



## CÁLCULO INTEGRAL EM $\mathbb{R}$

SÉRGIO FERNANDES

**TÍTULO:** CÁLCULO INTEGRAL EM  $\mathbb{R}$   
**AUTOR:** SÉRGIO FERNANDES  
**EDIÇÃO:** INSTITUTO POLITÉCNICO DE SETÚBAL  
**ISBN:** 978-989-35377-1-8

# Conteúdo

|   |   |    |
|---|---|----|
|   | <i>Prefácio</i>   | 5  |
| 1 | <i>Motivação</i>  | 7  |
| 2 | <i>Primitivação</i>   | 9  |
|   | 2.1 <i>Conceitos Básicos</i>                                    | 9  |
|   | 2.2 <i>Primitivas Imediatas</i>                                 | 13 |
|   | 2.3 <i>Técnicas de Primitivação</i>                             | 19 |
|   | 2.3.1 <i>Primitivação por partes</i>                            | 19 |
|   | 2.3.2 <i>Primitivação por substituição</i>                      | 22 |
|   | 2.3.3 <i>Primitivação de funções racionais por decomposição</i> | 28 |
|   | 2.4 <i>Exercícios Propostos</i>                                 | 43 |
|   | 2.5 <i>Soluções dos Exercícios Propostos</i>                    | 45 |
| 3 | <i>Integração em <math>\mathbb{R}</math></i>                    | 47 |
|   | 3.1 <i>Integrabilidade à Riemann</i>                            | 48 |
|   | 3.1.1 <i>Monotonia, continuidade e integrabilidade</i>          | 54 |
|   | 3.1.2 <i>Propriedades do Integral de Riemann</i>                | 56 |
|   | 3.2 <i>Integral Indefinido</i>                                  | 60 |
|   | 3.3 <i>Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral</i>           | 66 |
|   | 3.4 <i>Teorema Fundamental do Cálculo Integral</i>              | 68 |
|   | 3.5 <i>Técnicas de Integração</i>                               | 74 |
|   | 3.5.1 <i>Integração por partes</i>                              | 74 |
|   | 3.5.2 <i>Integração por substituição</i>                        | 75 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 3.6   | <i>Aplicações do Cálculo Integral</i>             | 79  |
| 3.6.1 | <i>Cálculo de áreas</i>                           | 79  |
| 3.6.2 | <i>Cálculo de volumes de sólidos de revolução</i> | 83  |
| 3.6.3 | <i>Cálculo de comprimentos de arco</i>            | 90  |
| 3.7   | <i>Integrais Impróprios</i>                       | 93  |
| 3.7.1 | <i>Integrais Impróprios de 1ª espécie</i>         | 93  |
| 3.7.2 | <i>Integrais Impróprios de 2ª espécie</i>         | 94  |
| 3.7.3 | <i>Integrais Impróprios Mistos</i>                | 95  |
| 3.8   | <i>Exercícios Propostos</i>                       | 96  |
| 3.9   | <i>Soluções dos Exercícios Propostos</i>          | 99  |
| 4     | <i>Bibliografia</i>                               | 101 |
| A     | <i>Anexo</i>                                      | 103 |

## *Prefácio*

O cálculo integral desempenha um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento, desde a física e a engenharia até a economia e a biologia, e é lecionado em diversas disciplinas de cursos superiores, em particular dos cursos de Licenciatura e dos cursos Técnicos Superiores Profissionais da Escola Superior de Tecnologia de Setúbal do Instituto Politécnico de Setúbal (ESTSetúbal/IPS). Estes conteúdos também serão parte integrante das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário (12<sup>o</sup> ano de escolaridade), a partir de 2026/2027.

Este manual foi escrito com o objetivo de apoiar os estudantes, desde iniciantes até aqueles que desejam aprofundar os seus conhecimentos, a compreender e a dominar os conceitos e as técnicas envolvidos no cálculo integral. A matéria é abordada de uma forma simples e clara, naturalmente não descurando o rigor científico, com muitos exemplos e exercícios propostos ao longo do manual. O cálculo integral não é diferente dos restantes conteúdos matemáticos, no que diz respeito à exigência de estudo dos conceitos teóricos e da necessidade de praticar de forma sistemática. Só resolvendo muitos e diversificados exercícios, de forma recorrente ao longo do tempo, esclarecendo todas as dúvidas que vão surgindo, será possível ter sucesso na aprendizagem dos conteúdos aqui expostos. Como pré-requisitos para esta matéria surge, em lugar de destaque, o cálculo diferencial numa variável, onde o domínio das regras de derivação é fundamental.

Por fim, na esperança que este manual sirva o propósito com que foi criado, resta-me desejar votos de bom trabalho e sucesso na aprendizagem do cálculo integral em  $\mathbb{R}$ .

julho, 2023



# 1

## Motivação

O cálculo integral tem aplicações em diversos domínios do conhecimento. De seguida, apresentam-se três exemplos, com os quais se pretende apenas ilustrar as aplicações e apresentar informalmente alguns conceitos, sem explorar em detalhe a parte do cálculo. Os conceitos teóricos serão formalizados nos próximos capítulos.

Sabe-se, do cálculo diferencial, que a derivada, em ordem ao tempo, da função que representa a posição de um objeto em movimento retilíneo é igual à sua velocidade instantânea. Por exemplo, se a função posição for dada por

$$s(t) = 5t - 4,9t^2$$

com  $s$  em metros e  $t$  em segundos, para obter a função velocidade instantânea basta derivar a função anterior:

$$v(t) = s'(t) = 5 - 9,8t$$

metros por segundo. Suponhamos, agora, que é conhecida a função velocidade  $v$  e que se pretende determinar uma função posição  $s$  (Figura 1.1).

De um modo geral, o problema consiste em, dada uma função  $f$ , determinar uma função  $F$ , cuja derivada seja  $f$ . Ou seja,

$$(F)' = f.$$

A esta função  $F$  chama-se uma primitiva (em inglês *antiderivative*) de  $f$  e ao processo de cálculo de primitivas chama-se primitivação. Realce-se, desde já, que nem sempre existe uma primitiva de uma função e, sempre que existe, não é única.

Uma outra aplicação do cálculo integral, talvez a mais conhecida, devido à facilidade com que permite expor os conceitos teóricos, é o cálculo de áreas planas. Considere-se, então, que se pretende determinar a área de uma certa região plana, limitada pelo eixo das abcissas, pela função  $f(x) = \sin x + 2$  e pelas retas  $x = 0$  e  $x = 2\pi$  (região a sombreado na Figura 1.2).

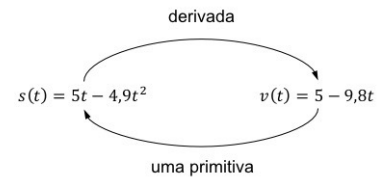


Figura 1.1: Derivação e primitivação.

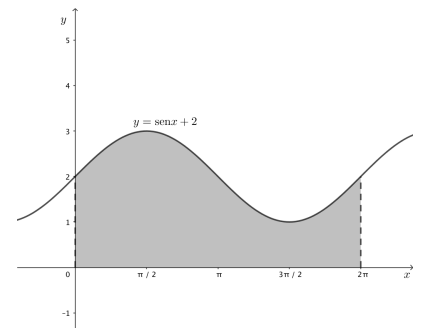


Figura 1.2: Região limitada pelas curvas  $y = \sin x + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $x = 2\pi$ .

As fórmulas que conhecemos para o cálculo de áreas de polígonos e de regiões circulares não servem para este caso, uma vez que a região é limitada superiormente por uma função trigonométrica. Resolvendo o seguinte integral (leia-se integral definido da função  $f$  entre 0 e  $2\pi$ )

$$\int_0^{2\pi} (\sen x + 2) dx,$$

obtém-se o valor da área da região, que é igual a  $4\pi$  unidades quadradas de medida.<sup>1</sup>

Como último exemplo, ilustraremos uma outra aplicação geométrica do cálculo integral, também bastante conhecida, que consiste no cálculo de volumes de sólidos de revolução, isto é, obtidos pela rotação de uma certa região em torno de um eixo. Na Figura 1.4 podemos ver o sólido que resulta da rotação em torno do eixo das abscissas da região limitada por esse mesmo eixo e o gráfico da função  $f(x) = \sen x + 2$ , para  $x$  entre 0 e  $2\pi$ , ou seja, a região sombreada da Figura 1.2. Resolvendo o integral

$$\int_0^{2\pi} \pi (\sen x + 2)^2 dx$$

obtém-se o valor do volume, que é igual a  $9\pi^2$  unidades cúbicas de medida.

Vimos três exemplos de aplicação do cálculo integral. Para além destes exemplos, existem muitas outras aplicações interessantes em diversos domínios, nomeadamente aplicações que envolvem: taxas de variação (por exemplo em função do tempo, o crescimento de uma dada população, o calor produzido por uma dada energia, a massa perdida por um dado elemento radioativo, etc.), problemas geométricos (por exemplo a área da superfície de um sólido de revolução, o comprimento de uma linha, etc.), problemas físicos (por exemplo o trabalho realizado por uma força, a pressão e a força exercida ao submergir um objeto num fluido, etc.). Naturalmente, como se compreende, grande parte destas aplicações sai fora do âmbito do que se pretende explorar neste texto.

Este manual é composto por mais dois capítulos: Primitivação e Integração. Como já foi referido, chama-se primitivação ao processo de cálculo de primitivas de uma função. Como iremos ver, aquando da lecionação do Teorema Fundamental do Cálculo Integral no capítulo de Integração, a primitivação irá permitir resolver os integrais de uma forma simples. Assim, o domínio do cálculo de primitivas será fundamental para o capítulo de integração.

<sup>1</sup>O sinal  $\int$  de integral pretende representar a letra S alongada, inicial da palavra latina “Summa”, ou seja, soma, e o  $dx$  pretende representar um número infinitesimal, ou seja, infinitamente pequeno. Esta atual notação deve-se a Gottfried Leibniz. Na figura abaixo (Figura 1.3) podemos ver parte de um manuscrito de Leibniz, de outubro de 1675, em que o sinal de integral foi usado pela primeira vez.

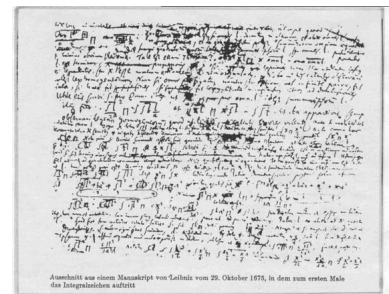


Figura 1.3: Parte de um manuscrito de Leibniz, de outubro de 1675, em que o sinal de integral foi usado pela primeira vez.

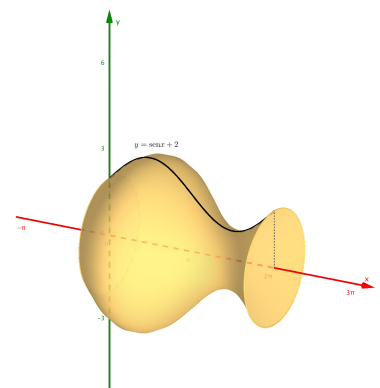


Figura 1.4: Volume de rotação.

## 2

# Primitivação

### 2.1 Conceitos Básicos

Nesta secção, vamos formalizar os conceitos já introduzidos no capítulo anterior e ver algumas propriedades fundamentais da primitivação.

**Definição 1.** Uma função  $F$ , diferenciável em  $I$ , diz-se uma **primitiva** de  $f$  no intervalo  $I$  se  $F'(x) = f(x)$ , para todo o  $x$  em  $I$ .

Uma função  $f$  diz-se **primitivável** em  $I$  (nota <sup>1</sup>) se admitir uma primitiva em  $I$ . Como veremos adiante, nem todas as funções são primitiváveis num certo intervalo.

**Exemplo 1.** Em  $\mathbb{R}$ , a função  $F(x) = x$  é uma primitiva de  $f(x) = 1$ , pois  $F'(x) = (x)' = 1$ , para todo o  $x$  em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.** Em  $\mathbb{R}$ , a função  $F(x) = \frac{x^2}{2}$  é uma primitiva de  $f(x) = x$ , uma vez que  $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$ , para todo o  $x$  em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.** Em  $\mathbb{R}^+$ , a função  $F_1(x) = \ln x$  é uma primitiva de  $f(x) = \frac{1}{x}$ , uma vez que  $F_1'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ , para todo o  $x$  em  $\mathbb{R}^+$ .

Em  $\mathbb{R}^-$ , a função  $F_2(x) = \ln(-x)$  é uma primitiva de  $f(x) = \frac{1}{x}$ , uma vez que  $F_2'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$ , para todo o  $x$  em  $\mathbb{R}^-$ .

Ou seja, em  $\mathbb{R}^+$  ou em  $\mathbb{R}^-$ ,  $F(x) = \ln|x|$  é uma primitiva de  $f(x) = \frac{1}{x}$ , pois  $F'(x) = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

**Exemplo 4.** Em  $\mathbb{R}$ , a função  $F(x) = \sin x$  é uma primitiva da função  $f(x) = \cos x$ , uma vez que  $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$ . Uma outra primitiva de  $f(x) = \cos x$  é dada por  $G(x) = \sin x + 3$ , uma vez que também  $G'(x) = (\sin x + 3)' = \cos x$ .

Tendo em conta que a derivada de uma constante é zero, facilmente se percebe que conseguiríamos obter ainda mais primitivas de  $f$ , pois qualquer função da forma  $\sin x + C$ , em que  $C$  é uma constante real, seria uma primitiva de  $f(x) = \cos x$ .

<sup>1</sup> Importa, desde já, salientar que o intervalo  $I$  poderá ser um intervalo fechado  $[a, b]$ . Ao longo deste manual, quando referirmos que uma função  $f$  é diferenciável num intervalo fechado  $[a, b]$  significa que a função é diferenciável em  $]a, b[$ , ou seja, tem derivada finita em qualquer ponto do interior do intervalo, admite derivada lateral direita finita no ponto  $a$  e derivada lateral esquerda finita no ponto  $b$ .

Assim, podemos deduzir que uma função primitivável num certo intervalo tem infinitas primitivas, porque se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então  $F$  mais uma constante qualquer, também é uma primitiva da função  $f$ .

Por outro lado, duas quaisquer primitivas de  $f$  apenas podem diferir entre si por uma constante. O resultado seguinte formaliza esta ideia:

**Teorema 1.** *Sejam  $F$  e  $G$  duas primitivas de  $f$  no intervalo  $I$ . Então, existe uma constante  $C$  tal que*

$$F(x) - G(x) = C,$$

para todo o  $x$  em  $I$ .

*Demonstração.*  $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ , no intervalo  $I$ , donde se deduz<sup>2</sup> que  $F(x) - G(x)$  é constante no referido intervalo.  $\square$

Tendo em conta as conclusões anteriores, podemos, então, afirmar que se uma função  $f$  tem uma primitiva  $F$  num intervalo  $I$ , então  $f$  tem uma infinidade de primitivas nesse intervalo e são todas dadas por  $F(x) + C$ , em que  $C$  é uma constante.

Para representar todas as primitivas de  $f$ , no intervalo considerado, é habitual utilizar as seguintes notações:

$$P_x(f(x)), P(f(x)), \text{ ou } \int f(x) dx,$$

podendo, portanto, escrever-se:

$$P(f(x)) = F(x) + C.$$

À expressão  $F(x) + C$  chama-se **família ou expressão geral das primitivas de  $f$**  e ao processo de cálculo chama-se **primitivação**. Com base nos exemplos anteriores, vejamos de seguida algumas famílias de primitivas:

**Exemplo 5.** A expressão geral das primitivas de  $f(x) = 1$  é dada por  $P(1) = x + C$ . A Figura 2.1 apresenta os gráficos de 4 primitivas pertencentes à família de primitivas de  $f(x) = 1$ .

**Exemplo 6.**  $P(x) = \frac{x^2}{2} + C$ .

**Exemplo 7.**  $P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x| + C$ .

**Exemplo 8.**  $P(\cos x) = \sin x + C$ .

**Exemplo 9.**  $P(e^x) = e^x + C$ .

Quando nada é referido em relação ao domínio, assume-se um intervalo onde a função é primitivável.

Uma consequência simples dos últimos resultados é o **Problema de Valores Iniciais** ou o **Problema de Cauchy**, que consiste na determinação de uma primitiva em particular, ou seja, o membro da família de primitivas, que verifica uma certa condição.

<sup>2</sup> pelo Corolário do Teorema de Lagrange

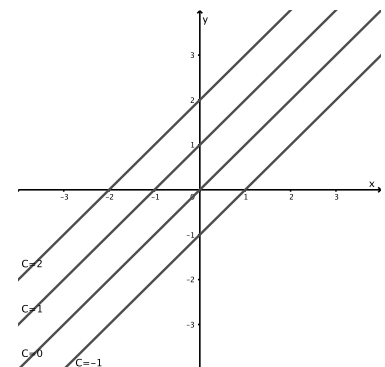


Figura 2.1: Gráficos de primitivas de  $f(x) = 1$ .

**Teorema 2.** *Seja  $f$  uma função primitivável no intervalo  $I$ , para cada  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$ , existe uma e uma só primitiva  $F$  de  $f$  em  $I$  tal que*

$$F(x_0) = y_0.$$

A  $F(x_0) = y_0$  chama-se **condição inicial do problema**.

Portanto, dada uma função primitivável num intervalo e uma condição inicial, é possível obter uma e uma só primitiva pertencente à família das primitivas da função, determinando-se um valor específico para a constante.

**Exemplo 10.** Determinemos a primitiva da função  $f(x) = e^x$  que toma o valor 3 para  $x = 0$ . Assim, pretende-se a primitiva  $F$  de  $f$  tal que  $F(0) = 3$ . Pelo último exemplo, sabe-se que

$$F(x) = P(e^x) = e^x + C.$$

Ora, como o valor da primitiva em  $x = 0$  é igual a 3, vem:

$$F(0) = 3 \Leftrightarrow e^0 + C = 3 \Leftrightarrow 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2.$$

Portanto, a primitiva da função  $f(x) = e^x$  que toma o valor 3 para  $x = 0$  é dada por

$$P(e^x) = e^x + 2.$$

A Figura 2.2 apresenta os gráficos de 5 primitivas de  $f(x) = e^x$ , destacando-se a solução particular que verifica a condição inicial  $F(0) = 3$ .

Pela definição de primitiva, e tendo em conta que a derivada de uma constante é 0, facilmente se conclui que

$$(P(f(x)))' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

isto é, a derivada da primitiva da função  $f$  é a própria função  $f$ .

**Exemplo 11.** Tendo em conta a conclusão anterior, para confirmar que

$$P\left(3x^2 + \frac{x}{1+x^4}\right) = x^3 + \frac{1}{2} \arctg(x^2) + C,$$

o mais simples será derivar a primitiva da função e verificar se o resultado é a função primitivada.

$$\begin{aligned} \left(x^3 + \frac{1}{2} \arctg(x^2) + C\right)' &= (x^3)' + \left(\frac{1}{2} \arctg(x^2)\right)' + (C)' \\ &= 3x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} + 0 \\ &= 3x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^4} \\ &= 3x^2 + \frac{x}{1+x^4} \end{aligned}$$

o que confirma a expressão dada.

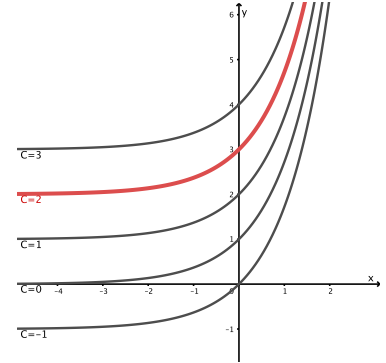


Figura 2.2: Gráficos de primitivas de  $f(x) = e^x$ .

**Exercício 1.** Determine a primitiva das seguintes funções:

1.  $f(x) = 1$  que toma o valor 0 quando  $x = 1$ ;
2.  $f(x) = x$  que toma o valor 1 quando  $x = 2$ ;
3.  $f(x) = \frac{1}{x}$  que toma o valor 2 quando  $x = e$ ;
4.  $f(x) = \sin x$  que toma o valor 0 quando  $x = \pi$ .

**Exercício 2.** Confirme os seguintes resultados:

1.  $P(1 + 3\sqrt{x}) = x + 2\sqrt{x^3} + C$ ;
2.  $P(\operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg} x - x + C$ ;
3.  $P(\ln x) = x \ln x - x + C$ ;
4.  $P(xe^{2x}) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{e^{2x}}{2} + C$ .

Podemos ainda concluir o seguinte resultado:

**Teorema 3.** *Seja  $f$  uma função diferenciável no intervalo  $I$ . Então, no intervalo  $I$ ,*

$$P(f'(x)) = f(x) + C.$$

*Demonstração.* Sendo  $f$  diferenciável no intervalo  $I$  e  $C$  uma constante,  $(f(x) + C)' = f'(x) + C' = f'(x)$ .  $\square$

Importa agora voltar a um comentário anterior: uma função  $f$  diz-se primitivável em  $I$  se admitir uma primitiva em  $I$ . Já vimos vários exemplos de funções primitiváveis. Seria interessante ver agora um exemplo de uma função não primitivável. Antes disso, enuncie-se o seguinte teorema:

**Teorema 4.** *Toda a função contínua num intervalo  $I$  é primitivável nesse intervalo.*<sup>3</sup>

Portanto, para conseguirmos um exemplo de uma função não primitivável num intervalo, teremos de pensar numa função não contínua nesse intervalo. Note-se que não pode ser uma função não contínua qualquer, pois o facto de não ser contínua num intervalo não implica que não seja primitivável nesse mesmo intervalo.

A função de Heaviside, designação pela qual é conhecida a função definida em  $\mathbb{R}$  por:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

é um exemplo de uma função não contínua e não primitivável em  $\mathbb{R}$ . Não há nenhuma função cuja derivada seja igual à função  $H$  em  $\mathbb{R}$ , devido ao ponto de abcissa  $x = 0$ . A função de Heaviside restringida a  $\mathbb{R}^-$  ou a  $\mathbb{R}_0^+$  já é primitivável.

Vejamos agora algumas propriedades importantes das primitivas. Facilmente se demonstra que a primitivação goza de linearidade, ou seja, das propriedades aditiva e homogénea.

**Teorema 5.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções primitiváveis no intervalo  $I$  e  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Então, no intervalo  $I$ :*

1.  $P(f(x) + g(x)) = P(f(x)) + P(g(x))$ ;
2.  $P(kf(x)) = kP(f(x))$ .

*Demonstração.* Sendo  $f$  e  $g$  funções primitiváveis no intervalo  $I$  e  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

1.  $(P(f(x)) + P(g(x)))' = (P(f(x)))' + (P(g(x)))' = f(x) + g(x)$ ;
2.  $(kP(f(x)))' = k(P(f(x)))' = kf(x)$ .

$\square$

<sup>3</sup>O resultado é consequência imediata do Teorema Fundamental do Cálculo Integral que iremos ver no próximo capítulo.

**Exemplo 12.**  $P(1+x) = P(1) + P(x) = x + \frac{x^2}{2} + C$ .<sup>4</sup>

**Exemplo 13.**  $P(2x) = 2P(x) = 2\frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$ .<sup>5</sup>

**Exemplo 14.**

$$\begin{aligned} P((1-x)^2) &= P(1-2x+x^2) \\ &= P(1) - 2P(x) + P(x^2) \\ &= x - 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

A primitiva da função  $x^2$  ainda não tinha sido resolvida mas, se pensarmos que a derivada de  $x^3$  é  $3x^2$ , então  $P(3x^2) = x^3 + C_1$ , logo  $3P(x^2) = x^3 + C_1$  e conseqüentemente  $P(x^2) = \frac{x^3}{3} + C_2$ .

Com este último exemplo, podemos já deduzir que não é muito prático fazer o cálculo de primitivas de uma função, tentando descobrir qual a função cuja derivada é igual à função que pretendemos primitivar, ou seja, por definição. Felizmente, podemos recorrer a uma tabela de primitivas, que não é mais do que uma tabela de derivadas já trabalhada de modo facilitar o cálculo de primitivas simples, conhecidas como **primitivas imediatas**.

### 2.2 Primitivas Imediatas

|  |  |
|--|--|
| $P(k) = kx + C \quad (k \in \mathbb{R})$                     | $P(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ |
| $P(e^x) = e^x + C$   | $P(a^x) = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$                      |
| $P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x  + C$                     | $P(\sec^2 x) = \operatorname{tg} x + C$  |
| $P(\operatorname{sen} x) = -\cos x + C$                      | $P(\cos x) = \operatorname{sen} x + C$   |
| $P\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + C$ | $P\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arcsen} x + C$                             |

**Exemplo 15.**  $P(5) = 5x + C$ .

**Exemplo 16.**  $P(3^x) = \frac{3^x}{\ln 3} + C$ .

**Exemplo 17.**  $P(x^3) = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$ .

**Exemplo 18.**  $P\left(\frac{1}{x^2}\right) = P(x^{-2}) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$ .

<sup>4</sup>Note-se que é dispensável somar uma constante  $C_1$  aquando da resolução da primeira primitiva ( $P(1)$ ) e uma constante  $C_2$  aquando da resolução da segunda primitiva ( $P(x)$ ). Considerando apenas a constante  $C$  tem-se a mesma família de primitivas da função do que se tivéssemos considerado  $C_1 + C_2$ .

<sup>5</sup>Note-se, mais uma vez, que é dispensável considerar  $2C$  aquando da resolução da primitiva  $P(x)$ .

**Exercício 3.** Determine a primitiva das seguintes funções:

- $f(x) = 3 + e^x$ ;
- $f(x) = 5 \cos x$ ;
- $f(x) = 4x + \frac{3}{x}$ ;
- $f(x) = 2e^x + \frac{1}{4x}$ ;
- $f(x) = (2-x)^2$  que toma o valor 2 para  $x = 0$ .

**Exercício 4.** Um objeto move-se em linha reta e a sua velocidade no instante  $t$  é dada por  $v(t) = 5 - 9,8t$  metros por segundo. Sabendo que a posição do objeto no instante  $t = 1$  é igual a 2 metros, determine a função que descreve a posição em função do tempo.

**Exemplo 19.**

$$\begin{aligned} P(\sqrt{x}) &= P(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C. \end{aligned}$$

**Exemplo 20.**

$$\begin{aligned} P(3e^x + x) &= 3P(e^x) + P(x) \\ &= 3e^x + \frac{x^{1+1}}{1+1} + C \\ &= 3e^x + \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

E se, por exemplo, quiséssemos determinar a primitiva da função composta  $f(x) = \cos(3x)$ ?

A tabela anterior não permite deduzir primitivas de funções compostas. Mas, tendo em conta a regra de derivação da função composta:

$$(F(u))' = u'F'(u),$$

com  $u$  uma função de  $x$  diferenciável num dado intervalo. Se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então  $F(u)$  é uma primitiva de  $u'f(u)$ . Ou seja,

$$P(u'f(u)) = F(u) + C.$$

Por isso a tabela anterior pode reescrever-se como:

|   |  |
|---|--|
|   | $P(u'u^\alpha) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ |
| $P(u'e^u) = e^u + C$  | $P(u'a^u) = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$                      |
| $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln u  + C$                     | $P(u'\sec^2 u) = \operatorname{tg} u + C$  |
| $P(u'\operatorname{sen} u) = -\cos u + C$                     | $P(u'\cos u) = \operatorname{sen} u + C$   |
| $P\left(\frac{u'}{1+u^2}\right) = \operatorname{arctg} u + C$ | $P\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arcsen} u + C$                              |

**Exemplo 21.** Podemos, agora, determinar a primitiva da função

$$f(x) = \cos(3x).$$

**Exercício 5.** Calcule a primitiva imediata das seguintes funções:

- $x^3 - 3x^2 + 1$ ;
- $x^{\frac{2}{3}} + e^x - \pi x^{-5}$ ;
- $3 - \sqrt{x} + 7\sqrt[3]{x}$ ;
- $\pi + 2^x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;
- $x + \frac{3}{1+x^2}$ ;
- $\sec^2 x + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Pela tabela anterior,  $P(u' \cos u) = \text{sen } u + C$ , portanto, para estar nas condições da primitiva, se possível, temos de “forçar” a existência da derivada de  $u = 3x$  “dentro” da primitiva, ou seja,

$$\begin{aligned} P\left(\underbrace{\cos(3x)}_u\right) &\stackrel{u=3x \rightarrow u'=3}{=} P\left(\frac{1}{3} \times 3 \cos(3x)\right) \\ &= \frac{1}{3} P\left(\underbrace{3}_{u'} \underbrace{\cos(3x)}_{\cos u}\right) \\ &\stackrel{P(u' \cos u) = \text{sen } u + C}{=} \frac{1}{3} \text{sen}(3x) + C. \end{aligned}$$

Note-se que foi possível “forçar” a existência da derivada na primitiva porque se tratava de uma constante. A este tipo de primitivas, em que se recorre a um artifício (por exemplo multiplicar e dividir por uma constante), chama-se geralmente **primitiva quase imediata**.

**Exemplo 22.** Determinemos agora a primitiva da função  $f(x) = e^{4x}$ . Sendo uma composta da exponencial, tente-se aplicar  $P(u' e^u) = e^u + C$ .

$$\begin{aligned} P\left(e^{4x}\right) &\stackrel{u=4x \rightarrow u'=4}{=} P\left(\frac{1}{4} \times 4e^{4x}\right) \\ &= \frac{1}{4} P\left(\underbrace{4}_{u'} \underbrace{e^{4x}}_{e^u}\right) \\ &\stackrel{P(u' e^u) = e^u + C}{=} \frac{1}{4} e^{4x} + C. \end{aligned}$$

**Exemplo 23.** Determinemos a primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ . Sendo uma divisão, tente-se aplicar  $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u| + C$ .

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2x+1}\right) &\stackrel{u=2x+1 \rightarrow u'=2}{=} P\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} P\left(\frac{2}{2x+1}\right) \\ &\stackrel{P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u| + C}{=} \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C. \end{aligned}$$

**Exemplo 24.** Note-se que a primitiva do Exemplo 14 poderia ser resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P\left((1-x)^2\right) &\stackrel{u=1-x \rightarrow u'=-1}{=} P\left((-1)(-1)(1-x)^2\right) \\ &= -P\left(\underbrace{(-1)}_{u'} \underbrace{(1-x)^2}_{u^\alpha}\right) \\ &\stackrel{P(u' u^\alpha) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}{=} -\frac{(1-x)^3}{3} + C. \end{aligned}$$

**Exemplo 25.** Nas primitivas de funções que envolvam uma raiz, uma tentativa passa por escrever a função sob a forma de potência de expoente fracionário e tentar aplicar a primitiva da composta da potência,  $P(u' u^\alpha) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ , com  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$\begin{aligned}
 P(\sqrt{1-5x}) &= P\left((1-5x)^{\frac{1}{2}}\right) \\
 &\stackrel{u=1-5x \rightarrow u'=-5}{=} P\left(\left(-\frac{1}{5}\right)(-5)(1-5x)^{\frac{1}{2}}\right) \\
 &= -\frac{1}{5} P\left(\underbrace{(-5)}_{u'} \underbrace{(1-5x)^{\frac{1}{2}}}_{u^\alpha}\right) \\
 &= -\frac{1}{5} \frac{(1-5x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\
 &= -\frac{2}{15} \sqrt{(1-5x)^3} + C.
 \end{aligned}$$

Vejamos, de seguida, outro exemplo:

**Exemplo 26.**

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\right) &= P\left(\frac{x}{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
 &= P\left(x(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
 &\stackrel{u=1-4x^2 \rightarrow u'=-8x}{=} P\left(\left(-\frac{1}{8}\right)(-8)x(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
 &= -\frac{1}{8} P\left(\underbrace{(-8x)}_{u'} \underbrace{(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{u^\alpha}\right) \\
 &= -\frac{1}{8} \frac{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
 &= -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C.
 \end{aligned}$$

Mas note-se que também podemos estar perante a primitiva da função cujo resultado dá o arco-seno, ou seja,  $P\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsen u + C$ . Veja-se o seguinte exemplo:

**Exemplo 27.**

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right) &= P\left(\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right) \\ &\stackrel{u=2x \rightarrow u'=2}{=} \frac{1}{2} P\left(\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \arcsen(2x) + C. \end{aligned}$$

Quando as funções a primitivar consistem em potências naturais de trigonométricas, a utilização de fórmulas trigonométricas conhecidas poderá ser bastante útil.

**Exemplo 28.** Neste exemplo, iremos utilizar a fórmula fundamental da trigonometria,  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ , para reescrever a função a primitivar.

$$\begin{aligned} P(\cos^3(2x)) &= P(\cos(2x) \cos^2(2x)) \\ &= P(\cos(2x) (1 - \sin^2(2x))) \\ &= P(\cos(2x) - \cos(2x) \sin^2(2x)) \\ &= P(\cos(2x)) - P(\cos(2x) \sin^2(2x)) \\ &= \frac{1}{2} P(2 \cos(2x)) - \frac{1}{2} P\left(\underbrace{2 \cos(2x)}_{u'} \underbrace{\sin^2(2x)}_{u^\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \frac{\sin^3(2x)}{3} + C \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{6} \sin^3(2x) + C \end{aligned}$$

Este processo de resolução é aplicável para primitivar produtos da forma  $\sin^m u \cos^n u$ , desde que algum dos naturais  $m$  ou  $n$  seja ímpar.

**Exemplo 29.** A partir das fórmulas

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{e} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

obtêm-se as seguintes igualdades:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Estas igualdades são bastante úteis na primitivação de potências pares das

**Exercício 6.** Calcule a primitiva de cada uma das seguintes funções:

1.  $\sin(7x) - 3e^{2x}$ ;
2.  $\frac{x+1}{1+x^2}$ ;
3.  $(2x+3)^5 + 2\sqrt[3]{1-x}$ ;
4.  $\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$ ;
5.  $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ ;
6.  $\cos(\pi x) - \operatorname{tg}(3x-5)$ ;
7.  $\sin(7x) \cos^2(7x)$ ;
8.  $x^{-1} \ln^4 x$ ;
9.  $\frac{x^3}{1+x^4} - \frac{3}{4+x^2}$ ;
10.  $\frac{1-x}{x^2-2x+4}$ ;
11.  $\frac{x}{1+x^4} + \frac{e^x}{3+e^x}$ ;
12.  $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ ;
13.  $\frac{x}{(1+x^2) \ln(1+x^2)}$ .

funções seno e co-seno. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 P(\operatorname{sen}^2 x) &= P\left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}P(1 - \cos(2x)) \\
 &= \frac{1}{2}[P(1) - P(\cos(2x))] \\
 &= \frac{1}{2}\left[P(1) - \frac{1}{2}P(2\cos(2x))\right] \\
 &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right] + C \\
 &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C.
 \end{aligned}$$

Caso a função a primitivar fosse potência quarta do seno, utilizar-se-ia duas vezes a fórmula, fazendo  $\operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 x$ .

Com estes exemplos torna-se claro que não há uma receita para a resolução de primitivas. No entanto, há procedimentos usuais, que não constituindo regras, nos ajudam a identificar a primitiva a utilizar. Primeiro, deve-se analisar a função e verificar se podemos simplificá-la ou reescrevê-la. Se envolve a composta da função exponencial (Exemplo 22 na página 15), da potência (Exemplo 24 na página 15), do seno, do co-seno (Exemplo 21 na página 14) ou da secante ao quadrado devemos tentar aplicar a primitiva dessas funções, eventualmente aplicando algum artifício apropriado, tal como a multiplicação e a divisão de constantes. Tratando-se de uma função racional (divisão de polinômios), deve-se verificar a possível aplicação das primitivas cujos resultados dão a função logaritmo (Exemplo 23 na página 15) ou o arco-tangente. Tal como já foi referido, se a função a primitivar envolve uma raiz, podemos tentar a primitiva da função cujo resultado dá o arco-seno (Exemplo 27) ou podemos transformar numa potência e, se possível, aplicar a primitiva da potência (Exemplos 25 e 26).

Após uma verificação exhaustiva destes procedimentos, em que nada se aplica, deve-se recorrer a outras técnicas de primitivação: por partes, por substituição e/ou por decomposição, que iremos ver de seguida. Geralmente, dependendo da função a primitivar, um dos métodos poderá ser mais apropriado do que os outros para a resolução da sua primitiva. Contudo, isto não significa que aplicando outro método, não se consiga resolver. Porventura, poderá ser necessário aplicar mais do que um método de primitivação para a resolução de uma certa primitiva.

Por fim, refira-se ainda que existem funções, como por exemplo

$$e^{x^2}, \frac{e^x}{x}, \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \frac{1}{\log x}, \sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 x},$$

que apesar de primitiváveis no seu domínio, pois são contínuas no seu do-

**Exercício 7.** Calcule a primitiva das seguintes funções:

1.  $\cos^2(4x)$ ;
2.  $\operatorname{sen}^3(5x)$ .

mínio, não se conseguem primitivar pelas técnicas de primitivação apresentadas neste capítulo.

## 2.3 Técnicas de Primitivação

### 2.3.1 Primitivação por partes

Antes de apresentar-se a técnica de primitivação por partes, imagine-se que se pretende primitivar a função dada por  $h(x) = x \operatorname{sen} x$ . Uma vez que a função envolve o seno será que não se consegue aplicar a primitiva  $P(u' \operatorname{sen} u)$ ? Não! Digamos, abusivamente, que temos uma variável  $x$  a mais na primitiva! Esta não é uma primitiva imediata, nem quase imediata, e para a resolver devemos recorrer à primitivação por partes.

A primitivação por partes resulta da regra de derivação do produto:  $(uv)' = u'v + uv'$  com  $u$  e  $v$  funções de  $x$ , diferenciáveis num intervalo  $I$ .

**Teorema 6.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis no intervalo  $I$ . Então, nesse mesmo intervalo*

$$P(f(x)g'(x)) = f(x)g(x) - P(f'(x)g(x)).$$

*Demonstração.* Sendo  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis no intervalo  $I$ , da fórmula de derivação do produto resulta

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

donde

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Deduz-se então que

$$P(f(x)g'(x)) = f(x)g(x) - P(f'(x)g(x)),$$

notando que  $f(x)g(x)$  é uma primitiva de  $(f(x)g(x))'$ . Note-se ainda que  $f(x)g'(x)$  será primitivável se  $f'(x)g(x)$  também o for.  $\square$

Como se pode ver, aplicando esta técnica a um produto de funções  $f(x)g'(x)$ , deixaremos de ter a primitiva desse produto para resolver, passando a ter a primitiva de um outro produto  $f'(x)g(x)$ , que se espera que seja mais fácil de resolver. Na prática, para aplicar a primitivação por partes, teremos de escolher para  $f(x)$  uma das funções do produto e para  $g'(x)$  a outra função. Não existindo uma regra para essa escolha, é conveniente que a primitiva resultante da aplicação da técnica fique mais simples de resolver. Para tal, se possível, escolhe-se para  $f(x)$  a função em que a derivada simplifique (por exemplo, na derivação de polinómios, os graus baixam) e para  $g'(x)$  a função que não levante dificuldades na sua primitivação.

**Exemplo 30.** Volte-se à primitiva introduzida no início desta secção. Escolhendo para  $f(x)$  a função  $x$  e para  $g'(x)$  a função  $\sin x$ , vem:

$$\begin{aligned} P\left(\underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\sin x}_{g'(x)}\right) &= \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)} - P\left(\underbrace{1}_{f'(x)} \times \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)}\right) \\ &= -x \cos x + P(\cos x) \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

**Exemplo 31.**

$$\begin{aligned} P(x\sqrt{x-1}) &= x \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} - P\left(1 \times \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}}\right) \\ f(x) = x &\rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sqrt{x-1} &\rightarrow g(x) = \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{(x-1)^3} - \frac{2}{3} P\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &\stackrel{u=x-1 \rightarrow u'=1}{=} \frac{2}{3} x \sqrt{(x-1)^3} - \frac{2}{3} \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{(x-1)^3} - \frac{2}{3} \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{(x-1)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x-1)^5} + C \end{aligned}$$

$$*g(x) = P\left((x-1)^{\frac{1}{2}}\right) \stackrel{u=x-1 \rightarrow u'=1}{=} \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Por vezes, não é imediatamente perceptível que se deve aplicar a primitivação por partes, uma vez que a função a primitivar não consiste num produto de funções. Quando a função a primitivar envolve um logaritmo, um arco-tangente, um arco-cotangente, um arco-seno ou um arco-coseno, devemos pensar nesta técnica, nem que, para tal, se recorra a um artifício. Vejamos o seguinte exemplo:

**Exemplo 32.**

$$\begin{aligned}
 P(\operatorname{arctg} x) &= P(1 \times \operatorname{arctg} x) &= x \operatorname{arctg} x - P\left(\frac{1}{1+x^2} \times x\right) \\
 f(x) = \operatorname{arctg} x &\rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
 g'(x) = 1 &\rightarrow g(x) = x \\
 & &= x \operatorname{arctg} x - P\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \\
 & &\stackrel{u=1+x^2 \rightarrow u'=2x}{=} x \operatorname{arctg} x - P\left(\frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2}\right) \\
 & &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} P\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \\
 & &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C
 \end{aligned}$$

Por vezes torna-se necessário aplicar a técnica mais do que uma vez.

**Exemplo 33.**

$$\begin{aligned}
 P(x^2 e^x) &= x^2 e^x - P(2x e^x) \\
 f(x) = x^2 &\rightarrow f'(x) = 2x \\
 g'(x) = e^x &\rightarrow g(x) = e^x \\
 &= x^2 e^x - 2 \quad P(x e^x) \\
 & & \quad \quad \quad \begin{aligned} f(x) = x &\rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x &\rightarrow g(x) = e^x \end{aligned} \\
 &= x^2 e^x - 2 [x e^x - P(1 \times e^x)] \\
 &= x^2 e^x - 2x e^x + 2P(e^x) \\
 &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \\
 &= (x^2 - 2x + 2) e^x + C
 \end{aligned}$$

A primitiva da função  $\operatorname{sen}^2 x$ , já resolvida anteriormente recorrendo a uma fórmula, também poderia ser resolvida através da primitivação por partes. Vejamos:

**Exemplo 34.**

$$\begin{aligned}
 P(\sin^2 x) &= P(\sin x \times \sin x) &= -\sin x \cos x - P(-\cos^2 x) \\
 f(x) &= \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x \\
 g'(x) &= \sin x \rightarrow g(x) = -\cos x \\
 & &= -\sin x \cos x + P(\cos^2 x) \\
 & &= -\sin x \cos x + P(1 - \sin^2 x) \\
 & &= -\sin x \cos x + P(1) - P(\sin^2 x) \\
 & &= -\sin x \cos x + x - P(\sin^2 x) + C
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 P(\sin^2 x) &= -\sin x \cos x + x - P(\sin^2 x) + C \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(\sin^2 x) + P(\sin^2 x) &= -\sin x \cos x + x + C \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2P(\sin^2 x) &= -\sin x \cos x + x + C \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(\sin^2 x) &= \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + C
 \end{aligned}$$

2.3.2 Primitivação por substituição

A primitivação por substituição é uma consequência do teorema da derivada da função composta. Ou seja, sendo  $F$  diferenciável num intervalo  $I$  e  $g$  diferenciável num intervalo  $J$  tal que  $g(J) \subseteq I$  (nota <sup>6</sup>), a função composta  $F(g(t))$  é diferenciável em  $J$  e tem-se:

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t).$$

Se  $F$  for uma primitiva da função  $f$  no intervalo  $I$ , ou seja  $F'(x) = f(x)$ , da derivação da função composta vem ainda:

$$(F(g(t)))' = f(g(t))g'(t).$$

Primitivando ambos os membros em ordem a  $t$ , vem:

$$F(g(t)) = P_t(f(g(t))g'(t)) + C.$$

Se  $g$  for uma função invertível no intervalo  $J$  sobre o intervalo  $I$ , isto é,  $x = g(t) \Leftrightarrow t = g^{-1}(x)$ , conclui-se que:

$$F(x) = P_t(f(g(t))g'(t)) + C$$

ou seja,

$$P_x(f(x)) = P_t(f(g(t))g'(t)) + C$$

em que  $t = g^{-1}(x)$ . O teorema seguinte enuncia todas estas conclusões.

**Exercício 8.** Calcule a primitiva de cada uma das seguintes funções:

1.  $x e^x$ ;
2.  $x \sin(3x)$ ;
3.  $x\sqrt{2x+1}$ ;
4.  $x^2 \cos x$ ;
5.  $\ln x$ ;
6.  $x \operatorname{arctg} x$ ;
7.  $e^x \sin x$ .

<sup>6</sup>  $g(J)$  é uma notação para o conjunto das imagens da função  $g$ , considerando como objetos todos os elementos de  $J$ . Assim,  $g(J) \subseteq I$  significa que esse conjunto de imagens de  $g$  é um subconjunto de  $I$ .

**Teorema 7.** *Seja  $f$  uma função primitivável no intervalo  $I$  e  $g$  uma função diferenciável e invertível num intervalo  $J$  tal que  $g(J) \subseteq I$ . Então,*

$$P_x(f(x)) = P_t(f(g(t))g'(t)),$$

em que  $t = g^{-1}(x)$ .

**Exemplo 35.** Como primeiro exemplo, iremos primitivar a função

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}}.$$

A função  $f$  é contínua em  $I = \mathbb{R}^+$  logo é primitivável nesse intervalo. Considerando a mudança de variável

$$x = t^4 = g(t),$$

tem-se  $g$  diferenciável e invertível em  $J = \mathbb{R}^+$  e  $g(J) \subseteq I$ . Então, para  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}}\right) &\stackrel{x=t^4=g(t) \rightarrow g'(t)=4t^3}{=} P\left(\frac{\sqrt[4]{t^4}}{t^4 + \sqrt{t^4}} \times 4t^3\right) \\ &= P\left(\frac{|t|}{t^4 + t^2} \times 4t^3\right) \\ &\stackrel{t>0}{=} P\left(\frac{4t^4}{t^2(t^2 + 1)}\right) \\ &= 4P\left(\frac{t^2}{t^2 + 1}\right) \\ &\stackrel{*}{=} 4P\left(\frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}\right) \\ &= 4P\left(\frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1}\right) \\ &= 4P\left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) \\ &= 4\left[P(1) - P\left(\frac{1}{t^2 + 1}\right)\right] \\ &= 4(t - \operatorname{arctg} t) + C \\ &= 4t - 4 \operatorname{arctg} t + C \\ &\stackrel{t=\sqrt[4]{x}}{=} 4\sqrt[4]{x} - 4 \operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x}) + C. \end{aligned}$$

\* A soma e subtração de uma unidade permite decompor a função em duas parcelas, cujas funções são simples de primitivar.

**Exemplo 36.** Determinemos agora a primitiva da função

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A função  $f$  é contínua no seu domínio,  $[-1, 1]$ , logo é primitivável nesse intervalo. Considerando a mudança de variável

$$x = \operatorname{sen} t = g(t),$$

tem-se que  $g$  é uma função diferenciável e invertível em  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (restrição principal da função seno). Note-se que

$$g\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subseteq [-1, 1].$$

Então, nestas condições:

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{1-x^2}\right) & \stackrel{x=\text{sen } t=g(t) \rightarrow g'(t)=\cos t}{=} P\left(\sqrt{1-\text{sen}^2 t} \times \cos t\right) \\ & \stackrel{\text{pela fórmula fundamental da trigonometria}}{=} P\left(\sqrt{\cos^2 t} \times \cos t\right) \\ & \stackrel{\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1}{=} P\left(|\cos t| \times \cos t\right) \\ & \stackrel{t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos t \geq 0}{=} P\left(\cos t \times \cos t\right) \\ & \stackrel{}{=} P\left(\cos^2 t\right) \\ & \stackrel{}{=} P\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) \\ & \stackrel{}{=} \frac{1}{2}P(1+\cos(2t)) \\ & \stackrel{}{=} \frac{1}{2}[P(1)+P(\cos(2t))] \\ & \stackrel{}{=} \frac{1}{2}\left[P(1)+\frac{1}{2}P(2\cos(2t))\right] \\ & \stackrel{}{=} \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\text{sen}(2t)\right]+C \\ & \stackrel{}{=} \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\text{sen}(2t)+C \\ & \stackrel{t=\text{arcsen } x}{=} \frac{\text{arcsen } x}{2}+\frac{1}{4}\text{sen}(2\text{arcsen } x)+C. \end{aligned}$$

De modo a simplificar mais a primitiva podemos reparar que:

$$\text{sen}(2t) = 2 \text{sen } t \cos t \stackrel{t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos t \geq 0}{=} 2 \text{sen } t \sqrt{1-\text{sen}^2 t}$$

onde, considerando agora  $t = \text{arcsen } x$ , vem

$$\text{sen}(2 \text{arcsen } x) = 2x \sqrt{1-x^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{1-x^2}\right) & = \frac{\text{arcsen } x}{2} + \frac{1}{4}\text{sen}(2 \text{arcsen } x) + C \\ & = \frac{\text{arcsen } x}{2} + \frac{1}{4}2x \sqrt{1-x^2} + C \\ & = \frac{\text{arcsen } x}{2} + \frac{1}{2}x \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Os últimos exemplos foram rigorosamente resolvidos, analisando todas as condições do teorema. No entanto, em geral, assume-se estar nas condições e aplica-se a substituição.

Uma das principais dificuldades na primitivação por substituição consiste na escolha da mudança de variável adequada. Em numerosas situações, existem substituições que são aconselhadas dependendo das funções a primitivar, tais como as que se apresentam na tabela abaixo, que, normalmente, conduzem a primitivas imediatas ou quase-imediatas. Existem muitas outras, mas neste manual abordaremos apenas estas. Note-se que, na tabela abaixo,  $R(\dots)$  pretende simbolizar uma função racional que envolva funções do tipo das que se encontram dentro de parêntesis.

| Tipo de função   | Substituição                            |
|--|---|
| $R(e^{ax})$  | $x = \ln t$                             |
| $R(\ln x)$   | $x = e^t$                               |
| $R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$               | $x = t^m, m = m.m.c.(q, s, \dots)$      |
| $R\left(x, (ax + b)^{\frac{p}{q}}, (ax + b)^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$ | $ax + b = t^m, m = m.m.c.(q, s, \dots)$ |
| $R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right)$                                   | $x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$  |
| $R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$                                   | $x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$   |
| $R\left(x, \sqrt{a^2x^2 - b^2}\right)$                                   | $x = \frac{b}{a} \operatorname{sec} t$  |

No Exemplo 35 utilizou-se a substituição aconselhada na terceira linha da tabela. Relembre-se a função  $f$ ,

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}},$$

que pode ser reescrita como

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x + x^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim, a substituição aconselhada é

$$x = t^m,$$

onde  $m = m.m.c.(2, 4) = 4$ , ou seja,

$$x = t^4.$$

No Exemplo 36 utilizou-se a substituição aconselhada na quinta linha da tabela,

$$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$$

com  $a = 1$  e  $b = 1$ .

Vejamos, agora, outro exemplo, com a primeira substituição da tabela.

**Exemplo 37.**

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{e^{2x}}{e^x + 4e^{-x}}\right) &\stackrel{x=\ln t=g(t)\rightarrow g'(t)=\frac{1}{t}}{=} P\left(\frac{e^{2\ln t}}{e^{\ln t} + 4e^{-\ln t}} \times \frac{1}{t}\right) \\
&= P\left(\frac{e^{\ln t^2}}{e^{\ln t} + 4e^{\ln t^{(-1)}}} \times \frac{1}{t}\right) \\
&= P\left(\frac{t^2}{t + 4t^{-1}} \times \frac{1}{t}\right) \\
&= P\left(\frac{t^2}{\left(t + 4\frac{1}{t}\right)t}\right) \\
&= P\left(\frac{t}{\frac{t^2+4}{t}}\right) \\
&= P\left(\frac{t^2}{t^2+4}\right) \\
&= P\left(\frac{t^2+4}{t^2+4} - \frac{4}{t^2+4}\right) \\
&= P(1) - P\left(\frac{4}{t^2+4}\right) \\
&= P(1) - 4P\left(\frac{1}{4\left(\frac{t^2}{4}+1\right)}\right) \\
&= P(1) - P\left(\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\right) \\
&= P(1) - 2P\left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\right) \\
&= t - 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C \\
&\stackrel{t=e^x}{=} e^x - 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

À semelhança da primitivação por partes, também na primitivação por substituição poderemos aplicar a técnica mais do que uma vez, caso seja necessário.

**Exemplo 38.**

$$\begin{aligned}
 P\left(\sqrt{e^x - 1}\right) &\stackrel{x=\ln t \Rightarrow t=e^x \rightarrow g'(t)=\frac{1}{t}}{=} P\left(\sqrt{t-1} \times \frac{1}{t}\right) \\
 &= P\left(\frac{\sqrt{t-1}}{t}\right) \\
 &\stackrel{t-1=z^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow t=z^2+1 \Rightarrow h'(z)=2z}{=} P\left(\frac{z}{z^2+1} \times 2z\right) \\
 &= 2P\left(\frac{z^2}{z^2+1}\right) \\
 &= 2P\left(1 - \frac{1}{z^2+1}\right) \\
 &= 2[z - \operatorname{arctg} z] + C \\
 &\stackrel{z=\sqrt{t-1}}{=} 2\sqrt{t-1} - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{t-1}) + C \\
 &\stackrel{t=e^x}{=} 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x - 1}) + C
 \end{aligned}$$

Note-se que poderíamos ter resolvido a primitiva de forma mais expedita, apenas com uma substituição.

$$\begin{aligned}
 P\left(\sqrt{e^x - 1}\right) &\stackrel{e^x - 1 = t^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = \ln(t^2 + 1) = g(t) \rightarrow g'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}}{=} P\left(t \times \frac{2t}{t^2 + 1}\right) \\
 &= 2P\left(\frac{t^2}{t^2 + 1}\right) \\
 &= 2P\left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) \\
 &= 2[t - \operatorname{arctg} t] + C \\
 &\stackrel{t=\sqrt{e^x - 1}}{=} 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x - 1}) + C
 \end{aligned}$$

Nem sempre as primitivas imediatas ou quase-ediatas são facilmente reconhecidas como tal. Por vezes, aplicando uma substituição à função, fica mais fácil de resolver.

**Exercício 9.** Calcule a primitiva de cada uma das seguintes funções:

1.  $\frac{e^x + e^{2x}}{1 + e^{2x}}$ ;
2.  $\frac{\ln^2 x}{x(5 \ln x + \ln^2 x)}$ ;
3.  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ ;
4.  $\frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ ;
5.  $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ ;
6.  $\sqrt{3-x^2}$ .

**Exemplo 39.**

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{1}{x \ln^2 x}\right) & \underset{x=e^t=g(t) \rightarrow g'(t)=e^t}{=} P\left(\frac{1}{e^t t^2} \times e^t\right) \\
 & = P\left(\frac{1}{t^2}\right) \\
 & = P\left(t^{-2}\right) \\
 & = \frac{t^{-1}}{-1} + C \\
 & = -\frac{1}{t} + C \\
 & \underset{t=\ln x}{=} -\frac{1}{\ln x} + C
 \end{aligned}$$

Apesar de termos recorrido a uma substituição, poderíamos ter resolvido a primitiva de forma imediata da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{1}{x \ln^2 x}\right) & = P\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{\ln^{-2} x}_{u^\alpha}\right) \\
 & = \frac{\ln^{-1} x}{-1} + C \\
 & = -\frac{1}{\ln x} + C
 \end{aligned}$$

### 2.3.3 Primitivação de funções racionais por decomposição

Em muitos casos de primitivação por partes e por substituição, após a aplicação da técnica, obtemos a primitiva de uma função racional, isto é, uma divisão de polinómios. Naturalmente, devemos verificar se não se trata de uma primitiva imediata ou quase imediata. Eventualmente, poderemos ter uma função nas condições  $\frac{u'}{u}$  ou  $\frac{u'}{1+u^2}$ . Caso não seja nenhuma destas situações, teremos de recorrer à técnica de primitivação de funções racionais por decomposição, que iremos ver nesta secção.

**Definição 2.** Uma função racional  $\frac{N(x)}{D(x)}$ , onde  $N(x)$  e  $D(x)$  são polinómios em  $x$ , diz-se **própria** se o grau do polinómio  $N$ , do numerador, é inferior ao grau de  $D$ , do denominador, e **imprópria** caso contrário.

Nota 7

**Teorema 8.** Seja  $N(x)$  um polinómio qualquer e  $D(x)$  um polinómio de grau maior ou igual a 1. É sempre possível escrever a função racional  $\frac{N(x)}{D(x)}$  na forma:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

em que  $q$ ,  $R$  e  $D$  representam polinómios em  $x$  tais que o grau de  $R$  é inferior ao grau do polinómio  $D$ .

<sup>7</sup>Esta nomenclatura é a mesma utilizada nas frações de inteiros. Uma fração diz-se própria se o numerador é menor que o denominador (e.g.  $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$ ) e imprópria caso contrário (e.g.  $\frac{5}{4}, \frac{7}{3}, \frac{2}{2}$ ).



**Teorema 9.** Consideremos o polinómio  $D$  com as seguintes raízes (reais<sup>9</sup> e complexas<sup>10</sup>) e respectivas multiplicidades<sup>11</sup>

| Raízes reais: | Multiplicidade | Raízes complexas: | Multiplicidade |
|---------------|----------------|-------------------|----------------|
| $\alpha_1$    | $r_1$          | $p_1 \pm q_1 i$   | $s_1$          |
| $\vdots$      | $\vdots$       | $\vdots$          | $\vdots$       |
| $\alpha_m$    | $r_m$          | $p_n \pm q_n i$   | $s_n$          |

Então o polinómio  $D$  pode ser escrito da seguinte forma,

$$D(x) = a(x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_m)^{r_m} \left( (x - p_1)^2 + q_1^2 \right)^{s_1} \dots \left( (x - p_n)^2 + q_n^2 \right)^{s_n}$$

onde  $a$  representa o coeficiente do termo de maior grau de  $D$ .

Vejam de seguida alguns exemplos de fatorização de polinómios.

**Exemplo 41.** Fatorize-se o polinómio  $D(x) = x^2 + x - 2$ . Sendo um polinómio de grau 2, para determinar as raízes, podemos aplicar a fórmula resolvente.

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Assim,  $D(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ . O polinómio tem duas raízes reais,  $-2$  e  $1$ , cada uma de multiplicidade 1.

**Exemplo 42.** Decomponha-se em fatores o polinómio

$$D(x) = 2x^3 + x^2 - x.$$

Antes de mais, note-se que  $D(x) = 2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$ . Aplicando a fórmula resolvente ao segundo fator vem:

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tendo em conta que o coeficiente do termo de maior grau é igual a 2, a fatorização de  $2x^2 + x - 1$  é dada por:

$$2x^2 + x - 1 = 2(x + 1) \left( x - \frac{1}{2} \right).$$

Assim,  $D(x) = x \left[ 2(x + 1) \left( x - \frac{1}{2} \right) \right] = 2x(x + 1) \left( x - \frac{1}{2} \right)$ . O polinómio tem três raízes reais,  $0$ ,  $-1$  e  $\frac{1}{2}$ , cada uma de multiplicidade 1.

<sup>9</sup> Se  $D(x)$  é divisível por  $x - \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então diz-se que  $\alpha$  é uma raiz real do polinómio  $D(x)$ , ou seja,  $D(\alpha) = 0$ .

<sup>10</sup> Se  $D(x)$  é divisível por  $(x - p)^2 + q^2$ ,  $p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então diz-se que  $p \pm qi$  são raízes complexas do polinómio  $D(x)$ , ou seja,  $D(p \pm qi) = 0$ .

<sup>11</sup>  $\alpha$  é raiz real de  $D(x)$  de multiplicidade  $m$ , quando  $m$  é o maior número natural para o qual  $D(x)$  é divisível por  $(x - \alpha)^m$ . De forma semelhante,  $p \pm qi$  são raízes complexas de  $D(x)$  de multiplicidade  $m$ , quando  $m$  é o maior número natural para o qual  $D(x)$  é divisível por  $\left( (x - p)^2 + q^2 \right)^m$ .

**Exemplo 43.** Fatorize-se o polinómio  $D(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ . Tratando-se de um polinómio de grau 3, pode-se tentar aplicar a regra de Ruffini. Mas, para tal, teremos de conhecer uma raiz do polinómio. Por tentativa, podemos verificar que  $D(1) = 0$  logo 1 é raiz do polinómio. Assim, vem:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Resto

Logo,  $D(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 1)$ . Aplicando a fórmula resolvente ao segundo fator vem:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 0}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Como  $-1$  é a única raiz do polinómio de grau 2, esta raiz tem multiplicidade 2. Assim,

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Conclui-se que  $D(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$ . O polinómio tem duas raízes reais, 1 e  $-1$ , a primeira de multiplicidade 1 e a segunda, tal como já referido, de multiplicidade 2.

**Exemplo 44.** Como último exemplo, fatorize-se  $D(x) = x^3 + 1$ . Aplicando a regra de Ruffini com a raiz  $-1$  vem:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Resto

Logo,  $D(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ . Aplicando a fórmula resolvente ao segundo fator vem:

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Como verificámos, o segundo fator tem raízes complexas

$$x = p \pm qi,$$

donde se conclui que

$$D(x) = (x+1) \left( \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right).$$

O polinómio tem uma raiz real,  $-1$ , de multiplicidade 1, e duas raízes complexas,  $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , também de multiplicidade 1.

Uma vez fatorizado o polinómio do denominador da função racional própria, resta agora saber como é feita a decomposição numa soma de parcelas.<sup>12</sup>

**Teorema 10.** *Toda a função racional própria  $\frac{R(x)}{D(x)}$  pode decompor-se numa soma de termos elementares da forma:*

1.  $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$ , com  $A, \alpha \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{N}$ ;
2.  $\frac{Bx+C}{[(x-p)^2+q^2]^n}$ , com  $B, C, p \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

O tipo de termos elementares a considerar na decomposição depende das raízes do polinómio  $D(x)$  serem reais ou complexas, e das respetivas multiplicidades. Portanto,

1. Cada raiz real  $\alpha$ , de multiplicidade  $m$ , origina  $m$  parcelas do tipo:

$$\frac{A_1}{x-\alpha}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}$$

onde  $A_1, A_2, \dots, A_m$  são constantes a determinar.

2. Cada par de raízes complexas  $p \pm qi$ , de multiplicidade  $n$ , origina  $n$  parcelas do tipo:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x-p)^2+q^2}, \frac{B_2x+C_2}{((x-p)^2+q^2)^2}, \dots, \frac{B_nx+C_n}{((x-p)^2+q^2)^n}$$

onde  $B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_n$  são constantes a determinar.

Vejamos alguns exemplos, utilizando como denominador os polinómios dos Exemplos 41 a 44.

**Exemplo 45.** Tal como vimos no Exemplo 41, o polinómio  $x^2+x-2$  tem duas raízes reais,  $-2$  e  $1$ , cada uma de multiplicidade 1. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{x^2+x-2} &= \frac{R(x)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}. \end{aligned}$$

**Exercício 11.** Decomponha em fatores os seguintes polinómios:

1.  $3x^2 - 21x + 18$ ;
2.  $x^5 - 5x^3 + 4x$ ;
3.  $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ .

<sup>12</sup> Mais uma vez, recorrendo às frações, recorde-se que quando se tem uma soma de duas frações e se reduz ao mesmo denominador, obtém-se a única fração equivalente. Por exemplo:  $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10-3}{3 \times 5} = \frac{7}{3 \times 5}$ . Agora, o problema é o recíproco, ou seja, tendo  $\frac{7}{3 \times 5}$  queremos decompor esta fração numa soma de duas frações, uma com denominador 3 e a outra com 5. Assim,  $\frac{7}{3 \times 5} = \frac{A}{3} + \frac{B}{5}$  em que  $A$  e  $B$  são incógnitas a determinar. Note-se que  $\frac{7}{3 \times 5} = \frac{A}{3} + \frac{B}{5} = \frac{5A+3B}{3 \times 5}$ , logo  $5A+3B=7$ . Uma solução possível é  $A=2$  e  $B=-1$ , vindo  $\frac{7}{3 \times 5} = \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$ .

**Exemplo 46.** Tal como vimos no Exemplo 42, o polinómio  $2x^3 + x^2 - x$  tem três raízes reais,  $0$ ,  $-1$  e  $\frac{1}{2}$ , cada uma de multiplicidade 1. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{2x^3 + x^2 - x} &= \frac{R(x)}{2x(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{A}{2x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

**Exemplo 47.** Tal como vimos no Exemplo 43, o polinómio  $x^3 + x^2 - x - 1$  tem duas raízes reais,  $1$  e  $-1$ , a primeira de multiplicidade 1 e a segunda de multiplicidade 2. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \frac{R(x)}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

**Exemplo 48.** Tal como vimos no Exemplo 44, o polinómio  $x^3 + 1$  tem uma raiz real,  $-1$ , de multiplicidade 1, e duas raízes complexas,  $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , de multiplicidade 1. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{x^3 + 1} &= \frac{R(x)}{(x+1)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

**Exemplo 49.** No exemplo que agora vamos ver, em que o denominador já se encontra decomposto, tem-se duas raízes reais,  $-1$  e  $2$ , a primeira de multiplicidade 1 e segunda de multiplicidade 3, e dois pares de raízes complexas,  $\pm i$  e  $\pm\sqrt{2}i$ , as primeiras de multiplicidade 1 e as segundas de multiplicidade 2. O número total de termos elementares será a soma das multiplicidades, ou seja, 7.

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{(x+1)(x-2)^3(x^2+1)(x^2+2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \\ &+ \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} + \\ &+ \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \\ &+ \frac{Gx + H}{x^2 + 2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 2)^2}\end{aligned}$$

O cálculo das constantes pode ser feito, por exemplo, pelo método dos coeficientes indeterminados. Veremos posteriormente alguns exemplos.

Desta forma, face aos conceitos expostos até agora, o problema do cálculo de primitivas de funções racionais fica resolvido, uma vez conhecidas as primitivas dos termos elementares

$$\frac{A}{(x - \alpha)^m} \quad \text{e} \quad \frac{Bx + C}{[(x - p)^2 + q^2]^n}.$$

De seguida, iremos resolver estas primitivas, à exceção da primitiva do termo elementar  $\frac{Bx + C}{[(x - p)^2 + q^2]^n}$ , com  $n > 1$ , que sai fora do âmbito deste manual.

1. Começemos, então, pela primitiva de  $\frac{A}{(x - \alpha)^m}$ , com  $A, \alpha \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{N}$ :

(a) Se  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{A}{x - \alpha}\right) &= AP\left(\frac{1}{x - \alpha}\right) \\ &= A \ln|x - \alpha| + C \end{aligned}$$

(b) Se  $m > 1$ :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{A}{(x - \alpha)^m}\right) &= AP\left(\frac{1}{(x - \alpha)^m}\right) \\ &= AP\left((x - \alpha)^{-m}\right) \\ &= A \frac{(x - \alpha)^{-m+1}}{-m + 1} + C \\ &= \frac{A}{(-m + 1)(x - \alpha)^{m-1}} + C \end{aligned}$$

2. E agora, a primitiva de  $\frac{Bx + C}{[(x - p)^2 + q^2]^n}$ , com  $B, C, p \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ :

(a) Se  $n = 1$ :

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{Bx+C}{(x-p)^2+q^2}\right) &= P\left(\frac{Bx}{(x-p)^2+q^2} + \frac{C}{(x-p)^2+q^2}\right) \\
 &= P\left(\frac{Bx}{(x-p)^2+q^2}\right) + P\left(\frac{C}{(x-p)^2+q^2}\right) \\
 &= BP\left(\frac{x}{(x-p)^2+q^2}\right) + CP\left(\frac{1}{(x-p)^2+q^2}\right) \\
 &= BP\left(\frac{x-p}{(x-p)^2+q^2} + \frac{p}{(x-p)^2+q^2}\right) + CP\left(\frac{1}{(x-p)^2+q^2}\right) \\
 &= BP\left(\frac{x-p}{(x-p)^2+q^2}\right) + BpP\left(\frac{1}{(x-p)^2+q^2}\right) + CP\left(\frac{1}{(x-p)^2+q^2}\right) \\
 &= \frac{B}{2}P\left(\frac{2(x-p)}{(x-p)^2+q^2}\right) + (Bp+C)P\left(\frac{1}{(x-p)^2+q^2}\right) \\
 &= \frac{B}{2}P\left(\frac{2(x-p)}{(x-p)^2+q^2}\right) + \frac{(Bp+C)}{q^2}P\left(\frac{1}{\left(\frac{x-p}{q}\right)^2+1}\right) \\
 &= \frac{B}{2}P\left(\frac{2(x-p)}{(x-p)^2+q^2}\right) + \frac{(Bp+C)}{q}P\left(\frac{\frac{1}{q}}{\left(\frac{x-p}{q}\right)^2+1}\right) \\
 &= \frac{B}{2}\ln\left((x-p)^2+q^2\right) + \frac{(Bp+C)}{q}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-p}{q}\right) + K.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 50.** Calcule-se a primitiva da função

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}.$$

Pelos Exemplos 41 e 45, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^2+x-2} &= \frac{1}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}.
 \end{aligned}$$

Para determinar  $A$  e  $B$  recorremos ao método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^2+x-2} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \\
 &= \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)}.
 \end{aligned}$$

A equação

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{x^2+x-2}$$

é válida se os numeradores forem idênticos, ou seja,

$$1 = A(x - 1) + B(x + 2).$$

Pela identidade dos polinômios, dois polinômios são idênticos se os coeficientes dos termos do mesmo grau forem iguais.

$$\begin{aligned} 1 = A(x - 1) + B(x + 2) &\Leftrightarrow 1 = Ax - A + Bx + 2B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = (A + B)x - A + 2B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0x + 1 = (A + B)x + (-A + 2B). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{0}{x} + \frac{1}{1} = \frac{(A + B)}{x} + \frac{(-A + 2B)}{1}$$

resulta

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = -A + 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

A primitiva da função racional  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$  é dada por:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x^2 + x - 2}\right) &= P\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x + 2}\right) + P\left(\frac{\frac{1}{3}}{x - 1}\right) \\ &= -\frac{1}{3}P\left(\frac{1}{x + 2}\right) + \frac{1}{3}P\left(\frac{1}{x - 1}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\ln|x + 2| + \frac{1}{3}\ln|x - 1| + C. \end{aligned}$$

**Exemplo 51.** Calcule-se a primitiva da função

$$f(x) = \frac{x + 2}{2x^3 + x^2 - x}.$$

Pelos Exemplos 42 e 46, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{2x^3 + x^2 - x} &= \frac{x + 2}{2x(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{A}{2x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Note-se que, antes da decomposição em termos elementares, deve ser verificado se é possível simplificar a função racional, ou seja, se existem raízes em comum do numerador e do denominador. Não é o caso neste exemplo. Determinemos  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{2x^3 + x^2 - x} &= \frac{A}{2x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{A(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) + B2x\left(x - \frac{1}{2}\right) + C2x(x + 1)}{2x(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Logo

$$x + 2 = A(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2Bx\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2Cx(x + 1).$$

À semelhança do exemplo anterior, podíamos agora aplicar o método dos coeficientes indeterminados. Alternativamente, dado que a equação tem de ser válida para qualquer valor de  $x$ , também podemos atribuir valores à variável  $x$ . Naturalmente, existem valores de  $x$  que simplificam mais os cálculos. Estando numa situação de raízes reais, e em particular, todas de multiplicidade 1, os cálculos irão certamente simplificar-se bastante substituindo a variável por essas raízes:

$$x = 0 \quad : \quad 2 = A\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 0 \Leftrightarrow A = -4$$

$$x = -1 \quad : \quad 1 = 0 + 2B(-1)\left(-\frac{3}{2}\right) + 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad : \quad \frac{5}{2} = 0 + 0 + 2C\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow C = \frac{5}{3}$$

A primitiva da função racional  $f(x) = \frac{x+2}{2x^3+x^2-x}$  é dada por:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{x+2}{2x^3+x^2-x}\right) &= P\left(\frac{-4}{2x}\right) + P\left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\right) + P\left(\frac{\frac{5}{3}}{x-\frac{1}{2}}\right) \\ &= -2P\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}P\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{5}{3}P\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) \\ &= -2\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{3}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + K. \end{aligned}$$

**Exemplo 52.** Calcule-se a primitiva da função

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^3+x^2-x-1}.$$

Pelos Exemplos 43 e 47, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x^3+x^2-x-1} &= \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Determinemos  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x^3+x^2-x-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Logo

$$2x - 3 = A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1).$$

$$x = -1 \quad : \quad -5 = 0 + 0 + C(-2) \Leftrightarrow C = \frac{5}{2}$$

$$x = 1 \quad : \quad -1 = 4A + 0 + 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 = A - B - C \Leftrightarrow -3 = -\frac{1}{4} - B - \frac{5}{2} \Leftrightarrow B = \frac{1}{4}$$

A primitiva da função racional  $f(x) = \frac{2x - 3}{x^3 + x^2 - x - 1}$  é dada por:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{2x - 3}{x^3 + x^2 - x - 1}\right) &= P\left(\frac{-\frac{1}{4}}{x - 1}\right) + P\left(\frac{\frac{1}{4}}{x + 1}\right) + P\left(\frac{\frac{5}{2}}{(x + 1)^2}\right). \\ &= -\frac{1}{4}P\left(\frac{1}{x - 1}\right) + \frac{1}{4}P\left(\frac{1}{x + 1}\right) + \frac{5}{2}P\left(\frac{1}{(x + 1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}P\left(\frac{1}{x - 1}\right) + \frac{1}{4}P\left(\frac{1}{x + 1}\right) + \frac{5}{2}P\left((x + 1)^{-2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\ln|x - 1| + \frac{1}{4}\ln|x + 1| + \frac{5}{2}\frac{(x + 1)^{-2+1}}{-2+1} + K \\ &= -\frac{1}{4}\ln|x - 1| + \frac{1}{4}\ln|x + 1| - \frac{5}{2}\frac{1}{x + 1} + K \\ &= -\frac{1}{4}\ln|x - 1| + \frac{1}{4}\ln|x + 1| - \frac{5}{2x + 2} + K. \end{aligned}$$

**Exemplo 53.** Por fim, calcule-se a primitiva da função

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + 1}.$$

Pelos Exemplos 44 e 48, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + 1} &= \frac{2x^2 + x + 2}{(x + 1)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} \\ &= \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Note-se que não foi possível efetuar-se simplificações antes da decomposição.

Determinemos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + 1} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{A\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] + (Bx + C)(x + 1)}{(x + 1)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 2x^2 + x + 2 &= A \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right] + (Bx + C)(x + 1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2 &= A \left(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + (Bx + C)(x + 1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2 &= A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2 &= Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2 &= (A + B)x^2 + (-A + B + C)x + (A + C)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{(A+B)}{x^2} + \frac{(-A+B+C)}{x} + \frac{(A+C)}{x+1}$$

resulta

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = -A + B + C \\ 2 = A + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

A primitiva da função racional  $f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + 1}$  é dada por:

$$P\left(\frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + 1}\right) = P\left(\frac{1}{x+1}\right) + P\left(\frac{x+1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Ora,

$$P\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln|x+1| + C$$

e

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{x+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) &= P\left(\frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) \\
&= P\left(\frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)+P\left(\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) \\
&= P\left(\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)+P\left(\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)+K \\
&= P\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)+P\left(\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)+K \\
&= \frac{1}{2}P\left(\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)+\frac{3}{2}P\left(\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)+K \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)+\frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}P\left(\frac{1}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\right)+K \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)+2P\left(\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)+K \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)+2\frac{\sqrt{3}}{2}P\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)+K \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+K.
\end{aligned}$$

Conclui-se, então,

$$P\left(\frac{2x^2+x+2}{x^3+1}\right)=\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+K.$$

Tal como já foi referido, eventualmente poderá ser necessário aplicar mais do que um método de primitivação para a resolução de uma certa primitiva. Em muitos casos, após a primitivação por substituição, a função resultante para primitivar consiste numa função racional. Vejamos um exemplo que recorre a alguns conceitos expostos anteriormente:

**Exemplo 54.**

$$\begin{aligned} P\left(\frac{e^{6x}}{16 - e^{4x}}\right) & \underset{x=\ln t=g(t) \rightarrow g'(t)=\frac{1}{t}}{=} P\left(\frac{e^{6\ln t}}{16 - e^{4\ln t}} \times \frac{1}{t}\right) \\ & = P\left(\frac{t^6}{16 - t^4} \times \frac{1}{t}\right) \\ & = P\left(\frac{t^5}{16 - t^4}\right) \end{aligned}$$

Tratando-se de uma função racional imprópria, apliquemos o algoritmo da divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r} t^5 \\ -t^5 \quad 16t \\ \hline 16t \end{array} \quad \begin{array}{r} -t^4 \quad +16 \\ -t \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{t^5}{16 - t^4}\right) & = P\left(-t + \frac{16t}{16 - t^4}\right) \\ & = -P(t) + 16P\left(\frac{t}{16 - t^4}\right) \\ & = -\frac{t^2}{2} + 16P\left(\frac{t}{16 - t^4}\right) + K \end{aligned}$$

Como podemos analisar, a primitiva da função racional própria não é imediata. Para aplicar a primitivação por decomposição, temos de decompor o polinômio divisor. Note-se que

$$\begin{aligned} 16 - t^4 & = 4^2 - (t^2)^2 \\ & = (4 - t^2)(4 + t^2) \\ & = (2^2 - t^2)(4 + t^2) \\ & = (2 - t)(2 + t)(4 + t^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{t}{16 - t^4} & = \frac{t}{(2 - t)(2 + t)(4 + t^2)} \\ & = \frac{A}{2 - t} + \frac{B}{2 + t} + \frac{Ct + D}{4 + t^2} \end{aligned}$$

Determinemos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ :

$$\begin{aligned} \frac{t}{16 - t^4} & = \frac{A}{2 - t} + \frac{B}{2 + t} + \frac{Ct + D}{4 + t^2} \\ & = \frac{A(2 + t)(4 + t^2) + B(2 - t)(4 + t^2) + (Ct + D)(2 - t)(2 + t)}{(2 - t)(2 + t)(4 + t^2)} \end{aligned}$$

Logo,

$$t = A(2 + t)(4 + t^2) + B(2 - t)(4 + t^2) + (Ct + D)(2 - t)(2 + t).$$

$$t = 2 : 2 = 32A + 0 + 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{16}$$

$$t = -2 : -2 = 0 + 32B + 0 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{16}$$

$$t = 0 : 0 = 8A + 8B + 4D \Leftrightarrow 0 = \frac{8}{16} - \frac{8}{16} + 4D \Leftrightarrow D = 0$$

$$t = 1 : 1 = 15A + 5B + (C + D)3 \Leftrightarrow 1 = \frac{15}{16} - \frac{5}{16} + 3C \Leftrightarrow C = \frac{1}{8}$$

Continuando,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{t^5}{16-t^4}\right) &= -\frac{t^2}{2} + 16P\left(\frac{t}{16-t^4}\right) + K \\ &= -\frac{t^2}{2} + 16P\left(\frac{\frac{1}{16}}{2-t} - \frac{\frac{1}{16}}{2+t} + \frac{\frac{1}{8}t}{4+t^2}\right) + K \\ &= -\frac{t^2}{2} + P\left(\frac{1}{2-t}\right) - P\left(\frac{1}{2+t}\right) + 2P\left(\frac{t}{4+t^2}\right) + K \\ &= -\frac{t^2}{2} - P\left(\frac{-1}{2-t}\right) - P\left(\frac{1}{2+t}\right) + P\left(\frac{2t}{4+t^2}\right) + K \\ &= -\frac{t^2}{2} - \ln|2-t| - \ln|2+t| + \ln(4+t^2) + K \\ &\stackrel{t=e^x}{=} -\frac{e^{2x}}{2} - \ln|2-e^x| - \ln|2+e^x| + \ln(4+e^{2x}) + K \end{aligned}$$

**Exercício 12.** Calcule a primitiva de cada uma das seguintes funções:

1.  $\frac{1}{(x-3)(x+5)}$ ;
2.  $\frac{1+x}{x(x-1)^2}$ ;
3.  $\frac{1+x}{x^3+x}$ ;
4.  $\frac{x^4-2x^2}{x^3+x^2-2}$ .

## 2.4 Exercícios Propostos

1. Determine a função  $f$  tal que:

(a)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \wedge \quad f(9) = 7;$

(b)  $f''(x) = x + \cos x \quad \wedge \quad f'(0) = 2 \quad \wedge \quad f(0) = 3.$

2. Calcule a primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a)  $3x^4 - 4;$

(b)  $x(x + 3);$

(c)  $\frac{x + \sqrt{x}}{2x};$

(d)  $x^2 \sqrt[5]{x^3 + 5};$

(e)  $\frac{8x}{\sqrt[5]{x^2 + 3}};$

(f)  $\operatorname{sen}(3x) - \sec^2(5x - 2);$

(g)  $x^3 \operatorname{sen}^4(3x^4 - 1) \cos(3x^4 - 1);$

(h)  $\frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}};$

(i)  $\frac{4x}{x^2 + 4};$

(j)  $\frac{8+x}{x^2+9};$

(k)  $\frac{8x}{9+x^4};$

(l)  $\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)};$

(m)  $\frac{8}{\sqrt{4-x^2}};$

(n)  $\frac{1-6x}{2x-6x^2};$

(o)  $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2 x};$

(p)  $\frac{e^x}{9+25e^{2x}};$

(q)  $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}};$

(r)  $\frac{1}{3x \ln^3 x};$

(s)  $\frac{\arccos x}{\sqrt{3-3x^2}};$

(t)  $e^{-x}(2e^{3x} + e^x - e^{-2x});$

(u)  $\frac{2 + \ln^3 x}{x \ln x};$

(v)  $\cos^4 x$ ;

(w)  $\frac{x [\arcsen(x^2)]^4}{\sqrt{2-2x^4}}$ ;

(x)  $\frac{\sqrt{1+\arcsen(\ln x)}}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ .

3. Calcule as primitivas das seguintes funções:

(a)  $x^2 e^{4x}$ ;

(b)  $x\sqrt{1-x}$ ;

(c)  $\ln(3x-1)$ ;

(d)  $3x \operatorname{arctg}(2x)$ ;

(e)  $\frac{1}{x^4} \ln(2x)$ ;

(f)  $\cos(\ln x)$ .

4. Calcule as primitivas das seguintes funções:

(a)  $\frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}$ ;

(b)  $\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$ ;

(c)  $\frac{1}{(5+x)\sqrt{1+x}}$ ;

(d)  $\frac{1}{(3+x)+\sqrt[4]{3+x}}$ ;

(e)  $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ ;

(f)  $\sqrt{e^x-1}$ .

5. Calcule as primitivas das seguintes funções:

(a)  $\frac{3x+6}{x^3+2x^2-3x}$ ;

(b)  $\frac{3x^2+2x+1}{x(x+1)^2}$ ;

(c)  $\frac{x^4}{x(x-2)^2}$ ;

(d)  $\frac{8}{x(x^2+1)}$ ;

(e)  $\frac{x^6-2}{x^4+x^2}$ ;

## 2.5 Soluções dos Exercícios Propostos

1.

(a)  $f(x) = 2\sqrt{x} + 1;$

(b)  $f(x) = \frac{x^3}{6} - \cos x + 2x + 4.$

2.

(a)  $\frac{3x^5}{5} - 4x + C;$

(b)  $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C;$

(c)  $\frac{x}{2} + \sqrt{x} + C;$

(d)  $\frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3 + 5)^6} + C;$

(e)  $5 \sqrt[5]{(x^2 + 3)^4} + C;$

(f)  $-\frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{1}{5} \operatorname{tg}(5x - 2) + C;$

(g)  $\frac{1}{60} \operatorname{sen}^5(3x^4 - 1) + C;$

(h)  $2e^{\sqrt{x+3}} + C;$

(i)  $2 \ln(x^2 + 4) + C;$

(j)  $\frac{8}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) + C;$

(k)  $\frac{4}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{3}\right) + C;$

(l)  $\operatorname{arctg}(\ln x) + C;$

(m)  $8 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C;$

(n)  $\frac{1}{2} \ln|2x - 6x^2| + C;$

(o)  $-\ln(\cos^2 x) + C;$

(p)  $\frac{1}{15} \operatorname{arctg}\left(\frac{5e^x}{3}\right) + C;$

(q)  $-2\sqrt{1 - e^x} + C;$

(r)  $-\frac{1}{6 \ln^2 x} + C;$

(s)  $-\frac{1}{2\sqrt{3}} \arccos^2 x + C;$

(t)  $e^{2x} + x + \frac{1}{3}e^{-3x} + C;$

(u)  $2 \ln|\ln x| + \frac{\ln^3 x}{3} + C;$

(v)  $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + C;$

(w)  $\frac{1}{10\sqrt{2}} [\operatorname{arcsen}(x^2)]^5 + C;$

(x)  $\frac{2}{3} \sqrt{(1 + \operatorname{arcsen}(\ln x))^3} + C.$

3.

(a)  $\frac{1}{4}e^{4x} \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right) + C;$

(b)  $-\frac{2}{3}x\sqrt{(1-x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(1-x)^5} + C;$

(c)  $x \ln(3x-1) - x - \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C;$

(d)  $(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}) \operatorname{arctg}(2x) - \frac{3}{4}x + C;$

(e)  $-\frac{1}{3x^3} \left( \ln(2x) + \frac{1}{3} \right) + C;$

(f)  $\frac{x \cos(\ln x) + x \operatorname{sen}(\ln x)}{2} + C.$

4.

(a)  $4\sqrt[4]{x} - 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C;$

(b)  $2e^x \sqrt{e^x+1} - \frac{4}{3} \sqrt{(e^x+1)^3} + C;$

(c)  $\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1+x}}{2} \right) + C;$

(d)  $\frac{4}{3} \ln \left| \sqrt[4]{(3+x)^3+1} \right| + C;$

(e)  $2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C;$

(f)  $2\sqrt{e^x-1} - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x-1}) + C.$

5.

(a)  $-2 \ln|x| + \frac{9}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + C;$

(b)  $\ln|x| + 2\frac{1}{x+1} + 2 \ln|x+1| + C;$

(c)  $\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{8}{x-2} + 12 \ln|x-2| + C;$

(d)  $8 \ln|x| - 4 \ln|x^2+1| + C;$

(e)  $\frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{x} + 3 \operatorname{arctg} x + C.$

### 3

## Integração em $\mathbb{R}$

A aplicação do cálculo integral que iremos usar como motivação para a introdução do conceito é o cálculo de áreas. Para esse efeito, considere-se, para já, uma função  $f$  contínua, limitada e não negativa num intervalo  $I = [a, b]$  e o problema do cálculo da área da região  $A$  do plano (Figura 3.1), limitada superiormente pelo gráfico de  $f$ , inferiormente pelo eixo das abcissas e lateralmente pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ .

Nas condições da função  $f$ , existe o supremo e o ínfimo de  $f$  em  $[a, b]$ <sup>1</sup>. Assim, representando o supremo e o ínfimo de  $f$  em  $[a, b]$  respetivamente por  $M$  e  $m$ , ou seja,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  e  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  (Figura 3.2), é-nos intuitivo que a área da região  $A$  é limitada superiormente pela área do retângulo de base  $b - a$  e altura  $M$  e inferiormente pela área do retângulo de base  $b - a$  e altura  $m$ . Por um lado, o retângulo mais pequeno está completamente contido na região  $A$  e tem área igual a  $m(b - a)$  e, por outro lado, a região  $A$  está completamente contida no retângulo maior que tem área igual  $M(b - a)$ , ou seja,

$$m(b - a) \leq \text{Área } A \leq M(b - a).$$

Os valores  $M(b - a)$  e  $m(b - a)$  são valores aproximados (grosseiros, é certo!) da área da região  $A$ , respetivamente por excesso e por defeito.

Para melhorar as aproximações, podemos decompor o intervalo  $[a, b]$  em vários sub-intervalos, em cada um deles fazer o mesmo tipo de raciocínio que foi feito para o intervalo  $[a, b]$  e, por fim, somar cada uma das aproximações obtidas em cada sub-intervalo. A Figura 3.3 ilustra o exemplo, em que se decompôs o intervalo  $[a, b]$  em 7 sub-intervalos. Designando por  $M_1, M_2, \dots, M_7$  respetivamente os supremos da função  $f$  nos intervalos  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_6, b]$  e por  $m_1, m_2, \dots, m_7$  os ínfimos nos mesmos intervalos, então as novas aproximações da área da região  $A$ , por excesso e por defeito, são dadas respetivamente por

$$M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_7(b - x_6)$$

e

$$m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_7(b - x_6).$$

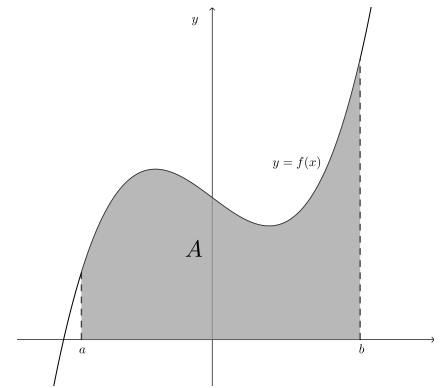


Figura 3.1: Região A.

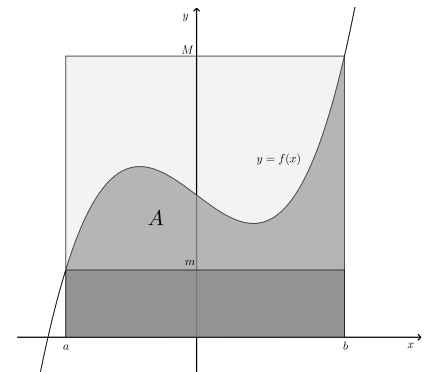


Figura 3.2: Primeiras aproximações ao cálculo da área da região A.

<sup>1</sup> Chama-se supremo de  $f$  em  $[a, b]$ , e representa-se por  $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , ao mínimo do conjunto dos majorantes de  $f$  em  $[a, b]$ . Diz-se que  $y_0$  é majorante de  $f$  em  $[a, b]$  se e só se qualquer imagem de  $f$  em  $[a, b]$  for menor ou igual a  $y_0$ , ou seja,  $f(x) \leq y_0$  para qualquer  $x \in [a, b]$ .

Chama-se ínfimo de  $f$  em  $[a, b]$ , e representa-se por  $\inf_{x \in [a, b]} f(x)$ , ao máximo do conjunto dos minorantes de  $f$  em  $[a, b]$ . Diz-se que  $y_0$  é minorante de  $f$  em  $[a, b]$  se e só se qualquer imagem de  $f$  em  $[a, b]$  for maior ou igual a  $y_0$ , ou seja,  $f(x) \geq y_0$  para qualquer  $x \in [a, b]$ .

Facilmente se percebe que, independentemente da decomposição do intervalo, o valor aproximado por excesso nunca será inferior ao valor aproximado por defeito. Também se deduz que se decomposermos o intervalo  $[a, b]$  em mais sub-intervalos, as aproximações, quer por excesso quer por defeito, ao valor da área da região não seriam piores que as aproximações anteriores. No limite, quando o número de sub-intervalos tende para infinito, ou seja, o comprimento de cada um dos sub-intervalos tende para zero, é de esperar que as aproximações por excesso e por defeito se aproximem de um único valor, sendo este o valor da área da região. Geralmente, não existe a preocupação em definir as unidades de medida das variáveis, mas tratando-se do cálculo de uma área, naturalmente que o resultado será em unidades quadradas de medida.

De seguida, vamos formalizar os conceitos agora apresentados.

### 3.1 Integrabilidade à Riemann

**Definição 3.** Seja  $[a, b]$  um intervalo limitado e fechado de  $\mathbb{R}$ , com  $b > a$ .

1. Uma **partição** ou **decomposição** de  $[a, b]$  é um conjunto finito de pontos  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

2. A **norma** ou **diâmetro** da partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  é o número (que é sempre maior ou igual a zero) dado por

$$\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}).$$

3. Um **refinamento** da partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  é uma partição  $Q$  de  $[a, b]$  tal que  $P \subseteq Q$ . Nesta situação diz-se que  $Q$  é **mais fina** do que  $P$ .

Note-se que uma partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  divide o intervalo  $I = [a, b]$  em  $n$  sub-intervalos

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n]$$

ou, de outra forma,

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n,$$

cujos comprimentos são respetivamente dados por

$$\Delta_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, \dots, n.$$

**Definição 4.** Uma partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  do intervalo  $[a, b]$  diz-se **regular** se os  $n$  sub-intervalos têm todos o mesmo comprimento:

$$\Delta_k = \frac{b-a}{n}, k = 1, \dots, n.$$

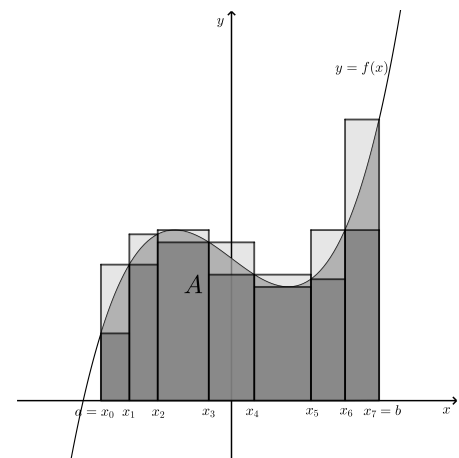


Figura 3.3: Aproximações por excesso e por defeito ao cálculo da região  $A$ .

**Exemplo 55.** Os conjuntos

$$P_1 = \{0, 1\}, \quad P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad P_3 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad P_4 = \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.75, 1\},$$

são todas partições do intervalo  $[0, 1]$ . As partições  $P_1$  e  $P_2$  são regulares. As normas das partições são respetivamente dadas por

$$\begin{aligned} \|P_1\| &= 1, \\ \|P_2\| &= \max_{1 \leq k \leq 2} (x_k - x_{k-1}) = \max(x_1 - x_0, x_2 - x_1) = \max\left(\frac{1}{2} - 0, 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \\ \|P_3\| &= \max\left(\frac{1}{4} - 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \\ \|P_4\| &= \max(0.1 - 0, 0.3 - 0.1, 0.5 - 0.3, 0.75 - 0.5, 1 - 0.75) = 0.25. \end{aligned}$$

As partições  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  são refinamentos da partição  $P_1$  ( $P_1 \subseteq P_2$ ,  $P_1 \subseteq P_3$  e  $P_1 \subseteq P_4$ ) e as partições  $P_3$  e  $P_4$  também são refinamentos da partição  $P_2$  ( $P_2 \subseteq P_3$  e  $P_2 \subseteq P_4$ ). Note-se que  $P_4$  não é um refinamento da partição  $P_3$  pois  $P_3 \not\subseteq P_4$ .

Estamos agora em condições de definir somas superior e inferior de Darboux, que correspondem às somas mencionadas no início deste capítulo para aproximar por excesso e por defeito (ver Figura 3.3).

**Definição 5** (Soma superior de Darboux). *Seja  $[a, b]$  um intervalo limitado e fechado,  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  uma partição de  $[a, b]$  e  $f$  uma função limitada nesse intervalo. Chama-se **soma superior de Darboux** de  $f$  relativamente à partição  $P$  ao número*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, P) &= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k \end{aligned}$$

com  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

**Definição 6** (Soma inferior de Darboux). *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado,  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  uma partição de  $[a, b]$  e  $f$  uma função limitada nesse intervalo. Chama-se **soma inferior de Darboux** de  $f$  relativamente à partição  $P$  ao número*

$$\begin{aligned} s(f, P) &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \Delta_k \end{aligned}$$

com  $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Atendendo às definições é imediato concluir que, independentemente da partição do intervalo  $[a, b]$ , a soma inferior de Darboux é sempre menor ou igual à soma superior de Darboux, ou seja, verifica-se sempre a relação

$$s(f, P) \leq \mathcal{S}(f, P),$$

qualquer que seja a partição  $P$ .

**Exemplo 56.** Considere-se a função real de variável real definida por  $f(x) = 2x + 1$  no intervalo  $[0, 3]$  e a partição regular  $P = \{0, 1, 2, 3\}$ .

A soma superior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $P$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, P) &= 3(1 - 0) + 5(2 - 1) + 7(3 - 2) \\ &= 15 \end{aligned}$$

que geometricamente corresponde à soma das áreas dos retângulos representados na Figura 3.4.

A soma inferior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $P$  é dada por:

$$\begin{aligned} s(f, P) &= 1(1 - 0) + 3(2 - 1) + 5(3 - 2) \\ &= 9 \end{aligned}$$

que geometricamente corresponde à soma das áreas dos retângulos representados na Figura 3.5.

Comprova-se a relação  $s(f, P) \leq \mathcal{S}(f, P)$  para esta partição  $P = \{0, 1, 2, 3\}$ . Como se percebe geometricamente, as somas  $\mathcal{S}(f, P) = 15$  e  $s(f, P) = 9$  são duas aproximações, por excesso e por defeito, ao valor da área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico de  $f$ , inferiormente pelo eixo dos  $xx$  e lateralmente pelas retas  $x = 0$  e  $x = 3$ .

**Teorema 11.** Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado,  $f$  uma função limitada nesse intervalo e,  $P$  e  $Q$  duas partições do intervalo  $[a, b]$  tais que  $Q$  é mais fina do que  $P$ . Então

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, P).$$

*Demonstração.* No Anexo. □

**Exemplo 57.** Considere-se o exemplo anterior, com a mesma função  $f(x) = 2x + 1$  no intervalo  $[0, 3]$ , considerando agora um refinamento da partição  $P = \{0, 1, 2, 3\}$ , dada por

$$Q = P \cup \{0.5, 2.75\} = \{0, 0.5, 1, 2, 2.75, 3\}.$$

A soma superior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $Q$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, Q) &= 2(0.5 - 0) + 3(1 - 0.5) + 5(2 - 1) + 6.5(2.75 - 2) + 7(3 - 2.75) \\ &= 14.125 \end{aligned}$$

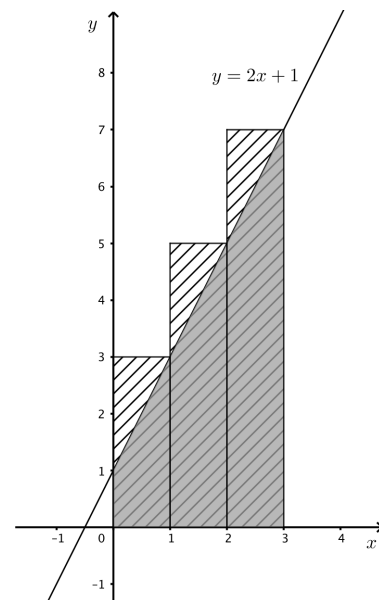


Figura 3.4: Soma superior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $P$ .

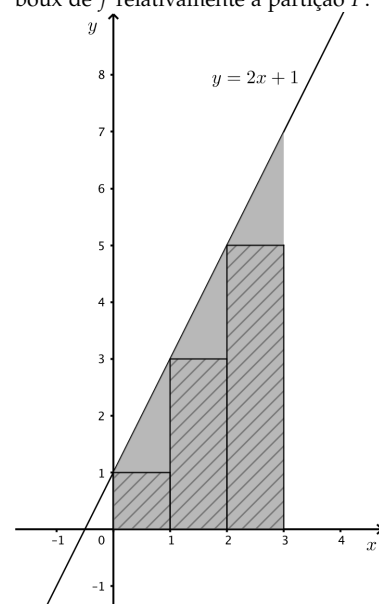


Figura 3.5: Soma inferior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $P$ .

que geometricamente corresponde à soma das áreas dos retângulos representados na Figura 3.6.

A soma inferior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $Q$  é dada por:

$$\begin{aligned} s(f, Q) &= 1(0.5 - 0) + 2(1 - 0.5) + 3(2 - 1) + 5(2.75 - 2) + 6.5(3 - 2.75) \\ &= 9.875 \end{aligned}$$

que geometricamente corresponde à soma das áreas dos retângulos representados na Figura 3.7.

Como seria de esperar, verifica-se, então,

$$\begin{aligned} s(f, P) \leq s(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, P) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 \leq 9.875 \leq 14.125 \leq 15. & \end{aligned}$$

Mais uma vez, geometricamente, podemos reparar que com esta partição mais fina obtemos melhores aproximações ao valor da área do que no Exemplo 56.

A partir do teorema anterior demonstra-se o seguinte resultado:

**Teorema 12.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado,  $f$  uma função limitada nesse intervalo, e  $P_1$  e  $P_2$  duas partições quaisquer do intervalo  $[a, b]$ . Então*

$$s(f, P_1) \leq \mathcal{S}(f, P_2).$$

Obviamente, também se verifica

$$s(f, P_2) \leq \mathcal{S}(f, P_1).$$

*Demonstração.* No Anexo. □

Resulta das propriedades anteriores que o conjunto das somas superiores (para todas as partições) é minorado (todas as somas inferiores são minorantes) e o conjunto das somas inferiores (para todas as partições) é majorado (todas as somas superiores são majorantes), logo estes conjuntos têm respetivamente ínfimo e supremo.

**Definição 7.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $f$  uma função limitada nesse intervalo.*

- Ao ínfimo do conjunto das somas superiores de  $f$  relativas a todas as partições de  $[a, b]$  chama-se **integral superior** de  $f$  em  $[a, b]$  e representa-se por  $\int_a^b f(x) dx$ .
- Ao supremo do conjunto das somas inferiores de  $f$  relativas a todas as partições de  $[a, b]$  chama-se **integral inferior** de  $f$  em  $[a, b]$  e representa-se por  $\int_a^b f(x) dx$ .

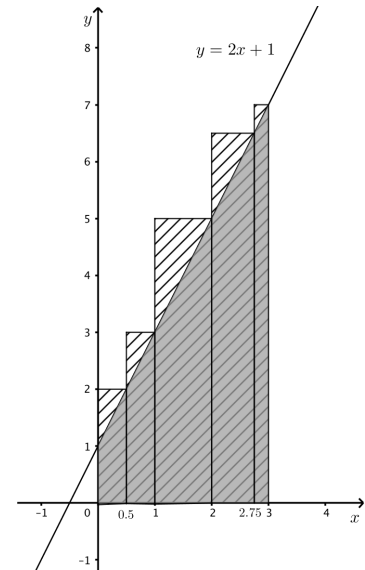


Figura 3.6: Soma superior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $Q$ .

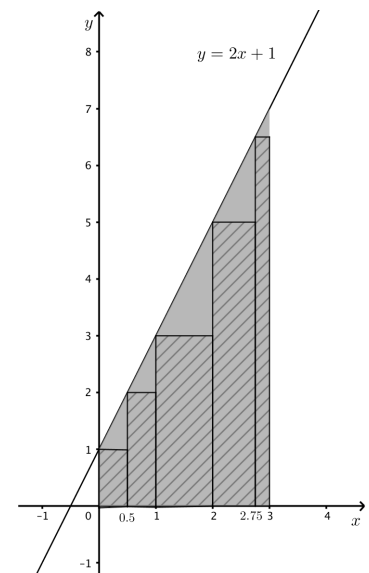


Figura 3.7: Soma inferior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $Q$ .

Note-se que quando se refere “todas as partições de  $[a, b]$ ”, estas são em número infinito. O sinal  $\int$  de integral pretende representar a letra S alongada, inicial da palavra latina “*Summa*”, ou seja, soma.

Facilmente se provaria que o integral inferior de  $f$  em  $[a, b]$  é sempre menor ou igual ao integral superior. Ou seja:

**Teorema 13.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $f$  uma função limitada nesse intervalo. Então,*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

No caso de se verificar a igualdade, tem-se a seguinte definição:

**Definição 8.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $f$  uma função limitada nesse intervalo. Se*

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx$$

*diz-se que  $f$  é integrável à Riemann em  $[a, b]$ . Nestas circunstâncias*

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}$$

*e diz-se que  $\int_a^b f(x) dx$  é o integral definido de  $f$  entre  $a$  e  $b$ .*

Na expressão  $\int_a^b f(x) dx$ , a função  $f$  chama-se função integranda, a variável  $x$  chama-se variável de integração e o  $dx$  pretende representar um número infinitesimal (que tende para 0), correspondente ao comprimento dos sub-intervalos da soma. Os números  $a$  e  $b$  chamam-se extremos do integral, respetivamente inferior e superior, e o intervalo  $[a, b]$  chama-se intervalo de integração.

Doravante, se nada for dito em contrário, quando se referir que uma função é integrável, entenda-se que a função é integrável à Riemann.

O integral definido de uma função integranda não negativa com extremos de integração  $a$  e  $b$ , interpreta-se geometricamente como a área da região do plano, limitada superiormente pelo gráfico de  $f$ , inferiormente pelo eixo dos  $xx$  e lateralmente pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ .

**Exemplo 58.** Considere-se a função constante definida por  $f(x) = C$  no intervalo  $[a, b]$  e uma partição arbitrária desse intervalo dada por  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , em que  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ . Os supremos e os ínfimos da função  $f$  nos intervalos  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  são sempre iguais a  $C$

dados que se trata da função constante. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, P) &= C(x_1 - x_0) + C(x_2 - x_1) + \dots + C(x_n - x_{n-1}) \\ &= C(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) \\ &= C(-x_0 + x_n) \\ &= C(b - a) \end{aligned}$$

Podemos então concluir que as somas superiores de  $f$  relativas a todas as partições de  $[a, b]$  são iguais a  $C(b - a)$ , donde o integral superior de  $f$  em  $[a, b]$  é igual a  $C(b - a)$ :

$$\overline{\int_a^b C dx} = C(b - a).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} s(f, P) &= C(x_1 - x_0) + C(x_2 - x_1) + \dots + C(x_n - x_{n-1}) \\ &= C(b - a) \end{aligned}$$

donde as somas inferiores de  $f$  relativas a todas as partições de  $[a, b]$  são iguais a  $C(b - a)$  e o integral inferior de  $f$  em  $[a, b]$  é igual a  $C(b - a)$ :

$$\underline{\int_a^b C dx} = C(b - a).$$

Pela definição anterior,  $f$  é integrável à Riemann e

$$\int_a^b C dx = C(b - a).$$

Assim, por exemplo

$$\int_1^5 6 dx = 6(5 - 1) = 6 \times 4 = 24$$

e

$$\int_{-1}^4 (-2) dx = -2(4 - (-1)) = -2 \times 5 = -10.$$

Se  $C \geq 0$ , o integral corresponde à área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pelo gráfico da função e lateralmente pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , ou seja, corresponde à área de um retângulo de base  $b - a$  e altura  $C$ :  $C(b - a)$  (Figura 3.8).

**Exemplo 59.** Considere-se agora a função de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

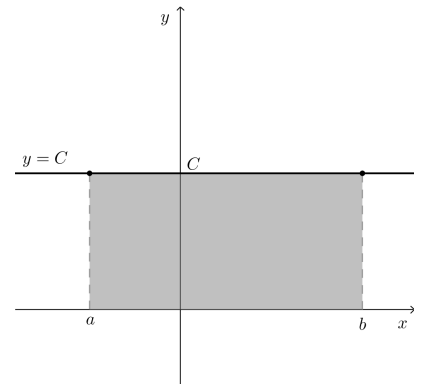


Figura 3.8: Área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pelo gráfico da função constante e lateralmente pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ .

**Exercício 13.** Esboce uma região cuja área seja dada pelo integral  $\int_0^2 3 dx$  e calcule o seu valor.

num intervalo  $[a, b]$ . Qualquer que seja a partição do intervalo, os supremos e os ínfimos da função  $D$  nos intervalos  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  são sempre iguais respetivamente a 1 e a 0. Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(D, P) &= 1(x_1 - x_0) + 1(x_2 - x_1) + \dots + 1(x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 \\ &= b - a\end{aligned}$$

donde

$$\int_a^b D(x) dx = b - a$$

e

$$\begin{aligned}s(D, P) &= 0(x_1 - x_0) + 0(x_2 - x_1) + \dots + 0(x_n - x_{n-1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

donde

$$\int_a^b D(x) dx = 0.$$

Conclui-se assim que  $D$  não é integrável à Riemann em  $[a, b]$ .

Como facilmente se percebe, verificar por definição se uma função é integrável num intervalo  $[a, b]$  apenas se consegue para algumas funções muito simples. É nesse sentido que existem alguns resultados que facilitam esse processo de verificação. De modo a não tornar esta secção demasiado exaustiva, decidiu-se apresentar esses resultados em anexo, no final do manual. São resultados interessantes e importantes, nomeadamente para a demonstração dos teoremas que iremos apresentar na subsecção seguinte, mas que excedem o propósito para o qual o manual foi criado. Refira-se que no Anexo, verificamos a integrabilidade da função real de variável real  $f(x) = 2x + 1$  no intervalo  $[0, 3]$ , que serviu de exemplo às somas de Darboux, e também concluímos que

$$\int_0^3 (2x + 1) dx = 12.$$

### 3.1.1 Monotonia, continuidade e integrabilidade

A partir da monotonia e da continuidade de uma função  $f$  num certo intervalo também se podem tirar conclusões quanto à integrabilidade da função nesse intervalo.

**Teorema 14.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $f$  uma função monotona e limitada nesse intervalo, então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .*

*Demonstração.* No Anexo. □

**Exemplo 60.** A função real de variável real  $f(x) = 2x + 1$  é monótona (crescente) e limitada no intervalo fechado e limitado  $[0, 3]$ , logo é integrável nesse intervalo (tal como já verificado no Anexo).

Saliente-se que existem funções que são integráveis à Riemann num intervalo fechado e limitado e que não são monótonas nesse intervalo.

**Teorema 15.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $f$  uma função contínua e limitada nesse intervalo, então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .*

A demonstração deste último resultado sai fora do âmbito deste manual, uma vez que recorre a conceitos que não se pretendem aqui introduzir. No entanto, facilmente se encontra a demonstração na bibliografia.

**Exemplo 61.** Mais uma vez, a função  $f(x) = 2x + 1$  é integrável no intervalo fechado e limitado  $[0, 3]$ , pois é contínua nesse intervalo.

Sendo  $f$  integrável em  $[0, 3]$  e positiva nesse intervalo, o integral definido de  $f$  entre 0 e 3,  $\int_0^3 (2x + 1) dx$ , tal como já referido, interpreta-se geometricamente como a área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico de  $f$ , inferiormente pelo eixo dos  $xx$  e lateralmente pelas retas  $x = 0$  e  $x = 3$  (Figura 3.9). Ou seja, trata-se da área de um trapézio (retângulo) de base menor igual a 1, base maior igual a 7 e altura igual a 3, cuja fórmula é conhecida (Figura 3.10). Assim

$$\int_0^3 (2x + 1) dx = \frac{(7 + 1) \times 3}{2} = 12.$$

No entanto, nem sempre a região é um polígono para podermos utilizar fórmulas conhecidas para o cálculo da área. Torna-se necessário conhecer outro tipo de resultados para o cálculo de integrais.

**Exemplo 62.** A função real de variável real  $f(x) = x^2$  é contínua e limitada em qualquer intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ , logo é integrável nesse intervalo. Considerando, por exemplo, o intervalo  $[1, 4]$ , geometricamente o integral  $\int_1^4 x^2 dx$  corresponde à área da região sombreada da Figura 3.11, não havendo uma fórmula conhecida para o seu cálculo.

**Exemplo 63.** A função real de variável real  $f(x) = e^{4x}$  é a composta de funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , logo é contínua em  $\mathbb{R}$ . É também limitada em qualquer intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ . Então é integrável nesse intervalo.

À semelhança do resultado anterior, saliente-se que existem funções que são integráveis à Riemann num intervalo fechado e limitado e que não são contínuas nesse intervalo. Pode mesmo provar-se que qualquer função seccionalmente contínua<sup>2</sup> (ou seccionalmente monótona) em  $[a, b]$

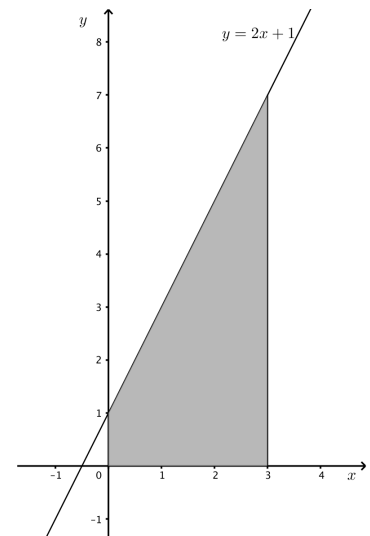


Figura 3.9: Área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pelo gráfico da função  $f(x) = 2x + 1$  e lateralmente pelas retas  $x = 0$  e  $x = 3$ .

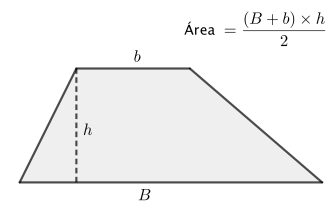


Figura 3.10: Área do trapézio

**Exercício 14.** Interprete geometricamente os seguintes integrais e calcule os respetivos valores:

1.  $\int_0^3 x dx$ ;
2.  $\int_{-1}^1 (2x + 5) dx$ ;
3.  $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ .

<sup>2</sup> Uma função  $f$  definida em  $[a, b]$  diz-se seccionalmente contínua em  $[a, b]$  se é contínua em  $[a, b]$ , exceto num número finito de pontos e nesses pontos de descontinuidade existem e são finitos os limites laterais de  $f$ .

é integrável à Riemann nesse intervalo. Assim, por exemplo, a função de Heaviside definida em  $\mathbb{R}$  por:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

é uma função não contínua em  $x = 0$  e, no entanto, é uma função integrável em qualquer intervalo fechado e limitado. Considerando, por exemplo, o intervalo  $[-1, 2]$ , a função  $H$  é seccionalmente contínua nesse intervalo, donde é integrável. Dado que a função é não negativa e linear no intervalo, podemos facilmente deduzir geometricamente (Figura 3.12) que

$$\int_{-1}^2 H(x) dx = 1 \times (2 - 0) = 2.$$

O valor da ordenada em  $x = 0$  não altera o valor da área. O segmento vertical em  $x = 0$  tem área nula e não tem influência para o cálculo da área.

Na realidade, ao longo do presente capítulo, considerou-se sempre o intervalo  $[a, b]$  fechado. No entanto, não precisávamos de o ter feito e poder-se-ia ter considerado o intervalo aberto  $]a, b[$ , mantendo-se válida a teoria vista até ao momento, naturalmente, com alguns ajustes.

### 3.1.2 Propriedades do Integral de Riemann

Vejamos agora algumas propriedades importantes dos integrais.

**Definição 9.** Sendo  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , tem-se:

1.  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ ;
2.  $\int_c^c f(x) dx = 0$ , para todo o  $c \in [a, b]$ .

A integração goza de linearidade:

**Teorema 16.** Sejam  $f$  e  $g$  integráveis em  $[a, b]$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $f + g$  e  $\lambda f$  são integráveis em  $[a, b]$  e:

1.  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ;
2.  $\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$ .

**Exemplo 64.** Considere-se as funções reais de variável real  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = 5$  que, como já vimos, são ambas integráveis em  $[0, 3]$ . Então  $f + g$  e  $2f$  também são integráveis em  $[0, 3]$  e:

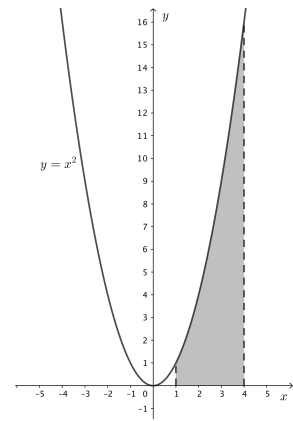


Figura 3.11: Área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pelo gráfico da função  $f(x) = x^2$  e lateralmente pelas retas  $x = 1$  e  $x = 4$ .

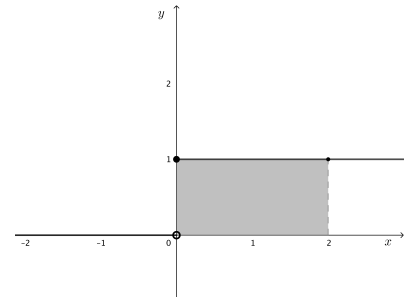


Figura 3.12: Área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pelo gráfico da função de Heaviside e lateralmente pelas retas  $x = -1$  e  $x = 2$ .

1.

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 (f(x) + g(x)) dx &= \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx \\
 &= \int_0^3 (2x + 1) dx + \int_0^3 5 dx \\
 &= 12 + 5(3 - 0) \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 (2f(x)) dx &= 2 \int_0^3 f(x) dx \\
 &= 2 \int_0^3 (2x + 1) dx \\
 &= 2 \times 12 \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

Para resolver os integrais, recorreremos aos cálculos já efetuados nos Exemplos 58 e 61.

**Teorema 17.** *Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$  e  $c \in ]a, b[$ , então  $f$  é integrável nos intervalos  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , e:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Exemplo 65.** Mais uma vez, considere-se a função real de variável real  $f(x) = 2x + 1$ , integrável no intervalo  $[0, 3]$ . Então

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 (2x + 1) dx &= \int_0^1 (2x + 1) dx + \int_1^3 (2x + 1) dx. \\
 &= \frac{(3 + 1)1}{2} + \frac{(7 + 3)2}{2} \\
 &= 2 + 10 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

Cada um dos integrais da soma corresponde à área de um trapézio (Figura 3.13). Naturalmente, em vez de  $c = 1$ , poderíamos ter considerado outro valor no intervalo  $[0, 3]$ .

Em termos práticos, a decomposição realizada no exemplo não trouxe qualquer benefício para o cálculo. No entanto, a igualdade do último teorema também é válida se  $f$  for integrável em qualquer um dos intervalos  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , podendo-se concluir que  $f$  é integrável no intervalo  $[a, b]$ . Um caso particular, já mencionado, é o das funções limitadas e seccionalmente contínuas em  $[a, b]$ . Em cada um dos sub-intervalos onde a função é contínua, pelo Teorema 15, é integrável nesse mesmo sub-intervalo e consequentemente em  $[a, b]$ . Este resultado é fundamental na resolução do seguinte exemplo:

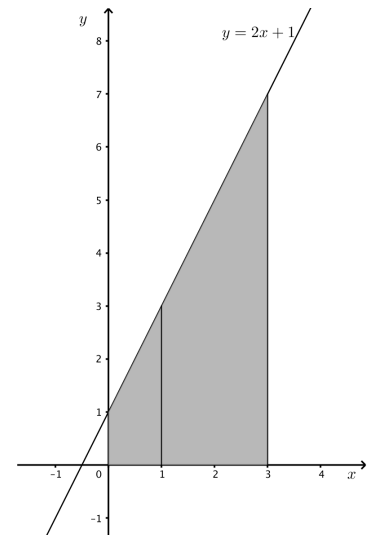


Figura 3.13: Área da região correspondente a dois trapézios.

**Exemplo 66.** Considere-se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{se } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

e determine-se

$$\int_0^5 f(x) dx.$$

Ora, note-se que para  $x \in [0, 3]$  tem-se  $f(x) = 2x + 1$  e para  $x \in ]3, 5]$  tem-se  $f(x) = 3$ . Já vimos anteriormente que  $f$  é integrável em  $[0, 3]$  e em  $[3, 5]$ , logo é integrável em  $[0, 5]$  (apesar de não ser contínua nesse intervalo) e:

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \\ &= \int_0^3 (2x + 1) dx + \int_3^5 3 dx \\ &= 12 + 3(5 - 3) \\ &= 18. \end{aligned}$$

O primeiro integral da soma corresponde à área de um trapézio, já calculado em exemplos anteriores, e o segundo corresponde à área de um retângulo (Figura 3.14).

Outra propriedade dos integrais é dada pelo seguinte resultado:

**Teorema 18.** Sejam  $f$  e  $g$  integráveis em  $[a, b]$  e  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

O resultado é válido quaisquer que sejam as funções  $f$  e  $g$  integráveis em  $[a, b]$  tais que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , no entanto, se pensarmos em funções não negativas em  $[a, b]$ , o resultado tem uma interpretação geométrica bastante evidente. Veja-se um exemplo:

**Exemplo 67.** Considere-se a relação  $\sin x \leq x$ , válida para  $x \geq 0$ . Na Figura 3.15, podemos visualizar ambas as funções no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Então, pelo teorema anterior,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx.$$

Ainda não sabemos calcular o integral da função seno, mas, tendo em conta a área do triângulo de base e altura  $\frac{\pi}{2}$ , podemos concluir que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \leq \frac{\pi^2}{8} \simeq 1,234.$$

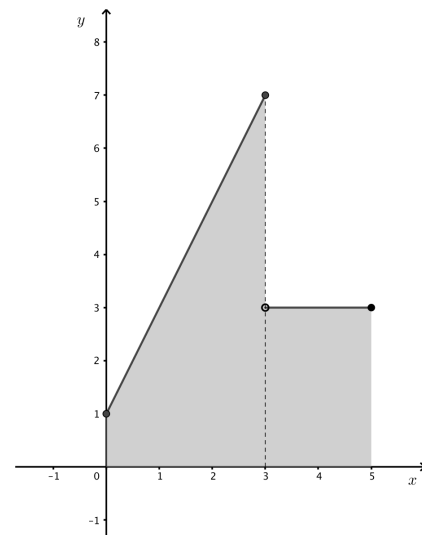


Figura 3.14: Área da região correspondente a um trapézio e a um retângulo.

**Exercício 15.** Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } 1 \leq x \leq 3 \\ x & , \text{ se } 3 < x \leq 5 \end{cases}.$$

Esboce uma região cuja área seja dada pelo integral  $\int_1^5 f(x) dx$  e calcule o seu valor.

Adiante, facilmente determinaremos o seguinte resultado:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x dx = 1$$

Um caso particular do último teorema é o seguinte:

**Teorema 19.** *Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$  e  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Mais uma vez, considerando uma função  $f$  não negativa em  $[a, b]$ , a interpretação geométrica do resultado é imediata. A Figura 3.2, apresentada no início do capítulo, ilustra o caso aqui apresentado.

Considerando  $m = 0$ , tem-se ainda o seguinte caso particular:

**Teorema 20.** *Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$  e  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , então*

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

**Exemplo 68.** Sabendo que  $0 \leq \text{sen } x \leq 1$  para todo  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x dx \leq 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x dx \leq \frac{\pi}{2} \simeq 1.571. \end{aligned}$$

**Exemplo 69.** Mais interessante que o último exemplo, uma vez que o cálculo do integral já não é assim tão simples, é a obtenção do seguinte resultado:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } x}{x} dx \leq \frac{\pi - 1}{2}.$$

Podemos chegar a esta conclusão a partir da relação  $\text{sen } x \leq x$ , válida para todo  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Sendo  $x > 0$ , vem

$$\frac{\text{sen } x}{x} \leq 1,$$

onde

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } x}{x} dx &\leq 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } x}{x} dx &\leq \frac{\pi - 1}{2}. \end{aligned}$$

**Teorema 21.** *Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$ , então  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$  e*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

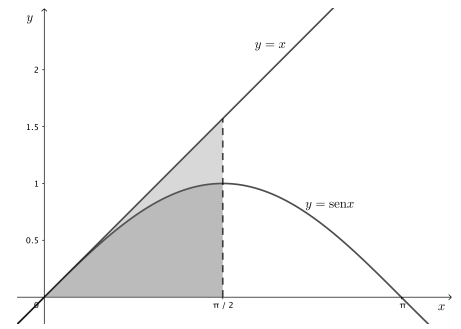


Figura 3.15: Funções  $y = \text{sen } x$  e  $y = x$  no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Exercício 16.** Sem calcular os integrais, mostre que:

1.  $0 \leq \int_1^5 \ln x dx \leq 4 \ln 5;$
2.  $\frac{\pi}{2} \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \arccos x dx \leq \frac{3\pi}{2}.$

**Exercício 17.** Sem calcular o integral, determine o sinal do integral  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \text{sen } x dx.$

Mas não é verdade que se  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$  então  $f$  é integrável nesse intervalo. Por exemplo, a função definida em  $\mathbb{R}$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável em nenhum intervalo  $[a, b]$ <sup>3</sup>, mas a função  $|f(x)| = 1$ , constante, é integrável em qualquer intervalo  $[a, b]$ .

<sup>3</sup>Para mostrar basta seguir o procedimento do Exemplo 59 na página 53.

### 3.2 Integral Indefinido

**Definição 10.** *Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$ . Então a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

com  $x \in [a, b]$ , diz-se **integral indefinido** de  $f$  no intervalo  $[a, x]$ .

O integral indefinido de uma função integranda  $f$  não negativa tem a mesma interpretação geométrica do integral definido, mas no intervalo  $[a, x]$ , com  $x \in [a, b]$ , ou seja, corresponde à área da região do plano, limitada superiormente pelo gráfico de  $f$ , inferiormente pelo eixo das abcissas e lateralmente pelas retas  $t = a$  e  $t = x$  (Figura 3.16).

Naturalmente, se  $x = b$ , tem-se

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt,$$

que corresponde à área da região do plano definida na Figura 3.1 (página 47).

Por outro lado, se  $x = a$ , vem

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

**Teorema 22.** *Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$ , então o integral indefinido de  $f$  no intervalo  $[a, x]$*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

com  $x \in [a, b]$ , existe e é contínuo em  $[a, b]$ .

**Exemplo 70.** Considere-se a função constante definida por  $f(x) = C$  no intervalo  $[a, b]$ . O integral indefinido da função  $f$  no intervalo  $[a, x]$ , com  $x \in [a, b]$ , é dado por (ver Figura 3.17 com a interpretação geométrica)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x C dt \\ &= C(x - a) \end{aligned}$$

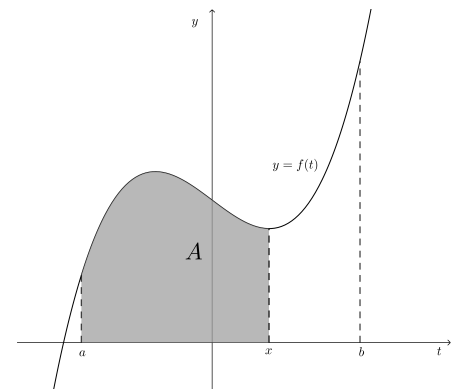


Figura 3.16: Interpretação geométrica do integral indefinido da função  $f$  no intervalo  $[a, x]$ .

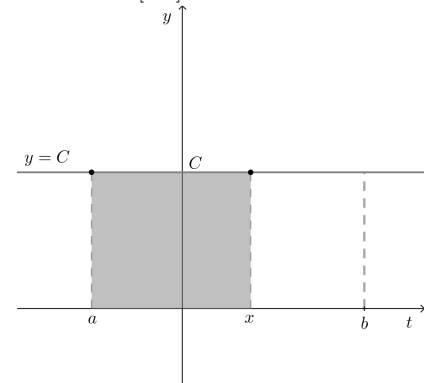


Figura 3.17: Interpretação geométrica do integral indefinido da função  $f(t) = C$  no intervalo  $[a, x]$ .

**Exemplo 71.** Considere-se, agora, a função definida por

$$f(x) = 2x + 1,$$

integrável no intervalo  $[0, 3]$ . O integral indefinido da função  $f$  no intervalo  $[0, x]$ , com  $x \in [0, 3]$ , é dado por

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x (2t + 1) dt \end{aligned}$$

Como já vimos, o integral pode interpretar-se geometricamente como a área de um trapézio (Figura 3.18) de base menor igual a  $b = 1$ , base maior igual a  $B = 2x + 1$  e altura igual a  $h = x$ . Assim,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (2t + 1) dt \\ &= \frac{(B + b) h}{2} \\ &= \frac{(2x + 1 + 1) x}{2} \\ &= \frac{(2x + 2) x}{2} \\ &= x^2 + x \end{aligned}$$

Para  $x = 3$

$$\begin{aligned} F(3) &= \int_0^3 (2t + 1) dt \\ &= 3^2 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

tem-se o resultado do Exemplo 61 (página 55).

Para  $x = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^0 (2t + 1) dt \\ &= 0^2 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

como seria de esperar.

**Exemplo 72.** Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{se } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

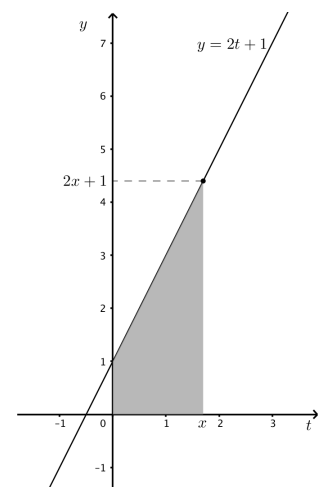


Figura 3.18: Interpretação geométrica do integral indefinido da função  $f(t) = 2t + 1$  no intervalo  $[0, x]$ .

O integral indefinido de  $f$  no intervalo  $[0, x]$ , com  $x \in [0, 5]$ , é dado por

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Relembre-se que no Exemplo 66, em que calculámos o integral de  $f$  no intervalo  $[0, 5]$ , fizemos a decomposição do integral numa soma de dois integrais, de modo a considerar-se cada um dos ramos.

Neste caso em que temos o integral indefinido no intervalo  $[0, x]$ , com  $x \in [0, 5]$ , a decomposição, ou não, do integral vai depender do valor de  $x$ . Por exemplo, se  $x = 2$ , para calcular o integral  $\int_0^2 f(t) dt$ , não seria necessário decompor, pois no intervalo  $[0, 2]$  a função é igual a  $2t + 1$ . Por outro lado, se  $x = 4$ , para calcular o integral  $\int_0^4 f(t) dt$  já seria necessário decompor em  $\int_0^3 (2t + 1) dt + \int_3^4 3 dt$ , pois no intervalo  $[0, 4]$  a função é igual a  $2t + 1$ , para  $t \in [0, 3]$ , e igual a  $3$ , para  $t \in ]3, 4]$ . Assim, de forma mais geral,

- Se  $0 \leq x \leq 3$  (ver Figura 3.19)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x (2t + 1) dt \\ &= x^2 + x \end{aligned}$$

pele exemplo anterior.

- Se  $3 < x \leq 5$  (ver Figura 3.20)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^3 (2t + 1) dt + \int_3^x 3 dt \\ &= 12 + 3(x - 3) \\ &= 3x + 3. \end{aligned}$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 3x + 3 & \text{se } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Note-se que  $F(3) = 12$  e  $F(5) = 18$  tal como já tínhamos verificado. Note-se também que apesar da função  $f$  não ser contínua no intervalo  $[0, 5]$ , o integral indefinido de  $f$  é contínuo nesse intervalo (Teorema 22).

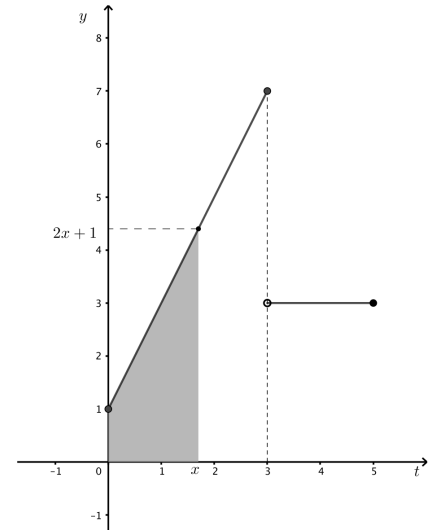


Figura 3.19: Interpretação geométrica do integral indefinido da função  $f$  no intervalo  $[0, x]$ , se  $0 \leq x \leq 3$ .

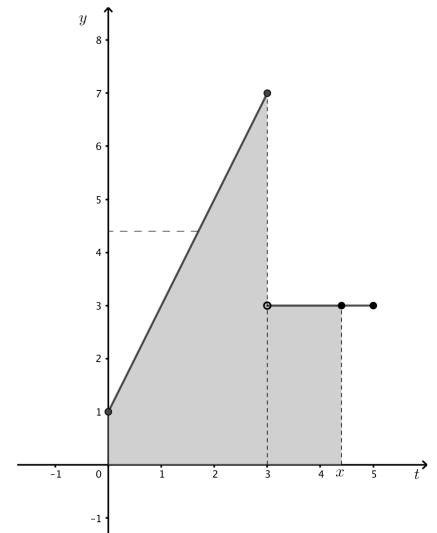


Figura 3.20: Interpretação geométrica do integral indefinido da função  $f$  no intervalo  $[0, x]$ , se  $3 < x \leq 5$ .

Repare-se que nos Exemplos 70 e 71, os integrais indefinidos são diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  e as suas derivadas são dadas por

$$\left( \int_a^x C dt \right)' = (C(x-a))' = C$$

e

$$\left( \int_0^x (2t+1) dt \right)' = (x^2+x)' = 2x+1,$$

dando precisamente as respetivas funções integrandas. Caso esta observação, ou seja,

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x),$$

se verifique para qualquer função (provaremos mais adiante que é verdade para as funções contínuas) e para qualquer constante  $a$ , podemos afirmar que o integral indefinido de uma função contínua  $f$  é uma primitiva da função  $f$ :

$$\int_a^x f(t) dt = P(f(x)) + C$$

Desta forma, recorrendo à primitiva da função integranda, é possível o cálculo de integrais (definidos e indefinidos).

**Exemplo 73.** Determine-se

$$\int_0^3 (2t+1) dt.$$

Sendo

$$P(2x+1) = x^2 + x + C$$

tem-se

$$\int_0^x (2t+1) dt = x^2 + x + C.$$

Para obter a constante  $C$ , considere-se  $x = 0$ , fazendo com que o integral fique com extremos de integração iguais, ou seja, igual a 0:

$$\int_0^0 (2t+1) dt = 0^2 + 0 + C \Leftrightarrow 0 = 0^2 + 0 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Conclui-se que

$$\int_0^x (2t+1) dt = x^2 + x$$

tal como já determinado no Exemplo 71 e conseqüentemente, para  $x = 3$ ,

$$\int_0^3 (2t+1) dt = 12.$$

**Exercício 18.** Considere a função definida por  $f(x) = 3$  no intervalo  $[0,2]$ . Interprete geometricamente o integral indefinido de  $f$  no intervalo  $[0,x]$ , com  $x \in [0,2]$ , e determine-o.

**Exercício 19.** Considere a função definida por  $f(x) = 2x + 5$  no intervalo  $[-1,1]$ . Interprete geometricamente o integral indefinido de  $f$  no intervalo  $[-1,x]$ , com  $x \in [-1,1]$ , e determine-o.

**Exercício 20.** Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } 1 \leq x \leq 3 \\ x & , \text{ se } 3 < x \leq 5 \end{cases}.$$

Interprete geometricamente o integral indefinido de  $f$  no intervalo  $[1,x]$ , com  $x \in [1,5]$ , e determine-o. O que pode concluir quanto à continuidade de  $F$ ?

**Exemplo 74.** Determine-se, agora, o integral da função  $f(x) = x^2$  no intervalo  $[1, 4]$ , ou seja,

$$\int_1^4 x^2 dx.$$

Tal como já vimos, geometricamente corresponde à área da região sombreada da Figura 3.21, não havendo uma fórmula conhecida para o seu cálculo.

No entanto, sabendo que

$$P(x^2) = \frac{x^3}{3} + C$$

vem

$$\int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} + C$$

Para  $x = 1$ , de modo a que o integral fique com extremos de integração iguais, tem-se

$$\int_1^1 t^2 dt = \frac{1^3}{3} + C \Leftrightarrow 0 = \frac{1^3}{3} + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}.$$

Logo

$$\int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

e, para  $x = 4$ ,

$$\int_1^4 t^2 dt = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Note-se que sendo  $F$  uma primitiva da função  $f$ , ou seja,

$$F(x) = P(f(x)),$$

então

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

e, para  $x = a$ , vem

$$\begin{aligned} \int_a^a f(t) dt &= F(a) + C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &= F(a) + C \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C &= -F(a) \end{aligned}$$

logo,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Ainda, para  $x = b$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

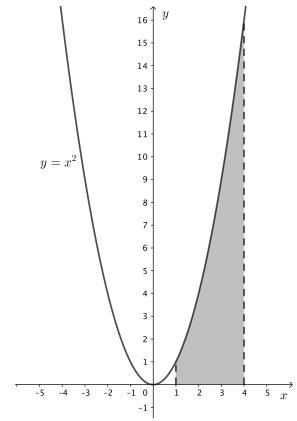


Figura 3.21: Área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pelo gráfico da função  $f(x) = x^2$  e lateralmente pelas retas  $x = 1$  e  $x = 4$ .

ou, equivalentemente,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

É usual escrever-se  $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ , ficando ainda com a forma:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

**Exemplo 75.** Determine-se o integral

$$\int_0^1 e^{4x} dx.$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} P(e^{4x}) &= \frac{1}{4}P(4e^{4x}) \\ &= \frac{e^{4x}}{4} + C \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{4x} dx &= \left[ \frac{e^{4x}}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{e^0}{4} \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^4 - 1}{4} \end{aligned}$$

**Exemplo 76.** Seja  $f$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & , \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & , \text{ se } 0 < x \leq 4 \end{cases}.$$

Determine-se o integral de  $f$  no intervalo  $[-1, 4]$ . A função não é contínua em  $x = 0$ , mas é seccionalmente contínua no intervalo  $[-1, 4]$  logo é integrável nesse intervalo.

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 \cos(\pi x) dx + \int_0^4 \sqrt{x} dx$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} P(\cos(\pi x)) &= \frac{1}{\pi}P(\pi \cos(\pi x)) \\ &= \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi} + C \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(\sqrt{x}) &= P(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \cos(\pi x) dx + \int_0^4 \sqrt{x} dx \\ &= \left[ \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{\text{sen } 0}{\pi} - \frac{\text{sen}(-\pi)}{\pi} + \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - 0 \\ &= \frac{2}{3} \times 8 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

### 3.3 Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral

Em estatística descritiva é frequente o uso de médias como medidas descritivas de dados, sendo a mais conhecida a média aritmética. Esta medida é obtida através do quociente entre a soma de todos os dados observados e o número total de observações. Assim, a média aritmética  $\bar{a}$  de  $n$  observações  $a_1, a_2, \dots, a_n$  é definida por

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}.$$

Se os valores  $a_k$  são os valores de uma função  $f$  em  $n$  pontos distintos, isto é

$$a_1 = f(x_1), a_2 = f(x_2), \dots, a_n = f(x_n)$$

então a média aritmética  $\bar{a}$  destes valores da função é dada por

$$\bar{a} = \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{n}.$$

Este conceito pode ser generalizado para calcular a média não apenas de um número finito de valores de  $f$ , mas para “todos” os valores de  $f$  quando  $x$  varia num intervalo  $[a, b]$ . A definição que se apresenta de seguida tem essa finalidade.

**Exercício 21.** Calcule os seguintes integrais:

1.  $\int_0^1 x^3 dx$ ;
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(2x) dx$ ;
3.  $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 4} dx$ ;
4.  $\int_0^2 |2x - 3| dx$ ;
5.  $\int_0^2 f(x) dx$ , com

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & , x < 1 \\ x & , x \geq 1 \end{cases}.$$

**Definição 11.** Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, b]$ . Então o valor

$$\lambda = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

diz-se o **valor médio** de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

Quando a função  $f$  é não negativa no intervalo  $[a, b]$ , o valor médio é suscetível de interpretação geométrica. Considerando

$$\lambda(b - a) = \int_a^b f(x) dx,$$

podemos interpretar o lado esquerdo da equação como a área de um retângulo de altura  $\lambda$  e comprimento da base  $b - a$  e o lado direito da equação como a área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abscissas, entre  $a$  e  $b$ , e superiormente pelo gráfico da função (Figura 3.22).

**Exemplo 77.** Considere-se a função  $f(x) = 2x + 1$  no intervalo  $[0, 3]$ . O valor médio de  $f$  no intervalo  $[0, 3]$  é dado por

$$\lambda = \frac{\int_0^3 (2x + 1) dx}{3 - 0} = \frac{12}{3} = 4.$$

Através da Figura 3.23, podemos verificar que o valor médio corresponde à altura do retângulo a tracejado, cuja área é igual à área abaixo do gráfico da função.

A existência de valor médio de uma função num intervalo  $[a, b]$  apenas depende da integrabilidade da função nesse intervalo. No entanto, poderá não existir um número  $c$  no intervalo em que a sua imagem na função  $f(c)$  seja igual ao valor médio, ou seja,  $f(c) = \lambda$ . No caso da função ser contínua no intervalo  $[a, b]$ , temos a garantia que esse valor  $c$  existe.

**Teorema 23** (Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral). *Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ , então existe um número  $c \in [a, b]$  tal que*

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a},$$

ou seja,  $f(c)$  é o valor médio de  $f$  no intervalo dado.

**Exemplo 78.** A função considerada no último exemplo,  $f(x) = 2x + 1$ , é contínua no intervalo  $[0, 3]$ . Pelo Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral, existe pelo menos um valor  $c \in [a, b]$ , tal que  $f(c) = \lambda$ , ou seja,  $f(c) = 4$ . Para determinar o valor  $c$  onde a função atinge o valor médio, basta resolver a equação:

$$f(c) = 4 \Leftrightarrow 2c + 1 = 4 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

o que vai ao encontro da representação gráfica da Figura 3.24.

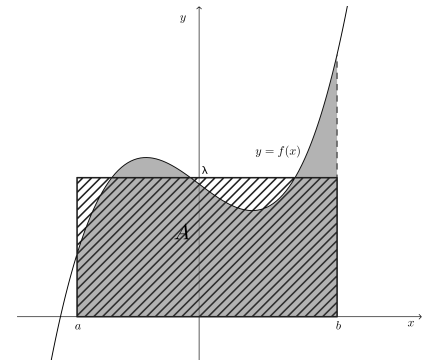


Figura 3.22: Área  $A = \lambda(b - a)$ .

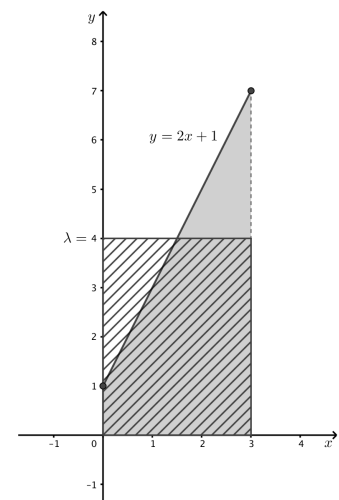


Figura 3.23: Valor médio de  $f(x) = 2x + 1$  no intervalo  $[0, 3]$ .

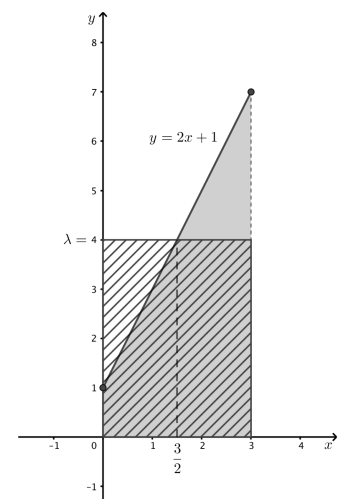


Figura 3.24: Existência de  $c$  no intervalo  $[0, 3]$  tal que  $f(c)$  atinge o valor médio.

**Exemplo 79.** Seja a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } 1 \leq x \leq 3 \\ x & , \text{ se } 3 < x \leq 5 \end{cases} ,$$

A função  $f$  é limitada e seccionalmente contínua em  $[1, 5]$  logo é integrável nesse intervalo. O valor médio de  $f$  no intervalo  $[1, 5]$  é dado por

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\int_1^5 f(x) dx}{5 - 1} \\ &= \frac{\int_1^3 1 dx + \int_3^5 x dx}{4} \\ &= \frac{[x]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5}{4} \\ &= \frac{(3 - 1) + \left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2}\right)}{4} \\ &= \frac{2 + 8}{4} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Note-se que não existe nenhum  $c \in [1, 5]$  tal que  $f(c)$  seja igual ao valor médio obtido, isto é,  $f(c) = \frac{5}{2}$  não tem solução no intervalo  $[1, 5]$  (Figura 3.25). No entanto, este exemplo não contradiz o Teorema do Valor Médio, uma vez que o mesmo não pode ser aplicado a esta função porque não é contínua no intervalo  $[1, 5]$ , sendo esta uma condição do teorema.

Refira-se ainda como observação que o facto de uma função não ser contínua no intervalo  $[a, b]$  não significa que não possa existir um valor  $c$  onde a função atinja o valor médio. A função do Exemplo 66 verifica esta observação, ou seja, não é contínua no intervalo  $[0, 5]$ , mas existe um valor  $c$  no intervalo em que  $f(c)$  é igual ao valor médio. O facto de não ser contínua no intervalo significa apenas que o teorema não pode ser aplicado.

### 3.4 Teorema Fundamental do Cálculo Integral

De seguida, iremos ver formalmente os resultados que nos têm permitido resolver alguns dos exemplos, e exercícios, de integração com recurso às primitivas das funções integrandas. Dada a importância dos resultados, apresentaremos as demonstrações.

**Teorema 24** (Teorema Fundamental do Cálculo Integral). *Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ , então o seu integral indefinido  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , com  $x \in [a, b]$ , é*

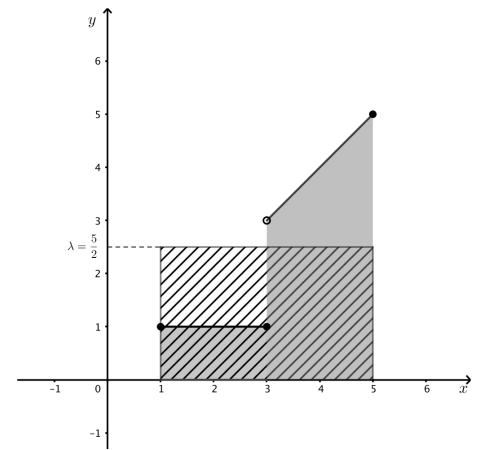


Figura 3.25: Valor médio de  $f$  no intervalo  $[1, 5]$ .

**Exercício 22.** Considere o seguinte integral

$$\int_{-1}^1 (2x + 5) dx.$$

1. Esboce uma região cuja área seja dada pelo integral e calcule o seu valor;
2. Determine o valor médio de  $f$  no intervalo  $[-1, 1]$ ;
3. Determine o ponto do intervalo de integração onde a função atinge o seu valor médio.

**Exercício 23.** Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & , x < 1 \\ x & , x \geq 1 \end{cases} .$$

Determine o valor médio de  $f$  no intervalo  $[0, 2]$ .

uma função diferenciável nesse intervalo e

$$F'(x) = \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

*Demonstração.* Considere-se primeiro  $x \in ]a, b[$  e mostre-se que  $F$  é diferenciável nesse intervalo, ou seja, tem derivada finita. Por definição de derivada

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \end{aligned}$$

Se  $f$  é contínua em  $[x, x+h]$ , com  $x \in ]a, b[$  e  $x+h \leq b$ , então, pelo Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral, existe um número  $c_h \in [x, x+h]$  tal que  $f(c_h)$  é igual ao valor médio de  $f$  no intervalo dado, ou seja,

$$\begin{aligned} f(c_h) &= \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{x+h-x} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \end{aligned}$$

Voltando ao cálculo da derivada, vem:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

No último passo, note-se que sendo  $f$  contínua em  $[x, x+h]$  e  $c_h$  um número pertencente a esse intervalo, então se  $h \rightarrow 0$  vem que  $c_h \rightarrow x$  e consequentemente  $f(c_h) \rightarrow f(x)$ . Este facto demonstra que  $F'(x) = f(x)$  e que  $F$  é diferenciável em  $]a, b[$ . A demonstração de que  $F$  é diferenciável à direita de  $a$  ( $F'_d(a) = f(a)$ ) e à esquerda de  $b$  ( $F'_e(b) = f(b)$ ) pode ser realizada de forma idêntica, recorrendo, respetivamente, à noção de derivada lateral direita e esquerda.  $\square$

**Exercício 24.** Considere a função  $g$  definida por:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

- Determine a expressão de  $G(x) = \int_{-1}^x g(t) dt$ , com  $x \in [-1, 0]$ ;
- Calcule o valor médio de  $g$  no intervalo  $[-1, 0]$ . Justifique que existe um ponto nesse intervalo onde a função  $g$  atinge o valor médio.

**Exercício 25.** Seja  $f$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x \leq 0 \\ e^{2x} - 1 & , 0 < x \leq \ln 2 \end{cases}.$$

- Determine a expressão de  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ , com  $x \in [-1, \ln 2]$ . O que pode concluir quanto a continuidade de  $F$ ?
- Determine o valor médio da função  $f$  no intervalo  $[-1, \ln 2]$ . Justifique que existe um ponto nesse intervalo onde a função  $f$  atinge o valor médio.

**Exercício 26.** Considere a função  $g$  definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + e^{2x-2} & , x \leq 1 \\ \frac{2}{1+\ln x} & , x > 1 \end{cases}$$

Justifique que existe um ponto no intervalo  $[-1, 3]$  onde a função atinge o seu valor médio.

**Exemplo 80.** Seja  $F$  o integral indefinido no intervalo  $[1, x]$  dado por

$$F(x) = \int_1^x t^3 dt.$$

Determine-se a sua derivada, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo Integral. A função integranda  $f(t) = t^3$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , pois trata-se de uma polinómio, logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral,  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e a sua derivada é dada por:

$$F'(x) = x^3.$$

Alternativamente, podemos calcular o integral indefinido primeiro:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x t^3 dt = \left[ \frac{t^4}{4} \right]_1^x \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

E, de seguida, derivar o resultado:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left( \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \right)' \\ &= \frac{1}{4} (x^4)' - \left( \frac{1}{4} \right)' \\ &= \frac{1}{4} 4x^3 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

o que confirma o resultado obtido pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

**Exemplo 81.** Seja, agora, o integral indefinido no intervalo  $[1, x]$ , com  $x > 0$ , dado por

$$F(x) = \int_1^x \frac{\text{sen } t}{t} dt.$$

A função  $\frac{\text{sen } t}{t}$  é contínua em  $\mathbb{R}^+$ , logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral,  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^+$  e a sua derivada é dada por

$$F'(x) = \frac{\text{sen } x}{x}.$$

Ao contrário do exemplo anterior, não existe nenhuma forma familiar de primitivar a função integranda, logo esta é a única forma simples de derivar o integral indefinido  $F$ .

O Teorema Fundamental do Cálculo Integral pode ser generalizado ao caso em que um ou ambos os extremos de integração do integral indefinido são funções de  $x$ . Para tal, recorre-se ao Teorema da Derivação da Função Composta.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Seja  $g$  diferenciável em  $c$  e  $F$  diferenciável em  $g(c)$ . Então a composta  $H(x) = F(g(x))$  é diferenciável em  $c$  e  $H'(c) = F'(g(c))g'(c)$ .

Consideremos primeiro o caso em que apenas o extremo superior de integração é uma função de  $x$ :

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt.$$

Neste caso,  $H$  é a composta das funções  $F$  e  $g$ , em que  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ :

$$\begin{aligned} H(x) &= F(g(x)) \\ &= \int_a^{g(x)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral,  $F$  é diferenciável nesse intervalo e  $F'(x) = f(x)$ . Sendo  $g$  uma função diferenciável num intervalo  $I$ , tal que  $g(I) \subseteq [a, b]$ , então, pelo Teorema da Derivação da Função Composta, conclui-se que a função composta  $H$  é diferenciável em  $I$  e a sua derivada vem dada por

$$\begin{aligned} H'(x) &= (F(g(x)))' \\ &= F'(g(x)) g'(x) \\ &= f(g(x)) g'(x). \end{aligned}$$

**Exemplo 82.** Justifique-se a diferenciabilidade da seguinte função e determine-se a sua derivada:

$$H(x) = \int_1^{x^2} e^{\sqrt{t}} dt.$$

A função  $H$  é a composta das funções  $F$  e  $g$ , em que

$$F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t}} dt \text{ e } g(x) = x^2.$$

A função integranda  $f(t) = e^{\sqrt{t}}$  é contínua em  $\mathbb{R}_0^+$ , logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral,  $F$  é diferenciável nesse intervalo e  $F'(x) = f(x) = e^{\sqrt{x}}$ .

A função  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , pois trata-se de uma função polinomial, e  $g'(x) = 2x$ .

Assim,  $H$  é diferenciável em  $\mathbb{R}_0^+$  e a sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} H'(x) &= f(g(x)) g'(x) \\ &= f(x^2) 2x \\ &= e^{\sqrt{x^2}} 2x \\ &= 2e^{|x|} x. \end{aligned}$$

No caso do extremo inferior de integração ser uma função de  $x$ :

$$H(x) = \int_{g(x)}^a f(t) dt$$

pode aplicar-se a mesma ideia anterior, trocando primeiro os dois extremos de integração, ou seja:

$$H(x) = \int_{g(x)}^a f(t) dt = - \int_a^{g(x)} f(t) dt.$$

Considere-se agora que ambos os extremos de integração são funções de  $x$ :

$$H(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt.$$

Neste caso, decompondo o integral em duas somas, aplicam-se os dois casos anteriores:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \\ &= \int_{g(x)}^c f(t) dt + \int_c^{h(x)} f(t) dt \\ &= - \int_c^{g(x)} f(t) dt + \int_c^{h(x)} f(t) dt, \end{aligned}$$

com  $c$  uma constante qualquer.

**Exemplo 83.** Considere-se a função  $H$  definida em  $]1, +\infty[$  por

$$H(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\ln x} \frac{e^t}{t} dt,$$

Ora,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{\sqrt{x}}^{\ln x} \frac{e^t}{t} dt \\ &= \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{e^t}{t} dt + \int_2^{\ln x} \frac{e^t}{t} dt \\ &= - \int_2^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt + \int_2^{\ln x} \frac{e^t}{t} dt. \end{aligned}$$

O primeiro integral é a composta das funções  $F$  e  $g$  e o segundo é a composta de  $F$  e  $h$ , em que

$$F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{t} dt, \quad g(x) = \sqrt{x} \text{ e } h(x) = \ln x.$$

A função integranda  $f(t) = \frac{e^t}{t}$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral,  $F$  é diferenciável nesse intervalo e

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

As funções  $g$  e  $h$  são diferenciáveis em  $\mathbb{R}^+$  e

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ e } h'(x) = \frac{1}{x}$$

com  $x > 1$ .

Assim,  $H$  é diferenciável em  $]1, +\infty[$  e a sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} H'(x) &= -f(g(x))g'(x) + f(h(x))h'(x) \\ &= -f(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} + f(\ln x)\frac{1}{x} \\ &= -\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{e^{\ln x}}{\ln x}\frac{1}{x} \\ &= -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x} + \frac{1}{\ln x}. \end{aligned}$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo Integral, sendo  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  tem-se

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x),$$

ou seja, o integral indefinido de  $f$  no intervalo  $[a, x]$ , com  $x \in [a, b]$  é, então, uma primitiva da função  $f$ :

$$\int_a^x f(t) dt = P(f(x)) + C.$$

Esta igualdade é a base do resultado seguinte, que faz a ligação entre a integração e a primitivação.

**Teorema 25** (Fórmula de Barrow). *Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  e  $F$  uma sua primitiva. Então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Demonstração.* Se  $f$  contínua em  $[a, b]$  e  $F$  é uma sua primitiva, então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Para  $x = a$  vem:

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C \Leftrightarrow 0 = F(a) + C \Leftrightarrow C = -F(a)$$

Logo

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

e conseqüentemente

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

**Exercício 27.** Justifique a diferenciabilidade das seguintes funções e calcule as suas derivadas:

1.  $F(x) = \int_1^x e^{2t} dt;$
2.  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^4} dt;$
3.  $F(x) = \int_1^{2x^2} \frac{1}{1+t^4} dt;$
4.  $F(x) = \int_{e^{2x}}^{4x} \cos(t^3) dt.$

□

É usual escrever-se  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$  ficando a fórmula de Barrow com a forma:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

A Fórmula de Barrow também é válida no caso mais geral de qualquer função  $f$  integrável e primitivável em  $[a, b]$ .

### 3.5 Técnicas de Integração

#### 3.5.1 Integração por partes

O integral de uma certa função integranda, cujo processo de resolução da primitiva da função precise de recorrer à primitivação por partes, pode ser resolvido utilizando primeiro o método de primitivação por partes e depois a fórmula de Barrow.

**Exemplo 84.** Determine-se o integral

$$\int_0^1 xe^{2x} dx.$$

Sabendo que

$$P(xe^{2x}) = x \frac{1}{2} e^{2x} - P\left(1 \times \frac{1}{2} e^{2x}\right)$$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{2x} &\rightarrow g(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} P(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} e^{2x} + C \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{2x} dx &= \left[ \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 - \left( 0 - \frac{1}{4} e^0 \right) \\ &= \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

Alternativamente, em vez de resolver a primitiva da função como cálculo auxiliar, podemos utilizar a integração por partes, que é bastante semelhante ao método de primitivação por partes.

**Teorema 26.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis no intervalo  $[a, b]$  e com derivadas contínuas nesse intervalo<sup>5</sup>. Então,*

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

<sup>5</sup> Sendo  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis no intervalo  $[a, b]$ , logo contínuas nesse intervalo, e as suas derivadas também contínuas no intervalo, tem-se que  $f \cdot g'$  e  $f' \cdot g$  são contínuas em  $[a, b]$  e consequentemente integráveis nesse intervalo.

**Exemplo 85.** Determine-se novamente o integral

$$\int_0^1 x e^{2x} dx$$

utilizando, agora, a integração por partes.

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[ x \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) &= e^{2x} \rightarrow g(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} e^2 - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \times \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

Note-se que  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis e com derivadas contínuas no intervalo  $[0, 1]$ .

### 3.5.2 Integração por substituição

Mais uma vez, o integral de uma certa função integranda, cujo processo de resolução da primitiva da função precise de recorrer à primitivação por substituição, pode ser resolvido utilizando primeiro o método de primitivação por substituição e depois a fórmula de Barrow.

**Exemplo 86.** Determine-se o integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx.$$

Considerando a mudança de variável

$$x = \ln t = g(t),$$

**Exercício 28.** Determine o valor dos seguintes integrais:

1.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x dx;$
2.  $\int_0^1 \ln(x + 1) dx.$

tem-se

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{1+e^x}\right) &= P\left(\frac{1}{1+t} \times \frac{1}{t}\right) \\ &= P\left(\frac{1}{(1+t)t}\right). \end{aligned}$$

Trata-se da primitiva de uma função racional própria. Decompondo a função vem:

$$\frac{1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

Determinemos  $A$  e  $B$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+t)t} &= \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} \\ &= \frac{At + B(1+t)}{(1+t)t} \end{aligned}$$

Logo,

$$1 = At + B(1+t).$$

$$t = 0 \quad : \quad 1 = B$$

$$t = -1 \quad : \quad 1 = -A \Leftrightarrow A = -1$$

Continuando,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{(1+t)t}\right) &= P\left(\frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}\right) \\ &= P\left(\frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t}\right) \\ &= -P\left(\frac{1}{1+t}\right) + P\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= -\ln|1+t| + \ln|t| + C \end{aligned}$$

onde, considerando agora  $t = e^x$ , vem

$$P\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = -\ln|1+e^x| + x + C.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx &= [-\ln|1+e^x| + x]_0^1 \\ &= -\ln|1+e| + 1 - (-\ln|1+1| + 0) \\ &= -\ln(1+e) + 1 + \ln 2. \end{aligned}$$

Alternativamente, em vez de resolver a primitiva da função como cálculo auxiliar, podemos utilizar a integração por substituição.

**Teorema 27.** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  e  $g$  uma função invertível, diferenciável e com derivada contínua em  $J$ , tal que  $g(J) \subseteq [a, b]$ . Então*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt.$$

**Exemplo 87.** Determine-se novamente o integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx.$$

utilizando, agora, a integração por substituição. Considerando a mudança de variável

$$x = \ln t = g(t),$$

tem-se

$$t = e^x = g^{-1}(x).$$

Para obter os novos extremos de integração em relação à variável  $t$ , teremos de substituir, na expressão anterior, os valores de  $x$  pelos extremos de integração iniciais relativos à variável  $x$ , ou seja por 0 e 1. Assim:

$$\begin{aligned} g^{-1}(0) &= e^0 = 1 \\ g^{-1}(1) &= e^1 = e \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx &= \int_1^e \frac{1}{1+t} \times \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^e \frac{1}{(1+t)t} dt. \end{aligned}$$

Aproveitando alguns cálculos do exemplo anterior, vem:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx &= \int_1^e \frac{1}{(1+t)t} dt. \\ &= \int_1^e \left( \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t} \right) dt \\ &= [-\ln|1+t| + \ln|t|]_1^e \\ &= -\ln(1+e) + \ln|e| - (-\ln|1+1| + \ln|1|) \\ &= -\ln(1+e) + 1 + \ln 2. \end{aligned}$$

Note-se que, após a primitivação da função, não foi necessário voltar à variável de integração  $x$ , tal como fizemos no exemplo anterior. Neste caso, os extremos de integração já tinham sido atualizados de acordo com a nova variável de integração  $t$ .

**Exercício 29.** Determine o valor dos seguintes integrais:

1.  $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx;$
2.  $\int_1^8 \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx.$

O resultado seguinte poderá ser bastante útil na resolução de integrais cuja função integranda seja integrável e, par<sup>6</sup> ou ímpar<sup>7</sup> num intervalo fechado  $[-a, a]$ . A demonstração recorre à integração por substituição e ficará como exercício.

**Teorema 28** (Integração de funções pares e ímpares). *Seja  $f$  uma função integrável no intervalo fechado  $[-a, a]$ .*

1. Se  $f$  for uma função par, então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ;
2. Se  $f$  for uma função ímpar, então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

**Exemplo 88.** Considere-se a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = x^2 + 1$ . A função é par no seu domínio, pois  $f(x) = f(-x)$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ . Determinemos o valor do integral

$$\int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx,$$

cuja interpretação geométrica pode ser visualizada na Figura 3.26. Note-se que a área do primeiro quadrante é igual à área do segundo quadrante. Este exemplo ilustra o primeiro resultado do Teorema anterior. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx &= 2 \int_0^2 (x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 \\ &= 2 \left( \frac{8}{3} + 2 - 0 \right) \\ &= \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

**Exemplo 89.** Para ilustrar o segundo resultado do teorema, considere-se a função definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{2},$$

que é uma função ímpar em  $\mathbb{R}$ . Assim,

$$\int_{-2}^2 \frac{x^3}{2} dx = 0.$$

Neste exemplo, poderíamos facilmente resolver o integral e verificar que dá 0. Mas existem outros casos, em que o cálculo do integral não é assim tão simples e o resultado poderá ser bastante útil.

**Exemplo 90.** Determine-se o valor do integral

$$\int_{-3}^3 xe^{x^4} dx.$$

<sup>6</sup> Uma função  $f$  diz-se par se e só se  $f(x) = f(-x)$  para todo o  $x$  pertencente ao domínio de  $f$ .

<sup>7</sup> Uma função  $f$  diz-se ímpar se e só se  $f(x) = -f(-x)$  para todo o  $x$  pertencente ao domínio de  $f$ .

**Exercício 30.** Seja  $f$  uma função integrável no intervalo  $[-a, a]$ .

1. Mostre que

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx;$$

2. Conclua que:

- (a) Se  $f$  for uma função par, então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ;
- (b) Se  $f$  é uma função ímpar, então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

**Exercício 31.** Determine o valor dos seguintes integrais:

1.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ;
2.  $\int_{-1}^1 x\sqrt{9-x^4} dx$ .

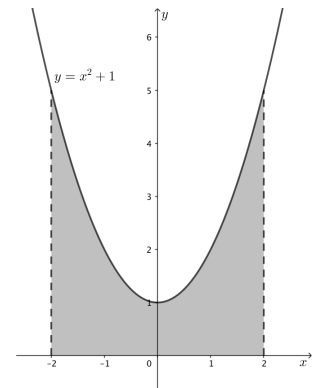


Figura 3.26: Área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abcissas, superiormente pelo gráfico da função e lateralmente pelas retas  $x = -2$  e  $x = 2$ .

Note-se que se trata de um produto de uma função ímpar ( $x$ ) com uma par ( $e^{x^4}$ ), donde resulta uma função ímpar. Como tal

$$\int_{-3}^3 xe^{x^4} dx = 0.$$

### 3.6 Aplicações do Cálculo Integral

#### 3.6.1 Cálculo de áreas

Como já vimos, o integral de uma função integranda  $f$  não negativa, com extremos de integração  $a$  e  $b$

$$\int_a^b f(x) dx,$$

interpreta-se geometricamente como a área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico de  $f$ , inferiormente pelo eixo das abcissas e lateralmente pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , ou seja,

$$a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x).$$

Consideremos, agora, o cálculo da área de uma região mais geral entre duas curvas, através da seguinte definição.

**Definição 12.** *Sejam  $g$  e  $f$  funções integráveis no intervalo  $[a, b]$ . A área  $A$  da região limitada pelas curvas  $y = g(x)$  e  $y = f(x)$  e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , tal que*

$$a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)$$

*pode calcular-se recorrendo ao seguinte integral definido:*

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

No caso em que as funções  $f$  e  $g$  são não negativas no intervalo  $[a, b]$ , a expressão

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

significa que a área  $A$  entre as duas curvas pode ser obtida subtraindo da área da região abaixo do gráfico da função  $f$ , a área da região abaixo do gráfico da função  $g$  (Figura 3.27).

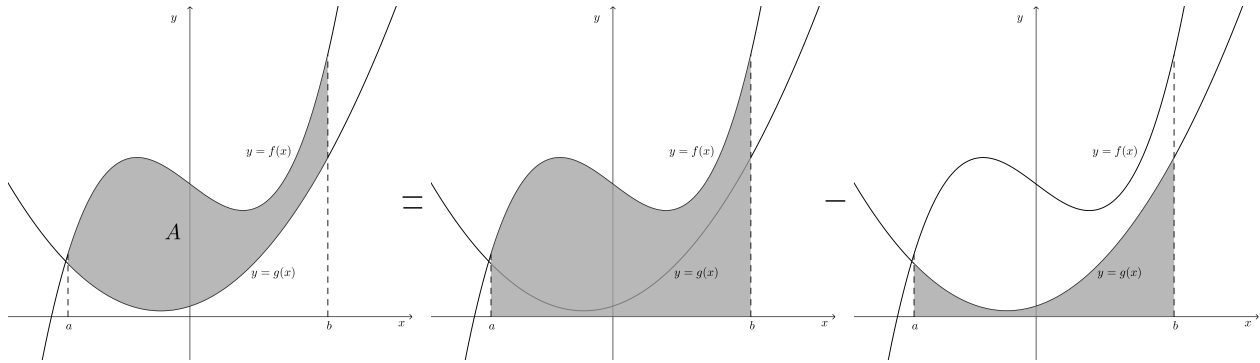


Figura 3.27: Área  $A$  entre duas curvas.

Note-se que apesar de termos feito a interpretação com duas funções não negativas no intervalo  $[a, b]$ , a fórmula continuaria válida para funções parcialmente ou completamente negativas no intervalo (Figura 3.28). Basta pensar que se somarmos uma mesma constante  $C$ , suficientemente grande, a cada uma das funções, ambas passam a ser não negativas e a área da região, que se pretende calcular, não altera (Figura 3.29).

$$A = \int_a^b (f(x) + C - (g(x) + C)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

**Exemplo 91.** Calcule-se a área da região do plano limitada pelas seguintes curvas:

$$y = x^2 - 1, y = x + 1, x = -1 \text{ e } x = 1.$$

A representação gráfica das curvas será um auxílio importante na determinação da expressão da função integranda e dos extremos de integração (Figura 3.30). Colocou-se um segmento de reta vertical (a pontado) na região sombreada para ajudar a perceber quais as curvas que limitam superiormente e inferiormente a região. A extremidade superior do segmento de reta é um ponto da reta  $y = x + 1$  e a extremidade inferior é um ponto da parábola  $y = x^2 - 1$ , logo teremos como função integranda

$$f(x) - g(x) = (x + 1) - (x^2 - 1).$$

Movimentando o segmento de reta para a esquerda, dentro da região sombreada, obtemos o extremo inferior de integração, ou seja,  $x = -1$ , e movimentando para a direita, até ao final da região sombreada, obtemos o extremo superior de integração, ou seja,  $x = 1$ . Assim, a área da região

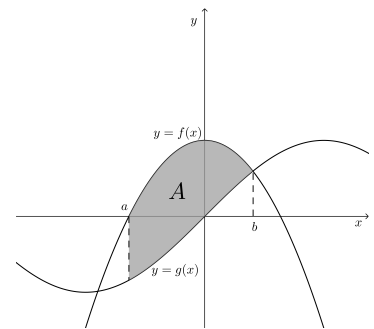


Figura 3.28: Região entre duas curvas.

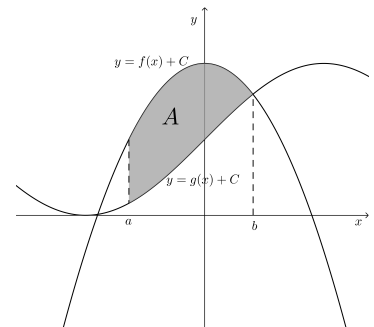


Figura 3.29: Mesma área  $A$  entre duas curvas.

limitada pelas curvas é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 [(x+1) - (x^2-1)] dx \\ &= \int_{-1}^1 (-x^2 + x + 2) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 \\ &= \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

É possível que a região seja limitada superior e/ou inferiormente por duas, ou mais, curvas distintas, e nesses casos, a região tem de ser subdividida em regiões mais pequenas. O exemplo seguinte ilustra essa situação.

**Exemplo 92.** Calcule-se a área da região do plano limitada pelas seguintes curvas:

$$x = y^2 \text{ e } x = y + 2.$$

A representação gráfica encontra-se na Figura 3.31.

Para calcular a área, teremos, para já, de reescrever as curvas  $y$  como função explícita de  $x$ . Ou seja,

$$x = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

e

$$x = y + 2 \Leftrightarrow y = x - 2.$$

Qualquer que fosse o segmento de reta vertical considerado na região sombreada, teríamos como extremidade superior do segmento um ponto da curva  $y = \sqrt{x}$ . Por outro lado, se considerarmos um segmento de reta vertical entre 0 e 1, temos como extremidade inferior um ponto da curva  $y = -\sqrt{x}$  e se considerarmos um segmento de reta entre 1 e 4, temos outra curva como extremidade inferior,  $y = x - 2$ . Esta mudança de curva que limita inferiormente a região leva a que tenhamos de subdividi-la em duas sub-regiões e calcular a área separadamente (Figura 3.32). Assim,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})] dx \\ &= \int_0^1 (2\sqrt{x}) dx \\ &= 2 \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

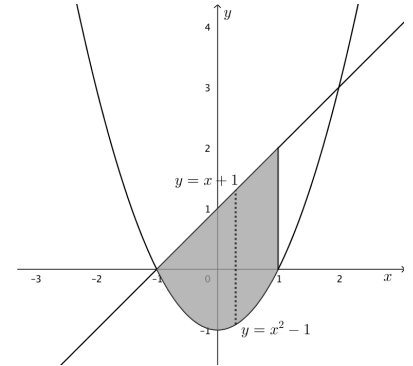


Figura 3.30: Região do plano, limitada pelas curvas

$$y = x^2 - 1, y = x + 1, \text{ e } x = 1.$$

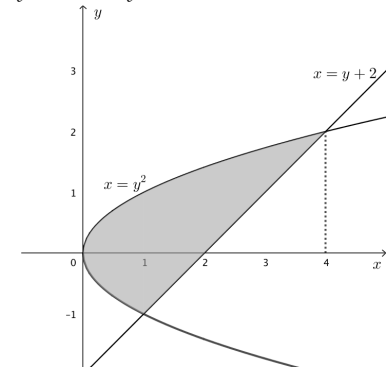


Figura 3.31: Região do plano, limitada pelas curvas

$$x = y^2 \text{ e } x = y + 2.$$

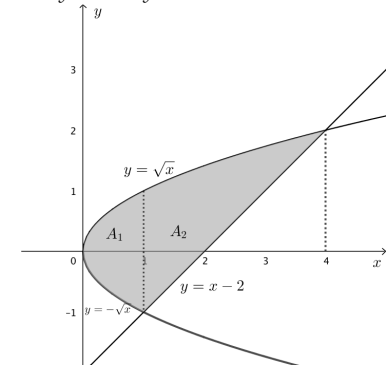


Figura 3.32: Região dividida.

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)] dx \\ &= \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx \\ &= \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^4 \\ &= \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

Logo, a área da região limitada pelas curvas é dada por

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Por vezes, é possível evitar a subdivisão da região em partes, tal como aconteceu no exemplo anterior, fazendo a integração em ordem à variável  $y$  (Figura 3.33).

**Definição 13.** *Sejam  $v$  e  $w$  funções integráveis no intervalo  $[c, d]$ . A área  $A$  da região limitada pelas curvas  $x = v(y)$  e  $x = w(y)$  e pelas retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , tal que*

$$c \leq y \leq d \wedge v(y) \leq x \leq w(y)$$

*pode calcular-se recorrendo ao seguinte integral definido:*

$$A = \int_c^d (w(y) - v(y)) dy.$$

**Exemplo 93.** Calcule-se novamente a área da região do exemplo anterior, limitada pelas seguintes curvas:

$$x = y^2 \text{ e } x = y + 2.$$

A representação gráfica encontra-se na Figura 3.34.

Uma vez que vamos fazer a integração em ordem a  $y$ , colocou-se um segmento de reta, agora horizontal (a ponteadado), na região sombreada para ajudar a definir as curvas que limitam superiormente (mais à direita) e inferiormente (mais à esquerda) a região. Qualquer que fosse o segmento de reta horizontal, a extremidade direita do segmento seria sempre um ponto da reta  $x = y + 2$  e a extremidade esquerda seria sempre um ponto da parábola  $x = y^2$ , logo teremos como função integranda

$$w(y) - v(y) = (y + 2) - (y^2).$$

Movimentando o segmento de reta para baixo, dentro da região sombreada, obtemos o extremo inferior de integração, ou seja,  $y = -1$ , e movimentando para cima, até ao final da região sombreada, obtemos o extremo

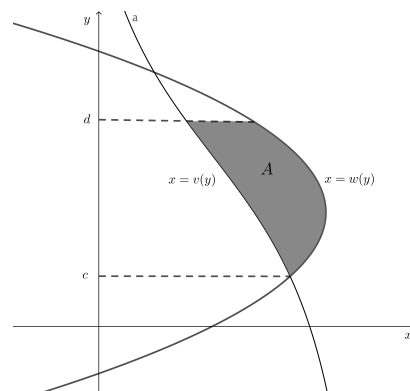


Figura 3.33: Área  $A$  entre duas curvas.

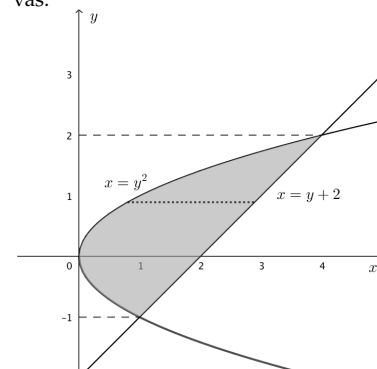


Figura 3.34: Região do plano, limitada pelas curvas  $x = y^2$  e  $x = y + 2$ .

superior de integração, ou seja,  $y = 2$ . Assim, a área da região limitada pelas curvas é dada por

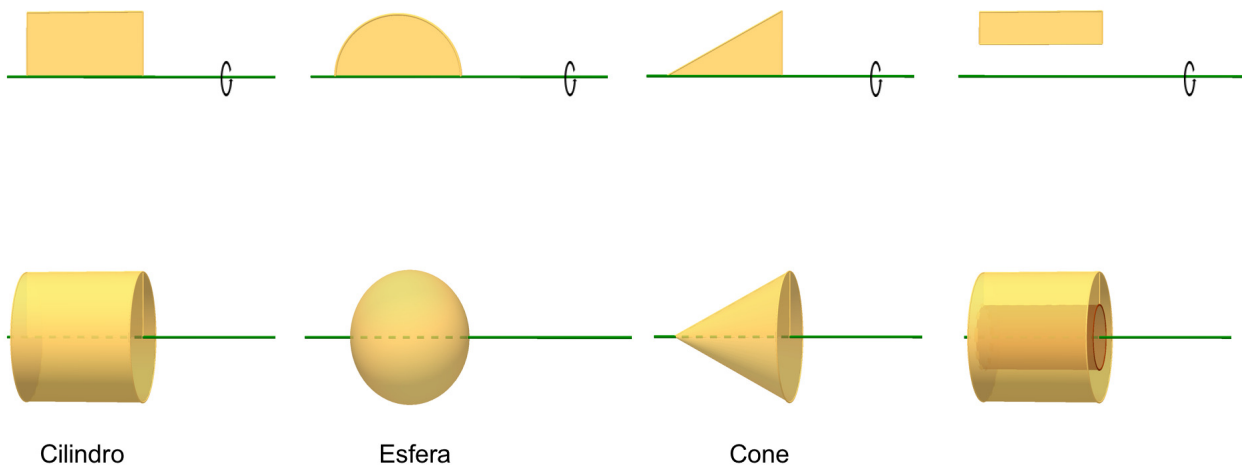
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [(y+2) - (y^2)] dy \\ &= \int_{-1}^2 (-y^2 + y + 2) dy \\ &= \left[ -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-1}^2 \\ &= \left( -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

**Exercício 32.** Represente graficamente e calcule a área da região do plano limitada pelas seguintes curvas:

1.  $y - 1 = x^2$  e  $x + y = 1$ ;
2.  $y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$  e  $y = \cos x$ ;
3.  $y = |x| - 1$  e  $y = -x^2 + 1$ ;
4.  $y = x^3$ ,  $y = -x$  e  $y = 1$ ;
5.  $y = \frac{x^3}{4}$ ,  $y = \sqrt{x+2}$  e  $y = 0$ ;
6.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$  e  $y = e$ ;
7.  $y = e^x$ ,  $y = -x + e + 1$ ,  $x = 0$  e  $y = 0$ .

### 3.6.2 Cálculo de volumes de sólidos de revolução

Um sólido de revolução é um sólido que é gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta que se encontra no mesmo plano da região. Essa reta diz-se o eixo de revolução. Existem muitos sólidos conhecidos que são desse tipo (Figura 3.35).



Para os sólidos de revolução ilustrados, conhecemos fórmulas que nos permitem calcular o seu volume. A Figura 3.36 indica o volume  $V$  para cada um dos sólidos de revolução da figura anterior. Note-se que, no último caso, a fórmula corresponde ao volume do cilindro exterior (com o raio da base maior) subtraído do volume do cilindro interior (com o raio da base menor).

Figura 3.35: Alguns sólidos de revolução.

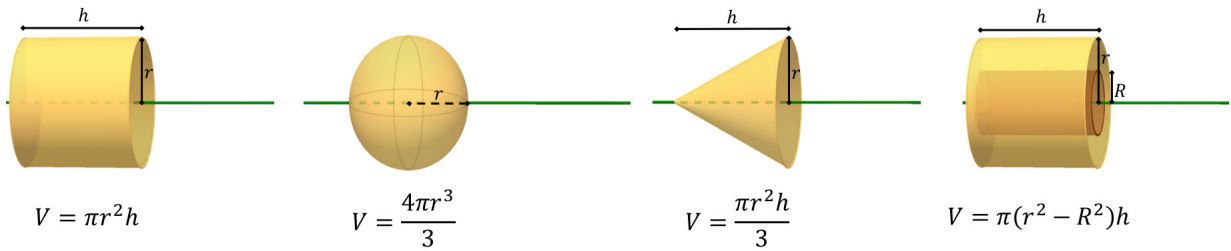


Figura 3.36: Volumes de alguns sólidos de revolução.

No caso de uma região do plano limitada superiormente pelo gráfico de uma função  $f$ , integrável em  $[a, b]$ , inferiormente pelo eixo das abcissas e lateralmente pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , ou seja,

$$a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)$$

(Figura 3.1 na página 47), o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação dessa região em torno do eixo dos  $xx$  (Figura 3.37), é dado por:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

A interpretação deste integral é similar à interpretação do integral para o cálculo da área. Resumidamente, para obter uma aproximação do volume de um sólido de revolução, podemos pensar em decompor o intervalo  $[a, b]$  em vários subintervalos, em cada um deles fazer a rotação do retângulo em torno do eixo dos  $xx$ , obtendo-se vários cilindros, e, por fim, somar os volumes de todos os cilindros.

A Figura 3.38 ilustra um exemplo, em que se considera um sub-intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  e faz-se a rotação do retângulo, de base  $x_i - x_{i-1}$  e altura  $f(x_i)$ , em torno do eixo das abcissas, obtendo-se um cilindro. O volume desse cilindro, de altura  $x_i - x_{i-1}$  e área da base  $\pi f^2(x_i)$  é dado por

$$\pi f^2(x_i) (x_i - x_{i-1}).$$

A Figura 3.39 ilustra o mesmo exemplo, em que se decompõe o intervalo  $[a, b]$  em 15 subintervalos e faz-se a rotação de cada um dos retângulos em torno do eixo das abcissas. O somatório dos volumes dos 15 cilindros obtidos é dado por

$$\sum_{i=1}^{15} \pi f^2(x_i) (x_i - x_{i-1}).$$

No limite, quando o número de subintervalos tende para infinito, ou seja, o comprimento de cada um dos subintervalos tende para zero, é de esperar a obtenção do volume do sólido de revolução. Assim, informalmente, podemos afirmar que  $\int_a^b$  representa o somatório para  $x$  entre  $a$  e  $b$ ,  $\pi f^2(x)$  o raio das bases dos cilindros e  $dx$  as suas alturas.

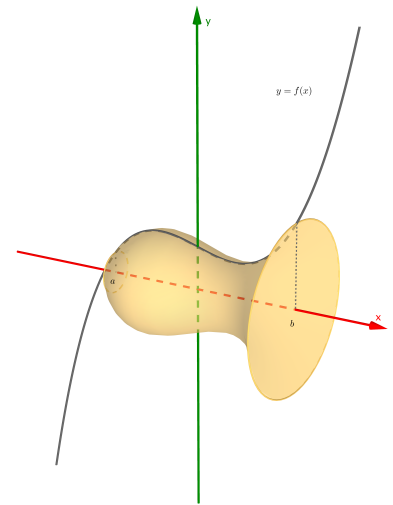


Figura 3.37: Sólido de revolução.

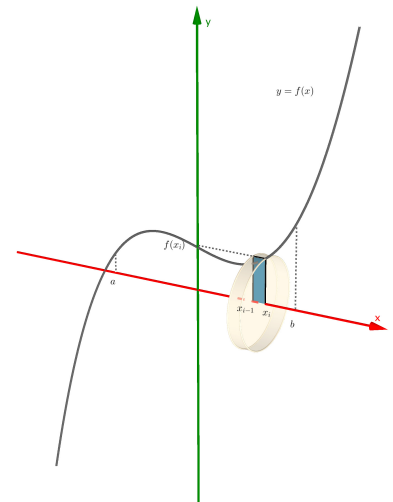


Figura 3.38: Sólido de revolução gerado pela rotação do retângulo de base  $x_i - x_{i-1}$  e altura  $f(x_i)$  em torno do eixo das abcissas.

**Exemplo 94.** Determine-se o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos  $xx$  da região definida por

$$4 \leq x \leq 16 \wedge 0 \leq y \leq 2\sqrt{x}.$$

A região e o respectivo sólido de revolução podem ser visualizados na Figura 3.40. O volume vem dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_4^{16} \pi (2\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_4^{16} 4x dx \\ &= 4\pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_4^{16} \\ &= 2\pi (16^2 - 4^2) \\ &= 480\pi. \end{aligned}$$

Também no cálculo de volumes de revolução, pode ser necessário subdividir a região que irá gerar o sólido, em regiões mais pequenas. O exemplo seguinte ilustra essa situação.

**Exemplo 95.** Determine-se o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos  $xx$  da região limitada pelas seguintes curvas:

$$y = 0, y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \text{ e } y = x^3.$$

A região e o respectivo sólido de revolução podem ser visualizados na Figura 3.41. Tendo em conta que a região, para  $x \in [0, 1]$ , é limitada superiormente pelo gráfico da função  $y = x^3$ , e para  $x \in [1, 3]$ , é limitada superiormente pelo gráfico da função  $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ , subdividimos a região em duas sub-regiões e calculamos o volume separadamente.

Assim, o volume  $V_1$  do sólido, gerado pela rotação de  $A_1$  em torno do eixo das abcissas, vem dado por:

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 \pi (x^3)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 x^6 dx \\ &= \pi \left[ \frac{x^7}{7} \right]_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{1}{7} - 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

e o volume  $V_2$  do sólido, gerado pela rotação de  $A_2$ , vem dado por:

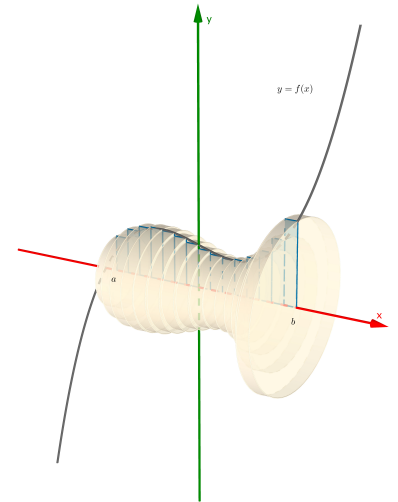


Figura 3.39: Sólido de revolução gerado pela rotação de vários retângulos

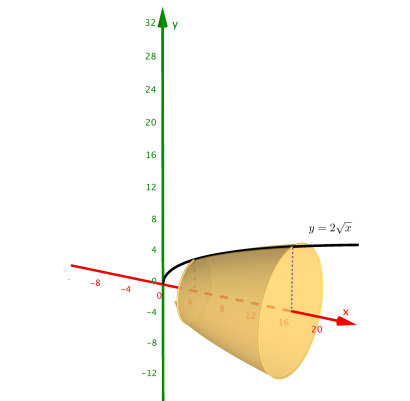
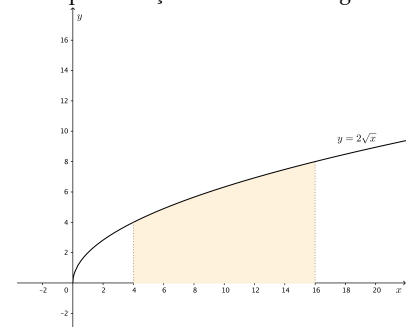


Figura 3.40: Sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo das abcissas da região definida por  $4 \leq x \leq 16$  e  $0 \leq y \leq 2\sqrt{x}$ .

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \int_1^3 \pi \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 dx \\
 &= \pi \int_1^3 \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 dx \\
 &= -2\pi \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 dx \\
 &= -2\pi \left[ \frac{\left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^3}{3} \right]_1^3 \\
 &= -2\pi \left(0 - \frac{1}{3}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{3} = \frac{17\pi}{21}.$$

Note-se que  $V_2$  corresponde ao volume de um cone de altura  $h = 2$  e raio da base  $r = 1$ , cuja fórmula (ver Figura 3.36) é dada por  $V_2 = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi}{3}$ , o que confirma parte do resultado.

Consideremos, agora, o volume de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região entre duas curvas, através da seguinte definição.

**Definição 14.** *Sejam  $g$  e  $f$  funções integráveis e não negativas no intervalo  $[a, b]$ . O volume  $V$  de um sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos  $xx$ , da região limitada pelas curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ , e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , tal que*

$$a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)$$

*pode calcular-se recorrendo ao seguinte integral definido:*

$$V = \int_a^b \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$

Saliente-se que esta definição é definida para funções não negativas no intervalo  $[a, b]$  e, neste caso, a expressão

$$V = \int_a^b \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx - \int_a^b \pi g^2(x) dx$$

significa que o volume  $V$  do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos  $xx$ , da região entre as duas curvas, pode ser obtido, subtraindo do volume do sólido gerado pela rotação da região abaixo do gráfico da função  $f$ , o volume do sólido gerado pela rotação da região abaixo do gráfico da função  $g$  (Figura 3.42).

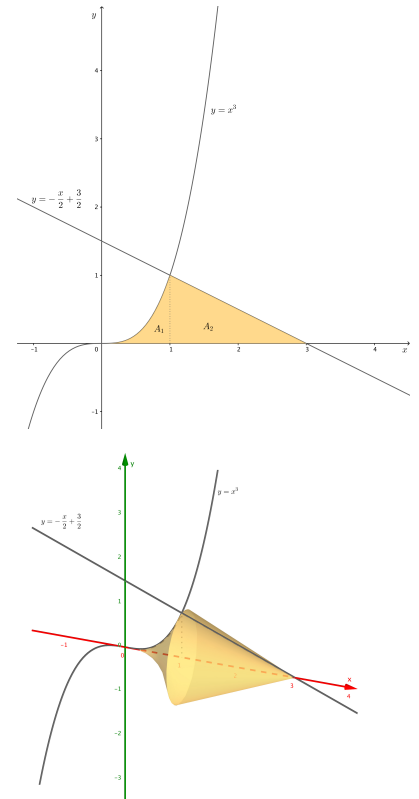


Figura 3.41: Sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo das abcissas da região limitada pelas curvas  $y = 0, y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$  e  $y = x^3$ .

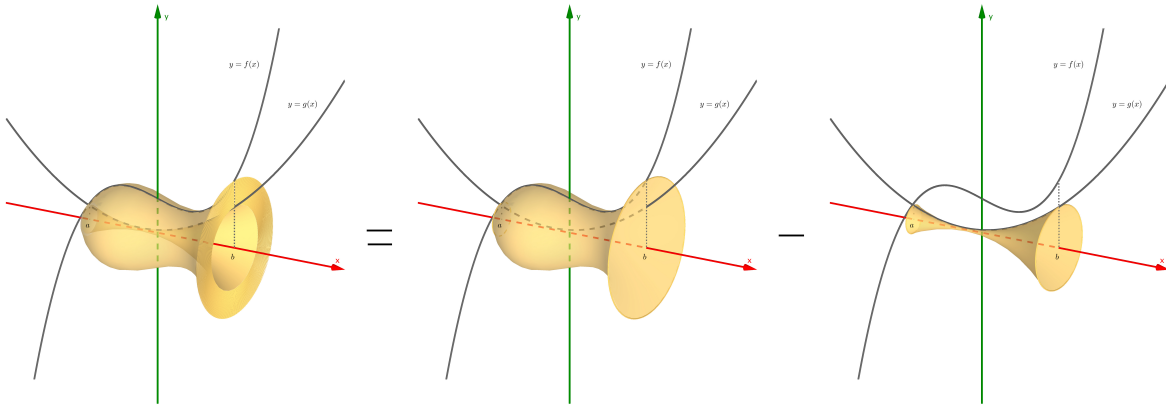


Figura 3.42: Sólido gerado pela rotação, em torno do eixo do  $xx$ , da região entre os gráficos das funções  $f$  e  $g$ .

**Exemplo 96.** Determine-se o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos  $xx$  da região limitada pelas seguintes curvas:

$$x = 0, x = 2, y = 1 + x^2 \text{ e } y = x.$$

À semelhança do cálculo de áreas, a representação gráfica das curvas é extremamente importante para a definição do integral. A região e o respectivo sólido de revolução podem ser visualizados na Figura 3.43. O volume é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi \left[ (1 + x^2)^2 - (x)^2 \right] dx \\ &= \pi \int_0^2 (1 + 2x^2 + x^4 - x^2) dx \\ &= \pi \int_0^2 (1 + x^2 + x^4) x dx \\ &= \pi \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 \\ &= \pi \left( 2 + \frac{8}{3} + \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{166}{15} \pi. \end{aligned}$$

Até ao momento, considerámos sempre o eixo das abcissas como o eixo de revolução, no entanto, também poderemos gerar sólidos fazendo a rotação de uma certa região em torno de qualquer outro eixo, horizontal ou vertical, em particular, o eixo das ordenadas.

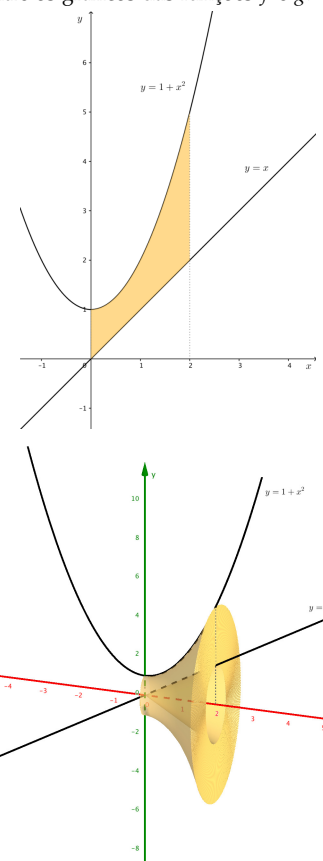


Figura 3.43: Sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo das abcissas da região limitada pelas curvas  $x = 0, x = 2, y = 1 + x^2$  e  $y = x$ .

**Definição 15.** Sejam  $v$  e  $w$  funções integráveis e não negativas no intervalo  $[c, d]$ . O volume  $V$  de um sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos  $yy$ , da região limitada pelas curvas  $x = v(y)$  e  $x = w(y)$ , e pelas retas  $y = c$  e  $y = d$ , tal que

$$c \leq y \leq d \wedge v(y) \leq x \leq w(y)$$

pode calcular-se recorrendo ao seguinte integral definido:

$$V = \int_c^d \pi (w^2(y) - v^2(y)) dy.$$

**Exemplo 97.** Determine-se o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos  $yy$  da região limitada pelas curvas

$$y = e, x = 0 \text{ e } y = e^x.$$

A região e o respetivo sólido de revolução podem ser visualizados na Figura 3.44. Para definir a função integranda, primeiro temos de reescrever  $y = e^x$ , como  $x = \ln y$ . A região está compreendida entre  $y = 1$  e  $y = e$ , ou seja,  $1 \leq y \leq e$ , e  $x = 0$  e  $x = \ln y$ , ou seja,  $0 \leq x \leq \ln y$ . Assim, o volume vem dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^e \pi (\ln y)^2 dy \\ &= \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy \\ &= \pi \left[ x \left( (\ln y)^2 - 2 \ln y + 2 \right) \right]_1^e \\ &= \pi (e(1 - 2 + 2) - (0 - 0 + 2)) \\ &= \pi (e - 2). \\ &\simeq 2,2565. \end{aligned}$$

**Exemplo 98.** Considere-se novamente a região limitada do Exemplo 95 (página 85), ou seja, a região limitada pelas seguintes curvas:

$$y = 0, y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \text{ e } y = x^3.$$

Determine-se o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, agora, em torno do eixo dos  $yy$ .

Podemos visualizar o sólido de revolução na Figura 3.45. Refira-se que apesar da região ser a mesma do Exemplo 95, os sólidos de revolução gerados pela rotação em torno de cada um dos eixos são diferentes, e, naturalmente, os respetivos volumes não terão que ser iguais. Neste caso, em que vamos fazer a rotação em torno do eixo das ordenadas, não temos de subdividir a região. Reescrevendo as duas curvas como  $x$  em função de  $y$  vem:

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -2y + 3$$

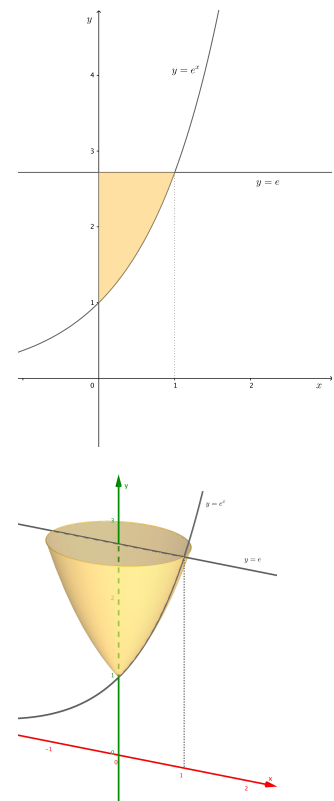


Figura 3.44: Sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo das abcissas da região limitada pelas curvas  $y = e, x = 0$  e  $y = e^x$ .

e

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

Assim, o volume  $V$  do sólido, gerado pela rotação da região em torno do eixo das ordenadas, vem dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \left( (-2y + 3)^2 - (\sqrt[3]{y})^2 \right) dy \\ &= \pi \int_0^1 \left( 4y^2 - 12y + 9 - y^{\frac{2}{3}} \right) dy \\ &= \pi \left[ \frac{4y^3}{3} - 6y^2 + 9y - \frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} \right]_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{4}{3} - 6 + 9 - \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{56\pi}{15}. \end{aligned}$$

Para finalizar esta secção, resta alertar para os casos em que as funções são negativas nos intervalos de integração. Ao contrário do cálculo das áreas, em que a deslocação da região para a parte positiva, através da soma a cada uma das funções de uma constante suficientemente grande, não altera o valor da área, no caso dos sólidos de revolução, o valor do volume pode alterar, uma vez que os sólidos gerados poderão ser diferentes. Veja-se o seguinte exemplo:

**Exemplo 99.** Considere-se a região limitada pelas seguintes curvas (cuja representação gráfica se encontra na Figura 3.46):

$$y = -2x \text{ e } y = -x^2$$

e determine-se a sua área.

A extremidade superior do segmento de reta representado na região é um ponto da parábola  $y = -x^2$  e a extremidade inferior é um ponto da reta  $y = -2x$ , logo teremos como função integranda

$$f(x) - g(x) = -x^2 - (-2x) = -x^2 + 2x.$$

Movimentando o segmento de reta para a esquerda, dentro da região sombreada, obtemos o extremo inferior de integração, ou seja,  $x = 0$ , e movimentando para a direita, até ao final da região sombreada, obtemos o extremo superior de integração, ou seja,  $x = 2$ . Assim, a área da região limitada pelas curvas é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \left( -x^2 + 2x \right) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 4 \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

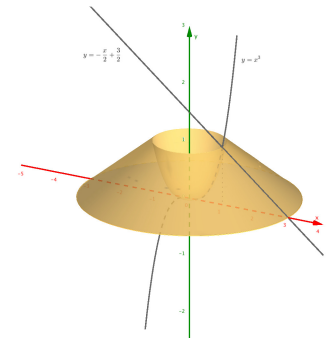


Figura 3.45: Sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo das ordenadas da região limitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$  e  $y = x^3$ .

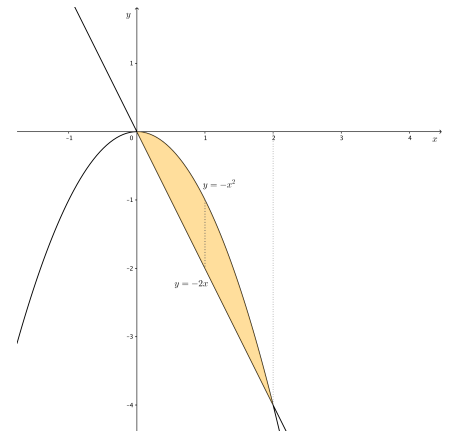


Figura 3.46: Região do plano, limitada pelas curvas  $y = -2x$  e  $y = -x^2$ .

Se somarmos, por exemplo, 4 unidades a cada uma das funções:

$$y = -2x + 4 \text{ e } y = -x^2 + 4,$$

a área da região definida por estas curvas (Figura 3.47) é, naturalmente, igual à área da região original.

No entanto, facilmente verificamos que o sólido gerado pela rotação da região da Figura 3.46 em torno do eixo dos  $xx$  é diferente do sólido gerado pela rotação da região da Figura 3.47 em torno do mesmo eixo, dando volumes diferentes. Assim, para obter o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região original em torno do eixo dos  $xx$ , devemos multiplicar ambas as funções por  $-1$ , de modo a originar uma reflexão em relação ao eixo, passando a ter funções não negativas no intervalo de integração (Figura 3.48). Vem, então:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi \left( (2x)^2 - (x^2)^2 \right) dx \\ &= \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left[ \frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 \\ &= \pi \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{64\pi}{15}. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos pensar que o sólido é obtido subtraindo do volume do sólido gerado pela rotação da região acima do gráfico da função  $y = -2x$ , o volume do sólido gerado pela rotação da região acima do gráfico da função  $y = -x^2$  (Figura 3.49). O volume  $V$  é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi \left( (-2x)^2 - (-x^2)^2 \right) dx \\ &= \int_0^2 \pi \left( (2x)^2 - (x^2)^2 \right) dx, \end{aligned}$$

que já foi calculado anteriormente.

### 3.6.3 Cálculo de comprimentos de arco

Outra aplicação do Cálculo Integral é o cálculo de comprimentos de arcos associados aos gráficos de funções entre dois pontos da curva (Figura 3.50).

Vamos apenas considerar gráficos de funções diferenciáveis num intervalo  $[a, b]$  e com derivada contínua nesse intervalo. A ideia subjacente ao cálculo do comprimento de arco é, à semelhança das áreas e dos volumes de revolução, decompor o intervalo  $[a, b]$  em vários subintervalos, em

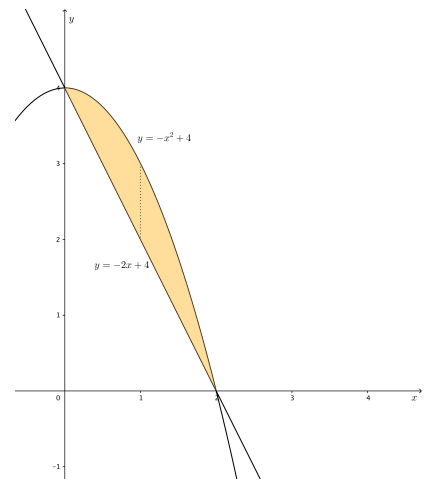


Figura 3.47: Região do plano, limitada pelas curvas  $y = -2x + 4$  e  $y = -x^2 + 4$ .

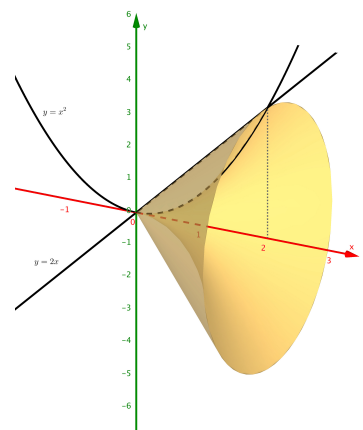
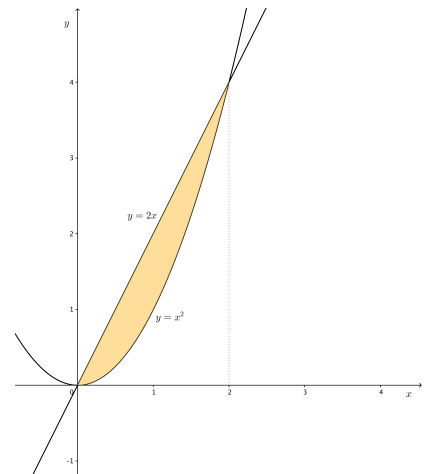


Figura 3.48: Sólido gerado pela rotação, em torno do eixo do  $xx$ , da região entre os gráficos das funções  $y = 2x$  e  $y = x^2$ .

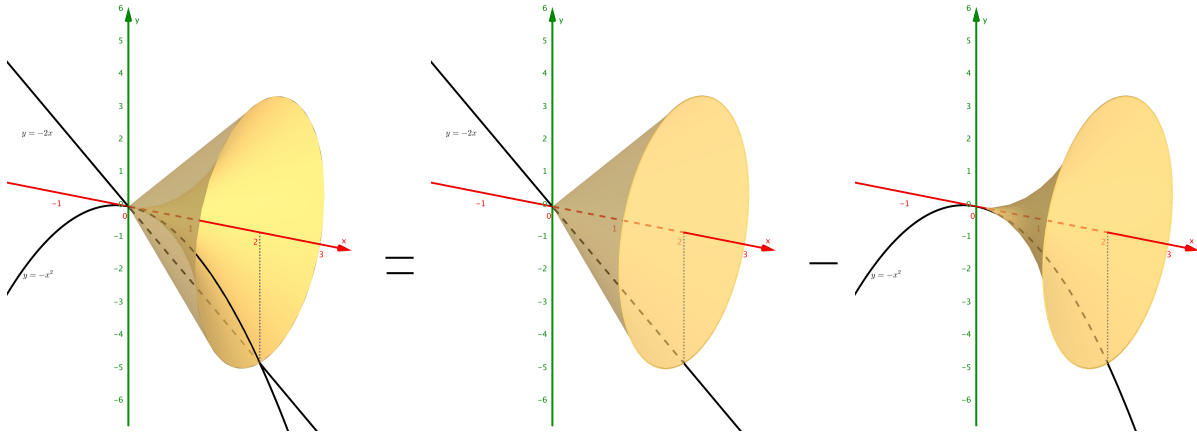


Figura 3.49: Sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos  $xx$ , da região entre os gráficos das funções  $y = -2x$  e  $y = -x^2$ .

cada um deles aproximar o comprimento do arco pelo comprimento do segmento de reta e, por fim, somar todos os comprimentos dos segmentos de reta, obtendo-se uma aproximação do comprimento de arco (Figura 3.51).

A Figura 3.52 ilustra um exemplo em que o comprimento do arco associado ao gráfico da função  $y = f(x)$  entre os pontos  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  e  $(x_i, f(x_i))$  é aproximado ao comprimento do segmento de reta que une esses dois pontos. Como sabemos, o comprimento do segmento de reta é dado por

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Considerando agora a decomposição do intervalo  $[a, b]$  em 6 subintervalos (Figura 3.51), a soma dos comprimentos de arco é dada por

$$\sum_{i=1}^6 \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

que corresponde a uma aproximação do comprimento de arco.

De modo a chegarmos ao integral definido correspondente ao comprimento de arco, lembre-se que, nas condições do Teorema de Lagrange no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , tem-se que existe pelo menos um ponto  $x_i^*$  nesse intervalo tal que

$$f'(x_i^*) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

ou, equivalentemente,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*) (x_i - x_{i-1}).$$

**Exercício 33.** Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos  $xx$  e dos  $yy$  da região definida pelas seguintes curvas:

1.  $x = 0, y = 0$  e  $y = \sqrt{-x + 4}$ ;
2.  $x = 1, y = 0$  e  $y = e^x - 1$ ;
3.  $y = -x^2$  e  $y = x^3$ ;
4.  $y = \sqrt{x + 1}, y = \sqrt{2x}$  e  $x = 0$ .

**Exercício 34.** Seja  $V$  o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo dos  $xx$  da região do plano limitada pelas curvas  $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 2, x = b$ , onde  $0 < b < 2$ . Determine para que valor  $b$  o volume do sólido é igual a 3.

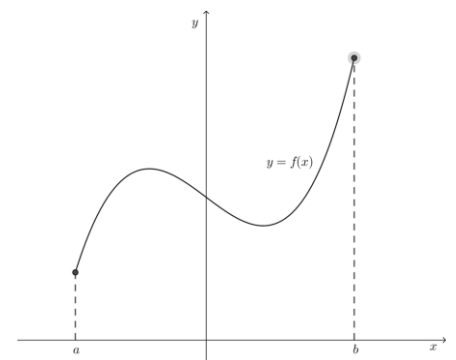


Figura 3.50: Comprimento de arco.

Substituindo na soma anterior, vem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} &= \sum_{i=1}^6 \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(x_i^*) (x_i - x_{i-1})]^2} \\ &= \sum_{i=1}^6 \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 [1 + [f'(x_i^*)]^2]} \\ &= \sum_{i=1}^6 \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

No limite, quando o número de subintervalos tende para infinito, ou seja, o comprimento de cada um dos subintervalos tende para zero, obtém-se o valor exato do comprimento de arco. Em suma, podemos enunciar a seguinte definição:

**Definição 16.** *Seja  $f$  uma função diferenciável no intervalo  $[a, b]$  e com derivada contínua nesse intervalo. O comprimento  $L$  da linha associada ao gráfico da função  $y = f(x)$  entre  $x = a$  e  $x = b$  (isto é entre os pontos  $(a, f(a))$  e  $b, f(b)$ ), pode calcular-se recorrendo ao seguinte integral definido:*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Exemplo 100.** Determine-se o comprimento de arco da curva  $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$  entre os pontos de abcissa  $x = 0$  e  $x = 1$  (Figura 3.53).

A função  $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$  é diferenciável no intervalo  $[0, 1]$  e tem derivada contínua nesse intervalo. A sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)' \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx \\ &= \int_0^1 (1 + x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{(1 + x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \left[(1 + x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \\ &\approx 1.219 \end{aligned}$$

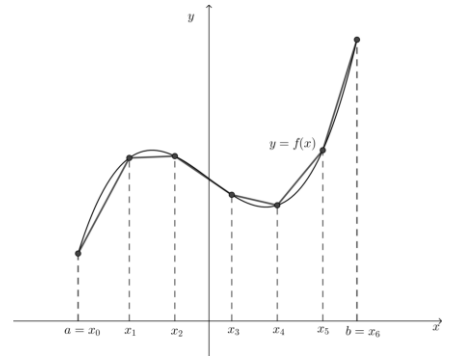


Figura 3.51: Aproximação do comprimento de arco.

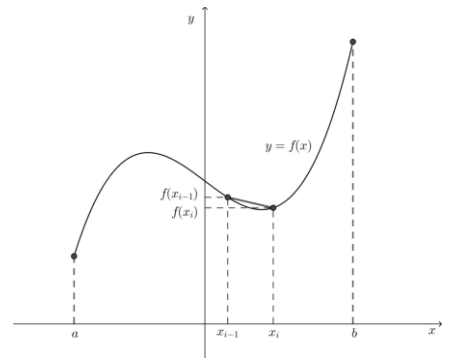


Figura 3.52: Comprimento do segmento de reta que une os pontos  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  e  $(x_i, f(x_i))$ .

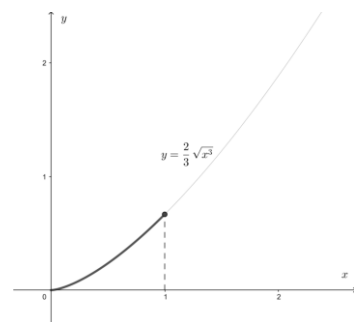


Figura 3.53: Comprimento de arco.

### 3.7 Integrais Impróprios

Recorrendo à noção de **integral impróprio**, a operação de integração pode ser estendida a intervalos não limitados e/ou funções não limitadas no intervalo de integração. Deste modo, podem verificar-se duas situações básicas:

1. Os extremos de integração são infinitos, isto é, o intervalo de integração não é limitado (**Integrais impróprios de 1ª espécie**);
2. A função integranda é não limitada no intervalo de integração (**Integrais impróprios de 2ª espécie**).

Se o intervalo de integração for ilimitado e a função for ilimitada em algum seu sub-intervalo limitado, tem-se um **integral impróprio misto**.

#### 3.7.1 Integrais Impróprios de 1ª espécie

**Definição 17.** Seja  $f$  uma função definida e integrável no intervalo  $[a, +\infty[$ , então a um integral da forma

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

chama-se **integral impróprio de 1ª espécie**. Este integral diz-se **convergente** se e só se existir e for finito o seguinte limite:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral impróprio diz-se **divergente**.

De modo análogo se definiria

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f(x) dx$$

supondo  $f$  uma função definida e integrável no intervalo  $]-\infty, b]$ .

Note-se que sendo  $f$  uma função definida e integrável em  $\mathbb{R}$ , então a um integral da forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

onde  $c$  é um qualquer número real, também se chama integral impróprio de 1ª espécie. Este integral diz-se convergente se

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

forem ambos convergentes e diz-se divergente caso contrário, isto é se pelo menos um destes dois integrais for divergente.

**Exercício 35.** Calcule o comprimento das seguintes curvas:

1.  $y = \sqrt{(x+3)^3}$  entre os pontos de abscissa  $x = 0$  e  $x = 2$ ;
2.  $y = \ln(\cos x)$  entre os pontos de abscissa  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{4}$ .

**Exemplo 101** (Integral de Dirichlet de 1ª espécie).

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente} & , \text{ se } p > 1 \\ \text{divergente} & , \text{ se } p \leq 1 \end{cases}$$

### 3.7.2 Integrais Impróprios de 2ª espécie

**Definição 18.** Seja  $f$  uma função definida e integrável em  $[a, b[$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ , então

$$\int_a^b f(x) dx$$

Chama-se **integral impróprio de 2ª espécie**. Este integral diz-se **convergente** se e só se existir e for finito o seguinte limite:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx$$

Caso contrário, o integral impróprio diz-se **divergente**.

De modo análogo se definiria

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx$$

supondo  $f$  uma função definida e integrável no intervalo  $]a, b]$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

Note-se que sendo  $f$  uma função definida e integrável em  $[a, b] \setminus \{c\}$  e  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ , com  $c \in ]a, b[$ , então a um integral da forma

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

também se chama integral impróprio de 2ª espécie. Este integral diz-se convergente se

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx$$

forem ambos convergentes e é divergente caso contrário, isto é se pelo menos um destes dois integrais for divergente.

*Observação 1.* Caso haja “problemas” em ambos os extremos do intervalo, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx,$$

com  $d \in ]a, b[$ . É convergente se ambos o forem (o seu valor é a soma) e divergente caso contrário.

**Exemplo 102** (Integral de Dirichlet de 2ª espécie).

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente} & , \text{ se } p < 1 \\ \text{divergente} & , \text{ se } p \geq 1 \end{cases}$$

### 3.7.3 *Integrais Impróprios Mistos*

No caso de um **integral impróprio misto**, diz-se que é **convergente** se todos os integrais impróprios em que foi decomposto o forem e o seu valor será a soma do valor desses integrais.

Se algum dos integrais impróprios em que foi decomposto for divergente, o **integral misto é divergente**.

## 3.8 Exercícios Propostos

1. Calcule os seguintes integrais:

(a)  $\int_{-1}^2 (x^2 + 3x) dx;$

(b)  $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx;$

(c)  $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1 - \operatorname{sen}(3x)}{3x + \cos(3x)} dx;$

(d)  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx.$

2. Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{3(x-1)} - 1 & , x < 1 \\ \sqrt{x-1} & , x \geq 1 \end{cases}.$$

(a) Calcule  $\int_{-1}^2 f(x) dx;$

(b) Calcule o valor médio de  $f$  no intervalo  $[-1, 2]$ . Justifique que existe um ponto nesse intervalo onde a função  $f$  atinge o valor médio.

3. Considere a função definida por

$$g(x) = \cos(4x).$$

(a) Determine a expressão de  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ , com  $x \in [0, \frac{\pi}{12}]$ ;

(b) Calcule o valor médio de  $g$  no intervalo  $[0, \frac{\pi}{12}]$ . Justifique que existe um ponto nesse intervalo onde a função  $g$  atinge o valor médio.

4. Considere a função  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2x} & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

(a) Determine a expressão de  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , com  $x \in [0, 2]$ . O que pode concluir quanto a continuidade de  $F$ ?

(b) Calcule o valor médio de  $f$  no intervalo  $[0, 2]$ . Justifique que existe um ponto nesse intervalo onde a função  $f$  atinge o valor médio.

5. Considere a função  $g$  definida por  $g(x) = x^2 + |x - 2|$ .
- (a) Determine a expressão de  $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ , com  $x \in [0, 3]$ ;
- (b) Determine o valor médio da função  $g$  no intervalo  $[0, 3]$ . Justifique que existe um ponto nesse intervalo onde a função  $g$  atinge o valor médio.
6. Justifique a diferenciabilidade das seguintes funções e calcule as suas derivadas:
- (a)  $F(x) = \int_0^{x^3-12x} e^{\sqrt[3]{t}} dt$ ;
- (b)  $G(x) = \int_{x^2+1}^{e^{3x}} \frac{1}{1+\ln t} dt$ ;
- (c)  $H(x) = (x+1) \int_{-1}^{\frac{x}{2}} e^{t^2} dt$ .
7. Considere a função

$$F(x) = \int_1^{a \ln x} e^{-t^2} dt.$$

Determine o valor da constante  $a$  de modo a que se verifique  $F'(1) = 2$ .

8. Determine o valor dos seguintes integrais:
- (a)  $\int_{-2}^2 x \sqrt{x+2} dx$ ;
- (b)  $\int_{-1}^0 x \operatorname{arctg}(x+1) dx$ ;
- (c)  $\int_{\frac{1}{16}}^1 \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt{x^3}} dx$ ;
- (d)  $\int_0^1 \frac{e^{4x} + e^{2x}}{e^{4x} + 1} dx$ .
9. Represente graficamente e calcule a área da região do plano limitada pelas seguintes curvas:
- (a)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -\operatorname{sen} x$  e  $x = \pi$ ;
- (b)  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = -\frac{x}{2}$  e  $y = 1$ ;
- (c)  $y = x^2 - 1$  e  $y = \frac{x^2}{2}$ ;
- (d)  $y = |x| - 1$  e  $y = -|x - 1| + 1$ ;
- (e)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 0$  e  $y = 2$ ;
- (f)  $y = \ln x$ ,  $y = -x + e + 1$ ,  $x = 0$  e  $y = 0$ ;
- (g)  $y = -\sqrt{-x}$ ,  $y = -x - 2$  e  $y = 0$ .

10. Considere a região do plano limitada pelos gráficos das funções:

$$x = 0, y = \sqrt{x+1} \text{ e } y = -2x - 2.$$

- (a) Represente graficamente a região e determine a sua área.
- (b) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região em torno do eixo dos  $yy$ .

11. Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos  $xx$  e dos  $yy$  da região definida pelas seguintes curvas:

- (a)  $x = 0, y = 1, y = 8$  e  $y = x^3$ ;
- (b)  $y^2 = x, y = x - 2$  e  $y = 0$  no 4º quadrante;
- (c)  $y + x^2 = 3, y - 2x = 0$  e  $x = 0$  no 1º quadrante;
- (d)  $y = x^2 - 2, y = 4 - x^2$  e  $x = 0$  no 1º quadrante.

12. Calcule o comprimento das seguintes curvas:

- (a)  $y = 3 + \sqrt[3]{x^2}$  entre os pontos de abscissas  $x = 1$  e  $x = 8$ ;
- (b)  $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$  entre os pontos de abscissas  $x = \frac{1}{2}$  e  $x = 2$ .

## 3.9 Soluções dos Exercícios Propostos

1.

- (a)  $\frac{15}{2}$ ;  
 (b)  $\frac{\pi}{8}$ ;  
 (c)  $\frac{1}{3} \ln(1 + \cos 1)$ ;  
 (d) 1.

2.

- (a)  $-\frac{e^{-6}+3}{3}$ ;  
 (b)  $\lambda = -\frac{e^{-6}+3}{9}$ .

3.

- (a)  $G(x) = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(4x)$ ;  
 (b)  $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ .

4.

- (a)  $F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{4} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln|x| & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ;  
 (b)  $\lambda = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$ .

5.

- (a)  $G(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x & , x < 2 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 4 & , x \geq 2 \end{cases}$ ;  
 (b)  $\lambda = \frac{23}{6}$ .

6.

- (a)  $F'(x) = e^{\sqrt[3]{x^3-12x}} (3x^2 - 12)$ ;  
 (b)  $G'(x) = -\frac{2x}{1+\ln(x^2+1)} + \frac{3e^{3x}}{1+3x}$ ;  
 (c)  $H'(x) = \int_{-1}^{\frac{x}{2}} e^{t^2} dt + \frac{1}{2}(x+1)e^{\frac{x^2}{4}}$ .

7.  $a = 2$ .

8.

- (a)  $\frac{32}{15}$ ;  
 (b)  $-\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ ;

(c)  $4 \ln 2$ ;

(d)  $\frac{1}{4} \ln \left( \frac{e^4 + 1}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (e^2) - \frac{\pi}{8}$ .

9.

(a)  $2 + \frac{2}{3} \pi^{\frac{3}{2}}$ ;

(b)  $\frac{5}{4}$ ;

(c)  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ;

(d)  $\frac{3}{2}$ ;

(e)  $\frac{1}{3} + \ln 2$ ;

(f)  $e - 1 + \frac{e^2}{2}$ ;

(g)  $\frac{7}{6}$ .

10.

(a)  $\frac{5}{3}$ ;

(b)  $\frac{6\pi}{5}$ .

11.

(a)  $V_{xx} = \frac{762}{7} \pi$  e  $V_{yy} = \frac{93}{5} \pi$ ;

(b)  $V_{xx} = \frac{5}{6} \pi$  e  $V_{yy} = \frac{32}{15} \pi$ ;

(c)  $V_{xx} = \frac{88}{15} \pi$  e  $V_{yy} = \frac{7}{6} \pi$ ;

(d)  $V_{xx} = \frac{120\sqrt{3} + 32\sqrt{2}}{15} \pi$  e  $V_{yy} = 7\pi$ .

12.

(a)  $\frac{1}{27} (80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$ ;

(b)  $\frac{27}{8}$ .

## 4

### *Bibliografia*

- Anton H., Bivens I., Stephen, D., Cálculo Vol. I – 10<sup>a</sup> edição, Bookman, 2014.
- Apostol, T, Cálculo, Vol. I – 2<sup>a</sup> edição, Reverté, 1994.
- Azenha, A., Jerónimo, M. A., Elementos de Cálculo Diferencial e Integral em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^n$ , McGraw Hill, 2000.
- Campos Ferreira, J., Introdução à Análise Matemática – 11<sup>a</sup> edição, Fundação Calouste Gulbenkian, 2014.
- Sallas, Hille, Etgen, Calculus, one and several variables, John Wiley and Sons, 2007.
- Silva, Sebastião e., Compêndio de Matemática - 2<sup>o</sup> Volume, Ministério da Educação e da Investigação Científica - Gabinete de Estudos e Planeamento, 1976.



# A

## Anexo

*Demonstração.* (Teorema 11 na página 50) Seja  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  uma partição de  $[a, b]$  tal que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

e  $Q = P \cup \{x'_1\}$  uma outra partição de  $[a, b]$  mais fina do que  $P$ , em que  $x'_1$  pertence ao intervalo  $]x_0, x_1[$ , ou seja  $x_0 < x'_1 < x_1$ . Sem perda de generalidade, considerou-se  $Q$  mais fina do que  $P$  pela inclusão de apenas mais um ponto na partição - o ponto  $x'_1$ . Nestas condições, designando por  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$  o supremo da função  $f$  no intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  e por  $M'_1$  e  $M''_1$  os supremos de  $f$  respetivamente nos intervalos  $[x_0, x'_1]$  e  $[x'_1, x_1]$ , tem-se

$$M'_1 \leq M_1 \quad \text{e} \quad M''_1 \leq M_1$$

e, conseqüentemente, verificam-se as relações:

$$\begin{aligned} M'_1(x'_1 - x_0) + M''_1(x_1 - x'_1) &\leq M_1(x'_1 - x_0) + M_1(x_1 - x'_1) \\ &\leq M_1(x_1 - x_0) \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} M'_1(x'_1 - x_0) + M''_1(x_1 - x'_1) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) \\ \leq M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathcal{S}(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, P) \end{aligned}$$

De forma análoga, considerando os minorantes, conseguiríamos provar que a soma inferior de Darboux de  $f$  relativamente à partição  $P$  seria não superior à soma inferior relativamente à partição  $Q$ , ou seja,  $s(f, P) \leq s(f, Q)$ . Tal como já referido anteriormente, o resultado  $s(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, Q)$  é trivial, qualquer que seja a partição  $Q$ . Deste modo,

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, P).$$

□

*Demonstração.* (Teorema 12 na página 51) Considerando uma partição  $Q$  mais fina do que as partições  $P_1$  e  $P_2$ , pelo teorema anterior, tem-se as seguintes relações:

$$s(f, P_1) \leq s(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, P_1)$$

e

$$s(f, P_2) \leq s(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, Q) \leq \mathcal{S}(f, P_2).$$

Logo,

$$s(f, P_1) \leq \mathcal{S}(f, P_2) \quad \text{e} \quad s(f, P_2) \leq \mathcal{S}(f, P_1).$$

□

A garantia de integrabilidade à Riemann de uma função pode ser dada pelo seguinte resultado:

**Teorema 29.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $f$  uma função limitada nesse intervalo. Então  $f$  é integrável à Riemann em  $[a, b]$  se e só se para todo  $\delta > 0$  existe uma partição  $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$ , tal que*

$$\mathcal{S}(f, P_n) - s(f, P_n) < \delta.$$

*Demonstração.* Para mostrar que a condição é suficiente, suponha-se que  $f$  não é integrável em  $[a, b]$ . Deste modo, não se verifica a igualdade da condição

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

e tem-se, então,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &< \overline{\int_a^b f(x) dx} \\ 0 &< \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

donde existe pelo menos  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \delta \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx.$$

Sendo  $\overline{\int_a^b f(x) dx}$  o ínfimo do conjunto das somas superiores de  $f$  relativas a todas as partições de  $[a, b]$  e  $\int_a^b f(x) dx$  o supremo do conjunto das somas inferiores de  $f$ , então, para qualquer partição  $P_n$ , verifica-se

$$\delta \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx \leq \mathcal{S}(f, P_n) - s(f, P_n).$$

Relativamente à condição necessária, sabendo que  $f$  é integrável em  $[a, b]$  verifica-se

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx.$$

Tendo em conta as definições de integral superior (ínfimo) e de integral inferior (supremo), qualquer que seja  $\delta > 0$ , existe uma partição  $P'_n$  (aqui entenda-se uma ordem a partir da qual o número de pontos da partição é superior a esse valor) tal que

$$\mathcal{S}(f, P'_n) - \int_a^b f(x) dx < \frac{\delta}{2}$$

e existe uma partição  $P''_n$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx - s(f, P''_n) < \frac{\delta}{2}.$$

Considerando a partição  $P_n = P'_n \cup P''_n$  são verificadas ambas as condições anteriores e somando-as tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, P_n) - \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx - s(f, P_n) &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathcal{S}(f, P_n) - \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx - s(f, P_n) &< \delta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathcal{S}(f, P_n) - s(f, P_n) &< \delta \end{aligned}$$

□

Informalmente, podemos dizer que este teorema afirma que  $f$  é integrável se e só se a diferença entre as somas superior e inferior de Darboux de  $f$ , ou seja  $\mathcal{S}(f, P_n) - s(f, P_n)$ , é tão pequena quanto se queira, desde que exista uma partição  $P_n$  do intervalo  $[a, b]$  que o permita. Na realidade,  $P_n$  é o termo geral de uma sucessão de partições, em que o número de pontos da partição vai aumentando e o comprimento de cada um dos subintervalos vai diminuindo. É de esperar que se consigam diferenças próximas de 0, quando a partição se torna mais fina.

Por exemplo, se considerarmos uma partição regular do intervalo  $[a, b]$ , em que cada um dos subintervalos tem comprimento

$$\Delta_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, P_n) - s(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n M_k \frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^n m_k \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \end{aligned}$$

em que  $M_k$  e  $m_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , designam respetivamente os supremos e os ínfimos da função  $f$  em cada dos subintervalos.

No caso do Exemplo 58 tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, P_n) - s(f, P_n) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (C - C) \\ &= 0 < \delta \end{aligned}$$

o que mostra, mais uma vez, que a função constante  $C$  é integrável em  $[a, b]$ .

**Exemplo 103.** Considere-se novamente a função real de variável real definida por  $f(x) = 2x + 1$  no intervalo  $[0, 3]$ , mas agora, considere-se a partição regular que divide o intervalo em  $n$  subintervalos de comprimento  $\Delta_k = \frac{3}{n}, k = 1, \dots, n$ .

$$P_n = \left\{ 0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \dots, \frac{3(n-1)}{n}, 3 \right\}.$$

Note-se que  $x_0 = 0$  e  $x_n = 3$ . Note-se também que

$$\begin{aligned} P_1 &= \{0, 3\}, \\ P_2 &= \left\{ 0, \frac{3}{2}, 3 \right\}, \\ P_3 &= \{0, 1, 2, 3\}, \\ &\vdots \\ P_n &= \left\{ 0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \dots, \frac{3(n-1)}{n}, 3 \right\}. \end{aligned}$$

Tal como já referido,  $P_n$  é o termo geral de uma sucessão de partições, em que o número de pontos da partição vai aumentando e o comprimento de cada um dos subintervalos vai diminuindo.

Dado que a função  $f$  é crescente em  $\mathbb{R}$ , os supremos da função  $f$  nos intervalos  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  são respetivamente iguais a  $f(x_1), \dots, f(x_n)$

e os ínfimos respetivamente iguais a  $f(x_0), \dots, f(x_{n-1})$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(f, P_n) - s(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{3}{n} - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \frac{3}{n} \\
 &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\
 &= \frac{3}{n} ((f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))) \\
 &= \frac{3}{n} (f(x_n) - f(x_0)) \\
 &= \frac{3}{n} (f(3) - f(0)) \\
 &= \frac{3}{n} \times 6 \\
 &= \frac{18}{n} < \delta
 \end{aligned}$$

para todo  $\delta > 0$ , desde que  $n > \frac{18}{\delta}$ . Logo a função  $f$  é integrável em  $[0, 3]$ . Podemos concluir, por exemplo, que para obter uma diferença de uma unidade entre as somas superior e inferior de Darboux de  $f$  ( $\delta = 1$ ), teremos de considerar uma partição regular de pelo menos 19 subintervalos ( $P_{19}$ ). Outro exemplo em que a diferença entre as somas é menor, uma décima ( $\delta = 0.1$ ) consegue-se com  $n > 180$ .

Este exemplo leva-nos a deduzir que qualquer função crescente num certo intervalo (e também qualquer função decrescente), portanto monótona, será integrável nesse intervalo.

A partir do teorema anterior, mostra-se que  $f$  é integrável se e só se as somas superior e inferior tiverem limites iguais quando a norma da partição tender para zero, ou seja,  $n$  tender para infinito.

**Teorema 30.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $f$  uma função limitada nesse intervalo. Então  $f$  é integrável à Riemann em  $[a, b]$  se e só se para todo  $\delta > 0$  existe uma partição (de termo geral)  $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, P_n) = L \in \mathbb{R}.$$

Nestas circunstâncias, o integral de  $f$  em  $[a, b]$  existe e é igual a  $L$

$$\int_a^b f(x) dx = L.$$

**Exemplo 104.** Voltando ao último exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{3}{n} \\
 &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n (2x_k + 1) \\
 &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left( 2 \times \frac{3k}{n} + 1 \right) \\
 &= \frac{3}{n} \left( \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) \\
 &= \frac{18}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n 1 \\
 &= \frac{18}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{n} n \\
 &= 9 \frac{n+1}{n} + 3
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 s(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \frac{3}{n} \\
 &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n (2x_{k-1} + 1) \\
 &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left( 2 \times \frac{3(k-1)}{n} + 1 \right) \\
 &= \frac{3}{n} \left( \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n (k-1) + \sum_{k=1}^n 1 \right) \\
 &= \frac{18}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) + \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n 1 \\
 &= \frac{18}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} + \frac{3}{n} n \\
 &= 9 \frac{n-1}{n} + 3
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, P_n) = 12.$$

Pelo último teorema,  $f$  é integrável em  $[0, 3]$  e

$$\int_0^3 (2x + 1) dx = 12.$$

Uma vez que se trata de uma função integrada positiva entre os extremos de integração 0 e 3, o resultado interpreta-se geometricamente como a área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico de  $f$ , inferiormente pelo eixo dos  $xx$  e lateralmente pelas retas  $x = 0$  e  $x = 3$

(Figura A.1). Ou seja, trata-se da área de um trapézio (retângulo) de base menor igual a 1, base maior igual a 7 e altura igual a 3, cuja fórmula é conhecida (Figura A.2) :

$$A = \frac{(7 + 1) 3}{2} = 12.$$

Em geral, não é possível calcular os limites como fizemos no último exemplo. Nem sempre a região é um polígono para podermos utilizar fórmulas conhecidas para o cálculo da área. Torna-se necessário conhecer outro tipo de resultados para o cálculo de integrais.

*Demonstração.* (Teorema 14 na página 54) A demonstração deste teorema segue de perto o procedimento adotado no Exemplo 103. Se  $f$  é uma função constante então, como já vimos, é integrável em  $[a, b]$ . Considere-se  $f$  uma função limitada e estritamente crescente em  $[a, b]$ . A demonstração é análoga para  $f$  decrescente. Seja  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  uma partição regular do intervalo  $[a, b]$ , em que cada um dos subintervalos tem comprimento  $\Delta_k = \frac{b-a}{n}, k = 1, \dots, n$ . Dado que a função  $f$  é crescente em  $[a, b]$ , os supremos da função  $f$  nos intervalos  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  são respectivamente iguais a  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  e os ínfimos respectivamente iguais a  $f(x_0), \dots, f(x_{n-1})$ . Assim,

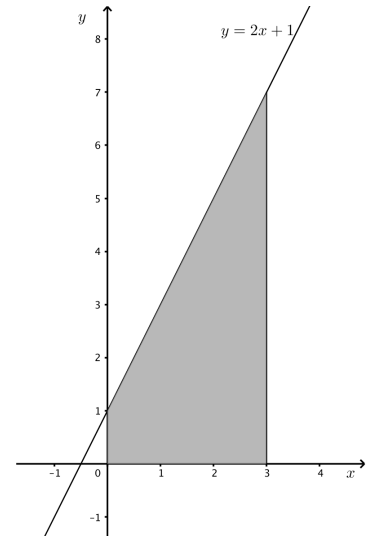


Figura A.1: Área da região do plano limitada inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pelo gráfico da função e lateralmente pelas retas  $x = 0$  e  $x = 3$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, P) - s(f, P) &= \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} ((f(x_1) - f(x_0)) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \\ &= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \end{aligned}$$

Sendo  $(b-a)(f(b) - f(a))$  uma constante, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{S}(f, P) - s(f, P)) = 0$$

concluindo-se que  $f$  é integrável em  $[a, b]$ . □

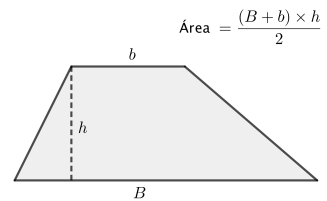


Figura A.2: Área do trapézio

**Exercício 36.** Considere a função real de variável real definida por  $f(x) = x^2$  no intervalo  $[0, 2]$ .

1. Represente, interprete geometricamente e calcule as somas inferior e superior de Darboux da função  $f$  relativamente à partição  $P = \{0, 1, 2\}$ .
2. Resolva novamente a alínea anterior considerando agora um refinamento da partição  $P$  dado pela partição  $Q = P \cup \{0.5, 0.75, 1.75\}$ . Comente os resultados anteriores.
3. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere a partição regular do intervalo  $[0, 2]$  dada por

$$P_n = \left\{ 0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \dots, \frac{2(n-1)}{n}, 2 \right\}.$$

Calcule  $s(f, P_n)$  e  $\mathcal{S}(f, P_n)$  (note que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ).

4. Prove que  $f$  é integrável em  $[0, 2]$  e calcule  $\int_0^2 x^2 dx$ .