

Flexibilidade na comparação multiplicativa: desafio para a formação de professores de matemática

Graça Cebola¹, Joana Brocardo²
gracacebola@ipportalegre.pt, joana.brocardo@ese.ips.pt

¹ Instituto Politécnico de Portalegre, Portugal

² Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal

Resumo

Documentos curriculares recentes, como por exemplo, o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*, referem como é essencial que os alunos, quer a nível geral, quer a nível da Matemática, sejam criativos e flexíveis. Criatividade e flexibilidade devem ser desenvolvidas na realização de projetos de diferentes naturezas e também no âmbito da aprendizagem de conteúdos das várias disciplinas. Neste artigo começamos por situar a flexibilidade na comparação multiplicativa, entendendo-a como refletida nas conexões entre conceitos, símbolos e procedimentos, evidenciadas na resolução de tarefas matemáticas sobre proporcionalidade. Mais concretamente, a flexibilidade na comparação multiplicativa é um processo dinâmico de adaptação de estratégias de resolução e de representações utilizadas pelos alunos às características das tarefas, em que as relações numéricas e as propriedades das operações assumem um papel relevante. Em seguida, salientamos as duas conclusões mais relevantes de um estudo que segue uma metodologia de investigação baseada em *design*, realizado com alunos de duas turmas do 6.º ano de escolaridade: (1) quando usam estratégias e representações adequadas, os alunos não mostram grande apetência para as alterar. Perante um procedimento que funciona, não ponderam o uso de outros, eventualmente mais adequados aos valores numéricos em jogo, menos trabalhosos ou mais rápidos; (2) nas suas resoluções, os alunos usam relações numéricas multiplicativas e propriedades da operação multiplicação que conseguem articular com as estratégias e as representações a que recorrem, revelando uma flexibilidade que se confina às suas opções de abordagem. A partir destas conclusões propomos um conjunto de ideias que nos parecem dever ser equacionadas numa discussão sobre a formação de professores e que deverão contribuir de modo decisivo para desenvolver o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. A nível geral destacamos a importância de a formação inicial de professores criar condições propícias a que o futuro professor comece a interiorizar a sua responsabilidade ao nível do seu crescimento profissional. A nível mais específico, a partir do estudo empírico realizado, concretizamos como o futuro professor de matemática pode promover nos seus alunos a flexibilidade na comparação multiplicativa.

Palavras-Chave: flexibilidade, comparação multiplicativa, formação de professores.

Abstract

Recent curriculum guidelines, such as *Students' profile after leaving compulsory schooling*, refer to how it is essential that students, both at general level, and at Mathematics' level, are creative and flexible. Creativity and flexibility must be developed when carrying out projects of different nature and in the context of learning the contents of

different subjects. In this paper, we begin by situating flexibility in the multiplicative comparison, understanding it as reflected in the connections between concepts, symbols and procedures evidenced in the resolution of mathematical proportionality tasks. More specifically, flexibility in multiplicative comparison is a dynamic process of adapting resolution strategies and representations used by students to the tasks' characteristics, in which the numerical relations and the operations' properties assume a relevant role. Then, we highlight the two most relevant conclusions of a study that follows a design-based research methodology, carried out with students from two sixth grade classes: (1) when using appropriate strategies and representations, students are unwilling to change them. Faced with a procedure that works, they do not consider using others, even if possibly more appropriate to the real numerical values, less laborious or faster; (2) in their resolutions, students use multiplicative numerical relations and multiplication properties that they manage to articulate with strategies and representations they use, revealing a flexibility that is confined to their approach options. Based on these conclusions, we propose a set of ideas that we believe should be considered in teacher training and that have a decisive contribution to develop the *Students' profile after leaving compulsory schooling*. At general level, we highlight the importance of initial teacher training creating conditions that will enable future teachers to begin to internalize their responsibility in terms of their professional development. At a more specific level, from the empirical study carried out, we grasped how future mathematics teachers can promote flexibility in multiplicative comparison to their students.

Keywords: flexibility, multiplicative comparison, teacher training.

1 Introdução

A flexibilidade pode ser discutida sob diferentes perspectivas e níveis de generalidade. Pode ser associada à ação educativa, sublinhando-se que é necessária para garantir o acesso à aprendizagem e à participação dos alunos na sua formação (Martins, Gomes, Brocardo, Pedrosa, Carrillo, Silva, ..., Rodrigues, 2017). Pode, igualmente, ser associada, como o fazem estes autores, a áreas de competências como as relativas ao pensamento crítico e criativo e que requerem que os alunos desenvolvam “ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, recorrendo à imaginação, inventividade, desenvoltura e flexibilidade” (Martins et al., 2017, p. 24). A um nível mais específico pode ser realçada na aprendizagem de conteúdos curriculares específicos e que englobam a construção de diversos conceitos, a utilização de vários procedimentos e diferentes modos de representação. Este artigo foca o conceito de proporcionalidade em geral e, em particular, o de flexibilidade na comparação multiplicativa começando por clarificar e discutir o modo como a entendemos. De seguida, são indicados alguns dos procedimentos metodológicos que integraram um estudo realizado com alunos do 6.º ano de escolaridade e que se consideram relevantes para este artigo. Depois, discutem-se as conclusões do estudo no que respeita, concretamente, à flexibilidade na comparação multiplicativa. Estas conclusões constituem o suporte argumentativo para fundamentar, no final, uma discussão geral centrada nos desafios que o desenvolvimento da flexibilidade no processo de aprendizagem dos alunos coloca ao nível da formação dos professores de Matemática e, em particular, ao nível da sua formação inicial. O objetivo deste artigo é, portanto, discutir a flexibilidade na aprendizagem de conceitos matemáticos específicos, através de um estudo realizado com alunos, num processo formativo atual de professores de Matemática.

2 Flexibilidade na comparação multiplicativa

A evolução conceptual da comparação multiplicativa, tal como Vergnaud (1983, 1988) defende, começa nas relações em um espaço de medida e prossegue para relações em dois espaços de medida (relação escalar e relação funcional). Espaços de medida são usualmente definidos pelo autor como diferentes conjuntos de objetos, diferentes tipos de quantidades ou diferentes unidades de medida e permitem-lhe sistematizar e classificar os problemas multiplicativos a partir de uma análise da sua estrutura matemática, isto é, das relações entre os dados do enunciado e as questões colocadas.

Freudenthal (2002) propõe, na sua didática fenomenológica, que os conceitos, estruturas ou ideias matemáticas surjam aos alunos através de uma análise de fenómenos que lhes dão origem. Evidencia, desta forma, a importância de conexões entre a Matemática e as outras Ciências, entre a Matemática e a vida real e dentro da própria Matemática, num percurso perspectivado do concreto e informal até ao abstrato e formal. No que se refere ao conceito de razão, Freudenthal (2002) defende a existência de dois tipos: razão interna e razão externa. Esta distinção permite-nos fazer uma correspondência com os conceitos e os operadores definidos por Vergnaud (1983, 1988): razão interna, considerada dentro de um mesmo espaço de medida → relação escalar; e razão externa, considerada entre espaços de medida → relação funcional. Na discussão em torno do conceito de razão, Freudenthal (2002) realça também a importância da sua relação com o conceito de medida, mais concretamente com a ação de medir, tida como um processo de comparação. Thompson e Saldanha (2003) mencionam que “a ideia de razão está no coração da medição” (p. 15) e medir um objeto significa, portanto, conceber que algum dos seus atributos foi segmentado e que essa segmentação é comparada com uma quantidade normalizada desse atributo.

Os diferentes processos matemáticos (resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático) são, segundo o National Research Council (2001), relacionados através de representações matemáticas que, ao longo das últimas décadas, têm tido uma valorização progressiva no processo de ensino e aprendizagem, a nível de orientações curriculares. Bruner (1966) especifica que um qualquer domínio de conhecimento (ou um qualquer problema nesse domínio) pode ser representado de três modos (ou níveis): representação ativa, ligada a um conjunto de ações apropriadas à resolução de determinado problema; representação icónica, relacionada com um conjunto reduzido de imagens ou gráficos que ligam a um conceito, sem o definirem completamente; representação simbólica, originada de um conjunto de símbolos ou proposições lógicas. Perante esta caracterização e considerando que a representação é uma ferramenta útil para a compreensão de conceitos (por exemplo, do conceito de comparação multiplicativa) e para a resolução de problemas, em particular, para a resolução de situações multiplicativas relacionadas com os conceitos de razão e proporção, destacamos neste artigo as representações simbólicas em linguagem matemática que, num determinado momento, se referem à elaboração de tabelas de razões ou linhas numéricas duplas e à representação de razões sob a forma de fração ou de quociente.

Compreender o modo como alunos do 6.º ano desenvolvem a comparação multiplicativa numa articulação entre as estratégias de resolução, os procedimentos e as representações que utilizam e as características dos números envolvidos, as relações numéricas e as propriedades das operações é uma proposta para destacar a flexibilidade, em particular, a

flexibilidade na construção de estratégias e na utilização de representações na resolução de tarefas de comparação multiplicativa.

As estratégias de resolução são consideradas como a descrição e a caracterização de um conjunto de procedimentos, adaptados de Robinson e LeFevre (2012), utilizados pelos alunos quando resolvem situações de comparação multiplicativa. Por exemplo, na tarefa descrita neste artigo, uma estratégia de resolução pode ser ilustrada quando os alunos multiplicam, aplicam um fator representado por um número racional (inteiro ou não inteiro) para aumentar ou diminuir quantidades dentro de um mesmo espaço de medida (raciocínio escalar) e determinam-no através da operação divisão.

As relações numéricas e as propriedades das operações surgem em diferentes níveis, num dos quais se consideram as conexões entre as operações multiplicação e divisão, as relações numéricas multiplicativas entre números inteiros ou não inteiros representados sob formas diversas (fração, decimal, numeral misto ou percentagem) e a utilização das propriedades comutativa da multiplicação e distributiva da multiplicação em relação à adição. Surge, sem dúvida, um apelo ao cálculo mental flexível “encarado como uma reação de conhecimento, individual e pessoal, manifestada de uma forma subjetiva, a partir do que se compreende sobre um problema específico” (Threlfall, 2002, p. 42).

A flexibilidade na comparação multiplicativa é, por isso, considerada pelas autoras do artigo como um processo dinâmico no sentido de adaptação das estratégias de resolução e do uso de representações às características das tarefas, em que as relações numéricas e as propriedades das operações têm um papel de destaque. Pretende-se, pois, valorizar a compreensão dos alunos no que respeita à comparação multiplicativa, na perspetiva da flexibilidade, tida como adaptabilidade (adequação, eficiência e rapidez), onde se relevam as estratégias utilizadas na resolução de tarefas específicas, as relações numéricas e as propriedades das operações aplicadas e as distintas representações adotadas.

3 Procedimentos metodológicos

A primeira autora deste artigo realizou uma investigação cujo objetivo é compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade desenvolvem a proporcionalidade, num contexto de resolução de tarefas de comparação multiplicativa, em que as relações entre estratégias/procedimentos e representações realçam as características dos números envolvidos e as propriedades das operações utilizadas. O estudo decorreu segundo uma metodologia de investigação baseada em *design* (Graveimeijer & Cobb, 2006), na modalidade de experiência de ensino transformadora conduzida a partir de conjeturas (Kelly & Lesh, 2000), cuja abrangência é também identificada por Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003) como experiências de sala de aula (*classroom experiments*, no original).

Numa primeira etapa foi planificado um conjunto de tarefas a explorar na sala de aula, do qual se apresenta a tarefa da Figura 1, composta por quatro problemas. Esta tarefa consiste em comparar razões (problema 1) e em determinar um dos termos de uma razão quando é conhecido o outro e referida a relação multiplicativa a manter, neste caso, o sabor da limonada confeccionada num dos dois dias (problemas 2, 3 e 4).

Quando o João e os amigos se juntam para brincar, a mãe dele faz limonada para todos, misturando concentrado de sumo de limão e água fresca.

Na sexta-feira, a mãe do João fez limonada e misturou 3 chávenas de concentrado de sumo de limão e 4 litros de água.

No sábado, na festa de anos do João, a mãe fez limonada e misturou 4 chávenas de concentrado de sumo de limão e 5 litros de água.



1. Alguns amigos do João disseram que a limonada de sexta-feira tinha um sabor a limão diferente da de sábado. Concordas com eles? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.
2. Uns dias depois, a mãe do João pretendeu fazer limonada com o mesmo sabor a limão daquela que tinha feito no sábado, mas só tinha 1 chávena de concentrado de limão. Que quantidade de água devia ter utilizado? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.
3. Quando foram à excursão, a mãe do João voltou a fazer limonada com o mesmo sabor da que tinha feito no sábado e, nesse momento, misturou 9 chávenas de concentrado de sumo de limão com água. És capaz de dizer quantos litros de água utilizou? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.
4. Se a mãe do João utilizar 18 litros de água, quantas chávenas de concentrado de sumo de limão deve misturar para que a limonada tenha o mesmo sabor que a de sexta-feira? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

Figura 1: Tarefa *Fazer limonadas* (adaptada de Using Proportional Reasoning in Mathematics Assessment Project, 2015).

As tarefas, segundo a classificação de Ponte (2005) quanto ao grau de desafio matemático e ao grau de estrutura, podem ser consideradas problemas e foram propostas numa sequência que permitia evidenciar a evolução conceptual da comparação multiplicativa e ser uma primeira abordagem ao conteúdo curricular Proporcionalidade direta, através dos conceitos de razão e proporção.

A exploração das tarefas reflete a sequenciação conceptual hierárquica de três conceitos/procedimentos: fator multiplicativo \rightarrow razão escalar \rightarrow razão funcional. Considerámos que o procedimento escalar surge entre o fator multiplicativo (já do conhecimento dos alunos) e o procedimento funcional (em processo de apropriação pelos alunos). Conjeturámos, de acordo com Gravemeijer e Cobb (2013), que os alunos devem ser capazes de explorar e aplicar os conhecimentos que já possuem sobre fator multiplicativo e prosseguir para a exploração dos outros dois conceitos/procedimentos. As estratégias desenvolvidas e os procedimentos efetuados com grandezas discretas (universo dos números inteiros positivos) permitem aos alunos uma extensão a outros universos numéricos (com grandezas contínuas), nos quais os números envolvidos são progressivamente menos “amigáveis” e em que continuam a ser válidas as relações e as propriedades dos números e das operações conhecidas/usadas. As tarefas surgem contextualizadas em situações da vida real e em situações somente de cálculo e proporcionam a exploração dos diversos modos de representações mencionados por Bruner (1966).

Numa segunda etapa, foram concretizados dois ciclos da experiência de ensino, no início dos anos letivos 2015/16 e 2016/17, em duas turmas de duas escolas portuguesas com lecionação do 2.º ciclo do ensino básico, num total de 38 alunos. Estes momentos

permitiram a recolha de dados através das produções escritas dos alunos (entregues no final de cada aula, digitalizadas e depois devolvidas) e das suas intervenções orais, resultantes de conversas/discussões no grupo de trabalho ou com a professora, no decorrer das aulas. As transcrições completas das gravações vídeo das aulas possibilitaram complementar a informação dos registos escritos.

Na terceira etapa, centrada na análise de dados, foram identificadas, três categorias principais interligadas com o entendimento de flexibilidade: (i) estratégias de resolução; (ii) relações numéricas e propriedades das operações; (iii) representações. Deste modo, caracterizámos a evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa segundo duas perspetivas que englobavam, por um lado, as estratégias de resolução, os modos de representação e as respetivas conexões e, por outro lado, a persistência quer a nível de estratégias de resolução, quer a nível de representações.

4 Flexibilidade na comparação multiplicativa de alunos de 6.º ano

Uma primeira conclusão do estudo indica-nos que os alunos, ao utilizarem uma estratégia e uma representação adequadas, não mostram grande apetência para as alterar, mesmo que os valores numéricos em jogo possam “pedir” o contrário, ou seja, as estratégias de resolução e as representações que sabem usar persistem independentemente de serem ou não as mais adequadas para um dado problema.

Ao resolver o problema 3 (Figura 1) Manuel apresenta a sua tradução (Figura 2) através de uma linha numérica dupla com dois pontos e identifica o termo desconhecido de uma das razões com um ponto de interrogação. Para determinar o valor que lhe corresponde calcula, através do algoritmo da divisão, o quociente não inteiro de $9 : 4$. De seguida, multiplica 5 por 2,25 sem registar como efetua este cálculo. A linha numérica dupla é complementada, em cima e em baixo, com dois arcos orientados e legendados com o procedimento a efetuar “ $\times 2,25$ ”.

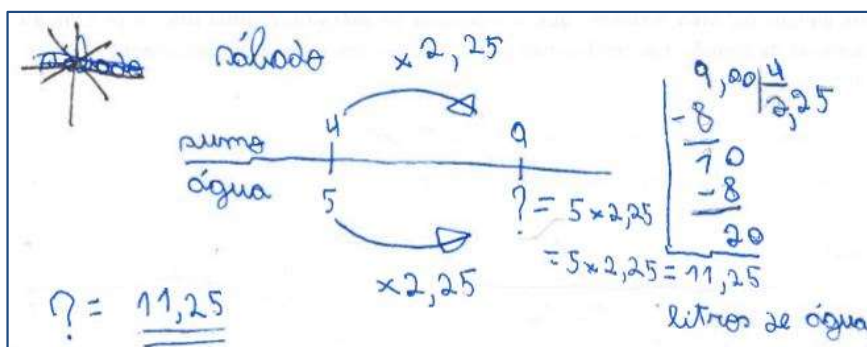


Figura 2: Resolução de Manuel.

Também Andreia utiliza (Figura 3) a linha numérica dupla com dois pontos, tal como seis dos vinte alunos desta turma, e os algoritmos das operações divisão e multiplicação, da mesma forma que dezasseis dos seus colegas. Neste último, como auxiliar de memória, regista por cima e com um círculo à volta os valores obtidos nos reagrupamentos das centésimas em décimas e das décimas em unidades.

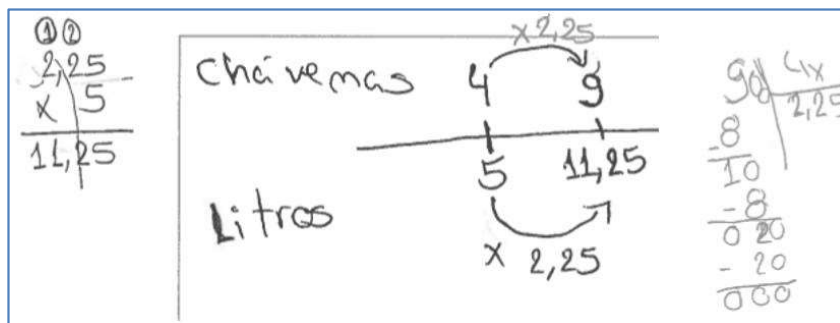


Figura 3: Resolução de Andreia.

Tal como Manuel e Andreia, quase todos os alunos, das duas turmas, efetuam os cálculos de uma forma algorítmica, mas o recurso à manipulação mental de relações numéricas permitia comparar multiplicativamente 9 e 4 e representar o 9 em função do 4 da seguinte forma: $9 = 2 \times 4 + \frac{1}{4} \times 4$, ou seja, $9 = (2 + \frac{1}{4}) \times 4 = 2\frac{1}{4} \times 4 = 2,25 \times 4$. De modo similar, para calcular $5 \times 2,25$, podiam utilizar factos básicos de cálculo, tais como, os múltiplos de 5 e o relacionar e representar números não inteiros na forma de decimal ou de fração ($5 \times 2 = 10$ e $5 \times 0,25 = 5 \times \frac{1}{4} = 1,25$), e assim concluir que $5 \times 2,25 = 10 + 1,25 = 11,25$.

Alexandre é o único aluno da sua turma que efetua os cálculos através da exploração de relações numéricas e não recorrendo ao uso de procedimentos algorítmicos. Representa, como já tinha feito anteriormente e tal como muitos dos seus colegas, uma linha numérica dupla com dois pontos (Figura 4). Não especifica como obtém 2,25, mas confirma à direita da linha que esse valor está correto. Decompõe 2,25 na parte inteira e na parte decimal e substitui esta última pela fração $\frac{1}{4}$. Para calcular $4 \times 2,25$ e $5 \times 2,25$ aplica, sem a nomear, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A omissão de parenteses, embora incorreta, não vai no segundo caso influenciar o resultado final. No primeiro, o não multiplicar 4 por $\frac{1}{4}$ origina um resultado errado que não parece atrapalhá-lo uma vez que na linha está colocado o valor em causa, 9.

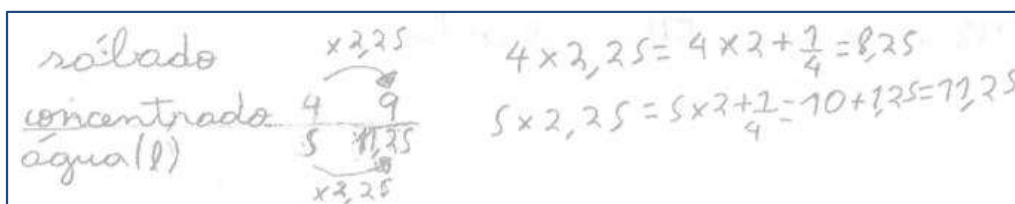


Figura 4: Resolução de Alexandre.

Ao considerarmos agora resoluções do último problema desta tarefa, verificamos que, por exemplo, Raquel também representa (Figura 5) uma linha numérica dupla com dois pontos e dois arcos orientados, legendados com o procedimento a efetuar “ $\times 4,5$ ”. Determina este valor dividindo 18 por 4 através da aplicação do algoritmo usual da operação divisão. Depois, efetua a multiplicação $3 \times 4,5$ por aplicação do algoritmo e, como auxiliar de memória, ao lado, regista “1” que surge do reagrupamento em uma dezena do produto total das unidades.

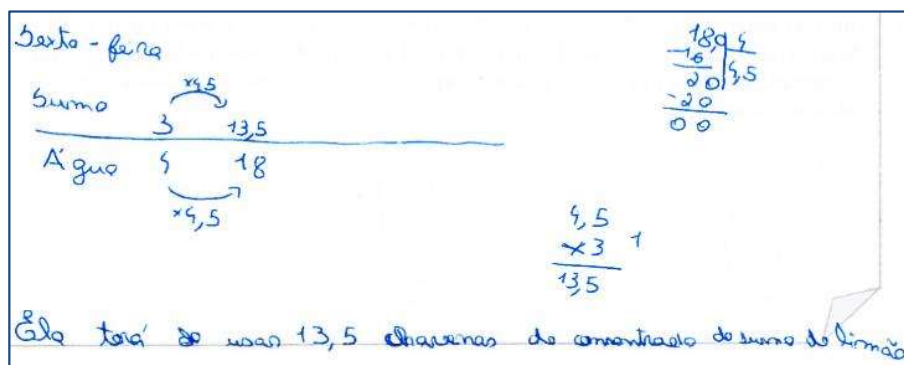


Figura 5: Resolução de Raquel.

As estratégias/procedimentos de resolução e as representações utilizadas são, desta forma, mantidas de um problema para outro. Alexandre, embora sem evidência à utilização de algoritmos das operações, repete (Figura 6) a estratégia de resolução, os procedimentos e as representações que utiliza no problema 3 e determina o valor 4,5 que coloca como legenda dos arcos orientados, sem explicitar, mais uma vez, como efetua estes cálculos. Confirma o fator 4,5 nas duas multiplicações e decompõe-o mentalmente na sua parte inteira e decimal. Aplica, novamente sem a nomear, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Também aqui persiste um lapso de não efetuar o cálculo intermédio da adição, na segunda multiplicação, mas o valor indicado na linha corresponde ao que é o dado no enunciado, 18.

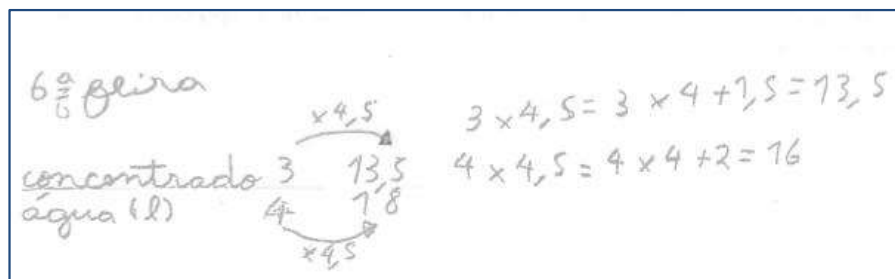


Figura 6: Resolução de Alexandre.

Quando é interpelado pela professora para explicar como chegou ao número 4,5, Alexandre diz: “Quatro vezes quatro é dezasseis. E depois, mais metade de quatro.”. Os conhecimentos adquiridos sobre os múltiplos de 4 e como “calcular metade” permitem-lhe uma abordagem eficiente de cálculo mental.

Oito dos dezoito alunos da turma resolvem este problema representando a razão correspondente à mistura de sexta-feira através de uma fração, $\frac{3}{4}$, e cinco deles representam também a razão que o permite traduzir em linguagem matemática, $\frac{13,5}{18}$. Mário regista (Figura 7) a igualdade entre as duas razões e, ao lado, os algoritmos das operações divisão e multiplicação. Na igualdade de razões assinala dois arcos legendados com o procedimento a efetuar “ $\times 4,5$ ”.

$$\frac{3}{4} = \frac{23,5}{4,5}$$

$$\frac{180}{4} = 45$$

$$45 \times 3 = 135$$

R: Deve misturar 13,5 elavinas.

Figura 7: Resolução de Mário.

Nos dois problemas exemplificados, os alunos das duas turmas mantêm a estratégia utilizada. Para determinar o termo desconhecido de uma razão a partir de uma outra que é indicada, procuram primeiro, através da divisão, o fator (não inteiro) que lhes permite relacionar os termos correspondentes das duas razões. De seguida, multiplicam o termo correspondente que conhecem e o fator encontrado para determinar o termo que lhes é desconhecido.

Este procedimento de multiplicar cada um dos termos da razão por um mesmo fator positivo, inteiro ou não inteiro, pressupõe o trabalho com o conceito de razão escalar que relaciona elementos de uma determinada grandeza, dentro de um mesmo espaço de medida, tal como refere Vergnaud (1983).

A nível da representação usada, os alunos recorrem a linhas numéricas duplas (com dois pontos) e razões representadas sob a forma de uma fração, em que os termos podem ser, ou não, números inteiros. A proporção surge, por isso, na linha numérica dupla e também na igualdade de razões, representadas sob a forma de fração.

Estes alunos mantêm-se “fiéis” às suas estratégias, aos procedimentos e às representações que utilizam não só nos problemas desta tarefa como, de um modo geral, na resolução das outras tarefas, independentemente de serem ou não as mais adequadas para cada problema. Conhecem e sabem usar um procedimento que repetem em todas as situações de comparação, sem analisar e relacionar as quantidades que comparam.

5 Flexibilidade – desafios para a formação de professores de Matemática

As conclusões anteriores reforçam a pertinência de a formação inicial de professores dar especial atenção a desafios de natureza diversa. Globalmente, consideramos que o futuro professor deve entender o ensino da Matemática como promotor da proficiência matemática (NRC, 2001), isto é, como um entrelaçar entre compreensão conceptual (compreensão de conceitos matemáticos, operações e relações), fluência de procedimentos (competência em executar procedimentos de forma flexível, precisa, eficiente e apropriada), competência estratégica (capacidade de formular, representar e resolver problemas matemáticos), raciocínio adaptativo (capacidade para pensar de forma lógica, refletir, explicar e justificar) e tendência produtiva (propensão comum para ver a Matemática como sensata, útil, interessante e eficaz).

Neste sentido, Boavida, Delgado, Mendes e Brocardo (2018) destacam a importância de desenvolver intencionalmente com futuros professores e educadores a capacidade de resolver um mesmo problema de formas diferentes e relatam algumas potencialidades do uso flexível de estratégias diferentes para o resolver.

O NCTM (2014) acrescenta a importância de conseguir discutir com os alunos tarefas que promovam o raciocínio matemático e permitam múltiplos pontos de entrada. Note-se que tanto saber tomar diferentes pontos de vista para resolver um problema, como conseguir que os alunos abordem um problema usando adequadamente processos de raciocínio como a justificação ou a generalização, exige um trabalho intencional e que tem de atravessar as diferentes unidades curriculares e a indução à prática pedagógica. De facto, importa que os estudantes, futuros educadores e professores, saibam efetivamente como não adotar um ensino centrado no uso do método único, que em Matemática é muitas vezes associado ao cálculo algorítmico, conseguindo tomar em mãos um ensino exploratório, promotor da proficiência matemática dos seus futuros alunos.

A aprendizagem e, em particular, a aprendizagem dos números, deve focar-se, de acordo com van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen e Keijzer (2008), no desenvolvimento do *insight* dos alunos. As aulas de matemática devem por isso dispor de mais tempo para discussões e conversações e permitir que os alunos percebam que a resposta exata não é o mais importante, mas sim o raciocínio em que é baseada a sua resolução. Numa perspetiva didática, a aprendizagem é encarada por estes autores como uma construção ativa de uma rede de relações em que a abordagem de conceitos e procedimentos deve também estimular a investigação de relações. O objetivo de aprendizagem não deve, portanto, ser o dominar procedimentos, mas sim compreender os princípios que lhes estão subjacentes, ou seja, a ênfase surge na compreensão e não na capacidade de execução, aspetos centrais a ter em conta ao nível da formação inicial de professores e educadores.

A criatividade, considerada por Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi e Christou (2013) como intimamente ligada com a flexibilidade, é vista como “a essência da Matemática” (Mann, 2006) ou como um pré-requisito para o desenvolvimento da capacidade matemática.

A nível geral a criatividade vai muito além da criatividade na Matemática e é um aspeto importante tanto no perfil dos alunos (Martins et al., 2017) como no perfil dos professores pelo que deve ser objeto de trabalho explícito ao nível da formação inicial de professores e educadores.

Em suma, a promoção da flexibilidade e da criatividade é um aspeto importante a ser trabalhado do ponto de vista teórico e prático na formação de professores e educadores. Para isso, importa que os futuros professores e educadores compreendam o seu significado dando-lhe sentido em diferentes tópicos curriculares (como aqui ilustramos a propósito da comparação multiplicativa), aprofundem as suas relações com a resolução de problemas (enaltecendo estratégias e procedimentos de resolução e modos de representação) e experienciem opções práticas de as promover.

6 Referências

Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., & Brocardo, J. (2018). Challenging preservice teachers to produce varied mathematical problem solving strategies. *Journal of the European*

- Teacher Education Network* 13, 13, 45-57. Acedido em <https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/22220/1/Challenging%20preservice%20teachers%20to%20produce%20varied%20mathematical%20problem%20solving%20strategies%20-%20pp.%2045-57.pdf>
- Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13. Acedido em <https://www.jstor.org/stable/3699928>
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72-113). Enschede, The Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).
- Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM Mathematics Education*, 45, 167-181. Acedido em <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-012-0467-1>
- Kelly, A., & Lesh, R. (2000). Part III: Teaching experiments. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-334). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of Gifted*, 30(2), 236-260. doi: 10.4219/jeg-2006-264
- Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: ME/DGE
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press. doi: <https://doi.org/10.17226/9822>
- Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Robinson, K., & LeFevre, J.-A. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 409-428. Acedido em <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9330-5>
- Thompson, P., & Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: NCTM.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 29-47. Acedido em <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1020572803437>
- van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Orlando, Florida: Academic Press, Inc.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.