

Ana Maria Peixoto Alegre Marques

**A Modelação Matemática como Ambiente de Aprendizagem e
o uso do Material Multibásico na Divisão Inteira: uma
experiência de ensino no 3.º ano do 1.º CEB**

Relatório Final do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de
Matemática e Ciências Naturais do 2.º Ciclo do Ensino Básico, apresentado ao
Departamento de Educação da Escola Superior de Educação de Coimbra para
obtenção do grau de Mestre

Constituição do júri

Presidente: Professor Doutor Pedro Balaus Custódio

Arguente: Professora Doutora Maria Cecília Costa

Orientador: Professor Doutor Fernando Martins

Trabalho realizado sob a orientação do Professor Doutor Fernando Martins e a
co-orientação do Professor Especialista Virgílio Rato

Setembro, 2018

Agradecimentos

Aos meus orientadores, por todo o apoio, ajuda e paciência e por todos os desafios que me lançaram.

Aos meus pais e irmão, por serem a base de tudo.

Aos meus avós, por todos os dias serem uma inspiração, ainda que cada um à sua maneira.

À professora Helena Arcanjo que será sempre uma referência para mim.

Ao Zeca, por me apoiar, sempre, em tudo.

Aos amigos que sempre me apoiaram nas minhas escolhas e me incentivaram a ir mais longe.

A todas as crianças e colegas que se cruzaram comigo neste percurso.

Obrigada!

Menção ao apoio financeiro

Este trabalho é financiado pela FCT/MEC através de fundos nacionais e quando aplicável cofinanciado pelo FEDER, no âmbito do Acordo de Parceria PT2020 no âmbito do projeto UID/EEA/50008/2013.



A Modelação Matemática como Ambiente de Aprendizagem e o uso do Material Multibásico na Divisão Inteira: uma experiência de ensino no 3.º ano do 1.º CEB

Resumo: Este Relatório Final surge no âmbito do Mestrado em ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB e reflete o trabalho realizado nos estágios anuais de 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. O Relatório está organizado em três componentes: a Introdução; a Componente Investigativa; a Componente Reflexiva.

A Componente Investigativa evidencia um conjunto de sessões planeadas com o propósito de melhorar a compreensão da operação divisão inteira dos alunos da turma de estágio do 3.º ano, do 1.º CEB. A divisão é, de facto, a operação que mais dificuldades traz aos alunos, porque o seu ensino se centra, muitas vezes, nas regras e mnemónicas que não têm significado para os alunos. Neste sentido, indagou-se qual seria o ambiente de aprendizagem e quais os artefactos que poderiam ajudar os alunos a compreenderem, de forma significativa, os procedimentos do algoritmo desta operação. O principal objetivo deste estudo foi criar e implementar uma experiência de ensino usando a modelação matemática como ambiente de aprendizagem e o material multibásico como material didático, para promover a compreensão dos alunos sobre os sentidos e os procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão inteira no 3.º ano, do 1.º CEB. Assim, delineou-se um estudo de natureza qualitativa, de índole interpretativa e *design* investigação-ação, em que os dados foram recolhidos através de registos escritos da professora estagiária, construídos através da observação participante, das produções escritas dos alunos, bem como através de registos fotográficos. As conclusões desta investigação indicam que este ambiente de aprendizagem, associado à representação ativa do MAB, promoveram melhorias significativas ao nível da compreensão da divisão, nomeadamente nos procedimentos do algoritmo informal e nos sentidos da operação divisão. Além disso, a implementação deste ambiente de aprendizagem permitiu que o aluno tenha problematizado e investigado, através da matemática, variadas tarefas que se incluem no seu contexto.

A Componente Reflexiva inclui duas reflexões gerais acerca dos estágios realizados em 1.º CEB e 2.º CEB, respetivamente.

Palavras-chave: modelação matemática como ambiente de aprendizagem, divisão inteira, material multibásico, formação de professores, 1.º ciclo do ensino básico

The Mathematical Modeling as a Learning Environment and the use of Multibasic Material in the Whole Division: a teaching experience in the 3rd year of the 1st Cycle

Abstract: This is the Final Report of the Master's degree in 1st Cycle of Basic Education teaching and in 2nd Cycle of Basic Education teaching of Mathematics and Natural Sciences. It reflects the work accomplished in the annual internship of 1st and 2nd Cycles of Basic Education (CEB). The Report is organized into three components: Introduction; Investigative Component; Reflective Component.

The Investigative Component documents a set of planned sessions with the purpose of improving the 3rd year children's understanding of the whole division operation. Division is, in fact, the most difficult mathematical operation for students because its teaching often focuses on rules and mnemonics that have no meaning. In this way, we inquired ourselves what was the learning environment and what were the artifacts that could help the children to understand, in a meaningful way, the procedures of the algorithm of division operation. The main objective of this study was to create and implement a teaching experience using the mathematical modeling as a learning environment (MMCAA) and the multibase arithmetic blocks (MAB) as a didactic material to promote students' understanding of the whole division: two distinct interpretations of division (partitive or measurement); and the procedures of informal algorithms associated with the usual representation of whole division algorithm. Hence, a qualitative, interpretative and action research designed study was composed. The data was collected from written records of the trainee teacher, achieved by participant observation; written productions of the students; as well as photographic records. The conclusions of this investigation indicate that this learning environment associated with the active representation of the MAB leads to significant improvements in the division understanding, particularly in informal algorithm procedures. In addition, the implementation of this learning environment allowed the students to have problematized and investigated, through mathematics, various tasks which are present in their background.

The Reflective Component includes two general reflections based on the internships during the Masters, in 1st CEB and 2nd CEB, respectively.

Keywords: mathematical modeling as a learning environment, whole division, multibase arithmetic blocks, educational practice, 1st Cycle of Basic Education

Índice

Abreviaturas	XI
Índice de Quadros	XI
Índice de Figuras.....	XI
1. INTRODUÇÃO	1
2. COMPONENTE INVESTIGATIVA	7
2.1. Introdução.....	9
2.1.1. Motivação e formulação do problema	9
2.1.2. Objetivos e questão de investigação	11
2.1.3. Pertinência do estudo.....	12
2.1.4. Estrutura da Componente Investigativa.....	14
2.2. Revisão da Literatura	14
2.2.1. Modelação Matemática como Ambiente de Aprendizagem.....	14
2.2.2. Operação Divisão.....	21
2.2.3. Manipulativo concreto: Material Multibásico	25
2.3. Opções Metodológicas	27
2.3.1. Descrição do estudo	27
2.3.2. Contexto do estudo	30
2.3.3. Design do estudo.....	32
2.3.4. Recolha e análise dos dados	36
2.4. Apresentação de Resultados	37
2.4.1. Mapeamento das dificuldades dos alunos.....	37
2.4.2. Sentido de Partilha Equitativa	37
2.4.2.1. Fase Inicial	37
2.4.2.1. Fase de Intervenção	40
2.4.2.1. Fase Final	47
2.4.2.1. Síntese	52
2.4.3. Sentido de Medida	53
2.4.2.1. Fase Inicial	53
2.4.2.1. Fase de Intervenção	57
2.4.2.1. Fase Final	61
2.4.2.1. Síntese	65
2.5. Discussão de Resultados.....	67
2.6. Conclusões	69
2.6.1. Limitações do estudo	71
2.6.2. Recomendações para futuros estudos	71
3. COMPONENTE REFLEXIVA	73
3.1. 1.º Ciclo do Ensino Básico	75
3.2. 2.º Ciclo do Ensino Básico	83
3.3. Considerações Finais	86

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
APÊNDICES.....	99
<i>Apêndice 1: Tarefas da Fase Inicial</i>	<i>101</i>
<i>Apêndice 2: Níveis dos alunos na Fase Inicial.....</i>	<i>105</i>
<i>Apêndice 3: Tarefas da Sessão 1 da Fase de Intervenção</i>	<i>107</i>
<i>Apêndice 4: Tarefas da Sessão 2 da Fase de Intervenção</i>	<i>111</i>
<i>Apêndice 5: Tarefas da Sessão 3 da Fase de Intervenção</i>	<i>115</i>
<i>Apêndice 5: Tarefas da Sessão 4 da Fase de Intervenção</i>	<i>117</i>
<i>Apêndice 7: Tarefas da Sessão 5 da Fase de Intervenção</i>	<i>119</i>
<i>Apêndice 8: Tarefas da Sessão 6 da Fase de Intervenção</i>	<i>123</i>
<i>Apêndice 9: Planificações das sessões de intervenção</i>	<i>127</i>
<i>Apêndice 10: Tarefas da Fase Final.....</i>	<i>133</i>
<i>Apêndice 11: Níveis dos alunos na Fase Final.....</i>	<i>137</i>

Abreviaturas

CEB — Ciclo do Ensino Básico

MAB — Material Manipulativo Concreto Multibásico

MMCAA — Modelação Matemática como Ambiente de Aprendizagem

NEE — Necessidades Educativas Especiais

PE — Professora Estagiária

ZDP — Zona de Desenvolvimento Proximal

Índice de Quadros

Quadro 1: Organização das três fases do estudo.....	33
Quadro 2: Critério com três níveis (Pratas, Rato & Martins, 2016, p. 36)	36
Quadro 3: Níveis dos alunos na fase inicial e na fase final	69

Índice de Figuras

Figura 1: Ciclo de Modelação Matemática (Ferri, 2010, p. 20)	16
Figura 2: O envolvimento do professor e dos alunos nos casos de Modelação Matemática (Barbosa, 2001, p. 9).....	20
Figura 3: Ciclo da investigação-ação (Sousa & Batista, 2011, p. 65)	29
Figura 4: Resolução do aluno A da tarefa 1 da fase inicial	37
Figura 5: Resolução do aluno A da tarefa 4 da fase inicial	38
Figura 6: Resolução do aluno B da tarefa 1 da fase inicial.....	38
Figura 7: Resolução do aluno B da tarefa 4 da fase inicial.....	39
Figura 8: Resolução do aluno C da tarefa 1 da fase inicial.....	39
Figura 9: Resolução do aluno C da tarefa 4 da fase inicial.....	40
Figura 10: Resolução do aluno D da tarefa 1 da fase inicial	40
Figura 11: Resolução do aluno D da tarefa 4 da fase inicial	40
Figura 12: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 1 (aluno A).....	41
Figura 13: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 2 (aluno B).....	42
Figura 14: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 5 (aluno A).....	42
Figura 15: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 5 (aluno B).....	43
Figura 16: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 6 (aluno A).....	43
Figura 17: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 6 (aluno B).....	44
Figura 18: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 1 (aluno D).....	44
Figura 19: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 2 (aluno C).....	45
Figura 20: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 5 (aluno D).....	46
Figura 21: Resolução do grupo 2 da tarefa 2 da sessão 6 (aluno D).....	46
Figura 22: Resolução do aluno A da tarefa 1 da fase final	47

Figura 23: Resolução do aluno A da tarefa 2 da fase final.....	48
Figura 24: Resolução do aluno B da tarefa 1 da fase final.....	48
Figura 25: Resolução do aluno B da tarefa 2 da fase final.....	49
Figura 26: Resolução do aluno C da tarefa 1 da fase final.....	49
Figura 27: Resolução do aluno C da tarefa 2 da fase final.....	50
Figura 28: Resolução do aluno D da tarefa 1 da fase final.....	51
Figura 29: Resolução do aluno D da tarefa 2 da fase final.....	51
Figura 30: Resolução do aluno A da tarefa 2 da fase inicial.....	54
Figura 31: Resolução do aluno A da tarefa 3 da fase inicial.....	54
Figura 32: Resolução do aluno B da tarefa 2 da fase inicial.....	55
Figura 33: Resolução do aluno B da tarefa 3 da fase inicial.....	55
Figura 34: Resolução do aluno C da tarefa 2 da fase inicial.....	55
Figura 35: Resolução do aluno C da tarefa 3 da fase inicial.....	56
Figura 36: Resolução do aluno D da tarefa 2 da fase inicial.....	56
Figura 37: Resolução do aluno D da tarefa 3 da fase inicial.....	56
Figura 38: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 3 (aluno A).....	57
Figura 39: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 3 (aluno B).....	57
Figura 40: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 4 (aluno B).....	58
Figura 41: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 5 (aluno A).....	58
Figura 42: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 6 (aluno B).....	59
Figura 43: Resolução do grupo 2 da tarefa 2 da sessão 3 (aluno C).....	59
Figura 44: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 4 (aluno D).....	60
Figura 45: Resolução do grupo 2 da tarefa 2 da sessão 5 (aluno D).....	61
Figura 46: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 6 (aluno C).....	61
Figura 47: Resolução do aluno A da tarefa 3 da fase final.....	62
Figura 48: Resolução do aluno A da tarefa 4 da fase final.....	62
Figura 49: Resolução do aluno B da tarefa 3 da fase final.....	63
Figura 50: Resolução do aluno B da tarefa 4 da fase final.....	63
Figura 51: Resolução do aluno C da tarefa 3 da fase final.....	64
Figura 52: Resolução do aluno C da tarefa 4 da fase final.....	64
Figura 53: Resolução do aluno D da tarefa 3 da fase final.....	65
Figura 54: Resolução do aluno D da tarefa 4 da fase final.....	65

1. INTRODUÇÃO

O Decreto-Lei n.º 79/2014, de 14 de maio reconhece “o valor e o impacto da docência na qualidade da educação” e refere que a “preparação de educadores e professores deve ser feita da forma mais rigorosa e que melhor valorize a função docente”. De facto, diversos estudos têm vindo a revelar que a formação inicial dos professores “é crucial e não é substituível pela formação profissional contínua, que obviamente não deixa de desempenhar um papel indispensável”. Este Decreto-Lei regulamenta o regime jurídico de habilitação para a docência e determina, especificamente no n.º 2 do artigo 11.º, a realização de um estágio de natureza profissional que culmina com a elaboração de um relatório final. Assim, este relatório reflete o trabalho desenvolvido no âmbito das componentes de Prática Educativa em 1.º e 2.º CEB, da formação inicial de Mestrado em ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º Ciclo do Ensino Básico.

O primeiro estágio foi realizado em 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB), numa turma do 3.º ano, no âmbito da unidade curricular Prática Educativa I, durante o ano letivo 2016/2017. Esta era uma turma constituída por 18 alunos, sendo que 3 estavam referenciados com NEE. Era uma turma bastante heterogénea, com alguns problemas de comportamento e com um ritmo de aprendizagem lento. A turma possuía diversidade cultural, com alunos oriundos de diversos países.

O segundo estágio, no âmbito da unidade curricular Prática Educativa II, decorreu em 2.º CEB, durante o ano letivo 2017/2018. Este segundo estágio decompôs-se em duas vertentes, visto que foi realizado em duas turmas distintas: uma turma de 5.º ano, na disciplina de Matemática; e uma de 6.º ano, na disciplina de Ciências Naturais. A turma de Matemática era constituída por 21 alunos (3 referenciados com NEE), alguns dos quais necessitavam de um acompanhamento frequente. A turma de Ciências Naturais era constituída por 22 alunos, sendo que 3 estavam referenciados com NEE. Esta era uma turma com ritmos de aprendizagem distintos, visto que tanto existiam alunos com um bom ritmo de aprendizagem como, por outro lado, se observavam alunos com uma participação passiva.

Ao longo dos estágios, a partilha de ideias com colegas e com professores, bem como a elaboração de reflexões orais e escritas pós-intervenção, nas quais eram focados os

principais aspetos positivos e os principais aspetos a melhorar durante a lecionação, assim como sugestões de melhoria ou alteração, permitiram que a professora estagiária (PE) crescesse profissionalmente. De facto, foi sendo desenvolvida uma atitude reflexiva em relação à própria prática. A este respeito, alguns autores (Schön, 1987; Zeichner, 1993; Vieira, 1993; Sá- Chaves, 2002; Alarcão, 2004; Jorro, 2005; Kansan, 2014) são unânimes em considerar o desenvolvimento da reflexividade como uma importante ferramenta formativa, sendo que é a única capaz de responder aos desafios atuais da diversidade das escolas, dos contextos e dos públicos escolares. Na verdade, uma lógica de formação de professores de tipo *aplicacionista* e por imitação de modelos de professor estaria atualmente desarticulada com os contextos diversos de intervenção do professor e, por esse motivo, seria ineficaz. Deste modo, Kansanen (2014), a propósito da qualidade da formação de professores na Finlândia, refere que ela assenta em dois aspetos estruturantes: baseia-se, por um lado, em evidências reais e do contexto de intervenção do professor; e, por outro, estimula o desenvolvimento de competências metacognitivas de reflexão e de raciocínio pedagógico. Dewey (1933, como referido em Zeichner, 1993, p. 19) acredita que a “ação reflexiva” é uma forma de “encarar e responder aos problemas”, que implica “intuição, emoção e paixão”, tendo em consideração os motivos que justificam aquilo em que se acredita ou que se pratica. O desenvolvimento de uma atitude reflexiva em futuros professores é valorizada porque: motiva para “uma maior exigência”; prepara para a crescente complexidade da ação docente; promove autoconhecimento e autonomia, de forma a que o professor estagiário seja capaz de trabalhar sobre si próprio; proporciona “maior segurança na ação de ensinar”; confere maior interesse e capacidade de inovar (Perrenoud, 2002, p. 48; Alarcão & Roldão, 2008, p. 30).

Do mesmo modo que se defende o desenvolvimento de uma atitude reflexiva na formação inicial de professores, também se destaca a importância de preparar os futuros docentes para a investigação em educação (Veiga, 1991). Perrenoud (1993) considera que existem três motivos complementares para iniciar a investigação na formação inicial de professores, entre eles: permite que haja uma “apropriação ativa de conhecimentos de base em ciências humanas”; prepara os futuros professores para a “utilização de resultados da investigação em educação ou para a participação no seu

desenvolvimento”; enquadra-se no paradigma da “prática refletida” (Perrenoud, 1993, p. 117). O autor também indica que, através da investigação, os futuros professores são incluídos na comunidade científica, de tal forma que se deparam com os conhecimentos mais recentes. Além disso, a investigação pode, no âmbito de uma pedagogia ativa, “estimular a apropriação ativa dos conhecimentos científicos” que são importantes para exercer a profissão (Perrenoud, 1993, p. 120). Fonseca (2013) considera que um professor investigador é um profissional reflexivo porque “acede ao conhecimento e o constrói através da autonomia intelectual” (Fonseca, 2013, p. 75).

Flores, Vieira e Ferreira (2014) referem que as práticas de investigação, inscritas numa nova pedagogia de formação, devem assentar nos contextos reais e devem ser baseadas em problemas, oferecendo como vantagem harmonizar, de forma ajustada, a teoria e a prática nos contextos de formação, isto é, numa lógica não *aplicacionista* da teoria, permitindo mobilizar as teorias e a experiência de forma epistemológica mais inclusiva e rica, a partir da interação dos professores, formadores, supervisores e formandos, promovendo uma reflexão sistemática do seu pensamento e ação.

Dada a importância da reflexão e da investigação na formação inicial de professores, este relatório está estruturado em três partes: Introdução; Componente Investigativa; Componente Reflexiva. Na Introdução são contextualizadas as práticas pedagógicas realizadas ao longo do Mestrado e é feita uma referência à importância destas práticas na formação de um professor reflexivo. O segundo capítulo é constituído por uma Componente Investigativa, desenvolvida no estágio do 1.º CEB, cujo foco recai sobre a integração da modelação matemática como ambiente de aprendizagem (MMCAA) e o uso do material multibásico (MAB) na compreensão dos sentidos da divisão inteira e dos procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão inteira. Este capítulo procura evidenciar um conjunto de sessões que foram planeadas com o propósito de melhorar a compreensão da operação divisão inteira dos alunos da turma de estágio do 3.º ano, do 1.º CEB, dado que se verificaram dificuldades a este nível. Por fim, o terceiro capítulo engloba uma Componente Reflexiva, na qual se analisa criticamente o impacto que os estágios supervisionados em 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico tiveram no desenvolvimento pessoal e profissional da PE.

2. COMPONENTE INVESTIGATIVA

2.1. Introdução

Neste subcapítulo apresenta-se a motivação para a realização do estudo e o respetivo problema, bem como os objetivos da investigação e questões investigativas e ainda os motivos da sua pertinência. Por fim, faz-se uma breve apresentação da estruturação do estudo.

2.1.1. Motivação e formulação do problema

Durante a Prática Supervisionada em 1.º CEB, que decorreu numa turma de 3.º ano, integrada no Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB, foram observadas dificuldades dos alunos relacionadas com a divisão inteira, nomeadamente, na resolução de tarefas que tinham por base os seus sentidos (partilha equitativa ou medida) e dificuldades relacionadas com os procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão. Os alunos aparentavam ter dificuldades em interpretar e resolver as situações problemáticas que envolvessem a divisão e, alegadamente, tinham mais dificuldades se o sentido subjacente fosse o de medida. Observou-se também que os procedimentos utilizados pelos alunos eram os mesmos para quaisquer situações problemáticas, independentemente do sentido da divisão. Por conseguinte, tendo em consideração as dificuldades referidas que foram observadas pela PE, o seguinte problema emergiu: que ambiente de aprendizagem se pode implementar e que artefactos se podem usar para ajudar os alunos a compreenderem os procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão, sem recorrerem a mnemónicas?

Depois de percebido o ponto de partida e de formulado o problema, foi necessário aprofundar conhecimentos sobre a divisão, sobre as etapas de ensino desta operação que vão desde a emergência dos seus sentidos até à etapa final (ensino do algoritmo usual), e ainda aprofundar conhecimentos sobre os artefactos que pudessem promover aprendizagens com compreensão, evitando mnemónicas, durante todas as etapas acima referidas.

Para que os alunos, num mundo em constante mudança, sejam capazes de usar a Matemática quando surgem diversos tipos de problemas no seu quotidiano, é importante que o ensino promova no aluno processo de compreensão, devendo por isso ter como ponto de partida os seus conhecimentos prévios e os seus ritmos de aprendizagem (Heuvel-Panhuizen, 1996; MEC, 2013; NCTM, 2007;). Freudenthal (1971, 1973, 1986, como referido em Heuvel-Panhuizen, 1996) considera que, quando aprendem matemática de forma isolada da realidade, os alunos rapidamente a irão esquecer e não serão capazes de a aplicar no seu quotidiano. Assim, é importante iniciar a aprendizagem através de contextos com significado para os alunos, que sejam “matematizáveis”, e não por definições (Ponte & Serrazina, 2000; Heuvel-Panhuizen, 1996). Barbosa (2003, p. 68) também defende que o objetivo fundamental da educação básica deve ser “educar matematicamente os nossos alunos para agir na sociedade e exercer a cidadania” e que, para conseguirmos cumprir este desígnio social, poderemos assumir pedagogicamente as atividades de MMCAA como “uma forma de desafiar a ideologia da incerteza e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática”, isto é, entender o papel sociocultural da matemática (Barbosa, 2003, p. 68). Assim, a MMCAA deve ser incluída no currículo, na medida em que motiva os alunos, porque as tarefas propostas estão relacionadas com o contexto realista dos alunos (Martins et al., 2013; Ferri, 2010; Blum & Niss, 1991), e porque facilita a sua aprendizagem, devido à relação de desenvolvimento próximo de Vygotsky (Barbosa, 2003; Vygotsky, 1978). Ao implementar a MMCAA, os alunos desenvolvem, além de capacidades transversais como as de comunicação, “a competência crítica”, “habilidades gerais de exploração” e podem ainda criar “hábitos de investigação orientada” (Barbosa, 2003, p. 67). Este ambiente de aprendizagem também permite que os alunos sejam capazes de “aplicar matemática em diversas situações”, associando conteúdos de matemática a outras áreas do conhecimento e da ciência, de acordo com o seu papel sociocultural (Barbosa, 2003, p. 67).

Além de um ambiente de aprendizagem que permita aos alunos desenvolverem capacidades transversais ao mesmo tempo que estão motivados para aprender, também o tipo de artefactos usados nas tarefas durante a implementação das práticas de sala de aula é importante. Deste modo, a escolha dos materiais didáticos a usar no processo de

ensino e de aprendizagem é preponderante. O Programa de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013, p. 1) refere que “a aprendizagem da Matemática, nos anos iniciais, deve partir do concreto, pelo que é fundamental que a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos” (MEC, 2013, p. 1). O uso de materiais manipulativos concretos no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática permite que o aluno, partindo da manipulação de objetos concretos (e posterior discussão do seu significado), desenvolva o pensamento matemático, compreendendo conceitos e ideias matemáticas. Estes materiais também permitem que o aluno se envolva ativamente na sua aprendizagem (Matos & Serrazina, 1996; Swan & Marshall, 2010; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2012; Larbi & Mavis, 2016). O MAB tem sido usado maioritariamente para promover a compreensão do valor posição, mas também as operações de adição e subtração. Existe, no entanto, uma proposta didática (Fernandes & Martins, 2014) que apresenta as quatro fases do ensino do algoritmo da divisão, recorrendo ao MAB e apelando à compreensão dos alunos.

Considerando tudo o que foi referido, formulou-se o seguinte problema: como desenvolver a modelação matemática como ambiente de aprendizagem e integrar o material multibásico no processo de ensino e de aprendizagem da divisão inteira, de modo a que os alunos compreendam os sentidos da divisão e os procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão?

2.1.2. Objetivos e questão de investigação

Considerando o contexto da turma e as respetivas dificuldades, bem como os aspetos fundamentais do ensino e da aprendizagem da operação divisão inteira, foram formulados os seguintes objetivos de investigação:

- a) mapear as dificuldades dos alunos acerca dos sentidos da divisão e dos procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão no 3.º ano, do 1.º CEB;
- b) criar e implementar uma experiência de ensino usando a modelação matemática como ambiente de aprendizagem e o material multibásico como material didático,

de modo a promover a compreensão dos alunos sobre os sentidos e dos procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão inteira;

- c) analisar o impacto que a modelação matemática como ambiente de aprendizagem e a integração do material multibásico têm na compreensão dos alunos sobre os sentidos e dos procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão inteira no 3.º ano, do 1.º CEB.

Com base nos objetivos de investigação enunciados, surge a seguinte questão de investigação: qual o impacto que a modelação matemática como ambiente de aprendizagem e o uso do material multibásico têm na compreensão dos sentidos da divisão inteira, bem como dos procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão inteira?

2.1.3. Pertinência do estudo

O PISA 2015-Portugal sugere o “uso da Modelação Matemática como uma das estratégias para o processo de Formular Matematicamente as Situações” (Marôco, Gonçalves, Lourenço, & Mendes, 2016, como referido em Silva, 2018, p. 12). Na verdade, a MMCAA permite investigar situações do quotidiano através da matemática (Barbosa, 2001). Este ambiente de aprendizagem tem vindo a ser implementado em diversos estudos e os resultados têm sido positivos. Um estudo realizado por Silva (2018) mostra que, depois de implementado o conjunto de sessões usando a MMCAA, os alunos de uma turma do 1.º ano se tornaram mais competentes, confiantes e autónomos na resolução das tarefas propostas. Esse grupo de alunos também pôde aplicar a matemática que aprende na escola ao seu quotidiano, de tal forma que considerou o envolvimento em atividades matemáticas como “prazeroso, desafiante e motivante” (Silva, 2018, p. 75). Diversos autores defendem a implementação deste ambiente de aprendizagem devido às vantagens que apresenta, tais como: o trabalho cooperativo, que permite desenvolver capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática (a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática); a motivação dos alunos para a aprendizagem, que, por estar relacionada com o quotidiano, é significativa; a aplicação da matemática em situações reais (Blum

& Ferri, 2009; Barbosa, 2003; Jurkiewicz & Friedman, 2010; Brou, Rato & Martins, 2014; Martins et al., 2013).

Das quatro operações aritméticas, uma das que suscita mais dificuldades aos alunos é a divisão (Fernandes & Martins, 2014; McCormick & Essex, 2017; Natale & Fosnot, 2007). Deste modo, o ensino desta operação deve ser feito “com e para a compreensão” (Martins et al., 2013, p. 173; Martin, 2009). Verifica-se que, em muitos casos, o ênfase do ensino do algoritmo da operação divisão é colocado nas regras e mnemónicas, que, para os alunos, são isentas de significado. O ensino preconizado deste modo ignora “a compreensão dos poderosos conceitos de agrupamento e de valor posição” (Martin, 2009, p. 483). Assim, surgem as dificuldades e o pensamento versátil necessário à aprendizagem da Matemática fica limitado (David & Machado, 1996, p. 27, como referido em Ponte & Serrazina, 2000). Os algoritmos são importantes porque funcionam como “instrumentos auxiliares de cálculo” (Brocardo & Serrazina, 2008, p. 101) e permitem que os alunos calculem fluentemente (Bass, 2003, como referido em Brocardo & Serrazina, 2008). No entanto, Brocardo e Serrazina (2008) defendem que os algoritmos devem ser o culminar de um longo trabalho de compreensão dos números e operações. O ensino dos algoritmos deve, pois, focar-se no “sentido do número no contexto do cálculo algorítmico” (Brocardo & Serrazina, 2008, p. 106).

Considerando que as crianças de 7 ou 8 anos se encontram no estágio das operações concretas, segundo a Teoria de Desenvolvimento Cognitivo de Piaget (Piaget & Inhelder, 1973), e que o Programa de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) refere que a aprendizagem da matemática deve partir do concreto, sugere-se o uso de materiais manipulativos. Através da manipulação concreta e posterior discussão, estes materiais podem facilitar a aprendizagem porque permitem que o aluno, apelando aos seus sentidos, construa o seu conhecimento e, assim, possa compreender diferentes conceitos matemáticos (Heuvel-Panhuizen, 1996; Fuson, 2003; Ma, 2009; Fernandes & Martins, 2014; Liggett, 2017; Uribe-Flórez & Wilkins, 2017; Swan & Marshall, 2010).

Em suma, pode considerar-se este estudo pertinente, porque: pretende atender a dificuldades de uma turma de 3.º ano; o problema de investigação e as opções metodológicas vão ao encontro das sugestões da comunidade científica; apesar de já

existirem alguns estudos em que é implementada a modelação matemática como ambiente de aprendizagem (Barbosa, 2003; Ferri, 2010; Oliveira & Oliveira, 2012; Martins et al., 2013; Ferri & Blum, 2013; Brou, Rato & Martins, 2014; Pratas, Rato & Martins, 2016; Silva, 2018), existe ainda pouca investigação que associe a operação divisão inteira a este ambiente de aprendizagem, em Portugal, ou que refira a forma como se pode integrar o manipulativo concreto MAB no processo de ensino e de aprendizagem desta operação aritmética; este estudo permite que os alunos aprendam com compreensão os sentidos da operação divisão inteira e os procedimentos necessários à aprendizagem da etapa de ensino do algoritmo usual da divisão, sem usar mnemónicas.

2.1.4. Estrutura da Componente Investigativa

O capítulo Componente Investigativa está dividido em seis subcapítulos, em que o primeiro é a presente introdução, onde são explicitados a motivação e formulação do problema do estudo, os objetivos e questões de investigação, bem como a pertinência do estudo. Seguidamente, apresenta-se o subcapítulo da revisão da literatura, acerca da MMCAA, acerca da operação divisão e ainda acerca dos materiais manipulativos concretos, mais concretamente acerca do material multibásico. O subcapítulo das opções metodológicas refere a organização e o planeamento do estudo em si. Posteriormente, faz-se a apresentação de resultados, segmentado por sentidos da operação divisão (sentido de partilha equitativa e sentido de medida), que serão seguidamente discutidos no subcapítulo discussão dos resultados. O último subcapítulo refere as conclusões do estudo.

2.2. Revisão da Literatura

2.2.1. Modelação Matemática como Ambiente de Aprendizagem

Segundo D'Ambrosio (2009, p. 91), os modelos são “representações do real”. A modelação é a explicação destas representações, nomeadamente a forma como são criadas e a forma como se pode, através da explicação de modelos, extrair informações sobre o real (D'Ambrosio, 2009). Para este autor, para criar e explicar modelos é necessário utilizar instrumentos materiais e intelectuais. Quando se utilizam

instrumentos matemáticos, então, essa prática será denominada de modelação matemática (D'Ambrosio, 2009).

Para Bassanezi (2002), um modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (Bassanezi, 2002, p. 20). A modelação matemática consiste “na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” (Bassanezi, 2002, p. 24). O autor considera que este é um “método que pode ser aplicado em várias situações de ensino e de aprendizagem, com a intenção de estimular alunos e professores de matemática a desenvolverem as suas próprias habilidades como modeladores” (Bassanezi, 2002, p. 24).

Ferri (2010) refere-se à modelação matemática como “o processo que liga o *mundo real* e a *matemática* nos dois sentidos: da realidade para a matemática e (...) no sentido contrário, da matemática para a realidade” (Ferri, 2010, p. 19).

Barbosa (2001) define a modelação matemática como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade” (Barbosa, 2001, p. 6) ou “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (Barbosa, 2001, p. 6). D'Ambrosio (2009) também refere que se cria um ambiente de aprendizagem quando se inclui a modelação matemática na educação matemática.

Um ambiente de aprendizagem inclui “as condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolverem determinadas atividades” (Skovsmose, 2000, como referido em Barbosa, 2001, p. 6). O termo “ambiente” diz respeito “a um lugar ou espaço que cerca, envolve” (Skovsmose, 2000, como referido em Barbosa, 2001, p. 6) e é considerado como um “convite” para a indagação ou investigação que o professor faz aos alunos. O “convite” não significa, *a priori*, que os alunos se envolverão nas tarefas, pois esse envolvimento depende da motivação que tenham (Barbosa, 2001).

Barbosa (2001) considera que a MMCAA é “uma oportunidade de os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados

previamente”, que podem assumir diversos caminhos e resoluções (Barbosa, 2001, p. 5), que se vão descobrindo à medida que se vai desenvolvendo a atividade. Cada modelo construído através da MMCAA será adaptado, dependendo do contexto em que se insere (Martins et al., 2013).

Este ambiente de sala de aula só é implementado corretamente se se cumprir um ciclo, que deve ser percorrido na totalidade pelos alunos. Entre os vários ciclos de modelação que existem (Silva, 2018; Ferri, 2006), optou-se por seguir o ciclo de Ferri (2006, 2010). Segundo esta autora, perante a situação real descrita na tarefa proposta, o aluno deverá interpretá-la e compreendê-la, permitindo que a represente mentalmente. Seguidamente, deverá simplificá-la e estruturá-la (pode ser usado o conhecimento extra-matemático), por forma a elaborar um modelo real para a tarefa. Depois de criado o modelo, é necessário utilizar o conhecimento extra-matemático, para se proceder à matematização (passagem para o “mundo da matemática”). Deste modo, já é possível encontrar um modelo matemático para a situação proposta inicialmente e, depois de se trabalhar matematicamente, é possível encontrar resultados matemáticos. Estes resultados requerem interpretação para que se possam obter resultados reais. A validação dos resultados reais é feita e, por fim, deve ocorrer a discussão de resultados (Ferri, 2010). A Figura 1 mostra o ciclo que inclui as diferentes fases supracitadas.

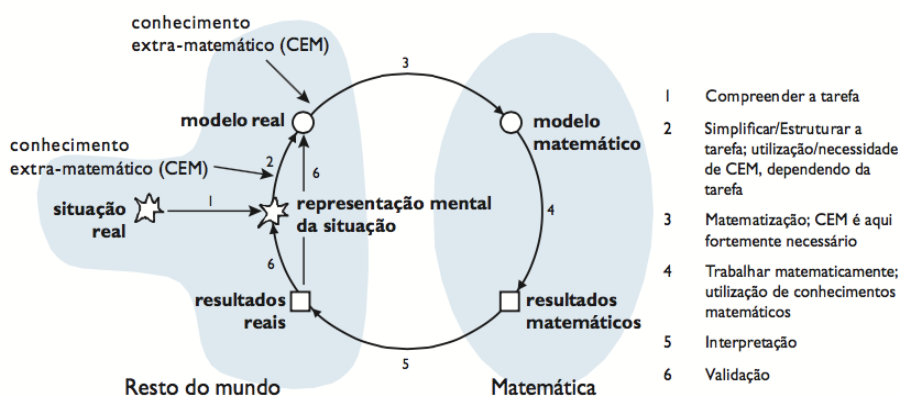


Figura 1: Ciclo de Modelação Matemática (Ferri, 2010, p. 20)

Ao implementar este ambiente de sala de aula, o professor deverá ter em consideração as características das tarefas, para que se cumpra o ciclo da modelação. As tarefas usadas devem ser, segundo MaaB (2007, como referido em Ferri, 2010), abertas, complexas, realísticas, autênticas e, essencialmente, devem ser problemas resolúveis

através do processo de modelação. Do mesmo modo, a construção de tarefas de modelação matemática deve seguir cinco princípios, entre eles: 1) significado da tarefa de modelação; 2) contexto realista adequado à idade; 3) provocação de questões; 4) estimulação de formas holísticas de aprendizagem; 5) nível de linguagem adequado (Ferri, 2010, p. 21).

A resolução de problemas (Pólya, 1995, como referido em Silva, 2018) surge neste estudo como parte do ciclo da Modelação Matemática, embora sejam duas metodologias com características próprias (Silva, 2018). A resolução de problemas tem como intuito encontrar uma solução, partindo de uma situação problemática (Blum & Niss, 1991). Pólya (1995, como referido em Silva, 2018) descreve o modelo *How to Solve It* que é constituído por quatro fases: i) compreensão do problema; ii) estabelecimento de um plano; iii) execução do plano; iv) examinar a solução obtida (Silva, 2018). Boavida et al. (2008, p. 22) adequam o modelo de resolução de problemas de Pólya ao 1.º CEB, descrevendo-o em três fases: 1) ler e compreender o problema; 2) fazer e executar um plano; 3) verificar a resposta.

A implementação da MMCAA tem vantagens, mas também oferece obstáculos aos intervenientes. A MMCAA desenvolve capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática, tais como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, num trabalho multidisciplinar (Ponte et al., 2007, como referido em Martins et al., 2013), visto que a sua implementação na sala de aula deve ser feita em pequenos grupos, de dois ou três elementos (Stender, 2012). A MMCAA desenvolve processos matemáticos como “construir, descrever, explicar, prever, representar e quantificar”, pelo que se considera relevante para a aprendizagem da matemática (Oliveira & Oliveira, 2012, p. 105). Simultaneamente, potencia aprendizagens significativas, estimulando vários tipos de raciocínio e a comunicação dos alunos (Brou, Rato & Martins, 2014). Caldeira (2009) considera que este ambiente de aprendizagem é uma “nova forma de estabelecer”, na escola, “a inserção da maneira de pensar as relações dos conhecimentos matemáticos e a sociedade mais participativa e democrática” (Caldeira, 2009, p. 33). Jurkiewicz e Friedman (2010, p. 43) creem que este é um ambiente de aprendizagem com “qualidades”, porque promove atividades “multidisciplinares” e “construtivas”.

Segundo os mesmos autores, quando se implementa a MMCAA, verifica-se: uma melhoria na qualidade do ensino, que se torna mais criativo e eficiente; um aumento do conhecimento geral do professor e sua melhor qualificação; a valorização dos conteúdos matemáticos; a mudança de atitude do professor em relação ao que conhece e ao que desconhece; a assunção de orientar os alunos, estudando também com eles (Jurkiewicz & Friedman, 2010). Blum (1995, como referido em Barbosa 2003, p. 67) considera que existem cinco argumentos para incluir a MMCAA na sala de aula, dando destaque para o último ponto: 1) “motivação” dos alunos, porque entendem a aplicabilidade dos conteúdos que aprendem na escola; 2) “facilitação da aprendizagem”, porque serão capazes de conectar ideias matemáticas com outros temas e assuntos; 3) “preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas”, aspeto fundamental para o quotidiano e para o “mundo do trabalho”; 4) “desenvolvimento de habilidades gerais de exploração” e investigação; 5) “compreensão do papel sócio-cultural da matemática”, compreendendo de que forma a matemática é usada nas “práticas sociais”, como debates. Blum e Ferri (2009) consideram que a MMCAA é importante porque: “ajuda os alunos a compreenderem melhor o mundo”; “suporta a aprendizagem da matemática”, ao nível da motivação, formação de conceitos, compreensão e aprendizagens significativas; “contribui para o desenvolvimento de várias competências matemáticas e de atitudes apropriadas”; “contribui para que tenham uma imagem adequada da matemática” (Blum & Ferri, 2009, p. 47).

As desvantagens que são apontadas à implementação da MMCAA são: o professor dispõe de pouco tempo para implementar estas práticas, devido à extensão do currículo; a necessidade e exigência de outros conhecimentos, além dos conhecimentos matemáticos; “menos controle sobre o que ocorre na sala de aula” (Jurkiewicz & Friedman, 2010, p. 46; Blum & Ferri, 2009). Bassanezi (2002, p. 37) também considera alguns obstáculos à implementação deste ambiente de aprendizagem: os obstáculos institucionais (a MMCAA pode ser processo demorado para o cumprimento do currículo); obstáculos para os estudantes (podem tornar-se “apáticos”, por não estarem acostumados ao processo); obstáculos para os professores (não se sentem habilitados para implementar a MMCAA).

Ferri e Blum (2013) concluem, num estudo cujo o objetivo era o de investigar as principais barreiras e motivações que os professores do 1.º CEB enfrentam quando pretendem implementar a MMCAA, que os professores veem como barreiras à implementação desta prática o tempo, o material e a avaliação. Quanto às motivações, o estudo permitiu concluir que os professores consideram: a independência dos alunos; a criatividade; os efeitos a longo prazo nas aulas de matemática; os efeitos que vão além da matemática; a aplicação da matemática no quotidiano; e o papel desempenhado pelo professor que muda, quando se implementa a MMCAA.

Jurkiewicz e Friedman (2010) referem que a MMCAA permite que a aprendizagem seja “uma ação simultaneamente coletiva e individual, exigindo e promovendo uma postura madura e responsável tanto do professor como dos alunos” (Jurkiewicz & Friedman, 2010, p. 43). Blum e Ferri (2009) referem que deverá haver um equilíbrio entre a orientação fornecida pelo professor (mínima) e a independência dos alunos (máxima). O professor, neste ambiente de aprendizagem, é considerado como um coparticipante (Barbosa, 2001), que orienta os alunos, facilitando a sua aprendizagem, pelo que a implementação da MMCAA requer que o seu conhecimento profissional seja consistente (Ferri & Blum, 2013).

A MMCAA pode ser implementada de três formas diferentes, de acordo com os três casos de modelação (Barbosa, 2001), que consideram de forma distinta a organização do currículo. No primeiro caso (*caso 1*), cabe apenas aos alunos a resolução das tarefas propostas, sendo que o professor cede a tarefa, simplifica-a e define os dados qualitativos e quantitativos (Barbosa, 2001). No *caso 2*, o professor apenas cede a tarefa, sendo da responsabilidade dos alunos os restantes procedimentos (Barbosa, 2001). No último *caso* (*caso 3*), os alunos poderão fazer todo o ciclo, em que o professor assume um papel de mediador (Barbosa, 2001).

A Figura 2 sintetiza o envolvimento do professor e dos alunos nos três casos de modelação matemática.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Figura 2: O envolvimento do professor e dos alunos nos casos de Modelação Matemática (Barbosa, 2001, p. 9)

Do *caso 1* para o *caso 3*, o foco no professor diminui, logo aumenta a responsabilidade dos alunos e, assim, a sua aprendizagem (Martins et al., 2013). Em todos os casos, o professor é considerado um *coparticipante* (Barbosa, 2001, p. 9).

O impacto da MMCAA nas aprendizagens tem vindo a verificar-se relevante. Ferri (2010) mostra como é possível, numa turma de 3.º ano que não estava acostumada à MMCAA, desenvolver uma tarefa de contexto realista. Nesta tarefa, os alunos mostraram-se motivados e perceberam que aplicaram matemática, fazendo conexões com a vida real. Oliveira e Oliveira (2012) construíram uma tarefa significativa para os alunos de um curso profissional de nível secundário, que foi resolvida através do processo de MMCAA e os resultados mostram que a utilização do conhecimento extra-matemático e as características da tarefa contribuíram para desenvolver o processo de modelação matemática. Também uma experiência de MMCAA no 1.º CEB, relacionada com uma tarefa que envolvia sequências, de Martins et al. (2013), revela as potencialidades deste ambiente de aprendizagem no desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos deste nível de ensino. Brou, Rato e Martins (2014) apresentam uma experiência de ensino do algoritmo da decomposição da subtração, no 2.º ano do 1.º CEB, usando a MMCAA, na qual os resultados parecem mostrar que as características do ambiente de aprendizagem utilizado permitiram que os alunos compreendessem os diversos sentidos da subtração e os fundamentos essenciais à aprendizagem do algoritmo estudado. Num estudo de Pratas, Rato e Martins (2016), que visava compreender os impactes da integração de manipulativos virtuais na aprendizagem dos sentidos da adição, numa turma de 1.º ano do 1.º CEB, usando a MMCAA, os resultados permitem concluir que houve uma evolução positiva dos

alunos, em especial na comunicação matemática, devido ao ambiente de aprendizagem utilizado.

2.2.2. Operação Divisão

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) considera que a educação matemática nos primeiros anos deve ter como principal objetivo “a compreensão dos números e das operações, o desenvolvimento do sentido do número e a aquisição de destreza no cálculo aritmético” (NCTM, 2007, p. 34). O aspeto principal do tópico Números e Operações é, de facto, desenvolver o sentido do número (NCTM, 2007). O desenvolvimento do sentido do número engloba: a “capacidade de decompor naturalmente os números”; a utilização de “números específicos” como referência; a utilização de “relações entre as várias operações aritméticas na resolução de problemas”; a compreensão do “sistema de numeração decimal”; “fazer estimativas”; “dar sentido aos números”; e o reconhecimento da grandeza relativa e absoluta dos números (NCTM, 2007, p. 34).

McIntosh, Reys e Reys (1992) consideram o sentido do número como a “compreensão geral de uma pessoa sobre o número e as operações”, bem como a capacidade e a habilidade de usar essa compreensão de forma flexível, com o intuito de desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 3).

Castro e Rodrigues (2008) também se referem ao conceito de sentido de número, considerando que envolve a “compreensão global e flexível dos números e das operações”, de forma a entender “os números e as suas relações” e desenvolvendo “estratégias úteis e eficazes” para as aplicar no quotidiano, não se cingindo, portanto, exclusivamente à escola (Castro & Rodrigues, 2008, p. 11). O sentido de número envolve ainda a “capacidade de compreender o facto de que os números podem ter diferentes significados e podem ser usados em contextos muito diversificados” (Castro & Rodrigues, 2008, p. 11).

Neste sentido, o desenvolvimento dos significados da divisão é fundamental para que se desenvolva o sentido de número. De facto, segundo o NCTM (2007), o

desenvolvimento dos significados da divisão e da multiplicação deve ser promovido a partir do 3.º ano de escolaridade, considerando que os alunos podem compreender significado destas operações, bem como estabelecer relações entre elas, através do trabalho com representações de problemas que envolvem estas operações. Também Ambrose, Baek e Carpenter (2003) consideram que a partir dos 5 ou 6 anos, as crianças começam a ser capazes de dar significado às operações divisão e multiplicação, através da resolução de tarefas que envolvam os diferentes sentidos destas operações (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003). As tarefas que envolvem a operação da divisão ou da multiplicação são uma das áreas críticas da aprendizagem dos alunos no 3.º ano (Carvalho & Gonçalves, 2003; McCormick & Essex, 2017). Porém, considera-se que estas tarefas podem ser resolvidas por crianças desta idade, uma vez que traduzem situações reais, podendo ser facilmente resolvidas com objetos reais, que auxiliam na compreensão destas operações (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003; Bicknell, Young-Loveridge & Simpson, 2017; NCTM, 2007).

Estes aspetos são concordantes com o programa de Matemática do Ensino Básico para o 1.º CEB (MEC, 2013), no qual a operação divisão surge, pela primeira vez, no 2.º ano. De facto, no domínio NO2 (Números e Operações), os alunos devem ser capazes de “efetuar divisões exatas de números naturais” (Bivar et al., 2012). No 3.º ano (NO3), o objetivo geral é “efetuar divisões inteiras”. Neste nível, os alunos devem aprender a usar a disposição usual do algoritmo, mas é só no 4.º ano que se deve utilizar o algoritmo formalmente (Bivar et al., 2012).

A partir do 3.º ano, é, portanto, fundamental que os alunos identifiquem os dois tipos de problemas da divisão, bem como contactem com problemas que envolvam resto (NCTM, 2007).

A operação divisão envolve dois significados distintos: o sentido de partilha equitativa; e o sentido de medida (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003; Fischbein et al., 1985; Fosnot & Dolk, 2001; Martin, 2009; MEC, 2013; Parker & Baldridge, 2004). Freudenthal (1983) considera a “divisão como razão” e “divisão como distribuição”, que correspondem, respetivamente à divisão como medida e como partilha equitativa. Ponte e Serrazina (2000) consideram que as situações de divisão podem ser três:

divisão como partilha; divisão por agrupamentos (idêntica à que consideraremos por divisão como medida); divisão como razão, em que estão incluídas “situações em que a divisão é usada para comparar duas quantidades” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 153), mas que não será considerada, por não constar no programa de matemática do 3.º ano do 1.º CEB (MEC, 2013).

Deste modo, a operação $56:8$ (por exemplo), por si só, não permite determinar qual dos sentidos está envolvido (Martin, 2009). É, pois, através do contexto que se determina qual dos sentidos da divisão está subjacente (Martin, 2009). Assim, uma tarefa cuja solução seja dada por $56:8$ pode ser apresentada de duas formas distintas, consoante o sentido da divisão considerado. Por um lado, poderão existir 56 objetos que vão ser partilhados igualmente por 8 grupos e queremos saber quantos objetos ficam em cada grupo, que diz respeito ao sentido de partilha equitativa (Ponte & Serrazina, 2000; Parker & Baldrige, 2004). Por outro lado, poderão existir 56 objetos que vamos agrupar em conjuntos com 8 elementos cada e queremos saber quantos grupos existirão, que alude ao sentido de medida (Parker & Baldrige, 2004; Ponte & Serrazina, 2000).

Lamberg e Wiest (2012) realizaram um estudo baseado nas divisões com resto, no qual os alunos tinham de criar e resolver problemas partindo de objetos reais. Neste estudo, os resultados dizem que os alunos tendiam a utilizar mais vezes o sentido de partilha equitativa do que o sentido de medida, porque o compreendiam melhor ou porque estavam mais acostumados a usá-lo (Lamberg & Wiest, 2012). Uma das dificuldades mais comum relativas ao sentido de partilha equitativa está associada à correspondência um a um (Fosnot & Dolk, 2001; Mendes, 2013), já que este sentido da divisão se efetua através da “distribuição um a um”, com o intuito de formar um dado número de grupos (Gravemeijer, 2005, p. 14). Fosnot e Dolk (2001) referem que, perante tarefas deste sentido, os alunos têm de considerar, simultaneamente, o número de grupos, o número de elementos em cada grupo e o todo.

Pratt, Lupton e Richardson (2015) consideram que os professores aplicam poucas tarefas com o sentido de medida da divisão e referem que a divisão deve ir além do sentido de partilha. Com a intenção de os alunos percecionarem de que forma a divisão

é a operação inversa da multiplicação, bem como de perceber a divisão como medida, os autores sugerem uma estratégia de resolução de tarefas da divisão como medida: os “division quilts” (Pratt, Lupton & Richardson, 2015), que auxiliam os alunos na compreensão deste sentido da divisão.

Martin (2009) refere que o ênfase do ensino do algoritmo usual da operação divisão é colocado, muitas vezes, nas regras e mnemónicas, que, para os alunos, não têm significado. Na verdade, “a ênfase no ensino de algoritmos e regras dissociadas do conceito que está por detrás dificulta o desenvolvimento do pensamento matemático” e o “excesso de treino em atividades rotineiras não ajuda o aluno na formação de conceitos e não incentiva a versatilidade do pensamento necessária ao sucesso em Matemática” (David & Machado, 1996, p. 27, como referido em Ponte & Serrazina, 2000, p. 79). O ensino preconizado desta forma ignora “a compreensão dos poderosos conceitos de agrupamento e de valor posição” (Martin, 2009, p. 483), como também defendem Brocardo e Serrazina (2008). Também Heirdsfield et al. (1999, como referido em Mendes, 2013) considera que “deve haver uma menor ênfase no trabalho com os algoritmos e um maior realce para o trabalho associado às propriedades das operações e ao uso de procedimentos de cálculo flexíveis” (Mendes, 2013, p. 12).

Segundo Kamii e Dominick (1998), os algoritmos são prejudiciais para os alunos. Na verdade, os autores consideram que os alunos desistem de pensar sozinhos, porque aprendem as regras do algoritmo que, muitas vezes, não têm sentido para eles. Da mesma forma, consideram que os alunos “desaprendem” a noção de valor posição e, como tal, não desenvolvem o sentido de número, considerado fundamental pelo NCTM (2007).

Martin (2009) também considera que a noção de valor posição, que foi um conteúdo explorado previamente em termos curriculares, não deve ser “esquecida” no ensino dos procedimentos dos algoritmos. Por isso, o autor apresenta um conjunto de questões que se devem colocar aos alunos no ensino do algoritmo da divisão, de modo a que se potenciem aprendizagens anteriores, tais como o sentido de número e o valor posição, desenvolvendo, ainda, habilidades de cálculo mental e de estimação para o quociente, verificando a razoabilidade do resultado.

2.2.3. Manipulativo concreto: Material Multibásico

As crianças dos 7 aos 12 anos de idade encontram-se, segundo a Teoria de Desenvolvimento Cognitivo de Piaget, no estágio das operações concretas, no qual se baseiam “diretamente nos objetos e não ainda nas hipóteses enunciadas verbalmente” (Piaget & Inhelder, 1973, p. 86). As crianças neste estágio apoiam-se em aspetos figurativos do real, pelo que o uso de materiais manipulativos concretos por crianças destas idades poderá facilitar a sua aprendizagem (Fernandes & Martins, 2014; Fuson, 2003; Heuvel-Panhuizen, 1996; Liggett, 2017; Ma, 2009; Uribe-Flórez & Wilkins, 2017).

Segundo Reys (1971, como referido em Matos & Serrazina, 1996, p. 193), os materiais manipuláveis concretos são “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar”, que podem ser do quotidiano ou objetos específicos “que são usados para representar uma ideia”. Para Johnson (1993, como referido em Liggett, 2017), os materiais manipuláveis concretos são objetos de diversas formas, cores e tamanhos, usados no ensino para melhorar as competências matemáticas do aluno. Swan e Marshall (2010) consideram que o facto de os alunos manipularem objetos concretos não é suficiente para justificar o seu uso, por isso definem um material manipulativo concreto como sendo “um objeto que pode ser manuseado por um indivíduo de uma maneira sensorial durante a qual o pensamento matemático consciente e inconsciente será promovido”, levando ao desenvolvimento de conceitos e ideias matemáticas (Swan & Marshall, 2010, p. 14). Considera-se que estes materiais apelam aos sentidos e envolvem ativamente o aluno na aprendizagem (Larbi & Mavis, 2016; Matos & Serrazina, 1996; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2012; Swan & Marshall, 2010).

O ensino da matemática pode ser mais significativo através do uso de materiais manipulativos, tanto concretos como virtuais, porque tornam a matemática “mais real” para os alunos (Golafshani, 2013, como referido em Liggett, 2017; Loong, 2014; Fernandes & Martins, 2014). Não obstante, é importante ressaltar que muitos alunos não “associam espontaneamente um modelo concreto para um conceito matemático com o seu símbolo escrito”, pelo que é importante estabelecer diálogo e discussões

sobre essas relações (Matos & Serrazina, 1996, p. 196), ideia também defendida por Clements (1999). Neste sentido, Ma (2009, p. 38) considera que a compreensão matemática só pode ser promovida pelos professores se estes ajudarem os alunos “a fazer conexões explícitas entre os materiais manipuláveis e as ideias matemáticas”. A autora refere que os professores chineses, no seu ensino, promovem debates com os alunos acerca do uso dos materiais manipuláveis concretos, de forma a que os alunos expliquem e argumentem as soluções encontradas (Ma, 2009).

Ponte e Serrazina (2000, p. 116) consideram que a utilização de materiais concretos, quando devidamente orientada, pode “facilitar a construção de certos conceitos” e ainda “servir para representar conceitos que eles já conhecem por outras experiências e atividades, permitindo assim a sua melhor estruturação”. Assim, estes materiais podem desempenhar um papel importante quando os alunos possuem o conhecimento, mas não conseguem, efetivamente, criar uma representação mental da informação (Clements, 1999). São considerados bons manipulativos concretos aqueles que são “significativos para o aluno, lhe proporcionam controle e flexibilidade, têm características que espelham ou são consistentes com as estruturas cognitivas e matemáticas, e ainda auxiliam o aluno a fazer conexões entre os vários tipos de conhecimento” (Clements, 1999, p. 50). Os motivos mais apontados pelos professores para a utilização de materiais manipulativos concretos estão relacionados com a motivação e o interesse dos alunos, bem como o facto de serem uma forma concreta e “palpável” de visualizarem os conceitos e de os compreenderem (Swan & Marshall, 2010). Fuson (2003) refere que o entendimento dos algoritmos pode ser facilitado pelo uso de materiais manipulativos concretos e representações visuais “que ajudam as crianças a compreender os significados dos números, das notações e dos passos do algoritmo” (Fuson, 2003, p. 301). Também Clements (1999, p. 56) refere que os materiais manipulativos deveriam ser usados antes da aprendizagem da “simbologia formal”, como, por exemplo, no ensino dos algoritmos.

O material multibásico (MAB) surgiu na sequência do Movimento da Nova Matemática (anos 60), que veio alterar os conceitos básicos de ensino e aprendizagem da matemática (Bruner, 1971, como referido em Kim & Albert, 2014). A teoria de Piaget contribuiu para o desenvolvimento de materiais manipuláveis concretos e

Bruner (1960, como referido em Kim & Albert, 2014) defendia que este tipo de materiais manipuláveis concretos poderia ajudar os alunos a melhorarem a compreensão da estrutura conceptual do sistema de numeração. Dienes (1963, p. 27, como referido em Kim & Albert, 2014) projetou — na sequência do *base-ten-blocks* criado por Stern e Stern (1948, como referido em Kim & Albert, 2014) — o MAB, um material manipulativo concreto, que permite enfatizar os conceitos básicos do sistema de numeração. O material multibásico é constituído por *cubinhos*, *barras*, *placas* e *cubos*, que representam, respetivamente, as unidades, as dezenas, as centenas e os milhares, se considerarmos os números inteiros. O uso do MAB pode ser a chave para apoiar a aprendizagem dos números, porque é uma forma concreta de representar conceitos abstratos relacionados com o sistema de numeração decimal, como: correspondência um-a-um; valor posição; adição e subtração (Kim & Albert, 2014). Um estudo de Swan e Marshall (2010), que requereu o preenchimento de um questionário por parte de professores australianos acerca dos materiais manipulativos concretos, refere que o MAB é um dos materiais manipulativos mais usados pelos professores. O MAB tem sido utilizado em estudos para melhorar a compreensão do valor posição, mas também das operações adição e subtração (Loong, 2014; Fuson & Briars, 1990). A proposta didática de Fernandes e Martins (2014) apresenta quatro fases para o ensino do algoritmo da divisão inteira, recorrendo ao MAB.

2.3. Opções Metodológicas

2.3.1. Descrição do estudo

Tendo em consideração os objetivos e a questão previamente definidos (secção 2.1.2.), a metodologia desta investigação respeita os propósitos de uma investigação qualitativa, de índole interpretativa e *design* de investigação-ação (Bodgan & Biklen, 2013).

A investigação qualitativa é caracterizada por cinco principais aspetos, segundo Bodgan e Biklen (2013). A investigação qualitativa ocorre diretamente no “ambiente natural” (Cohen, Manion & Morrison, 2007, p. 299), sendo necessário que o investigador se desloque ao local de estudo, sendo, por isso, holística (Sousa & Batista, 2011; Bodgan & Biklen, 2013). Este tipo de investigação é descritivo, na medida em

que os dados recolhidos não estão na forma de números, porque não há controlo de variáveis (Cohen, Manion & Morrison, 2007), mas na forma de “palavras ou imagens”, tais como “transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais” (Bodgan & Biklen, 2013, p. 48). O investigador deve considerar os dados respeitando, ao máximo, o modo em que foram registados. Os dados recolhidos devem ser analisados de forma indutiva, ou seja, “as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se forem agrupando” (Bodgan & Biklen, 2013, p. 50). Numa investigação deste tipo, deve dar-se maior relevância ao processo do que exclusivamente ao produto. O último aspeto considerado pelos autores é a importância que deve ser cedida ao significado, já que os investigadores devem certificar-se de que “estão a apreender as diferentes perspetivas adequadamente”, questionando os sujeitos continuamente (Bodgan & Biklen, 2013).

Uma investigação qualitativa, por oposição à investigação quantitativa, centra-se no comportamento e atividade das pessoas e organizações, “analisando os comportamentos, as atitudes ou os valores” (Sousa & Batista, 2011, p. 56).

A investigação-ação tem, tal como indica o nome, “duplo objetivo de ação e de investigação”, já que, por um lado, pretende “obter mudança numa comunidade ou organização ou programa” (ação) e, por outro lado, tenciona “aumentar a compreensão por parte do investigador, do cliente e da comunidade” (investigação) (Sousa & Batista, 2011, p. 65).

Bodgan e Biklen (2013, p. 292) consideram que a investigação-ação “consiste na recolha de informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais”. Os “praticantes”, como referem os autores, recolhem dados que lhes permitirão “apresentar recomendações tendentes à mudança”, de forma a que as pessoas as possam utilizar para tomar decisões práticas em relação a determinado aspeto (Bodgan & Biklen, 2013, p. 293).

Ebbutt (1985, como referido em Cohen, Manion & Morrison, 2007, p. 297) refere-se à investigação-ação como um “estudo sistemático que combina a ação e a reflexão com a intenção de melhorar a prática”, tendo como foco os problemas práticos

detetados nos participantes, que são passíveis de serem alterados (Cohen, Manion & Morrison, 2007).

Esta metodologia é “participativa” e “colaborativa”, porque o investigador não é um agente externo, mas um “co-investigador com e para os interessados” (Sousa & Batista, 2011, p. 65) que se envolve “ativamente na causa de investigação” (Bodgan & Biklen, 2013, p. 293). Cohen e Manion (1994, como referido em Cohen, Manion & Morrison, 2007) referem, neste sentido, que a investigação-ação inclui uma “intervenção de pequena escala” no normal decorrer do mundo e uma “análise próxima dos efeitos dessa intervenção” (Cohen & Manion, 1994, p. 186, como referido em Cohen, Manion & Morrison, 2007, p. 297). Este tipo de investigação é orientada para a “melhoria da prática nos diversos campos de ação” (Sousa & Batista, 2011, p. 65), já que envolve a aprendizagem a partir das consequências que advêm das mudanças efetuadas ao longo da investigação (Cohen, Manion & Morrison, 2007). De facto, a investigação-ação na educação é a “ponte” que liga a investigação e a prática (Cohen, Manion & Morrison, 2007), ou a teoria e a prática (Fonseca, 2013), já que deve contribuir para a teoria da educação, de forma a ajudar os professores a tornarem a sua prática mais reflexiva (Cohen, Manion & Morrison, 2007; Fonseca, 2013).

A investigação-ação possibilita o desenvolvimento profissional do professor, porque permite desenvolver “competências interpretativas e críticas que lhe possibilitam não só construir conhecimento científico-pedagógico mas também refletir sobre o seu papel e as suas responsabilidades no processo educativo” (Fonseca, 2013, p. 79).

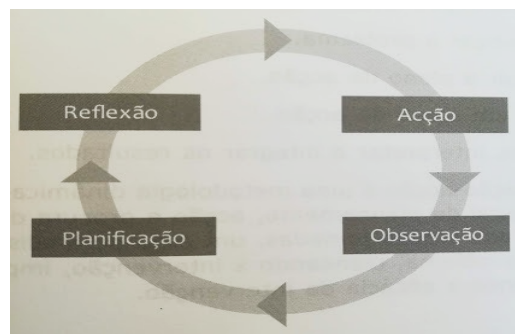


Figura 3: Ciclo da investigação-ação (Sousa & Batista, 2011, p. 65)

A investigação-ação compreende uma “espiral de ciclos” (Sousa & Batista, 2011, p. 65; McKernan, 1991, p. 17, como referido em Cohen, Manion & Morrison, 2007, p.

305), que envolve um planeamento, uma ação e uma reflexão mais cuidada, mais sistemática e rigorosa do que o habitual (Kemmis & McTaggart, 1992, p. 10, como referido em Cohen, Manion & Morrison, 2007, p. 297-298).

Este estudo pretendeu melhorar a aprendizagem e compreender o impacto de uma proposta de ensino da operação divisão inteira, tendo em consideração os sentidos da operação e recorrendo a um material manipulativo concreto e a um ambiente de aprendizagem, mas não com a intenção de provar ou demonstrar a aplicabilidade de uma teoria.

2.3.2. Contexto do estudo

O estudo foi realizado no ano letivo 2016/2017, numa escola localizada num meio citadino, mais concretamente, numa zona central de Coimbra. A turma de 3.º ano onde foi realizado este estudo era constituída por 18 alunos, oito alunos do sexo masculino e dez do sexo feminino, com idades entre os sete e os nove anos. Três alunos estavam referenciados com NEE. A maioria dos alunos iniciou o 1.º CEB nesta turma. A turma caracterizava-se por ser bastante heterogénea, quer em termos de aprendizagem, quer em termos de diversidade. Era uma turma com um ritmo de aprendizagem lento, que necessitava de estar constantemente ocupada. Possuía diversidade cultural, com alunos oriundos ou descendentes de imigrantes de alguns países. O comportamento da turma era de nível suficiente, dado o comportamento de determinados alunos que provocavam agitação na sala. Esta turma estava acostumada a determinadas rotinas e hábitos de trabalho estabelecidos pela professora titular desde o 1.º ano de escolaridade.

A turma já tinha, no ano letivo corrente, abordado a divisão inteira, pelo que o estudo realizado com a turma não teve o intuito de introduzir este conteúdo, mas foi construído no sentido de melhorar a compreensão dos sentidos da divisão inteira e dos procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão inteira, tendo em consideração os princípios do sistema de numeração decimal. Os alunos estavam acostumados a utilizar a disposição usual do algoritmo formal da operação divisão, na qual a operação subtração que lhe é inerente era feita não por cálculo mental (como no algoritmo formal), mas por escrito. Alguns alunos

tinham dificuldades nos procedimentos utilizados na disposição usual do algoritmo formal da operação divisão, de tal forma que, apesar de conseguirem encontrar o divisor, não conseguiam continuar a operação. Os alunos tinham dificuldades em interpretar e resolver as tarefas de ambos os sentidos da operação divisão, sendo que aparentavam interpretar e compreender com maior facilidade as tarefas cujo sentido fosse o de partilha equitativa. Por terem dificuldade em distinguir os sentidos da operação divisão, os alunos, perante quaisquer situações problemáticas que envolvessem a divisão inteira, utilizavam os mesmos procedimentos, independentemente do sentido da divisão subjacente.

A turma dispunha-se, por vezes, em grupos, mas não tinha o hábito de realizar trabalhos de grupo que implicassem a discussão entre pares. Da mesma forma, não era regular, no corrente ano letivo, o uso de materiais manipulativos nem concretos nem virtuais, embora a turma conhecesse o MAB.

Para a consecução da fase de intervenção do estudo, foi necessário criar grupos de dois elementos, de acordo com as características da MMCAA (Stender, 2012). A constituição dos grupos teve em consideração, além dos níveis de discrepância ótima estabelecidos depois da realização da fase inicial do estudo e de acordo com a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) (Vygotsky, 1978), o conhecimento da turma e as relações entre pares. Barbosa (2003) defende que a MMCAA motiva os alunos e facilita a sua aprendizagem com a relação de desenvolvimento próximo de Vygotsky. Segundo Vygotsky, a ZDP é a “distância entre o nível de desenvolvimento atual”, determinado pela “independência ao resolver problemas, e o nível do desenvolvimento potencial, determinado durante a resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com pares mais capazes” (Vygotsky, 1978, p.86). Ponte e Serrazina (2000, p. 97) também se referem a este conceito, considerando-o como “a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da resolução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com colegas mais capazes” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 98). Assim, foram criados nove grupos de dois elementos para a realização da fase de intervenção deste estudo.

Embora se tenham acompanhado de forma idêntica todos os grupos criados apenas será apresentada a análise dos dados de dois grupos (grupo 1 e grupo 2). A seleção destes dois grupos teve em consideração, fundamentalmente, dois aspetos: o facto de serem representativos dos diferentes níveis de conhecimento, consoante o critério de três níveis estabelecido em 2.3.4.¹; e o facto de os alunos A, B, C e D terem estado presentes em todas as sessões da fase de intervenção, permitindo uma análise completa em todas as fases do estudo.

O grupo 1 era constituído pelos alunos A e B. O aluno A (nível 2) era muito alegre e confiante e, por isso, precipitava-se nas suas respostas, de tal forma que, por vezes, a resposta que dava não era correta. O aluno B (nível 1), em contexto de sala de aula, era tímido e com algumas dificuldades de aprendizagem. Embora por vezes soubesse a solução, optava por não participar ou participava apenas quando era solicitado. O grupo 2 era constituído pelos alunos C e D. O aluno C (nível 3) era falador e aparentava estar desatento, embora respondesse corretamente quase sempre. O aluno D (nível 2) era muito atento e disciplinado, procurando fazer sempre o melhor que conseguia.

2.3.3. Design do estudo

O período de recolha de dados foi organizado em três momentos diferentes: fase inicial; fase de intervenção (seis sessões, numeradas de 1 a 6); fase final. O Quadro 1 indica, cronologicamente, de que forma foram estruturados os três diferentes momentos, explicitando: a forma como foram resolvidas as tarefas referentes a cada momento da investigação (em grupos de dois elementos ou individualmente); o uso do MAB ao longo dos três momentos do estudo e em cada sessão da fase de intervenção; e a forma como foram explorados os dois sentidos da divisão ao longo das sessões (sessões relativas ao sentido de partilha equitativa, sessões relativas ao sentido de medida ou sessões mistas, nas quais foram resolvidas tarefas relativas a ambos os sentidos).

¹ A análise das quatro tarefas da fase inicial, de acordo com os critérios estabelecidos na secção 2.3.4., permitiu estabelecer o nível de cada aluno, que correspondeu à mediana da classificação em cada tarefa. Foram também encontrados os níveis dos alunos para cada sentido da divisão, de acordo com o cálculo da mediana das tarefas referentes a esse sentido da fase inicial (Apêndice 9).

Quadro 1: Organização das três fases do estudo

	Fase Inicial	Fase de Intervenção						Fase Final
		Sessão 1	Sessão 2	Sessão 3	Sessão 4	Sessão 5	Sessão 6	
Data	3 de março	14 de março	21 de março	29 de março	31 de março	3 de maio	23 de maio	2 de junho
Organização da turma para a resolução das tarefas	Individual	Grupos de dois elementos						Individual
Manipulação do MAB	Não	Sim					Não	Não
Sentido da divisão a ser explorado	Misto	Partilha equitativa		Medida		Misto		Misto

A fase inicial do estudo consistiu na resolução individual de um conjunto de situações problemáticas, relativas a cada um dos sentidos da operação divisão, com significado para os alunos (Apêndice 1). O objetivo foi mapear as principais dificuldades dos alunos na operação divisão inteira e determinar os níveis de cada aluno, através dos critérios estabelecidos (secção 2.3.4.), com o intuito de organizar a turma em grupos de dois elementos, para a realização da fase seguinte, a fase de intervenção. Estes níveis foram calculados com base na mediana das quatro tarefas da fase inicial, mas foi também possível encontrar os níveis de cada aluno para cada sentido da divisão (através do cálculo da mediana dos níveis das duas tarefas de cada sentido) (Apêndice 2).

A fase de intervenção decorreu ao longo de seis sessões, nas quais foi implementada a MMCAA, através da organização da turma em nove grupos de dois elementos. Esta fase do estudo baseou-se numa proposta didática da autoria de Fernandes e Martins (2014) formada por quatro etapas, com compreensão, do ensino do algoritmo formal da operação divisão.

Nas duas primeiras sessões (sessão 1 e sessão 2) foram propostas pela PE situações problemáticas relativas ao sentido de partilha equitativa da divisão (Apêndices 3 e 4). Nas duas sessões seguintes (sessão 3 e sessão 4) foram propostas situações problemáticas relativas ao sentido de medida da divisão (Apêndices 5 e 6). As duas últimas sessões (sessão 5 e sessão 6) foram mistas, ou seja, as situações problemáticas propostas podiam estar relacionadas com o sentido de medida ou com o sentido de partilha equitativa (Apêndices 7 e 8).

O MAB foi utilizado pelos grupos durante as cinco primeiras sessões da fase de intervenção. Pretendia-se, através das características do MAB, que os alunos compreendessem não só os sentidos da divisão inteira, mas também os procedimentos matemáticos inerentes à representação usual do algoritmo da divisão inteira, tendo em consideração apenas os princípios do sistema de numeração decimal. Desta forma, durante as sessões da fase de intervenção não foram usadas mnemónicas como, por exemplo, o “baixa-se”, mas sim a decomposição de unidades de ordem superior (Brocardo, Serrazina & Kraemer, 2003; Ma, 2009; Fernandes & Martins, 2014).

Todas as sessões da fase de intervenção decorreram do mesmo modo, começando sempre pela formação dos grupos e organização da sala de aula. Seguidamente, eram distribuídas as folhas de trabalho com os enunciados das tarefas e o material concreto MAB² (um por cada grupo). Depois, eram entregues as folhas com o enunciado das tarefas (uma folha por aluno), que eram também as folhas de resposta. O enunciado era lido e interpretado pelos grupos. Posteriormente, a PE acompanhava os diversos grupos na resolução da situação problemática, monitorizando as discussões em pequeno grupo. Depois de concluída a resolução, cada grupo tinha a oportunidade de explicar aos outros grupos a forma como pensou (discussão em grande-grupo). No final, era feita uma síntese feita pela PE acerca dos resultados da discussão da tarefa. Em cada sessão eram resolvidas duas a três situações problemáticas, pelo que se cumpria o ciclo da MMCAA para cada situação problemática proposta. A organização

² Com exceção na sessão 6 da fase de intervenção, em que não foi utilizado o MAB e, como tal, não foi distribuído pelos grupos.

espácio-temporal das sessões da fase de intervenção foi baseada em Ferri (2010) (Apêndice 9).

Na primeira sessão do sentido de medida da divisão (sessão 3), a PE colocou uma situação problemática à turma para que os alunos pudessem entender a diferença entre os sentidos da divisão: no sentido de partilha equitativa há uma distribuição e no sentido de medida há agrupamento, ou seja, formação de conjuntos. Para tal, a PE levou para a sala de aula algumas caixas de ovos e questionou à turma “A Joana tinha 24 ovos e queria guardá-los em caixas de meia dúzia de ovos. De quantas caixas precisava a Joana?”. Os alunos rapidamente deram a solução para a situação proposta e seguidamente resolveu-se a mesma tarefa recorrendo ao MAB. O objetivo era que os alunos questionassem “quantos conjuntos de 6 dezenas consigo formar?” e “quantos conjuntos de 6 unidades consigo formar?”.

A fase final, semelhante à fase inicial, consistiu na resolução individual de um conjunto de tarefas com significado para os alunos e de natureza semelhante às realizadas pelos alunos na fase inicial (Apêndice 10). O objetivo foi o de analisar — através dos mesmos critérios — os níveis dos alunos, depois de decorridas as sessões da fase de intervenção (Apêndice 11). Tanto na fase inicial como na fase final do estudo o material MAB não foi utilizado pelos alunos.

Todas as tarefas foram construídas de forma a terem significado para os alunos e de forma a abarcarem os sentidos da divisão considerados pelo Programa e Metas Curriculares de Matemática (MEC, 2013). As tarefas implementadas, desde a fase inicial até à fase final, estavam relacionadas com o quotidiano dos alunos, refletindo, de alguma forma, atividades realizadas pela turma ou gostos/interesses por eles demonstrados.

Dadas as características da investigação-ação, cujo ciclo envolve a reflexão, a ação, a observação e a planificação (Sousa & Batista, 2011), havia espaço, nesta investigação, para que a PE, através da reflexão, procedesse a pequenas alterações, com a finalidade de melhorar a planificação e a ação das sessões seguintes. Destas reflexões, surgiram alterações que se consideraram relevantes para melhorar a aprendizagem dos alunos. Durante a sessão 1, verificou-se que os alunos tinham dificuldade em organizar as

peças do MAB na resolução das tarefas de sentido de partilha equitativa. Os alunos faziam a distribuição das peças pelo número de grupos a formar, mas não conseguiam organizá-las na mesa de trabalho, fazendo com que, por vezes, as peças de cada grupo formado estivessem misturadas. Perante este facto, a PE introduziu, no início da sessão 2, pedaços de cartolina com a forma de um retângulo, que permitiam representar o divisor nas tarefas que envolviam este sentido da divisão e ajudavam os alunos a organizar as peças. Outro aspeto que foi adaptado às necessidades da turma foi a grandeza do dividendo nas situações problemáticas propostas. Na fase inicial, duas das tarefas têm dividendos com três algarismos. No entanto, no início do estudo, a PE foi observando que os alunos tinham dificuldades em resolver situações problemáticas, mesmo que o dividendo tivesse apenas dois algarismos. Deste modo, optou-se por propor, daí em diante, apenas tarefas cujo dividendo tivesse dois algarismos.

2.3.4. Recolha e análise dos dados

A recolha de dados para este estudo foi feita através de registos escritos da PE, construídos através da observação participante, diário de bordo, as produções escritas dos alunos e também através de registos fotográficos. Para analisar e interpretar os dados recolhidos, foi usado um critério de 3 níveis, de forma similar ao Quadro 2, elaborado por Pratas, Rato e Martins (2016).

Quadro 2: Critério com três níveis (Pratas, Rato & Martins, 2016, p. 36)

Nível 1	Nível 2	Nível 3
A explicação demonstra limitados conhecimentos acerca dos conceitos matemáticos envolvidos ou não responde.	A explicação demonstra alguns conhecimentos acerca dos conceitos matemáticos envolvidos e contém pequenas incorreções.	A explicação demonstra um pleno conhecimento acerca dos conceitos matemáticos envolvidos.

As representações efetuadas com o manipulativo concreto MAB pelos alunos classificam-se de ativas, de acordo com a classificação de Brunner (1999, como referido em Santos, 2015). As representações contempladas nas produções escritas dos alunos classificam-se de Visual (figura, tabela, gráfico, esquema), Simbólica (numérica ou algébrica) e Verbal (linguagem natural) de acordo com a classificação apresentada em Montenegro, Costa e Lopes (2017).

2.4. Apresentação de Resultados

O subcapítulo de apresentação de resultados está organizado em três partes. Na primeira parte serão referidas as principais dificuldades detetadas na turma relativas à operação divisão. A segunda e terceira partes referem-se aos dois sentidos da divisão considerados: na segunda parte, retratar-se-ão os resultados do sentido de partilha equitativa do grupo 1 e do grupo 2; na terceira parte, os resultados referentes ao sentido de medida de ambos os grupos.

2.4.1. Mapeamento das dificuldades dos alunos

Depois da realização da fase inicial, foram identificadas algumas dificuldades relacionadas com a operação divisão: identificar e distinguir os dois sentidos da divisão; identificar o dividendo e o divisor; operar com a representação vertical da divisão, isto é, os procedimentos do algoritmo usados normalmente pelos alunos da turma, nomeadamente quando os dividendos têm mais do que dois algarismos.

2.4.2. Sentido de Partilha Equitativa

2.4.2.1. Fase Inicial

A fase inicial foi resolvida individualmente e sem recurso ao MAB. Os alunos responderam a duas situações problemáticas cujo sentido era o de partilha equitativa (tarefas 1 e 4 do Apêndice 1).

Para responder à tarefa 1, o aluno A representou, através de uma representação visual, o dividendo (56 cromos de bom comportamento), que agrupou em grupos de 7 (separa os grupos através de um *traço* vertical) (Figura 4).

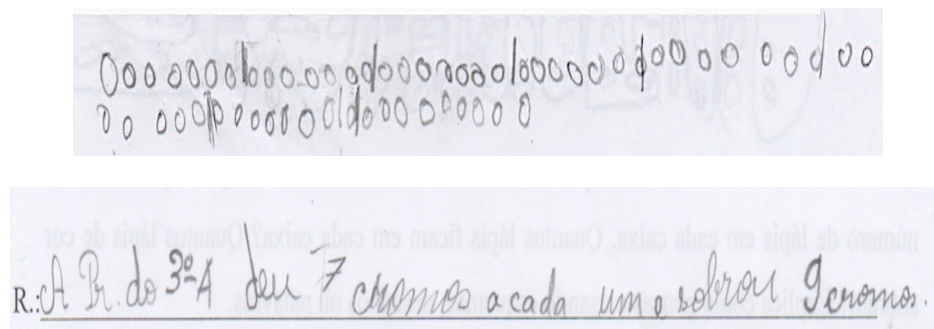


Figura 4: Resolução do aluno A da tarefa 1 da fase inicial

Este aluno fez a representação de 8 grupos com 7 elementos cada. Atendendo ao enunciado da tarefa e ao sentido de partilha equitativa que lhe estava subjacente, o aluno A deveria ter formado 7 grupos de 8 elementos, pelo que o aluno A não compreendeu o sentido partilha equitativa da divisão nem conseguiu dividir, com sucesso, 56 por 7. Desta forma, o aluno A, nesta tarefa, encontra-se no nível 1 tendo em conta os critérios de análise estabelecidos.

O aluno A, na tarefa 4 da fase inicial, recorreu à multiplicação mas de forma incorreta, já que multiplica o divisor pelo dividendo (247×7) e, assim, não consegue dar uma resposta à situação problemática, pelo que, nesta tarefa, se encontra no nível 1 (Figura 5).

Figura 5: Resolução do aluno A da tarefa 4 da fase inicial

Assim, para o sentido de partilha equitativa, atendendo à resolução das tarefas 1 e 4 da fase inicial, o aluno A encontra-se no nível 1 tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

O aluno B, ao resolver a tarefa 1 da fase inicial, representou (Figura 6), através de uma representação visual, o dividendo (56) e formou 8 grupos de 7 elementos. O aluno B deveria, atendendo à tarefa, ter formado 7 grupos de 8 elementos. Assim, o aluno B revela não ter compreendido o sentido de partilha equitativa, pelo que, nesta tarefa, se encontra no nível 1 dos critérios estabelecidos.

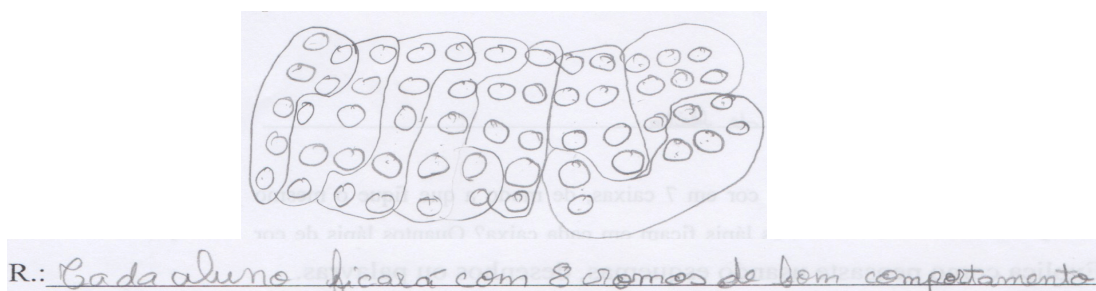


Figura 6: Resolução do aluno B da tarefa 1 da fase inicial

O aluno B, ao responder à tarefa 4 da fase inicial, recorreu à representação simbólica. Ainda que reconheça o dividendo e o divisor, não compreendeu os procedimentos do algoritmo informal e, como tal, não o resolveu de forma correta (Figura 7), pelo que se encontra no nível 1 nesta tarefa.

Assim, para o sentido de partilha equitativa, atendendo à resolução das tarefas 1 e 4 da fase inicial, o aluno B encontra-se no nível 1, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

Handwritten student work for Figure 7. The left side shows a vertical addition problem: $247 + 114 = 361$, followed by a subtraction problem: $361 - 587 = 247$. The right side shows a response: "R.: Sobrou 4 lápis de cor."

Figura 7: Resolução do aluno B da tarefa 4 da fase inicial

O aluno C, na tarefa 1, efetuou a divisão $56:7$, através de uma representação simbólica do algoritmo informal da operação divisão, que resolveu corretamente, pelo que nesta tarefa se encontra no nível 3 (Figura 8).

Handwritten student work for Figure 8. The left side shows the problem: "56 cromos" and "7 alunos". The right side shows the division: $56 \div 7 = 8 \text{ (ex)}$ and a vertical division problem: $56 \div 7 = 8$. Below, a response is written: "R.: Cada aluno ficou com 8 cromos."

Figura 8: Resolução do aluno C da tarefa 1 da fase inicial

No entanto, na resolução da tarefa 4 da fase inicial (Figura 9), o aluno C também recorreu à mesma representação (simbólica), mas cometeu um erro de cálculo (7×35 é igual 245 e não é igual a 243, tal como o aluno indica) (Figura 9). O aluno calculou o quociente de forma correta e mostrou conhecer os procedimentos do algoritmo informal, mas, devido ao seu lapso, encontra-se no nível 2 dos critérios estabelecidos.

Assim, para o sentido de partilha equitativa, atendendo à resolução das tarefas 1 e 4 da fase inicial, o aluno C encontra-se no nível 3 tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

Figura 9: Resolução do aluno C da tarefa 4 da fase inicial

O aluno D, na resolução da tarefa 1 da fase inicial, representou simbolicamente o algoritmo informal da divisão e respondeu corretamente à situação problemática (Figura 10), pelo que, nesta tarefa, o aluno se encontra no nível 3, tendo em conta os critérios estabelecidos.

Figura 10: Resolução do aluno D da tarefa 1 da fase inicial

Na resolução da tarefa 4 cujo dividendo continha três algarismos (Figura 11), o aluno D cometeu vários lapsos nos procedimentos do algoritmo que representou (cometeu erros de cálculo e revelou não compreender a escolha dos algarismos do quociente), pelo que, nesta tarefa, se encontra no nível 1.

Assim, para o sentido de partilha equitativa, atendendo à resolução das tarefas 1 e 4 da fase inicial, o aluno D encontra-se no nível 2, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

Figura 11: Resolução do aluno D da tarefa 4 da fase inicial

2.4.2.1. Fase de Intervenção

Grupo 1

Na sessão 1 da fase de intervenção os alunos resolveram as tarefas cujo sentido era o de partilha equitativa (Apêndice 3).

Na figura 12, observa-se que o grupo 1, depois de fazer uma representação ativa, usando o MAB, da situação problemática proposta (tarefa 1, Apêndice 3), revelou ainda não compreender a noção de decomposição de uma unidade de ordem superior em 10 unidades de ordem inferior. Na representação ativa, a formação de 3 grupos de 5 elementos só seria possível se decompusesse a barra em 10 *cubinhos*. A representação visual do MAB revela que o grupo 1 ainda não compreendeu a noção de decomposição de uma dezena em 10 unidades, pois com a barra forma 2 grupos de 5 elementos.

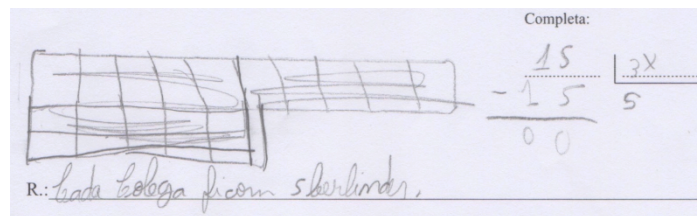


Figura 12: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 1 (aluno A)

A discussão em grande grupo acerca desta tarefa permitiu que os alunos compreendessem que, para fazer a distribuição das peças, era necessário “transformar” 1 barra em 10 *cubinhos* e que essa “transformação” se designa por decomposição (de uma unidade de ordem superior). A expressão “*transformação* de 1 barra em 10 *cubinhos*” foi utilizada pelos alunos da turma antes de atribuírem significado à expressão “decomposição de 1 dezena em 10 unidades”, que foi sendo feita ao longo das sessões.

Na sessão 2, os alunos do grupo 1 mostraram-se motivados por irem trabalhar em grupo e, especialmente, por serem mantidos os elementos do grupo. Da mesma forma, os alunos mostraram-se entusiasmados por poderem explorar, de novo, as tarefas com o auxílio do MAB. Na sessão 2 (Apêndice 4), foram introduzidos os pedaços de cartolina que permitiram representar o dividendo, tal como explicado na secção 2.3.3. deste trabalho.

Partindo das representações ativas que fizeram usando o MAB, os alunos A e B apresentaram uma representação visual que revela a necessidade de decompor uma unidade de ordem superior (decomposição de 1 barra em 10 *cubinhos*) (Figura 13). Depois da decomposição, os alunos representaram ativamente a distribuição de 12 *cubinhos* por 3, com o auxílio dos pedaços de cartolina cedidos. A distribuição que fizeram das peças do MAB pelos pedaços de cartolina é representada por *traços/linhas* que unem a representação das peças do MAB às cartolinas, revelando que compreenderam o sentido de partilha equitativa da operação divisão.

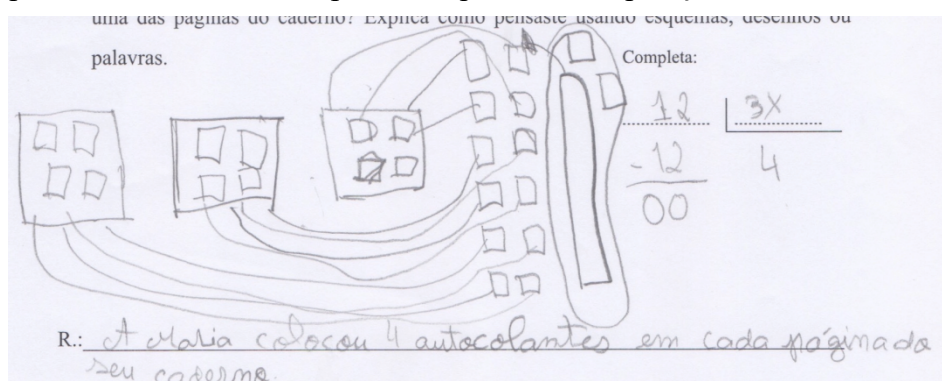


Figura 13: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 2 (aluno B)

Depois da sessão 2, a sessão seguinte em que foi explorado o sentido partilha equitativa foi a sessão 5 (Apêndice 7), que foi uma sessão mista, pois foram propostas tarefas dos dois sentidos da divisão.

O grupo 1 resolveu a tarefa 1 da sessão 5 (Apêndice 7) recorrendo à representação ativa do MAB e sua representação visual na folha de resposta (Figuras 14 e 15). Nesta tarefa, o grupo 1, apesar de não representar inicialmente o dividendo (68), efetuou a distribuição das peças corretamente.

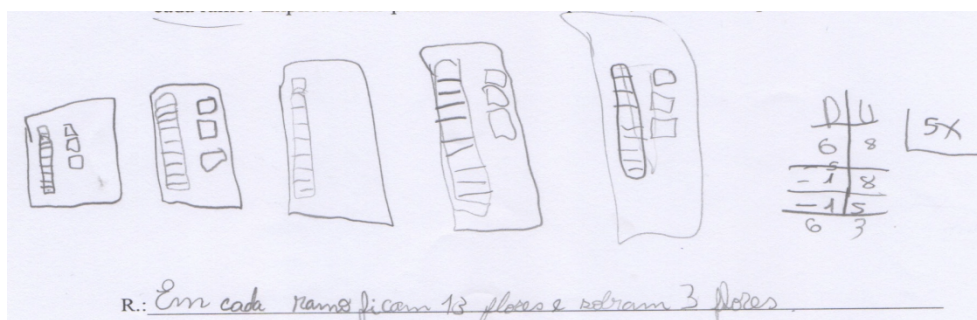


Figura 14: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 5 (aluno A)

Na sua folha de respostas, o aluno A não colocou o quociente na representação simbólica do algoritmo e apresentou um valor errado para o resto (Figura 14). Da mesma forma, o aluno A não representou as unidades num dos “retângulos” que representam o divisor, nem apresentou o quociente na representação simbólica do algoritmo, mas a sua resposta é correta. O aluno B não apresentou o resto na representação simbólica do algoritmo (Figura 15).

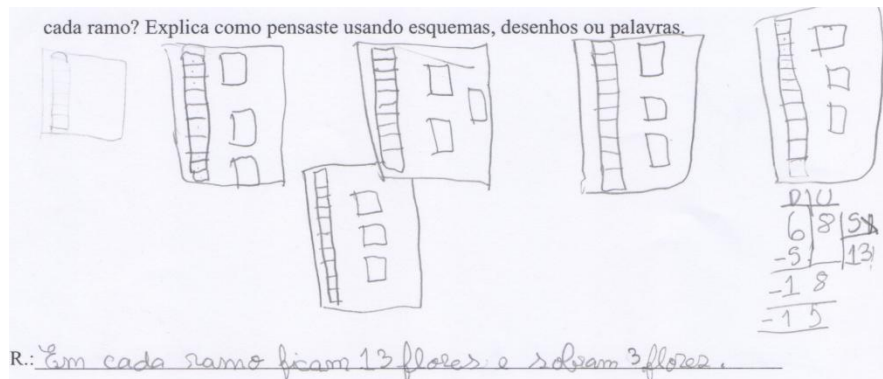


Figura 15: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 5 (aluno B)

Nesta tarefa, o grupo não recorreu às linhas auxiliares (tal como na sessão 2), mas fez a distribuição corretamente, ainda que com algumas falhas ao nível da representação simbólica. A análise das resoluções dos alunos A e B permite perceber que, ainda que haja pequenas diferenças entre as duas resoluções, os dois alunos cooperaram e discutiram a resolução. Caso contrário, a resposta dada pelos dois alunos teria sido diferente, de acordo com a resolução que apresentou cada um deles.

A sessão 6 também foi uma sessão mista e os alunos não utilizaram o MAB para a resolução de tarefas, auxiliando-se apenas da representação mental do mesmo para a resolver. As Figuras 16 e 17 apresentam a resolução dos alunos A e B da tarefa 2 da

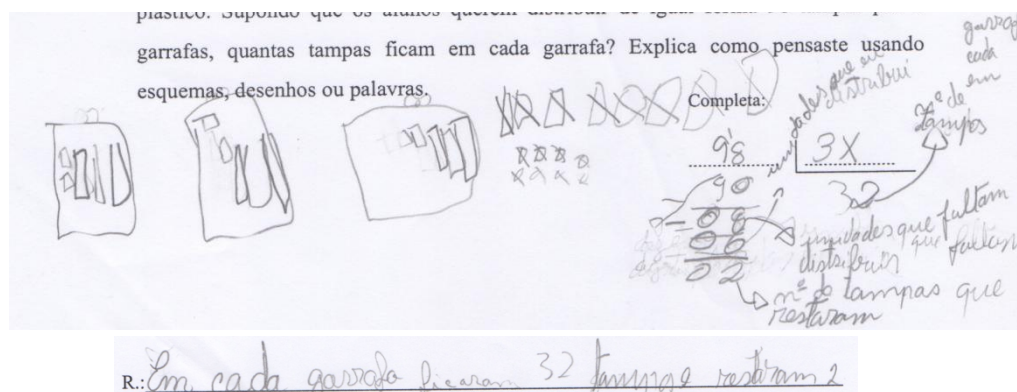


Figura 16: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 6 (aluno A)

sessão 6 (Apêndice 8). Verifica-se que o grupo 1 representou o dividendo e fez a distribuição das 9 barras por 3 e de 8 *cubinhos* por 3.

Junto à representação simbólica, o grupo explica (linguagem natural) que: o valor 90 corresponde às dezenas distribuídas (ou seja, 9 dezenas); o algarismo 8 representa as “unidades que faltam distribuir”; o valor 6 representa as unidades já distribuídas. O grupo 1 reconheceu o resto, associando-o ao contexto realista da tarefa (escreve “n.º de tampas que restaram”). Nesta tarefa, o grupo mostrou-se capaz de relacionar a representação ativa do MAB com a representação simbólica da operação. Ao observar as Figuras 16 e 17, verifica-se que o grupo conseguiu explicar o seu raciocínio, já que utilizou a representação verbal para fornecer informações sobre a forma como pensou.

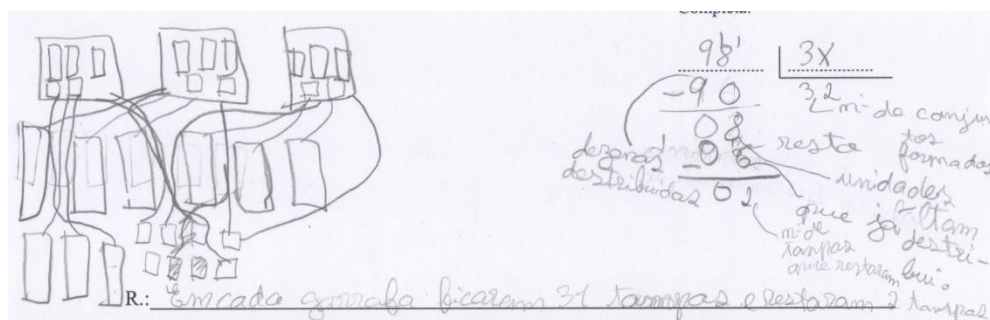


Figura 17: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 6 (aluno B)

Grupo 2

Na figura 18, observa-se que o grupo 2, apesar de ter manipulado o MAB para responder à tarefa 1 da sessão 1 (Apêndice 3), ainda não foi capaz de representar com as peças do MAB o dividendo (Figura 18). De facto, o grupo utilizou uma representação visual (figura) de três pessoas e fez corresponder a cada uma um grupo de cinco berlines, representados por “circunferências”. Nesta tarefa, o grupo 2

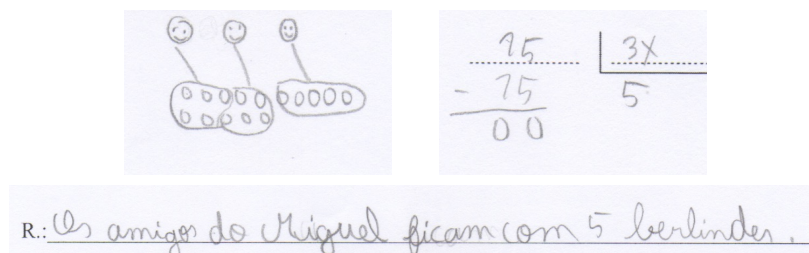


Figura 18: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 1 (aluno D)

revelou que ainda não compreendeu a noção de decomposição de uma unidade em 10 unidades de ordem inferior, mas atendeu ao sentido de partilha equitativa (3 grupos de 5 elementos).

Na discussão em grande-grupo acerca desta tarefa, houve um grupo que não compreendeu o sentido partilha equitativa e, em vez de formar 3 grupos de 5, formou 5 grupos de 3, mas, aquando da discussão, nenhum aluno dos outros grupos se opôs. Só depois de a professora estagiária questionar se todos concordavam com a resolução, é que o aluno D disse que não concordava. Depois de o aluno explicar o porquê, os restantes grupos compreenderam.

Na sessão 2, o grupo 2 revelou-se capaz de representar a situação problemática ativamente com o MAB e, posteriormente, representá-la na folha de respostas (Figura 19). O grupo 2 revelou também compreender a necessidade de decompor uma dezena (1 barra) em dez unidades (10 *cubinhos*) para posteriormente distribuir as 12 unidades por 4, atendendo ao sentido de partilha equitativa.

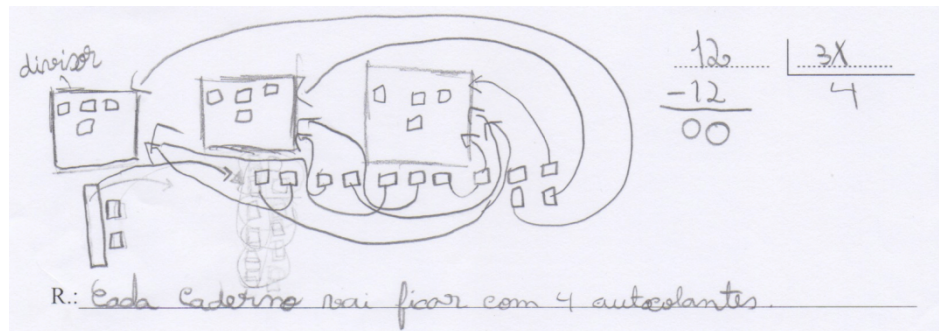


Figura 19: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 2 (aluno C)

O grupo 2 resolveu a tarefa 1 da sessão 5 (Apêndice 7) recorrendo à representação ativa do MAB e a respetiva representação visual na folha de respostas (Figura 20). Nesta tarefa, o grupo 2, representa o dividendo com as peças (6 barras e 8 *cubinhos*) e distribui as dezenas por 5. Os alunos C e D decompuseram a dezena que sobrou em 10 unidades (ação representada por uma seta na Figura 20) de forma a ser possível fazer a distribuição das peças. As unidades que sobraram (resto) foram rodeadas pelo aluno D, na Figura 20.



Figura 20: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 5 (aluno D)

A resolução do grupo 2 da tarefa 2 da sessão 6 (Apêndice 8), na qual não foi utilizado o MAB, os alunos C e D recorreram à representação visual da situação real (os garrafões), mas também à representação visual do MAB (Figura 21). O grupo distribuiu 9 dezenas (9 barras) por 3, formando três grupos de três dezenas. Neste caso, não havia necessidade de decompor a dezena, pelo que os alunos distribuíram as 8 unidades (8 *cubinhos*) por três e sobram 2 unidades. O grupo apresentou ainda uma representação verbal para os valores da representação simbólica que apresenta: 90 são as “dezenas distribuídas”; 8 são as “unidades que faltam distribuir”; 6 são as “unidades que eu distribui”; o 2 representa o número “de tampas que restaram”; o quociente (32) representa o número “de tampas que cada garrafa tem”. O grupo 2 revela ter compreendido o sentido de partilha equitativa e revela ser capaz de resolver a tarefa sem a representar ativamente usando o MAB, mas auxilia-se da sua representação visual para explicar o seu raciocínio.

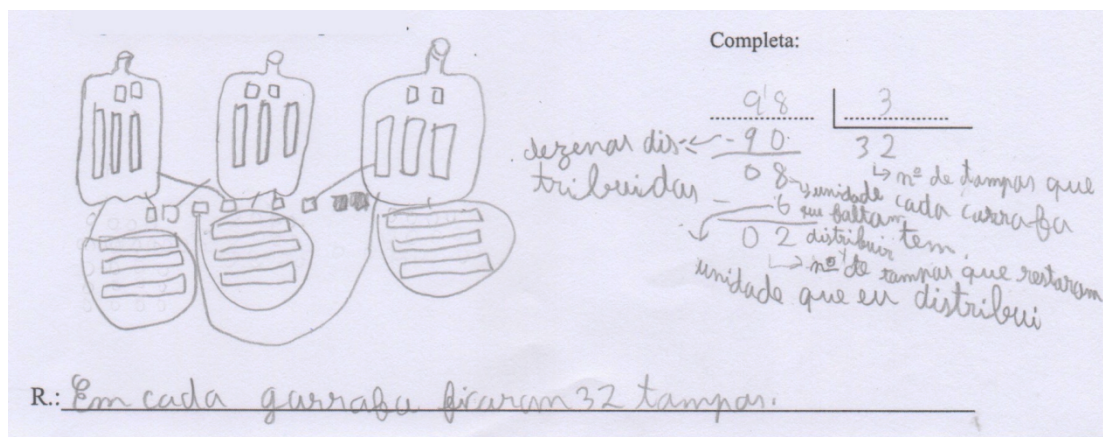


Figura 21: Resolução do grupo 2 da tarefa 2 da sessão 6 (aluno D)

2.4.2.1. Fase Final

À fase de intervenção sucedeu-se a fase final, que consistiu na resolução individual de tarefas significativas para os alunos (Apêndice 10), sem o auxílio do MAB.

O aluno A, na tarefa 1 da fase final, reconheceu e fez uma representação visual do MAB do dividendo (84) e o divisor (4) (Figura 22). A representação visual do MAB demonstra que o aluno compreendeu o sentido de partilha equitativa. Não obstante, não apresentou o valor das unidades na representação simbólica, o que terá levado o aluno a dar uma resposta incorreta, pois considerou o quociente 24 em vez de 21, tal como apresentou na representação visual do MAB. Assim, devido a este lapso, o aluno A, na tarefa 1, encontra-se no nível 2, tendo em consideração os critérios de análise estabelecidos.

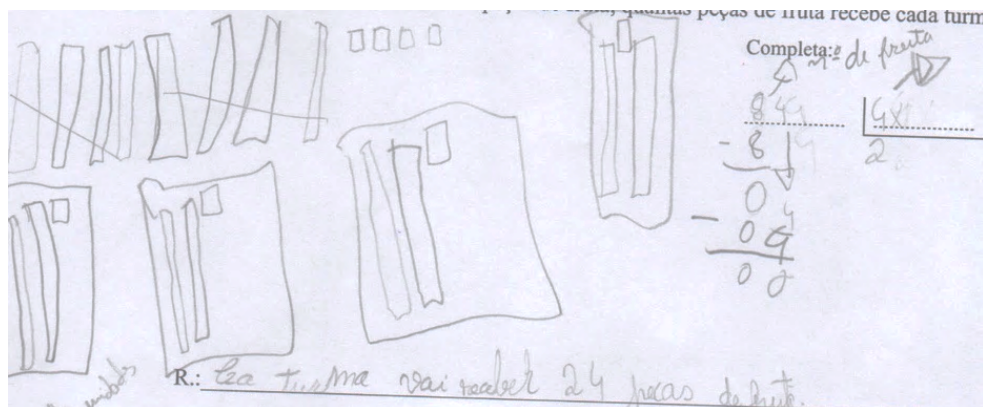


Figura 22: Resolução do aluno A da tarefa 1 da fase final

Na Figura 23, observa-se que o aluno A foi capaz de identificar o “número de rolinhos” (43) e o “número de flores” (3) da tarefa 2, representando também o dividendo através da representação do MAB e o divisor através de três “retângulos”. O aluno A fez a distribuição das barras (4) pelo dividendo (3), ficando cada um com 1 barra, que decompôs em 10 unidades de ordem inferior (decompôs 1 barra em 10 *cubinhos*), ficando com 13 *cubinhos* no total. O aluno A escreveu “dividir em 10 unidades” em vez de escrever “decompor em 10 unidades”, mas mostra ter compreendido este procedimento. O aluno A reconheceu que o quociente é 14 e, apesar de na representação simbólica indicar que o resto é 1, na resposta o aluno A indica que o resto é 2. O aluno A já não necessitou de desenhar as *linhas* auxiliares, que indicavam

o processo de distribuição das peças pelo divisor. Neste sentido, o aluno A, na tarefa 2, encontra-se no nível 3, de acordo com os critérios estabelecidos.

Desta forma, considerando o nível da tarefa 1 e da tarefa 2 da fase final referente ao sentido de partilha equitativa, o aluno A encontra-se no nível 3 tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

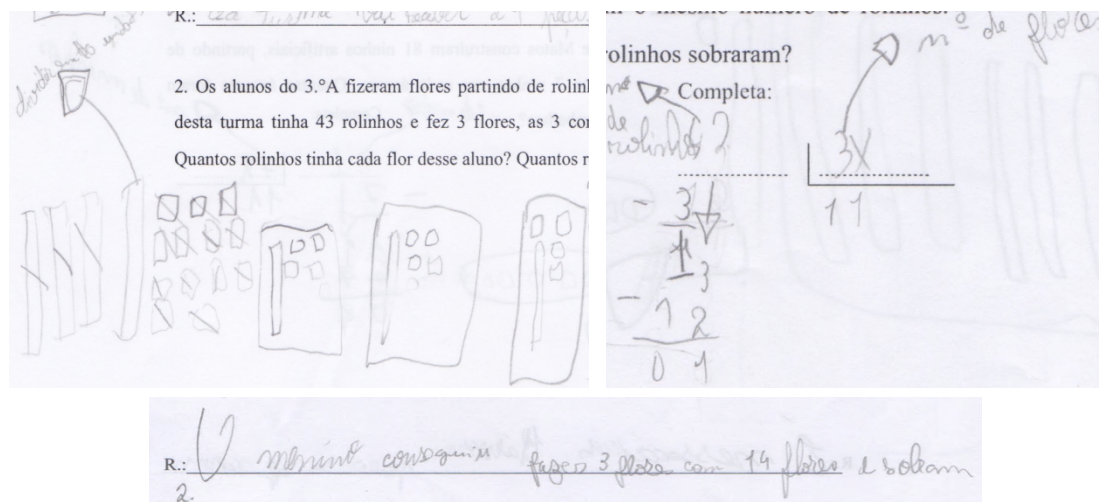


Figura 23: Resolução do aluno A da tarefa 2 da fase final

O aluno B, quando respondeu à tarefa 1 da fase final, apresentou a representação visual do MAB e demonstrou reconhecer o sentido de partilha equitativa (Figura 24). Não obstante, na representação simbólica, o aluno B cometeu ainda alguns lapsos, nomeadamente, ao colocar o valor do quociente no local do resto. Por este motivo, o aluno B encontra-se no nível 2, tendo em consideração os critérios de análise estabelecidos.

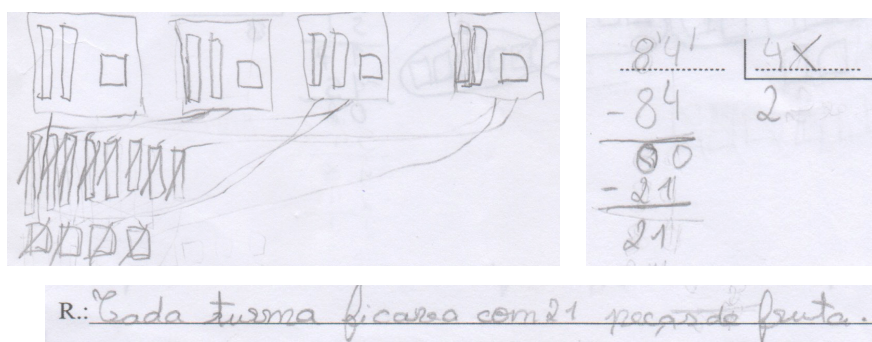


Figura 24: Resolução do aluno B da tarefa 1 da fase final

Na fase final, o aluno B representou o dividendo (43), fez a distribuição das barras pelo divisor (3), ficando cada um com 1 barra (Figura 25). A dezena que não conseguiu

distribuir decompô-la em 10 unidades de ordem inferior (escreve “decompor”), ficando com 13 unidades no total, que distribuiu por 3, obtendo 4 *cubinhos* em cada. *Pinta* a unidade que sobra (o resto). Na resposta à questão, teve dificuldade em relacionar a representação que faz do MAB ao contexto do problema. O aluno B, desta forma, encontra-se, nesta tarefa, no nível 2, de acordo com os critérios previamente estabelecidos. As dificuldades ainda detetadas no aluno B, quando resolveu as tarefas individualmente, podem indicar que o trabalho realizado ao longo da fase de intervenção foi efetivamente partilhado e discutido com o aluno A e que essa discussão contribuiu para a evolução das suas aprendizagens ao nível da compreensão do sentido de partilha equitativa da divisão.

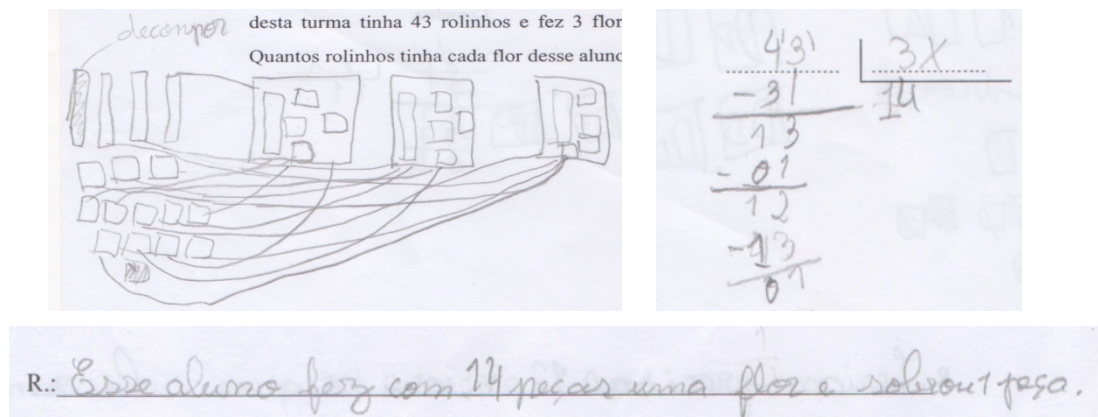


Figura 25: Resolução do aluno B da tarefa 2 da fase final

Desta forma, considerando o nível da tarefa 1 e da tarefa 2 da fase final referente ao sentido de partilha equitativa, o aluno B encontra-se no nível 2 tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

O aluno C, na tarefa 1, apresentou uma representação visual do MAB e uma representação simbólica (Figura 26). Ambas estão em concordância e demonstram um

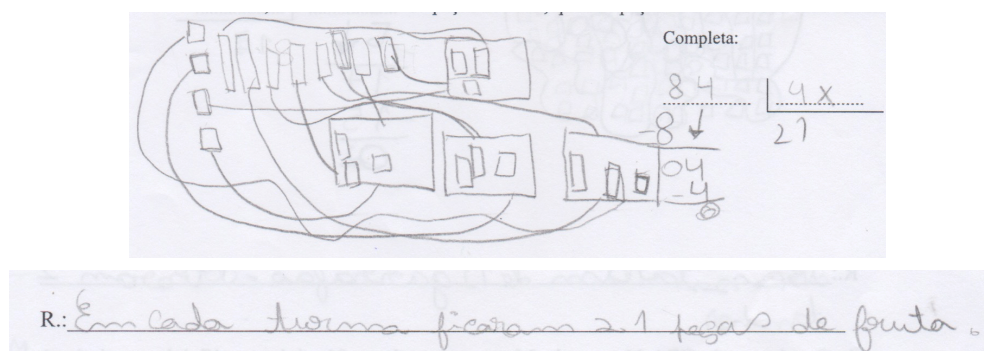


Figura 26: Resolução do aluno C da tarefa 1 da fase final

conhecimento do sentido de partilha equitativa. Por este motivo, o aluno C enquadra-se no nível 3, na tarefa 1, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

O aluno C, na resolução da tarefa 2 da fase final, apresentou a representação simbólica da operação e a representação visual do MAB referente à situação problemática proposta (Figura 27). Este aluno apresentou o dividendo (43) mas cometeu um lapso na representação visual do MAB. De facto, na representação visual, o aluno C apresentou uma solução para a operação $33:3=11$, porque, por lapso, o aluno distribuiu duas barras para o mesmo “retângulo”, mas considerou apenas uma barra nesse retângulo. Consequentemente, o aluno não apresenta a decomposição da dezena que deveria ter sobrado e, assim, a solução que apresentou através da representação figurativa não corresponde à representação simbólica. Deste modo, o aluno enquadra-se no nível 2 tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

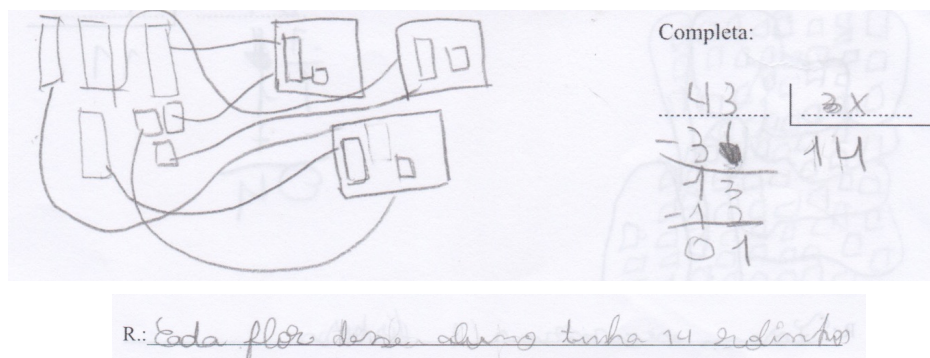


Figura 27: Resolução do aluno C da tarefa 2 da fase final

Considerando o nível da tarefa 1 e da tarefa 2 da fase final referente ao sentido de partilha equitativa, o aluno C encontra-se no nível 3, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

O aluno D apresentou uma representação visual do MAB e uma representação simbólica, que foi explicitada por uma representação verbal (Figura 28). As três representações são concordantes com o sentido de partilha equitativa. Por este motivo, o aluno D enquadra-se no nível 3, na tarefa 1, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

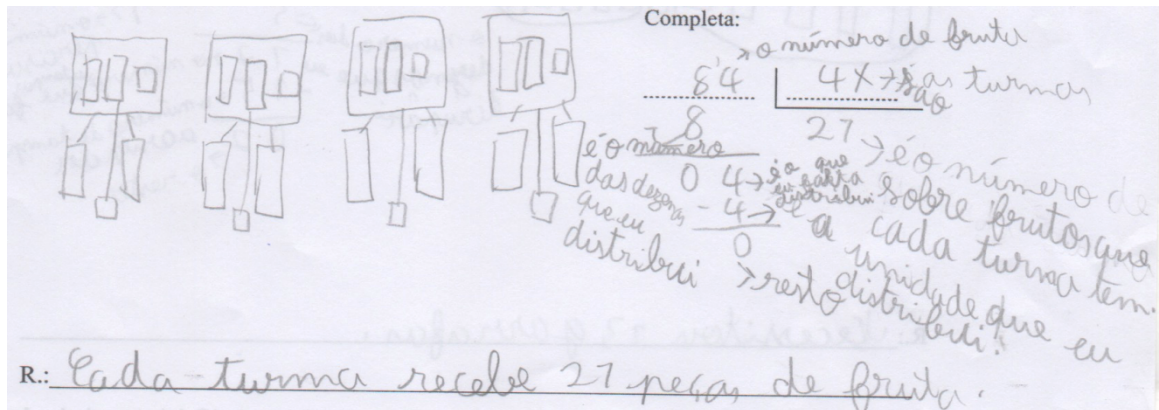


Figura 28: Resolução do aluno D da tarefa 1 da fase final

O aluno D resolveu a tarefa 2 da fase final apresentando uma representação simbólica associada a uma representação verbal e uma representação visual do MAB (Figura 29). Este aluno não apresentou claramente a decomposição de uma dezena em dez unidades, no entanto, apresentou as 13 unidades (13 *cubinhos*) que sobram e fez a sua distribuição por três, apresentando ainda o resto (1 *cubinho*). A representação simbólica que apresentou é correta, explicando os valores que apresentou através da representação verbal: 43 é “o número de rolinhos”; 3 é “o número de flores”; 14 “é o número de rolinhos que cada flor tem”; 3 é o “número das dezenas que distribui”; 13 é o “número [unidades] que falta distribuir”; 12 é o “número de [unidades] que consegui distribuir”; 1 é o “resto”. A resposta que deu está correta e mostrou

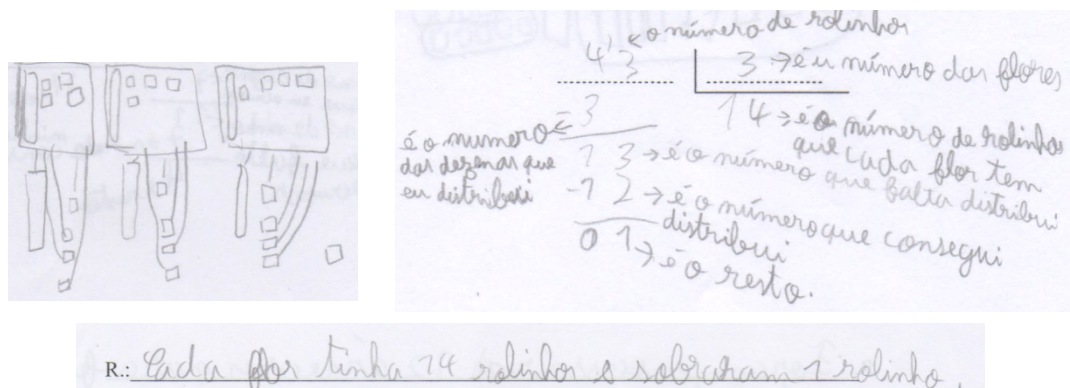


Figura 29: Resolução do aluno D da tarefa 2 da fase final

compreender o sentido de partilha equitativa e saber relacionar o MAB com os procedimentos do algoritmo informal da divisão utilizado. Nesta tarefa, o aluno D encontra-se no nível 3, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

Desta forma, considerando o nível da tarefa 1 e da tarefa 2 da fase final referente ao sentido de partilha equitativa, o aluno D encontra-se no nível 3, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

2.4.2.1. Síntese

Atendendo às evidências apresentadas anteriormente, pode afirmar-se que os quatro alunos, desde a fase inicial até à fase final, melhoraram a forma de explicar o seu raciocínio e puderam, através da manipulação de um material manipulativo concreto, o MAB, e das discussões em pequeno e grande-grupo, dar significado aos procedimentos do algoritmo usual da operação divisão inteira, atendendo aos princípios do sistema de numeração decimal e ao sentido de partilha equitativa. Assim, pode referir-se que:

- o aluno A começou, na fase inicial, por revelar dificuldades na distinção dos sentidos da divisão (tal como aconteceu ainda na sessão 1) e, perante tarefas cujos dividendos tinham três algarismos, o aluno revelou não reconhecer a divisão e apresenta uma operação de multiplicar (nível 1); na fase final, revelou reconhecer o sentido de partilha equitativa, em que a representação do MAB o ajudou a compreender os procedimentos do algoritmo informal da divisão e reconhecendo a ação de decompor uma unidade de ordem superior em dez unidades de ordem inferior (nível 3); o aluno A e o aluno B apresentam, por vezes, resoluções diferentes durante a fase de intervenção, mas as suas respostas revelam que ambos partilharam ideias e discutiram acerca da(s) tarefa(s) proposta(s);
- o aluno B começa por revelar dificuldades ao reconhecer o sentido de partilha equitativa (tal como aconteceu ainda na sessão 1) e, perante tarefas cujos dividendos tinham três algarismos, o aluno revelou dificuldades nos

procedimentos do algoritmo informal da divisão (nível 1); as discussões em pequeno grupo revelaram-se fundamentais para que o aluno B demonstrasse, na fase final, um conhecimento mais profundo da operação divisão e do sentido de partilha equitativa (reconhece a ação de decompor uma unidade de ordem superior em dez unidades de ordem inferior); estas discussões, associadas ao auxílio da representação do MAB, foram importantes para a sua progressão, embora tenha, ainda, revelado dificuldades em relacionar a representação visual do MAB e a representação simbólica (nível 2);

- o aluno C manteve o nível no sentido de partilha equitativa: na fase inicial, cometeu apenas um erro de cálculo, mas evidencia conhecer os procedimentos do algoritmo informal da divisão (nível 3); na fase final, evidencia reconhecer o sentido de partilha equitativa e a ação de decompor uma unidade de ordem superior, embora apresente um lapso na representação visual do MAB, que, por esse motivo, não é concordante com a representação simbólica (que está correta) (nível 3);
- o aluno D, na fase inicial, revela dificuldades principalmente na resolução de tarefas com dividendos com três algarismos (nível 2); na fase final, é capaz de explicar melhor o seu raciocínio, utilizando a representação verbal, que permite explicitar a relação entre a representação simbólica e a representação visual do MAB (nível 3); o aluno D demonstrou, nomeadamente na sessão 1, um papel importante nas discussões em grande grupo.

2.4.3. Sentido de Medida

2.4.2.1. Fase Inicial

A fase inicial foi resolvida individualmente e sem recurso ao MAB. Os alunos responderam a duas situações problemáticas cujo sentido era o de medida (tarefas 2 e 3 do Apêndice 1).

O aluno A, ao resolver a tarefa 2 da fase inicial (Figura 30), apresentou uma representação simbólica, mas cometeu um lapso ao colocar o sinal da operação. Não obstante, pela resposta que dá, mostra ter reconhecido o sentido de medida (“4 grupos de 5 alunos”). Assim, o aluno, nesta tarefa, encontra-se no nível 2, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

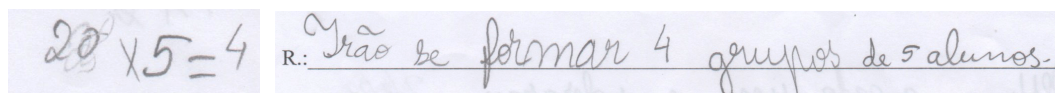


Figura 30: Resolução do aluno A da tarefa 2 da fase inicial

Na resolução da tarefa 3, o aluno A apresentou uma representação visual de 155 pacotes de leite, que agrupou em grupos de 8 elementos, de acordo com o sentido de medida (Figura 31). Não obstante, a representação é confusa, o que leva o aluno a dar uma resposta errada, que não é concordante com a resolução que apresenta. Assim, nesta tarefa, por ter reconhecido que era necessário formar grupos de 8 elementos, o aluno encontra-se no nível 2.

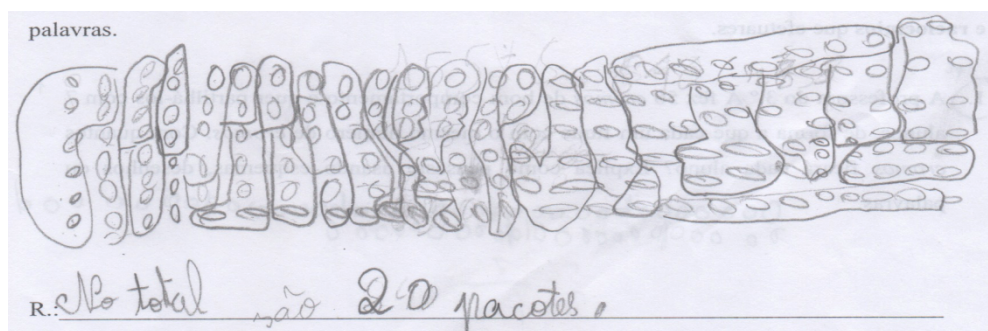


Figura 31: Resolução do aluno A da tarefa 3 da fase inicial

Considerando o nível da tarefa 2 e da tarefa 3 da fase inicial referente ao sentido de medida, o aluno A encontra-se no nível 2, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

O aluno B, na resolução da tarefa 2 da fase inicial (Figura 32), reconheceu o sentido de medida, pois, através de uma representação visual mostrou que se formam 4 grupos de 5 elementos (nível 3).

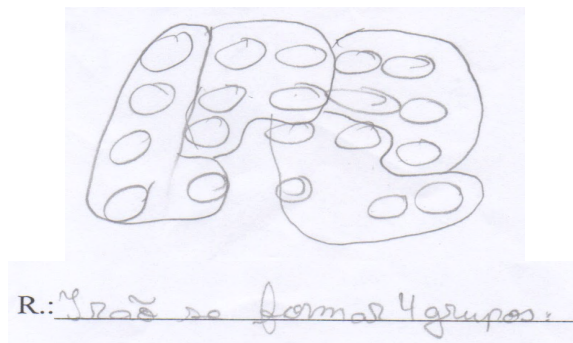


Figura 32: Resolução do aluno B da tarefa 2 da fase inicial

Na resolução da tarefa 3, com um dividendo com três algarismos, o aluno B relevou dificuldades ao nível dos procedimentos do algoritmo informal da divisão, nomeadamente na subtração (Figura 33). Desta forma, a resposta que apresentou não está correta e, assim, o aluno B, nesta tarefa, encontra-se no nível 1, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

Considerando o nível da tarefa 2 e da tarefa 3 da fase inicial referente ao sentido de medida, o aluno B encontra-se no nível 2, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

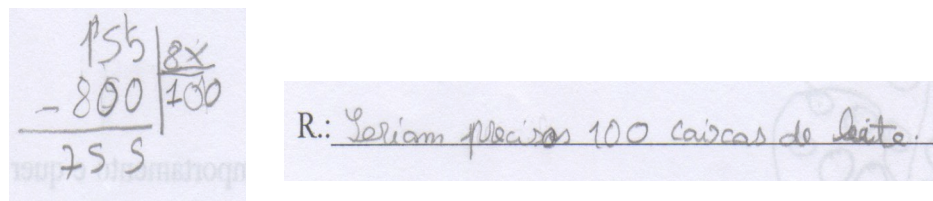


Figura 33: Resolução do aluno B da tarefa 3 da fase inicial

O aluno C, na tarefa 2, encontra-se no nível 2, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2), porque apresentou uma representação visual correta (forma 4 grupos de 5 pessoas), mas a resposta que deu indica o sentido de partilha equitativa, que não é o adequado para esta tarefa (Figura 34).

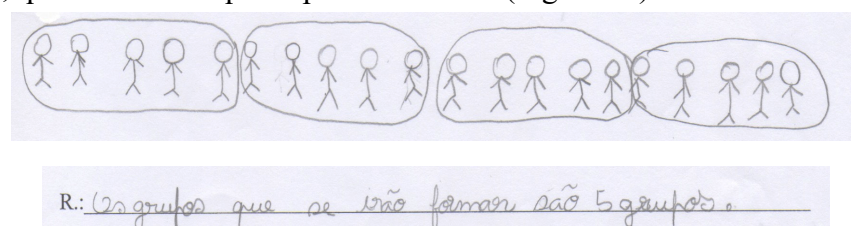
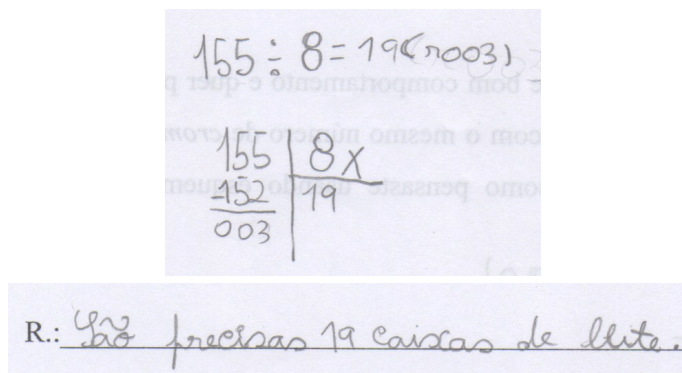


Figura 34: Resolução do aluno C da tarefa 2 da fase inicial

Na resolução da tarefa 3, o aluno C demonstrou conhecer os procedimentos do algoritmo informal com dividendos com três algarismos e o sentido de medida (nível 3) (Figura 35).



$$155 \div 8 = 19 \text{ (no 003)}$$

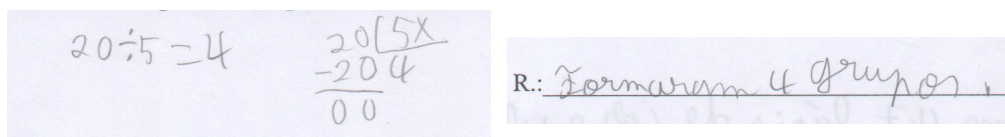
155	8x
-152	19
003	

R.: São precisas 19 caixas de leite.

Figura 35: Resolução do aluno C da tarefa 3 da fase inicial

Desta forma, considerando o nível da tarefa 2 e da tarefa 3 da fase inicial referente ao sentido de medida, o aluno C encontra-se no nível 3, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

O aluno D evidenciou compreender o sentido de medida na tarefa 2 (nível 3) (Figura 36).



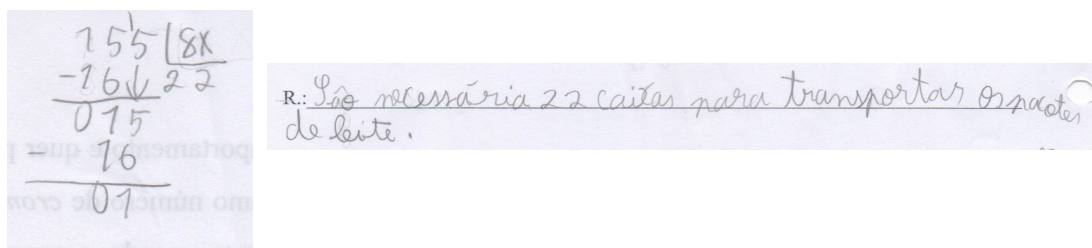
$$20 \div 5 = 4$$

20	5x
-20	4
00	

R.: Formaram 4 grupos.

Figura 36: Resolução do aluno D da tarefa 2 da fase inicial

No entanto, na resolução da tarefa 3 da fase inicial, cujo dividendo tinha três algarismos, o aluno D revela dificuldades em selecionar o quociente (apresenta 22 como sendo o quociente em vez de 19). Consequentemente, as operações de subtração que apresenta não estão corretas (Figura 37), pelo que se encontra, nesta tarefa, no nível 1.



155	8x
-16	22
015	
-16	
01	

R.: São necessária 22 caixas para transportar os pacotes de leite.

Figura 37: Resolução do aluno D da tarefa 3 da fase inicial

Desta forma, considerando o nível da tarefa 2 e da tarefa 3 da fase inicial referente ao sentido de medida, o aluno D encontra-se no nível 2, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 2).

2.4.2.1. Fase de Intervenção

Grupo 1

A sessão em que os alunos, pela primeira vez, resolveram tarefas cujo sentido era o de medida foi a sessão 3 e, como tal, a PE colocou uma situação problemática à turma, como explicado na secção 2.3.3., antes de distribuir a primeira tarefa.

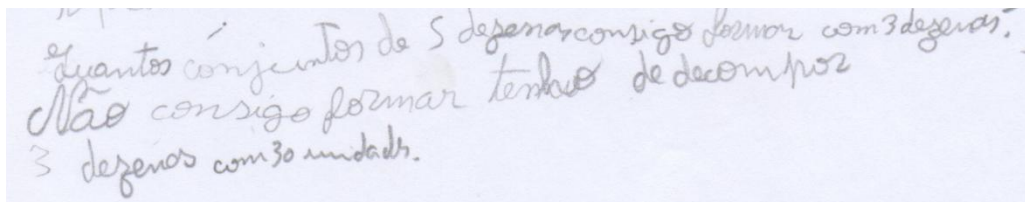


Figura 38: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 3 (aluno A)

O grupo 1, para responder à tarefa 2 da sessão 3 (Apêndice 5), utilizou a representação verbal, associada à representação ativa do MAB. O grupo questionou “quantos conjuntos de 5 dezenas consigo formar com 3 dezenas?” e, dado que “não consigo formar”, o grupo reconhece a necessidade de decompor as 3 dezenas em 30 unidades (Figura 38). Tal como se pode observar na Figura 39, o grupo 1 formou 7 grupos de 5, de acordo com o sentido de medida.

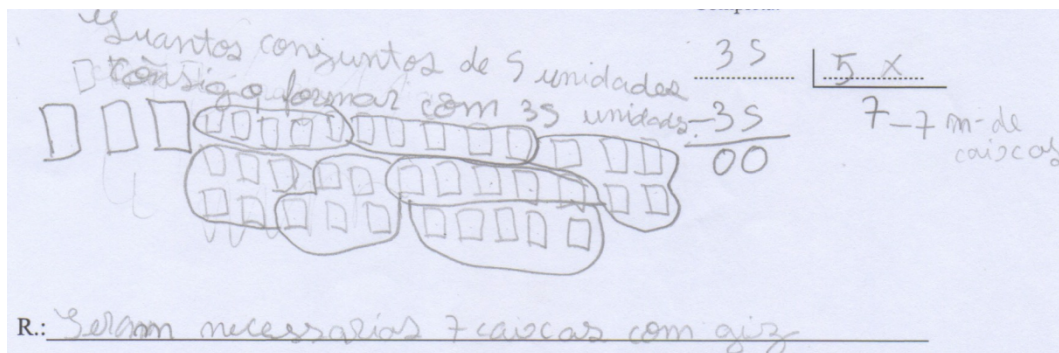


Figura 39: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 3 (aluno B)

Na sessão 4, o grupo 1 respondeu à tarefa 1 (Apêndice 6) recorrendo também à representação verbal (Figura 40). Ainda que não tenha apresentado uma representação visual do MAB, a representação verbal está associada à representação ativa que o grupo 1 fez do MAB. O grupo reconheceu a ação de decompor uma unidade de ordem superior. A resposta que o grupo apresentou não está de acordo com o contexto da tarefa, não obstante os alunos referem, junto à representação simbólica, que o quociente é o número de colegas (Figura 40), reconhecendo o sentido de medida da divisão.

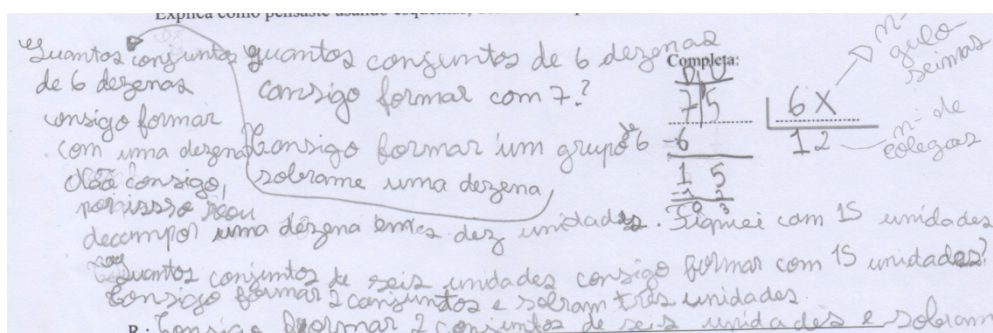


Figura 40: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 4 (aluno B)

Na sessão 5, o grupo 1 respondeu à tarefa 2 (Apêndice 7) associando as três representações: verbal, associada à representação ativa do MAB; visual do MAB; simbólica (Figura 41). Ainda que a representação simbólica esteja correta, a representação visual do MAB só contém 1 grupo de 4 unidades e, dada a questão que coloca através da representação verbal (“quantos conjuntos de 12 unidades [consigo formar] com 4 unidades?” em vez de “quantos conjuntos de 4 unidades consigo formar com 12 unidades?”), revela que podem ainda existir algumas dificuldades no sentido de medida.

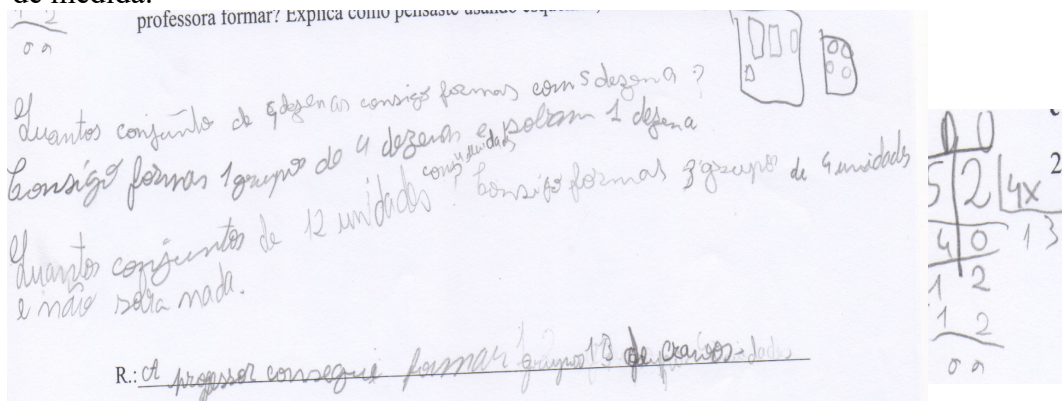


Figura 41: Resolução do grupo 1 da tarefa 2 da sessão 5 (aluno A)

Na sessão 6, que foi mista (uma sessão em que foram exploradas tarefas tanto do sentido de medida como do sentido de partilha equitativa da divisão), o grupo respondeu à tarefa 1 (Apêndice 8) recorrendo à representação simbólica e visual do MAB (Figura 42). Nesta tarefa, o grupo não fez a representação ativa, dado que não lhe foi disponibilizado o MAB, mas revelou ser capaz de resolver a tarefa corretamente, associando-a à representação visual do MAB.

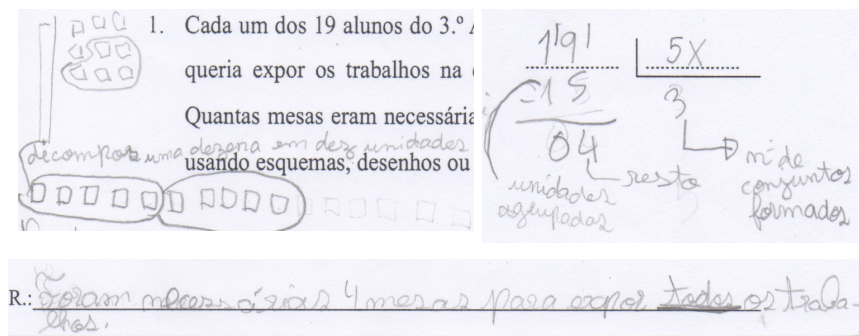


Figura 42: Resolução do grupo 1 da tarefa 1 da sessão 6 (aluno B)

O grupo 1 revelou reconhecer a ação de decompor uma unidade de ordem superior e a resposta que apresenta está de acordo com o contexto realista do problema. O grupo revelou ainda reconhecer o sentido de medida da operação divisão.

Grupo 2

Na resolução da tarefa 2 da sessão 3 (Apêndice 5), o grupo 2 relevou saber distinguir o sentido de medida, bem como a decomposição de uma unidade de ordem superior (Figura 43). O grupo 2 associou a representação ativa do MAB, à representação simbólica, à representação verbal e à representação visual do MAB.

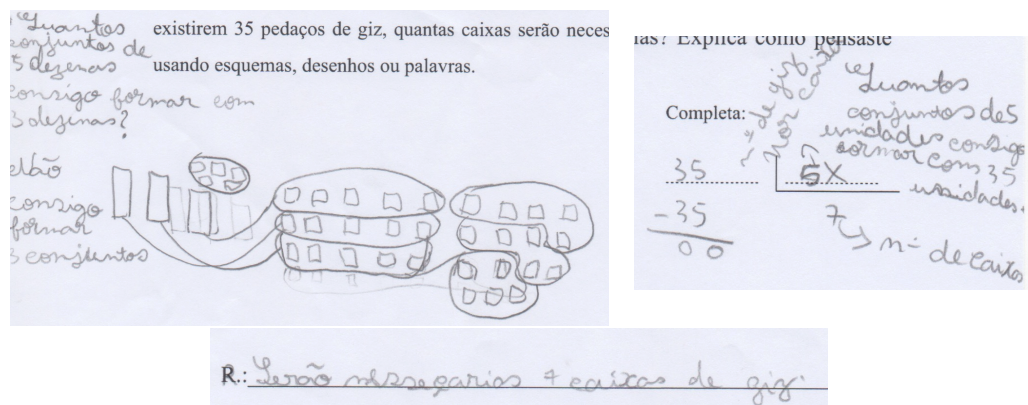


Figura 43: Resolução do grupo 2 da tarefa 2 da sessão 3 (aluno C)

Da mesma forma, a resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 4 (Apêndice 6) apresentou os três tipos de representação (simbólica numérica, visual do MAB e verbal), associadas à representação ativa usando o MAB, evidenciando que o grupo compreende o sentido de medida da operação divisão (Figura 44). No entanto, o grupo 2 não formou grupos de dezenas, pelo que decompôs todas as dezenas em unidades, de tal forma que ficou com 75 unidades, que agrupou em 12 grupos de 6. Deste modo, a representação verbal (linguagem natural) e a representação visual do que os alunos fizeram com o MAB não são concordantes.

4. A Ana, uma aluna da [redacted], fez anos em fevereiro e ofereceu a alguns dos seus colegas um saquinho com 6 guloseimas diversas. Sabendo que, no total, a Ana tinha 75 guloseimas para oferecer, a quantos colegas ofereceu ela um saquinho?

Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Quanto conjunto de 6 unidades consigo fazer com 75 unidades? Preciso formar 2 conjuntos e restam 3 unidades.

Completa:

75	72	03
-6	-6	
75	72	
03		

R: Ofereceu 12 saquinhos a Ana para os colegas.

Figura 44: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 4 (aluno D)

Nas notas do diário de bordo, a PE registou que a discussão em grande-grupo acerca desta tarefa permitiu ao grupo 2 compreender que não é necessário decompor as 7 dezenas em 70 unidades, pois consegue formar 1 conjunto de 6 dezenas e teria apenas de decompor uma dezena em 10 unidades.

Na sessão 5 (mista), o grupo 2 resolveu a tarefa 2 (Apêndice 7) revelando as aprendizagens desencadeadas pela discussão da tarefa da sessão anterior. Desta vez, o grupo apresentou o agrupamento das peças por dezenas e por unidades, de acordo com o sentido de medida (Figura 45).

Nesta tarefa, foi possível observar a importância da contextualização das tarefas para os alunos e da sua identificação com as mesmas. De facto, os alunos mostraram-se motivados pelo facto de o enunciado da tarefa referir a sua escola (“esta escola também é a minha!”, frase proferida por um aluno e registada pela PE no seu diário de bordo).

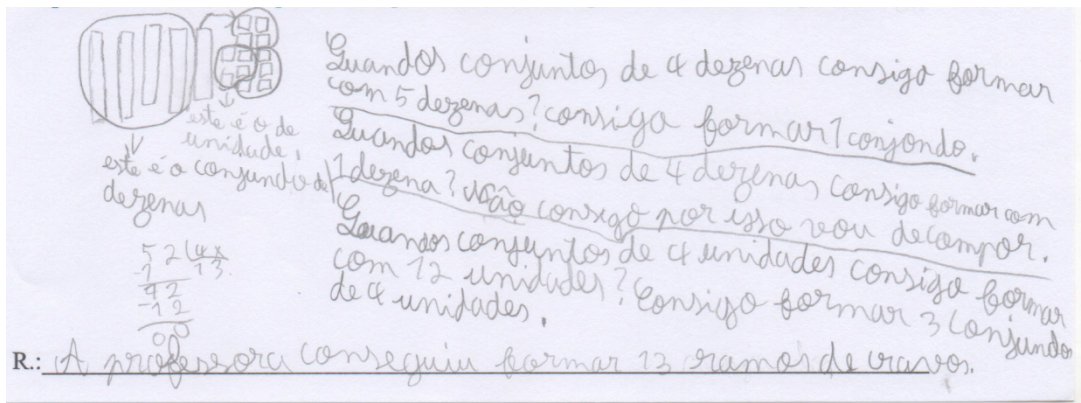


Figura 45: Resolução do grupo 2 da tarefa 2 da sessão 5 (aluno D)

Na sessão 6, tarefa 1 (Apêndice 8), em que não foi distribuído o MAB, os alunos C e D apresentaram, de forma correta, uma representação visual da situação real (os trabalhos em cima de mesas) e a representação visual do MAB, associada à representação verbal e à representação simbólica (Figura 46).

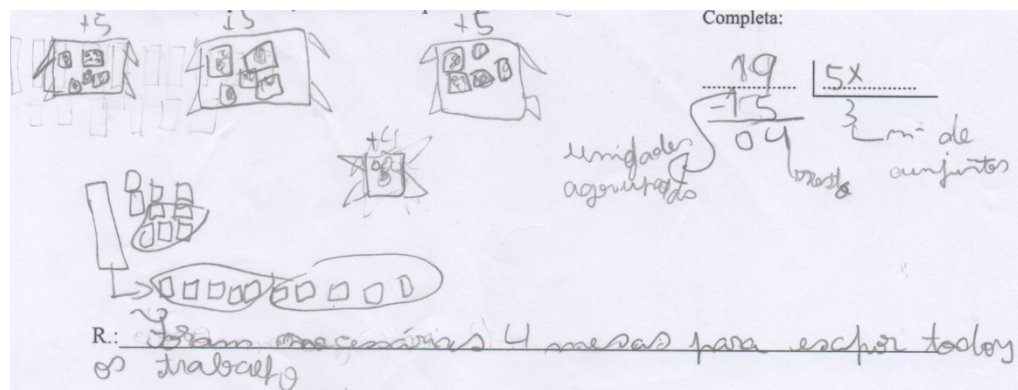


Figura 46: Resolução do grupo 2 da tarefa 1 da sessão 6 (aluno C)

2.4.2.1. Fase Final

A fase final foi resolvida individualmente e sem recurso ao MAB. Os alunos responderam a duas situações problemáticas cujo sentido era o de medida (tarefas 3 e 4 do Apêndice 10).

O aluno A, ao resolver a tarefa 3 da fase final (Figura 47), apresentou uma representação visual que lhe permitiu agrupar 67 em 13 grupos de 5 elementos. O aluno não agrupou as 6 dezenas e depois as 7 unidades, mas fê-lo como se fossem 67 unidades. O aluno A também apresentou uma representação simbólica, mas com alguns lapsos, nomeadamente na apresentação do resto. Nesta tarefa, o aluno encontra-se no nível 2, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos.

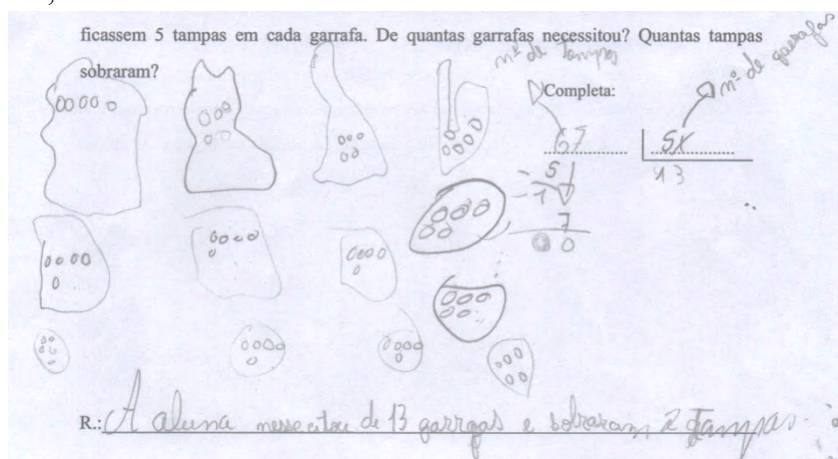


Figura 47: Resolução do aluno A da tarefa 3 da fase final

Na resolução da tarefa 4, o aluno A apresentou a representação visual do MAB e agrupou as peças de forma correta: 1 grupo de 7 barras e 1 grupo de 7 *cubinhos*, sobrando 4 *cubinhos* (Figura 48). O aluno A apresentou também a representação simbólica. A resposta que o aluno A apresenta não considera, na totalidade, o contexto real da tarefa, já que não seria possível expor todos os trabalhos em 11 árvores, mas sim em 12.

Considerando o nível do aluno na tarefa 3 e da tarefa 4 da fase final referente ao sentido de medida, o aluno A encontra-se no nível 3 (Apêndice 11).

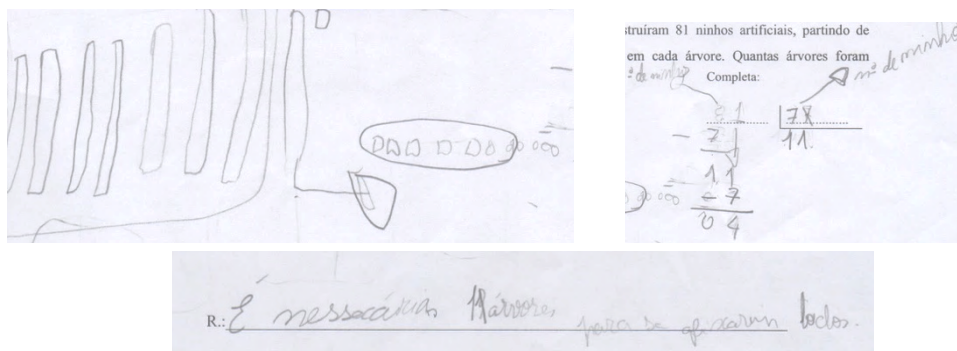


Figura 48: Resolução do aluno A da tarefa 4 da fase final

O aluno B, ao resolver a tarefa 3 da fase final (Figura 49), apresentou uma representação visual do MAB e uma representação simbólica, ambas corretas. A representação visual relevou que o aluno B compreendeu o agrupamento das dezenas e das unidades em grupos de 5 elementos, sobrando dois *cubinhos*, que identificou como sendo o resto. Assim, nesta tarefa o aluno encontra-se no nível 3.

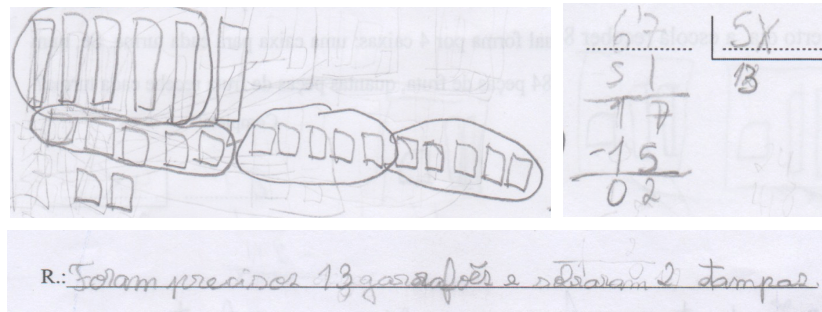


Figura 49: Resolução do aluno B da tarefa 3 da fase final

O aluno B resolveu, no entanto, a tarefa 4 como se fosse do sentido de partilha equitativa, pelo que, nesta tarefa, se encontra no nível 1 (Figura 50).

Considerando o nível do aluno na tarefa 3 e na tarefa 4 da fase final referente ao sentido de medida, o aluno B encontra-se no nível 2, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

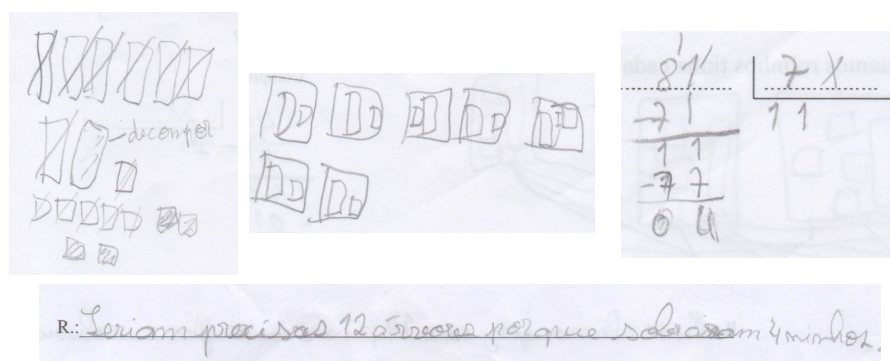


Figura 50: Resolução do aluno B da tarefa 4 da fase final

O aluno C, ao resolver a tarefa 3 da fase final, demonstrou a formação de grupos de 5 elementos, apesar de ter considerado apenas as unidades (forma 13 grupos e poderia ter formado 1 grupo de 5 dezenas e 3 grupos de 5 unidades) (Figura 51). O aluno C apresentou corretamente o resto da tarefa e a representação simbólica está correta. Assim, nesta tarefa, encontra-se no nível 3.

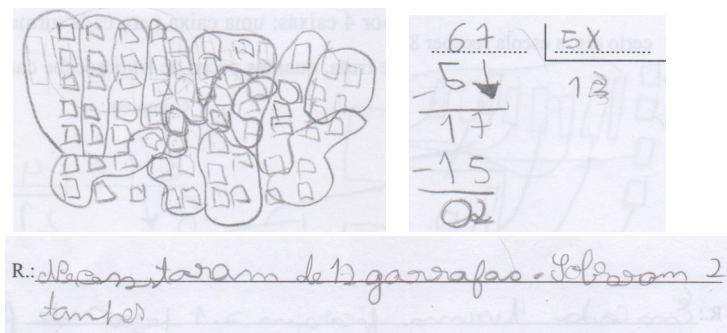


Figura 51: Resolução do aluno C da tarefa 3 da fase final

Na resolução da tarefa 4, o aluno C procede do mesmo modo, isto é, considerou apenas as unidades (forma 11 grupos e poderia ter formado 1 grupo de 7 dezenas e 1 grupo de 7 unidades) (Figura 52). O aluno C mostrou, no entanto, saber identificar o sentido de medida e a representação simbólica está correta (nível 3).

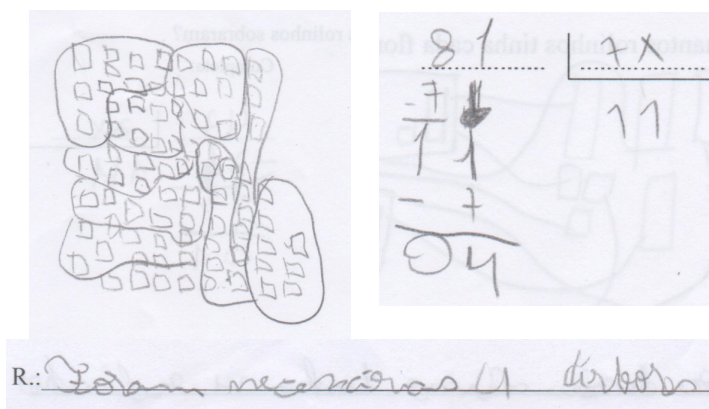


Figura 52: Resolução do aluno C da tarefa 4 da fase final

Considerando o nível do aluno na tarefa 3 e na tarefa 4 da fase final referente ao sentido de medida, o aluno C encontra-se no nível 3, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

O aluno D, ao resolver a tarefa 3 da fase final (Figura 53), apresentou três tipos de representações: simbólica; figurativa (do MAB); verbal. As três representações estão corretas e revelam que o aluno D compreendeu o sentido de medida. A representação verbal permitiu ao aluno D explicitar melhor o seu raciocínio. Nesta tarefa, o aluno encontra-se no nível 3.

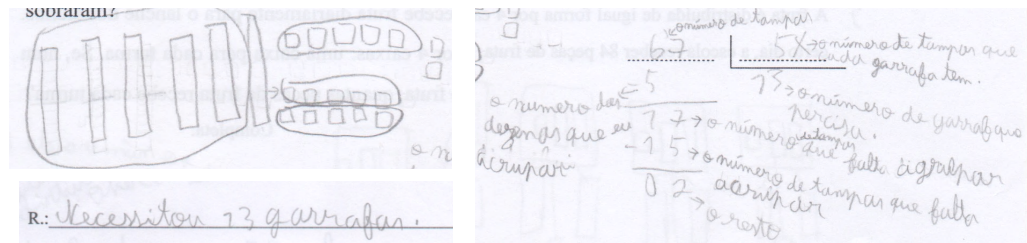


Figura 53: Resolução do aluno D da tarefa 3 da fase final

De igual modo, o aluno D apresentou, na tarefa 4, os três tipos de representações (simbólica, visual do MAB e verbal), que evidenciam o conhecimento do sentido de medida, pelo que se encontra no nível 3 (Figura 54).

Considerando os níveis do aluno nas tarefas referentes ao sentido de medida da fase final, o aluno D encontra-se no nível 3, tendo em conta os critérios de análise estabelecidos (Apêndice 11).

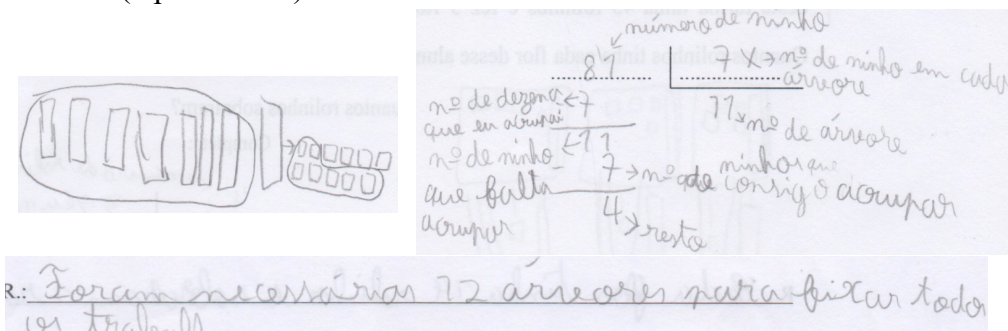


Figura 54: Resolução do aluno D da tarefa 4 da fase final

2.4.2.1. Síntese

Em relação ao sentido de medida e atendendo às evidências apresentadas anteriormente, pode afirmar-se que os quatro alunos, desde a fase inicial até à fase final, melhoraram a forma de explicar o seu raciocínio e puderam, através da representação ativa do material manipulativo concreto MAB e das características da MMCAA, dar significado aos procedimentos do algoritmo informal da operação

divisão inteira, atendendo aos princípios do sistema de numeração decimal e ao sentido de medida. Assim, pode referir-se que:

- o aluno A começou, na fase inicial, por reconhecer o sentido de medida, mas cometeu alguns lapsos nas resoluções (nível 2); na fase final, a representação visual do MAB ajudou o aluno A na resolução das tarefas, que revelou reconhecer o sentido de medida e compreender os procedimentos do algoritmo informal da divisão (nível 3);
- o aluno B revelou dificuldades nos procedimentos do algoritmo informal, nomeadamente ao nível da subtração, quando o dividendo contém mais de dois algarismos (nível 2); o aluno B demonstrou, na fase final, compreender os procedimentos do algoritmo informal da divisão e o sentido de medida na primeira tarefa, pois a segunda tarefa deste sentido é resolvida de acordo com o sentido de partilha equitativa, o que demonstra que o aluno B ainda tem dificuldades em interpretar as tarefas de divisão (nível 2); a evolução do aluno A e do aluno B foi potenciada pelas discussões proporcionadas pela MMCAA, nomeadamente nas discussões em pequeno grupo, durante a fase de intervenção;
- o aluno C manteve o nível 3 desde a fase inicial até à fase final; na fase final, resolveu as tarefas auxiliando-se da representação do MAB, embora tenha formado grupos de unidades apenas (decompôs todas as dezenas em unidades e depois formou grupos de acordo com o sentido de medida); o aluno revelou ser capaz de explicar melhor o seu raciocínio e evidenciou ter melhorado as suas competências ao nível da comunicação;
- o aluno D, na fase inicial, revelou dificuldades nos procedimentos do algoritmo informal, nomeadamente ao selecionar os algarismos do quociente, o que o impede de resolver a tarefa corretamente (nível 2); na fase final, este aluno apoiou-se em representações verbais para explicar o seu raciocínio e para relacionar a representação visual do MAB com os procedimentos do algoritmo informal da divisão (nível 3); a motivação para

a resolução das tarefas foi observada no grupo 2, dado o contexto significativo das tarefas.

2.5. Discussão de Resultados

Alguns autores consideram que os alunos têm mais dificuldades com o sentido de medida da divisão do que com o sentido de partilha equitativa (Lamber & Weist, 2012; Lautert & Spinillo, 2002). Por outro lado, há autores que consideram que os alunos podem ter mais dificuldades nas tarefas do sentido de partilha equitativa da operação divisão do que nas tarefas do sentido de medida (Mendes, 2013; Fosnot & Dolk, 2001), porque se focam mais no número em cada grupo do que nos grupos em si, tornando-se o sentido de partilha equitativa mais difícil de compreender para os alunos. Nesta investigação, os alunos revelaram mais dificuldades no sentido de partilha equitativa, tanto na fase inicial como na fase final, tendo sido inferiores os níveis globais dos quatro alunos do sentido de partilha equitativa, relativamente aos valores obtidos no sentido de medida (Apêndices 2 e 11). A análise da fase inicial vai ao encontro do que referem Pratt, Lupton e Richardson (2015), tornando-se evidente a necessidade de explorar os dois sentidos da divisão.

A importância de trabalhar com os restos na operação divisão é defendida por alguns autores (Lamber & Weist, 2012; Carvalho & Gonçalves 2003; NCTM, 2007), considerando que são importantes para que os alunos consigam tomar decisões na vida real. Neste estudo, os alunos resolveram tarefas do seu quotidiano e puderam compreender a importância do resto e o impacto que pode ter na vida real, como aconteceu, por exemplo, na tarefa 1 da sessão 6 (Apêndice 8), em que os alunos compreenderam que não podiam ficar trabalhos por expor e que, assim, era necessário mais uma mesa para expor todos os trabalhos da turma.

Os resultados obtidos evidenciam as vantagens da implementação de tarefas em grupos de dois elementos (Stender, 2012), na argumentação de ideias e na promoção de aprendizagens significativas, através de tarefas realistas, de acordo com as características da MMCAA.

Neste estudo, os procedimentos do algoritmo informal da divisão foram efetuados, sem recorrer a regras e mnemónicas sem significado para os alunos, apelando apenas à compreensão dos princípios básicos do sistema de numeração decimal (Martin, 2009; Aharoni, 2008; Ponte & Serrazina, 2000). Esta foi uma etapa do desenvolvimento do sentido do número (McIntosh, Reys & Reys, 1992; NCTM, 2007; Castro & Rodrigues, 2008), no percurso da aprendizagem dos números e operações, nomeadamente do algoritmo da operação divisão (Brocardo & Serrazina, 2008; Fernandes & Martins, 2014). Para este processo de ensino e de aprendizagem com compreensão, a manipulação do MAB (e respetiva representação ativa) teve um papel preponderante, nomeadamente na distinção dos dois sentidos da divisão e na compreensão dos procedimentos matemáticos associados ao algoritmo informal desta operação. Assim, as características deste material manipulativo concreto, juntamente com o diálogo promovido entre os grupos de dois elementos e entre a turma (Matos & Serrazina, 1996; Clements, 1999; Ma, 2009) — de acordo com as características da MMCAA (Stender, 2012) —, permitiram que os alunos pudessem compreender os procedimentos subjacentes ao algoritmo informal da divisão e ainda compreender os dois sentidos da operação divisão: medida e partilha equitativa (Fosnot & Dolk, 2001; Martin, 2009; Fischbein et al., 1985; Ambrose, Baek & Carpenter, 2003; Parker & Baldrige, 2004; MEC, 2013).

Além disso, a MMCAA — associada a situações problemáticas baseadas na realidade diária dos alunos da turma e à utilização de conhecimentos no âmbito da matemática, mas também conhecimentos fora da matemática — permitiu que se verificassem aprendizagens significativas, relacionadas com o quotidiano e organização da vida escolar (exposição e/ou elaboração de trabalhos é um exemplo). O trabalho em grupos de dois elementos (Stender, 2012) e as tarefas adequadas ao contexto dos alunos da turma (Blum & Niss, 1991), tornaram as aprendizagens mais motivantes e significativas, promovendo ainda a discussão de ideias e a partilha de conhecimento. Os alunos aplicaram a matemática a situações que conheciam, sejam do seu interesse e/ou do seu quotidiano, na aprendizagem da operação divisão inteira, tendo a oportunidade de entender e aplicar a matemática em contextos reais de diversas áreas

(Blum & Ferri, 2009; Barbosa, 2003; Jurkiewicz & Friedman, 2010; Brou, Rato & Martins, 2014; Martins et al., 2013).

Comparando os resultados da fase inicial com os resultados da fase final (Quadro 3), verifica-se que a compreensão, pelos alunos, dos sentidos da operação divisão inteira (partilha equitativa e medida), associada aos procedimentos do algoritmo informal desta operação, teve uma evolução positiva.

Quadro 3: Níveis dos alunos na fase inicial e na fase final

Aluno	Fase Inicial	Fase Final
A	2	3
B	1	2
C	3	3
D	2	3
Global	2	3

O Quadro 3 apresenta apenas uma comparação de valores entre os níveis que os alunos obtiveram nas tarefas da fase inicial (Apêndice 2) e nas tarefas da fase final (Apêndice 11). Porém — e apesar de o estudo ter sido aplicado a toda a turma e terem sido analisados apenas quatro alunos — os dados recolhidos permitem afirmar que a MMCAA associada o uso do MAB pode ter um impacto positivo na compreensão dos sentidos da divisão inteira e dos procedimentos do algoritmo informal da divisão inteira.

2.6. Conclusões

Com o presente estudo pretendeu-se responder ao seguinte problema de investigação: qual o impacto que a modelação matemática como ambiente de aprendizagem e o uso do material multibásico têm na compreensão dos sentidos da divisão inteira, bem como dos procedimentos de algoritmos informais associados à representação usual do algoritmo da divisão inteira?

De acordo com os resultados apresentados, pode afirmar-se, considerando os objetivos previamente definidos e a questão de investigação, que este estudo contribuiu para a aprendizagem, com compreensão, dos alunos. De facto, todos os alunos A, B, C e D mostraram uma melhor compreensão não só dos sentidos da operação divisão, como

também dos procedimentos do algoritmo da divisão, associados à representação ativa do MAB. De um modo geral, os alunos A, B, C e D conseguem identificar o dividendo e o divisor e conseguem manipular o MAB de acordo com o sentido da divisão: agrupar as peças no sentido de medida ou distribuí-las, no sentido de partilha equitativa. Os alunos mostraram, sem necessitarem de recorrer a mnemónicas, uma progressão na sua forma de explicar os raciocínios, de acordo com os sentidos da divisão e com os princípios do sistema de numeração decimal, nomeadamente reconhecendo o significado de decompor uma unidade de ordem superior (Ma, 2009; Fernandes & Martins, 2014). Além desta progressão, verificou-se ainda que o uso da MMCAA associado à manipulação do MAB contribuiu para que os alunos se tornassem mais motivados para a aprendizagem da matemática: por um lado, encontraram significado nas tarefas propostas por estarem enquadradas no seu contexto, através das quais puderam, também, aplicar a matemática curricular em contextos reais; por outro lado, os alunos puderam trabalhar em grupos de dois elementos, o que foi estimulante não só em termos de comunicação e argumentação, mas também ao nível das relações entre pares; por último, puderam manipular um material concreto, que, apelando aos sentidos, promoveu aprendizagens significativas.

Apesar de o papel do professor ser uma das seis normas fundamentais ao ensino da matemática que o *Professional Standards for Teaching Mathematics* refere (NCTM, 1991, como referido em NCTM, 2007), “ensinar bem matemática é uma tarefa complexa”, porque o professor necessita de ter uma panóplia de conhecimentos que lhe propiciam a formulação não só de juízos sobre o currículo, mas também na resposta às questões que os alunos colocam, na “previsão do desenvolvimento que os conceitos podem tomar” e ainda no “planeamento das aulas de acordo com esse desenvolvimento” (NCTM, 2007, p. 18). Assim, as decisões que os professores tomam todos os dias no ensino da matemática são fundamentais para a aprendizagem (com compreensão) desta área do conhecimento.

De facto, a implementação deste tipo de ambientes de aprendizagem implica que o conhecimento do professor seja consistente (Ferri & Blum, 2013), pois possui “menos controle sobre o que ocorre na sala de aula” (Jurkiewicz & Friedman, 2010, p. 46), devendo assumir o papel de orientador dos alunos.

A reflexão sobre a própria ação e práticas pedagógicas torna-se relevante, neste sentido, especialmente na formação inicial de professores (Alarcão & Roldão, 2008; Kansanen, 2014; Perrenoud, 2002; Zeichner, 1993). Um professor (particularmente um professor estagiário), deve desenvolver uma atitude reflexiva, em relação à prática — atendendo à panóplia de conhecimentos que tem de considerar (NCTM, 2007) —, permitindo que adquira conhecimentos para “lecionar, acompanhar uma turma e avaliar” (Silva, 2018, p. 76), para que, conseqüentemente, tenha “sucesso do processo de ensino e de aprendizagem” (Martins et al., 2017, p. 107). As bases teóricas são consideradas fundamentais para que o professor/educador se guie na sua prática pedagógica (Martins et al., 2017). Assim, emerge uma questão: quais os referenciais teóricos que podem ajudar um professor (estagiário) a refletir sobre a sua prática?

Neste sentido, sugere-se o referencial teórico tido por base para a planificação, implementação e reflexão deste estudo: o modelo de conhecimento profissional para ensinar (*Mathematical Knowledge for Teaching*), referido por Ball, Thames e Phelps (2008), baseado no trabalho de Shulman (1986, como referido em Ball, Thames & Phelps, 2008).

O modelo de Ball, Thames e Phelps (2008) permite ao professor fazer uma reflexão “mais perspicaz sobre os conhecimentos mobilizados pelos educadores/professores por forma a aprofundar aqueles que carecem de um maior aprofundamento e/ou colmatar as lacunas, também, evidenciadas por esses” (Martins et al., 2017, como referido em Duque & Martins, 2018, p. 305). Na verdade, o “desenvolvimento potencial das crianças depende, em grande parte, dos conhecimentos do(a) educador(a)” (Martins et al., 2017, p. 112) ou, neste caso, do professor.

2.6.1. Limitações do estudo

A realização de entrevistas semiestruturadas no final do estudo teriam ajudado a compreender ainda melhor os raciocínios dos alunos.

2.6.2. Recomendações para futuros estudos

Sendo este estudo baseado numa das fases da aprendizagem com compreensão dos procedimentos do algoritmo da divisão referidas por Fernandes e Martins (2014),

poder-se-ia dar continuidade ao projeto, que culminaria no 4.º ano, com a aprendizagem do algoritmo formal da divisão, sem recurso a materiais manipulativos, mas com compreensão.

Sugeria-se, ainda, iniciar as sessões de partilha equitativa com os pedaços de cartolina ou outro material semelhante, para melhor organização das peças do MAB e uma consequente representação ativa mais evidente de acordo com os conceitos matemáticos implicitamente envolvidos facilitando a compreensão dos alunos durante a resolução das diversas tarefas.

3. COMPONENTE REFLEXIVA

No último capítulo do trabalho, Componente Reflexiva, será feita uma reflexão acerca da evolução profissional da PE ao longo dos dois estágios que realizou, especificando alguns aspetos mais relevantes referentes aos dois ciclos de ensino em que estagiou.

3.1. 1.º Ciclo do Ensino Básico

O estágio em 1.º CEB foi uma experiência muito enriquecedora profissional e pessoalmente. Apesar de, no início do estágio, estar apreensiva devido ao facto de a turma ser desafiante, o bom clima entre todos, na escola, era notório. Desse modo, desde logo, também o grupo de estágio foi incluído e se integrou no quotidiano da turma e da escola, fazendo parte da boa relação entre todos. Na verdade, pude experienciar a cooperação do grupo, em que todos os elementos se apoiam e criticam construtivamente, não como uma “competição”, mas antes como uma partilha de conhecimentos e ideias. Como refere Rato (2016), a propósito das práticas de iniciação à prática profissional em 1.º CEB na ESEC, elas “perspetivam-se numa base ecológica, colegial e dialógica/construtivista e sócioconstrutivista de formação, e assente num sistema reflexivo e em instrumentos de (auto)regulação, visando mudanças nos formandos ao nível metacognitivo, motivacional e atitudinal” (p. 49). Considero que a perspetiva ecológica, colegial, dialógica/construtivista e sócioconstrutivista foi fulcral para que as intervenções dos professores estagiários fossem bem sucedidas e existisse desenvolvimento pessoal e profissional. A interação entre os elementos do grupo de estágio (dialógica e sócioconstrutivista) e entre os elementos do grupo e diferentes contextos ecológicos institucionais (instituição de formação e centros de estágio) e atores epistemologicamente diversos (professores da instituição de formação, supervisores, orientadores-cooperantes, colegas de curso, agentes diversos nos centros de estágio, encarregados de educação, membros da comunidade envolvente à escola) permitiu, na minha ótica, considerar a interação dialógica com diferentes contextos e atores como elemento central, quer dos processos de formação inicial, quer de formação contínua. Deste modo, assumirei a interação com diferentes contextos e atores como referente para o meu desenvolvimento pessoal e profissional que, certamente, pautará o meu futuro como professora.

A turma de estágio do 1.º CEB era heterogénea, com um ritmo de aprendizagem, na generalidade, lento, que necessitava de estar constantemente ocupada. Deste modo, à medida que ia conhecendo melhor a turma, também a planificação se adaptava cada vez melhor. A antecipação das dúvidas dos alunos era um aspeto para o qual estava constantemente atenta e que era refletido durante a elaboração das planificações. Também foi necessário aprender a gerir os diferentes ritmos de aprendizagem e dar a oportunidade de todos os alunos participarem, de modo a que se sentissem confiantes, de acordo com as suas dificuldades (que eu ia, também, conhecendo melhor). As atividades e estratégias implementadas pelos professores estagiários foram, de certo modo, ao encontro daquelas que a professora cooperante adotava e com as quais sempre me identifiquei. Não obstante, houve a oportunidade para implementar novas ideias ou sugerir atividades. Um exemplo deste aspeto surgiu perante o facto de a turma ter um fraco comportamento, o que deu origem à criação de uma “caderneta de *chromos* de bom comportamento”, por parte dos professores estagiários, com o intuito de monitorizar o comportamento dos alunos e motivá-los a manter um comportamento de nível bom.

A lecionação dos tempos letivos foi feita de forma progressiva, em conjunto com os outros professores estagiários, o que foi extremamente importante para a minha progressiva autoconfiança: no início, cada professor estagiário dava uma aula (primeira parte da manhã, segunda parte da manhã ou tarde), de tal forma que, no final, cada professor estagiário lecionava um dia completo de aulas.

Ao longo do estágio, foram várias as experiências que se traduziram num conhecimento epistemológico contextual, holístico e integrado da profissão docente e da tomada de consciência das minhas capacidades pessoais em docência. As experiências de estágio detalhadas e refletidas a seguir (NEE; dia mundial da árvore; aula de Expressão Físico-Motora), foram de entre todas as mais significativas e formativas. Dada a importância da significação pessoal que lhes atribuo e, simultaneamente, da aprendizagem profissional que me proporcionaram, irei detalhá-las de seguida e refletir sobre elas.

Primeira experiência significativa: NEE

Ao longo do estágio de 1.º CEB, o contacto e o apoio aos alunos com NEE foi regular. Este aspeto foi fundamental para mim, não só porque me permitiu aprofundar, na prática, o meu conhecimento sobre alguns quadros de NEE e as estratégias e atividades pedagógicas a eles direcionadas e a sua mobilização no contexto da turma, mas também me permitiu contactar com o trabalho dos docentes da Educação Especial e perceber de que forma é feita a ligação entre o professor titular e o professor desta área. A interação frequente com os alunos com NEE permitiu-me ainda refletir acerca da necessidade de uma adaptação constante e de um cuidado especial na preparação das atividades, a diversos níveis, como por exemplo, a diferenciação dos conteúdos, das didáticas e dos ritmos de aprendizagem, do nível de linguagem ou dos termos utilizados.

Grenier (2013) refere um conjunto de aspetos que podem influenciar as aprendizagens. Podem ser características de género, idade, etnoculturais, culturais e socioeconómicas, cognitivas, afetivas e motivacionais. A diferenciação pedagógica visa reduzir as diferenças de aprendizagem verificadas, procurando, em primeiro lugar, compreender o que está na génese dessas diferenças e, seguidamente, agir pedagogicamente, no sentido de reduzir essas diferenças. Enquanto formanda, senti ao longo do estágio supervisionado três dilemas fundamentais relativamente ao trabalho com alunos NEE. Por um lado, para alguns alunos, a distância em relação às aprendizagens habituais é de tal modo excessiva que o objetivo da diferenciação já não é o de os alunos acompanharem as aprendizagens da turma, mas antes o de otimizarem as suas competências e, eventualmente, desenvolverem as mais ajustadas ao seu nível de realização, mesmo que elas se encontrem desfasadas das prescritas para o ano de escolaridade. Considero que o importante é que o professor equacione sempre a importância dos pré-requisitos a trabalhar, para que o aluno atinja os conteúdos e as aprendizagens requeridas, mesmo que mais tarde. Deste modo, é fundamental que o professor conheça quer os conhecimentos prévios do aluno, quer o programa curricular, bem como os pré-requisitos necessários à aprendizagem dos conteúdos que se pretende que o aluno aprenda.

O segundo dilema prende-se com a postura e a atitude pedagógica a adotar pelo professor. Se por um lado, para alguns alunos, o *handicap* é de tal ordem (muitas vezes ele relaciona-se muito com aspetos dificilmente ao alcance do professor, nomeadamente os hábitos, cultura e representações da família), tornando difícil para o aluno o acompanhamento das aprendizagens habituais para o ano de escolaridade, mesmo com auxílio. Por outro lado, se nestes casos a atitude do professor for apenas a de oferecer ao aluno tarefas e atividades que estejam ao seu nível de realização atual, também o está a colocar num patamar de desenvolvimento que o impedirá de progredir nas aprendizagens. Deste modo, o que resulta da minha experiência é a reflexão de que o professor deve fazer um balanço entre aquilo que o aluno é capaz de realizar sem ajuda e aquilo que ele será capaz de resolver com alguma ajuda, de forma a que as tarefas e atividades possuam que propõe ao aluno um nível ótimo e ajustado de dificuldade.

O terceiro dilema pedagógico prende-se com as questões organizacionais capazes de responder, de forma eficaz, à diferenciação. De facto, o professor único (que está quase todo o tempo sozinho na sala de aula, sem o auxílio de outros colegas) e o currículo do 1.º CEB demasiado extenso dificultam bastante a prestação de uma ajuda efetiva e de qualidade a alguns alunos com mais dificuldades de aprendizagem, nomeadamente, aqueles que dependem da presença de um adulto junto deles para realizarem as tarefas. Este aspeto coloca o professor numa situação dilemática: prestar apoio aos alunos com dificuldades ou retomar a aula com os restantes.

Percebi que, face à falta de recursos humanos e à excessiva extensão dos programas curriculares, se jogam problemas de equidade na interação pedagógica, que colocam o docente entre o dever ético da inclusão ou a sua sobrevivência profissional, num quadro de representações da escola e das suas funções por parte dos encarregados de educação demasiado competitivo e centrado quase exclusivamente nos produtos da aprendizagem.

Estabelecendo uma síntese profissional dos aspetos pedagógicos associados à diferenciação em sala de aula, numa perspetiva de motivação e valorização do aluno e das seus sucessos, adoto a perspetiva de Tomlinson & McTighe (2010) que enfatizam

como postura de diferenciação do professor o seguinte: procurar ocasiões para conhecer melhor os seus alunos; integrar períodos de ensino a pequenos grupos nas rotinas de aula diárias ou semanais; aprender a ensinar procurando o sucesso; proporcionar diferentes formas de aprender e de avaliar as aprendizagens; fazer regularmente avaliações informais para verificar a compreensão do aluno; diversificar as formas de ensinar; apelar às estratégias de leitura; permitir aos alunos o trabalho individual e em pares; utilizar escalas de performance claras que visem a qualidade; cultivar o gosto pela diversidade.

O dossiê de estágio de 1.º CEB, refletindo uma lógica de formação espiralada, que inclui três momentos interativos — planificação — intervenção — reflexão, deveria conter duas experiências-chave, desenvolvidas a partir das necessidades educacionais da turma de estágio e devidamente fundamentadas, implementadas no estágio e refletidas. A escolha das situações educativas e as planificações que visaram dar-lhe resposta foram propostas por mim e são concordantes com alguns aspetos que considero importantes no ensino do 1.º CEB: literatura para a infância (além dos textos do manual); e expressões (nomeadamente a expressão artística). De facto, ao implementar estas experiências-chave pude refletir acerca da importância destes dois aspetos, já que, muitas vezes, não há tanto tempo disponível para abordar este tipo de atividades na sala de aula, tal como seria desejável. Neste contexto, estas também foram experiências significativas para mim.

Segunda experiência significativa: Dia Mundial da Árvore

A segunda experiência foi enquadrada no Dia Mundial da Árvore (21 de março) e com o início da Primavera. Esta foi uma atividade de Gramática, interligada ao Estudo do Meio, cujo ponto de partida foi a leitura do livro “A Árvore Generosa” (de Shel Silverstein), recomendado pelo Plano Nacional de Leitura para o 3.º ano. Amaral (2014) defende que os alunos, ao contactarem precocemente com obras de literatura para a infância, criam um vínculo com um “imaginário coletivo que serve de cimento a uma comunidade cultural e linguística”, pois é partindo dos “textos lidos durante a infância que criamos algumas noções centrais para o entendimento do mundo e que mais tarde partimos à descoberta de nós próprios” (Amaral, 2014, p. 9). Destaca-se,

pois, a importância da literatura para a infância e do contacto regular com textos, para que, mais tarde, os alunos possam interpretar criticamente e com sentido estético a realidade que as rodeia (Amaral, 2014).

Esta atividade foi planeada perante as dificuldades detetadas na turma na classificação de palavras (considerando apenas as classes lecionadas até à data da sua implementação). Esta atividade tinha também o intuito de levar para a sala de aula uma obra de literatura para a infância e textos que vão além dos do manual. Depois das atividades de pré-leitura (análise dos elementos do livro e propor hipóteses sobre a ação da história), foi lida a obra. Seguidamente, foram feitas as comparações entre as hipóteses levantadas pelos alunos e o que realmente aconteceu na história. Neste diálogo com os alunos, foi analisada a relação entre o Ser Humano e a Natureza, referidos alguns cuidados a ter com a Natureza e analisada a duração da narrativa. Posteriormente, iniciou-se a atividade com a afixação das diferentes “árvores” no quadro: “árvore dos nomes”; “árvore dos verbos”; “árvore dos determinantes”; “árvore dos pronomes”; “árvore dos adjetivos”. Explicou-se aos alunos que havia um conjunto de cartões e cada cartão tinha uma palavra retirada da obra. No verso do cartão, estavam descritas pequenas tarefas relacionadas com a palavra do cartão (por exemplo: indicar a conjugação do verbo ou formação de novas palavras, adicionando um prefixo ou um sufixo, entre outras). O objetivo era retirar um cartão, realizar as breves tarefas e, por fim, colocar o cartão na árvore correspondente, consoante a classificação da palavra. Esta atividade era feita em equipas, de modo a que os alunos pudessem trabalhar cooperativamente. Os alunos, por fim, descobriram que havia uma árvore em falta: a “árvore dos advérbios” (para afixar as palavras “sim” e “não”), que foi desenhada no quadro e na folha de registos (cada aluno tinha uma folha de registos para acompanhar a atividade). Através desta atividade, foi ainda possível calcular há quantos anos a história foi escrita (1964) e ainda sistematizar os constituintes das árvores.

Considero que esta atividade foi muito bem enquadrada no momento em que foi implementada e verificou-se que os alunos se mostraram muito interessados na leitura da obra e aprenderam de forma lúdica. De facto, permitiu-me ter a oportunidade de transmitir aos alunos o gosto pela leitura. O debate foi feito com base em questões,

partindo das intervenções dos alunos, pelo que foi muito enriquecedor. Esta atividade poderia ter continuidade com outras atividades de outras áreas, como a construção de cartazes para a consciencialização da proteção da Natureza ou ainda elaboração de ninhos para as árvores.

Terceira experiência significativa: Expressão Físico- Motora

No âmbito das expressões, foi planificada uma aula de Expressão Físico-Motora, mais concretamente do bloco das Atividades Rítmicas Expressivas (Ministério da Educação, s.d.), com base nos gostos musicais dos alunos da turma, e que associou o Português e o Estudo do Meio. Esta atividade foi implementada porque, durante o estágio, foram poucos os momentos em que foi possível planificar uma aula de Expressão Físico-Motora. Assim, depois de constatar o gosto dos alunos por uma determinada canção infantil relacionada com as profissões, planifiquei e desenvolvi esta atividade. Os seus objetivos foram: desenvolver capacidades físicas e de bem-estar, apelando a um estilo de vida saudável em que a prática de atividade física esteja presente; desenvolver a perceção sensorial e cognitiva; desenvolver o sentido estético, o espírito crítico e o pensamento criativo; melhorar os processo de expressão e comunicação. Esta atividade relaciona o Português e o Estudo do Meio à Expressão Musical e Expressão Físico-Motora, partindo dos gostos e interesses dos alunos.

Esta atividade iniciou-se com um breve diálogo com os alunos sobre a dança (o que é, qual a sua importância, quais os estilos que conheciam) e sobre os estereótipos normalmente associados a esta arte. Iniciou-se, seguidamente, o aquecimento, movimentando diferentes partes do corpo. De seguida, apresentou-se a canção que ia ser coreografada (cada aluno tinha uma folha com a letra). Foi analisado a letra da canção (princípios de cortesia) e foi cantada a canção várias vezes (ainda que os alunos já a conhecessem). Seguidamente, foram, progressivamente, propostos os movimentos (um para cada verso), que os alunos imitavam. No final, juntou-se a canção aos movimentos, numa performance. A terceira parte da aula consistiu num arrefecimento e retorno à calma, com movimentos suaves e lentos. No final, foi feita uma síntese e reflexão das atividades.

Esta atividade foi possível devido ao conhecimento da turma, pois foi atribuído um lugar específico na sala a cada aluno e, de facto, não houve contratempos durante a atividade. O resultado foi muito bom, porque os alunos gostaram e aderiram à atividade, podendo não só dançar como também fruir da beleza do estético. O empenho da turma foi, no geral, muito bom e muitos alunos disseram que gostavam de ter “mais tardes assim”. Considero, de facto, de extrema importância que, no 1.º CEB, não se descurem as expressões (Alonso, 2002), nomeadamente a educação artística³. Nesta perspetiva, Caldas e Vasques (2014) consideram que a educação artística permite ao aluno “a sua descoberta como pessoa”, já que é uma oportunidade de escolhas para si, desencadeando uma “inesgotável fonte de afirmação da diferença, da diversidade e consequentemente da liberdade” (Caldas & Vasques, 2014, p. 18). Desta forma, e uma vez que ao longo do 1.º CEB os alunos estão a crescer e a conhecer-se a si e aos outros, considero que, além de motivador, é importante que se desenvolvam atividades deste âmbito.

As experiências-chave e outras atividades que foram sendo implementadas, ao longo do ano letivo, pelos professores estagiários e pela professora cooperante, fizeram-me refletir acerca da importância e das potencialidades dos projetos interdisciplinares e com uma vertente de articulação com a comunidade, nomeadamente a família. Mesmo que não sejam de grande dimensão ou demasiado ambiciosos, podem ser implementados pequenos projetos que possibilitam abordar tópicos de diversas áreas do conhecimento e que, inquestionavelmente, motivam os alunos. Nestes projetos, podem ser incluídos conteúdos curriculares, mas podem também estender-se a outros conhecimentos gerais, já que, no 1.º CEB, dada a sua particularidade da monodocência, é possível abordar temas que vão além do currículo e sobre os quais os alunos tenham interesse. No âmbito destes projetos, é possível também envolver as famílias e a comunidade, um aspeto que considero importante e que pude experienciar ao longo do estágio.

Por fim, considero que este estágio foi muito motivador para mim, porque sinto que aprendi muito e consegui evoluir profissionalmente com todos os pequenos projetos e

³ A Educação Artística envolve a expressão dramática, musical, plástica e dança (Caldas & Vasques, 2014; Educação Estética e Artística, s.d.).

atividades que foram sendo desenvolvidos, dentro e fora da sala de aula (incluindo atividades no exterior ou, até, visitas de estudo), permitindo o exercício profissional e o desenvolvimento de competências não só ao nível da dimensão do ensino-aprendizagem, mas também entre outras, particularmente da dimensão da relação da escola com a comunidade, conforme se prescreve no perfil de desempenho comum aos educadores de infância e aos professores dos ensinos básico e secundário (Decreto-Lei n.º 240/2001, de 30 de agosto) que regula o quadro legislativo no âmbito da formação de professores.

A articulação entre todos (professora cooperante, professores estagiários, professora coadjuvante, professor supervisor, alunos e restantes elementos da escola), juntamente com as reflexões individuais e em conjunto, julgo que foram aspetos fundamentais para que pudesse crescer tanto a nível profissional como pessoal, já que me senti apoiada, segura e confiante.

3.2. 2.º Ciclo do Ensino Básico

A experiência como PE no 2.º CEB foi diferente da do 1.º CEB, embora também me tenha permitido evoluir profissionalmente.

A turma de Ciências Naturais (6.º ano) era desafiadora, porque se mostrava interessada e colocava muitas questões. Este aspeto permitiu-me aprender a gerir melhor uma aula, desenvolvendo, simultaneamente, o seu conhecimento científico, pois requeria uma preparação cuidada. No que diz respeito à Matemática (5.º ano), a turma era bastante heterogénea, aspeto que se traduziu num desafio para mim. Por um lado, havia um conjunto de alunos que permitia que as aulas fossem dinâmicas, respondendo sempre ao que era solicitado; por outro, havia um grupo de alunos que requeria um acompanhamento individualizado constante. Este aspeto permitiu-me desenvolver competências ao nível da gestão das aprendizagens, encontrando estratégias que tentassem respeitar os diferentes ritmos dos alunos da turma.

Para mim, foi importante ter contactado com alunos tanto do 5.º como do 6.º ano, já que, ainda que a idade cronológica seja bastante próxima, as relações entre pares, as atitudes e os interesses são diferentes. Considero que a relação que se estabeleceu com ambas as turmas de estágio foi muito positiva. Os alunos apresentavam-se motivados

para as aulas das professoras estagiárias, o que facilitava a planificação e consequente implementação das atividades.

Considero também importante o facto de ter esclarecido, diária e individualmente, as dúvidas dos alunos, porque me permitiu perceber as dificuldades mais evidentes nos diferentes conteúdos de ambas as disciplinas, mas também identificar algumas dificuldades transversais (como é o caso da interpretação das questões ou o debilitado vocabulário). Indubitavelmente, estas dificuldades transversais influenciam as aprendizagens de todas as disciplinas.

As planificações elaboradas foram apresentadas atempadamente, de acordo com o conhecimento da(s) turma(s), e foram feitos os ajustes sugeridos pelos professores cooperantes e pelas docentes da ESEC. Todas as planificações continham um tópico de “fundamentação científica”, que foi fundamental para o aprofundamento do conhecimento especializado do conteúdo, bem como do conhecimento do horizonte do conteúdo (Ball, Thames & Phelps, 2008).

De forma geral, as estratégias utilizadas nas aulas de 2.º CEB foram idênticas às dos professores cooperantes, ainda que adaptadas por mim. Não obstante, sempre que possível, foram implementadas atividades diversificadas, que implicavam o uso de recursos de diversas índoles e que motivaram os alunos. Estes recursos, em especial, os que por mim foram construídos, revelaram-se apelativos e bastante direcionados de modo a atingir os objetivos pretendidos, permitindo gerir melhor o processo de ensino e de aprendizagem dos alunos.

Ao longo deste estágio, foi possível refletir acerca da importância, numa primeira instância da aprendizagem, das analogias com o quotidiano dos alunos, particularmente nas aulas de Ciências Naturais. É, no entanto, importante estar ciente de que se deve encontrar um meio-termo para estas analogias, de forma a que os alunos não criem conceções erradas.

Nas aulas de Matemática, pude refletir acerca das tarefas a selecionar para as aulas: praticar novos conteúdos através de problemas ou de exercícios? Na minha ótica, os problemas e/ou tarefas de exploração (Ponte, 2003) podem ser um bom mote para

iniciar um novo tema, principalmente se forem significativos para os alunos, permitindo que estejam mais motivadas, aprendam mais facilmente e, assim, possam gostar de aprender matemática, tal como aconteceu em alguns conteúdos lecionados.

Neste estágio, foi possível perceber que alguns alunos deveriam dispor de mais tempo em sala de aula para pôr em prática alguns conhecimentos ou conceitos explorados. Nas aulas de Ciências da Natureza, poderia haver maior disponibilidade de tempo e de recursos para implementar atividades práticas (laboratoriais e/ou experimentais), dada a sua importância (Martins et al., 2007). Nas aulas de Matemática, poderia dedicar-se mais tempo à resolução de tarefas (como, por exemplo, a construção de figuras usando material de desenho). Considerando ainda que as aulas do 2.º CEB são, de forma geral, mais expositivas do que no 1.º CEB, o trabalho de grupo e/ou as atividades interdisciplinares tendem a ser raros. Os alunos deste ciclo de ensino estão, ainda, segundo Piaget, no Estádio das Operações Concretas (Piaget & Inhelder, 1973), pelo que, a implementação de atividades deste tipo é fundamental para a compreensão significativa dos conteúdos, que poderia ser facilitada se os currículos não fossem tão extensos.

De facto, a organização temporal das aulas e os currículos demasiado extensos para crianças de 9 a 12 anos foram um dos aspetos que me fizeram refletir acerca da estruturação do ensino do 2.º CEB, em comparação com o 1.º CEB. Assim, creio que a transição entre o 1.º e o 2.º CEB deve ser feita de forma subtil, pelos professores de ambos os níveis de ensino.

Ao longo do ano letivo, fui dando significado ao papel de professora do 2.º CEB, sentindo que evolui em diversos aspetos, até que, no final, me sentia segura e com a certeza de que o crescimento profissional não estagnou, mas que se irá prolongar ao longo da carreira docente.

Por fim, considero que este estágio foi fundamental para o meu crescimento pessoal e profissional, especialmente porque me senti acompanhada pelas professoras da Escola Superior de Educação. O *feedback* fornecido e os desafios colocados por todos/as os/as intervenientes (professores e professoras e, até, o par pedagógico) foram fundamentais para que pudesse crescer profissionalmente e conseguisse, no final, atingir o meu

principal objetivo enquanto professora estagiária: ser, efetivamente (e com qualidade), a professora da(s) turma(s).

3.3. Considerações Finais

Segundo Kagan (1992, como referido em Abrantes, 2005, p.84), existem três fases no desenvolvimento e formação de um professor estagiário. A primeira fase corresponde ao *Conhecimento memorizado*, durante a qual o estagiário “é capaz de falar sobre uma estratégia de ensino, mas não é capaz de a realizar ou realiza-a de modo muito incompleto”. A fase seguinte diz respeito ao *Conhecimento de rotina*, na qual o formando é capaz de falar sobre a estratégia e sobre os princípios que lhe estão subjacentes, mas aplica-a com muito esforço. A última fase é descrita como *Conhecimento profundo*, na qual o formando conversa criticamente sobre a estratégia utilizada, mobiliza-a em vários contextos e o modo como os alunos aprendem passa a ser uma preocupação central (Kagan, 1992, como referido em Abrantes, 2005, p.84).

A evolução profissional ao longo dos estágios foi evidente. De facto, ao iniciar o estágio no 1.º CEB, encontrava-me, naturalmente, na fase de *Conhecimento memorizado*, na qual a implementação rigorosa da planificação era, de alguma forma, para mim, algo extremamente importante. Cumprir o planificado era, na minha perspetiva, a realização plena da aula. Com o decorrer do estágio, não só a elaboração da própria planificação foi sendo melhor adaptada à turma, como também me fui apercebendo de que, muitas vezes, as atividades não podem ser concluídas no mesmo dia, dadas as dificuldades ou questões dos alunos. Na verdade, a planificação é flexível e, na prática, pode ser melhorada, alterando estratégias ou conteúdos, considerando o contexto da turma (Zabalza, 1992) e de acordo com a gestão do tempo e das aprendizagens. No final do estágio de 1.º CEB, considero que me encontrava na fase de *Conhecimento profundo* (Kagan, 1992, como referido em Abrantes, 2005), já que participava e utilizava diversas estratégias em diversos contextos de ensino e de aprendizagem (dentro e fora da sala de aula; dentro e fora da escola).

Ao iniciar o estágio em 2.º CEB, naturalmente, que já possuía um ano letivo de experiência como PE. Não obstante, dadas as diferenças organizacionais da escola e do ciclo de ensino, senti que necessitava de construir, de novo, o meu crescimento

enquanto professora de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB. A imprevisibilidade do contexto e a adaptação a diferentes conteúdos, disciplinas e turmas, permitiram-me entender o modo como os alunos aprendem, as suas principais dificuldades e na necessidade do professor adaptar as suas abordagens, perante diferentes turmas e diferentes conteúdos.

Além disso, ao ter contactado com os dois primeiros ciclos do ensino básico, pude compreender de que forma estão relacionados e de que forma se influenciam, destacando a importância da Educação Básica de excelência, nomeadamente dos dois primeiros ciclos de ensino, para a formação de um sujeito.

As reflexões que foram feitas ao longo dos dois estágios foram fundamentais para a autocrítica, permitindo que me olhasse de fora para dentro. O facto de ter planeado e implementado uma investigação a partir das dificuldades que os alunos tinham, neste caso, relacionada com a operação divisão, foi também fundamental, não só para aprofundar conhecimentos científicos na área da Matemática, mas também me permitiu aprofundar a minha capacidade de refletir enquanto professor estagiária. Além disso, ao longo dos estágios do Mestrado, fui compreendendo melhor não só os alunos e as suas dificuldades, como também a relação entre os conteúdos curriculares e o modo como os alunos aprendem, tendo em vista a sequencialidade do currículo do ensino básico. Deste modo, o modelo de Ball, Thames e Phelps (2008) e o constante debate de ideias com professores orientadores e supervisores da ESEC, professores cooperantes e colegas foram dois aspetos fundamentais para conseguir orientar melhor a prática pedagógica, tanto na planificação, como na seleção das estratégias pedagógicas ou ainda na respetiva reflexão, tendo em consideração também o conhecimento acerca dos alunos. Na minha perspetiva, estes dois aspetos foram essenciais e permitiram-me criar as ferramentas necessárias para continuar a desenvolver o meu conhecimento profissional.

De facto, o finalizar do estágio e do Mestrado não é, para mim, um cessar desta reflexão, mas é antes o início de um longo percurso de descobertas pessoais e profissionais. Como referem Lopes e Silva (2010, p. 107), depois de passar pela formação inicial, o professor passa a ser um “participante ativo de um processo

permanente de construção e reconstrução de saberes e prática, com reflexos nos contextos educativos e na qualidade de educação”. Só assim um professor pode conduzir à mudança e inovação, assumindo um “papel ativo na educação” (Alarcão, 1996, p. 176; Lopes & Silva, 2010).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, M. (2005). *O desenvolvimento da reflexividade no contexto do discurso supervisoivo*. Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.
- Aharoni, R. (2008). *Aritmética para pais* (2.ª ed.). Coleção *Temas de Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Alarcão, I. (1996). Ser Professor Reflexivo. In Alarcão, I., *Formação Reflexiva de Professores Estratégias de Supervisão* (p. 171-189). Porto: Porto Editora.
- Alarcão I. (2004). *Professores Reflexivos em uma escola reflexiva*. São Paulo: Cortez Editora.
- Alarcão, I. & Roldão, M. C. (2008). *Supervisão: Um contexto de desenvolvimento profissional dos professores*. Coleção *Educação e Formação*. Mangualde: Edições Pedagogo.
- Alonso, L. (2002). Para uma teoria compreensiva sobre integração curricular, O contributo do Projecto “PROCUR”. *Investigação e Práticas*, 5, 62-88.
- Amaral, F. P. (2014). Formar Melhores Leitores. In Barros, L. (coord.), *A Leitura como Projeto, Percursos de Leitura Literária do Jardim de Infância o 3.º CEB* (p. 9-10). Palmela: Tropelias & Companhia.
- Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Edits.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 305-336). Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barbosa, J. (2001). Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. *Anais de 24.ª reunião de Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Rio de Janeiro: ANPED.
- Barbosa, J. (2003). Modelagem matemática na sala de aula. *Perspectiva*, 27(98), 65-74.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.
- Bicknell, B., Young-Loveridge, J. & Simpson, J. (2017). Using quotitive division problems to promote place-value understanding. *APMC*, 22(2), 28-32.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). *Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática: Cadernos de apoio 1.º Ciclo*. Lisboa: MEC.

- Blum, W. & Ferri, R. (2009). Mathematical Modeling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68.
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação DGIDC.
- Bodgan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. In Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (Coords.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.
- Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J.M (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, 75, 11-15.
- Brou, H., Rato, V., & Martins, F. M. (2014). A modelação matemática como prática de sala de aula no ensino da subtração. In Pinto, H. G., Dias, M. I., & Munõz, R. G. (Orgs.) *Atas da Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 73-79). Leiria, Portugal: IPCE.
- Caldas, A. P., & Vasques, E. (2014). *Educação Artística para um currículo de excelência*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Caldeira, A. (2009). Modelagem Matemática: um outro olhar. *Alexandria Revista de Educação e Ciência e Tecnologia*, 2(2), 33-54.
- Carvalho, A., & Gonçalves, H. (2003). Multiplicação e divisão: conceitos em construção... *Educação e Matemática*, pp. 23-25.
- Castro, J. P. & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados*. Ministério da Educação: Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Clements, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6.^a ed). Nova Iorque: Routledge.

- D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical modeling: Cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 89-98.
- Decreto-Lei n.º 79/2014, de 14 de maio. *Diário da República n.º 92/2014, Série I*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Decreto-Lei n.º 240/2001, de 30 de agosto. *Diário da República n.º 201/2001, Série I-A*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Duque, I., & Martins, F. (2018). Experiência prática e reflexiva com futuros professores para desenvolvimento da literacia estatística. In Pires, M. V., Mesquita, C., Lopes, R. P., Santos, G., Cardoso, M., Sousa, J. Silva, E., Teixeira, C. (Eds.), *II Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE): Livro de atas* (pp. 303-313). Bragança: Escola Superior de Educação de Bragança.
- Educação Estética e Artística (s.d.). *Programa de Educação Estética e Artística*. Acedido em: <http://educacaoartistica.dge.mec.pt/peea.html>.
- Fernandes, D., & Martins, F. (2014). Reflexão acerca do ensino do algoritmo da divisão inteira: proposta didática. *Exedra, Educação e Formação*, 9, 173-197.
- Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95.
- Ferri, R. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 110, 19-25.
- Ferri, R., & Blum, W. (2013). Barriers and motivations of primary teachers for implementing modelling. In Ubuz, B., Haser, C., & Mariotti, M. A. (Ed.) *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 6-10). Antalya, Turkey: Middle East Technical University and ERME.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.
- Flores, M. A., Vieira, F., & Ferreira, F. I. (2014). Formação inicial de professores em Portugal: problemas, desafios e o lugar da prática nos mestrados em ensino pós-Bolonha. In M. C. Borges & O. F. Aquino (Orgs.), *A formação inicial de professores: olhares e perspectivas nacionais e internacionais* (pp. 61-96). Uberlândia: EDUFU.
- Fonseca, J. (2013). A Investigação-Ação Como Abordagem ao Currículo: Questões Metodológicas e Éticas. In Sousa, F., Alonso, L., & Roldão, M. C. (orgs.), *Investigação para um Currículo Relevante* (pp. 73-86). Coimbra: Almedina.

- Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Fuson, K. (2003). Toward Computational Fluency in Multidigit Multiplication and Division. *Teaching Children Mathematics*, 9, 300-305.
- Fuson, K., & Briars, D. (1990). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First- and Second-Grade Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 180-206.
- Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about this?. In Santos, L., Canavarro, A. & Brocardo, J. (Eds.), *Educação matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-110). Lisboa: APM.
- Grenier, N. (2013). Les pratiques de différenciation d'enseignants du primaire en classe multiethnique au Québec. Mémoire professionnel. Sherbrooke: Université de Sherbrooke.
- Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Jorro, A. (2005). Reflexivité et autoévaluation dans les pratiques enseignantes. *Revue mesure et évaluation en éducation*, vol 27, n.º 2, pp. 33-47. Provence: Université de Provence.
- Jurkiewicz, S., & Friedman, C. (2010). Modelagem matemática na escola e na formação do professor – uma abordagem abrangente. *Educação e Matemática*, 106, 43-47.
- Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In Morrow, L. J., & Kenney, M. J. (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 130-140). Reston, VA: NCTM.
- Kansanen, P. (2014). Teaching as a Master's Level Profession in Finland: Theoretical Reflections and Practical Solutions. In O. McNamara, J. Murray, & M. Jones (Eds.), *219 Workplace Learning in Teacher Education. International Practice and Policy* (pp. 279-292). Dordrecht: Springer.
- Kim, R., & Albert, L. R. (2014). The History of Base-Ten-Blocks: Why and Who Made Base-Ten-Blocks?. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 5(9), 356-365.
- Lamberg, T., & Wiest, L. R. (2012). Conceptualizing division with remainders. *Teaching Children Mathematics*, 427-433.

- Larbi, E., & Mavis, O. (2016). The Use of Manipulatives in Mathematics Education. *Journal of Education and Practice*, 7(36), 53-61.
- Lautert, S. L., & Spinillo, A. G. (2002). As Relações Entre o Desempenho em Problemas de Divisão e as Concepções de Crianças Sobre a Divisão. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 18(3), 237-246.
- Liggett, R. S. (2017). The Impact os Manipulatives on the Math Scores of Grade 2 Students. *Brock Educational Journal*, 26(2), 87-101.
- Loong, E. Y. (2014). Fostering mathematical understanding through physical and virtual manipulatives. *Association of Teachers of Mathematics (ATM)*, 70(4), 3-11.
- Lopes, J., & Silva, H. S. (2010). Desenvolvimento profissional do professor. In J. Lopes, & H. S. Silva, *O professor faz a diferença* (pp. 105-110). Lisboa: Lidel.
- Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Coleção *Temas de Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Martin, J. (2009). The Goal of Long Division. *Teaching Children Mathematics*, 15(8), 482-287.
- Martins, F. (coord.), Duque, I., Pinho, L., Coelho, A., Vale, V. (2017). Um olhar reflexivo. In Martins, F. (coord.), *Educação Pré-Escolar e Literacia Estatística: A criança como investigadora* (pp. 107-133). Viseu: Psicosoma.
- Martins, F., Vieira, M., Reis, D., & Ribeiro, C. M. (2013). Ensinar através da modelação matemática: uma primeira discussão baseada numa experiência de ensino no 4.º ano de escolaridade. *Exedra, Educação e Formação*, 8, 166-179.
- Martins, I., Veiga, M. L., Teixeira, F., Tenreiro-Vieira, C., Vieira, R. M., Rodrigues, A. V., Couceiro, F. (2007). *Educação em Ciências e Ensino Experimental*. Coleção *Ensino Experimental das Ciências*. Lisboa: Ministério da Educação DGIDC.
- Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- McCormick, K. K., & Essex, N. K. (2017). Capturing Children's Multiplication and Division Stories. *Teaching Children Mathematics*, 24(1), 41-47.
- McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *The Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8, 44.
- Mendes, F. (2013). A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos. *Da Investigação às Práticas*, 3(2), 5-30.

- Ministério da Educação (s.d.). *Organização Curricular e Programas*. Acedido em: http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Expressoes_Artisticas_e_Fisico-Motoras/eb_eafm_programa_1c.pdf
- Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC.
- Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2017). Transformações de representações visuais de múltiplos e divisores de um número. *Comunicações Piracicaba*, 24(1), 55-68.
- Natale, C., & Fosnot, C. T. (2007). *The Teachers' Lounge — Place Value and Division*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).
- Oliveira, C., & Oliveira, H. (2012). Modelação Matemática no Ensino Profissional: Construção e Exploração de uma tarefa. *Investigação em Educação Matemática 2012 - Práticas de ensino da Matemática 1*, 105-119.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2012). Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório: Da prática à representação de uma prática. *Investigação em Educação Matemática*, 557-570.
- Parker, T. H., & Baldrige, S. J. (2004). *Elementary Mathematics for Teachers*. Michigan: Sefton-Ash Publishing.
- Perrenoud, P. (1993). *Práticas Pedagógicas, Profissão Docente e Formação. Perspectivas Sociológicas*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, Instituto de Inovação Educacional.
- Perrenoud, P. (2002). *A Prática Reflexiva no Ofício de Professor Profissionalização e Razão Pedagógica*. Porto Alegre: Artmed Editora.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1973). As operações “concretas” do pensamento e as relações interindividuais. In Piaget, J., & Inhelder, B. (Coords.), *A Psicologia da Criança* (pp. 81-110). São Paulo: Difusão Europeia do Livro.
- Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In *Actas do ProfMat 2003* (pp. 25–39). Santarém: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática no 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Pratas, R., Rato, V., & Martins, F. (2016). Modelação Matemática como prática de sala de aula: o uso de manipulativos virtuais no desenvolvimento dos sentidos

- da adição. In Canavarro, A., Brocardo, J. Santos, L. (Eds.), *Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática*. 1, 35-48. Évora: SPIEM.
- Pratt, S., S., Lupton, T. M., Richardson, K. (2015). Division quilts: a measurement model. *Teaching Children Mathematics*, 22(2), 103-109.
- Rato, V. (2016). Supervisão: refletir as práticas e promover a qualidade da educação. Trabalho para obtenção do grau de especialista na área da formação de professores/formadores e ciências da educação. Escola Superior de Educação de Coimbra. Coimbra, Portugal.
- Sá- Chaves, I. (2002). *A construção do conhecimento pela análise reflexiva da práxis*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Santos, L. (2015). Representações Matemáticas. In Pires, M. V., Ferriera, R. T., Domingos, A., Martins, C., Martinho, H., Vale, I., Amado, N., Carreira, S., Pimentel, T., & Santos, L. (Eds.), *Atas do EIEM 2015 Investigação em Educação Matemática*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 3-5.
- Schön, D. (1987). *Educating the Reflective Practitioner*. San Francisco: Jossey Bass.
- Silva, R. (2018). *Modelação Matemática Como Ambiente de Aprendizagem: O Uso De Manipulativos Virtuais No Desenvolvimento Dos Sentidos Da Adição E Da Subtração*. Relatório Final do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo de Ensino Básico, Escola Superior de Educação de Coimbra, Instituto Politécnico de Coimbra, Coimbra, Portugal.
- Sousa, M. J., & Baptista, C. S. (2011). *Como fazer investigação, dissertações, teses e relatórios* (5.ª ed.). Lisboa: Pactor.
- Stender, P. (2012). Facilitating complex modelling activities - the role of the teacher. In Cho, S. J. (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, Intellectual and attitudinal challenges*. 3423-3430. Seoul: ICME.
- Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting Mathematics Manipulative Materials. *Australian Association of Mathematics Teachers*, 15(2), 13-19.
- Tomlinson, C. A., & McTighe, J. (2010). Intégrer la différenciation pédagogique et la planification à rebours. Montréal: Chenelière Éducation.
- Uribe-Flórez, L. J., & Wilkins, J. L. (2017). Manipulative Use and Elementary School Students' Mathematics Learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 1541-1557.

- Veiga, M. L. (1991). Formar para Investigar e Investigar para Formar. In *Actas do 1.º Congresso Nacional de Formação Contínua de Professores* (pp. 207-215). Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Vieira, F. (1993). *Supervisão - Uma prática reflexiva de formação de professores*. Porto: Asa.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological process*. Cambridge MA: Harvard University Press.
- Zabalza, M. A. (1992). A escola como cenário de operações didáticas. O professor como planificador. In Zabalza, M. A. (Org.), *Planificação e Desenvolvimento Curricular na Escola* (pp. 45-56). Rio Tinto: Edições ASA.
- Zeichner, K. M. (1993). *A formação reflexiva de professores: Ideias e Práticas*. Lisboa: Educa.

APÊNDICES

Apêndice 1: Tarefas da Fase Inicial

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

1. A professora do 3.º A fez 56 *cromos* de bom comportamento e quer partilhá-los com 7 alunos, de forma a que cada um fique com o mesmo número de *cromos*. Com quantos *cromos* ficará cada aluno? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.: _____

2. Os alunos do 3.º A da EB1 (...) vão participar numa peça de Natal, em que cada personagem é representada por 5 alunos. Se a turma tiver 20 alunos, quantos grupos se irão formar? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.: _____

3. Por cada semana, a turma do 3.º A tem direito a 155 pacotes de leite, que são transportados em caixas onde cabem 8 pacotes de leite. Quantas caixas são necessárias para transportar os pacotes de leite? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.: _____

4. O 3.º A vai arrumar os 247 lápis de cor em 7 caixas, de modo a que fique o mesmo número de lápis em cada caixa. Quantos lápis ficam em cada caixa? Quantos lápis de cor sobram? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.: _____

Apêndice 2: Níveis dos alunos na Fase Inicial

Aluno	Sentido Partilha Equitativa			Sentido Medida			Nível da Fase Inicial	
	Tarefa 1	Tarefa 4	Nível	Tarefa 2	Tarefa 3	Nível		
A	1	1	1	2	2	2	1,5	2
B	1	1	1	3	1	2	1	1
C	3	2	2,5	2	3	2,5	2,5	3
D	3	1	2	3	1	2	2	2
Globais	2	1	1,5	2,5	1,5	2	1,75	2

Apêndice 3: Tarefas da Sessão 1 da Fase de Intervenção

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** a seguinte questão. Responde, indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

1.O Miguel, um aluno da Escola (...), tem uma coleção de berlindes, com alguns repetidos. O Miguel decidiu que ia distribuir igualmente os berlindes repetidos pelos seus colegas Gabriel, Carlos e Rodrigo. Se o Miguel tiver 15 berlindes repetidos, quantos berlindes vai receber cada um dos colegas do Miguel? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** a seguinte questão. Responde, indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

2.Imagina agora que o Miguel tem 24 berlindes repetidos e que os quer distribuir igualmente pelos mesmos 3 colegas. Nesta situação, quantos berlindes recebe cada um dos 3 colegas? Quantos berlindes sobram? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** a seguinte questão. Responde, indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

3.A Francisca, uma aluna da EB1 (...), fez 125 bolachas e distribuiu-as igualmente por 6 saquinhos para oferecer às suas amigas da escola. Ao distribuir as bolachas pelos saquinhos, reparou que sobravam bolachas. Por isso, decidiu que ia dar as bolachas que sobravam à professora. Quantas bolachas recebeu cada uma das 6 amigas da Francisca? Quantas bolachas recebeu a professora? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Apêndice 4: Tarefas da Sessão 2 da Fase de Intervenção

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

1. A Maria quer colar o mesmo número de autocolantes em 3 páginas do seu caderno. Se a Maria tiver, no total, 12 autocolantes, quantos autocolantes ela terá de colar em cada uma das páginas do caderno? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

2. Os alunos do 3.º A quiseram distribuir as prendas do dia do pai por 4 caixas, de forma a que ficasse o mesmo número de prendas em cada caixa. Se, no total, houvesse 24 prendas, quantas prendas ficariam em cada caixa? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

3. Os alunos do 3.º A construíram corações partindo de tiras de papel para a decoração do dia dos namorados. Se no total houvesse 93 corações que deveriam ser distribuídos igualmente por 5 cordões, quantos corações ficariam em cada cordão? Quantos corações sobram? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Apêndice 5: Tarefas da Sessão 3 da Fase de Intervenção

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

1. Um aluno do 3.º A quer colocar 4 lápis de cor em cada um dos seus estojos. Se esse aluno tiver 16 lápis de cor, por quantos estojos vai o aluno distribuir os lápis? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

2. A turma do 3.º A vai colocar 5 pedaços de giz em caixas diferentes. Se, no total, existirem 35 pedaços de giz, quantas caixas serão necessárias? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Apêndice 6: Tarefas da Sessão 4 da Fase de Intervenção

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

1.A Ana, uma aluna da Escola (...) fez anos em fevereiro e ofereceu a alguns dos seus colegas um saquinho com 6 guloseimas diversas. Sabendo que, no total, a Ana tinha 75 guloseimas para oferecer, a quantos colegas ofereceu ela um saquinho? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

2.Na cantina da escola (...) as mesas permitem que se sentem 5 alunos de cada vez. Sabendo que há 74 alunos para almoçarem ao mesmo tempo, quantas mesas serão necessárias para sentar todos os alunos? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Apêndice 7: Tarefas da Sessão 5 da Fase de Intervenção

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

1.Os alunos do 3.º A construíram uma árvore da Primavera com 5 ramos. Se existissem 68 flores para dispor de igual forma em cada um dos ramos, quantas flores ficariam em cada ramo? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

2.Os alunos do 3.º A construíram cravos para comemorar a revolução do 25 de abril de 1974 e a professora quis fazer ramos de 4 cravos com as flores construídas pelos alunos. Se, no total, foram construídos 52 cravos pelos alunos, quantos ramos conseguiu a professora formar? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

3. Nas férias da Páscoa, os alunos do 3.º A levaram, no total, 43 tarefas de trabalhos de casa. Uma aluna fez 3 tarefas em cada dia de férias. Quantos dias demorou essa aluna a resolver todas as tarefas? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.: _____

Apêndice 8: Tarefas da Sessão 6 da Fase de Intervenção

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

1. Cada um dos 19 alunos do 3.º A fez uma construção do sistema solar. A professora, que queria expor os trabalhos na escola, pretendia colocar 5 trabalhos em várias mesas. Quantas mesas eram necessárias para expor todos os trabalhos? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

2. O 3.º A recolheu muitas tampas durante o ano letivo e guardou-as em garrafas de plástico. Supondo que os alunos querem distribuir de igual forma 98 tampas por 3 garrafas, quantas tampas ficam em cada garrafa? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

3.O 3.º A vai construir flores partindo de garrafas e garrações de plástico. Se os alunos construírem 87 flores e quiserem afixar na escola ramos de 7 flores, quantos ramos de flores vão formar? Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Completa:

..... |

R.: _____

Apêndice 9: Planificação das sessões de intervenção

Sessão 1 — 14/3

Área curricular	Conteúdos	Metas/objetivos	Atividades e Avaliação	Tempo	Recursos e Materiais
Matemática	NO3 Divisão Inteira	Efetuar divisões inteiras. Resolver problemas.	Constituição dos grupos de trabalho (pares) e distribuição do material MAB.	5 min.	Tarefas MAB Material de escrita
			Distribuição da primeira tarefa a realizar.		
			Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta.	7 min.	
			Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo.	10 min.	
			Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções).	5 min.	
			Síntese e feedback.	5 min.	
			Distribuição da segunda tarefa a realizar.	2 min.	
			Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta.	7 min.	
			Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo.	10 min.	
			Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções).	5 min.	
			Síntese e feedback.	5 min.	
			Distribuição da terceira tarefa a realizar.	2 min.	
			Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta.	7 min.	
			Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo.	10 min.	
			Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções).	5 min.	
			Síntese e feedback.	5 min.	

Adaptado de Ferri (2010)

Sessão 2 — 21/3

Área curricular	Conteúdos	Metas/objetivos	Atividades e Avaliação	Tempo	Recursos e Materiais
Matemática	NO3 Divisão Inteira	Efetuar divisões inteiras. Resolver problemas.	Constituição dos grupos de trabalho (pares) e distribuição do material MAB.	5 min	Tarefas
			Distribuição da primeira tarefa a realizar.		
			Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta.	7 min.	MAB
			Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo.		Material de escrita
			Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções).	10 min.	
			Síntese e feedback.	5 min.	
				5 min.	
			Distribuição da segunda tarefa a realizar.	2 min.	
			Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta.	7 min.	
			Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo.		
			Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções).	10 min.	
			Síntese e feedback.	5 min.	
				5 min.	
			Distribuição da terceira tarefa a realizar.	2 min.	
			Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta.	7 min.	
			Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo.	10 min.	
			Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções).	5 min.	
			Síntese e feedback.	5 min.	

Adaptado de Ferri (2010)

Sessão 3 — 29/3

Área curricular	Conteúdos	Metas/objetivos	Atividades e Avaliação	Tempo	Recursos e Materiais
Matemática	NO3 Divisão Inteira	Efetuar divisões inteiras. Resolver problemas.	Constituição dos grupos de trabalho (pares) e distribuição do material MAB. Distribuição da primeira tarefa a realizar. Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta. Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo. Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções). Síntese e feedback. Distribuição da segunda tarefa a realizar. Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta. Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo. Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções). Síntese e feedback.	5 min. 7 min. 10 min. 5 min. 5 min. 2 min. 7 min. 10 min. 5 min. 5 min.	Tarefas MAB Material de escrita

Adaptado de Ferri (2010)

Sessão 4 — 31/3

Área curricular	Conteúdos	Metas/objetivos	Atividades e Avaliação	Tempo	Recursos e Materiais
Matemática	NO3 Divisão Inteira	Efetuar divisões inteiras. Resolver problemas.	Constituição dos grupos de trabalho (pares) e distribuição do material MAB.	5 min	Tarefas
			Distribuição da primeira tarefa a realizar.		MAB
			Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta.	7 min.	Material de escrita
			Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo.	10 min.	
			Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções).	5 min.	
			Síntese e feedback.	5 min.	
			Distribuição da segunda tarefa a realizar.	2 min.	
			Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta.	7 min.	
			Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo.	10 min.	
			Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções).	5 min.	
			Síntese e feedback.	5 min.	

Adaptado de Ferri (2010)

Sessão 5 — 3/5

Área curricular	Conteúdos	Metas/objetivos	Atividades e Avaliação	Tempo	Recursos e Materiais
Matemática	NO3 Divisão Inteira	Efetuar divisões inteiras. Resolver problemas.	Constituição dos grupos de trabalho (pares) e distribuição do material MAB. Distribuição da primeira tarefa a realizar. Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta. Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo. Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções). Síntese e feedback. Distribuição da segunda tarefa a realizar. Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta. Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo. Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções). Síntese e feedback. Distribuição da terceira tarefa a realizar. Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta. Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo. Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções). Síntese e feedback.	5 min. 7 min. 10 min. 5 min. 5 min. 2 min. 7 min. 10 min. 5 min. 5 min. 2 min. 7 min. 10 min. 5 min. 5 min.	Tarefas MAB Material de escrita

Adaptado de Ferri (2010)

Sessão 6 — 23/5

Área curricular	Conteúdos	Metas/objetivos	Atividades e Avaliação	Tempo	Recursos e Materiais
Matemática	NO3 Divisão Inteira	Efetuar divisões inteiras. Resolver problemas.	Constituição dos grupos de trabalho (pares). Distribuição da primeira tarefa a realizar. Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta. Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo. Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções). Síntese e feedback. Distribuição da segunda tarefa a realizar. Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta. Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo. Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções). Síntese e feedback. Distribuição da terceira tarefa a realizar. Professor como mediador: acompanha os diversos grupos, intervindo adequadamente. Os alunos trabalham em pares na resolução da tarefa proposta. Depois de o professor solicitar a atenção de todos, apresentação de resultados de cada grupo. Validação e discussão (reflexão sobre diferentes soluções). Síntese e feedback.	5 min. 7 min. 10 min. 5 min. 5 min. 2 min. 7 min. 10 min. 5 min. 5 min. 2 min. 7 min. 10 min. 5 min. 5 min.	Tarefas Material de escrita

Adaptado de Ferri (2010)

Apêndice 10: Tarefas da Fase Final

Nome: _____ Data: _____

Lê com **atenção** todas as questões. Responde a cada uma delas indicando **todos os cálculos e raciocínios** que efetuares.

1. A escola (...) recebe fruta diariamente para o lanche dos alunos. A fruta é distribuída de igual forma por 4 caixas: uma caixa para cada turma. Se, num certo dia, a escola receber 84 peças de fruta, quantas peças de fruta recebe cada turma?

Completa:

..... |

R.: _____

2. Os alunos do 3.ºA fizeram flores partindo de rolinhos de papel colorido. Um aluno desta turma tinha 43 rolinhos e fez 3 flores, as 3 com o mesmo número de rolinhos. Quantos rolinhos tinha cada flor desse aluno? Quantos rolinhos sobraram?

Completa:

..... |

R.: _____

3. Os alunos do 3.ºA fizeram a recolha de tampas durante o ano letivo, que guardaram em garrafas. Uma só aluna recolheu 67 tampas. Ela quis arrumar as tampas de forma a que ficassem 5 tampas em cada garrafa. De quantas garrafas necessitou? Quantas tampas sobraram?

Completa:

.....	
-------	-------

R.: _____

4. Os alunos da EB1 (...) construíram 81 ninhos artificiais, partindo de pacotes de leite. Foram afixados 7 ninhos em cada árvore. Quantas árvores foram necessárias para afixar **todos** os trabalhos?

Completa:

.....	
-------	-------

R.: _____

Apêndice 11: Níveis dos alunos na Fase Final

Aluno	Sentido Partilha Equitativa			Sentido Medida			Nível da Fase Final	
	Tarefa 1	Tarefa 2	Nível	Tarefa 3	Tarefa 4	Nível		
A	2	3	2,5	2	3	2,5	2,5	3
B	2	2	2	3	1	2	2	2
C	3	2	2,5	3	3	3	3	3
D	3	3	3	3	3	3	3	3
Globais	2,5	2,5	2,5	3	3	2,75	2,75	3