)-((R^2*a^2)/2))).*(x.^2-y.^2+a^2-(R^2/4)).*-
(((oa-ob)*z)/1)+((oa+ob)/2));
Ey=(c/t).*D.*g.*fi;
Ez=((oa-ob)/1).*(1/(2*log((R-c)/(2*a)))).*log(((x-
((1/2).*c)).^2)+y.^2)./((x+((1/2).*c)).^2+y.^2));
E=[Ex,Ez];

hold on
axis square
title('Direcção e Magnitude do Vetor de Poynting em (x,z)
com y=0')
% legend('Vetor de Poynting')
% xlabel('x(mm)')
% ylabel('z(mm)')

% vectline_a(E,[x,z],[-6,6,-500,500],7); %setas de fluxo de
campo
% vectline_a(E,[x,z],[-6,6,-500,500],10); %setas de fluxo
de campo

% plot(y,Ez); % não funciona com simbólicos

% % mesh(x,z,fixyz);

% hold on
% contourf(x,z,fixyz,30,'g'); % para traçar equipotenciais

% plot(z,E) % Confirmar magnitudes ao longo de z

% contourf(x,z,E); % verificar linhas de campo com o mesmo
valor de campo eletrico

% hold on
% contour(x,z,fixyz,15);

%-----
% Campo Magnético

uo=4*pi*10^-7;

Bz=z;
Bz=Bz.*0;
% B=[Bx,By,0];

Bx=(uo*I)./(2*pi).*(y.*((1./((x+R/2).^2+y.^2))-1./((x-
R/2).^2+y.^2)));

```

```

By=(uo*I)/(2*pi)*(-1)*((x+R/2)/((x+R/2).^2+y.^2))-((x-
R/2)/((x-R/2).^2+y.^2));
B=[Bx,By];
% vectline_a(B,[x,y],[-6,6,-6,6],9)

%-----
% Vetor de Poynting

% S=cross(E,B); % Produto externo
Si=-(Ez.*By); % componente x de S
Sj=(Ez.*Bx); % componente y de S
Sk=(Ex.*By); % componente z de S
Sol=[Si,Sj];
% Sxy=[-Si,-Sk];
% contourf(x,y,Sxy);
vectline_a(Sol,[x,y],[-5,5,-4,4],9)
% hold on

% hold on
% vectline_a(Sol,[x,z],[-0.006,-0.004,-0.5,0.5],5) % à
esquerda do condutor
% esquerdo
% hold on
% vectline_a(Sol,[x,z],[-0.002,0.002,-0.5,0.5],5) % entre
condutores
% hold on
% vectline_a(Sol,[x,z],[0.004,0.006,-0.5,0.5],5) % à
direita do condutor
% direito

grid on

% title('Direcção do Campo Elétrico de dois cilindros,
percorridos por correntes contrárias, em (x,y) com z=0')
% legend('Direcção do Campo Elétrico ')

% colorbar
axis square
xlabel('x (mm)')
ylabel('y (mm)')

```

## Apêndice D – Código Matlab utilizado para a construção dos gráficos do andamento do vetor potencial (A) e sua derivada ( $dA/dt$ )

```
clc; close all; clear all;

%variáveis
% z=-0.5:0.1:0.5;
z=0;
% z=z.*0;
% x=-0.002;
% x=x';
% x=(0.*x)+1;
% x=-0.005:0.0001:0.005;
% y=-0.005;
y=0;
% z=0;
% y=y';
% y=0.*y;
% [x,y,z]=meshgrid(x,y,z);
x=-0.01:0.002:0.01;
xdentro=0:0.0001:0.001;
xfora=0.001:0.0005:0.006;
xlesq=-0.004:0.0002:-0.002; %dentro do cilindro esq
x2esq=-0.002:0.0004:0.002; %fora do cilindro esq
x3esq=0.002:0.0002:0.004;
x1dir=0.002:0.0002:0.004; %dentro do cilindro dir
x2dir=-0.002:0.0004:0.002; %fora do cilindro dir
x3dir=-0.004:0.0002:-0.002;
%caracteristicas do circuito
a = 0.001; % raio dos cilindros (mm)
R = 0.006; % distancia entre centros dos cilindros (mm)
oa=50; % tensão no terminal positivo da bateria (V)
ob=400; % tensão no terminal negativo da bateria (V)
l= 1; %comprimento dos cilindros (mm)
L=0.5;
ohm=10^-2;
C=66000*10^-6;
Vo=400;
Io=Vo/ohm;
t=0:ohm*C:10*ohm*C;
% t=0;
t1=0:ohm*C:10*ohm*C;
t2=0:ohm*C:10*ohm*C;
t3=0:ohm*C:10*ohm*C;
t4=0:ohm*C:10*ohm*C;
t5=0:ohm*C:10*ohm*C;
t6=0:ohm*C:10*ohm*C;
```

```

t7=0:ohm*C:10*ohm*C;

[xdentro,t]=meshgrid(xdentro,t);
[xfora,t1]=meshgrid(xfora,t1);
[x2esq,t2]=meshgrid(x2esq,t2);
[x1dir,t3]=meshgrid(x1dir,t3);
[x2dir,t4]=meshgrid(x2dir,t4);
[x1esq,t5]=meshgrid(x1esq,t5);
[x3esq,t6]=meshgrid(x3esq,t6);
[x3dir,t7]=meshgrid(x3dir,t7);
I=Io*exp(-t/(ohm*C));
I1=Io*exp(-t1/(ohm*C));
%parametros para o campo elétrico
c=sqrt(R^2-4*a^2);
e=(x.^2-y.^2+a^2-(R^2/4));
g=2.*x.*y;

fiz=((oa-ob)/l);
lnz=1/(2*log((R-c)/(2*a)));
lnz2=log((((x-(1/2).*c).^2)+y.^2)/((x+(1/2).*c).^2+y.^2));
fi=-((((oa-ob)*z)/l)+((oa+ob)/2));
D = 1 ./ (x.^4+y.^4+(R^4/16)+a^4+2.*x.^2.*y.^2-
((R^2.*x.^2)./2)+(2*a^2.*x.^2)+(R^2.*y.^2)/2)-
(2.*a^2.*y.^2)-((R^2.*a^2/2)));

%Componente z do campo E
Ez=((oa-ob)/l).*(1/(2*log((R-c)/(2*a)))).*log((((x-
((1/2).*c).^2)+y.^2)/((x+((1/2).*c).^2+y.^2)));

%Parametros de A
uo=4*pi*10^-7;
%
um=-(xdentro.^2/(2*a^2));
dois=log((2*L)./a);
Adentro=((uo.*(I))./(2*pi)).*(um+dois+0.5);

% plot(x,Adentroesq) %Praticamente zero dentro do condutor
% surf(xdentro,t,Adentro)
hold on
Afora=((uo.*(I))./(2*pi)).*log((L+sqrt(L^2+xfora.^2))./xfora);
%decrece ao longo de r

% plot(x,Afora)
grid on;
axis square;

% dafora=-Afora./(ohm.*C);

```

```

% surf(xfora,t,dafora)
% hold on
% dadentro=-Adentro./(ohm.*C);
% surf(xdentro,t,dadentro)
% colorbar

xlabel('r(m)');
ylabel('tempo(s)');
zlabel('dA(r,t)/dt');
title('dA(r,t)/dt de um condutor cilindrico percorrido por
uma corrente variável, com R=10^-6 (ohm)')

%-----
% Cilindro esquerdo x=(x+(R/2)) CHECK !

umesq=-((x1esq+(R/2)).^2./(2*a^2));
Adentroesq=((uo.*(I))./(2*pi)).*(umesq+dois+0.5);
% surf(x1esq,t,Adentroesq)

Aforaesq=((uo.*(I))./(2*pi)).*log((L+sqrt(L^2+((x2esq+(R/2)
).^2)))./(x2esq+(R/2)));
Aforaesq1=((uo.*(I))./(2*pi)).*log((L+sqrt(L^2+((x3esq+(R/2)
).^2)))./(x3esq+(R/2)));

% surf(x2esq,t,Aforaesq)

daforaesq=-Aforaesq./(ohm.*C);
daforaesq1=-Aforaesq1./(ohm.*C);

% surf(x2esq,t,daforaesq)
hold on
% surf(x1esq,t,dadentroesq)

%-----
% Cilindro direito x=(x-(R/2))

umdir=-((x1dir-(R/2)).^2./(2*a^2));
Adentrodireq=((uo.*(-I))./(2*pi)).*(umdir+dois+0.5);
% surf(x1dir,t,Adentrodireq)
Aforadireq=((uo.*(-I))./(2*pi)).*log((L+sqrt(L^2+((x2dir-
(R/2)).^2)))./(x2dir-(R/2)));
Aforadireq=real(Aforadireq);
Aforadireq1=((uo.*(-I))./(2*pi)).*log((L+sqrt(L^2+((x3dir-
(R/2)).^2)))./(x3dir-(R/2)));
% surf(x2dir,t,Aforadireq)
daforadireq=-Aforadireq./(ohm.*C);

```

```

daforadir1=-Aforadir1./(ohm.*C);
% daforadir=real(daforadir);
% surf(x2dir,t,daforadir)
% hold on
dadentrodire=(-Adentrodire./(ohm.*C))+daforaesq1;
dadentrodire=real(dadentrodire);

% surf(x1dir,t,dadentrodire)
dadentroesq=(-Adentroesq./(ohm.*C))+daforadir1;
dadentroesq=real(dadentroesq);

% -----
% dadtttotal
daforatotal=daforaesq+daforadir;
surf(x2dir,t,daforatotal)
hold on
surf(x1esq,t,dadentroesq)
hold on
surf(x1dir,t,dadentrodire)

```

**Apêndice E – Código Matlab utilizado para traçar o andamento de  $\sigma$  (densidade de cargas de superfície) ao longo de  $\varphi$ .**

```

clc;close all;clear all;
a = 0.001; % raio dos cilindros (mm)
R = 0.006; % distancia entre centros dos cilindros (mm)
oa=50; % tensão no terminal positivo da bateria (V)
ob=400; % tensão no terminal negativo da bateria (V)
l= 1; %comprimento dos cilindros (mm)
I=1000; %intensidade da corrente em A
teta=0:0.1:2*pi;
z=0;

c=sqrt(R^2-4*a^2);
fi=(((oa-ob)*z)/l)+((oa+ob)/2));
epsilon=8.885*10^-12;
ep=epsilon/(2*a);
raiz=(sqrt(R^2-4*a^2))/(log((R+c)/(2*a)));
last=1./((R/2)-(a*cos(teta)));
last1=1./((R/2)-(a*cos(pi)));

sigmaL=fi*ep*raiz*last; %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
sigmapi=fi*ep*raiz*last1;
sigmaesq=sigmaL./sigmapi;
% plot(teta,sigmaL,'r')
xlabel('fi')
ylabel('sigma(C·m^2)')
title('Densidade de cargas (sigma), à superficie de cada
condutor')

lastR=1./((R/2)+(a*cos(teta)));

sigmaR=-(fi*ep*raiz*lastR); %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
hold on
% plot(teta,sigmaR,'b')
legend('condutor esquerdo','condutor direito')
grid on

sigmatotal=sigmaL+sigmaR;
plot(teta,sigmatotal)

```



