IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Diana Rita Ramalho Araújo

As representações usadas por alunos do 2.º ano na resolução de problemas

Relatório do Projeto de Investigação

Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Dezembro de 2014

Versão Final

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Diana Rita Ramalho Araújo

N.º 120140020

As representações usadas por alunos do 2.º ano na resolução de problemas

Relatório do Projeto de Investigação

Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Unidade Curricular: Estágio III

Orientadora: Prof.ª Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes

Dezembro de 2014

Agradecimentos

Muitas foram as pessoas que tornaram o meu sonho em realidade, desta forma, agradeço desde já a todos aqueles que acompanharam o meu percurso académico e sempre me deram força para continuar.

No entanto, não posso deixar de agradecer especialmente:

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, pelo carinho, amor, atenção e compreensão que demonstraram ao longo deste percurso.

Ao meu avô, que mesmo não estando presente até ao fim, deu-me muita força para continuar.

Ao Filipe, que me apoiou e animou nos momentos mais difíceis.

A todos os alunos que participaram neste projeto e que marcaram, sem dúvida alguma, a minha vida e o meu coração.

À minha orientadora, Prof.ª Doutora Maria de Fátima Mendes, que representou um pilar no desenvolvimento deste projeto e sem ela não seria possível a concretização do mesmo.

A todos, muito obrigada!

Resumo

O presente estudo tem como objetivo principal caracterizar as representações matemáticas utilizadas pelos alunos do 2.º ano de escolaridade, durante atividades de resolução de problemas.

Com este intuito, procurou-se responder às seguintes questões de investigação: a) Que representações utilizam os alunos do 2.º ano quando resolvem problemas? b) Que alterações, se existirem, se evidenciam nas representações usadas pelos alunos na resolução de problemas?

Tendo em conta a problemática do estudo, bem como as condições em que se desenrolou esta investigação, segui uma abordagem qualitativa. Os participantes do estudo foram três alunos, de uma turma do 2.º ano de escolaridade, de uma escola pública, situada num bairro cuja população tem um nível socio - económico baixo, da cidade de Setúbal.

A recolha de dados decorreu ao longo de onze semanas, do ano letivo 2013/1014, entre os dias 14 de outubro e 15 de janeiro. Foram propostos aos alunos variados problemas matemáticos, dos quais sete foram selecionados para fazerem parte integrante desta investigação. Foi através da observação participativa, das produções escritas dos alunos e de gravações de entrevistas semiestruturadas que foram recolhidos os dados e posteriormente analisados.

Os resultados deste estudo evidenciam que: a) os alunos não recorrem a representações ativas, como forma de resolução de problemas; b) as representações mais utilizadas pelos alunos são as representações icónicas; c) no conjunto das representações icónicas, é a esquemas que os alunos mais recorrem; d) as representações utilizadas parecem não depender do grau de exigência dos problemas mas poderão estar interligadas com o desenvolvimento do raciocínio matemático de cada um dos alunos; e) o modo de interpretar o enunciado, bem como as características dos números envolvidos, podem influenciar a escolha da representação por parte dos alunos.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Representações; Representação ativa; Representação icónica; Representação simbólica.

Abstract

This study has as its main goal to characterise mathematical representations used by 2nd grade students in primary school during activities of solving problems.

Bearing in mind this situation, we aim at answering the following questions: a) what mathematical representations are used by those students when they solve problems? b) what changes, in case they exist, were verified in mathematical representations used by students while solving the problems?

Taking into account the specificity of this study, I followed a qualitative approach. I analysed and worked with three 2nd grade students from a public school located in a problematic neighbourhood in Setúbal.

The data collection took place over eleven weeks during the academic year of 2013/2014, between 14th of October and 15th of January. The students were challenged with several mathematical problems which were selected to be part of this research. It was through participative observation, written production of students and the recordings of semi-structured interviews that was possible to collect and analyse the data.

The final results of this project demonstrated that: a) the students do not betake active representations as a way of solving problems; b) the most frequently used representations chosen by the students are the iconic ones; c) include in the iconic representations, the sub-category that students mainly utilize are the schemes; d) the representations used seem do not depend on the level of difficulty of the problems but may be connected with the development of individual mathematical reasoning of student; e) the way of interpreting the problems given as well as the characteristics of the numbers involved may influence the choice of representation.

Keywords: Resolution of problems; Representations; Active representation; Iconic representation; Symbolic representation.

Índice

Índice de tabelas

Índice de figuras

Capítulo I – Introdução

Este capítulo tem como finalidade identificar o tema de estudo, os objetivos e as questões que orientam a investigação por mim desenvolvida em contexto de Estágio, numa turma do 2.º ano de escolaridade. Posteriormente é apresentada uma justificação pessoal para a escolha deste tema, bem como a sua pertinência no contexto educativo. Por último apresento, de forma sucinta, a estrutura e organização deste trabalho.

Objetivos e questões do estudo

Primeiramente importa referir que a decisão sobre o tema da minha investigação sofreu algumas mudanças ao longo do meu estágio. Inicialmente tinha pensado aprofundar o contributo do trabalho cooperativo na resolução de problemas, no entanto, tendo em conta as características dos alunos, não estava a conseguir desenvolver atividades em que a turma trabalhasse em grupo. De facto, os alunos não estavam habituados a trabalhar em grupo, tomavam posições individualistas e não partilhavam os raciocínios com os seus pares. Visto que o tempo de prática é bastante reduzido, resolvi desenvolver uma outra investigação, ainda na área da resolução de problemas e que fosse também interessante do ponto de vista da Educação Matemática.

Assim, a minha investigação teve como objetivo caracterizar as representações utilizadas pelos alunos do 2.º ano na resolução de problemas. Relacionadas com o objetivo do estudo, formulei as seguintes questões:

- Que representações utilizam os alunos do 2.º ano quando resolvem problemas?
- Que alterações, se existirem, se evidenciam nas representações usadas pelos alunos na resolução de problemas?

Pertinência do estudo

A escolha deste tema partiu do conhecimento prévio que tinha sobre a turma em que desenvolvi os problemas relativos ao projeto de investigação. A turma é um grupo que apresenta bastantes dificuldades no que respeita ao raciocínio matemático e à resolução de problemas, em particular, na construção de diversas estratégias e representações.

Assim, preparei cuidadosamente tarefas de resolução de problemas, que permitissem aos alunos desenvolver estratégias, desconhecidas por eles, até à data. Além disso, tentei respeitar sempre os objetivos de aprendizagem estipulados pelo professor titular, bem como as indicações do Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2013).

As representações, tal como afirmam Ponte e Velez (2011) têm sido valorizadas desde os anos 80 do século XX, começando desde daí a ser objeto de diversas investigações. "Algumas formas de representação […] têm feito parte da matemática escolar, desde há muito" (NCTM, 2007, p. 75). Assim acompanham o desenvolvimento da criança, desde a idade pré-escolar e ao longo de todo o seu percurso académico e mostram ter um papel bastante importante para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007), os alunos devem conhecer as diferentes representações matemáticas[1], bem como saber aquelas que melhor se adequam a determinada tarefa. Assim, "As representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (ME, 2007, p. 9).

É importante que os alunos percebam que existem variados tipos de representações. Além disso, ao longo da sua escolaridade, devem ser estimulados a desenvolverem as suas próprias representações. No entanto, é papel do professor introduzir de forma progressiva, as representações convencionais, como complemento das representações não convencionais, utilizadas pelos alunos (ME, 2007).

Por sua vez, a resolução de problemas é destacada, no PMEB (ME, 2007), como um processo matemático transversal que deve ser desenvolvido pelo aluno, de modo a ser

[1] Quando escrevo a expressão representações matemáticas, estou a referir-me a representações de ideias matemáticas.

capaz de lidar com diferentes problemas, mostrando agilidade ao resolvê-los. Atividades neste âmbito têm uma "(…) importância crucial para a aprendizagem da Matemática desde o 1.º ciclo do ensino básico" (Boavida, Paiva, Cebola, & Vale, 2008, p. 8) e contribuem para que os alunos sejam capazes de raciocinar "matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (ME, 2007, p. 5).

No âmbito da Educação Matemática, a resolução de problemas tem sido foco de investigações e reflexões. Além disso, alguns autores consideram as atividades em que o aluno resolva problemas, "uma forma de estimular e desenvolver o processo de ensino e aprendizagem na Matemática" (Wielewski, 2006, p. 11).

Estrutura do trabalho

Este relatório de investigação está organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo tem o objetivo de identificar o tema de estudo, os objetivos da investigação e as questões orientadoras. Neste capítulo abordo também as minhas motivações para a escolha do tema, bem como a sua importância para o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos, apresentando assim alguns argumentos que validam a pertinência desta temática.

No segundo capítulo apresento uma abordagem teórica ao tema, através de uma revisão da literatura, que se encontra dividida em duas partes. Na primeira parte abordo a resolução de problemas, discutindo temas como a sua importância, o seu significado, os diferentes tipos de problemas, as etapas e estratégias de resolução e por fim fazendo uma ponte de ligação entre a resolução de problemas e as Orientações Curriculares para o 1.º ciclo. Numa segunda parte foco-me nas representações e abordo: a sua importância na educação matemática, o seu significado, os diferentes tipos de representações e as representações nas Orientações Curriculares para o 1.º ciclo. Para finalizar é apresentada uma reflexão sobre a ligação entre a resolução de problemas e as representações.

No terceiro capítulo descrevo metodologia utilizada neste estudo. Caracterizo as opções metodológicas, identifico os instrumentos de recolha de dados e descrevo os processos de recolha e análise de dados.

No quarto capítulo apresento a análise dos dados recolhidos, de cada aluno individualmente. Apresento e analiso as suas produções escritas interligando-as com as gravações áudio, gravadas ao longo do processo de recolha de dados.

No quinto capítulo apresento as conclusões globais do estudo. Elaboro uma síntese geral, onde de forma resumida foco o objetivo da investigação, as questões orientadoras e a metodologia adotada. Em seguida apresento as conclusões do estudo, respondendo assim às duas questões orientadoras. Terminando com uma reflexão final sobre todo o processo de investigação.

Capítulo II – Revisão da Literatura

Este capítulo integra um aprofundamento teórico sobre as temáticas essenciais do estudo que desenvolvi: a resolução de problemas e as representações. Ao longo deste capítulo, procuro discutir, numa primeira fase, o entendimento de resolução de problemas, tendo em conta a perspetiva de diversos autores. Posteriormente, distingo diferentes tipos de problemas, bem como as suas etapas e estratégias de resolução, de acordo com as ideias de George Pólya (Pólya, 1995). Finalizo esta fase, discutindo o modo como a resolução de problemas é abordada a nível das orientações curiculares nacionais e internacionais.

Numa fase seguinte, abordo as representações e seus significados, de acordo com os vários autores consultados. Identifico os diferentes significados de representações, dando ênfase à teoria de Bruner (1999), embora use também, como referência, a obra fundamental Princípios e normas para a Matemática escolar (NCTM, 2007). Seguidamente discuto o modo como as representações são abordadas a nível das orientações curiculares nacionais e internacionais.

Termino o capítulo com um cruzamento de ideias relativamente à resolução de problemas e às representações.

A importância da resolução de problemas na Educação Matemática

A resolução de problemas tem adquirido bastante importância, no ensino da Matemática, ao longo dos anos. Ainda assim, considera-se que o primeiro pensador do século XX a introduzir na educação temáticas relacionadas com o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, chamando assim a atenção para a importância deste tipo de atividades foi John Dewey (Valente, 1989).

Ao nível da educação matemática, destaca-se Pólya que, por volta dos anos 40 do século XX sublinha a importância da resolução de problemas (Pólya, 1995). No mesmo sentido, alguns anos mais tarde, na década de 80, em Portugal a Associação de professores de Matemática (APM), defende que a "resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares, tal como tem acontecido afinal ao longo do desenvolvimento da própria Matemática" (Veia, 1996, p. 16). Mais tarde, em 2007 o NCTM reconhece que "A resolução de problemas não só constitui um objectivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática" (NCTM, 2007, p. 57).

A resolução de problemas também é destacada no PMEB (ME, 2007) e é aí considerada como uma atividade fundamental, para o ensino/ aprendizagem da Matemática, desde os primeiros anos de escolaridade. Deste modo, tal como referem Boavida e Menezes (2012, p. 288) de todas as "capacidades transversais referidas no PMEB, a resolução de problemas é a que tem maior tradição na investigação em educação matemática tanto a nível internacional, como nacional."

Resolver problemas é um processo complexo que envolve o aluno na procura de soluções não imediatas, através de diferentes etapas. Por vezes é uma tarefa demorada, em que o aluno tem a necessidade de investigar e explorar, de acordo com os seus conhecimentos previamente desenvolvidos, para que consiga resolver o problema que lhe é proposto e consequentemente o compreender.

Durante a resolução de problemas é necessário que os professores representem para os alunos um auxílio, de forma que estes se sintam seguros e confiantes, realizando com êxito todas as tarefas propostas. Segundo O'Connell (2007, p. 4), é fundamental para o sucesso do aluno, desenvolver atitudes positivas em relação à resolução de problemas.

É importante que ao resolverem problemas, os alunos se sintam motivados, de forma a realizarem todas as aprendizagens objetivadas pelo professor. Neste sentido, Charles e Lester (1982), desenvolveram trabalhos relacionados com questões individuais dos alunos, destacando três fatores interligados com os processos mentais que estes desenvolvem quando resolvem problemas:

> "[…] Fatores afetivos (pressão, motivação, interesse, resistência aos bloqueios prematuros, perseverança, stress); […] Fatores relacionados com a experiência (familiaridade com o contexto e o conteúdo dos

> problemas, idade, familiaridade com estratégias de resolução de problemas); […] Fatores cognitivos (capacidade espacial, capacidades computacionais, capacidade lógica, capacidade de leitura).” (Charles & Lester, 1982, p. 11)

Ora, de acordo com a ideia anterior, é necessário que os alunos desenvolvam algumas capacidades, que possibilitem a resolução de problemas, de forma positiva. Estas estão relacionadas com o interesse e motivação que o aluno revela em relação a estas atividades. Contudo, a familiaridade do aluno com as tarefas, bem como o seu desenvolvimento cognitivo, são fatores que influenciam todo o processo envolvido na resolução de problemas.

A resolução de problemas possibilita que o professor interligue diferentes temas matemáticos, ao mesmo tempo que desenvolve nos alunos uma variedade de aprendizagens, tal como o desenvolvimento de diferentes representações, a comunicação e raciocínio matemático (Boavida, Paiva, Cebola, & Vale, 2008).

De acordo com Palhares (2004), a resolução de problemas ajuda o individuo a sentir-se capaz de resolver problemas do seu quotidiano, mas acima de tudo, possibilita o desenvolvimento da capacidade de pensar matemáticamente. Ainda segundo o mesmo autor, a resolução de problemas pode ser considerada segundo três perspetivas:

> “[…] por um lado, como um processo, quando pretendemos dotar os alunos com estratégias de resolução tornando-os solucionadores cada vez mais aptos de problemas; é também uma finalidade, quando tentamos atender aos aspectos matemáticos como explorar, questionar, investigar, descobrir e usar raciocínios plausíveis; e, por fim, é um método de ensino, que surge para introduzir conceitos envolvendo exploração e descoberta, de acordo com as finalidades do ensino da matemática e de factos, conceitos e procedimentos matemáticos.” (p. 11)

Neste sentido, é possível afirmar que a resolução de problemas é uma área de trabalho multifacetada. Assim pode ser vista como uma forma de os alunos se tornarem cada vez mais autónomos na procura de soluções. Pode ainda ser considerada como um objetivo a atingir, que por sua vez desenvolve outras capacidades nos alunos. Contudo, tal como indica o autor, pode ser considerada como uma metodologia a adotar pelos professores, que através de tarefas de resolução de problemas, conseguem lecionar todos os outros conteúdos, inclusive articular diversas áreas curriculares.

O que é um problema matemático

Ao longo do tempo, vários autores têm tentado efetuar uma definição de problema matemático. Assim, esta difere de autor para autor e parece estar associada aos seus conhecimentos e experiências.

Definir o que se entende por problema matemático é, por vezes, uma atividade complexa, pois o que para uns é um problema, para outros pode ser simplesmente um exercício. Ou então, a mesma tarefa, num determinado momento, para a mesma pessoa, pode ser um problema e noutro, um exercício. Assim, é possível afirmar que existem vários fatores, pertencentes à pessoa ou à tarefa, que influenciam o conceito de problema.

> "Distinguir exercício de problema é essencial num processo de ensino […] só se tem um problema se não se sabe como chegar até à solução, pois, se uma questão não tem surpresas e pode ser resolvida confortavelmente utilizando procedimentos rotineiros, […] é um exercício." (Palhares, 2004, p. 13)

Ora, a distinção de exercício e problema, no fundo está no cerne do enunciado, pois, se é apresentada uma questão para a qual o solucionador não sabe de imediato o processo para chegar a uma conclusão, quer dizer que está perante um problema. Mas se a questão inicial conduzir o resolvedor, de imediato, para a utilização de um algoritmo, por exemplo, ou de um procedimento rotineiro, então é um exercício.

Segundo Kantowski, (1974, referido por Afonso, Conceição, Costa, Filipe, e Serrasqueiro, 2008) um problema é uma questão a que não se pode dar resposta, de acordo com o conhecimento imediatamente disponível. Para Pólya (1980, referido por Palhares, 2004, p.13), um problema é uma procura conscienciosa para atingir um objetivo, sem que a resposta esteja imediatamente atingível. Para Lester (1983, referido por Palhares, 2004, p.13), um problema é uma tarefa, que não possui um algoritmo que determine completamente o método de resolução. Já para Mayer (1985, referido por Palhares, 2004, p.13), está-se perante um problema quando se é confrontado com uma situação inicial e se pretende chegar a outra situação final, sem se conhecer um caminho óbvio para a atingir.

Tendo em conta todas as afirmações anteriores, pode-se considerar um problema como uma situação que não obedece a uma rotina, representando para os alunos diferentes desafios, pois não existe uma resolução imediata, recorrendo apenas a um só algoritmo, podendo ser utilizadas, na sua resolução, várias estratégias ao longo de várias etapas (ME, 2001).

Em suma, "um problema é uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução, sendo a resolução de problemas o conjunto de acções tomadas para resolver essa situação" (Palhares, 2004, p. 12). Este é o entendimento de problema, assumido por mim neste trabalho.

Diferentes tipos de problemas

O professor deve propor tarefas não rotineiras, que se concretizam em problemas desafiantes para os alunos (ME, 2001), de forma que estes tenham oportunidades de conjeturar, testar, investigar e discutir coletivamente todas as hipóteses (Palhares, 2004).

Ao selecionar os problemas, o docente deve ter em atenção as suas características, de forma que sejam escolhidos bons problemas, "que desafiam os alunos a desenvolver e aplicar estratégias, que são um meio para introduzir novos conceitos e que oferecem um contexto para usar e desenvolver diferentes capacidades" (Boavida et al., 2008, p. 26).

Segundo os Princípios e normas para a Matemática escolar (NCTM, 2007) os bons problemas são aqueles que desenvolvem nos alunos, capacidades de explorar diversas ideias matemáticas fundamentais e que os auxiliam na procura de diferentes estratégias. Neste sentido, e ainda de acordo com o NCTM, os bons problemas devem estimular os "alunos a reflectir e a comunicar e podem surgir das experiências dos próprios alunos ou de contextos puramente matemáticos" (p. 213).

Ao longo do ensino da resolução de problemas, é importante que o professor tenha à sua disposição um vasto leque de problemas, que correspondam a uma tipologia diversa. Existem "várias tipologias de classificação de problemas matemáticos que diferem segundo os autores" (Vale & Pimentel, 2004, citado por Boavida, et al., 2008, p. 17).

De acordo com Charles e Lester (1986, citado por Palhares, 2004), uma tipologia adequada ao 1.º Ciclo do Ensino Básico é composta por cinco tipos de problemas:

- Problemas de um passo, que são aqueles que podem ser resolvidos através da utilização direta de uma das operações matemáticas.
- Problemas de dois ou mais passos, são aqueles que se resolvem através da aplicação direta de duas ou mais operações.
- Problemas de processo, são os que não necessitam de mecanizações rotineiras para serem resolvidos, ou seja, podem ser utilizadas várias estratégias para se chegar a uma conclusão.
- Problemas de aplicação, por vezes necessitam de ser utilizadas várias estratégias e operações. "São os que normalmente requerem a recolha de dados acerca da vida real e a tomada de decisões" (Palhares, 2004, p. 18).
- Problemas tipo puzzle, são os problemas "que necessitam como que de um flash para chegar à solução. Estes problemas podem suscitar o interesse do aluno e habituá-lo a olhar para os problemas sob diversos pontos de vista" (idem, p. 19).

A classificação proposta por Boavida et al., (2008) é adaptada para o 1.º ciclo, e distingue três tipos de problemas:

- Problemas de cálculo, são aqueles que se podem distinguir entre problemas de um passo e problemas de mais passos. Este tipo de problemas leva a que o aluno tome decisões sobre as operações a utilizar. "Os alunos lêem o problema, avaliam o que é conhecido e o que é pedido e, finalmente, efectuam uma ou mais operações que consideram apropriadas usando os dados do enunciado" (p. 17). De acordo com as autoras, estes problemas "Têm algumas potencialidades. Nomeadamente proporcionam aos alunos a oportunidade de aplicarem conceitos e destrezas previamente aprendidos e praticarem esta aplicação. No entanto, o risco de lhes propor exclusivamente estes problemas reside em poderem levá-los a leituras demasiado rápidas, a análises superficiais ou a respostas sem qualquer nexo” (p. 18).

- Problemas de processo, são os problemas que requerem do aluno, uma maior atenção para que sejam compreendidos, podendo ser necessário, a utilização de diferentes estratégias de resolução. Segundo as mesmas autoras, “Estes problemas podem ser usados para desenvolver diferentes capacidades [...] Colocam questões que apelam ao envolvimento dos alunos e proporcionam experiências matemáticas ricas e significativas (NCTM, 2000) requerendo da sua parte o uso de várias estratégias. O sucesso reside, muitas vezes, na capacidade que cada um tem de compreender e identificar a estrutura matemática do problema” (p. 19).
- Problemas abertos, também considerados como Investigações, são aqueles que além de poderem ter mais que uma estratégia de resolução, podem ainda ter mais que uma resposta correta.

> “Para os resolverem, os alunos têm de fazer explorações para descobrir regularidades e formular conjecturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão.” (p. 20)

Como se pode verificar não existe um único critério de classificação de problemas, havendo diferentes tipologias. Contudo, cabe ao professor escolher aqueles que melhor se adequam à sua turma, bem como ao currículo. Neste sentido, o docente deve procurar problemas que suscitem os alunos a construírem e aplicarem várias estratégias, ao mesmo tempo que contactam com vários conceitos matemáticos.

Etapas de resolução de problemas

De acordo com Palhares (2004, p. 21), “Não existe um único método para resolver problemas nem para ensinar a resolver problemas”. Deste modo, foram vários os autores que desenvolveram pesquisas neste âmbito, de forma a identificarem algumas etapas de resolução.

George Pólya foi um dos pioneiros no que respeita à estruturação da resolução de problemas por fases. De acordo com este autor resolver problemas é uma habilidade prática como a natação. Pois, adquirimos "qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem [...], aprendemos a nadar pela prática de natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os" (Pólya, 1995, p. 3).

O modelo proposto por Pólya para resolver problemas é composto por quatro etapas. Este "em vez de ser uma descrição de como os alunos com sucesso pensam, é uma proposta para ensinar a resolver problemas; [...] é também bastante útil na identificação de áreas de dificuldade manifestadas pelos alunos ou na clarificação do processo mental envolvido em actividades de resolução de problemas que tenham sido bem sucedidas" (Palhares, 2004, p. 22).

Assim, as quatro etapas ou fases de resolução de um problema, de acordo com o modelo de Pólya, são:

- Compreender o problema, ou seja, é necessário que o resolvedor tente perceber e interpretar o enunciado, de modo a identificar os dados para se atingir um determinado objetivo. Ou seja, de acordo com O'Connell (2007), o primeiro passo do processo de resolução de problemas consiste em compreender o problema de modo a que o estudante perceba o que lhe está a ser pedido para resolver.
- Delinear um plano adequado, para que se chegue a uma conclusão solucionadora do problema. Esta é uma etapa em que os alunos decidem como vão resolver o problema. Podem chegar, facilmente, à conclusão que através de uma das operações básicas conseguem resolver o problema, ou então necessitam de encontrar estratégias solucionadoras. (O'Connell, 2007)
- Executar um plano, ou seja, é a fase em que se coloca em prática o plano delineado, anteriormente. Nesta fase, o aluno pode ter necessidade de recuar, visto que, por vezes, o primeiro plano não é solucionador.
- Verificar, ou seja, é nesta fase que se verifica "a solução obtida de acordo com os dados e as condições apresentadas no problema" (Palhares, 2004, p. 22.).

Como se pode verificar, o modelo proposto por Pólya corresponde a uma sequência, que segundo Palhares (2004), se os alunos a seguirem, de forma rigorosa, podem vir a ter bastante sucesso em atividades de resolução de problemas.

Baseado no modelo de Pólya, aparece um outro, proposto por Guzmán (1990), que em grande parte, coincide com as suas características gerais. De acordo com este autor, o aluno deve passar por quatro fases, quando resolve problemas: (i) familiarizar-se com o problema; (ii) procurar estratégias; (iii) levar adiante as estratégias; (iv) rever todo o processo (Guzmán, 1995).

De acordo com Boavida, Paiva, Cebola, & Vale (2008), o modelo de Pólya, apesar de estar mais indicado para problemas complexos, pode ser adaptado para o 1.º ciclo do ensino básico. Assim, as autoras propoem uma simplificação das etapas, juntando a segunda e terceira fase, uma vez que estas são, por vezes, difíceis de separar. Assim, o modelo simplificado proposto, é constituído pelas seguintes etapas:

- Ler e compreender o problema;
- Fazer e executar um plano;
- Verificar a resposta.

Inspirado em Pólya, Lester, em 1980, propôs um modelo de resolução de problemas constituído por seis etapas. De acordo com Borralho (1990, citado por Pinto & Canavarro, 2012), este modelo possui “uma perspetiva inovadora a nível da análise dos processos mentais envolvidos na área da resolução de Matemática” (p. 3).

Deste modo, a proposta de Lester é constituída pelas seguintes etapas:

- Consciencialização;
- Compreensão;
- Análise do(s) objetivos;
- Desenvolvimento do plano;
- Implementação do plano;
- Avaliação dos procedimentos e da solução.

Em suma, pode-se verificar que existem vários modelos de resolução de problemas. Contudo, foi Pólya o impulsionador desta matéria, pois, tal como foi referido anteriormente, a maioria dos autores, teve como base a sua proposta de quatro etapas, para a criação de outros modelos.

Neste sentido, de acordo com O'Connell (2007), a resolução de problemas é uma tarefa de várias etapas. Os resolvedores de problemas bem-sucedidos movem-se através de uma série de passos em direção à solução. Isso não significa que cada aluno pense em cada etapa, da mesma forma, mas que desenvolvem um processo que os ajuda a passar pelas várias etapas de modo a chegar à solução.

Estratégias de resolução de problemas

Vários foram os autores que definiram diferentes estratégias, ou heurísticas, para que quando se resolve um problema, seja possível utilizar várias formas para se chegar a uma solução, tendo em conta as características do solucionador e do próprio problema. Deste modo, é importante salientar que "Podem haver várias estratégias para resolver um problema e umas podem ser mais vantajosas do que outras" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 55), cabendo ao resolvedor do problema, escolher aquela que considera mais adequada.

Importa, antes de mais definir estratégias e heurísticas. As heurísticas são processos que auxiliam na resolução de problemas, e que estão relacionadas com o sucesso dos alunos, nestas tarefas (Lopes, et al., 1990). São "uma série de questões que o aluno deverá pôr a si próprio em cada uma das quatro etapas do processo, e que se destinam a organizar o seu pensamento de uma forma mais sistemática e eficaz" (idem, p. 10). Ou seja, são um conjunto de procedimentos, na perspetiva das autoras, a serem ensinadas aos alunos, que os auxiliam na resolução de problemas.

Estratégias, por sua vez são "um conjunto de técnicas a serem dominadas pelo solucionador e que o ajudam a "atacar" o problema ou a progredir no sentido de obter a solução" (Vale,1994, citado por Palhares, 2004, p. 24). Assim, considera-se fundamental que os alunos resolvam uma grande variedade de problemas, de forma a recorrerem a diferentes estratégias, pois "a familiaridade com o uso de estratégias irá permitir ao aluno passar gradualmente de uma situação fechada para outra mais aberta sem se sentir perdido" (Boavida, et al., 2008, p. 23).

De acordo com Smole e Diniz (2001) é importante que o professor incentive os alunos a encontrarem as suas próprias estratégias de resolução de problemas, para que, posteriormente, numa discução coletiva, eles se sintam responsáveis pela sua própria resolução, mostrando-se motivados e capazes de exporem os seus raciocinios matemáticos.

> “Para que os alunos sejam capazes de apresentar as diferentes maneiras que utilizam para resolver problemas, cabe ao professor propiciar um espaço de discussão no qual eles pensem sobre os problemas que irão resolver, elaborem uma estratégia e façam registro da solução encontrada ou dos recursos que utilizam para chegar ao resultado.” (Smole & Diniz, 2001, p. 125)

Por outro lado, o facto de serem os alunos a escolherem as suas próprias estratégias, pode levá-los a errar, ou seja, a escolha pode ser inadequada para determinado problema. Contudo, de acordo com Lopes (2002) ao errarem na escolha da estratégia, os alunos estão a enriquecer, também, os seus conhecimentos.

> “[…] deve ser o aluno a escolher a estratégia que julgue mais conveniente, e se este se manifestar autónomo nesse sentido, o professor deve assumir uma postura incentivadora, sem dar sugestões de exploração […].” (Lopes, 2002, p. 23)

Considerando que escolher e determinar “a estratégia é considerada a etapa mais difícil […] do processo de resolução de problemas” (idem), importa clarificá-las e mencioná-las.

Palhares (2004) destacou algumas estratégias, a seguir mencionadas:

- Descobrir um padrão/ descobrir uma regra ou lei de formação
- Fazer tentativas/ Fazer conjeturas
- Trabalhar do fim para o princípio
- Usar dedução lógica/ Fazer eliminação
- Reduzir a um problema mais simples/ Decomposição/ Simplificação
- Fazer uma simulação/ Fazer uma experimentação/ Fazer uma dramatização
- Fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema
- Fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela

Em jeito de conclusão, considera-se que os "alunos devem familiarizar-se com estas e outras estratégias, reflectindo sobre o modo como resolvem um dado problema. A análise da estratégia usada deve ser um ponto frequente na discussão de um problema realizado por toda a turma" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 55). Assim é importante que os alunos tenham conhecimento sobre um vasto leque de estratégias, de modo a serem autónomos na seleção de cada uma ao longo da sua formação e em atividades de resolução de problemas.

A resolução de problemas nas Orientações Curriculares para o 1.º Ciclo

Na década de 80 do século XX, Portugal sentiu uma mudança a nível do sistema educativo com o aparecimento de uma nova Lei de Bases (Lei nº 46/86). Assim, e nesta linha, a partir do início dos anos 90, verificou-se também uma revisão curricular que desencadeou uma reformulação, bem como o aparecimento de novos programas curriculares para o ensino (Santos, Canavarro, & Machado, 2007).

No âmbito dessa mudança assumiu-se que o aluno deve ser estimulado pelo professor, com o objetivo de se desenvolver de forma integral, em atividades no âmbito da matemática. Desta forma, considera-se fundamental que na sala de aula, se criem condições favoráveis a esse desenvolvimento.

No documento Organização Curricular e Programas (ME, 2004), publicado originalmente em 1990, a resolução de problemas aparece como uma atividade fundamental para todos os ciclos de ensino. Esta é considerada uma atividade que se deve colocar no centro de todo o ensino e ao longo do desenvolvimento de todos os tópicos abordados, como se pode verificar na seguinte figura:

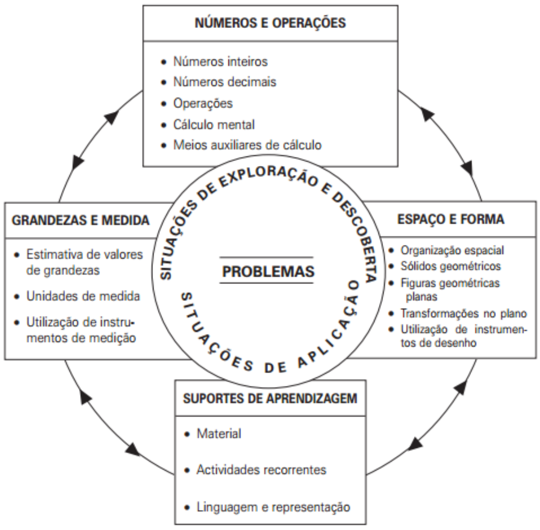


Figura 1 - Resolução de problemas no centro do ensino (adaptado de ME, 2004, p. 165)

Colocando o estudante numa posição ativa de aprendizagem, a resolução de problemas é ainda considerada uma atividade que desenvolve o raciocínio e comunicação dos alunos, devendo ser vista como um momento de diálogo e interação entre os pares, desde os primeiros anos de escolaridade.

Neste sentido e de acordo com a Organização Curricular e Programas do Ensino Básico do 1.º Ciclo (ME, 2004, p. 164), a resolução de problemas deve ancorar-se "em operações lógicas elementares e apoiar-se em materiais e linguagem gráfica que constituam uma ponte entre o real e as abstracções matemáticas".

À medida que o conhecimento do aluno é aprofundado, mais capaz se torna em relação a atividades no âmbito da resolução de problemas, uma vez que esta exige uma variedade mobilidade de conhecimentos e técnicas de resolução.

Assim, tendo em conta toda a importância envolta da resolução de problemas, é possível destacar alguns dos objectivos gerais para o ensino da matemática, emanados pelas Orientações Curriculares:

- Manifestar curiosidade e gosto pela exploração e resolução de problemas simples do universo familiar.
- Desenvolver estratégias pessoais de resolução de problemas e assumir progressivamente uma atitude crítica perante os resultados.

- Resolver situações e problemas do dia-a-dia, aplicando as operações aritméticas e as noções básicas de geometria, utilizando algoritmos e técnicas de cálculo mental. (ME, 2004, p. 167)

Ainda de acordo com o documento citado anteriormente, o professor tem um papel fundamental, pois deve ser considerado como um moderador que ouve as respostas dos alunos, criando momentos essenciais de diálogo, colocando questões que levem o aluno a raciocinar e reformular respostas erradas até ao encontro de soluções corretas, evidenciando assim, todas as estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes alunos. Desta forma, é possível criar momentos de partilha de conhecimentos entre os vários membros da turma.

No ano de 2001, no documento intitulado Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais, foca-se a importância dos alunos contactarem com diversas experiências de aprendizagem. Destaca-se assim, a resolução de problemas que é considerada "um contexto universal da aprendizagem e deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas áreas" (DEB, 2001, p. 68).

Em 2007, com a homologação do PMEB, voltou a ser explicitada a importância da resolução de problemas, para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno. Neste documento pode-se verificar que atividades neste âmbito são consideradas como uma das finalidades para o ensino da matemática. Salienta-se então que é fundamental, desenvolver nos alunos, a "capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática" (ME, 2007, p. 3).

Associado às finalidades para o ensino da matemática, aparecem também os objetivos gerais do ensino da matemática, que enfatizam igualmente a importância da resolução de problemas. Neste sentido, de acordo com o PMEB (ME, 2007) é importante que os alunos sejam capazes de compreender os problemas, ao mesmo tempo que os resolvem, utilizando estratégias adequadas.

Além de ser considerada uma finalidade e um objetivo do ensino da Matemática, a resolução de problemas é ainda uma das três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática.

Assim, de acordo com o PMEB (ME, 2007), percebe-se que a resolução de problemas é uma atividade fundamental para o processo de ensino/ aprendizagem da Matemática, pois possibilita que os alunos ampliem e aprofundem os seus conhecimentos matemáticos.

Com a nova reformulação do Programa de Matemática para o Ensino Básico homologou-se, em 2013 uma nova versão deste documento, compilando-o com as Metas Curriculares, editadas em 2012.

Nesta nova versão do PMEB a resolução de problemas é considerada como uma atividade que envolve os alunos num vasto leque de aquisições. Ou seja, segundo o PMEB (ME, 2013) a resolução de problemas "envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais" (p. 7).

Importa referir ainda que ao longo das Metas Curriculares, a resolução de problemas é destacada em todos os anos de escolaridade. Esta deve ser uma atividade em que os alunos vão ganhando, de ano para ano, mais agilidade bem como devem ser capazes de resolver problemas com vários passos de resolução. Deste modo, é importante que os estudantes não terminem o 1.º ciclo do ensino básico a conseguirem responder somente a problemas de resposta imediata.

Ao longo de todo o ensino básico, o professor deve escolher pormenorizadamente, o tipo de tarefas a apresentar aos alunos. Deste modo, em concordância com as recomendações internacionais devem ser valorizadas as tarefas que "envolvem processos matemáticos complexos e que requerem criatividade por parte do aluno. Nesse sentido vão todas as tarefas não rotineiras" (Palhares, 2004, p. 17).

Como tarefas não rotineiras podem ser evidenciadas as tarefas de resolução de problemas, que proporcionam ao aluno uma procura de soluções, através de diferentes estratégias e métodos de resolução (DEB, 2001). Assim, pode-se afirmar que a "resolução de problemas ocupa um lugar de destaque em todos os documentos curriculares do ensino básico" (Santos, Canavarro, & Machado, 2007, p. 13).

Em jeito de conclusão pode-se afirmar que a resolução de problemas é uma atividade a que se tem dado grande importância ao longo dos anos e que tem acompanhado todas as reformas curriculares. Deste modo, tal como já foi referido, anteriormente, a resolução de problemas representa uma atividade fundamental, para o ensino/ aprendizagem da Matemática, desde os primeiros anos de escolaridade. De acordo com Boavida e Menezes (2012, p. 288), de todas as "capacidades transversais referidas no PMEB [de 2007], a resolução de problemas é a que tem maior tradição na investigação em educação matemática tanto a nível internacional, como nacional".

A importância das representações na Educação Matemática

As representações dos alunos têm vindo a ganhar, progressivamente, importância a nível da Matemática e dos currículos escolares, em vários países, inclusive Portugal. A partir da década de 80, do séc. XX, a investigação em Educação Matemática tem vindo a focar a sua atenção neste âmbito, e posteriormente, seguiram-se os estudos dirigidos pelo NCTM que atribuíram às representações uma importância significativa para os currículos de Matemática. (Ponte & Velez, 2011)

De acordo com os Princípios e Normas para a Matemática escolar (NCTM, 2007), as representações são um verdadeiro auxílio para desenvolver a compreensão e o raciocínio matemático dos alunos, portanto, quanto mais cedo as crianças se depararem com variadas representações, melhor. Além disso, as crianças mais novas "utilizam uma diversidade de representações para construir novos conhecimentos e exprimir ideias matemáticas" (NCTM, 2007, p. 160). Essas representações são feitas através de variadas formas, como por exemplo o uso de objetos, desenhos, gestos, etc.

Tal como foi referido, em Portugal, as representações ganharam também importância, a nível de todos os currículos escolares, desde os primeiros anos de escolaridade.

> "representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação." (ME, 2007, p. 9)

No que concerne à importância das representações na aprendizagem da Matemática, são vários os autores que partilham da mesma opinião, valorizando-as e destacando-as como uma mais-valia para o desenvolvimento dos alunos. No entanto, Ponte e Serrazina (2000) defendem que as representações em forma de símbolos, utilizadas no 1.º ciclo, devem-se limitar às que são realmente úteis para o trabalho e comunicação dos alunos, sendo que não consideram vantajoso para a aprendizagem a introdução excessiva de simbologia.

Apesar da ideia anterior, para estes autores, é importante que o professor dê a oportunidade aos alunos, de utilizarem as suas proprias representações, ou seja, aquelas que eles próprios constroem, pois são uma forma de auxiliarem o processo de compreensão e solução de problemas. Além disso, podem ser um modo de os alunos aperfeiçoarem e alcançarem outros métodos de registo, mas também de adquirirem capacidades para desenvolverem outras representações.

Ainda de acordo com Ponte e Serrazina (2000), considerando que as representações não convencionais possibilitam a compreensão do modo de pensar dos alunos, o professor pode utilizar "esta informação para estabelecer ligações entre as formas de representação dos alunos e as formas de representação usuais na Matemática" (p. 44).

O que são representações

> "Todos nós usamos representações constantemente e nos múltiplos contextos com que lidamos no nosso dia-a-dia, sendo através delas que conseguimos tanto raciocinar sobre ideias, como dar visibilidade ao que pensamos." (Canavarro & Pinto, 2012, p. 53)

Existem várias definições para o conceito de representação (NCTM, 2003). Uma representação é algo que pode caracterizar uma ideia ou raciocínio e pode ser vista, tanto como o processo de representar como o produto representado. Assim, de acordo com Boavida, et al. (2008, p. 71), o conceito de representação corresponde "quer ao acto de capturar um conceito ou relação – processo -, quer à sua forma propriamente dita – produto". Para Bruner (1999, p. 27), as representações são a "forma como a criança se liberta dos estímulos presentes e conserva a experiência passada num modelo […]".

De acordo com Goldin (2008, citado por Ponte & Velez, 2011, p. 54), uma representação é "uma configuração que representa algo, de alguma forma", ou seja, as representações podem ser vistas como substitutas de termos, atitudes, elementos, entre outros, que auxiliam o processo de comunicação. Ainda seguindo o pensamento de Goldin, citado em NCTM (2003), uma representação é uma configuração de signos, caracteres, ícones ou objetos que podem representar algo, consoante a natureza em que se inserem.

Para Witeck e Ennis (2007, p. 3), as representações têm duas vertentes. Além de serem um processo, são também um produto através do qual os alunos são capazes de explorar e resolver conceitos matemáticos, bem como comunicar matematicamente com seus pares. Neste sentido é possível afirmar que através de diagramas, números, palavras, entre outras representações, os alunos conseguem comunicar entre si, transmitindo o seu raciocínio matemático.

Em Matemática, as representações são fundamentais para se entenderem diferentes raciocínios. De acordo com Ponte e Velez (2011), representações "são caracteres, símbolos, configurações pictóricas ou mesmo objectos que representam alguma ideia, objecto, ou relação matemática. A relação entre a representação e o objecto representado não é biunívoca" (p. 12). Ou seja, uma ideia ou objeto pode corresponder a variadas representações, ou vice-versa, o que quer dizer que para se compreender uma representação é necessário que o aluno tenha algum conhecimento prévio sobre a matéria.

Ao longo da sua formação, os alunos deverão adquirir capacidades para utilizarem diversos tipos de representações, pois estas, na forma escrita, são essenciais tanto a nível da aprendizagem como a nível da produção matemática, podendo auxiliar os alunos a construírem raciocínios matemáticos mais sólidos.

Neste sentido, os discentes devem usar uma grande variedade de representações, para se familiarizarem com os seus diversos tipos. Além disso é importante que percebam os processos de transformação de um tipo de representação noutro, pois é uma forma de facilitar a compreensão das atividades, bem como a sua discussão (Bishop & Goffree, 1986).

Considera-se fundamental "encorajar os alunos a representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que as suas primeiras representações não sejam as convencionais" (NCTM, 2007, p. 75). Contudo, a aprendizagem com base nas representações deve ser feita de forma progressiva, com a finalidade dos alunos aprenderem as representações convencionais, para que tenham sucesso no processo de ensino/ aprendizagem da Matemática.

> “Podemos ter representações convencionais ou não convencionais das ideias matemáticas. A existência de representações partilhadas por todos, é essencial para que possa haver comunicação. Por isso, é importante que os alunos aprendam as formas convencionais de representação.” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 40)

Com base nas afirmações anteriores, pode-se concluir que as representações podem ser então, consideradas como uma forma de comunicação, dentro da sala de aula. Esta comunicação pode ser realizada com base na linguagem matemática, corporal e natural, contudo, pode ainda ser feita através de “desenhos, figuras, dramatizações e outras formas de representação” (idem, p. 60).

Diferentes tipos de representações

Ao longo do processo de comunicação, são utilizados diversos tipos de representações, o mesmo acontece na matemática. Assim, os alunos, ao longo da sua formação, adquirem capacidades de, mentalmente, criarem imagens que posteriormente são exteriorizadas, através da escrita ou da oralidade. Deste modo, é possível destacar dois tipos de representações: as representações internas e as representações externas.

As representações internas são constituídas por “imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade” (Dufour-Janvier et al., 1987, citado por Nobre, Amado, & Ponte, 2011).

De acordo com Goldin e Kaput (1994, citado por Martins, 2012), as representações internas são representações mentais de um individuo. Ou seja, podem ser vistas como o reflexo das representações externas.

Também consideradas como representações semióticas, as representações externas correspondem a toda uma existência física, que se pode verificar, tanto na forma escrita, em papel, num ecrã, ou outro qualquer suporte (Ponte & Velez, 2011).

Neste sentido, as representações externas "são organizações simbólicas externas (símbolos, figuras, diagramas, gráficos, etc.) cujo objectivo é representar ou codificar [...]" um dado objeto ou ideia matemática (Dufour-Janvier et al., 1987, citado por Nobre, Amado, & Ponte, 2011).

Duval (2012), por sua vez, também fez distinção entre representações mentais (consideradas por outros autores como internas) e representações semióticas, dando grande ênfase a estas últimas. Para o autor, as representações semióticas "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (p. 269).

Na sua opinião, contrariamente a outros estudos referidos anteriormente, estas representações não têm somente o objetivo de comunicação, sendo que são fundamentais também para a atividade cognitiva do pensamento. De acordo com o autor, baseado em outros, como Vygotsky, Piaget, Benveniste, Bresson e Granger, as representações semióticas têm um papel fundamental no desenvolvimento das representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos.

Janvier (1987) citado por Rodrigues (2011), por sua vez, distinguiu quatro tipos de representações externas ou semióticas: descrições verbais, tabelas, gráficos e fórmulas. Este autor propôs um processo de translação, ou seja, um processo psicológico em constante evolução, que permite ao aluno passar de uma representação para outra. Este é um processo interativo, que possibilita a articulação de saberes, à medida que se constroem novas representações do pensamento.

Ao longo da abordagem de resolução de problemas, são distinguidos também alguns tipos de representações. Assim, Preston e Garner (2003, p. 43) afirmam que tabelas, gráficos, equações e a linguagem escrita são representações poderosas para os alunos, pois auxiliam o processo de raciocínio e comunicação.

Em conformidade com a ideia anterior, o NCTM (2007) defende que os alunos para representarem as suas ideias matemáticas, podem recorrer a objetos concretos, à linguagem natural, a desenhos, esquemas, gestos e símbolos.

Na perspetiva de Ponte e Serrazina (2000), ao longo do 1.º ciclo é importante que sejam abordados determinados tipos de representações. Deste modo, para os autores existem quatro tipos essenciais: linguagem oral e escrita, representações ativas, representações icónicas e representações simbólicas.

Ainda de acordo com os autores mencionados, existem outras formas de representação matemática, oriundas das novas tecnologias. Estas "mudam o modo como os alunos usam as formas convencionais de representação em Matemática e alargam o conjunto das representações com que eles podem trabalhar […]" (p. 41). Neste sentido é dado o exemplo da Geometria, que pode ser auxiliada por um *software* didático, como o Geogebra.

Bruner, um pedagogo e investigador neste âmbito, diferencia três tipos de representações (ativa, simbólica e icónica) (Bruner, 1999). Estas representações desenvolvem-se ao longo do desenvolvimento do indivíduo e funcionam como um todo, sendo que a interação entre as três representações influencia o desenvolvimento humano (Canavarro & Pinto, 2012). Ponte e Serrazina (2000) também fazem a mesma distinção.

Sobre as representações, Bruner (1999) afirmou:

> "O que queremos dizer com representação? […] os seres humanos têm provavelmente três maneiras diferentes de realizarem esta proeza. […] A primeira forma de representação veio a ser designada como *ativa* e a segunda como *icónica* (…). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser *simbólica* por natureza, com certas características dos sistemas simbólicos que só agora começam a ser compreendidas." (pp. 27-28)

As três diferentes representações supracitadas devem ser vistas como um complemento umas das outras. Não devem ser consideradas como independentes nem como alternativas, pois o indivíduo deve usá-las em simultâneo ou com base em diferentes combinações entre si (Boavida, Paiva, Cebola, & Vale, 2008).

As **representações ativas** baseiam-se "na aprendizagem de respostas e formas de habituação" (Bruner, 1999, p. 28). De acordo com o autor, o ser humano é dotado de vários conhecimentos que não consegue explicar através de imagens nem palavras, tendo que recorrer à ação. Neste sentido, as representações ativas, são como o próprio nome indica, fundamentadas na ação. Ou seja, o aluno desenvolve o seu conhecimento através de um conjunto de ações, e através delas consegue chegar a determinadas soluções ou resultados, favoráveis para a aprendizagem da matemática e resolução de problemas.

Este tipo de representação é verificável quando o aluno recorre à utilização de materiais didáticos, objetos ou simulações de situações, para gerar modelos ilustrativos e posteriormente construir significados e conceitos (Boavida, Paiva, Cebola, & Vale, 2008).

As **representações icónicas** dependem "da organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens" (Bruner, 1999, p. 28). Estas representações são constituídas por desenhos, figuras, imagens ou esquemas que servem para ilustrar ou clarificar conceitos.

Sendo o desenho a primeira linguagem escrita das crianças, é através dele que estas encontram recursos para comunicarem (Canavarro & Pinto, 2012). À medida que a criança cresce, aperfeiçoa as suas técnicas de desenho e começa a utilizá-lo com outros propósitos, aparecendo então, na idade escolar, as representações icónicas. Estas auxiliam a criança a organizar o seu pensamento, durante atividades matemáticas, como a resolução de problemas.

Importa referir que este tipo de representação é constituído por imagens e símbolos não convencionais, que podem ser encontrados, tanto nas resoluções espontâneas dos alunos, como nos manuais ou produções propostas pelos professores.

As **representações simbólicas**, segundo Bruner (1999, p. 66) são "um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições." Ou seja, este tipo de representação é constituído por um todo de símbolos e linguagens que correspondem a ideias matemáticas.

Ao contrário das representações icónicas, estas são constituídas por representações convencionais que fazem parte integrante de um código específico.

> "Ao referirmo-nos a representações simbólicas convencionais, referimo-nos a um conjunto de símbolos específicos da Matemática cujo significado é partilhado, símbolos esses que representam noções abstratas e relações. Entre estes encontram-se, por exemplo, os algarismos e demais numerais, […] sinais de operações […]." (Canavarro & Pinto, 2012, p. 62)

Neste sentido, a escrita representa um recurso fundamental para representações deste tipo. Esta por sua vez "constitui um importante recurso de representação das ideias dos alunos nas aulas de Matemática" (idem, p. 61).

Em jeito de conclusão, apresento a imagem elaborada por Boavida, Paiva, Cebola e Vale (2008, p. 72), que ilustra os três tipos de representação estudados e as relações entre eles:

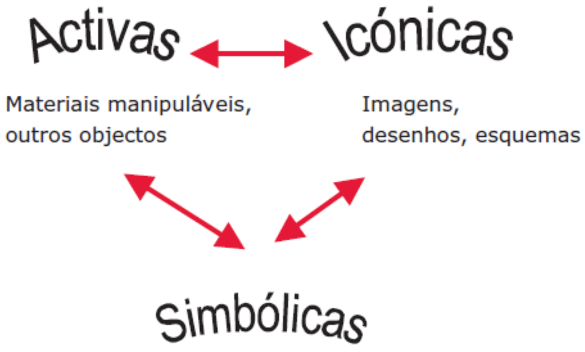


Figura 2 - Diferentes tipos de representações (retirada de Boavida, Paiva, Cebola, & Vale, 2008, p. 72)

As representações nas Orientações Curriculares para o 1.º Ciclo

Tal como foi referido anteriormente, em Portugal, os currículos orientadores de ensino têm vindo a sofrer alterações, desde a Lei de Bases nº 46, do ano 1986. Neste sentido, as representações têm vindo a assumir também alguma importância no que concerne à aprendizagem e ensino da Matemática.

Contudo, é no documento Organização Curricular e Programas do Ensino Básico do 1.º Ciclo (2004) que as representações começam a ganhar uma maior importância para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos. Neste sentido, no documento curricular mencionado, um dos objetivos gerais para a Matemática refere que é importante que os alunos recolham dados e os organizem através de diferentes tipos de representações. De facto, as representações são um instrumento que promove o raciocínio dos alunos ao mesmo tempo que auxiliam na comunicação entre os pares.

Ainda neste documento (ME, 2004), salienta-se a importância da manipulação de diferentes materiais, na sala de aula, que podem auxiliar no processo de representação.

Ou seja, a manipulação de objetos permite ao aluno a construção de diversos conceitos, ao mesmo tempo que podem ainda auxiliar na representação de conceitos ou modelos, até então abstratos para o aluno, possibilitando assim um maior conhecimento e estruturação do seu pensamento.

Ora, aliando à ideia anterior, é importante que na sala de aula, o professor estimule a utilização de várias representações, uma vez que estas são uma forma de ajudar as crianças a perceber que é possível traduzir o real e o mundo que as rodeia para uma linguagem simbólica. "A criação de sinais, desenhos e esquemas individuais constitui um suporte importante para a descoberta e construção pessoal de linguagens convencionais" (ME, 2004).

No PMEB (ME, 2007) é possível também, encontrar recomendações acerca das representações. Assim, segundo este documento emanado pelo Ministério da Educação, os alunos devem contactar com diversos tipos de representações, conhecendo-os e compreendendo-os, de forma a serem capazes de as utilizar adequadamente em todas as situações. Deste modo, ao longo da sua formação, os alunos devem:

- ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
- traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
- elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
- usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais (ME, 2007, p. 5).

É importante que ao longo da sua formação, o aluno perceba que existe uma variedade de representações e que progressivamente se sinta capaz de lidar com os diferentes tipos. É igualmente importante que os estudantes compreendam que a comunicação das suas representações é fundamental para o processo de aprendizagem, uma vez que é com os pares que se proporciona uma troca de conhecimentos.

De acordo com o PMEB (2007), é fundamental que na aula de Matemática, primeiramente os alunos partilhem ideias através de representações icónicas e só posteriormente através das simbólicas, uma vez que o professor “tem de fazer sentir a necessidade de uma linguagem partilhada, introduzindo progressivamente as representações matemáticas convencionais” (p. 9).

Relativamente ao Programa de Matemática para o Ensino Básico, homologado no ano 2013, considero que as representações estão descritas de forma implícita. Ou seja, não existe um tópico destinado para essa temática, contudo, é possível encontrar indicações para que o professor incentive os alunos a “recorrer progressivamente a métodos [de representações] mais sistemáticos e formalizados” (ME, 2013, p. 5).

A resolução de problemas e as representações

Ao longo do tempo, as investigações têm possibilitado comprovar que a utilização diversificada de representações são uma mais-valia para os alunos, pois permitem uma maior flexibilidade no que concerne à destreza na realização de tarefas de resolução de problemas (Vale & Pimentel, 2012).

Uma vez que, de um modo geral, as representações são a forma como o aluno expõe e apresenta as suas ideias, estas desempenham um papel muito importante, no que respeita à compreensão e resolução de problemas, bem como à comunicação das ideias e raciocínio matemático dos alunos.

Neste sentido, salienta-se o papel fundamental das representações relativamente à resolução de problemas, uma vez que em atividades no âmbito da Matemática, não existe pensamento sem que o aluno idealize, mentalmente ou não, as suas representações, que posteriormente vão representar o grande foco, também, da comunicação das suas ideias.

Deste modo, as representações devem ser “tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos” (NCTM, 2007, p. 75). São também um modo dos alunos interpretarem e discutirem as suas ideias, de forma que as interpretações dos colegas adquiram significado.

De acordo com Nobre, Amado e Ponte (2011), as representações proporcionam aos alunos, uma maior compreensão e interpretação de ideias matemáticas, ao mesmo tempo que lhes oferecem novas oportunidades de utilizarem, simultaneamente, várias estratégias de resolução de problemas.

Nos primeiros anos de escolaridade, as crianças representam as suas ideias matemáticas através de "representações idiossincráticas, espontâneas e imediatas, […] que têm mais a ver com o conhecimento do quotidiano do que com o conhecimento científico" (Santos, 1991, p. 21). Deste modo, são estas representações que auxiliam o aluno na compreensão e resolução de problemas, bem como possibilitam a exteriorização do seu raciocínio, pois representam uma forma de registo do método utilizado para a sua resolução.

Tal como já referi anteriormente, o desenho representa a primeira forma escrita que as crianças utilizam para comunicarem. Neste sentido, na perspetiva de Cavalcanti (2001) citado por Pinto & Canavarro (2012, p. 5), o desenho pode ter três utilidades diferentes, em tarefas de resolução de problemas:

- Para apresentar aspetos da situação apresentada no texto sem expressar relações que identifiquem as transformações numéricas:
- Para representar a resolução completa do problema, utilizando apenas o desenho;
- O aluno mistura desenhos e símbolos matemáticos.

As representações, no âmbito da resolução de problemas, podem surgir também como uma forma de avaliação, por parte do professor, pois ao observá-las, o docente poderá "conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos" (NCTM, 2007, p. 76). Além disso, e ainda de acordo com o mesmo autor, o professor poderá reaproximar, sempre que possível, as representações das crianças, com as representações convencionais, de forma que os alunos consigam estabelecer relações entre ambas, ao mesmo tempo que, de forma progressiva, melhoram as suas representações.

Capítulo III – Metodologia

O terceiro capítulo tem como objetivo primordial descrever a metodologia utilizada para a realização da investigação. Assim, caracterizam-se as opções metodológicas e identificam-se os métodos de recolha e de análise dos dados, considerando que o objetivo principal desta investigação é perceber quais as representações mais utilizadas pelos alunos durante atividades de resolução de problemas.

Opções metodológicas

Segundo Almeida (1994, p. 193) metodologia é o conjunto dos "procedimentos e instruções de trabalho, dos procedimentos teóricos à implementação dos diagnósticos técnicos […] para conhecer e dar a conhecer a realidade".

Considerando as opções metodológicas podemos distinguir dois tipos de investigação, sendo elas a quantitativa e a qualitativa. Segundo Bell (2004, pp. 19-20) os "investigadores quantitativos recolhem os factos e estudam a relação entre eles" contrariamente aos qualitativos que "estão mais interessados em compreender as percepções individuais do mundo. Procuram compreensão, em vez de análise estatística".

Assim, ao longo da minha investigação, foram analisados todos os momentos ocorridos dentro da sala de aula, através de uma observação rigorosa, quando os alunos realizavam tarefas de resolução de problemas. Desta forma, tendo em conta as características da minha investigação, caracterizo-a como uma abordagem qualitativa, que "foca um modelo fenomenológico no qual a realidade é enraizada nas percepções dos sujeitos; o objectivo é compreender e encontrar significados através de narrativas verbais e de observações […]" (Bell, 2004, p. 1).

A investigação qualitativa desenrola-se em ambientes naturais, adquirindo um carácter naturalista, em que o próprio investigador é o elemento principal de toda a investigação.

> "[…] naturalista porque não envolve manipulação de variáveis, nem tratamento experimental; é o estudo do fenômeno em seu acontecer natural. Qualitativa porque se contrapõe ao esquema quantitativista de pesquisa (que divide a realidade em unidades passíveis de mensuração, estudando-as isoladamente), defendendo uma visão holística dos fenômenos, isto é, que leve em conta todos os componentes de uma situação em suas interações e influências recíprocas." (André, 1995 citado por Teis & Teis, 2006)

De acordo com Bogdan & Biklen (1994, pp. 47-50), a investigação qualitativa inclui cinco características:

- "[…] a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal";
- "[…] é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números";
- "Os investigadores […] interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos";
- "Os investigadores […] tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.";
- "O significado é de importância vital na abordagem qualitativa".

Apesar das características desta abordagem se focarem maioritariamente nos dados recolhidos, é importante salientar que sem teoria, estes não adquirem significado. Ou seja, é partindo de "teorias que questionamos a realidade, definimos estratégias de investigação e seleccionamos métodos de recolha de dados" (Afonso N. , 2005, p. 24). Deste modo, conclui-se que só os dados observáveis não são suficientes para se tirarem conclusões, pois estes só ganham sentido se forem apoiados e fundamentados em teorias

Técnicas e instrumentos de recolha e tratamento de dados

Durante o processo de investigação é necessário que o investigador reflita sobre a melhor forma de recolher dados, bem como qual a que se adequa o público-alvo que pretende investigar. Assim, é importante que recolha informações, através de diferentes técnicas para, posteriormente, construir teorias e conclusões relativas ao seu objeto de estudo.

> "As técnicas são definidas como procedimentos operatórios rigorosos, bem definidos, transmissíveis, susceptíveis de serem novamente aplicados nas mesmas condições, adaptados ao tipo de problemas e aos fenómenos em causa. A escolha das técnicas depende do objectivo que se pretende atingir." (Carmo, 1998, p. 175 citado por Sousa & Baptista, 2011, p. 53)

Para dar continuidade à minha investigação e de forma a conseguir recolher todas as informações necessárias, foram utilizadas algumas técnicas de recolha de dados. Deste modo, os instrumentos que considerei mais adequados para este estudo foram: a observação, a recolha documental e a entrevista. Estas são as três "[…] técnicas de recolha de dados, que servem para operacionalizar as investigações qualitativas" (idem, p. 79).

Observação

A observação é uma técnica que implica a participação e presença do investigador, no local onde se desenrola a investigação. Segundo Pardal & Correia (1995, citado por Máximo-Esteves 2008, p. 87) é impossível existir um estudo científico sem que haja um observador. Esta técnica "[…] permite o conhecimento directo dos fenómenos tal como eles acontecem […] ajuda a compreender os contextos, as pessoas que nele se movimentam e as suas interações".

No que concerne aos diferentes tipos de observação, nesta investigação, utilizei preferencialmente a observação participante, em que o investigador adota uma postura principal de instrumento de investigação, participando em toda a dinâmica do grupo que está a ser observado e estudado (Estrela, 1994).

> “Na observação participante é o próprio investigador o instrumento principal de observação. Ele integra o meio a investigar, podendo, assim, ter acesso às perspectivas das pessoas […]. Deste modo, a participação tem por objectivo recolher dados […] aos quais um observador exterior não teria acesso.” (Sousa & Baptista, 2011, p. 88)

Assim, ao longo da investigação, tomei simultaneamente, uma posição de investigadora e de professora, orientando as aulas, observando os alunos, de forma a conseguir recolher todos os dados e informações necessários.

Relativamente ao modo de recolha de dados incluídos nesta técnica, podem ser “registos escritos pelo investigador, ou registos em vídeo realizados pelo investigador ou por outrem sob a sua ordem” (Afonso N. , 2005, p. 92). Por conseguinte, de forma a auxiliar toda a análise da investigação, foram realizados registos em formato fotográfico e vídeo, ao longo de todo o processo.

Os registos, acima mencionados adquirem uma grande importância em projetos de investigação, pois representam um conjunto de “informação visual disponível para mais tarde, […] serem analisadas e reanalisadas, sempre que tal seja necessário […]” (Máximo-Esteves, 2008, p. 91).

Entrevista

Segundo Máximo-Esteves (2008, p. 92), “A entrevista é uma das estratégias mais utilizadas na investigação educacional”. É um método que requer, pelo menos duas pessoas, o entrevistador e o entrevistado. Baseia-se em conversas orais, “dirigida por uma das pessoas, com o objectivo de obter informações sobre a outra” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134).

Ao utilizar esta técnica, o investigador necessita de ter bem definido, os objetivos que pretende atingir, perante a outra pessoa. No entanto, durante uma observação participante, em que o entrevistador e o entrevistado já se conhecem, esta pode ser desenrolada de forma informal (idem).

Sousa e Baptista (2011), distinguem três tipos de entrevista, a não estruturada, semiestruturada e estruturada. Contudo, para o desenvolvimento do presente projeto de investigação, foi utilizada a entrevista com carácter semiestruturado.

A entrevista semiestruturada é composta por um guião que engloba alguns tópicos ou perguntas, que o entrevistador pretende discutir. Ao longo da conversa, o entrevistador dá "liberdade ao entrevistado, embora não o deixe fugir muito do tema. O guião pode ser memorizado ou não memorizado" (idem, p. 80).

Neste tipo de entrevista, as questões podem ser flexíveis, permitindo ao entrevistado uma grande abertura para resposta. Deste modo, o entrevistador tem a possibilidade de improvisar questões, baseadas nas respostas do outro (Máximo-Esteves, 2008). É importante ainda, que o entrevistado tenha possibilidade de expressar o que pensa, no entanto as suas respostas devem ser esclarecedoras.

Relativamente à investigação por mim orientada, foram realizadas entrevistas semiestruturadas a três alunos, no final de cada resolução de problemas. É importante referir que este tipo de entrevista (semiestruturada) "reúne um conjunto de atributos que permitem utilizá-la como o instrumento metodológico mais adequado para dar expressão à voz das crianças, um requisito indispensável para que esta se torne participante activa na (re)construção do conhecimento cientifico sobre si própria" (Oliveira-Formosinho e Araújo, 2007, citado por Máximo-Esteves, 2008, p. 99).

O objetivo das entrevistas foi perceber o raciocínio matemático dos alunos, bem como as representações utilizadas na resolução dos problemas propostos. Assim, houve sempre uma questão orientadora, que se manteve em todas as entrevistas, designadamente *"Queres ensinar-me a perceber como pensaste, para resolveres este problema?"*. No desenrolar da conversa, os alunos explicavam o seu pensamento o que proporcionava outras questões de improviso.

As entrevistas foram todas gravadas, com autorização dos encarregados de educação, para posteriormente serem transcrita e analisadas. A gravação, destes diálogos, é deveras importante, pois possibilita "o registo integral da conversação, de modo que o entrevistador fica com mais liberdade para se concentrar no tópico e na dinâmica da entrevista" (Máximo-Esteves, 2008, p. 102).

Recolha documental

Durante um projeto de investigação, a recolha e análise documental ganha uma importância fundamental, no entanto, esta pode ser vista como uma técnica bastante difícil e complexa para o investigador (Pardal & Correia, 1995).

Relativamente à área das ciências da educação, praticamente todos os investigadores recorrem a esta técnica, pois "a análise documental de ficheiros e registos educacionais pode relevar-se uma fonte de dados extremamente importante" (Johnson, 1984, citado por Bell, 2004, p. 101), pois permite um conhecimento prévio de todo o contexto, o que pode influenciar, ou não, todo o processo investigativo.

De acordo com Bell (2004) os documentos recolhidos/ analisados podem ser divididos em dois tipos de fontes, as primárias e as secundárias. Contudo para a presente investigação, foram analisadas, maioritariamente fontes primárias, que "são aquelas que foram produzidas durante o período a ser investigado" (idem, p. 104). Estes documentos podem ser vistos também como documentação privada em que aparecem os documentos pessoais, tais como os trabalhos realizados pelos alunos ou os cadernos diários (Afonso N. , 2005).

Considerando o objetivo e as questões do estudo, assumiram especial relevo as produções escritas dos alunos relacionadas com a resolução dos problemas propostos. Assim, ao longo de todo o período de investigação, recolhi os trabalhos produzidos pelos alunos, para posteriormente os analisar. Deste modo a "análise dos artefactos produzidos pelas crianças é indispensável quando o foco da investigação se centra na aprendizagem dos alunos" (Máximo-Esteves, 2008, p. 92).

Importa referir ainda que numa fase inicial da investigação, foram analisados documentos oficiais, já elaborados, tais como o Projeto Curricular de Turma, com o objetivo de conhecer melhor a realidade da turma, no que concerne à aprendizagem e desenvolvimento, da área da matemática. De acordo com Lee (2003, citado por Chagas 2010, p. 54) "uma das grandes vantagens da utilização desta técnica é o facto de poder ser utilizada como metodologia não interferente, isto é, os dados são obtidos de modo a não envolver a recolha directa da informação por parte do investigador afastando problemas que possam ser causados pela sua presença".

Participantes

A investigação foi realizada numa escola pública pertencente à Rede do Ministério da Educação, de 1.º ciclo, situada na cidade de Setúbal. É uma escola que recebe crianças pertencentes, maioritariamente a bairros de habitação social, com grandes problemas socio - económicos.

Relativamente à origem dos alunos que frequentam a escola, a sua maioria pertence à comunidade cigana, no entanto também existe um grande número de crianças oriundo de vários países africanos. Desta forma, é possível constatar que é uma escola com grande diversidade cultural e étnica.

O presente trabalho desenvolveu-se numa turma de 2.º ano de escolaridade, constituída por vinte e um alunos, sendo que onze pertencem ao sexo masculino e dez ao sexo feminino, com idades compreendidas entre os sete e os oito anos. A maioria dos alunos é de nacionalidade portuguesa, sendo de etnia cigana.

Os alunos fazem parte integrante de famílias com baixo nível económico, sendo que dezanove alunos são subsidiados pela Ação Social Escolar, destacando que quinze pertencem ao escalão A e quatro ao escalão B.

De uma forma geral, e tendo em conta todas as características dos alunos, incluindo o contexto em que vivem, esta é uma turma que revela alguns problemas de assiduidade e pontualidade. Apesar de não serem um grupo com graves problemas de comportamento, pode-se referir que alguns dos seus elementos são bastante faladores o que por vezes perturba o bom funcionamento da aula.

Todos os alunos da turma participaram nas atividades desenvolvidas por mim, contudo foram selecionados três para analisar aprofundadamente. Para esta seleção o meu critério de escolha foi que todos os alunos analisados soubessem ler razoavelmente, que os permitisse realizar as atividades de forma individual e autónoma, sem que para isso fosse necessária a minha ajuda. De acordo com estes critérios foram selecionados a Neuza, o Daniel e a Raquel.

Processo de recolha dos dados

O estágio decorreu ao longo de 11 semanas, do ano letivo 2013/2014. Teve início no dia 14 de outubro de 2013 e terminou no dia 15 de janeiro de 2014. Durante as duas primeiras semanas, permaneci na escola, de segunda a sexta e a partir da terceira semana, e ao longo das noves semanas restantes, a permanência no estágio foi de segunda a quarta, sendo que à quinta e sexta, existiam aulas teóricas, na Escola Superior de Educação.

A primeira semana destinou-se à observação, no entanto uma vez que no ano anterior já tinha estagiado com a mesma turma, considerou-se que este novo contacto começasse com observações e intervenções pontuais, de forma que a turma se voltasse a inteirar da presença de estagiárias, na sala de aula, bem como para perceber em que ponto de desenvolvimento se encontravam os alunos.

Depois de ter o tema definido, fui reunindo com a professora Fátima Mendes, orientadora do meu projeto, para definir estratégias de intervenção. Além disso, reuni também com o professor titular de turma, de forma que este ficasse elucidado sobre todo o processo, uma vez que desde o início, me deu o seu total apoio.

Juntamente com a professora orientadora, e com o consentimento do professor titular de turma, decidimos que além de observar os alunos a resolverem problemas, seria necessário recolher as suas produções, bem como no final de cada tarefa, realizar entrevistas semiestruturadas, individualmente, a cada aluno com a gravação desses diálogos.

Para que a gravação dos alunos pudesse ser concretizada, o professor titular de turma informou-me que era necessário que os pais autorizassem. Deste modo, reuni, individualmente, com cada um dos encarregados de educação, elucidando-os sobre a minha investigação e pedindo-lhe autorização, por escrito[2], para proceder à gravação dos seus educandos.

Depois de definir todos os aspetos necessários para iniciar a investigação, foi decidido que, um dia por semana, seria destinado à resolução de problemas. No entanto, houve uma semana em que esta tarefa se repetiu em dois dias. Estas atividades começaram a ser

[2] Autorização em Anexo – Anexo 1

propostas desde a segunda semana de estágio, contudo não foram selecionados todos os problemas para este relatório de investigação.

A escolha dos problemas foi feita com base nos objetivos e conteúdos estipulados para lecionar em cada semana e antes de serem apresentados aos alunos, houve sempre uma supervisão da professora orientadora, bem como do professor titular de turma.

Depois da resolução dos alunos, estas foram discutidas em grande grupo. No final foram recolhidas todas as produções escritas dos alunos de modo a serem posteriormente analisadas.

Importa referir que ao longo do estágio, os alunos resolveram 31 problemas, contudo foram selecionados, já numa fase de análise, sete problemas que representavam uma maior diversidade de representações.

Os problemas selecionados foram propostos, de forma repartida, ao longo do 1.º período e início do 2.º, com o objetivo de se perceber se existiu evolução, por parte dos alunos, relativamente às estratégias de resolução adotadas.

Processo de análise dos dados

Ao longo do processo de investigação, foi sendo realizada uma primeira análise de dados, de forma a orientar o meu trabalho. No entanto, destacam-se dois momentos importantes de análise: a análise e observação do trabalho dos alunos, decorrente ao longo das aulas e dentro da sala de aula e a análise das produções dos alunos e das gravações de vídeo, numa fase posterior à recolha.

O primeiro momento de análise foi fundamental para que eu pudesse adaptar as minhas estratégias de investigação ao grupo de alunos investigados, de forma a conseguir conciliar o objetivo do estudo com o foco da aprendizagem da turma. Foi também um momento importante para que conseguisse refletir sobre a minha prática, com o objetivo de melhorar as minhas intervenções com os alunos, dentro da sala de aula.

Assim, esta primeira fase foi fundamental para que se tornasse possível uma observação rigorosa, que me permitisse a captação “dos comportamentos no momento em que eles se produzem e em si mesmos, sem a mediação de um documento ou um testemunho" (Quivy & Campenhoudt, 2005, p. 196).

Relativamente ao segundo momento, este concretizou-se na análise integral das produções dos alunos, bem como das gravações que tinha realizado anteriormente. Nesta fase foi muito importante analisar todas as resoluções dos alunos, com o objetivo de perceber, efetivamente, quais as representações que são mais utilizadas por eles, quando resolvem problemas de cariz matemático, respondendo assim à questão de partida.

Foi nesta segunda fase de análise que consegui confrontar as produções dos alunos com a revisão da literatura, o que por sua vez, possibilitou-me a categorização de cada uma das representações em icónicas ou simbólicas. Associadas a estas representações, as produções dos alunos foram ainda categorizadas em subcategorias. Desta forma, associadas às representações icónicas encontram-se as imagens e desenhos, os símbolos não convencionais e os esquemas. Por outro lado as representações simbólicas estão divididas em símbolos convencionais e vocabulário ou linguagem matemática.

As questões de partida para a investigação tiveram um papel fundamental, uma vez que desencadearam a definição de estratégias e métodos para que fosse possível ir ao encontro de respostas conclusivas, partindo da análise interpretativa das produções dos alunos.

Ou seja, à medida que analisei as resoluções de problemas dos alunos interpretei as suas representações, tendo em conta aquelas que utilizam mais vezes, e em que contexto as utilizam. Certamente, as conclusões retiradas deste estudo representam uma pequena amostra, uma vez que "os resultados da investigação são válidos naquele contexto e permitem compreender ou explicar apenas o que acontece naquele lugar e naquele tempo" (Máximo-Esteves, 2008, p. 104).

As aulas em que foram propostos os problemas

Ao longo do período de estágio, foram propostos problemas, de forma a conseguir dar sentido à minha investigação. Assim, destinou-se um dia por semana, em que os alunos resolviam os problemas, durante o tempo destinado a lecionar Matemática.

As aulas em que se realizavam problemas eram divididas em três fases: Apresentação do problema; resolução do problema; e discussão da problema.

Apresentação do problema

Quando a aula se iniciava, informava aos alunos que iam resolver problemas, de forma individual. Depois de distribuir por cada um o enunciado/ folha de registo, referia que era muito importante que registassem todos os seus cálculos e formas de resolução.

Cada folha era composta pelo enunciado do problema, um espaço para os alunos o resolverem e outro para registarem por escrito, a resposta à questão do problema.

Para apresentar a tarefa, era pedido a um ou dois alunos que lessem o enunciado. Seguidamente, eu voltava a ler, para que todos o compreendessem. Posto isto, procedia-se à leitura silenciosa e individual do problema, por cada aluno.

Após a leitura individual, os alunos expunham as suas dúvidas, para que eu as esclarecesse e só posteriormente é que iniciavam a sua resolução.

Resolução do problema

Nesta fase, os alunos dispunham de sensivelmente trinta minutos para resolverem os problemas.

Tendo em conta as características dos alunos, alguns necessitavam de ajuda para resolver os problemas, pois revelavam grandes dificuldades de compreensão. No entanto, os alunos selecionados para este estudo mostraram-se autónomos na resolução dos problemas e resolviam-nos de forma individual.

Enquanto os alunos resolviam os problemas, eu circulava pela sala, de forma a tentar perceber os seus raciocínios, bem como as dificuldades que sentiam enquanto resolviam os problemas.

Nesta altura, tentava também perceber quais os alunos que necessitavam de auxílio, bem como aqueles que poderiam ser selecionados para a discussão das tarefas. Contudo, esta escolha recaiu também naqueles alunos que não conseguiram resolver os problemas individualmente, pois foi uma forma de os conseguir auxiliar a compreenderem o problema, bem como a sua forma de resolução.

Antes de finalizar esta fase, certificava-me que a maioria dos alunos, já tinha concluído as tarefas para que pudessem participar ativamente na discussão.

Discussão do problema

Na discussão, eu solicitava a alguns alunos que lessem a sua resposta, à questão do problema. Seguidamente, selecionava dois ou três alunos, para irem ao quadro, resolverem o problema, tal como tinham feito na sua folha de registo.

Nesta fase, todos os alunos tinham a oportunidade de participar, sempre que quisessem, colocando o dedo no ar. Os alunos podiam colocar questões sobre a resolução dos colegas, discutirem estratégias e raciocínios.

A discussão dos problemas era também, uma forma de eu perceber se os alunos tinham conseguido resolver, com sucesso os problemas, bem como comparar as estratégias de cada um deles.

Esta fase demorava mais ou menos 15 minutos, dependendo dos alunos que iam ao quadro, bem como da discussão gerada entre a turma.

A proposta pedagógica

Embora os alunos tenham resolvido 31 problemas, foram selecionados apenas sete, de modo a serem analisados. Este aspeto está associado ao tempo disponível para a realização do relatório de investigação. Deste modo, para elaborar as tarefas foram realizadas pesquisas em vários documentos, como:

- Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2013);
- Tese de doutoramento de Ferreira, E. (2012);
- Programa de Matemática – Formação continua. Escola Superior de Educação de Viseu (ano letivo 2010/11).

Neste sentido, a seguinte tabela, mostra de forma sucinta a fonte de cada um dos problemas:

Tabela 1 - Fonte de cada problema

Problema	Fonte
Os bancos	Construído por mim
Pastilhas Gargantox	Programa de Matemática – formação contínua – ESE Viseu (ano letivo 2010/11)
A manhã do Rui	Construído por mim
A árvore de Natal	Construído por mim
Os enfeites para a árvore	Construído por mim
A coleção de cromos da Sara	Ferreira, (2012)
O livro novo do António	Ferreira, (2012)

Para caracterizar os problemas propostos aos alunos do 2.º ano, recorro a uma tabela, que identifica os problemas, os conteúdos, os objetivos e a data em que foram realizados pelos alunos.

Tabela 2 - Tabela de caracterização dos problemas

N.º	Problemas	Conteúdos	Objetivos	Data
N.º 1	**Os bancos** Os bancos que a Bruxa Mimi comprou são iguais aos da figura. Quantas pernas têm 6 bancos iguais a este?	Números naturais	Resolver problemas	29/10/2014
N.º 2	**Pastilhas Gargantox** O Rúben constipou-se e está com uma forte dor de garganta. A mãe foi à farmácia comprar uma caixa de pastilhas Gargantox. Quantas pastilhas tem cada caixa, sabendo que tem 3 placas como aquela que está ilustrada na figura ao lado? Explica o teu raciocínio.	Números naturais	Resolver problemas envolvendo diferentes operações.	18/11/2014
N.º 3	**A manhã do Rui** O Rui demora 10 minutos a tomar o pequeno-almoço, 15 minutos a lavar-se e 10 minutos a vestir-se. Depois ainda vai arrumar a mochila, tarefa que o ocupa 5 minutos. Finalmente sai de casa para a escola, demorando 15 minutos no caminho. Chega à escola mesmo às 9 horas.	Tempo: A hora;	Resolver problemas	27/11/2014

	Quanto tempo passa desde que o Rui se levanta até chegar à escola? Para não chegar atrasado, a que horas tem o Rui de se levantar?			
N.º 4	**A árvore de Natal** Do lado direito da árvore de Natal colocaram-se 13 prendas e do lado esquerdo 10. Quantas prendas há junto da árvore?	Números naturais; Adição.	Resolver problemas envolvendo diferentes operações. Compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar.	4/12/2014
N.º 5	**Os enfeites para a árvore** Para a semana vamos enfeitar a árvore de Natal. As bolas estão dentro de uma caixa, na dispensa. A caixa tem 25 bolas. Como a nossa turma é constituída por 17 alunos, e cada um vai tirar uma bola, quantas bolas ficam na caixa?	Números naturais; Subtração	Resolver problemas envolvendo diferentes operações. Compreender a subtração nos sentidos retirar, comparar e completar.	11/12/2014
N.º 6	**A coleção de cromos da Sara** A Sara tinha 65 cromos da coleção do Pet Shop que andava a fazer. Como é muito amiga da Beatriz, deu-lhe 29 cromos que tinha repetidos. Com quantos cromos ficou?	Números naturais; Subtração	Resolver problemas envolvendo diferentes operações.	13/1/2014
N.º 7	**O livro novo do António** No dia de anos do António, a mãe deu-lhe um livro de histórias. O livro tem 300 páginas. Na 1ª semana, o António leu 148 páginas. Quantas páginas lhe faltam para acabar de ler o livro?	Números naturais; Adição e subtração	Resolver problemas envolvendo diferentes operações.	13/1/2014

Importa referir que ao longo de todas as sessões, tentei apresentar os problemas, sempre de forma apelativa, para que os alunos tomassem uma atitude positiva em relação às atividades propostas.

Capítulo IV – Análise de dados

Este capítulo inclui a análise dos dados recolhidos. Considerando que o projeto de investigação tem como objetivo caracterizar as representações utilizadas pelos alunos do 2.º ano de escolaridade, durante atividades de resolução de problemas, esta análise pretende responder de forma clara às questões orientadoras.

Tal como foi referido no capítulo da metodologia, esta análise foca-se nas resoluções de três alunos dos problemas propostos. Para tal, é realizada uma caracterização de cada um dos alunos, seguidamente apresento e analiso, as suas produções escritas, sustentando-me nas suas folhas de registo, bem como nas suas explicações orais, gravadas ao longo de toda a investigação.

No final da análise de cada aluno, é apresentada uma síntese das representações usadas por cada um, recorrendo a uma tabela. Deste modo é possível também, identificar as possíveis evoluções dos alunos.

Neuza

Neuza é uma aluna que demonstra um grande gosto e interesse pela escola e por todas as atividades escolares. É muito responsável e concentrada, empenhando-se em todas as tarefas propostas.

É uma aluna muito esforçada, mostrando gostar de ser bem-sucedida. De acordo com as informações do professor titular e com as minhas observações, a aluna não revela dificuldades de aprendizagem, destacando-se pelas suas excelentes notas e pelo seu ótimo aproveitamento. Gosta de apresentar e defender as suas ideias e é muito participativa.

As representações usadas por Neuza

A Neuza resolve o Problema dos bancos", em que era necessário calcular o número total de pernas, de seis bancos, cada um com três pernas, conforme se pode verificar na figura 3, recorrendo a uma representação icónica, na subcategoria desenho.

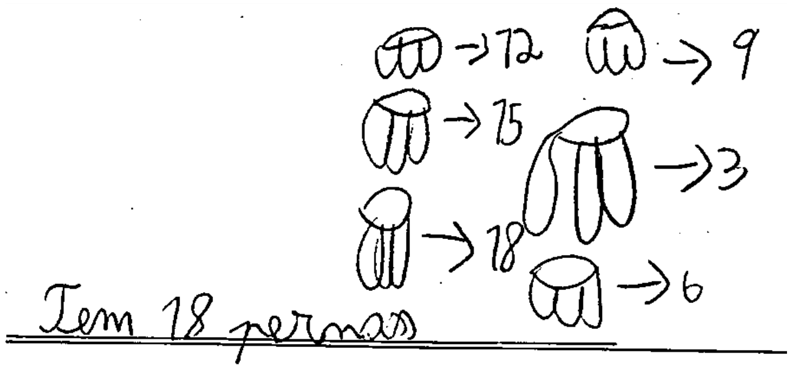


Figura 3 - Resolução do problema n.º1 (Neuza)

Neuza parece ter necessidade de representar os seis bancos mencionados no enunciado do problema. A análise da sua resolução evidencia que desenha um primeiro banco, ao qual associou o número três, correspondente a três pernas. Depois desenha outro banco, ao qual associa o número seis. Parece continuar a desenhar os restantes bancos e a adicionar sucessivamente três ao número de pernas de banco já obtido, registando as várias somas sucessivas.

A observação dos seus registos mostra que o desenho do primeiro banco é maior do que os seguintes, eventualmente porque adapta os desenhos ao espaço que tem disponível.

Embora tenha desenhado a totalidade dos bancos e respetivas pernas, a aluna parece ter adicionado sucessivamente o número três, não realizando a contagem de um a um.

Relativamente ao problema "Pastilhas Gargantox", em que o objetivo era perceber quantas pastilhas, no total, tinham as três placas de comprimidos, Neuza apresenta a seguinte resolução:

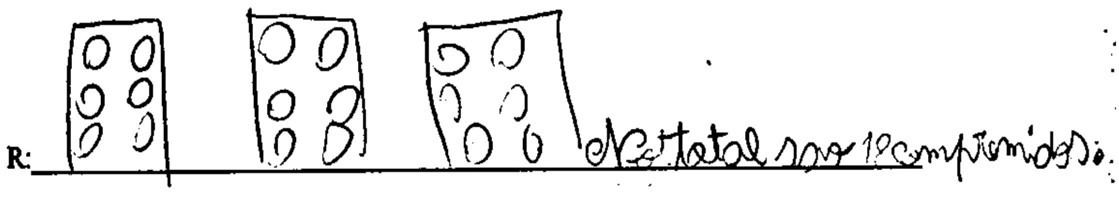


Figura 4 - Resolução do problema n.º2 (Neuza)

Na sua resolução, Neuza desenha três retângulos e no interior de cada um desenhou seis círculos. Quando questionada sobre o significado do seu desenho, Neuza aponta para o enunciado explicando que, se cada placa tem seis comprimidos, desenhou as três placas e os seis comprimidos em cada uma. Seguidamente contou o total de círculos desenhados, um a um e escreveu na folha de registo: "No total são 18 comprimidos".

Para resolver este problema, Neuza utiliza uma representação icónica, através da subcategoria o desenho. Assim é-lhe possível representar pormenorizadamente as três placas que continha a caixa de comprimidos, desenhando também a totalidade dos comprimidos.

No que concerne ao problema "A manhã do Rui", em que era necessário calcular o tempo que o Rui necessita desde que se levanta até chegar à escola, bem como a que horas se precisa de levantar, Neuza opta por resolvê-lo através da reta numérica, tal como se pode verificar na figura 5:

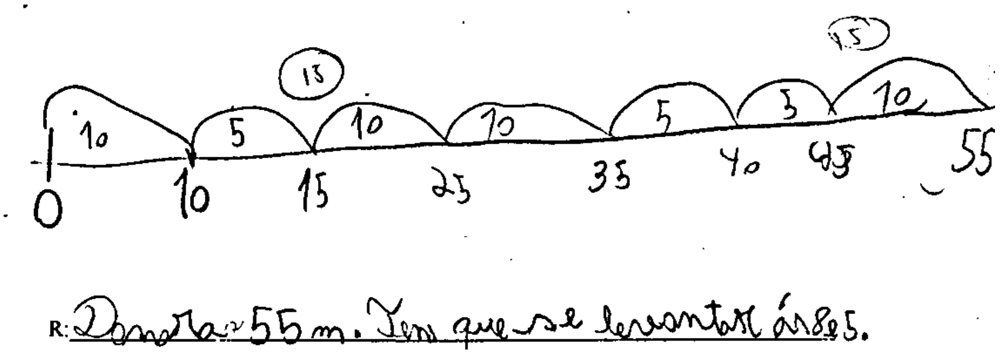


Figura 5 - Resolução do problema n.º3 (Neuza)

Esta estratégia adotada por Neuza pode ser considerada como icónica na subcategoria de esquemas, uma vez que a aluna apresenta a reta numérica. Verifica-se que, na sua resolução, a aluna realiza adições sucessivas de cinco ou de dez.

Quando questionada sobre a sua resolução, a Neuza afirmou:

> Comecei por escrever o zero que é quando o Rui se levanta. Depois li que ele demora dez minutos a tomar o pequeno-almoço e por isso dei um salto de dez. Depois ele demorou quinze minutos a lavar a cara e dei mais um salto de quinze, que é este cinco mais outro de dez. Como demora dez minutos a vestir-se dei mais um salto de dez e fui ter até ao trinta e cinco. Depois dei outro saltinho de cinco [tempo que o Rui

> demora a arrumar a mochila] e mais outro de quinze, que fiz em dois saltos, o cinco mais o dez. Vi que tinha ido parar ao cinquenta e cinco, que é o tempo que ele demora no total.

Respondida assim à primeira questão do problema, Neuza, apesar de não apresentar nenhum cálculo auxiliar, chega rapidamente à solução da segunda questão escrevendo que o Rui tem que se levantar às oito horas e cinco minutos. Desta forma, penso que a aluna recorre ao cálculo mental, sem apoio de registo escrito, para encontrar a resposta à segunda questão.

A utilização da reta numérica foi um modelo de apoio ao cálculo introduzido por mim, para tentar desenvolver o raciocínio dos alunos, uma vez que estes estavam muito habituados a usar o desenho ou símbolos não convencionais, como uma forma de resolução de problemas.

Em relação ao problema intitulado "A árvore de Natal", cujo objetivo era calcular o número total de prendas colocadas na árvore de Natal, Neuza apresenta a seguinte resolução:

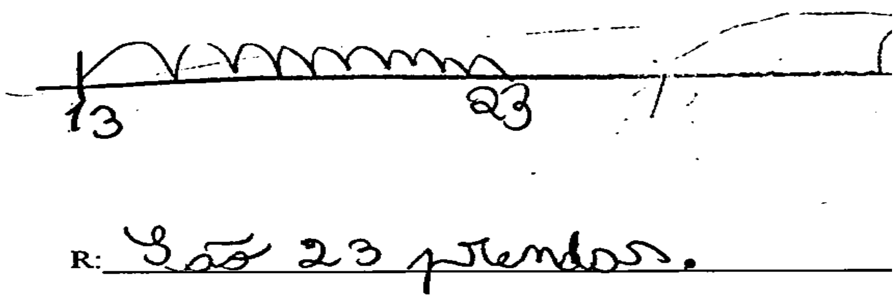


Figura 6 - Resolução do problema n.º4 (Neuza)

Ao explicar oralmente como resolveu o problema, Neuza aponta para a sua folha de registo e afirma:

> Eu fiz a reta numérica e no primeiro número pus o treze, que no problema era o primeiro número que falava e depois dei mais dez saltinhos e fui parar a um número que era o vinte e três. E deu o resultado, que era o vinte e três.

Neuza consegue assim justificar o seu raciocínio e a forma como chega à solução do problema. A aluna recorre à reta numérica, tal como no problema anterior. Primeiramente, desenha uma reta e começa por escrever o número 13. Depois desenha dez “saltinhos” [dado fornecido pelo enunciado] e contou-os à medida que os desenhava, até atingir um total de dez. Neste sentido, tendo em conta as características da representação da aluna, esta é do tipo icónico na subcategoria de esquemas. Embora Neuza tenha recorrido à reta verifica-se também, a pouca destreza no seu uso para apoiar o cálculo, facto que pode estar relacionado com a sua idade e nível de raciocínio.

Contudo, enquanto no problema anterior Neuza realiza saltos de 5 e de 10, neste problema recorre a saltos de um, parecendo regredir na estratégia usada. Provavelmente este facto está relacionado com as características do número usado, o 13, que não é um número de referência.

Para resolver o problema dos enfeites para a árvore de Natal, em que os alunos necessitam de perceber quantas bolas de natal ficam dentro de uma caixa, depois de cada um retirar uma, Neuza apresenta a seguinte resolução:

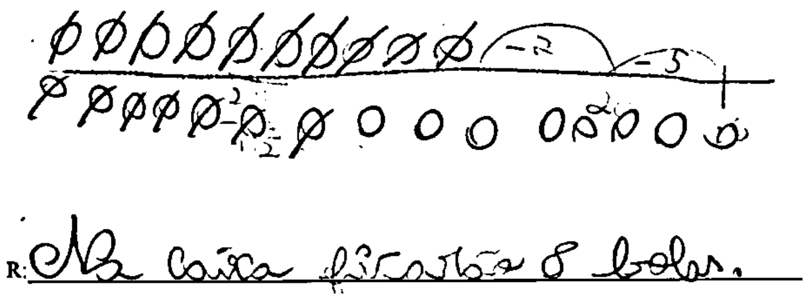


Figura 7 - Resolução do problema n.º5 (Neuza)

A aluna parece começar por resolver este problema recorrendo à reta numérica, contudo, considera que não estava a conseguir encontrar uma solução e decide recorrer a outra estratégia. Assim, como se pode verificar na figura 7, Neuza representa cada uma das bolas de natal por círculos. Desenha 25 círculos, que correspondem às bolas que estavam dentro de uma caixa, organizando-os em duas filas que sugerem a decomposição da quantidade 25 em 10+15. Seguidamente risca um total de 17, começando por riscar 10 e depois mais 7 círculos da linha de baixo.

Apoiada no seu registo escrito, quando questionada, Neuza explica o seu raciocínio oralmente:

Neuza: Fiz vinte e cinco bolas e fui riscando dezassete. Depois quando eu tirei dezassete bolas foi parar ao número oito. Por isso sobraram oito bolas que ficaram na caixa.

Estagiária: Então mas se tu fosses fazer o algoritmo, era uma conta de adição ou subtração?

Neuza: Era uma conta de menos.

Estagiária: Porquê?

Neuza: Porque às vinte e cinco bolas que estavam na caixa eu tirei dezassete que era o número de alunos e cada um ia tirar uma bola.

Neuza consegue assim justificar como obteve uma solução para o problema, mostrando que interpretou de forma correta o enunciado. No entanto, notou-se que sentiu alguma dificuldade na definição da estratégia, pois tenta primeiramente, tal como já referi, apoiar-se na reta numérica. Além disso, depois de fazer uma representação icónica da situação, recorrendo a símbolos não convencionais, Neuza parece ter recorrido à contagem um a um dos símbolos que não estavam riscados.

Em relação ao problema "A coleção de cromos da Sara", cujo objetivo era perceber com quantos cromos fica Sara depois de dar à amiga os cromos repetidos, Neuza apresenta a seguinte resolução:

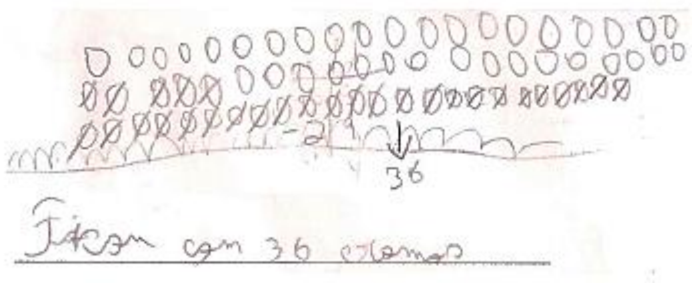


Figura 8 - Resolução do problema n.º6 (Neuza)

A aluna começa por representar 20 'círculos', depois 21 e finalmente 24, organizados em três filas horizontais, perfazendo os 65 cromos da Sara. Depois risca 29 bolas, parecendo tê-las contado uma a uma. Finalmente parece ter encontrado o total de cromos contando os círculos que ficaram por riscar, obtendo um total de 36.

Na sua representação é visível que a aluna associa o problema à subtração, contudo verifica-se que Neuza não utiliza qualquer tipo de símbolo convencional, tal como o “-“, nem efetua algum cálculo que envolva a subtração.

Quando explica oralmente como pensou, Neuza aponta para a sua resolução e diz,

> Eu comecei por fazer sessenta e cinco bolinhas [aponta para a sua folha de registo] que eram os cromos da Sara. E depois tirei vinte e nove bolinhas [rodeando com o dedo os círculos que riscou com um traço na diagonal] e deu-me o resultado de trinta e seis cromos, que são aqueles com que ela [a Sara] ficou [conta, de um em um, os círculos que não riscou].

Mais uma vez Neuza começou por tentar resolver este problema recorrendo à reta numérica, no entanto não teve sucesso na sua elaboração. A aluna consegue então, justificar a sua resposta, explicando que representa 65 círculos e posteriormente risca 29 círculos que correspondiam ao total de cromos que a Sara deu à amiga, contando um a um os que sobraram.

A representação de Neuza parece ser assim, uma representação icónica inserida na subcategoria símbolos não convencionais, uma vez que a aluna representa os cromos por círculos. Contudo Neuza também recorre a números, visto que utiliza o número 36 para identificar o total de círculos [cromos] que restaram à Sara.

Finalmente, Neuza resolve o sétimo problema “O livro novo do António”, em que era preciso calcular o número de páginas que o António tinha que ler até acabar o livro, conforme se apresenta na figura 9:

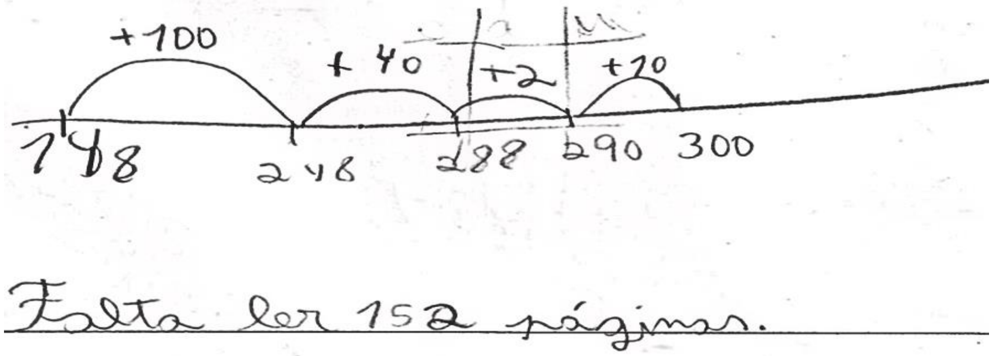


Figura 9 - Resolução do problema n.º7 (Neuza)

Neuza começa por tentar utilizar o algoritmo para resolver este problema, contudo parece não ter conseguido encontrar uma solução. Desta forma recorre à reta numérica. Assim, inicia o cálculo a partir do número 148, que corresponde ao número de páginas lidas pelo António. Seguidamente efetua somas (saltos) até chegar ao número 300, número total de páginas do livro. Neste sentido, começa por acrescentar 100, o que a faz chegar ao número 248. Posteriormente acrescenta 40, o que a faz encontrar o número 288. Depois acrescenta 2 ao 288 para chegar ao 290, ao qual finalmente, acrescenta 10 encontrando o número 300. Na sua resolução escrita Neuza não dá a resposta ao problema.

Quando interpelada para explicar a sua resolução, e apoiando-se no seu registo escrito, Neuza explica:

> Neuza: Eu fiz a reta numérica. Primeiro escrevi o número 148, porque era o primeiro número que falava [no enunciado]. Dei um saltinho de 100 e fui parar ao 248. Depois dei um saltinho de 40 e fui parar ao 288. Como 88 + 2 é 90, dei um salto de 2 e fui parar ao 290. Para chegar ao 300 só faltavam mais 10 e por isso dei um salto de dez e fui parar ao 300.
>
> Estagiária: Mas a questão do problema é "Quantas páginas lhe faltam para acabar de ler o livro?". Como chegaste ao resultado?
>
> Neuza: Então somei na minha cabeça o cem mais quarenta mais dois mais dez e deu cento e cinquenta e dois.

No diálogo, Neuza justifica oralmente todo o seu raciocínio, uma vez que na figura não são explicitados os cálculos auxiliares que a aluna efetuou para chegar ao número total de páginas que faltam ler (152). A aluna explica que somou sucessivamente 100 com 40, com 2 e com 10, ou seja, recorreu a somas parciais sucessivas, usando números de referência.

Nota-se que para a realização da reta numérica, a Neuza evidencia algumas imperfeições, pois verificam-se algumas dificuldades no que respeita à orientação espacial da reta, visto que a reta não parece ser uma linha reta mas uma sim curva. Contudo, apesar destas dificuldades, a aluna consegue apoiar-se nela para chegar a uma solução acertada.

A estratégia adotada por Neuza parece apoiar-se numa representação icónica, inserida na subcategoria de esquemas.

Síntese das representações usadas por Neuza

A tabela seguinte apresenta de forma sintetizada as diferentes representações usadas por Neuza, nas resoluções dos problemas propostos:

Tabela 3 - Representações utilizadas por Neuza

	Representação Icónica			Representação Simbólica	
	Imagens/ desenho	**Símbolos não convencionais**	**Esquema**	**Símbolos convencionais**	**Vocabulário/ linguagem matemática**
N.º1	X				
N.º2	X				
N.º3			X		
N.º4			X		
N.º5		X			
N.º6		X			
N.º7			X		

A análise da tabela, das produções da aluna e das suas explicações orais durante as entrevistas, evidenciam que esta opta sempre por representações icónicas, quando resolve os problemas proposto. Através das suas produções, percebe-se que a subcategoria mais utilizada por Neuza são os esquemas.

A análise aprofundada das produções de Neuza parece evidenciar que houve alguma evolução nas representações a que recorre. Efetivamente, a aluna começa por resolver os problemas recorrendo ao desenho, contudo é verificável uma evolução, para a reta numérica. No entanto nota-se uma regressão, em dois problemas, visto que recorre à utilização de símbolos não convencionais, como os círculos, para conseguir resolver a tarefa, usando uma estratégia muito elementar.

As dificuldades e os aparentes retrocessos observados no percurso de Neuza parecem estar relacionados com a operação implícita no problema. Pois, nos dois problemas de subtração, verifica-se, através das suas produções, que a aluna tentou recorrer à utilização da reta numérica, não o tendo conseguido fazer. Por isso recorre a símbolos não convencionais, usando uma estratégia de contagem, muito elementar, para resolver o problema.

Daniel

Daniel é um aluno bastante interessado, revelando um gosto imenso em aprender. Gosta de ser o primeiro a realizar as tarefas propostas e demonstra um grande descontentamento quando não consegue realizá-las com sucesso. Ainda assim, revela ser uma criança que se distrai facilmente a conversar com os colegas.

De acordo com informações do professor titular de turma e com a minha observação, Daniel não revela dificuldades de aprendizagem e aparenta estudar bastante em casa. Mostra-se sempre disponível para ir ao quadro, é bastante participativo e gosta de ajudar os colegas sempre que necessário.

As representações usadas por Daniel

Daniel resolve o problema “Bancos”, em que era necessário calcular o número total de pernas, de seis bancos de três pernas, do seguinte modo:

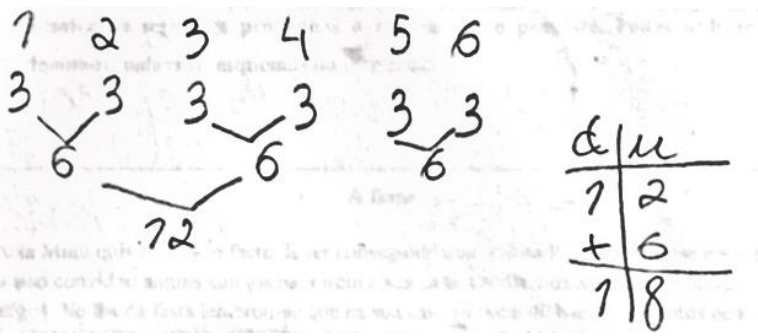


Figura 10 - Resolução do problema n.º1 (Daniel)

Na sua resolução, Daniel representa cada banco por um algarismo. Deste modo, tendo em conta que o enunciado se refere a seis bancos, o aluno escreve, consecutivamente os números do um ao seis. Seguidamente, por baixo de cada número escreve o número três, que corresponde ao número de pernas de cada banco. Depois, adiciona parcelas iguais, agrupando-as duas a duas (como se pode verificar nos conjuntos de três mais três). Posteriormente, repete o mesmo procedimento anterior, mas neste caso, realiza uma adição de seis mais seis obtendo o número 12, sobrando assim um número seis.

Para finalizar e de forma a perceber quantas pernas existem ao todo, utiliza o algoritmo, identificando as dezenas e as unidades e soma doze com seis.

Daniel utiliza assim um esquema em árvore, para apoiar as adições que efetua, contudo as suas representações parecem inserir-se nas representações simbólicas, mais propriamente nas subcategorias de símbolos convencionais.

Para o problema “Pastilhas Gargantox”, cujo objetivo era perceber quantas pastilhas, no total, tinham três placas de comprimidos, Daniel realiza a seguinte resolução:

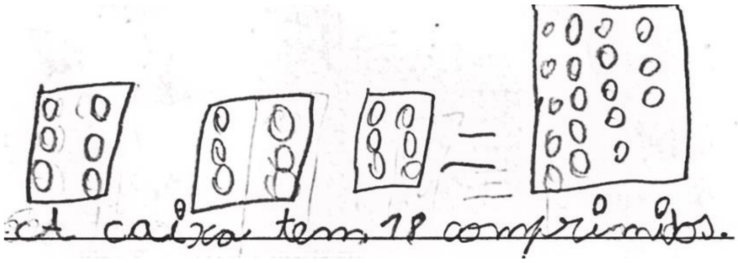


Figura 11 - Resolução do problema n.º2 (Daniel)

À semelhança de Neuza, Daniel também opta por desenhar três placas com seis ‘comprimidos’, cada uma. Aparentemente, o aluno organiza os ‘círculos’ de forma vertical, em filas de três, sendo que cada retângulo (placa) é constituído por duas filas de três círculos. Seguidamente, coloca um símbolo convencional (=) e à frente desenha um retângulo com 18 círculos. Nesse retângulo, o aluno representa três filas constituídas por cinco ‘círculos’ e finalmente uma fila com 3, organizadas na forma vertical, totalizando assim os 18 comprimidos existentes na caixa.

Nesta resolução, Daniel utilizou maioritariamente uma representação icónica, na subcategoria desenho, embora tenha usado alguns símbolos convencionais, como o sinal de igual e o número 18 na resposta ao problema.

Relativamente ao problema “A manhã do Rui”, em que era necessário calcular o tempo que o Rui necessita desde que se levanta até chegar à escola, bem como a que horas se precisa de levantar, Daniel resolve-o da seguinte forma:

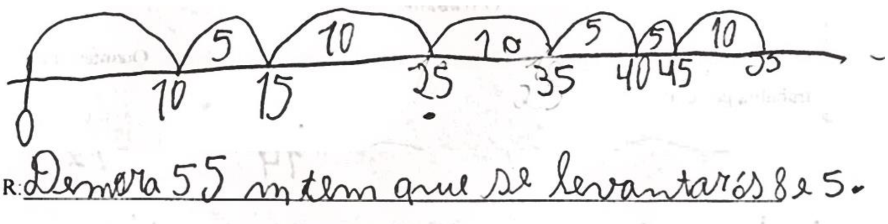


Figura 12 - Resolução do problema n.º3 (Daniel)

O aluno recorre à utilização da reta numérica para resolver o problema proposto. Para tal, desenha uma reta na horizontal e escreve o número zero, que corresponde à hora em que o Rui acordou. Seguidamente, sabendo que o Rui demora dez minutos a tomar o pequeno-almoço, escreve o número dez. Partindo daí soma sempre o tempo que o Rui demora nas várias atividades até chegar à escola.

Note-se que para tal, o aluno trabalha sempre com somas sucessivas de cinco e de dez, sendo que, necessita, por vezes, de decompor o número 15, em cinco mais dez.

Quando questionado sobre a sua resolução, Daniel afirma:

> Daniel: O primeiro número que escrevi foi o zero, que é quando o Rui se levanta. Aquele dez em baixo [apontando com o dedo], é o tempo que ele demorou a comer. Depois ele demora 15 minutos a lavar-se e eu dividi o 15, por isso dei um salto de cinco e outro de dez e fui parar ao 25. A seguir saltei dez porque é o tempo que ele demorou a vestir a roupa e fui parar ao 35. Depois mais 5 minutos que demorou a arrumar a mochila fui parar ao 40 e mais 15 [o Daniel decompôs o número 15 em 5+10] e fui parar ao 55.
> Estagiária: Então mas quanto tempo é que o Rui demorou desde que se levantou até chegar à escola?
> Daniel: 55 minutos, que foi o último número a que fui parar.
> Estagiaria: Daniel, e em relação à segunda questão do enunciado? Como calculaste que o Rui se levanta às 8 horas e 5 minutos?
> Daniel: Fácil, se ele chega à escola às 9 horas e demora 55 minutos ao todo, pensei em 9 horas menos 55 minutos, que dá as 8 horas e 5 minutos.

Na folha de registo do Daniel, não existe nenhum cálculo auxiliar para responder à última questão, pelo que parece ter feito o cálculo mentalmente, tendo para isso uma noção de que uma hora tem 60 minutos.

Considerando a estratégia aditiva o aluno recorre a representações icónicas, inseridas na subcategoria esquemas.

Em relação ao problema “A árvore de Natal”, que tinha como objetivo calcular o número total de prendas colocadas junto da árvore de natal, Daniel apresenta a seguinte resolução:

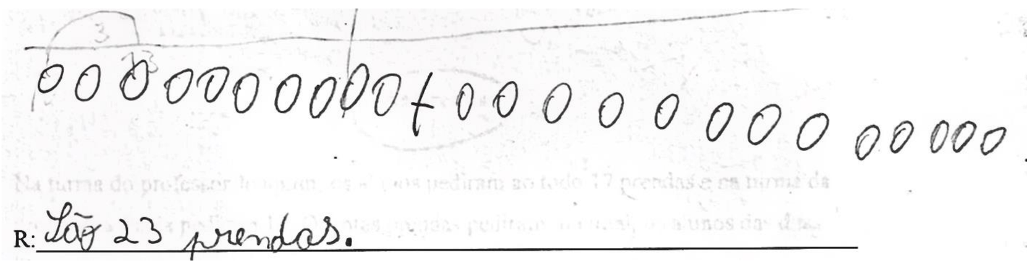


Figura 13 - Resolução do problema n.º4 (Daniel)

Daniel começa por desenhar dez ‘círculos’ que representam as prendas colocadas no lado esquerdo da árvore. Depois coloca um sinal “mais” e desenhou 13 ‘círculos’ que correspondem às prendas do lado direito da árvore. Posteriormente conta o total de círculos desenhados e percebe que junto da árvore existem 23 prendas.

Note-se que no enunciado, a primeira informação que é dada ao aluno corresponde ao número de prendas colocadas no lado direito da árvore (13) e só posteriormente é que são referidas as prendas colocadas no lado esquerdo (10). Contudo, o aluno representa primeiramente as prendas do lado esquerdo e só depois as do lado direito. Deste modo, parece que Daniel foi desenhando consoante o seu lado esquerdo e o seu lado direito.

Quando explica oralmente a sua resolução, Daniel afirma:

> Eu coloquei [apontando para os círculos desenhados] dez prendas no lado esquerdo e depois juntei mais treze prendas [círculos] e depois eu contei-as todas e deu vinte e três.

A representação do Daniel parece ser do tipo icónico inserida na subcategoria símbolos não convencionais, pois as prendas foram representadas por círculos.

Para resolver o problema “Os enfeites para a árvore”, cujo objetivo era calcular o número total de bolas que ficaram dentro de uma caixa, Daniel apresenta a seguinte resolução:

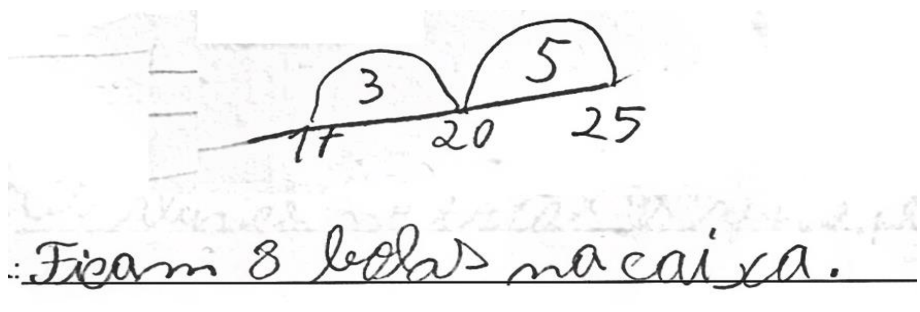


Figura 14 - Resolução do problema n.º5 (Daniel)

Daniel recorre à reta numérica para resolver o problema apresentado, usando saltos “para trás”. Quando questionado oralmente sobre a forma de resolução, o aluno diz:

> Daniel: Eu fiz a reta numérica e depois escrevi o número 25 e dei um salto de cinco para trás e fui parar ao 20 e depois dei um salto de três para trás e fui parar ao 17, que são os meninos da nossa turma.
> Estagiária: Mas como é que chegaste à conclusão que ficam 8 bolas na caixa?
> Daniel: Porque dei cinco mais três saltos, que são oito.

Após o discurso do aluno, percebe-se que Daniel fez contagens regressivas. Deste modo parte do 25, retira cinco chegando ao 20, mostrando ter conhecimentos sobre a composição do número 25. Depois consegue-se verificar que o aluno facilmente percebe que 20 menos três é dezassete, o número total de alunos da turma, informação fornecida no enunciado. Esta representação é do tipo icónico na subcategoria esquemas, embora tenha usado também símbolos convencionais.

Para resolver o problema “A coleção de cromos da Sara”, cujo objetivo era perceber com quantos cromos fica Sara depois de dar à amiga os cromos repetidos, Daniel apresenta a seguinte resolução:

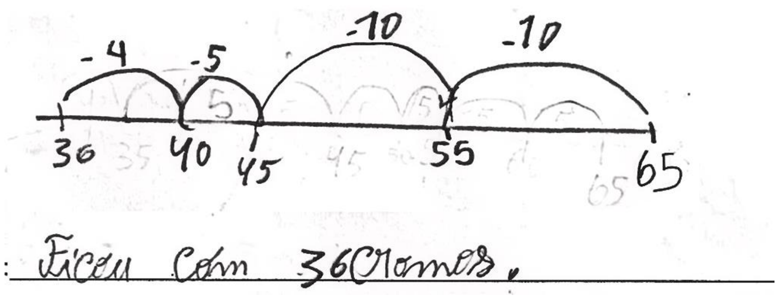


Figura 15 - Resolução do problema n.º6 (Daniel)

Daniel explica o seu raciocínio da seguinte forma:

> Daniel: Eu fiz a reta numérica e contas de menos. No fim da reta pus o número 65, depois dei um salto de dez, para trás, e fui parar ao 55. Depois dei outro salto de dez e fui para o 45. Depois tive que dar um salto de cinco, porque se fosse de dez já dava mais que 29, e fui parar ao 40. Depois dei um salto de quatro e fui parar ao 36.

Estagiária: E ao que corresponde esses 36?

Daniel: São os cromos da Sara.

Neste problema, à semelhança do que acontece no anterior, Daniel realiza contagens regressivas. No entanto, neste problema o grau de dificuldade aumenta, considerando os números envolvidos.

Neste sentido, o aluno decompõe o número 29 em 10 + 10 + 5 + 4 que correspondem aos vários cálculos regressivos que efetua a partir de 65, de forma a chegar aos 36 cromos.

A resolução do Daniel recorre a representações do tipo icónico, dentro da subcategoria esquemas. Além do uso de esquemas o aluno recorre também a símbolos convencionais, que representam as subtrações sucessivas que realiza.

O Daniel resolve o problema "O livro novo do António", em que necessitava de calcular o número de páginas que o António tinha que ler até acabar o livro, conforme se pode verificar na seguinte figura:

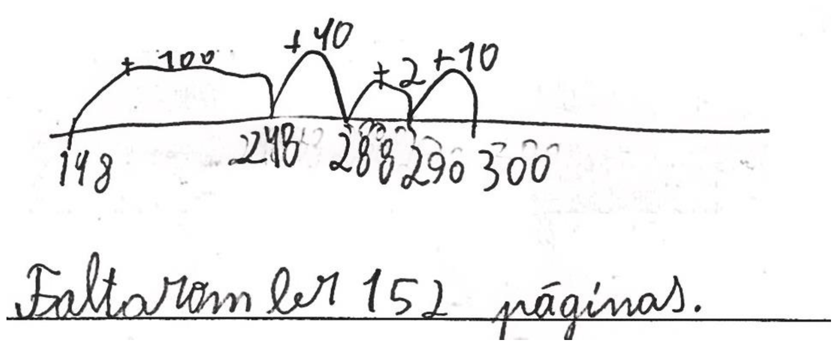


Figura 16 - Resolução do problema n.º7 (Daniel)

Para resolver o problema, Daniel recorre à reta numérica. Deste modo começa por colocar o número 148 e realiza "saltos" para chegar ao 300, número total de páginas do livro, fazendo somas sucessivas.

Quando questionado sobre a sua resolução, Daniel afirma:

> Eu fiz a reta numérica. Primeiro pus o número 148 e dei um salto de 100, e fui parar ao 248. Dei mais um salto de 40 e fui para o 288. Depois dei um salto de dois para ir ter ao 290, porque 290 mais dez é 300. Por isso tive que dar mais um salto de 10 para ir ter ao 300. Depois somei todos os saltos que dei e escrevi que faltavam ler 152 páginas.

Conforme se pode verificar através dos seus registos e do seu discurso, percebe-se que o aluno realiza somas sucessivas até chegar ao número 300. Isso significa que tem alguns conceitos sobre os números e as suas composições. Embora se apoie na reta numérica, é evidente que o aluno realiza cálculo mental, de forma a somar todos os números até perceber que faltavam 152 páginas para acabar o livro.

Tal como aconteceu nos problemas anteriores, Daniel utiliza uma representação icónica dentro da subcategoria esquemas, recorrendo também a símbolos convencionais.

Síntese das representações usadas por Daniel

A tabela seguinte apresenta de forma sintetizada as diferentes representações usadas por Daniel, nas resoluções dos problemas propostos:

Tabela 4 - Representações utilizadas por Daniel

	Representação Icónica			Representação Simbólica	
	Imagens/ desenho	Símbolos não convencionais	Esquema	Símbolos convencionais	Vocabulário/ linguagem matemática
N.º1				X	
N.º2	X				
N.º3			X	X	
N.º4		X			
N.º5			X	X	
N.º6			X	X	
N.º7			X	X	

A análise da tabela e das produções de Daniel evidencia que o aluno recorre frequentemente a representações icónicas, sobretudo a esquemas, tal como Neuza. Contudo, Daniel vai mais longe pois acompanha essas representações com símbolos convencionais, na maior parte das situações. De acordo com a análise das suas produções, verifica-se que este aluno recorre maioritariamente à reta numérica, para resolver os problemas, associada a símbolos convencionais.

Relativamente ao percurso evolutivo do aluno, aparenta existir uma regressão, no sentido em que Daniel começa por recorrer à utilização do algoritmo, e posteriormente, parece que se verifica uma oscilação entre a utilização do desenho, do esquema e de símbolos não convencionais.

A verificação anterior pode estar relacionada com a altura em que foi introduzida a reta numérica, visto que, à semelhança dos outros alunos, a utilização desta representação só aparece a partir do 3.º problema. Contudo, Daniel aparenta lidar bem com a reta, uma vez que esta aparece, como forma de representação dominante, de modo a apoiar o seu cálculo mental, evidenciada também nos três últimos problemas.

A regressão do algoritmo para o desenho, verificada no segundo problema, pode estar relacionada com o facto de o número 6 ter que ser somado três vezes consecutivas. Relativamente à utilização dos símbolos não convencionais, como forma de resolução do problema 4, pode estar relacionada com a dimensão dos números envolvidos (10 e 13).

Depois de analisadas as produções de Daniel, nota-se que o aluno aparenta ter facilidade em resolver problemas que envolvam as operações, adição e subtração, pois ao contrário de Neuza, Daniel resolve problemas de subtração, recorrendo à reta numérica para apoiar o cálculo mental, recorrendo, ao mesmo tempo, a símbolos convencionais.

Raquel

Raquel é uma aluna bastante tímida e com aparente dificuldade de adaptação ao meio escolar. É um pouco introvertida e raramente revela interesse em expor as suas ideias, perante a turma.

De acordo com informações do professor titular de turma, e com a minha observação, percebe-se que Raquel é dotada de grandes capacidades de aprendizagem e aparenta estudar bastante em casa. Durante as aulas tem um comportamento exemplar e dificilmente se distrai com os colegas.

As representações usadas por Raquel

A Raquel resolve o problema “Os bancos”, em que era necessário calcular o número total de pernas, de seis bancos com três pernas cada um, conforme se pode verificar na seguinte figura:

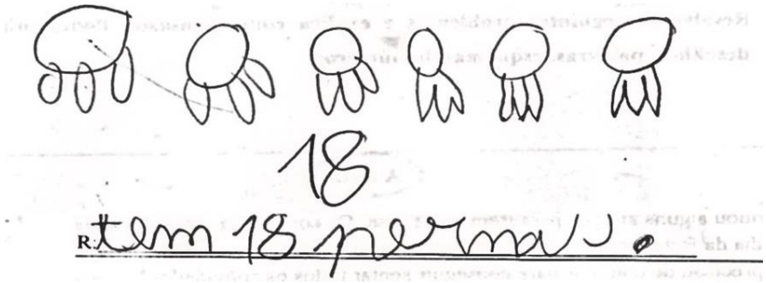


Figura 17 - Resolução do problema n.º1 (Raquel)

Raquel, à semelhança de Neuza, também parece sentir necessidade de representar os seis bancos mencionados no enunciado, tendo em conta as suas características (três pernas em cada um). Contudo, ao desenhar os bancos, não associa a cada banco um número (número de pernas.).

A observação dos seus registos mostra que a aluna após ter desenhado todos os bancos, efetua uma contagem do número total das pernas que desenhou, escrevendo esse total por baixo do seu desenho. Assim, parece ter contado de um em um até identificar quantas pernas estão representadas, pois não regista algum tipo de cálculo auxiliar.

Para resolver este problema, Raquel utiliza uma representação icónica, da subcategoria desenho, representando detalhadamente os seis bancos, cada um com três pernas.

Relativamente ao problema “Pastilhas Gargantox”, cujo objetivo era perceber quantas pastilhas, no total, tinham três placas de comprimidos, Raquel apresenta a seguinte resolução:

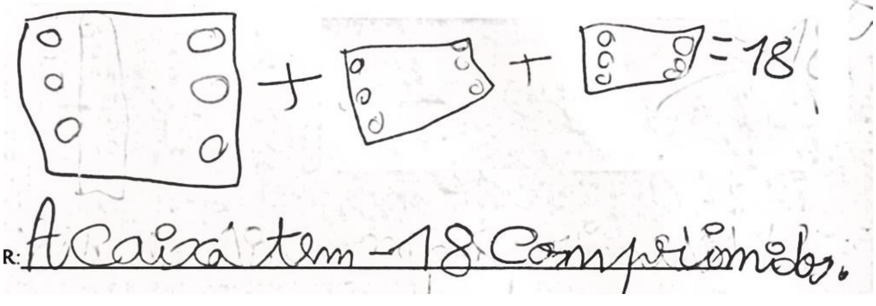


Figura 18 - Resolução do problema n.º2 (Raquel)

Raquel apresenta três retângulos, cada um com seis círculos no seu interior. A aluna organiza os círculos em filas verticais, sendo que cada fileira é constituída por três círculos. Deste modo, parece que Raquel decompôs o número seis em 'três mais três'.

Importa referir também, que para dar sentido à sua representação, a aluna coloca um símbolo de 'mais' (+) entre cada retângulo, bem como o de 'igual' para que se perceba que o objetivo é somar o número de círculos, uma vez que não nos apresenta cálculos auxiliares.

Nesta resolução, Raquel recorre a uma representação icónica, dentro da subcategoria o desenho, contudo é possível encontrar símbolos convencionais, tais como o "+" e "=".

Em relação ao problema "A manhã do Rui", que pretende calcular o tempo que o Rui demora desde que se levanta até chegar à escola, bem como a que horas se precisa de levantar, Raquel apresenta a seguinte resolução:

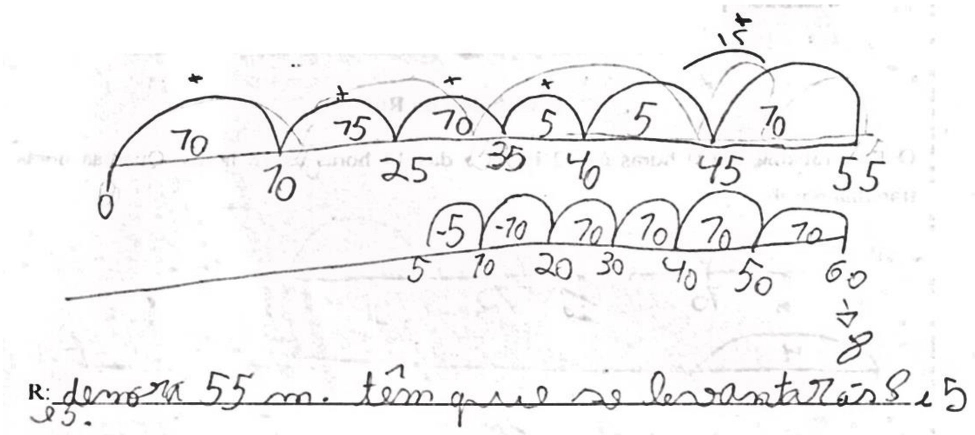


Figura 19 - Resolução do problema n.º3 (Raquel)

Raquel, ao contrário do que se verificou com os outros dois alunos, recorre à reta numérica, tanto para dar a resposta à primeira questão do enunciado, como à segunda.

Deste modo, como se pode verificar na primeira reta da aluna, são efetuadas somas sucessivas, até atingir o 55, total de minutos que o Rui demora desde que se levanta até chegar à escola. Nesta primeira representação, verifica-se um aspeto diferenciado em relação aos colegas. Raquel não sente necessidade de decompor o número 15 em 5 mais 10, dando imediatamente um salto do dez para o vinte cinco. Contudo, na sua última soma, tem necessidade de decompor o do número quinze, em cinco mais dez. Este facto poderá estar interligado com as características do número 10 e do número 40, uma vez que ao 10 somou automaticamente 15 e ao 40 necessitou de decompor o número 15, para chegar ao 55.

Relativamente à segunda reta numérica, Raquel aparenta ter iniciado os seus cálculos do fim para o princípio, realizando subtrações sucessivas. Como se pode verificar, por baixo do número 60 (número total de minutos, numa hora), Raquel colocou uma seta e escreveu o número 8, partindo do principio que o Rui necessitava de se levantar às 8h e alguns minutos. Partindo daí, começou por fazer subtrações sucessivas desde o 60, até chegar ao número 10, verificando que já tinha retirado 50. Mas como já sabia que o Rui demorava 55 minutos, retirou aos dez, cinco e foi parar aos 5, número que se encontra no início da reta. Com base nestes cálculos, Raquel percebe que o Rui tem que se levantar às 8 horas e 5 minutos.

Esta estratégia é baseada em representações icónicas, na subcategoria esquemas. Além disso verifica-se também a existência das representações simbólicas que mostram os raciocínios realizados.

Para o problema intitulado "A árvore de Natal", com o objetivo de calcular o número total de prendas colocadas junto da árvore de natal, Raquel apresenta a seguinte resolução:

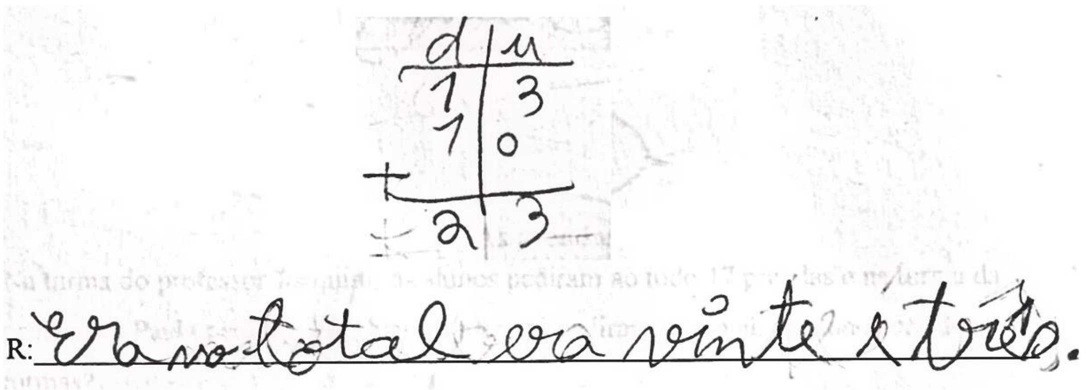


Figura 20 - Resolução do problema n.º4 (Raquel)

Raquel começa por realizar o algoritmo da adição, sem transporte. Para tal coloca os algarismos segundo a sua ordem, dezenas e unidades. Seguidamente soma as unidades e posteriormente as dezenas, o que lhe deu um total de 23, tal como explica na sua exposição oral:

> Eu pus o um nas dezenas e o três nas unidades e depois o outro um nas dezenas e o zero nas unidades. A seguir fiz zero mais três, que é três e um mais um que é dois. E deu vinte e três prendas, no total.

O recurso ao algoritmo para encontrar o total de prendas insere-se no uso de representações simbólicas, nas subcategorias de símbolos convencionais.

Para resolver o problema “Os enfeites para a árvore de natal”, cujo objetivo era calcular o número total de bolas que estão dentro de uma caixa, Raquel apresentou a resolução da figura 21:

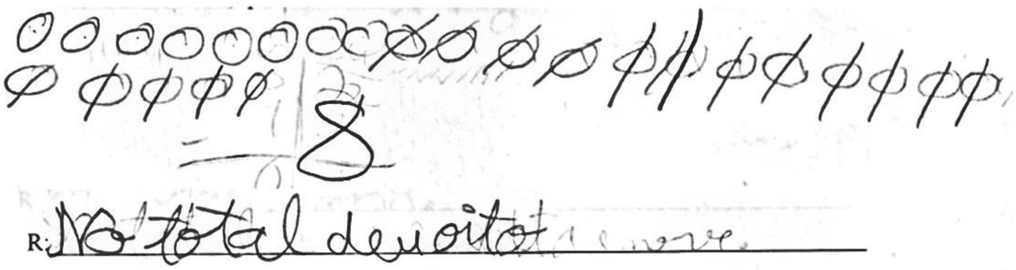


Figura 21 - Resolução do problema n.º5 (Raquel)

Verifica-se que a aluna começa por tentar resolver este problema recorrendo ao algoritmo, contudo, depois de questionada, afirmou não estar a conseguir realizar a conta, uma vez que esta era uma subtração e apaga-a.

Desta forma, desenha vinte e cinco ‘círculos’, que correspondem às bolas que estavam dentro da caixa, organizando-os em duas filas, que sugerem a decomposição da quantidade 25 em 20+5. A seguir risca 17, sugerindo que começa por riscar os ‘círculos’ do fim para o início, ou seja, verifica-se que começa por riscar cinco ‘círculos’ da linha de baixo e mais doze da linha de cima.

Raquel explica o seu raciocínio de forma oral:

> Raquel: Aqui no problema [apontando para o seu enunciado] diz que a caixa tem vinte e cinco bolas, por isso eu desenhei-as. Aqui vinte e aqui mais cinco [com o dedo aponta para os ‘círculos’]. Depois, tirei dezassete e deu oito bolas.
>
> Estagiária: E como é que percebeste que sobravam oito bolas?
>
> Raquel: Porque eu contei estas [apontando para as que não estavam riscadas].

Raquel recorre a representações icónicas, usando símbolos não convencionais, uma vez que a aluna sentiu necessidade de desenhar os vinte e cinco círculos e posteriormente de os riscar. O seu discurso oral mostra que também usa a contagem de um em um, dos círculos que não foram riscados, para perceber que tinham sobrado oito bolas.

Em relação ao problema "A coleção de cromos da Sara", que questiona a quantidade de cromos da Sara, depois de dar à amiga os cromos repetidos, Raquel resolve-o da seguinte forma:

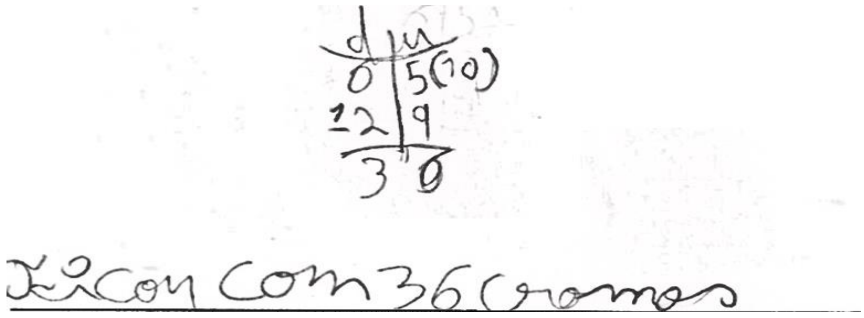


Figura 22 - Resolução do problema n.º6 (Raquel)

Raquel recorre à utilização do algoritmo da subtração, com empréstimo para resolver este problema. Deste modo, coloca os algarismos consoante a sua ordem, ou seja as dezenas e as unidades e realiza a conta sem qualquer dificuldade. Revela assim um avanço desde o problema anterior, em que fez uma tentativa sem sucesso.

Apoiada no seu registo escrito, Raquel explica o seu raciocínio oralmente:

> Raquel: Eu separei as dezenas e as unidades. Pus o nove e o cinco nas unidades e o dois e o seis nas dezenas. Depois pus um dez [apontando para o número dez que se encontra dentro dos parenteses] ao lado do cinco, porque não posso tirar nove ao cinco, então fica nove para quinze, que é seis. Depois nas dezenas somei um ao dois [apontando para o número um] e deu três. Depois fiz três para seis e deu três.
>
> Estagiária: Então, com quantos cromos ficou a Sara?
>
> Raquel: Ficou com trinta e seis cromos.

A representação adotada pela Raquel insere-se nas representações simbólicas, na subcategoria de representações convencionais.

Raquel resolve o problema "O livro novo do António", cujo objetivo é calcular o número de páginas que o António tinha que ler até acabar o seu livro, conforme se pode verificar na figura seguinte:

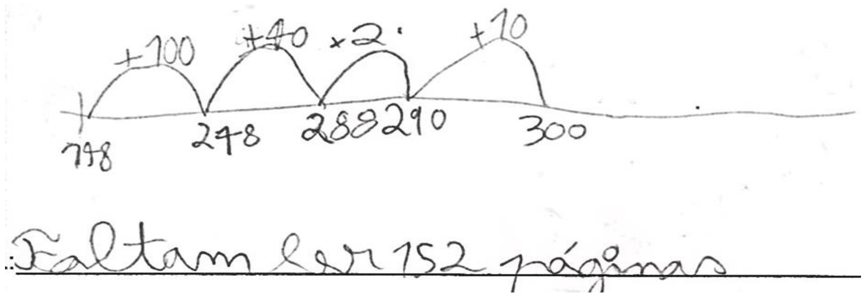


Figura 23 - Resolução do problema n.º7 (Raquel)

Raquel resolve o problema recorrendo à reta numérica. Aparentemente parece começar por escrever o número 148 (número que corresponde ao total de páginas lidas por António). Seguidamente realiza somas sucessivas até chegar ao número 300, dado fornecido no enunciado que corresponde ao número total de páginas do livro.

Tendo em conta a sua resolução, Raquel explica, oralmente, como pensou:

> Raquel: Eu fiz a reta numérica. Primeiro pus o 148 e depois mais 100 deu 248. Depois somei mais quarenta e deu 288. Depois fiz mais dois, para ir ter ao 290. Depois como queria chegar ao 300, somei mais 10.
> Estagiária: Ou seja, tu sabias o número de páginas já lidas e o número de páginas do livro. Como é que soubeste quantas páginas faltavam ler?
> Raquel: Depois somei todos os saltos que dei [apontando para a reta numérica] e vi que faltavam ler 152 páginas.
> Estagiária: Mas como é que somaste, se na tua folha não aparece nada?
> Raquel: Eu fiz na minha cabeça. 100 + 40 é 140, depois mais 10 é 150. E depois somei o dois e deu-me 152.

Apoiada no discurso de Raquel, é possível perceber que a aluna recorreu ao cálculo mental apoiando-se na reta numérica. A soma de todos os saltos foi realizada mentalmente para que Raquel conseguisse determinar o número de páginas que faltavam ler. A aluna usou, assim, representações icónicas, na subcategoria esquemas, ao mesmo tempo que utiliza também símbolos convencionais.

Síntese das representações usadas por Raquel

A tabela seguinte apresenta, de forma sintetizada, as diferentes representações usadas por Raquel, nas resoluções dos problemas propostos:

Tabela 5 - Representações utilizadas por Raquel

	Representação Icónica			Representação Simbólica	
	Imagens/ desenho	Símbolos não convencionais	Esquema	Símbolos convencionais	Vocabulário/ linguagem matemática
N.º1	X				
N.º2	X			X	
N.º3			X	X	
N.º4				X	
N.º5		X			
N.º6				X	
N.º7			X	X	

A análise da tabela e das produções de Raquel, evidencia que as suas representações são, na sua maioria, do tipo icónico. Além disso usa, com bastante frequência, representações convencionais.

Raquel aparenta evoluir ao longo da resolução dos problemas, relativamente às representações utilizadas. No entanto parece existir uma regressão no uso das representações, associada ao problema 5, uma vez que a aluna utiliza uma simbologia não convencional para resolver a tarefa. Esta regressão parece estar relacionada com o sentido da operação do problema, sendo esta a subtração, bem como com as características dos números envolvidos: 25 e 17.

No problema 6, sendo este também de subtração, Raquel utiliza a simbologia convencional – algoritmo. Em relação aos restantes alunos, Raquel parece estar mais familiarizada com o uso do algoritmo, uma vez que o usa adequadamente em duas resoluções. Em contrapartida, verifica-se que usa menos vezes a reta numérica, relativamente aos colegas.

Capítulo V – Conclusão

Este capítulo inclui a apresentação de uma síntese de todo o estudo, de forma a focar, novamente o seu objetivo, as duas questões de investigação, os aspetos metodológicos, bem como o contexto em que foi realizado. Posteriormente, em jeito de conclusão são apresentadas as conclusões do estudo, tentando responder às questões formuladas, bem como uma reflexão pessoal sobre todo o trabalho.

Síntese do estudo

A realização deste projeto de investigação tem como objetivo principal caracterizar as representações utilizadas pelos alunos do 2.º ano de escolaridade, durante atividades de resolução de problemas. Neste sentido, formulei duas questões orientadoras: a) Que representações utilizam os alunos do 2.º ano quando resolvem problemas? b) Que alterações, se existirem, se evidenciam nas representações usadas pelos alunos na resolução de problemas?

Relativamente à metodologia adotada caracteriza-se como qualitativa e permitiu-me compreender o raciocínio matemático dos alunos, em particular, as representações que usaram na resolução de sete problemas, associados a vários conteúdos do programa, conseguindo assim dar uma resposta às questões orientadoras, enunciadas anteriormente.

Através da observação participante, das produções escritas dos alunos e de gravações de entrevistas semiestruturadas, foi possível recolher os dados, que analisei e que permitiram obter as conclusões do estudo. Deste modo, respondi às questões orientadoras, justificando-as através da análise das produções dos alunos, bem como com o confronto com estudos de vários autores.

Conclusões do estudo

O presente estudo teve como orientação primordial duas questões relativas às representações dos alunos utilizadas nas tarefas de resolução de problemas. Neste sentido, as conclusões pretendem maioritariamente dar uma resposta às questões, mediante todo o trabalho desenvolvido com os alunos, ao longo desta investigação.

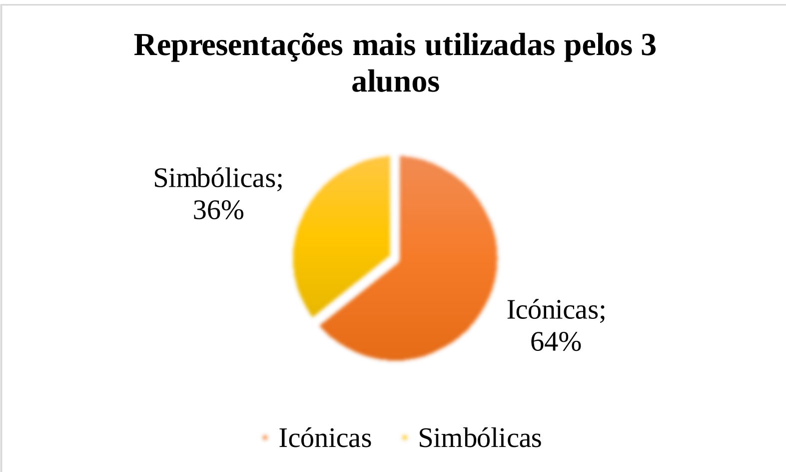
Que representações utilizam os alunos quando resolvem problemas?

Depois de analisar exaustivamente os dados obtidos, pude constatar que os três alunos observados utilizam representações icónicas e simbólicas. Deste modo, elaborei uma tabela de frequências, bem como um gráfico circular, onde se pode perceber a utilização das representações, dos alunos, quando resolvem problemas.

Tabela 6 - Tabela de frequências

Tipo de representação	Frequência absoluta
Ativas	0
Icónicas	18
Simbólicas	10
Total	28

Gráfico 1 - Representações mais utilizadas pelos alunos



De acordo com a informação fornecida pelo gráfico, verificou-se que nenhum dos alunos observados recorreu ao uso das representações ativas, o que parece levar a concluir que este grupo restrito não necessita de contactar com objetos concretos para conseguirem raciocinar matematicamente. Esta evidência prende-se com o facto das representações ativas se distanciarem do concreto e do físico, tal como afirmam Boavida et al (2008).

Através do gráfico, constata-se ainda que os alunos recorrem maioritariamente à utilização de representações icónicas. Este facto parece estar de acordo com outras investigações com alunos da mesma faixa etária, que referem que as representações icónicas "parecem desempenhar um importante papel para resolver os problemas" (Pinto & Canavarro, 2012, p. 12).

Com a análise dos dados recolhidos, é possível verificar que no grupo das representações icónicas, é a subcategoria intitulada "Esquemas", também designada por diagramas, por outros autores, que é a mais utilizada pelos alunos.

Os diagramas ou esquemas podem representar uma forma de os alunos organizarem os dados de um problema, ao mesmo tempo que representam um bom meio de desenvolver o seu raciocínio matemático. Tal como afirmam Pinto e Canavarro (2012), esta representação pode ser para os alunos "uma ferramenta poderosa para raciocinar e obter soluções de problemas mais complexos" (p. 58).

No inicio do estágio, foi possível observar que o professor titular de turma incentivava o uso do desenho e de imagens, como forma primordial para os alunos resolverem problemas. As representações associadas ao desenho são, efetivamente, um meio dos alunos representarem "os seus pensamentos e os seus conhecimentos sobre as ideias matemáticas" (Edwards, Gandini e Forman, 1993 cit. por NCTM, 2007, p. 160).

Contudo, considerei fundamental que a turma tivesse contacto com outros tipos de representações. Por isso, introduzi a reta numérica, estratégia mais utilizada pelos alunos, que se insere dentro dos esquemas, subcategoria das representações icónicas. Este tipo de esquema revelou-se bastante eficaz no apoio a situações de cálculo.

Neste sentido, importa referir que as representações não necessitam de ser criadas espontaneamente pelos alunos. Tal como se pode verificar neste estudo, os alunos utilizaram maioritariamente a reta numérica, que foi uma representação apresentada por mim, ao longo das aulas.

Neuza recorreu apenas a representações do tipo icónico para resolver os problemas. Dentro desta categoria, verifica-se uma maior utilização dos esquemas. Verifica-se ainda que esta aluna, perante os dois problemas de subtração tentou recorrer à reta numérica, embora não o tenha conseguido, resolvendo-os então, usando símbolos não convencionais.

Daniel utilizou maioritariamente, representações do tipo icónico, para resolver os problemas propostos. Contudo, verifica-se também o recurso a representações simbólicas em cinco problemas, dos quais apenas um é resolvido somente com este tipo de representação. Para os restantes, estas representações aparecem como complemento das representações icónicas, como forma de auxílio ao seu raciocínio matemático.

Raquel recorre também, maioritariamente a representações icónicas, contudo, nas suas resoluções, verifica-se o recurso a representações simbólicas. Ao contrário dos seus colegas, esta aluna resolve dois problemas através do algoritmo tradicional, sendo que num deles, a operação envolvida é a subtração.

Em jeito de conclusão, pode-se afirmar que os alunos recorreram maioritariamente a representações icónicas para resolverem os problemas propostos. Contudo, foi o recurso à reta numérica que mais se evidenciou ao longo de todas as resoluções dos problemas.

Em termos comparativos, verifica-se que Neuza recorreu, apenas, a representações do tipo icónico, ao contrário de Daniel e Raquel que utilizaram também as representações simbólicas. Contudo, Raquel é a aluna que aparenta utilizar com maior facilidade as representações simbólicas, que são "as representações […] que correspondem a um nível de raciocínio mais elevado" (Ponte & Velez, 2011, p. 182).

Parece que as representações utilizadas pelos três alunos observados estão relacionadas com a forma individual de compreensão do enunciado, bem como com a familiaridade que cada um tem com os números envolvidos e não apenas com as características matemáticas dos problemas.

Apesar de terem sido as representações icónicas, as mais utilizadas pelos alunos, foi importante apresentar à turma um leque de problemas variados, que tal como afirma Ponte (2005) devem ser de natureza desafiante, que possibilitassem o uso de diferentes representações.

Que alterações, se existirem, se evidenciam nas representações usadas pelos alunos na resolução de problemas?

Os diferentes tipos de representações observadas neste estudo, icónicas e simbólicas, aparecem organizadas em subcategorias, às quais os alunos recorreram de forma individual. A escolha de cada representação poderá estar interligada com o desenvolvimento e do raciocínio do pensamento matemático de cada aluno. Neste sentido, Ponte e Serrazina (2000), afirmam que as "representações usadas pelos alunos dão preciosas indicações acerca do seu modo de pensar" (p. 44).

Deste modo, de acordo com a análise dos dados recolhidos relativos aos três alunos observados, considero que se verificam algumas alterações no que concerne às representações usadas por cada um deles. Pois, como é evidente na análise dos dados, nem sempre para o mesmo tipo de problema, os alunos recorreram à mesma representação.

Apesar de ser evidente que Neuza recorre predominantemente a representações do tipo icónico, através da análise das suas produções, verifica-se que esta aluna manifesta algumas oscilações relativamente à subcategoria das representações utilizadas. Ou seja, Neuza começa por utilizar imagens, evoluindo para os esquemas, optando depois por símbolos não convencionais e voltando, por fim a recorrer aos esquemas.

Ainda assim, no que respeita à elaboração dos seus registos, verifica-se que Neuza do primeiro para o segundo problema deixou de ter necessidade de associar a cada imagem um número, o que leva a crer que o seu pensamento matemático parece evoluir de representações mais concretas para representações mais abstratas.

Daniel recorre maioritariamente à utilização de esquemas para resolver os problemas propostos. Contudo, a observação das suas produções levam a afirmar que este aluno passa por um processo inconstante no que concerne às representações que usa. Ao contrário de Neuza e Raquel, o aluno resolve o primeiro problema recorrendo ao algoritmo já ensinado pelo professor. No entanto verifica-se logo de seguida uma aparente regressão, passando a utilizar o desenho, evoluindo novamente para os esquemas. Seguidamente, verifica-se um aparente retrocesso, passando dos esquemas para a utilização de símbolos não convencionais. A partir do quinto problema recorre somente aos esquemas como forma de resolução dos problemas.

Relativamente às alterações verificadas nas representações de Daniel é possível identifica-las na construção da reta numérica, pois o aluno nas primeiras retas numéricas, não teve necessidade de representar o símbolo associado à operação utilizada naquele problema, embora o tenha feito nos problemas seguintes.

Raquel aparenta passar por uma certa evolução, relativamente à utilização das representações, entre o primeiro e o quarto problema. Desta forma, a aluna começa por recorrer ao desenho, evoluindo nas suas representações até à utilização dos símbolos convencionais.

De acordo com Bruner, a partir de uma certa altura, os alunos começam por representar a "realidade através de uma linguagem simbólica, de carácter abstracto e sem uma dependência directa da realidade. Ao entrar nesta etapa, a pessoa começa a ser capaz de manejar os símbolos em ordem não só a fazer a sua leitura da realidade mas também a transformar a realidade" (Bruner, 1999, p. 35).

No quinto problema a aluna volta a recorrer a uma representação mais informal. Esta alteração pode estar relacionada com a operação associada à resolução do problema, sendo esta a subtração. No entanto, apesar da alteração anterior poder estar relacionada com a operação envolvida, Raquel utiliza, no problema seis a simbologia convencional, também para resolver um problema de subtração. Esta aparente contradição poderá estar interligada com as características dos números envolvidos em cada um dos problemas ou com o estado de espírito da aluna.

Em relação às eventuais alterações verificadas nas representações de Raquel, considero que esta aparenta ser uma aluna constante, bastante familiarizada com as diferentes operações representadas nos problemas propostos.

Relativamente às evoluções eventuais dos alunos, na utilização das representações da menos complexa para a mais complexa, pode-se afirmar que Raquel é a aluna que mais se destaca em termos das representações a que recorre, sobretudo até à resolução do quarto problema.

Contudo, é preciso não esquecer que este trabalho de investigação teve uma duração limitada e sendo as questões associadas às representações um processo complexo e demorado, é normal que não tenha havido muitas alterações nas representações de Neuza e Daniel.

As produções de Daniel e Raquel mostram um uso simultâneo de representações do tipo icónico e simbólico, uma vez que, aparentemente, os alunos ainda se encontram numa fase em que não conseguem utilizar somente a simbologia convencional. Contudo esta simultaneidade não se torna prejudicial para os alunos, uma vez que lhe confere “uma maior riqueza de pormenores e um maior cunho pessoal, além de fornecer ao professor um conjunto de informações bastante pertinente no que se refere às tarefas desenvolvidas” (Pinto & Canavarro, 2012, p. 15).

Reflexão final

O principal objetivo desta investigação, tal como já foi referido anteriormente, foi caracterizar as representações utilizadas pelos alunos do 2.º ano de escolaridade, durante atividades de resolução de problemas. Assim, a reflexão final surge de uma análise geral de todo o processo investigativo.

Partindo do conceito de reflexão, segundo John Dewey (1933, citado por Alarcão 1996, p. 175), refletir é “uma forma especializada de pensar. Implica uma perscrutação activa, voluntária, persistente e rigorosa daquilo em que se julga acreditar ou daquilo que habitualmente se pratica, evidencia os motivos que justificam as nossas acções ou convicções e ilumina as consequências a que elas conduzem”.

Desta forma, considero importante que todos os profissionais de educação reflitam constantemente, adotando um papel de profissionais reflexivos, capazes de adaptar e readaptar as suas práticas pedagógicas, a um determinado contexto.

Ao longo de todo este processo, senti algumas dificuldades e constrangimentos. Inicialmente, tendo em conta as características socias dos alunos, senti bastantes dificuldades na decisão do tema, pois no geral os alunos faltavam bastante às aulas, o que me levou a sentir dificuldades em realizar um trabalho contínuo.

Outra dificuldade prendia-se com o facto de os alunos não estarem habituados nem familiarizados a utilizarem diferentes representações, nas tarefas de resolução de problemas. O professor titular, ensinava, maioritariamente a resolução de problemas, através de símbolos não convencionais (resolução através de tracinhos). Para ultrapassar esta dificuldade e de forma a conseguir realizar este projeto, optei por desenvolver a resolução de problemas, investindo nos processos de resolução.

Uma outra dificuldade que senti foi encontrar uma estratégia para introduzir a reta numérica. Contudo, percebi que os alunos ficaram muito recetivos e conseguiram perceber de imediato como esta apoiava o seu cálculo mental.

Ao longo deste processo passei por momentos de hesitação, que me deixavam insegura da viabilidade desta investigação. No entanto, era em momentos de reflexão que conseguia delimitar estratégias cativantes, para que os alunos correspondessem às minha espectativas e colaborassem para que este estudo pudesse ser concretizado, ao mesmo tempo que desenvolvia na turma as aprendizagens estipuladas nas planificações do professor titular.

Outro aspeto que considero como uma dificuldade, ou até mesmo um entrave a este tipo de investigação, é o tempo. Como estagiárias, o tempo para desenvolver um projeto é bastante limitado, sendo que nem sempre conseguimos concretizar na íntegra todos os processos que necessitamos.

No entanto, no meu caso particular, creio que ao longo da investigação, consegui responder a todas as espectativas estipuladas. Contudo, considero que seria bastante pertinente realizar o mesmo estudo, num período de tempo mais alargado, para que fosse possível verificar com mais rigor a existência da evolução das representações dos alunos.

Durante a realização do projeto escrito, a maior dificuldade que senti, foi inicialmente reunir um conjunto de bibliografia fiável sobre as representações, uma vez que este tema é pouco estudado em Portugal. No entanto com a colaboração da professora orientadora, foi possível encontrar documentos variados e artigos, que pudessem ser a base para a revisão da literatura.

Creio que, ao longo de todo o trabalho, a relação da revisão da literatura com a prática de sala de aula foi um meio de conseguir refletir e compreender os processos analisados, dando assim, um sustento para a minha prática enquanto docente estagiária.

Como futura professora, este projeto foi um contributo para que eu compreendesse todos os processos envolvidos na resolução de problemas, bem como a sua importância para a aprendizagem dos alunos. A análise das representações possibilitou-me também compreender que é através delas que o professor pode aceder ao pensamento dos alunos, percebendo assim, o seu desenvolvimento em termos de raciocínio matemático.

Com este estudo percebi também que é importante que o professor explore várias representações com os alunos, partindo das que se concretizam em representações menos complexas, tais como as icónicas, que são as que “desempenham um papel crucial na correta interpretação e resolução dos problemas” (Canavarro & Pinto, 2012, p. 76), de forma a conseguir, progressivamente, introduzir as representações convencionais, que se podem traduzir em formas mais complexas de representar matemática.

Ao longo deste estudo, percebi que a discussão coletiva é uma mais-valia para o desenvolvimento dos alunos, bem como para a reflexão do professor, pois na fase de discussão do problema, os alunos tiveram a oportunidade de compreender que existem várias estratégias de resolução de problemas, assim como eu consegui analisar e refletir sobre o desenvolvimento e aprendizagem de cada um deles.

De um modo geral, penso que consegui ultrapassar todas as barreiras e obstáculos, dissipar as inseguranças e medos que foram surgindo, ao longo do processo, de forma a tornar possível todo este trabalho.

Referências Bibliográficas

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: Um guia prático e crítico.* Porto: Edições Asa.

Afonso, P., Conceição, A., Costa, F., Filipe, J., & Serrasqueiro, M. (2008). *Aprender Matmática nos Primeiros Anos - Algumas Propostas de Tarefas.* Castelo Branco: Instituto Politácnico de Castelo Branco.

Alarcão, I. (1996). *Formação reflexiva de professores: estratégias de supervisão.* Porto: Porto Editora.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In . [disponível no site:. *B. P. Campos (Ed.), Formação profissional de professores no ensino superior , Vol. 1*, pp. 21-31. Obtido de http://www.inafop.pt/revista

Almeida, C. (2012). *A resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático no contexto da educação Pré-Escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico.* Angra do Heroísmo: Universidade dos Açores.

Almeida, J. (1994). *Introdução sociologia.* Lisboa: Universidade Aberta.

Bell, J. (2004). *Como realizar um projecto de investigação* (3.ª edição ed.). Viseu: Gradiva.

Bento, A. (Abril de 2012). Investigação quantitativa e qualitativa: Dicotomia ou complementaridade? *Revista JA (Associação Académica da Universidade da Madeira), n.º 64, ano VII*, pp. 40-43.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Dinâmica e Organização da Sala de Aula. Em B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte, *Perspectives on Mathematics education.* (J. M. Varandas, H. Oliveira, & J. P. Ponte, Trads., pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel. Obtido de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/bibliografia.htm

Boavida, A., & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. Em L. Santos, A. Canavarro, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira, *Investigação em Educação Matemática — Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). Portalegre: SPIEM.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., & Vale, I. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: ME: DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógia D' Água Editores.

Canavarro, A., & Pinto, M. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante. Vol. XXI. N.º2*, pp. 51 - 79.

Chagas, C. (2010). *A avaliação de desempenho dos professores no quadro da regulação da educação. Um estudo de caso numa escola secundária.* Lisboa: Universidade de Lisboa, Instituto de Educação.

Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: what, why and how.* . Palo Alto, CA: Dale Seymour.

DEB, M. . (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Eletrónica de Educação Matemática, 7, n.º2*, pp. 266 - 297. Obtido em 29 de Março de 2014

Estrela, A. (1994). *Teoria e Prática de Observação de Classes. Uma Estratégia de Formação de Professores.* Porto: Porto Editora.

Ferreira, E. (2012). *O Desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade (Tese de doutoramento, não publicada).* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Guzmán, M. d. (1995). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* (Pirámide, Ed.) Obtido em 28 de outubro de 2014, de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/sites/default/files/mguzman/04vida/parapensarmejor/000indice.html

Lopes, A., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J., Oliveira, M., Delgado, M., Bastos, R., Graça, T. (1990). *Actividades matemáticas na sala de aula.* Lisboa: Texto Editora.

Lopes, C. (2002). *Estratégias e Métodos de Resolução de Problemas em Matemática.* Porto: ASA Editores.

Martins, P. (2012). *Comunicação escrita matemática de alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: Universidade de Lisboa - Instituto de Educação.

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da Investigação-acção.* Porto: Porto Editora.

ME. (2001). *Currículo nacional para o ensino básico. Competências essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

ME. (2004). *Organização Curricular e Programas do Ensino Básico do 1.º Ciclo.* Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação .

ME. (2013). *Programas e Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM.

NCTM. (2003). *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Association Drive.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2011). *Representações na aprendizagem de sistemas de equações.* Lisboa: Instituto de Educação - Universidade de Lisboa.

O'Connell, S. (2007). *Introduction to problem solving : grades PreK-2.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Pardal, L., & Correia, E. (1995). *Métodos e Técnicas de Investigação Social*. Porto: Areal Editores.

Pinto, M. E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. Em O. Magalhães, & M. Folque, *Práticas de investigação em Educação* (pp. 1-17). Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Pólya, G. (1995). *A arte de resolver problemas - Um novo aspecto do método matemático* (2.ª ed.). Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em G. (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 1.º ciclo. *Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra* (pp. 11-16). Fundação para a Ciência e Tecnologia.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. . *Boletim do GEPEM, 59*, pp. 53-68.

Ponte, J., & Serrazina, M. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J., & Velez, I. (2011). As representações matemáticas nas concepções dos professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico: Um estudo exploratório. *Ensino e Aprendizagem da Algebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, pp. 177-194.

Preston, R., & Garner, A. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics teaching in the middle school, 9, n.º1*, pp. 38 - 43.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2005). *Manual de investigação em ciências sociais*. Lisboa: Gradiva.

Rodrigues, M. (2011). *Histórias com matemática: sentido espacial e ideias geométricas.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação

Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa.

Santos, L., Canavarro, A. P., & Machado, S. (2007). Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal. Em J. P. Ponte, L. Serrazina, A. Guerreiro, C. Ribeiro, & L. Veia, *Actas do XV EIEM.* Monte Gordo.

Santos, M. (1991). *Mudança conceptual na Sala de Aula: Um desafio pedagógico.* Lisboa: Livros Horizonte.

Smole, K., & Diniz, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas - Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed.

Sousa, M., & Baptista, C. (2011). *Como fazer investigação, dissertações, teses e relatórios – Segundo Bolonha.* Lisboa: Pactor.

Teis, D., & Teis, M. (2006). *A abordagem qualitativa: a leitura no campo de pesquisa.* Obtido em 19 de dezembro de 2013, de http://www.bocc.ubi.pt/pag/teis-denize-abordagem-qualitativa.pdf

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. Em Canavarro, Santos, Boavida, & Oliveira, , *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (pp. 347-360). Portalegre: SPIEM.

Valente, M. (1989). Projeto Dianaia: uma aposta no sucesso escolar pelo esforço do pensar sobre o pensar. *Revista de Educação, 3 (1)*, 44 - 45.

Veia, L. (1996). *A resolução de problemas, o raciocíonio e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico - Três estudos de caso.* Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências - Universidade de Lisboa.

Wielewski, G. (2006). Representação e resolução de problemas matemáticos. *Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - Pesquisa em Educação Matemática: um olhar ampliado sobre a sala de aula.* Brasil: Universidade Federal de Pernambuco.

Witeck, K., & Ennis, B. (2007). *Introductions to Representation. Grades PreK-2.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Anexos

Autorização dos encarregados de educação

Exmo. (a) Sr. (a). Encarregado(a) de Educação

Como professora estagiária, encontro-me a desenvolver um Projeto de Investigação na Área da Matemática, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, sob a orientação da Professora Maria de Fátima Mendes, na Escola Superior de Educação, do Instituto Politécnico de Setúbal.

Para a realização deste projeto, necessito de gravar, através de vídeo, os seus educandos, a fim de ter a possibilidade de analisar, mais rigorosamente, todos os dados que necessito, durante a realização de tarefas matemáticas, mais propriamente, na Resolução de Problemas.

Assim, venho por este meio, solicitar a Vª Ex.ª a autorização para proceder à gravação, dos seus educandos, ao longo do estágio, que irá decorrer até ao dia 15 de janeiro de 2014. A gravação das aulas destina-se exclusivamente para este fim.

Espero poder contar com a vossa colaboração.
Com os maiores cumprimentos.
Diana Rita Araújo.

Autorização

Eu, (nome) ______________________________________, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ______________________________________, nº___, da turma 48, declaro que autorizo a gravação do meu educando, para os fins em cima descritos.

____

(Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação)

Setúbal, 17 de outubro de 2013.