AS POTENCIALIDADES DE SEQUÊNCIAS DE TAREFAS NA APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO

Fátima Mendes[1]
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
fatima.mendes@ese.ips.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
joana.brocardo@ese.ips.pt

Resumo

Apresentamos e discutimos alguns resultados preliminares sobre o contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação de alunos de uma turma do 3.º ano, particularizando para uma das sequências. Estes resultados incluem-se num estudo que procura compreender como os alunos aprofundam a aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajectória de aprendizagem. A análise das produções dos alunos e de episódios relativos às discussões colectivas revela que as características das tarefas – os seus contextos e os números utilizados, contribuem para a evolução de procedimentos multiplicativos, apoiados em relações numéricas e propriedades da operação. A análise evidencia, ainda, que o modo como as tarefas se articulam e sequenciam entre si sugere, a alguns alunos, o recurso a procedimentos potentes apoiados nas relações numéricas construídas.

Palavras-chave: Aprendizagem da multiplicação; Sentido de número, Tarefas matemáticas; Procedimentos dos alunos.

Introdução

As tarefas matemáticas assumem especial relevância quando se pensa a aprendizagem dos alunos na sala de aula (NCTM, 1991; ME, 2007; Stein, Remillard & Smith, 2007; Walls, 2005). A sua importância é justificada por Stein *et al.* (2007) dado que o tipo de tarefas propostas na aula influencia o modo como os alunos aprendem a pensar

---

[1] Projecto apoiado pelo Instituto Politécnico de Setúbal e pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (SFRH/BD/39016/2007).

matematicamente. Assim sendo, a selecção/construção de tarefas e a sua exploração na sala são actividades a que é necessário dar grande atenção.

As tarefas matemáticas, as suas características e potencialidades, são, entre outros, um aspecto central da investigação que efectuámos. Esta pretende compreender o modo como os alunos aprofundam a aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajectória de aprendizagem.

A presente comunicação discute alguns resultados relativos ao contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. Foca-se numa sequência de tarefas, analisa os procedimentos dos alunos na sua resolução e inter-relaciona-os com os contextos, os números usados e a articulação e sequenciação das tarefas.

As tarefas matemáticas

A tomada de consciência sobre a importância das tarefas matemáticas no processo de ensino e aprendizagem tem suportado, nas últimas décadas, o desenvolvimento de estudos sobre a temática (Stein et al. 2007; Walls, 2005). De facto, segundo Stein *et al.* (2007) "as tarefas matemáticas, nas quais os alunos se envolvem, determinam o que eles aprendem em Matemática e como o aprendem" (p. 346). Além disso, considerando que a aprendizagem se deve focar nos processos de raciocínio e de pensar matematicamente, os currículos reflectem esta preocupação ao preconizarem abordagens pedagógicas baseadas, sobretudo, em tarefas matemáticas abertas e de resolução de problemas (Walls, 2005).

O entendimento de tarefa matemática é diversificado. Stein *et al.* (2007) assumem tarefa como "a actividade matemática na sala de aula cujo propósito é focar a atenção dos alunos numa ideia matemática particular" (p. 346). Associadas à ideia de tarefa surgem a sua construção e selecção, de acordo com a sua intenção. Alguns autores sugerem princípios para a sua selecção, uma vez que a tarefa "precisa de ser o veículo" pelo qual o professor explora a matemática com os alunos, num ambiente de inquirição (Watson & Mason, 2007).

Considerando-as um "contexto" para a aprendizagem (Doyle, 1988) as tarefas podem ter exigências cognitivas diferentes, de acordo com o tipo e nível de pensamento que suscitam: memorização, procedimentos sem e com conexões, e fazer matemática (Stein *et al.,* 2007). Os procedimentos com conexões focam-se na aprendizagem de processos e de representações e pretendem promover a compreensão de ideias e conceitos matemáticos. As tarefas de fazer matemática não sugerem qualquer caminho e exigem a compreensão de conceitos matemáticos, de processos e de relações. No estudo realizado as tarefas inseriram-se nestes dois níveis.

As tarefas matemáticas na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número

Numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, Reys (1994) refere que as tarefas, sendo centradas nos processos, devem caracterizar-se por: (i) encorajar os alunos a pensar sobre o que vão fazer e a partilhá-lo com os colegas; (ii) promover a criatividade, a investigação e o uso de estratégias diversificadas; (iii) auxiliá-los a decidir o tipo de cálculo apropriado a cada situação; (iv) ajudá-los a compreender as regularidades da Matemática e as relações entre esta e o mundo real e (v) contribuir para uma visão dinâmica e desafiante da Matemática através da descoberta de relações.

Subjacente a esta perspectiva, há autores que veiculam a importância da exploração de contextos adequados (Fraivillig, 2001; Reys, 1994). Esta ideia-chave é retomada no caso particular da multiplicação, reforçando que a exploração de contextos apropriados faz emergir aspectos cruciais desta operação e do cálculo multiplicativo. O papel decisivo dos contextos e dos modelos subjacentes na aprendizagem da multiplicação justifica-se porque: (i) aqueles revelam aspectos basilares das estruturas multiplicativas associadas e (ii) permitem fazer uma primeira abordagem às propriedades da multiplicação, facilitando o cálculo associado (Fosnot & Dolk, 2001; Treffers & Buys, 2008).

A selecção de contextos reveste-se, assim, de uma grande importância. Segundo Fosnot e Dolk (2001) estes devem integrar três componentes: (i) permitir o uso de modelos, (ii) fazer "sentido" para os alunos e (iii) criar surpresa e suscitar questões. A primeira significa que as tarefas propostas devem incluir imagens ou situações que suscitem o uso de um determinado modelo. A segunda inclui dois aspectos: (1) as propostas devem ser situações reais ou imaginárias com as quais os alunos consigam lidar, analisar a razoabilidade do que fazem e dos resultados e (2) devem fazer "sentido" para a construção de estruturas e relações, que podem emergir do contexto. A última significa serem interessantes e desafiantes, estimulando a vontade de explicar e de encontrar respostas a questões como *Porque é assim? Será que é? O que acontece se…?*

No estudo realizado propusemos tarefas cujos contextos têm as características enunciadas e, também, cadeias numéricas. Estas últimas, com contexto matemático, pretendem desenvolver um cálculo mental eficiente, realçando procedimentos associados a propriedades dos números e da multiplicação. A estrutura da cadeia, com propostas sequenciais e encadeadas, influencia os procedimentos dos alunos, uma vez que um certo cálculo se baseia noutro realizado na(s) linha(s) anterior(es) (Fosnot & Dolk, 2001).

Nesta comunicação analisam-se contextos associados ao modelo rectangular, uma das representações mais potentes que suporta a evolução do raciocínio multiplicativo (Barmby *et al.*, 2009). São, também, usados números de referência (Fosnot & Dolk, 2001; McIntosh, Reys & Reys, 1992) de modo a suscitar o uso de determinados procedimentos de cálculo baseados nas suas propriedades e nas da multiplicação. Procedimentos são, neste estudo, o modo como os alunos manipulam os números, cuja estrutura matemática é determinada pela estratégia.

Metodologia

Este estudo baseou-se no desenvolvimento de uma experiência de ensino orientada por uma conjectura (Confrey & Lachance, 2000) numa turma do 3.º ano, com 23 alunos, durante um ano lectivo.

Os dados foram recolhidos na aula e o principal instrumento de recolha foi a investigadora[2] através da observação do ambiente natural, complementada por videogravações. Os dados são descritivos e incluem notas de campo, transcrições de episódios de aulas e produções dos alunos. A sua análise, de cariz interpretativo, realizou-se indutivamente.

No âmbito da trajectória de aprendizagem subjacente à experiência de ensino foram construídas e exploradas onze sequências de tarefas de multiplicação, considerando os objectivos de aprendizagem, as conjecturas sobre a aprendizagem dos alunos e a cultura da aula criada (Simon, 1995). As tarefas propostas são de dois tipos – problemas (ver exemplo em Anexo, subtarefas 1, 2 e 3 da tarefa 10) e cadeias numéricas (ver exemplo

[2] A primeira autora deste artigo.

em Anexo, tarefa 12), com propósitos distintos. A sua alternância foi pensada de modo a suportar uma compreensão aprofundada da multiplicação e das relações que lhes estão associadas. Pretendemos, assim, evidenciar procedimentos matemáticos poderosos mas, simultaneamente, estabelecer conexões com os mesmos procedimentos, que podem ter sido usados ou não, no contexto de um problema, já resolvido anteriormente. A diversidade de tipos de tarefas exploradas na aula implicou modos de organização da aula com algumas diferenças. As aulas de resolução de problemas foram organizadas considerando três fases distintas: introdução, exploração e discussão. Na fase de introdução a professora informava os alunos, de modo breve, sobre o que se ia passar nessa aula e explicava a organização do trabalho. Na fase de exploração os alunos resolviam os problemas propostos, individualmente ou a pares, de forma autónoma. Na fase de discussão, os alunos apresentavam os seus raciocínios sobre o problema em causa de acordo com uma ordenação sugerida pela professora. Apesar de serem seleccionados apenas alguns procedimentos para serem apresentados, todos os alunos eram convidados a intervir, solicitando esclarecimentos, colocando dúvidas ou comparando o seu procedimento com o do colega. Após cada discussão, a professora, conjuntamente com os alunos, fazia uma síntese do que considerava importante realçar depois do trabalho realizado. Alguns problemas originaram congressos matemáticos, na acepção de Fosnot e Dolk (2001). As aulas de exploração de cadeias numéricas seguiam de perto o preconizado pelos mesmos autores.

Para proceder à análise dos dados recolhidos, dado o seu grande volume, as tarefas foram organizadas segundo características comuns: tarefas de multiplicação com números naturais, tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal, tarefas de divisão com números naturais e tarefas de multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na representação decimal. Cada um destes grupos inclui sequências de tarefas interligadas, dos dois tipos referidos anteriormente – problemas e cadeias numéricas.

A inventariação e caracterização dos procedimentos dos alunos na resolução das tarefas foram realizadas analisando as suas produções escritas. A evolução dos procedimentos e os aspectos do sentido de número manifestados nas suas resoluções foram analisados considerando, para além das produções escritas, as transcrições de episódios da aula associados a momentos de discussão colectiva da sua exploração.

O confronto entre as características das tarefas, a sua sequenciação e articulação e os procedimentos usados pelos alunos permitiu analisar o contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. Para esta análise foi seleccionada a última sequência de tarefas de cada um dos grupos organizados. Esta selecção é justificada pois, apesar de nos centrarmos na última sequência, a sua análise permitir perceber, também, a evolução dos procedimentos dos alunos até esse momento da trajectória de aprendizagem.

Neste artigo focamo-nos no grupo de tarefas de multiplicação com números naturais. De forma a analisar e discutir o contributo das tarefas e sequências de tarefas, caracterizamos prévia e resumidamente, a última sequência de tarefas do grupo, relativamente ao contexto, aos números e ao modo como se articulam e sequenciam entre si.

Uma sequência de tarefas de multiplicação com números naturais: a sequência 4

A sequência 4 (ver anexo) é constituída pelas subtarefas 1, 2 e 3, incluídas na tarefa 10 – Pilhas de caixas e a tarefa 12 – Cadeias numéricas IV (três cadeias). O seu propósito é consolidar o uso de procedimentos multiplicativos, baseados nas propriedades da multiplicação e apoiados no modelo rectangular sugerido pelos contextos da tarefa 10.

Os contextos e os números

As subtarefas 1 e 2 da tarefa 10 envolvem um contexto de multiplicação baseado na disposição rectangular, veiculada através das figuras que as acompanham. Na primeira, a figura representa um conjunto de caixas empilhadas com um certo número de caixas em linha e em coluna, sugerindo uma disposição rectangular (em rigor, paralelepipédica) "perfeita". Na segunda, a figura apresenta, também, um conjunto de caixas empilhadas mas o número de caixas em cada linha ou coluna não é sempre igual. Em qualquer dos casos, cada caixa ("célula") representa um grupo (de 24 ou 48 maçãs) e não uma unidade simples. As situações apresentadas são familiares dos alunos uma vez que já tinham resolvido, anteriormente, tarefas em que era necessário calcular um determinado número de produtos de uma mercearia. Os números da primeira subtarefa – 25 e 24 e da segunda – 25 e 48, são de referência no cálculo mental com números naturais e já foram usados pelos alunos em cálculos anteriores.

A subtarefa 3 parte de uma situação próxima das anteriores mas tem um contexto de divisão no sentido de medida[3] e não inclui qualquer figura. Para a resolver os alunos têm de recorrer à solução da subtarefa 2, usando os números 1200 (solução anterior) e 24. A tarefa 12 é constituída por três cadeias numéricas, cujos cálculos multiplicativos incluem alguns factores anteriores, tais como 25, 24 e 48 e/ou produtos iguais a 600 e a 1200.

A articulação e a sequenciação entre os contextos e os números

A tabela seguinte resume a articulação e a sequenciação entre os contextos e os números da tarefa 10 e os números da tarefa 12, que constituem a sequência 4.

Tabela 1 – A articulação e a sequenciação entre os contextos e os números da sequência

Tarefas	Articulação e sequenciação entre os contextos e os números	
Tarefa 10 Subtarefa 1	Situação semelhante à das tarefas 1 e 2.	Números 25 (caixas) e 24 (maçãs de cada caixa). Obtém-se um produto igual a 600.
Tarefa 10 Subtarefa 2	Situação análoga à da subtarefa 1.	Números 25 (caixas) e 48 (maçãs de cada caixa). 48 é o dobro de 24. O produto obtido é igual a 1200, o dobro do anterior.
Tarefa 10 Subtarefa 3	Situação análoga à da subtarefa 1, em termos da situação mas apela à divisão (por medida).	Números 24 e 1200. 24 é usado na subtarefa 1 e é metade de 48. 1200 é a solução da subtarefa 2 e é o dobro de 600, o produto obtido na subtarefa 1.
Tarefa 12	Situação análoga à de outras cadeias numéricas anteriores.	Números 25, 50, 24, 48, das tarefas anteriores e outros cujo produto é igual a 600 ou 1200 (soluções das subtarefas anteriores).

A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da tarefa 10, pensada na construção da sequência 4, incluem dois aspectos: os associados à situação inicial e os relacionados com os valores numéricos. As situações iniciais são análogas entre si – referem-se a mercearias ou supermercados e solicitam o cálculo do número total de maçãs ou do número de caixas de maçãs sendo, também, semelhantes a outras anteriores. No que respeita aos números envolvidos nas várias subtarefas, estes estão relacionados entre si, por relações de dobro ou relações de metade.

[3] Neste estudo foram incluídas tarefas de divisão, privilegiando a sua relação com a multiplicação.

A tarefa 12, resolvida após a tarefa 10, relaciona-se com esta através dos cálculos propostos que incluem, por vezes, os mesmos números e/ou relações numéricas.

Apresentamos, em seguida, os procedimentos usados pelos alunos nas tarefas anteriores confrontando-os com os contextos e os números das tarefas e a sua articulação e sequenciação.

Resultados – Os procedimentos dos alunos nas tarefas da sequência 4

A tabela seguinte resume os procedimentos usados pelos alunos na resolução das subtarefas da tarefa 10, inter-relacionando-os com os contextos, os números e as articulações a vários níveis entre as subtarefas.

Tabela 2 – Os procedimentos dos alunos na tarefa 10 e a sua articulação e sequenciação

Tarefa 10	Procedimentos dos alunos		N.º alunos	Os procedimentos e a articulação e sequenciação das tarefas
Subtarefa 1	Com recurso à figura	Uso de múltiplos de 5	2	Todos os alunos reconhecem os contextos e os números de tarefas anteriores e calculam facilmente, recorrendo ou não à figura.
		Uso da compensação	2	
	Sem recurso à figura	Uso da decomposição decimal	18	
Subtarefa 2	Com recurso à figura	Uso da decomposição não decimal	4	Todos os alunos identificam o contexto análogo ao anterior e usam procedimentos multiplicativos, embora não potenciem a relação de dobro entre o 48 e o 24.
		Uso de múltiplos de 5	2	
	Sem recurso à figura	Uso da decomposição decimal	16	
Subtarefa 3	Uso da relação de dobro		12	Recorrem à subtarefa 1. Reconhecem a relação de dobro entre 1200 e 600 e calculam o dobro de um dos factores.
	Uso da relação dobro/metade		2	Recorrem à subtarefa 2. Reconhecem a relação de metade entre 24 e 48 e calculam o dobro do outro factor, visto que o produto se mantém.
	Multiplicar sucessivamente		2	Calculam a partir do seu conhecimento sobre os números envolvidos, embora não recorram às subtarefas anteriores.
	Incorrectos ou inexistentes		6	Não efectuam qualquer relação entre as subtarefas.

Na resolução das subtarefas 1 e 2, cujo contexto se baseia no modelo rectangular sugerido pelas figuras, todos os alunos usam procedimentos multiplicativos. Na resolução da subtarefa 3, cujo contexto é de divisão no sentido de medida, os alunos utilizam, também, procedimentos multiplicativos, excepto seis que não a conseguem realizar.

Subtarefa 1. Nesta tarefa há dois pares de alunos que se apoiam na figura para calcular o número total de maçãs. Um dos pares recorre ao uso dos múltiplos de cinco – contam o número de caixas de uma coluna que representam e representam o número de maçãs respectivo por 5×24. Como têm cinco colunas, os alunos multiplicam a expressão anterior por cinco, registando este factor à sua direita (figura 1).

Figura 1 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 1 - tarefa 10

O outro par de alunos que recorre, também, à figura para calcular, pensa em grupos de dez caixas (duas colunas de cinco). Como a pilha de caixas tem dois grupos de dez e um grupo de cinco caixas, acrescentam, mentalmente, mais uma coluna de cinco e usam um procedimento de compensação, calculando 30×24 e subtraindo depois 5×24 (figura 2).

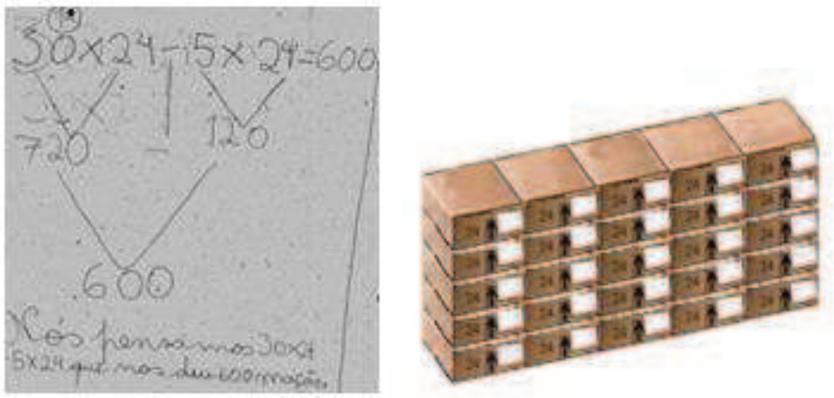


Figura 2 – Resolução de Eva e Guilherme da subtarefa 1 - tarefa 10

Os restantes 18 alunos usam procedimentos de decomposição do factor 24 e, aparentemente, não recorrem à figura para calcular 25×24. O facto de terem decomposto o 24 reforça a plausibilidade de terem calculado sem atender ao significado dos números, pois 24 representa o número de maçãs de cada caixa e, neste contexto, não é natural a sua decomposição. Estes alunos parecem ter usado a disposição rectangular apenas para identificar os factores 25 e 24 do produto, decompondo depois o factor à direita, independentemente do seu significado.

Salientamos que, nesta altura da trajectória, estes 18 alunos estão já numa fase em que não precisam de se apoiar no modelo rectangular para calcular. Contudo, em tarefas anteriores a esta sequência 4, o recurso a este modelo foi fundamental para facilitar o uso e a evolução dos procedimentos multiplicativos da maioria dos alunos.

Subtarefa 2. Nesta tarefa três pares de alunos recorrem à figura para calcular. Um deles calcula o total de maçãs adicionando três produtos parciais (agrupamentos de caixas que visualiza na figura) – 12 caixas nas duas camadas inferiores, 10 caixas nas camadas intermédias e 3 caixas na camada superior – usando uma decomposição não decimal do factor 25 (figura 3).

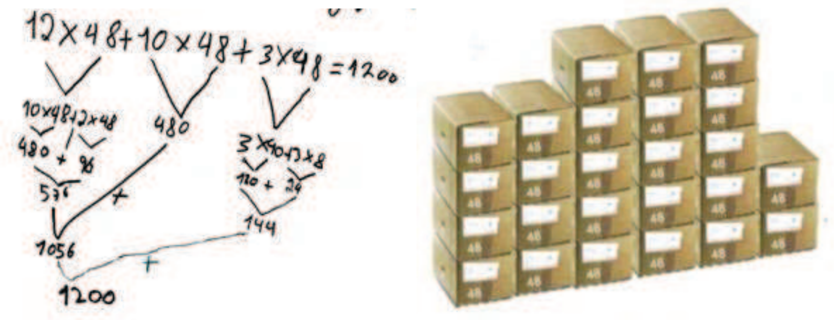


Figura 3 – Resolução de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 - tarefa 10

Um segundo par de alunos usa, também, uma decomposição não decimal, recorrendo a dois produtos parciais, visualizados a partir de um esquema que constrói, alterando a organização das caixas de modo a parecer um “rectângulo” (figura 4).

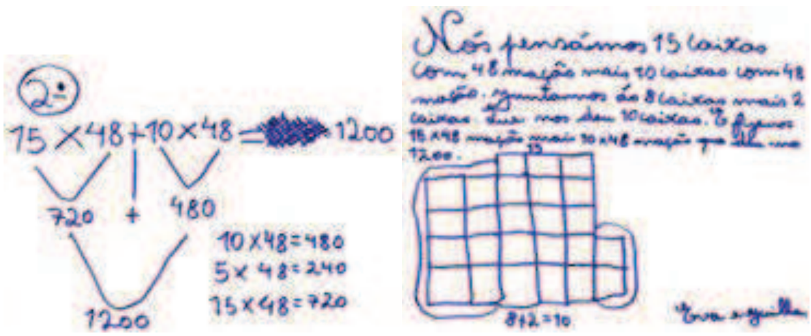


Figura 4 – Resolução de Eva e Guilherme da subtarefa 2 - tarefa 10

Finalmente, o terceiro par que se apoia na figura, recorre aos múltiplos de cinco, tal como anteriormente. Mentalmente, os alunos transformam a pilha de caixas de modo a ter uma disposição rectangular, calculam o número total de maçãs de uma coluna e multiplicam por cinco.

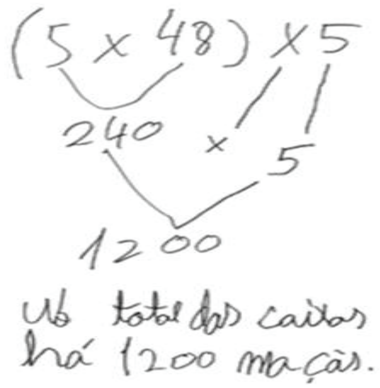


Figura 5 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 2 - tarefa 10

Os 16 alunos que não recorrem explicitamente à figura da subtarefa 2, usam procedimentos de decomposição decimal. Identificam o produto a calcular, provavelmente, “retirando” os números 25 e 48 do enunciado escrito. Dois pares calculam a partir de 48×25 (afastando-se do significado dos números no contexto) e decompõem o 25. Os restantes seis pares calculam a partir de 25×48, decompondo o 48 (exemplo na figura 6).

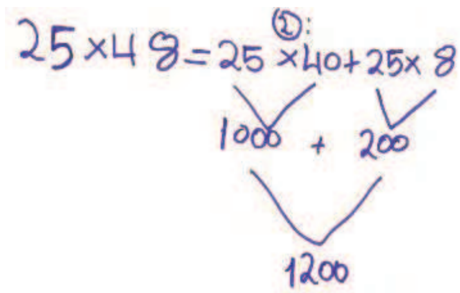


Figura 6 – Resolução de Rita e Patrícia da subtarefa 2 - tarefa 10

Estes 16 alunos, apesar de não recorrerem à figura, utilizam, contudo, procedimentos multiplicativos adequados baseados na decomposição decimal de um dos factores. Para a sua consolidação, contribuíram significativamente os contextos (baseados em disposições rectangulares) das tarefas anteriores e o conhecimento sobre os números de referência envolvidos, uma vez que esta sequência 4, em análise, é a última do seu grupo.

Na subtarefa 2, todos os alunos a resolvem através de procedimentos multiplicativos e relacionam o seu contexto com o anterior, mas não potenciam a articulação entre os seus números e os da subtarefa anterior, encarando-a individualmente. Por isso, nos seus procedimentos, não usam a relação de dobro entre 48 e 24 (número de maçãs de cada caixa). Há dois tipos de justificação que podem estar na base desta não articulação: (i) as figuras incluídas em cada uma das subtarefas e (ii) o ter duplicado o número de maçãs por caixa e não o número de caixas.

Em primeiro lugar, a figura da subtarefa 2, diferente da anterior, pode ter dificultado o relacionar dos números das duas subtarefas, sobretudo para os alunos que se apoiaram na figura. Em segundo lugar, numa fase inicial, parece ser mais complicado identificar uma relação de dobro quando o que duplica é o número de maçãs em cada caixa e não o número de caixas, visto que alguns alunos ainda estão muito ligados ao significado dos números em contexto. Provavelmente, se se duplicasse o número de caixas e não o número de maçãs em cada caixa, seria mais fácil a identificação da relação, tal como aconteceu em tarefas anteriores do mesmo grupo ou em cadeias numéricas.

Subtarefa 3. Com um contexto de divisão por medida, há 12 alunos que a resolvem, ligando-a à subtarefa 1, usando a relação de dobro entre os números das duas tarefas. Apenas um par associa esta subtarefa à subtarefa 2, recorrendo à relação de dobro/metade entre os números envolvidos, como explicitam na discussão colectiva:

> Duarte: Nós fomos buscar o 25 ao segundo problema, pois nesse eram 25 caixas.
> Professora: E quantas maçãs tinha cada caixa nesse problema?
> Duarte: 48. E nós fizemos o dobro de 25.
> Professora: Porquê?
> Duarte: Porque 48 é o dobro de 24 e no super Girassol as caixas têm 24 maçãs. E fizemos 25 vezes 2 porque 25 eram as caixas do outro problema.
> Professora: Agora, era necessário o dobro das caixas?
> Duarte: Porque eram metade das maçãs em cada caixa.

Um outro par usa, sem efectuar registos de cálculos auxiliares mas explicitando-os na discussão colectiva, um procedimento de multiplicação sucessiva, até encontrar o número que, multiplicado por 24, é igual a 1200. Este procedimento relaciona-se com a sua facilidade em calcular com o factor 24, proveniente da sua experiência em tarefas prévias.

Ao contrário das subtarefas 1 e 2, que todos resolvem, na subtarefa 3 há seis alunos que não o conseguem fazer. Não estabelecem qualquer ligação com as outras subtarefas e esta dificuldade parece dever-se à complexidade do contexto de divisão e não aos números, que são os mesmos dos anteriores.

Tarefa 12. Nas cadeias numéricas, dadas as suas características particulares, os alunos recorrem facilmente a cálculos anteriores, inter-relacionando-nos. Reconhecem, ainda, alguns produtos das subtarefas anteriores, identificando procedimentos que poderiam ter usado. O episódio seguinte apresenta uma parte do diálogo que surgiu durante a exploração da segunda cadeia (ver anexo, tarefa 12).

A professora começou por registar no quadro 10×60, esperou que vários alunos levantassem o dedo no ar e solicitou a um deles a sua resposta.

> Leandra – É 10×60 ou 60×10, é 600.
> Professora – E agora? (regista o resultado e escreve por baixo 20×30).
> Duarte – 20×30 são 600. Porque são 20 vezes 10 vezes 3. E 20 vezes 10 são 200 e vezes 3 são 600.
> Bernardo – E também pode ser 10 vezes 30 mais 10 vezes 30 que são 300 mais 300.
> Raquel – É 600, porque é igual ao anterior! 40 é o dobro de 20 e 15 é metade de 30.
> Gustavo – Pode fazer-se também 40×10 mais 40×5. Dá 400+200 que são 600.
> Professora – E agora? (Escreve 20×60 e muitos braços se erguem no ar)
> Guilherme – É 1200 porque 60×10 é 600 e mais 60×10 é 600, por isso dá 1200.
> David – Eu pensei em 20×30 duas vezes.
> José – Dá 1200 porque é o mesmo que 40×30.
> Duarte – Pode fazer-se também 60×2 e depois vezes 10.

Considerações finais

Os contextos das subtarefas 1 e 2 da tarefa 10 (suportados pela disposição rectangular) e outros anteriores com as mesmas características parecem ter contribuído para que os alunos optem, neste momento da trajectória de aprendizagem (4.ª sequência de tarefas), por procedimentos multiplicativos de acordo com o referido por Barmby *et al.* (2009). Esta opção é diferente da tomada pelos alunos nas tarefas iniciais, em que usaram procedimentos de tipo aditivo. A diversidade de procedimentos usados na tarefa 10 é veiculada, também, pelos contextos. Todos os alunos que não recorrem às figuras das tarefas usam a decomposição decimal, um dos procedimentos mais potentes ao nível da multiplicação formal.

A facilidade com que os alunos calculam, independentemente dos procedimentos que usam, parece dever-se, também, aos números incluídos – de referência e com os quais já lidaram anteriormente (Fosnot & Dolk, 2001).

A escolha cuidadosa de contextos e a articulação e sequenciação das tarefas parecem ser ideias base fundamentais para que os alunos desenvolvam o seu conhecimento sobre a multiplicação. Como ilustramos no caso da sequência apresentada, quando os alunos não relacionam as tarefas com as anteriores (como na subtarefa 3, que envolvia a divisão), revelam mais dificuldade na sua resolução. Pelo contrário, quando vêem relações com as tarefas anteriores e quando conseguem usar modelos sugeridos pelos contextos, recorrem, de modo eficiente, a procedimentos multiplicativos revelando um conhecimento bastante sólido das propriedades da multiplicação.

Referências

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70(3),* 217-241.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*, 167-180.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Fraivillig, J. (2001). Strategies for advancing children's mathematical thinking. *Teaching Children Mathematics, 7*, 454-459.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12(3)*, 2-8 & 44.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Obtido em 6 de Outubro de 2009, de http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM.

Reys, B. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 1(2)*, 114-120.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(2)*, 114-145.

Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Treffers, A., & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) – Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics* (pp. 61-88). Rotterdam: Sense Publishers.

Walls, F. (2005). Challenging task-driven pedagogies of mathematics. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research* (pp. 751-758).

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10(3-4)*, 205-215.

Anexo

Sequência 4

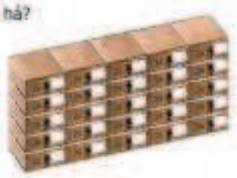
Tarefa 10 – Pilhas de caixas
Subtarefa 1

PILHAS DE CAIXAS

1. À Mercearia da Piedade chegaram caixas de 24 maçãs cada, embaladas como mostra a imagem.

As 25 caixas que chegaram foram arrumadas em pilhas como é indicado na figura.

No total das caixas, quantas maçãs há?



Tarefa 10 – Pilhas de caixas
Subtarefa 2

PILHAS DE CAIXAS

2. No supermercado do Bairro também há uma pilha de 25 caixas de maçãs. Estas caixas são maiores, cada uma tem 48 maçãs.

Neste supermercado, quantas maçãs estão guardadas nas caixas?

Tarefa 10 – Pilhas de caixas
Subtarefa 3

PILHAS DE CAIXAS

3. No supermercado Girassol há, no total, o mesmo número de maçãs que no supermercado do Bairro, mas em cada caixa estão embaladas apenas 24 maçãs.

No total, quantas caixas de 24 maçãs há no supermercado Girassol?

Tarefa 12 – Cadeias numéricas IV

CALCULAR EM CADEIA

50 × 10 =	10 × 60 =	12 × 50 =
25 × 20 =	20 × 30 =	24 × 50 =
25 × 4 =	40 × 15 =	50 × 24 =
25 × 24 =	40 × 30 =	25 × 48 =
50 × 12 =	20 × 60 =	50 × 48 =