



Susana Filipa
Caseiro Rei

**A aprendizagem da multiplicação
perspetivada através da resolução da
sequência de problemas: Um estudo
no 2.º ano de escolaridade.**

Relatório do Projeto de Investigação

Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino
do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Orientadora Professora Doutora Catarina
Raquel Santana Coutinho Alves Delgado

Outubro de 2016

Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação de Setúbal

Susana Filipa Caseiro Rei

**A aprendizagem da multiplicação
perspetivada através da resolução
da sequência de problemas: Um
estudo no 2.º ano de escolaridade.**

Relatório do Projeto de Investigação

Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º
Ciclo do Ensino Básico

Orientadora Professora Doutora Catarina Raquel
Santana Coutinho Alves Delgado

Outubro de 2016

Resumo

Este estudo tem como objetivo compreender de que forma os alunos desenvolvem a aprendizagem da multiplicação através da resolução de uma sequência de problemas. Mais concretamente, pretende Identificar e analisar as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos quando resolvem problemas de multiplicação e o contributo da sequência de problemas na aprendizagem desta operação.

O quadro teórico integra duas secções que discutem as seguintes temáticas: a resolução de problemas e o ensino e aprendizagem da multiplicação.

A metodologia deste estudo segue uma abordagem qualitativa, na vertente de investigação-ação. Nele participaram 20 alunos de uma turma do 2.º ano de escolaridade. A recolha de dados foi realizada com recurso à observação participante, à recolha documental, a conversas informais e à entrevista.

Os resultados deste estudo sobre as estratégias e procedimentos de cálculo usados pelos alunos quando resolvem problemas de multiplicação revelam que: (i) recorrem a alguma diversidade de estratégias e procedimentos de cálculo na resolução de problemas de multiplicação, (ii) há alunos que, numa fase inicial, recorrem a várias estratégias e procedimentos para resolver um mesmo problema, (iii) por vezes, os alunos regridem na estratégia utilizada comparando com a que usou no problema anterior da sequência e (iv) associada a cada uma das estratégias há procedimentos de cálculo mais frequentes do que outros. Estes resultados mostram, ainda, no que se refere ao contributo da sequência de problemas na aprendizagem da multiplicação que: (i) problemas com contextos associados ao modelo de disposição retangular contribuem para o uso de estratégias multiplicativas, desde que os números envolvidos sejam adequados, (ii) os números de referência e do conhecimento dos alunos facilitam os cálculos efetuados pelos mesmos e (iii) a articulação entre os problemas da sequência contribui para a progressão das estratégias utilizadas pelos alunos.

Palavras-chave: Aprendizagem da multiplicação; Sequência de problemas; Resolução de problemas; Estratégias e procedimentos de cálculo.

Abstract

This study aims to understand how students develop the learning multiplication when they solve a sequence of problems. More specifically, this study intend to identify and analyze the strategies and calculation procedures used by students when solving problems of multiplication and the contribution of the sequence of the problems for the learning of this operation.

The theoretical framework includes two sections that discuss the following topics: problem solving and the teaching and learning of the multiplication.

The methodology of this study follows a qualitative approach and matches an action research. In this study, participated 20 students of the 2nd grade. The collection of the data was performed with use of participant observation, documentary collection, informal conversations and interviews.

The results of this study about strategies and calculation procedures used by students when they solve problems multiplication show that: (i) the students use some variety of strategies and calculation procedures to solve multiplication problems, (ii) in an early stage, there are students that use different strategies and calculation procedures for solving the same problem, (iii) sometimes, the students regresses in the strategies that they use, compared to that used in the previous problem of the sequence, and (iv) associated with each strategy, there are some calculation procedures more frequent than others. With regard to the contribution of the sequence of the problems to the learning of the multiplication, these results also shows that: (i) problems with the rectangular model contributes for the use of the multiplicative strategies, since the numbers involved are appropriate, (ii) the use of the reference numbers and of the numbers that are known by the students facilitates the calculations made by them, and (iii) the link between the problems of the sequence contributes to the progression of the strategies used by the students.

Keywords: Learning of the multiplication; Sequence of problems; Problem solving; Strategies and calculation procedures.

Agradecimentos

Ao terminar este projeto, agradeço, em primeiro lugar, à minha orientadora, a Professora Doutora Catarina Delgado, por todo o apoio prestado, tanto no momento da realização do estudo, como ao longo da concretização deste relatório de investigação. Os seus incentivos e coragem, disponibilidade, exigência e determinação, ajudaram-me a ultrapassar momentos de dificuldade e incerteza, tendo sido essencial para concluir este trabalho.

Agradeço à professora cooperante e aos alunos da turma 20, por terem possibilitado a realização deste estudo. A participação e empenho destas crianças na exploração da sequência de problemas foi a chave para os resultados obtidos nesta investigação.

Às minhas amigas Filipa, Catarina, Vanessa e Mafalda que sempre me deram força para continuar, para não desistir mesmo nos momentos mais difíceis e, que apesar de não estarem dentro do assunto, ofereceram-se várias vezes para me ajudar.

Ao meu amigo João pela sua amizade e apoio incondicional ao longo de anos.

Ao Tiago, que presenciou toda a pressão e ansiedade, apoiando todas as minhas decisões e acreditando sempre em mim, não me deixando desistir de concretizar este sonho.

À minha família, especialmente à minha mãe, irmã e irmão que apesar de persistirem nas perguntas mais difíceis de responder – *Falta muito? Já terminaste?*, manifestaram sempre um apoio incondicional, estando, sem dúvida muito orgulhosos neste momento.

Por fim, à minha querida avó, que sempre me apoio não só neste momento mas ao longo da minha vida e que sonhava com o dia em que eu seria professora. É a ela a quem dedico este trabalho, que infelizmente partiu durante esta importante etapa da minha vida.

Índice Geral

<i>Capítulo I – Introdução</i>	11
1.1. Motivações, objetivo e questões do estudo	11
1.2. Pertinência do estudo	13
1.3. Organização do relatório.....	15
<i>Capítulo II – Revisão da Literatura</i>	17
2.1. Resolução de problemas	17
2.1.1. O(s) significado(s) de problema de Matemática	18
2.1.2. A importância da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática	21
2.1.3. A exploração de problemas em sala de aula.....	24
2.2. O ensino e a aprendizagem da multiplicação.....	26
2.2.1. A multiplicação nas orientações curriculares.....	26
2.2.2. A aprendizagem da multiplicação e sua progressão	28
2.2.3. Estratégias e procedimentos de resolução de problemas de multiplicação	32
2.2.4. As características das tarefas e a aprendizagem da multiplicação.....	36
2.2.5. A importância de construção de sequência de tarefas e a aprendizagem de multiplicação	41
<i>Capítulo III – Metodologia</i>	43
3.1. Opções metodológicas.....	43
3.1.1. Abordagem qualitativa.....	43
3.1.2. Investigação-ação	44
3.2. Contexto e participantes	46
3.3. Técnicas de recolha de dados	48
3.3.1. Observação participante.....	48
3.3.2. Recolha documental.....	49
3.3.3. Entrevista	49
3.4. Processos de recolha e de análise dos dados	50
<i>Capítulo IV – Proposta Pedagógica</i>	55
4.1. A construção da sequência de problemas	55
4.2. Os problemas.....	63
4.3. A exploração dos problemas na sala de aula.....	64

<i>Capítulo V – Análise dos Dados</i>	71
5.1. Estratégias e procedimentos de cálculo	71
5.1.1. Problema I – Ida ao circo.....	72
5.1.2. Problema II – Sala de aula	77
5.1.3. Problema III – Cortinas da casa do João.....	81
5.1.4. Problema IV – Prédio do Manuel.....	91
5.1.5. Problema V – O pátio do João	97
5.1.6. Problema VI – Organizando menus.....	99
5.1.7. Problema VII – Páscoa doce	103
5.2. A sequência de problemas e as estratégias e procedimentos dos alunos	105
<i>Capítulo VI – Conclusão</i>	124
6.1. Conclusões do estudo.....	124
6.1.1. Estratégias e procedimentos de cálculo	125
6.1.2. Contributos da sequência de problemas na aprendizagem da multiplicação	128
6.2. Reflexão sobre o estudo	130
<i>Referências Bibliográficas</i>	136
<i>Anexos</i>	142
Anexo 1 – Enunciados dos problemas.....	142
Anexo 2 – Quadros de antecipação de estratégias e procedimentos de cálculo .	149

Índice de figuras

Figura 1 – Esquema representativo das fases de construção das sequências de tarefas, baseado em Delgado (2013).	56
Figura 2 – A sequência de problemas prevista e a sequência de problemas explorada	61
Figura 3 – Resolução de Camila e Carolina – Problema I, questão 1.....	73
Figura 4 – Resolução de Iris e Tiago – Problema I, questão 1.	73
Figura 5 – Resolução de Iara e Joana – Problema I, questão 1.	74
Figura 6 – Resolução de Diana e Leandro – Problema I, questão 1.....	74
Figura 7 – Resolução de Iris e Tiago – Problema I, questão 2.	75
Figura 8 – Resolução de Alexandre e Silvano – Problema I, questão 2.	76
Figura 9 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema I, questão 1.....	76
Figura 10 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema I, questão 2.....	76
Figura 11 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema II.	77
Figura 12 – Resolução de Camila e Leandro – Problema II.....	78
Figura 13 – Resolução de Iris e Marco – Problema II.	78
Figura 14 – Resolução de Alexandre e Lara – Problema II.	79
Figura 15 – Resolução de Matilde e Rodrigo – Problema II.....	80
Figura 16 – Resolução de Carolina e Maria – Problema I, questão 1.....	80
Figura 17 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema III, questão 1.	82
Figura 18 – Resolução de Camila e Leandro – Problema III, questão 1.....	82
Figura 19 – Resolução de Alexandre e Lara – Problema III, questão 1.....	83
Figura 20 – Resolução de Diana e Joana – Problema III, questão 1.	83
Figura 21 – Resolução de Matilde, Rodrigo e Tiago – Problema III, questão 1.	84
Figura 22 – Resolução de Iris e Marco – Problema III, questão 1.	84
Figura 23 – Resolução de Matilde, Rodrigo e Tiago – Problema III, questão 2.	84
Figura 24 – Resolução de Iris e Marco – Problema III, questão 2.	85
Figura 25 – Resolução de Camila e Leandro – Problema III, questão 2.....	85
Figura 26 – Resolução de Carolina e Maria – Problema III, questão 2.....	85
Figura 27 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema III, questão 2.	86
Figura 28 – Resolução de Matilde, Rodrigo e Tiago – Problema III, questão 3.	86
Figura 29 – Resolução de Iris e Marco – Problema III, questão 3.	87
Figura 30 – Resolução de Carolina e Maria – Problema III, questão 3.....	87
Figura 31 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema III, questão 3.	88
Figura 32 – Resolução de Matilde, Rodrigo e Tiago – Problema III, questão 3.	89

Figura 33 – Resolução de Iris e Marco – Problema III, questão 4.	89
Figura 34 – Resolução de Carolina e Maria – Problema III, questão 4.	89
Figura 35 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema III, questão 4.	90
Figura 36 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema IV, questão 1.	91
Figura 37 – Resolução de Carolina e Maria – Problema IV, questão 1.	92
Figura 38 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema IV, questão 1.	92
Figura 39 – Resolução de Joana e Silvano – Problema IV, questão 1.	93
Figura 40 – Resolução de Iris e Marco – Problema IV, questão 1.	93
Figura 41 – Resolução de Joana e Silvano – Problema IV, questão 2.	94
Figura 42 – Resolução de Camila e Leandro – Problema IV, questão 2.	95
Figura 43 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema IV, questão 2.	95
Figura 44 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema IV, questão 2.	95
Figura 45 – Resolução de Alexandre e Lara – Problema IV, questão 2.	96
Figura 46 – Resolução de Matilde e Rodrigo – Problema IV, questão 2.	97
Figura 47 – Resolução de Matilde e Rodrigo – Problema V.	97
Figura 48 – Resolução de Iris e Marco – Problema V, questão 1.	98
Figura 49 – Resolução de Iris e Marco – Problema V, questão 2.	98
Figura 50 – Resolução de Iris e Marco – Problema V, questão 3.	98
Figura 51 – Resolução de Iris e Marco – Problema V, questão 4.	98
Figura 52 – Resolução de lara, Joana e Luiz – Problema VI, questão 1.	100
Figura 53 – Resolução de Alexandre e Lara – Problema VI, questão 1.	100
Figura 54 – Resolução de Camila, Leandro e Silvano – Problema VI, questão 1.	101
Figura 55 – Resolução de Carolina e Maria – Problema VI, questão 1.	102
Figura 56 – Resolução de Carolina e Maria – Problema VI, questão 2.	102
Figura 57 – Resolução de Alexandre e Diana – Problema VII.	103
Figura 58 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema VII.	104

Índice de tabelas

Tabela 1 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução de problemas (Mendes, 2012)	33
Tabela 2 – Técnicas, fontes e formas de registo de dados.....	50
Tabela 3 – Síntese cronológica do processo de recolha de dados.....	52
Tabela 4 – Estratégias e Procedimentos de cálculo da operação multiplicação, adaptado de Mendes (2012).....	53
Tabela 5 – Ordenação da sequência de problemas, na fase 3.....	58
Tabela 6 – Sequência de problemas explorada.....	62
Tabela 7 – Designação, data e fonte dos problemas explorados.	64
Tabela 8 – Estratégias e Procedimentos de cálculo usados pelos alunos na exploração da sequência de problemas.	106
Tabela 9 – A sequência de problemas, os seus contextos e números.	109
Tabela 10 – Resumo das estratégias/procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos.....	125

Capítulo I – Introdução

O presente projeto surge no âmbito da UC Estágio III, integrada no Mestrado em Educação pré-escolar e Ensino do 1.º ciclo do ensino básico. O estágio foi desenvolvido numa turma de 2.º ano de escolaridade, do 1.º ciclo do Ensino Básico (CEB).

Este projeto insere-se na área curricular da Matemática, mais concretamente foca-se na aprendizagem da multiplicação, tendo por base a resolução de uma sequência problemas.

Neste primeiro capítulo começo por apresentar as motivações que me levaram à sua concretização, o seu objetivo e as questões que lhe estão associadas. Apresento em seguida a pertinência do estudo, finalizando com uma breve descrição da organização deste relatório.

1.1. Motivações, objetivo e questões do estudo

A escolha do tema a explorar ao longo do período de estágio, e que serve de base a esta investigação, surgiu das observações que fiz e das conversas informais com a professora cooperante, em que se constatou que a turma de estágio apresentava várias dificuldades na resolução de problemas, nomeadamente, na compreensão e conseqüentemente, no uso de estratégias e procedimentos de cálculo que permitissem a sua resolução.

Segundo o PMEB (ME, 2013), o estudo internacional *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), revela que, em 2011, 60% dos alunos

portugueses do 4.º ano de escolaridade apenas conseguiam responder corretamente a questões de resposta imediata. Estes dados vão ao encontro do que foi referido pela docente cooperante, em conversas informais. Esta referiu, por várias vezes, que a resolução de problemas surgia como uma das principais dificuldades, não só da turma como de todo o Agrupamento.

Perante tal situação, e uma vez que os hábitos de trabalho desta turma, no que se refere à aprendizagem da Matemática, baseiam-se na exploração do manual, que por sua vez inclui essencialmente exercícios, considerei importante propor um conjunto de problemas, aos quais está associado o uso da multiplicação, por forma a proporcionar uma aprendizagem baseada na compreensão e com significado para os alunos.

Além do contexto de estágio revelar a necessidade de explorar a área disciplinar de Matemática, eu própria senti a necessidade de o fazer, uma vez que, a minha experiência enquanto estudante do 1.º Ciclo do Ensino Básico, vai ao encontro da observada no contexto de estágio, ou seja, baseada no ensino tradicional, onde predomina a realização de exercícios.

Ao longo da minha formação inicial tive a oportunidade de contactar com diferentes metodologias, que colocam no centro o aluno e não o professor. Esta perspetiva influenciou a minha forma de olhar para o ensino, considerando que, apesar de não existir um modelo melhor que o outro (Arends, 2008), identifiquei-me com os que requerem o envolvimento dos alunos nas aprendizagens, valorizando a sua participação ativa nas tarefas propostas (Marchão, 2012). Efetivamente, aprendemos melhor quando nos envolvemos pessoalmente na experiência de aprendizagem, construindo nós próprios o conhecimento, tornando-o significativo (Johnson & Johnson, 2013).

Posto isto, optei por desenvolver um projeto cujas práticas de sala de aula fossem diferentes das que tinha vivenciado enquanto aluna do 1.º ciclo e das que havia observado no contexto de estágio, baseando-me, essencialmente, no ensino exploratório, centrado no trabalho dos alunos, propondo a realização de problemas que lhes permitam raciocinar matematicamente e atribuir sentido à Matemática.

Neste sentido, decidi recorrer a uma sequência de problemas uma vez que esta contribui para o desenvolvimento do conhecimento dos alunos, proporcionando uma progressão da sua aprendizagem (Brocardo & Delgado, 2009).

A opção do estudo se centrar na aprendizagem da multiplicação está relacionada com o contexto de estágio, pois o período em que a investigação decorreu coincidiu com o momento em que estava prevista a exploração deste conteúdo matemático, indo ao encontro com o que é definido no PMEB (ME, 2013).

Assim, o objetivo deste estudo será compreender o modo como os alunos desenvolvem a aprendizagem da multiplicação através da resolução de uma sequência de problemas. Para atingir este objetivo formulei as seguintes questões:

- a) Que estratégias e procedimentos de cálculo são utilizados pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação?
- b) De que modo é que a proposta de sequências de problemas de multiplicação contribui para a aprendizagem desta operação?

1.2. Pertinência do estudo

A aprendizagem da Matemática desenvolve-se através de uma experiência rica e diversificada, promovendo o envolvimento ativo dos alunos em diversas atividades, entre as quais se encontra a resolução de problemas (Tenreiro-Vieira, 2010). A resolução de problemas “permite aprender de uma forma ativa, ajudar os alunos a construir conhecimento matemático novo e também testar os seus conhecimentos” (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008, p. 33), ou seja a desenvolverem aprendizagens significativas, não se limitando ao “uso padronizado de regras e fórmulas em um processo mecânico do tipo *siga modelo*” (Klein & Pereira, 2011, p. 2). A resolução de problemas permite, ainda, que os alunos desenvolvam o raciocínio lógico e o espírito investigativo, uma vez que são levados a pensar por si próprios na busca por soluções (Klein & Pereira, 2011).

Neste estudo, destaca-se a pertinência da opção por este tipo de atividade, em sala de aula pois, apesar de se reconhecer a importância da resolução de problemas, enquanto estratégia de ensino, esta continua a ser pouco explorada, optando-se, essencialmente, por um ensino tradicional, baseado na transmissão de conhecimentos (Boavida & Menezes, 2012).

As investigações acerca da aprendizagem das operações aritméticas têm vindo a aumentar nas últimas décadas, no entanto, os estudos que se focam na

multiplicação tendem a ser reduzidos, considerando-se a necessidade de compreender melhor os aspetos associados à aprendizagem desta operação (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013). Neste sentido, uma vez que existem poucos estudos acerca da aprendizagem da multiplicação, considero que esta investigação será uma mais-valia pois, é pertinente saber mais sobre esta temática.

Tanto no Programa de Matemática português como nas orientações curriculares de outros países (Austrália, Inglaterra e EUA) é preconizada a aprendizagem da multiplicação através da resolução de problemas (Mendes, 2012). Neste sentido, a aprendizagem da multiplicação surge aliada à resolução de problemas, visto que esta é considerada uma atividade central na aprendizagem da Matemática, e conseqüentemente, da multiplicação. Também o NCTM (2000/2007) defende esta ideia, referindo que, nos primeiros três anos de escolaridade, o trabalho em sala de aula deve promover a aprendizagem dos alunos sobre os vários contextos associados à multiplicação.

Na aprendizagem da multiplicação importa desenvolver a passagem do raciocínio aditivo para o multiplicativo (Mendes *et al.*, 2013), ou seja, pretende-se que os alunos adquiram o conceito de multiplicação, rompendo com a necessidade de realizar adições sucessivas, quando confrontados com um problema que envolva esta operação. Para que esta progressão seja possível é necessário que o trabalho dinamizado com os alunos seja perspectivado tendo em conta a exploração de inúmeras tarefas com contextos diversificados (NCTM, 2000/2007).

Além da diversidade, estas tarefas devem encontrar-se interligadas, partindo das ideias fundamentais da aprendizagem da multiplicação, estruturando progressivamente a multiplicação (Fosnot & Dolk, 2001), passando do modelo linear, caracterizado pela adição sucessiva por “saltos”, para o modelo retangular, que permite compreender a propriedade comutativa da multiplicação (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2011a). As tarefas propostas devem apresentar contextos diversos que tenham em consideração o sentido aditivo e o sentido combinatório da multiplicação, uma vez que segundo o PMEB (ME, 2013) estes são aspetos fundamentais a desenvolver nos dois primeiros anos de escolaridade.

Segundo Mendes, Oliveira e Brocardo (2011) quer a escolha dos contextos, quer a articulação/sequenciação das tarefas, assumem-se como ideias

fundamentais para o desenvolvimento do conhecimento sobre a multiplicação dos alunos.

Neste sentido, outro aspeto relacionado com a pertinência deste estudo é a compreensão da importância da exploração de sequência de tarefas na aprendizagem dos alunos, em particular no que respeita à multiplicação, tendo para tal, em consideração a análise das estratégias e dos procedimentos de cálculo utilizados ao longo da sequência de problemas proposta.

1.3. Organização do relatório

Relativamente à estrutura do presente relatório, este está organizado em seis capítulos.

No primeiro capítulo, apresento a introdução do projeto, expondo o tema e contextualizando-o, referindo a motivação, o objetivo, as questões do estudo e a sua pertinência.

O segundo capítulo é inteiramente dedicado à revisão da literatura, ou seja corresponde às principais ideias teóricas que serviram de base a esta investigação, nomeadamente, aspetos associados à resolução de problemas e ao ensino e aprendizagem da multiplicação, recorrendo à exploração de sequências de tarefas.

O terceiro capítulo refere-se à metodologia de trabalho utilizada para a concretização do estudo. Neste indico e justifico as opções metodológicas adotadas, apresento uma breve descrição do contexto em que o mesmo foi desenvolvido, assim como os seus participantes, caracterizando a turma. Por fim, descrevo os métodos de recolha de dados utilizados bem como o processo de análise dos mesmos.

O quarto capítulo destina-se à proposta pedagógica, ou seja à apresentação dos problemas propostos aos alunos e à descrição do modo como foram explorados na sala de aula.

No quinto capítulo é realizada a análise dos dados, organizada em duas secções alicerçadas nas questões do estudo.

Por fim, o sexto capítulo inclui as conclusões deste estudo e uma breve reflexão acerca do seu desenvolvimento.

Capítulo II – Revisão da Literatura

Este capítulo inclui a revisão da literatura associada aos temas que compõem esta investigação, encontrando-se organizado em duas secções distintas. A primeira secção foca-se na resolução de problemas e encontra-se dividida em três subsecções: uma sobre o(s) significado(s) de problema de Matemática, outra acerca da importância da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática e, por fim, debruça-se sobre a exploração de problemas em sala de aula.

A segunda secção centra-se no ensino e na aprendizagem da multiplicação, encontrando-se dividida em cinco subsecções: a primeira analisa as orientações curriculares subjacentes à aprendizagem da multiplicação, a segunda aborda a aprendizagem da multiplicação e a sua progressão, a terceira classifica as estratégias e procedimentos de cálculo possíveis de serem utilizadas na resolução de tarefas multiplicativas, a quarta incide nas características dos contextos das tarefas e, por fim, a quinta subsecção realça a importância de conceber sequências de tarefas para potenciar a aprendizagem desta operação.

2.1. Resolução de problemas

Nesta secção começo por discutir aspetos relacionados com o significado de problema de Matemática, considerando as perspetivas de vários autores que se debruçam sobre esta temática e identificando o significado de problema assumido neste estudo. Em seguida, realço a importância da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática baseando-me nas orientações curriculares nacionais e

internacionais. Por fim, discuto os aspetos a considerar na escolha e na exploração de problemas, em sala de aula, atendendo às suas características, ao papel do professor e dos alunos ao longo da sua resolução.

2.1.1. O(s) significado(s) de problema de Matemática

Ponte (2005) considera que um problema de Matemática constitui um tipo de tarefa específica com determinado grau de estrutura e de desafio. O grau de estrutura de uma tarefa está associado ao nível de explicitação das questões, conduzindo a tarefas fechadas ou a tarefas abertas. As tarefas fechadas caracterizam-se por indicarem claramente o que é dado e o que é pedido. Já as tarefas abertas apresentam um grau significativo de indeterminação no que é dado e/ou no que é pedido. O grau de desafio relaciona-se com o grau de dificuldade que os alunos apresentam na resolução da tarefa, podendo variar entre reduzido e elevado, consoante o conhecimento que o aluno dispõe para a resolver. Cruzando estas dimensões, as tarefas podem ser organizadas em quatro tipos: (i) os exercícios (fechada com desafio reduzido); (ii) os problemas (fechada com desafio elevado); (iii) as explorações (aberta com desafio reduzido); e, (iv) as investigações (aberta com desafio elevado) (Ponte, 2005).

Para o desenvolvimento deste estudo foi explorada uma sequência de tarefas que, considerando a organização acima descrita, se enquadravam, no segundo tipo de tarefas – os problemas, pelo que importa explicitar as suas características mais aprofundadamente. Contudo, o entendimento de problema não é único devido à sua complexidade, diferindo de autor para autor (Vale & Pimentel, 2004).

Para Ramos, Mateus, Matias e Carneiro (2002) e Ponte (2005) o problema é uma tarefa fechada, na medida em que são indicados, claramente, os dados e o que é pretendido, ou seja o objetivo a atingir. Deste modo, contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que este raciocínio baseia-se numa relação rigorosa entre os dados e os resultados (Ponte, 2005). Para além disso, apresenta um elevado nível de desafio, obrigando, os alunos, a procurarem diferentes estratégias para o resolver (Ramos *et al.*, 2002), possibilitando uma efetiva experiência matemática (Ponte, 2005).

Kantowski (1980), citado por Serrazina (s.d.) considera que um problema é uma situação, com a qual a pessoa se depara e que não dispõe de um procedimento ou algoritmo que a conduza à sua solução. No mesmo sentido, Boavida (2008) considera que estamos perante um problema quando não se dispõe de processos conhecidos para a sua resolução, ou seja, quando é necessário procurar um caminho para chegar à solução, envolvendo esta procura a utilização de estratégias. Vale e Pimentel (2004) afirmam que a forma de encarar um problema depende dos conhecimentos que cada indivíduo possui. Como tal, o que é um problema para um indivíduo pode ser um exercício para outro.

Posto isto, é essencial que o problema comporte sempre um grau de dificuldade apreciável pois, caso seja demasiado acessível não será um problema mas sim um exercício (Ponte, 2005). No entanto, o grau de dificuldade deve ser moderado, na medida em que se for demasiado difícil pode levar ao desinteresse do aluno, levando-o a desistir rapidamente da sua resolução (Ponte, 2005).

Para Polya (1995), citado por Klein e Pereira (2011), os problemas matemáticos estão relacionados com a própria conceção do que é um problema, considerando que para resolvê-lo é necessário elaborar vários procedimentos de resolução, comparar os seus resultados e validar os procedimentos utilizados. Neste sentido, este autor distingue quatro tipos de problema: (i) os problemas rotineiros, (ii) os problemas de determinação, (iii) os problemas de demonstração, e (iv) os problemas práticos.

Os *problemas rotineiros* caracterizam-se por serem comuns, podendo ser solucionados através da substituição de dados específicos ou pelo seguimento, passo a passo, de um exemplo (Klein & Pereira, 2011).

Os *problemas de determinação* têm como objetivo determinar o valor de uma incógnita, tendo como partes principais a incógnita, os dados e a condicionante (Klein & Pereira, 2011).

Os *problemas de demonstração* pretendem demonstrar que determinada afirmação, claramente enunciada, é verdadeira ou falsa (Klein & Pereira, 2011).

Os *problemas práticos* são mais complexos, uma vez que não são apresentados no enunciado, de forma explícita, as incógnitas, os dados e as condicionantes. Pelo que, para resolver este tipo de problemas é necessário já ter adquirido um conjunto de conhecimentos (Klein & Pereira, 2011).

Boavida (2008) considera que o problema pode ser analisado tendo em atenção duas dimensões: o enunciado e o processo de resolução. No que se refere ao enunciado é importante saber se este fornece informação pertinente para a sua resolução, sendo necessário selecionar, de entre vários dados, aqueles que são relevantes. Esta identificação e seleção de dados tornam muitos problemas difíceis. Como tal, segundo a mesma autora é fundamental proporcionar, aos alunos, oportunidades de selecionar dados importantes e identificar informação em falta, necessária para a resolução do problema. Considerando o processo de resolução, Boavida (2008) apoia-se nas ideias de Vale e Pimentel (2004), optando por uma classificação mais simples, adequada ao 1.º Ciclo, atentando apenas a três tipos de problemas matemáticos: (i) problemas de cálculo; (ii) problemas de processo; e, (iii) problemas abertos.

Os *problemas de cálculo* requerem que os alunos analisem os dados apresentados no enunciado, avaliem o que é pedido e efetuem a operação ou operações que considerem apropriadas. No âmbito deste tipo de problema podem distinguir-se problemas de um passo ou de mais passos (Boavida *et al.*, 2008). Segundo Charles e Lester (1986), referidos por Vale e Pimentel (2004), os problemas de um passo podem resolver-se recorrendo apenas a uma operação, enquanto os problemas de mais passos requerem a utilização de duas ou mais operações. Este tipo de problemas surge, geralmente, nos manuais e pretende introduzir ou prosseguir com o desenvolvimento de operações aritméticas já ensinadas, pelo que a sua resolução passa por identificar as operações ou os algoritmos adequados (Lopes, 2002).

Os *problemas de processo* apresentam, geralmente, contextos mais complexos e requerem um maior esforço para os compreender e chegar à solução pois, os alunos têm de recorrer a estratégias de resolução mais criativas para descobrir o caminho a seguir e não apenas selecionar as operações apropriadas (Boavida *et al.*, 2008). Segundo o NCTM (2000/2007), os problemas de processo apelam ao envolvimento dos alunos e proporcionam experiências matemáticas ricas e significativas. Ao contrário dos problemas de cálculo, os problemas de processo tendem a ter diferentes modos de resolução mas apenas uma solução, proporcionando, aos alunos, a oportunidade de procurar vários métodos de resolução e de partilhá-los com os colegas, fomentando o gosto pela resolução de

problemas (Lopes, 2002). Para Vale e Pimentel (2004), este tipo de problemas é o que revela mais potencialidades, pois apelam ao uso de estratégias diversificadas, excluindo a utilização de processos mecanizados ou estandardizados.

Os *problemas abertos* também designados por investigações caracterizam-se por ter vários caminhos de resolução e, eventualmente, várias respostas corretas (Boavida *et al.*, 2008). Este tipo de problemas requer que os alunos explorem as suas regularidades e formulem conjeturas, tendo para tal, de relacionar o problema com outros explorados anteriormente (Moreira, 2001). Posto isto, os problemas abertos contribuem para o desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão (Boavida *et al.*, 2008).

Independentemente do tipo de problema que o professor proponha aos alunos o importante é que seja desafiador e que desperte a curiosidade e o gosto pela busca de soluções (Klein & Pereira, 2011). Os mesmos autores afirmam que os problemas podem ser utilizados na introdução de novos conteúdos ou na aplicação de conhecimentos previamente adquiridos, ajudando os alunos na compreensão dos conceitos explorados e facilitando a aprendizagem dos mesmos.

Atendendo à discussão acima, neste estudo, o problema é entendido na aceção apresentada por Boavida (2008). Esta autora refere-se a três tipos de problemas, pelo que considero que o tipo de problema explorado, nesta investigação, vai ao encontro do entendimento de *problemas de processo*. Este tipo de problema caracteriza-se por desafiar e envolver o aluno na procura de estratégias e procedimentos necessários à sua resolução, recorrendo ou não a conhecimentos prévios.

2.1.2. A importância da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática

A resolução de problemas “assume grande importância na aprendizagem da Matemática e está patente quer nas orientações a nível internacional, quer a nível nacional” (Morais, 2011, p. 30). Segundo o NCTM (2000/2007), a resolução de problemas é entendida como uma parte integrante e fundamental no ensino e na aprendizagem da Matemática. Permite relacionar os vários tópicos matemáticos, assim como, a Matemática com outras disciplinas, possibilita a aplicação e

adaptação de diversas estratégias e procedimentos de cálculo e proporciona a comunicação das diversas etapas de resolução e dos respectivos resultados, contribuindo para o desenvolvimento de um ambiente propício a aprendizagens significativas.

Polya (1995), citado por Klein e Pereira (2011) vai ao encontro desta ideia, uma vez que considera a resolução de problemas fundamental para que o aluno pense por si próprio, contribuindo para o desenvolvimento do espírito investigativo e não apenas para o uso padronizado de regras e fórmulas. Efetivamente, ao resolverem problemas os alunos não se limitam a aplicar algoritmos ou fórmulas, sendo envolvidos em processos de elevado nível de complexidade cognitiva, no qual estão presentes processos de representar, relacionar e comunicar (Ponte & Serrazina, 2000).

Também Boavida (2008) entende que a resolução de problemas permite o contacto com ideias matemáticas significativas, uma vez que desafia o aluno a pensar para além do seu ponto de partida, ampliando o seu pensamento e, conseqüentemente a racionar matematicamente. A mesma autora refere que esta atividade proporciona: (i) o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação, (ii) fomenta o raciocínio e a capacidade de justificação, (iii) permite estabelecer conexões entre os vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares e (iv) apresenta a Matemática como uma disciplina útil à vida quotidiana.

Boavida (2008) refere que vários autores consideram que a resolução de problemas é um processo de aplicar conhecimento já adquirido a situações novas, podendo envolver a exploração de questões, a aplicação de estratégias e o teste de conjeturas. Contudo, afirma que “a resolução de problemas pode, também, ser perspectivada num sentido mais abrangente, designando uma abordagem de ensino da Matemática: *ensino da Matemática através da resolução de problemas*” (Boavida *et al.*, 2008, p. 14). Segundo Lampert (2001) citado por Boavida (2008), esta abordagem de ensino tem como pano de fundo a ideia de que a exploração e discussão de tarefas desafiadoras, que contribuam para a construção de ideias matemáticas poderosas e que incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, são essenciais para que os alunos aprendam Matemática com compreensão. Neste sentido, os problemas são entendidos como facilitadores da aprendizagem, uma vez

que ajudam os alunos a compreender os conceitos e facilita a aprendizagem de processos, bem como, desenvolvem a autonomia no 'fazer matemática' (Klein & Pereira, 2011).

O PMEB (ME, 2013) encara a resolução de problemas como uma atividade que envolve a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos, a seleção e aplicação de regras e procedimentos, a revisão da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais, devendo, portanto, ser objeto de atenção sistemática durante o ensino de qualquer tópico matemático. O entendimento da atividade de resolução de problemas neste programa parece corresponder à ideia de que é sobretudo um processo de aplicação de conhecimento, pertencendo assim à primeira perspectiva acima apresentada por Boavida (2008).

Mas o que caracteriza um 'bom' problema? Para Boavida (2008) os bons problemas são aqueles que desafiam os alunos a desenvolver e a usar estratégias, que permitem introduzir novos conceitos e que proporcionam contextos para usar e desenvolver diferentes capacidades. Deste modo, o professor que proponha aos alunos a resolução de problemas com estas características e apropriados ao seu conhecimento está a contribuir para o desenvolvimento do pensamento independente e crítico dos alunos, na medida em que são estabelecidas conexões entre vários temas, dentro e fora da Matemática e é estimulada a argumentação e a comunicação matemática.

Segundo Polya (1995), citado por Klein e Pereira (2011) o professor ao utilizar a resolução de problemas com o intuito de desenvolver nos alunos o espírito solucionador e a capacidade de resolução deve incutir-lhes interesse pela resolução de problemas e proporcionar-lhes várias oportunidades de imitar e praticar as estratégias e procedimentos de resolução. Neste sentido, o NCTM (2000/2007) preconiza o recurso à resolução de problemas de forma sistemática e continuada, proporcionando aos alunos situações em que possam analisar, refletir e validar as estratégias usadas, bem como a plausibilidade e adequação dos resultados obtidos. É assim, indiscutível a importância que a resolução de problemas pode assumir na aprendizagem da Matemática.

2.1.3. A exploração de problemas em sala de aula

Ponte e Serrazina (2000) consideram que a exploração de problemas, em sala de aula, contribui para que os papéis desempenhados pelo professor e aluno se alterem, quando comparado com o ensino ‘tradicional’ da Matemática. Ou seja, entendem que com a adoção deste tipo de tarefa, o professor deixa de ser o orador principal e o aluno um recetor passivo, passando, ambos, a serem entendidos como intervenientes fundamentais na aprendizagem.

O professor, em vez de ensinar um conjunto de estratégias de resolução de problemas aos alunos, pode optar por propor-lhes vários problemas que favoreçam o surgimento dessas estratégias, identificando-as e sistematizando-as posteriormente. Deste modo, os alunos estarão aptos a resolver diferentes problemas ou o mesmo problema de diversos modos. Assim, quando uma estratégia não resultar há sempre outra a que poderão recorrer, o que os ajuda a ganhar confiança na sua capacidade de resolver problemas (Boavida *et al.*, 2008).

Para Polya (2003), citado por Pinto e Canavarro (2012), a resolução de problemas matemáticos desenvolve-se seguindo um percurso composto por quatro etapas: (i) compreensão do problema, (ii) elaboração de um plano, (iii) execução do plano e (iv) avaliação dos resultados.

A *compreensão do problema* é a primeira etapa. Nesta, o aluno procura perceber o problema, identificando os dados relevantes, a incógnita e clarificando termos e expressão desconhecidas, de modo a precisar o que é pretendido (Pinto & Canavarro, 2012).

A *elaboração de um plano* é a etapa que corresponde à descoberta de conexões entre os dados e a incógnita, de forma a encontrar o plano de resolução mais eficaz. Nesta etapa, são estabelecidas conexões com problemas já resolvidos, identificando diferenças e semelhanças de modo a encontrar as estratégias que se afigurem mais adequadas (Pinto & Canavarro, 2012).

A *execução do plano* é a terceira etapa e caracteriza-se pelo uso da estratégia selecionada, no plano delineado anteriormente, procurando resolver o problema (Pinto & Canavarro, 2012).

A *avaliação dos resultados* é a última etapa da resolução do problema. Nesta, é revista e avaliada a solução obtida, verificando a sua razoabilidade e adequação

ao problema. Além disso, são exploradas estratégias alternativas de resolução (Pinto & Canavarro, 2012).

Segundo Polya (2003), citado por Pinto e Canavarro (2012), as quatro etapas acima referidas podem ajudar o aluno a organizar o seu processo de resolução de problema, uma vez que o ajuda a organizar o seu pensamento de forma mais sistemática e eficaz.

Boavida (2008) considera que o modelo de Polya é bastante complexo para alunos do 1.º ciclo e que nem sempre é possível distinguir a segunda da terceira fase pois, ao ser estabelecido um plano este começa imediatamente a ser desenvolvido. Por esta razão, sugere um modelo mais simplificado, onde a segunda e terceira fases estão articuladas, considerando as seguintes etapas: (i) ler e compreender o problema, (ii) fazer e executar um plano e (iii) verificar a resposta.

Ler e compreender o problema é a primeira etapa, na qual se procura conhecer os dados e as condições impostas para a sua resolução. Para tal, são analisadas todas as palavras, expressões e exigências solicitadas, sendo elaborada uma sistematização dos dados fundamentais. Após a identificação e recolha de informação, deve-se organizar a mesma de modo a facilitar a seleção de uma estratégia eficaz, o que corresponde à etapa *fazer e executar um plano*. Na seleção desta estratégia é importante recordar as resoluções de problemas semelhantes de modo a selecionar as estratégias mais adequadas à resolução do problema. Em seguida, executa-se a estratégia escolhida. Após a execução do plano deve-se confirmar se as soluções encontradas se adequam ao enunciado e devem-se explorar estratégias alternativas que solucionem o problema, o que corresponde à última etapa – *Verificar a resposta* (Boavida *et al.*, 2008).

Segundo Tenreiro-Vieira (2010), os modelos de resolução de problemas podem constituir-se como um valioso guia na organização do processo de ensino e de aprendizagem, ajudando os alunos a tornarem-se melhores resolvidores de problemas. Afirma, ainda, que o conhecimento de diferentes estratégias pode ajudar o aluno a enfrentar um problema, progredindo eficazmente até descobrir uma resolução adequada.

2.2. O ensino e a aprendizagem da multiplicação

Nesta secção começo por discutir os aspetos relacionados com a aprendizagem da multiplicação, atendendo aos documentos de orientação curricular e baseando-me em autores que se debruçam sobre esta temática. Seguidamente, analiso os processos necessários à aprendizagem da multiplicação e o modo como esta aprendizagem progride. Na terceira subsecção classifico as diferentes estratégias e os procedimentos de resolução de tarefas multiplicativas. A quarta destina-se às características das tarefas que promovem a aprendizagem da multiplicação, nomeadamente aos vários contextos da multiplicação, considerando os diferentes sentidos desta operação, a importância dos modelos e dos números envolvido. Por fim, termino com a discussão acerca da importância da concretização de sequências de tarefas, em sala de aula.

2.2.1. A multiplicação nas orientações curriculares

Uma vez que este estudo é realizado numa turma de 2.º ano, importa explicitar as orientações curriculares para a aprendizagem da multiplicação delineadas para este ano de escolaridade.

Em termos nacionais, o anterior Programa de Matemática do 1.º ciclo (ME, 2007) realça que no 1.º e 2.º ano é fundamental desenvolver a compreensão da operação no sentido aditivo e no sentido combinatório, iniciando a abordagem a esta operação com a passagem da adição sucessiva de parcelas iguais para o conceito de multiplicação. Considera também que as estratégias de cálculo mental e escrito, associadas a esta operação, devem ter como suporte a sua representação horizontal, surgindo o algoritmo convencional apenas no 3.º ano. Perspetiva assim, um desenvolvimento gradual da aprendizagem dos algoritmos, considerando que inicialmente, “os alunos devem ter a possibilidade de usar formas e cálculo escrito informais, de construir os seus próprios algoritmos ou de realizar os algoritmos usuais com passos intermédios” (ME, 2007, p. 14)

Atualmente, o Programa de Matemática (ME, 2013) está associado a um conjunto de metas curriculares que regulam os objetivos a ser atingidos. Posto isto, são estabelecidos objetivos específicos para cada ano, ao contrário do antigo

programa que estabelecia objetivos para cada dois anos. À semelhança do programa anterior, a aprendizagem da multiplicação é introduzida no 2.º ano de escolaridade, devendo iniciar a abordagem à multiplicação com o recurso a adições sucessivas de parcelas iguais, permitindo a compreensão do sentido aditivo e combinatório da operação. No entanto, o atual programa antecipa o surgimento do algoritmo convencional para o 2.º ano.

Relativamente à aprendizagem das tabuadas, o antigo programa (ME, 2007) propõe, inicialmente, a construção das tabuadas do 2, do 5 e do 10 e, a partir destas, a construção das tabuadas do 3, do 4 e do 6, baseando-se no estabelecimento de relações entre os vários produtos, especialmente quando envolvem dobros. Já o atual programa (ME, 2013) propõe a construção e memorização das tabuadas do 2, 3, 4, 5, 6 e 10, não sendo dada qualquer indicação de como estas tabuadas podem surgir e qual a ordem. Porém, a forma como aparecem referidas no programa sugere, implicitamente, uma certa sequencialidade.

Importa referir que ao contrário do atual programa (ME, 2013) que nada refere acerca do desenvolvimento do sentido de número e que pouca relevância concede ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, o programa anterior (ME, 2007) salienta que a aprendizagem das operações e, em particular da multiplicação, deve ser realizada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, afirmando que “valoriza-se o cálculo numérico na representação horizontal, permitindo que seja levado a cabo um trabalho consistente com os números e as operações ligado ao desenvolvimento do sentido de número” (p. 13). Esta ideia é reforçada ao apresentar como propósito principal do ensino do tema Números e Operações “desenvolver nos alunos o sentido do número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental” (p. 13). Deste modo, é assumida uma perspetiva que relaciona o desenvolvimento do sentido do número com o desenvolvimento do cálculo mental, afirmando o mesmo documento que “o cálculo mental tem de ser desenvolvido desde o início do 1.º ciclo e está intimamente relacionado com o desenvolvimento do sentido de número” (p. 10).

No mesmo sentido que o anterior programa (ME, 2007), em termos internacionais, o NCTM (2000/2007) salienta, igualmente, a importância do desenvolvimento do sentido de número nos primeiros anos do ensino básico, referindo que “a compreensão dos números e das operações, o desenvolvimento do

sentido de número e a aquisição do cálculo aritmético constituem o cerne da educação matemática” (NCTM, 2000/2007, p. 34). O mesmo documento, considera ainda, no que diz respeito à multiplicação, que até ao 2.º ano de escolaridade deve-se promover a compreensão dos alunos sobre as várias situações associadas a esta operação, realçando as que correspondem à repetição de parcelas iguais.

Vários países, nomeadamente Inglaterra, Austrália, EUA e Portugal, dispõem de documentos curriculares que apontam para a necessidade de desenvolver a compreensão da multiplicação através da resolução de problemas, em que esta operação surja em diversos contextos (Mendes, 2012). Para além disso, é salientado a importância de propor aos alunos várias situações associadas a esta operação de modo a que progredam do uso de estratégias aditivas para estratégias multiplicativas (Mendes, 2012).

2.2.2. A aprendizagem da multiplicação e sua progressão

Considerando a perspectiva de Fosnot e Dolk (2001) a aprendizagem da multiplicação deve ser fundamentada nas ‘grandes ideias’ (*big ideas*). Estas estão na base da progressão do raciocínio multiplicativo que os alunos vão fazendo, ou seja, estão relacionadas com a evolução dos procedimentos de cálculo usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação. São cinco as ‘grandes ideias’ associadas à multiplicação, apresentadas por estes autores: (i) a compreensão de um determinado grupo como unidade; (ii) a propriedade distributiva em relação à adição e à subtração; (iii) a propriedade comutativa; (iv) a propriedade associativa; e, (v) os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez. Importa, portanto, compreender o que os autores entendem por cada uma destas ideias e como se encontram relacionadas com a aprendizagem dos alunos.

A ‘grande ideia’, a *compreensão de um determinado grupo como unidade*, está relacionada com o facto de os alunos utilizarem números para a contagem de objetos. Porém, a partir do momento em que compreendem que podem contar um determinado número de objetos sem recorrer à contagem de um em um, estão a desenvolver uma capacidade de cálculo que lhes será muito útil para a aprendizagem da multiplicação (Fosnot & Dolk, 2001).

Outra ‘grande ideia’ está relacionada com a *propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração*, sendo essencial que os alunos a adquiram. Para tal, devem compreender que numa multiplicação, a decomposição dos fatores, bem como a adição ou subtração dos produtos parciais que se obtêm, não altera o resultado do produto dos fatores iniciais (Fosnot & Dolk, 2001).

A ideia referente à *propriedade comutativa da multiplicação*, diz respeito ao facto de na multiplicação, a troca da ordem dos fatores não alterar, em nada, o produto final (Fosnot & Dolk, 2001).

Outra das ideias está relacionada com os *padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez*. Esta relaciona-se com a propriedade comutativa desta operação e com a multiplicação por dez. Em vez de se incutir nos alunos a ideia de que quando se multiplica um número por dez basta acrescentar um zero, é fundamental que os alunos compreendam que 5×10 corresponde a cinco grupos de dez elementos. No entanto, é ainda mais importante que os alunos compreendam a propriedade associada a esta ideia, a propriedade comutativa da multiplicação. Ou seja, os alunos devem compreender que calcular 5×10 ou 10×5 é exatamente igual, obtendo-se o mesmo produto final (Fosnot & Dolk, 2001).

A ‘grande ideia’ da *propriedade associativa da multiplicação*, está relacionada com o facto de, na multiplicação, os fatores poderem ser agrupados de diferentes formas sem que exista qualquer alteração no produto final (Fosnot & Dolk, 2001).

Considerando a progressão da aprendizagem da multiplicação Jacob e Willis (2003) apresentam cinco fases que os alunos necessitam de percorrer para que o seu raciocínio multiplicativo seja desenvolvido, sendo elas: “contar um a um; composição aditiva; contar de vários para um; relações multiplicativas; e, operando com operadores” (p. 460). Atendendo às cinco fases referidas, importa, analisar o que os autores entendem por cada uma.

Na fase, *contar um a um*, a criança conta objeto a objeto, de modo a descobrir o número total de objetos, no entanto, se a ordem dos mesmos for alterada a criança sente necessidade de voltar a contar, revelando que não confia na contagem realizada. Deste modo, os autores defendem que as crianças nesta fase devem explorar tarefas que lhes permitam compreender que um conjunto de objetos pode ser contado de diferentes formas sem que a quantidade se altere (Jacob & Willis, 2003).

Outra fase é a *composição aditiva*, nesta as crianças já percebem que a quantidade é permanente, independentemente da forma como os objetos são contados ou organizados. Além disso, reconhecem grupos iguais, sendo capazes de utilizar a contagem por saltos e/ou a adição repetida (Jacob & Willis, 2003).

A fase *contar de vários para um* implica que a criança considere o número de grupos e o número de elementos por grupo. Assim, partindo do número de elementos de um grupo a criança adiciona repetidamente esse número, sabendo que o tem de repetir, o número de grupos existentes. Por exemplo, existem 3 grupos com 5 bolas, a criança sabe que tem de contar 5 elementos para 1 grupo, 10 elementos para 2 grupos e 15 elementos para 3 grupos (Jacob & Willis, 2003).

Relações multiplicativas, segundo os autores, nesta fase a criança compreende que a multiplicação envolve três aspetos: grupos iguais (multiplicando), o número de elementos por grupo (multiplicador) e o total (produto). Deste modo, a criança percebe qual o número que se refere aos elementos e qual se refere ao número de grupos, sabendo que tem de calcular, por exemplo 3×5 , considerando o exemplo anterior (Jacob & Willis, 2003).

A fase *operando com operadores* significa que a criança perante uma questão com várias variáveis recorre a diversas operações para a resolver (Jacob & Willis, 2003).

Jacob e Willis (2003) defendem que em cada uma destas fases o nível de compreensão sobre a multiplicação vai evoluindo e para tal, é importante que o professor compreenda e interprete o que os alunos conseguem ou não fazer, baseando-se nessas informações para propor tarefas adequadas e que potenciem a progressão nas diversas fases de raciocínio multiplicativo.

Segundo Brocardo, Delgado e Mendes (2005) à semelhança da aprendizagem de outras operações, a aprendizagem da multiplicação desenvolve-se através de três níveis distintos: (i) cálculo por contagem; (ii) cálculo estruturado; e, (iii) cálculo formal.

O *cálculo por contagem* é considerado o primeiro nível da multiplicação. Neste nível os alunos devem fazer uso da operação da multiplicação, no entanto, como ainda não têm o raciocínio multiplicativo desenvolvido, recorrem a adições sucessivas. Por exemplo, quando se apresenta uma caixa de frutas aos alunos e se lhes pede para calcularem o número total de frutas, o esperado é que efetuem

cálculos multiplicativos (utilizando o número de frutas que se encontram na vertical e na horizontal, recorrendo ao modelo de disposição retangular), mas se estes efetuarem contagens de 2 em 2, 3 em 3 ou 4 em 4 estão a recorrer a adições sucessivas e não à multiplicação (Brocardo *et al.*, 2005).

O *cálculo estruturado* é o segundo nível da multiplicação. Neste caso, os alunos já estabelecem relação entre uma mesma quantidade que se repete um determinado número de vezes, recorrendo a diferentes modelos para a concretização dos seus cálculos. Considerando o exemplo anterior, os alunos podem observar a caixa de frutas e referir que são 20 frutas, para chegar a esta conclusão podem recorrer a vários modelos, nomeadamente o linear e o retangular. Por um lado, o aluno pode optar por realizar adições sucessivas, tendo em conta o número de frutas em linha ou em coluna, ou seja, $5+5+5+5$ ou $4+4+4+4+4$. Neste caso, o aluno optou pelo uso de um modelo linear que apesar de não recorrer ao uso da multiplicação, revela que percebe que o número de frutas se repete de linha para linha ou de coluna para coluna. Por outro lado, o aluno pode optar por realizar cálculos multiplicativos, compreendo que o número 4 repete-se 5 vezes ou o número 5 repete-se 4 vezes e, portanto, é 4×5 ou 5×4 , respetivamente. Neste caso, o modelo utilizado pelo aluno é o modelo de disposição retangular, uma vez que multiplica o número de frutas que se encontram na horizontal pelo número de frutas da vertical, ou vice-versa, permitindo, a exploração da propriedade comutativa da multiplicação. O uso de ambos os modelos surge partindo da análise da imagem associada à tarefa (Brocardo *et al.*, 2005).

O *cálculo formal* corresponde ao último nível. Neste, os alunos já conseguem estabelecer diferentes relações numéricas, recorrer a factos por si conhecidos e às propriedades da operação, não necessitando de recorrer a modelos de apoio ao cálculo. Por exemplo, para calcular 6×14 os alunos poderão recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, ao fazerem: $6 \times 14 = 6 \times 10 + 6 \times 4$ (Brocardo *et al.*, 2005).

O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo implica uma transformação muito importante no pensamento dos alunos. Por isso, é fundamental dar-lhes a oportunidade de explorar uma grande variedade de problemas que, embora mobilizem a mesma operação, tenham estruturas diferentes, como por exemplo problemas que permitam ao aluno lidar com grupos equivalentes ou com a

disposição retangular, de modo a que se familiarizem com a variedade de situações multiplicativas (Huinker, 2002).

2.2.3. Estratégias e procedimentos de resolução de problemas de multiplicação

Existem diferentes estratégias e procedimentos de cálculo para as quatro operações aritméticas existentes na Matemática, porém, uma vez que este estudo incide sobre a multiplicação, serão analisadas as estratégias e os procedimentos associados a esta operação.

Segundo Anghileri (1989), citada por Mendes (2012), as estratégias descrevem o modo como os alunos compreendem os números e os utilizam. No que se refere à multiplicação, entende que se trata de uma compreensão que evolui consoante os alunos compreendem as diferentes conexões possíveis de estabelecer entre as diferentes operações, como é o caso da relação entre a adição e a multiplicação. Já Beishuizen (1997) considera que as estratégias utilizadas pelos alunos relacionam-se com a sua escolha de diferentes opções, conforme a estrutura do problema. Este autor considera, ainda, que os procedimentos de cálculo dizem respeito aos passos de cálculo que os alunos executam.

Neste estudo o entendimento sobre os termos estratégia e procedimentos de cálculo segue a perspectiva de Beishuizen (1997), uma vez que se considera que as estratégias de cálculo referem-se ao modo como os alunos entendem o problema e iniciam a sua resolução, atendendo às suas características, recorrendo a estratégias de contagem, aditivas ou multiplicativas. Os procedimentos de cálculo correspondem à forma como os alunos manipulam os números, ou seja, todos os cálculos que realizam para usarem a estratégia de resolução pensada.

As estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação estão intimamente relacionados ao modo como as ideias que estes têm sobre esta operação (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013), ou seja, à medida que vão adquirindo mais conhecimentos sobre a multiplicação há uma progressão nas estratégias e nos procedimentos de cálculo, tornando-se cada vez mais eficazes. Também, Treffers e Buys (2008) afirmam que a evolução dos procedimentos de cálculo adotados, pelos alunos, corresponde a uma progressiva

esquematização através de diferentes níveis de desenvolvimento da multiplicação. Assim como Dolk (2008) que afirma que “as estratégias dos alunos são sempre representativas das suas ideias matemáticas” (p. 51).

Segundo Mendes, Brocardo e Oliveira (2011b) os alunos recorrem a diversos procedimentos quando resolvem tarefas de multiplicação. Como tal, Mendes (2012) apresenta estes diversos procedimentos organizados em categorias globais de procedimentos: procedimentos de contagem, procedimentos aditivos, procedimentos subtrativos e procedimentos multiplicativos. Para cada uma destas categorias foram identificados e caracterizados procedimentos específicos.

Tendo em conta que para este estudo as estratégias e os procedimentos de cálculo usados pelos alunos assumem um papel relevante, apresento na tabela 1 a caracterização específica das diferentes categorias de procedimentos, bem como dos diferentes procedimentos específicos que lhes estão inerentes, baseando-me nas ideias de Mendes (2012). É de salientar, que segundo o entendimento dado aos termos estratégias e procedimentos de cálculo neste estudo, o que Mendes (2012) considera como categorias de procedimentos corresponde a estratégias e como procedimentos específicos a procedimentos de cálculo.

Tabela 1 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução de problemas (Mendes, 2012)

Categorias de procedimentos	Procedimentos específicos
Procedimentos de contagem	Contar por saltos
Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
Procedimentos subtrativos	Subtrair sucessivamente
Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar uma decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
Multiplicar em coluna	

Associado às **estratégias de contagem** (designadas por procedimentos de contagem em Mendes (2012)) existe um único procedimento – *contar por saltos*. Este procedimento corresponde a uma contagem sucessiva, partindo de um

determinado número adicionando-o sucessivamente. Por exemplo, para contabilizar um conjunto de 20 objetos podem ser organizados grupos de cinco, dando saltos de cinco em cinco – 5, 10, 15, 20. Segundo Mendes (2012) a grandeza dos números envolvidos tende a estar relacionado com o “comprimento” escolhido para os saltos, ou seja, quanto maior for a grandeza dos números maior serão os saltos.

Associado às **estratégias aditivas** (designadas por procedimentos aditivos em Mendes (2012)) existe um conjunto de três procedimentos de cálculo: *adicionar sucessivamente*, *adicionar dois a dois* e *adicionar em coluna*.

O procedimento *adicionar sucessivamente* corresponde à adição sucessiva de um mesmo número, em que os cálculos são apresentados horizontalmente. Por exemplo, quando o aluno adiciona $4+4+4+4+4$ para calcular um determinado número de objetos e, apenas termina quando os contabiliza a todos.

O procedimento *adicionar dois a dois* implica adição de parcelas iguais mas, ao contrário do procedimento anterior, agrupadas duas a duas. Por exemplo, $2+2+2+2= 4+4$. Segundo Mendes (2012) os alunos recorrem a este procedimento para resolverem problemas de multiplicação, efetuando cálculos mais depressa, recorrendo geralmente a um esquema em árvore.

Associado às **estratégias subtrativas** (designadas por procedimentos subtrativos em Mendes (2012)) existe apenas um procedimento de cálculo – *subtrair sucessivamente*. Este procedimento corresponde à subtração sucessiva, em que partindo do aditivo se subtrai um mesmo número, que corresponde ao subtrativo, podendo os cálculos ser apresentados na vertical ou na horizontal (Mendes, 2012).

Relativamente às **estratégias multiplicativas** (designadas por procedimentos multiplicativos em Mendes (2012)) existem nove procedimentos de cálculo associados:

Usar produtos conhecidos. Este procedimento consiste na utilização de produtos conhecidos para efetuar os cálculos necessários, ou seja, corresponde à utilização das tabuadas já trabalhadas com os alunos. Segundo Mendes (2012) quando os alunos compreendem e conhecem as tabuadas usam-nas na resolução de problemas, sem necessitarem de efetuar cálculos, pois já conhecem os produtos.

Usar relações de dobro. Tal como o nome indica, este procedimento implica a utilização do dobro de um número para a concretização de um cálculo multiplicativo.

A opção por este procedimento parece ser determinada pelo contexto do problema (Mendes, 2012).

Usar múltiplos de cinco e de dez é um procedimento de cálculo utilizado pelos alunos quando recorrem a números múltiplos de cinco e/ou de dez para efetuarem os cálculos (Mendes, 2012).

Usar a decomposição não decimal de um dos fatores. Este procedimento implica a decomposição não decimal de um dos fatores, a transformação dos produtos parciais e envolve a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Normalmente corresponde “ à substituição de um número por uma adição de duas parcelas iguais, ou de parcelas que, de alguma forma facilitam o cálculo” (Mendes, 2012, p. 249).

Usar a decomposição decimal de um dos fatores, consiste na decomposição decimal (separando centenas, dezenas e unidade) de um dos produtos parciais. O recurso a este procedimento de cálculo está relacionado com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (Mendes, 2012).

Ajustar e compensar. Este procedimento consiste na substituição, por um número mais ‘fácil’ de ser trabalhado, de um dos fatores. Ao realizar esta substituição, caso o número escolhido seja superior ao que correspondia o fator, terá de ser realizada uma compensação, através da realização de uma subtração. Por exemplo, se pensarmos em 4×9 podemos substituir o fator 9 por 10 (número de referência), calculamos $4 \times 10 = 40$, e ao produto subtrai-se quatro ($40 - 4 = 36$). A propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração está subjacente a este procedimento (Mendes, 2012).

Usar relações de dobro e metade. Baseia-se na capacidade dos alunos reconhecerem as relações de dobro/metade que podem existir entre os fatores de um mesmo produto. Portanto, perante a expressão numérica 25×4 , para efetuar este produto poder-se-á pensar numa expressão equivalente utilizando uma relação de dobro e de metade, em que a expressão numérica será 50×2 , uma vez que o número 50 é o dobro de 25 e o 2 é a metade de 4. Associada a este procedimento está a propriedade associativa da multiplicação (Mendes, 2012).

Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Este procedimento implica que os alunos escolham um dos fatores para se manter sempre igual e, o outro fator ao longo das multiplicações sucessivas acresce sempre

uma unidade. Este procedimento é utilizado quando os contextos dos problemas estão, geralmente, associados à divisão (Mendes, 2012).

Multiplicar em coluna parece corresponder ao algoritmo tradicional da multiplicação mas não é o que acontece, apesar de serem realizados cálculos na forma vertical e, terem em conta a decomposição decimal dos números envolvidos, os cálculos parciais são realizados da esquerda para a direita e, são trabalhados os números e não os dígitos (Mendes, 2012).

Segundo Mendes *et al.* (2013), no início da aprendizagem da multiplicação, os alunos tendem a recorrer a estratégias de contagem e a estratégias aditivas para a resolução de problemas. Tal ocorre pelo facto de lhes ser difícil “pensar num grupo enquanto unidade, aspeto essencial ao raciocínio multiplicativo” (p. 146). As mesmas autoras referem que há alunos que demoram mais tempo a progredir para estratégias multiplicativas e que outros tendem a voltar a usar estratégias que já tinham abandonado, nomeadamente de contagem e aditivas. “Estas características da evolução dos procedimentos [estratégias] parecem relacionar-se com aspetos das tarefas, como o contexto e os números usados” (p. 151).

Fosnot e Dolk (2001) afirmam que para promover a aprendizagem da multiplicação é importante propor tarefas com contextos diversificados, tendo em conta as suas características, nomeadamente, as situações e os modelos associados aos contextos e os números envolvidos.

2.2.4. As características das tarefas e a aprendizagem da multiplicação

As tarefas matemáticas exploradas pelos alunos são essenciais para a sua aprendizagem. Segundo Stein, Remillard e Smith (2007), “as tarefas matemáticas, nas quais os alunos se envolvem, determinam o que eles aprendem em Matemática e como aprendem” (p. 346).

O NCTM (1994, 2007) refere que a aprendizagem da multiplicação deve basear-se no desenvolvimento de um trabalho, em sala de aula, que promova o envolvimento dos alunos num ambiente potenciador de aprendizagens. Este trabalho deve centrar-se na exploração de inúmeras tarefas desafiadoras, contribuindo para o desenvolvimento da sua compreensão e aptidão matemática, estimulando o estabelecimento de conexões e desenvolvendo um enquadramento

coerente acerca das ideias matemáticas. Neste sentido, as diferentes possibilidades de aprendizagem matemática dos alunos deriva da oportunidade destes contactarem com diferentes tarefas (Canavarro & Santos, 2012).

São inúmeros os tipos de tarefas que o professor pode propor em sala de aula, no entanto, segundo o NCTM (2000/2007) estas devem ser significativas, permitindo que os alunos atribuam significado ao conhecimento matemático que possa surgir a partir da sua exploração e discussão coletiva. Assim, o professor deve seleccionar tarefas com contextos adequados que contribuam para o surgimento de ideias e conceitos matemáticos (Watson & Mason, 2007). O NCTM (1991/1994) considera essencial que na seleção das tarefas se tenha em consideração três critérios: o conteúdo matemático presente na tarefa, os alunos a que se dirige e a aprendizagem matemática que proporciona.

Quando a tarefa seleccionada a propor é um problema, cabe ao professor propor problemas com as seguintes características: (i) compreensível aos alunos, ou seja, o enunciado deve fornecer a informação necessária à sua resolução; (ii) motivantes e estimulantes, devendo desafiar o aluno e despertar o seu interesse; (iii) ter mais do que um processo de resolução, permitindo que os alunos utilizem as estratégias e procedimentos de cálculo que considerarem mais eficazes; e, (iv) integre vários temas (Boavida *et al.*, 2008).

Ao seleccionar um problema o professor deve ter bem claro os objetivos e os tópicos matemáticos que este permite abordar, incentivar os alunos na procura pela resolução do mesmo e ter em conta o nível de desenvolvimento dos alunos, proporcionando o desenvolvimento da sua autonomia na resolução do problema (Klein & Pereira, 2011).

Além da seleção do tipo de tarefa, o professor deve, ainda, proporcionar a exploração de tarefas com contextos diversificados, contribuindo para a compreensão dos alunos sobre as diversas situações associadas à multiplicação (NCTM, 2000/2007).

Os contextos das tarefas apresentam um papel de revelo na aprendizagem da multiplicação pois, revelam os aspetos principais das estruturas multiplicativas e permitem fazer uma primeira abordagem às propriedades da multiplicação, facilitando o cálculo associado a esta operação (Treffers & Buys, 2008).

Segundo Brocardo *et al.*, (2005) a aprendizagem da multiplicação encontra-se fortemente ancorada na exploração de contextos adequados. Deste modo, é fundamental que o professor, ao construir/selecionar as tarefas, tenha em consideração as características dos contextos que lhes estão associados (Brocardo & Delgado, 2009). Estas características referem-se a três aspetos fundamentais: as situações associadas, os modelos subjacentes e os números envolvidos (Mendes, 2012).

As situações associadas aos contextos. A escolha das situações associadas aos contextos das tarefas que contribuem para a aprendizagem da multiplicação deve atender a três características: permitir o uso de modelos, 'fazer sentido' para os alunos e criar surpresa e suscitar questões (Fosnot & Dolk, 2001).

Segundo estes autores as tarefas propostas devem apresentar imagens ou situações que suscitem o uso de um determinado modelo. Ao se referirem ao termo 'fazer sentido', os autores têm em consideração dois aspetos distintos. Um relaciona-se com o facto de a tarefa estar contextualizada com o mundo real, ou seja deve estar relacionada com o quotidiano dos alunos; o outro diz respeito há criação de conexões e relações subjacentes ao contexto apresentado. Para os autores é o facto de os contextos incluírem situações reais do quotidiano dos alunos, que facilita esta atribuição de sentido. As situações associadas aos contextos podem inclusive ser imaginárias, desde que os alunos as compreendam e lhes atribuam sentido.

A última característica referida por Fosnot e Dolk (2001) sugere que as situações associadas aos contextos das tarefas sejam interessantes e desafiantes, estimulando a vontade de explicar e encontrar respostas às questões.

Ponte (2005) considera que os alunos devem ser colocados perante tarefas associadas a contextos reais, como por exemplo, tarefas de aplicação e de modelação. As tarefas de aplicação referem-se a "exercícios ou problemas de aplicação de conceitos e ideias Matemáticas" (p. 10). As tarefas de modelação são "tarefas que se apresentam num contexto de realidade [sendo geralmente] de natureza problemática e desafiante, constituindo problemas ou investigações" (p. 10). Estas tarefas permitem que os alunos se apercebam que a Matemática é usada em situações reais, pelo que a forma como é usada e o conhecimento acerca desses contextos poderá ajudá-los a lidar com a Matemática.

Os modelos subjacentes aos contextos. Fosnot e Dolk (2001) salientam que os contextos das tarefas devem permitir o uso de modelos. Assim sendo, o professor ao construir/selecionar tarefas deve pensar nos modelos que os alunos podem usar para as resolver. Deste modo, é fundamental que o professor conheça os modelos que auxiliam os alunos a progredir nas suas aprendizagens e o modo como as situações associadas a esses contextos podem promover o uso desses modelos (Fosnot *et al.*, 2006, citado por Delgado, 2013).

Na aprendizagem da multiplicação existe um conjunto de modelos elementares que permitem trabalhar esta operação, sendo os seguintes: modelo linear e modelo retangular (Mendes, 2012). O modelo linear “suporta a adição sucessiva por ‘saltos’” (Mendes *et al.*, 2011a, p. 323). O modelo retangular “permite perceber a propriedade comutativa (...) 4 linhas de 5 elementos têm o mesmo número de elementos que 5 linhas de 4” (p. 325).

Mendes *et al.* (2013) referem que inicialmente “os modelos construídos pelas crianças para representar situações multiplicativas estão associados à ideia de multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais” (p. 142). Porém, ao longo do tempo, e conforme as ideias sobre a multiplicação vão evoluindo, passam a recorrer a outras representações.

Esta evolução é acompanhada com a progressão dos modelos utilizados pelos alunos, passando a ser usado o modelo retangular. Este modelo é considerado por vários autores indicado para suportar as primeiras aprendizagens da multiplicação, facilitando a compreensão desta operação e de algumas das suas propriedades (Fosnot & Dolk, 2001; Mendes, 2012). Neste sentido, o NCTM (2000/2007) realça a utilização da disposição retangular, uma vez que esta permite evidenciar as propriedades da multiplicação, em particular, a propriedade comutativa e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Fosnot e Dolk (2001) salientam a importância de explorar diversos contextos associados à multiplicação, no entanto, além de apostar na diversidade, consideram essencial que estes contextos estructurem progressivamente a multiplicação. Para tal, a aprendizagem da multiplicação deve começar com a exploração de tarefas com um grupo de objetos com o mesmo cardinal e avançando, gradualmente, para situações a que se associe a disposição retangular.

As imagens que surgem associadas às tarefas podem promover o uso de determinado modelo por parte dos alunos (Delgado, 2013). Por exemplo, embalagens de leite, painéis de azulejo, objetos empilhados e dispostos retangularmente, são algumas das imagens que suscitam o uso do modelo retangular (Brocardo & Delgado, 2009). Segundo Mendes (2012) estas imagens “auxiliam os cálculos de alguns alunos, suportando diferentes procedimentos multiplicativos” (p. 516). A mesma autora considera que os contextos ligados à disposição retangular e o aumento da grandeza dos números envolvidos nos cálculos contribuem para o uso de estratégias e procedimentos de cálculo multiplicativos e, conseqüentemente, o abandono de estratégias e procedimentos aditivos.

Os números envolvidos. Outra das características importantes dos contextos das tarefas para promover a aprendizagem da multiplicação relaciona-se com os números envolvidos. Estes devem tratar-se de referências para os alunos, de modo a que se sintam confiantes e ‘confortáveis’ com a sua manipulação. Tanto Fosnot e Dolk (2001) como Mendes (2012) afirmam que quando os números envolvidos nas tarefas são números de referência, com os quais os alunos já lidaram anteriormente, estes apresentam mais facilidade na sua resolução.

Atendendo à influência que os números exercem no modo como os alunos resolvem uma tarefa é essencial que o professor faça uma escolha criteriosa dos números a incluir nas tarefas a propor em sala de aula (Delgado, 2013). Assim sendo, ao pensar nas tarefas que promovam a aprendizagem da multiplicação é fundamental que estas incluam números de referência, números que facilitem o estabelecimento de relações numéricas e que apelem ao uso de sistemas de referência já adquiridos pelos alunos, nomeadamente os múltiplos de 2, 3, 4, 5, 6 e 10 (Mendes, 2012).

Em suma, para que os alunos aprendam a operação da multiplicação com sucesso e compreendam e usem as suas propriedades, o professor deve ter em consideração os aspetos discutidos anteriormente, na construção e/ou seleção das tarefas a propor em sala de aula.

2.2.5. A importância de construção de sequência de tarefas e a aprendizagem de multiplicação

Além da escolha criteriosa dos contextos das tarefas a propor aos alunos, a articulação e a sequenciação das mesmas parecem ser fundamentais para que os alunos construam o seu conhecimento sobre a multiplicação (Mendes *et al.*, 2013).

Segundo Simon (1995), citado por Mendes (2012), a sequência de tarefas deve ser planeada antecipadamente, regulada por objetivos de aprendizagem e orientada por um conjunto de tarefas selecionadas/construídas pelo professor. As tarefas a propor devem estar em consonância com as ideias e os procedimentos que se pretende que o aluno desenvolva.

Uma sequência de tarefas corresponde a um conjunto de três ou quatro tarefas que pretendem desenvolver um conjunto de aspetos interrelacionados. Para a sua construção é necessário atender a dois aspetos. Um dos aspetos prende-se com o facto de se partir do conhecimento dos alunos, o outro aspeto relaciona-se com a ideia de progressão de aprendizagem, ou seja, as tarefas devem ser construídas/selecionadas de modo a permitir, por exemplo, a passagem de níveis mais baixos de estruturação das operações para níveis mais elevados (Brocardo & Delgado, 2009).

Neste sentido, a sequência de tarefas que pretenda promover a aprendizagem da multiplicação deve ser planeada partindo do sentido aditivo da multiplicação, em que os alunos recorrem a estratégias de contagem e de adição (adição sucessiva de parcelas iguais), procurando que os alunos progridam para um raciocínio multiplicativo (Brocardo & Delgado, 2009). Para tal, é fundamental que exista uma progressão e interligação entre as tarefas que compõem a sequência de tarefas, concretizando-se tanto ao nível dos modelos associados aos contextos das tarefas como em relação aos números envolvidos (Mendes *et al.*, 2011a).

Posto isto, é essencial que se estabeleça um plano geral para a construção da sequência de tarefas que permita o desenvolvimento da aprendizagem desta operação. Este plano deve delinear as ideias matemáticas que se pretende explorar e as estratégias e procedimentos de cálculo, associados à multiplicação, que se pretende desenvolver. Além disso, deve caracterizar-se pela sua flexibilidade, uma vez que é determinante a possibilidade de ajustar os caminhos a seguir, de etapa

para etapa (Mendes *et al.*, 2011a). Também Canavarro e Santos (2012) consideram que a sequência de tarefas deve ser pensada como um todo coerente, devem portanto contemplar tarefas que permitam cumprir os objetivos definidos mas de forma articulada. Destacam, igualmente, a importância da sequência poder ser ajustada consoante a apreciação que o professor faz das respostas dos alunos.

O professor ao planejar uma sequência de tarefas que promova a aprendizagem da multiplicação deve ter em conta que nem todos os alunos aprendem ao mesmo ritmo e de igual forma, sendo, portanto, essencial o seu acompanhamento e apoio para que, progressivamente, as suas estratégias e procedimentos de cálculo se desenvolvam (Brocardo *et al.*, 2005).

Uma das formas possíveis de o fazer é através da antecipação das estratégias dos alunos. Pois, ao conseguir identificar as possíveis dificuldades, que podem decorrer da resolução de determinada tarefa, e a sua razão de ser, o professor poderá encontrar uma maneira de os ajudar a ultrapassá-las. Outra forma é através das discussões coletivas. O professor deve incentivar os alunos a explicitar oralmente o seu modo de pensar, apresentando os registos que realizaram. Deste modo, podem ajudar outros colegas com diferentes níveis de compreensão da multiplicação a progredir nas estratégias e procedimentos de resolução (Mendes *et al.*, 2011a).

Canavarro (2011) segue a mesma linha de pensamento, considerando que através da discussão e da observação de outras estratégias e procedimentos de cálculo os alunos consciencializam-se de que existem diversas formas para resolver um problema, podendo em situações futuras optar pela estratégia que lhes pareça mais eficaz.

Capítulo III – Metodologia

Este capítulo, organizado em cinco secções, destina-se à apresentação e justificação das opções metodológicas tomadas na realização deste estudo. Na primeira secção começo por justificar a opção pela metodologia de abordagem qualitativa, assim como a respetiva vertente selecionada para a concretização deste estudo, a investigação-ação. De seguida, apresento o contexto e os participantes desta investigação, as técnicas de recolha de dados adotadas e os processos de recolha de dados. Por fim, na última secção, explico o modo como são analisados os dados recolhidos durante este estudo, expondo as categorias de análise utilizadas.

3.1. Opções metodológicas

3.1.1. Abordagem qualitativa

Este estudo segue uma abordagem qualitativa. Esta metodologia caracteriza-se por os dados recolhidos serem ricos em pormenores descritivos que conduzem o investigador à compreensão dos comportamentos a partir da perspetiva dos participantes (Bogdan & Biklen, 1994). Os dados devem ser recolhidos diretamente no ambiente onde se desenvolve a investigação, constituindo o investigador o instrumento principal na sua recolha (Bogdan & Biklen, 1994).

Esta metodologia caracteriza-se, ainda, por apresentar um maior interesse pelo processo do que simplesmente pelos resultados (Bogdan & Biklen, 1994). Também neste estudo, é fundamental atender a todo o processo no qual ocorrem

progressões nas aprendizagens dos alunos, sendo estes progressos alvo de análise e não apenas o produto final.

Para Bogdan e Biklen (1994) os investigadores qualitativos têm como objetivo entender o que os participantes experienciam, o modo como interpretam as suas experiências e como estruturam o seu mundo social. Também neste estudo, ao ter como objetivo compreender o modo como os alunos desenvolvem a aprendizagem da multiplicação, focar-me-ei no que os alunos experienciam quando resolvem problemas associados a esta operação.

3.1.2. Investigação-ação

A vertente selecionada na metodologia qualitativa foi a investigação-ação porque, se por um lado, neste estudo pretendo compreender todo o processo, mais do que me focar nos resultados obtidos, por outro, é necessário repetir um ciclo que caracteriza esta metodologia. Ou seja, é necessário planear para atuar, observar e refletir para voltar a planear, procurando uma melhoria, constante, da qualidade da ação desenvolvida, fomentando uma maior eficácia na aprendizagem/atuação do grupo (Afonso, 2005). Efetivamente, este estudo tem subjacente a construção de uma sequência de problemas que vão sendo adaptados/alterados consoante a análise das aprendizagens que os alunos vão desenvolvendo. Assim, antes de propor aos alunos a resolução de um problema, este e todos os momentos relacionados com a sua exploração são pensados e planificados. Durante e após a exploração de cada um dos problemas, é realizada uma reflexão acerca das aprendizagens desenvolvidas pelos alunos, de modo a planear o problema seguinte, adequado ao grupo e que permita uma progressão das suas aprendizagens. Este processo repete-se ao longo de toda a investigação, pelo que todos os problemas que compõem a sequência explorada são planificados e analisados de modo a permitir uma constante procura pela melhoria das suas potencialidades, com vista a promover o desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação.

A investigação-ação é considerada a via adequada para orientar as práticas educativas, uma vez que tem como objetivo melhorar o ensino e os ambientes de aprendizagem (Arends, 2008). É considerada uma estratégia de investigação “em espiral, interativa e focada num problema, pelo que o primeiro passo para a

desencadear é a identificação e formulação do problema de forma objetiva e susceptível de ser intervencionado” (Sanches, 2005, p. 137). Deste modo, o professor parte de uma situação que deseja melhorar, investigando-a e colocando questões, de modo a encontrar uma solução viável para tal situação, tal como ocorreu na formulação da questão a investigar no projeto apresentado. Ao longo do momento de observação tive a oportunidade de constatar que os alunos apresentavam dificuldades em resolver problemas, principalmente quando estes envolviam cálculos multiplicativos, recorrendo, geralmente, a cálculos aditivos. Atendendo a esta situação, procurei que o meu estudo permitisse o desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação, tendo recorrido à leitura de inúmeros autores de modo a encontrar uma forma eficaz de atingir este objetivo. Assim, após algum estudo, decidi desenvolver uma investigação que tivesse como foco o desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação, recorrendo para tal, à exploração de uma sequência de problemas.

Esta metodologia encontra-se relacionada com os contextos reais da prática, direcionando o professor-investigador para um posicionamento reflexivo, na medida em que, reflete, interroga e questiona as suas práticas, possibilitando o desenvolvimento, aperfeiçoamento ou mudança das mesmas, com o intuito de melhorar o ensino e conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos (Coutinho, Sousa, Dias, Bessa, Ferreira, & Vieira, 2009). No desenvolvimento deste estudo, procuro, constantemente, melhorar a minha prática e as minhas propostas. Efetivamente, no decorrer desta investigação, para aperfeiçoar a minha participação, tenho em consideração o apoio prestado durante o momento de resolução dos problemas e as questões colocadas nos momentos de discussão e nas entrevistas. Além disso, apesar de realizar inicialmente a planificação da sequência de problemas a propor aos alunos, esta não é estática, sendo alterada quando necessário, fruto das reflexões realizadas após a exploração de cada problema. Estas alterações pretendem contribuir para uma maior eficácia na aprendizagem dos alunos.

Um dos aspetos fundamentais da investigação-ação reside na reflexão, que deve ocorrer ao longo de todo o processo. Deste modo comecei a investigação com a observação e, conseqüente, reflexão acerca da prática letiva, a fim de planear novas tarefas. Ao longo e após a exploração destas mesmas tarefas, na sala de

aula, fui refletindo acerca da minha prática, revendo os pontos positivos e negativos da mesma, perspetivando novas práticas, possibilitando-me compreender os acontecimentos provenientes da minha ação, encontrar soluções para eventuais problemas e, desta forma, reorganizar a minha prática futura, aspetos que segundo Coutinho *et al.* (2009) caracterizam a investigação-ação.

Assim, esta metodologia foi utilizada neste projeto por a considerar a mais adequada ao seu propósito, tendo em consideração os motivos explicados anteriormente. Na investigação-ação o professor/investigador tem de planear, atuar, observar e refletir acerca das suas propostas aos alunos/participantes da investigação (Coutinho *et al.*, 2009).

3.2. Contexto e participantes

Este estudo foi realizado numa Escola Básica do concelho de Setúbal. Segundo o Projeto Educativo da Instituição (AVEOS, 2013/2017), esta escola é composta por cerca de 270 alunos distribuídos por duas valências, pré-escolar com duas turmas e 1.º ciclo com onze turmas. Este estabelecimento pertence à rede pública do Ministério da Educação e encontra-se apetrechado com inúmeros recursos tecnológicos, tendo, por exemplo, um computador em cada sala.

Este estabelecimento de ensino é composto por dois andares, encontrando-se as treze salas distribuídas pelos dois pisos. Dispõe de ginásio e biblioteca, espaços igualmente bem equipados, dispendo de todo o material necessário, cantina e espaços verdes, nomeadamente, uma horta escolar.

Além dos recursos físicos e materiais, a escola conta com o auxílio de inúmeros profissionais, por exemplo, professoras de apoio, psicóloga, terapeutas da fala, entre outros, que procuram apoiar os alunos com mais dificuldades de aprendizagem, com necessidades educativas especiais ou que se encontram em contextos de risco.

Este estabelecimento é um dos oito que compõem o Agrupamento de Escolas Ordem de Santiago, “que integra os Territórios Educativos de Intervenção Prioritária (TEIP2) e está inserido num contexto social particularmente desfavorecido, com uma

grande diversidade cultural, onde persistem problemas de violência, exclusão social e pobreza” (IGE, 2010/2011, p. 3).

Os participantes deste estudo foram os alunos pertencentes a uma turma do 2.º ano de escolaridade. Segundo o Plano de Trabalho de Turma (PTT) (Afonso, 2014/2015), estes alunos pertencem a famílias de classe baixa ou média baixa, em que as habilitações dos encarregados de educação estão entre o 1.º Ciclo e o secundário, com maior evidência no 1.º Ciclo e no 3.º Ciclo. Dezanove dos vinte alunos são subsidiados pelo ASE, indo ao encontro do que é referido pela IGE (2010/2011) no que se refere ao nível do contexto social desfavorecido em que vivem os alunos.

A turma é composta por vinte alunos, onze raparigas e nove rapazes, com idades compreendidas entre os sete e os oito anos, a frequentar o 2.º ano pela primeira vez. Apesar da homogeneidade de idades é bastante heterogénea tanto a nível da aprendizagem como do comportamento. Existem seis crianças a beneficiar do apoio do Projeto Grémio, duas vezes por semana, em virtude de algumas dificuldades na aprendizagem, encontrando-se a desenvolver um trabalho diferenciado da turma, a nível do Português, pois ainda não dominam a leitura e a escrita.

A turma integra uma criança com Necessidades Educativas Especiais (NEE). Esta aluna beneficia de apoio especializado quatro vezes por semana (duas vezes com uma professora de ensino especial e duas vezes com terapeuta da fala). A aluna sofre de surdez e tende a faltar com alguma regularidade o que dificulta o seu acompanhamento.

Considerando o PTT (Afonso, 2014/2015) e as conversas informais com a professora cooperante é possível auferir que os alunos se interessam pela área da Matemática, sendo considerada uma das disciplinas favoritas, a par da disciplina de expressões. No entanto, a resolução de problemas é a componente em que os alunos manifestam mais dificuldades, encontrando-se referido no PTT (Afonso, 2014/2015) a necessidade de envolver os alunos na resolução de problemas, seguindo-se da apresentação das estratégias à turma, com o intuito de ultrapassar as dificuldades apresentadas pelos alunos.

3.3. Técnicas de recolha de dados

As técnicas de recolha de dados escolhidas procuraram ir ao encontro do conjunto de técnicas e de instrumentos comumente usadas na metodologia qualitativa. Estas encontram-se divididas em três categorias: as técnicas baseadas na observação, em que o investigador observa em direto e presencialmente o fenómeno em estudo; as técnicas baseadas na conversação, surgindo em momentos de diálogo e de intervenção, como por exemplo através da entrevista; a análise de documentos escritos, que se apresentam como uma excelente fonte de informação (Latorre, 2003).

Também Patton (2002) e Ponte (2002) consideram que neste tipo de investigações a observação, as entrevistas e a recolha documental/análise de documentos constituem as técnicas mais usuais e indicadas para a recolha de dados, tendo sido efetivamente estas as técnicas de recolha de dados utilizadas ao longo do processo de investigação.

3.3.1. Observação participante

A observação participante é uma técnica que apresenta como principal característica a inserção do observador no contexto e grupo a observar (Almeida, 1990), sendo considerada particularmente útil e fidedigna pelo facto da informação recolhida não se encontrar condicionada pela opinião das pessoas, tal como acontece nas entrevistas (Afonso, 2005). Considero que assumi uma postura de observadora participante, na medida em que me encontrava, em simultâneo, inserida no contexto e a desenvolver esta investigação. Esta dualidade de papéis, entre professor e investigador, é bastante comum quando adotada uma abordagem qualitativa, uma vez que o investigador qualitativo envolve-se na dinamização das atividades enquanto observador participante (Bogdan & Biklen, 1994).

A minha atenção, no momento de observar, recaiu nos alunos, nomeadamente nas estratégias e procedimentos de cálculo utilizados durante a resolução dos problemas propostos. Em resultado destas observações senti a necessidade de recorrer ao registo áudio das aulas, pelo que optei por realizar a gravação dos vários momentos que compuseram cada sessão, nomeadamente, a apresentação da

tarefa, a realização/resolução da tarefa e a discussão/partilha das estratégias utilizadas por cada grupo. A opção por esta ferramenta para o registo das aulas de exploração dos problemas propostos, no âmbito deste projeto, prende-se com a necessidade de assegurar que tudo o que foi dito é preservado e mantém-se inalterado. Posteriormente, permitiu-me efetuar a transcrição de episódios de sala de aula que foram analisados.

3.3.2. Recolha documental

Os documentos constituem uma das fontes de dados mais usados em estudo de natureza qualitativa, permitindo confrontar com os dados recolhidos por outras fontes (Yin, 2010). Foram recolhidas as produções dos alunos realizadas ao longo deste estudo, ou seja, os documentos que contemplam as estratégias e procedimentos de cálculo adotados pelos alunos perante os problemas propostos, sendo considerada “uma fonte fundamental de recolha de dados, a par das aulas observadas e gravadas” (Mendes, 2012, p. 167), permitindo a análise das opções dos alunos. Além disso, são produzidos de forma independente, da investigação, não sofrendo interferências, tal como tende a ocorrer nas entrevistas (Yin, 1989). Foram ainda reunidas as planificações realizadas ao longo do período de estágio, onde consta a descrição e a respetiva antecipação das possíveis estratégias e procedimentos de cálculo que poderiam ser usados pelos alunos.

3.3.3. Entrevista

A entrevista permite-nos recolher informação sobre um determinado fenómeno, de forma direta, uma vez que as suas respostas tendem a refletir as perceções dos participantes (Tuckman, 2000). Tem como objetivo primordial compreender os significados construídos pelos entrevistados, apresentando um sentido interpretativo (Afonso, 2005).

Neste estudo, a realização de entrevistas aos alunos permitiu clarificar as estratégias e procedimentos de cálculo adotados na resolução dos problemas propostos, sendo encarada como um método complementar à observação participante e à recolha documental.

As entrevistas ocorreram após o momento de discussão/partilha de modo a que os alunos tivessem presente as suas opções. Optei por envolver todos os alunos da turma, uma vez que os mesmos manifestaram muita vontade em participar. Porém as entrevistas que foram analisadas no âmbito deste estudo, correspondem às efetuadas a três ou quatro pares de alunos, por problema. A escolha dos pares decorreu da necessidade de clarificar as estratégias utilizadas pelos alunos, quando a sua compreensão não era evidente e, ainda, de modo a ter um testemunho representativo das diferentes estratégias encontradas.

A resolução dos problemas foi concretizada em pares ou trios, como tal, os momentos de entrevista também envolveram todos os alunos dos grupos selecionados. A entrevista em grupo contribuiu para que os alunos se sentissem mais descontraídos, uma vez que não estavam sozinhos, ajudando-se nas respostas. Além disso, ao longo das entrevistas as crianças falam entre si, gerando discussões que proporcionam a melhoria das suas respostas (Graue & Walsh, 2003).

Considerando as técnicas de recolha de dados explanadas anteriormente, sintetizo-as na seguinte tabela, relacionando-as com as suas fontes e as suas formas de registo.

Tabela 2 – Técnicas, fontes e formas de registo de dados

Técnicas	Fonte	Formas de Registo
Observação participante	Aulas	Registos áudio
Recolha documental	Alunos	Produções dos alunos
	UC Estágio III	Planificações das aulas
Entrevista	Alunos	Registos áudio

3.4. Processos de recolha e de análise dos dados

A observação das aulas ocorreu durante o período de estágio, incluindo dois momentos: o primeiro decorreu antes da minha intervenção, durante o qual tive a oportunidade de observar os hábitos de trabalho da turma, no que se refere ao modo como os alunos trabalhavam, quer na sua organização como nas estratégias utilizadas, o tipo de tarefas que lhes eram propostas e como lhes eram apresentadas. Este período decorreu ao longo de três semanas, tendo existido uma

interrupção letiva (férias da páscoa) entre a segunda e terceira semana. Assim, este período teve início no dia 9 de março de 2015 e terminou no dia 15 de abril de 2015, data em que foi explorado o primeiro problema associado a este estudo.

Ao longo deste período de observação procurei inteirar-me dos conteúdos programáticos ao nível do Programa de Matemática para o 1.º ciclo e dos conteúdos que a professora cooperante pretendia abordar durante o meu período de intervenção, pois apesar de não ter definido o tema a estudar, já havia decidido que a minha investigação iria incidir na área da Matemática.

Encontrado o tema, foi dado início à fase de recolha de dados que decorreu ao longo de cinco semanas, tendo início no dia 15 de abril de 2015 e término no dia 13 de maio de 2015.

Para a concretização deste estudo construí uma sequência de problemas que pretendia promover o desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação. Para tal, foi proposto que todas as semanas, à quarta-feira de manhã, se realizasse um problema de multiplicação. No entanto, uma vez que o meu período de observação foi mais extenso do que previsto e as atividades escolares impediam, várias vezes, o decorrer normal das aulas, foi necessário alterar esta proposta tendo, nas duas últimas semanas de intervenção (4 a 13 de maio de 2015), realizado dois problemas, por semana, um à segunda e outro à quarta-feira de manhã.

Os problemas propostos no âmbito deste projeto foram explorados de manhã. Após escreverem a data, os alunos fechavam os cadernos, formavam-se os pares/trios de trabalho e centravam-se apenas no enunciado distribuído. A partir deste momento iniciava-se a recolha de dados, através da gravação áudio da apresentação dos problemas, da sua resolução e da discussão/partilha das estratégias adotadas. Posteriormente, recorrendo, igualmente, à gravação áudio eram realizadas entrevistas aos pares/trios, durante as quais, os alunos, tinham a oportunidade de explicar todos os passos dados para a resolução do problema proposto. Estas gravações áudio permitiram complementar as observações realizadas durante o decurso das aulas.

Além das gravações áudio, no final da realização de cada problema, eram recolhidas as folhas do enunciado onde constavam as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos permitindo uma análise posterior das mesmas.

Na tabela 3 apresento uma síntese cronológica do processo de recolha de dados, referindo as técnicas utilizadas.

Tabela 3 – Síntese cronológica do processo de recolha de dados

	Observação participante/Entrevistas	Recolha documental
Dias do mês de abril	15, 22, 29	15, 22, 29
Dias do mês de maio	4, 6, 11, 13	4, 6, 11, 13

A análise dos dados é um processo de busca e de organização de toda a informação que foi sendo recolhida, com vista à compreensão do investigador sobre o fenómeno em estudo (Bogdan & Biklen, 1994). Segundo os mesmos autores, a análise os dados divide-se em três momentos, a redação, a análise e a interpretação. O primeiro momento prende-se com o processo de recolha dos dados. O segundo corresponde ao processo de organização de dados que ocorre, em simultâneo, com a recolha de dados. Ao longo desta fase fui analisando, problema a problema, as produções dos alunos tendo como objetivo refletir sobre a intervenção, adaptando as próximas intervenções.

O terceiro momento da análise dos dados, a interpretação, é o processo de obtenção de significados e inferências a partir dos dados obtidos (Bogdan & Biklen, 1994). Este momento correspondeu à redação deste relatório e teve como objetivo responder às questões de partida. Para a análise dos dados referentes às estratégias e procedimentos de cálculo dos alunos na resolução de problemas, adaptei a categorização usada por Mendes (2012). Assim, agrupei as estratégias possíveis de serem utilizadas pelos alunos em quatro grupos (estratégias de contagem, estratégias aditivas, estratégias subtrativas e estratégias multiplicativas), considerando procedimentos de cálculo específicos para cada estratégia.

Com base na tabela 4 realizei a análise das estratégias e dos procedimentos de cálculo utilizados na resolução de cada problema, possibilitando a reflexão acerca da sua progressão de problema para problema.

Tabela 4 – Estratégias e Procedimentos de cálculo da operação multiplicação, adaptado de Mendes (2012)

Estratégias	Procedimentos de cálculo
Estratégias de Cálculo	Contar por “saltos”
Estratégias Aditivas	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar coluna
Estratégias Subtrativas	Subtrair sucessivamente
Estratégias Multiplicativas	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobros
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
Multiplicar em coluna	

Depois da minha intervenção no estágio, para analisar os dados, apoiei-me nas produções dos alunos e nos registos áudio, de todos os momentos que compuseram a exploração de cada problema, desde a sua apresentação até à concretização das entrevistas, procurando realizar um cruzamento entre todas as informações recolhidas. Esta estratégia de cruzamento de dados designa-se de triangulação metodológica, uma vez que envolve a utilização de múltiplas fontes de dados (Patton, 2002).

No processo de análise de dados comecei por identificar as diferentes estratégias e procedimentos de cálculo utilizados na resolução de cada problema, tendo em consideração a classificação apresentada na tabela 4. Em seguida, agrupei as produções dos alunos atendendo a este critério, constatando, de imediato o número de pares/trios que recorreram a cada estratégia e procedimento. Após este trabalho, recorri à audição e análise das gravações áudio de modo a complementar a reflexão realizada a partir das produções dos alunos. Conjugando estes dois tipos de registo, selecionei as produções e apresentações que considerei mais pertinentes e que permitiam ilustrar as diversas opções dos alunos, realizando a sua respetiva análise.

No capítulo de análise dos dados deste relatório apresento um quadro que compila todos os dados recolhidos referentes às estratégias e aos procedimentos de cálculo usados pelos alunos na resolução dos mesmos, permitindo refletir sobre as

potencialidades da exploração desta sequência de problemas para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos alunos. Importa referir que os problemas 1, 3, 4, 5, e 6 são compostos por várias questões que, eventualmente, suscitam a utilização de diferentes estratégias e procedimentos de cálculo, sendo importante apresentá-las e caracterizá-las separadamente.

Capítulo IV – Proposta Pedagógica

Neste capítulo descrevo diferentes aspetos relacionados com a proposta pedagógica desenvolvida. Início com uma secção sobre a sequência de problemas, apresentando o processo e a dinâmica da sua construção, bem como a apresentação dos problemas que a compõem. A segunda secção relaciona-se com a perspectiva de ensino na qual me situo – o ensino exploratório, explicando as diferentes etapas de exploração dos problemas na sala de aula.

4.1. A construção da sequência de problemas

Para a realização desta investigação foi fulcral a construção de uma sequência de problemas que possibilitasse o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos alunos. Para tal, foram concebidos sete problemas que foram organizados de modo a promover uma progressão das estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos, permitindo a passagem de estratégias de contagem e de estratégias aditivas, nomeadamente a adição sucessiva de parcelas iguais para estratégias multiplicativas.

Segundo Kraemer (2008) o professor deve planificar o trabalho a realizar com os alunos considerando os objetivos de aprendizagem definidos, atendendo para tal, a um conjunto de intenções. Na planificação dos problemas a propor tive em consideração essas mesmas intenções, na medida em que procurei antever o que é possível os alunos aprenderem num determinado momento. Tendo em conta aquilo que já conhecem, concebi problemas de modo encadeado, para que os alunos

atingissem os objetivos estabelecidos à partida e delineei o que os alunos deveriam aprender com a exploração de cada problema e como isso poderia acontecer. Neste sentido, os problemas propostos aos alunos tinham em conta: (i) os objetivos globais, estabelecidos previamente; (ii) os conhecimentos que os alunos detinham, de forma a proporcionar-lhes tarefas desafiadoras; (iii) as suas motivações e interesses, pois era essencial que estivessem empenhados no trabalho que estavam a desenvolver; e (iv) problemas potenciadores de discussões coletivas produtivas.

A sequência elaborada pretendia partir do conhecimento do cálculo aditivo para o desenvolvimento da noção de multiplicação e o uso de propriedades desta operação. Para tal, focou-se nas relações de dobro, nas relações entre algumas tabuadas (2, 3, 4, 5 e 6) e na compreensão e aplicação das propriedades da multiplicação (propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e propriedade comutativa). Para além dos alunos entenderem a multiplicação como uma adição repetida pretendia-se, sobretudo, que a relacionassem com a disposição retangular.

A construção da sequência de problemas inclui seis etapas. Para se compreender melhor as suas características e o modo como as várias etapas se sucedem e interligam, construí o seguinte esquema, baseado no esquema representativo das fases de construção das sequências de tarefas de Delgado (2013).

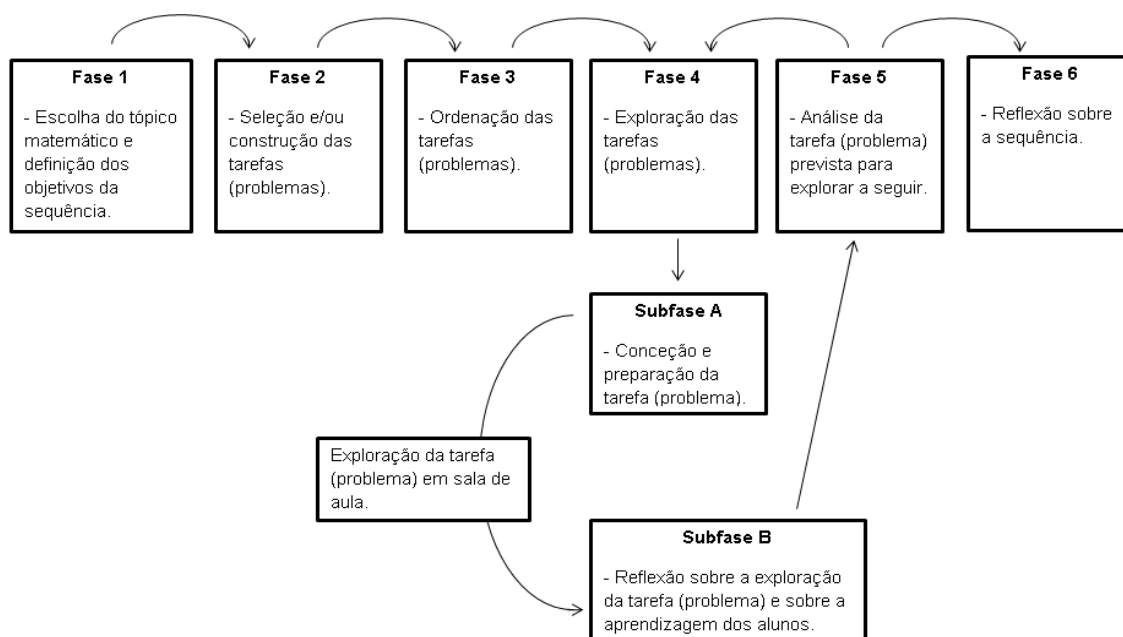


Figura 1 – Esquema representativo das fases de construção das sequências de tarefas, baseado em Delgado (2013).

Ilustro, em seguida, as características de cada uma das fases, recorrendo à descrição da construção da sequência de problemas explorada neste estudo.

Fase 1. Esta corresponde à escolha do tópico matemático a ser trabalhado com os alunos e à identificação dos objetivos a atingir com a exploração desta sequência de tarefas. Estes objetivos foram definidos tendo em consideração os objetivos e as metas curriculares definidos no PMEB (ME, 2013) sobre o tópico matemático selecionado, neste caso a multiplicação. Neste estudo a ideia para a construção de uma sequência de problemas surgiu ao longo do período de observação, que coincidiu com o final da construção da tabuada do 6.

A sequência de problemas propostos centra-se no tema Números e Operações, mais concretamente, no tópico da Multiplicação, contemplando diferentes contextos que permitiam a exploração do sentido aditivo e sentido combinatório da multiplicação, os números envolvidos e a diversidade de estratégias e procedimentos de resolução que poderiam proporcionar. Para tal, foram definidos os seguintes objetivos: (i) efetuar multiplicações adicionando parcelas iguais; (ii) compreender e utilizar o ‘dobro’; (iii) reconhecer as propriedades distributiva da multiplicação em relação à adição e a comutativa; (iv) calcular o produto de quaisquer dois números de um algarismo; (v) mobilizar produtos das tabuadas do 2, 3, 4, 5 e 6.

Fase 2. Implica a seleção/construção de tarefas que permitam a exploração do tópico definido e que estejam de acordo com os objetivos identificados na fase anterior. A seleção/construção das tarefas, neste caso de problemas, deriva da análise de diversos materiais didáticos¹. Realizada esta análise, selecionei/construí problemas cujos contextos permitissem atingir os objetivos definidos na fase anterior, e, que simultaneamente contribuíssem para a passagem de um raciocínio aditivo para um raciocínio multiplicativo.

¹ Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C. & Torres, F. (2010). *Números e Operações – 3º ano: Números naturais, operações com números naturais, números racionais não negativos*. Ed. 1, 1 vol.. Lisboa: DGIDC.

Equipa do Projeto Desenvolvimento do Sentido do Número (2005). *Projeto Desenvolvimento do Sentido do Número: Perspetivas e Exigências Curriculares*. Lisboa: APM.

Fase 3. Corresponde à análise e reflexão acerca das tarefas selecionadas/construídas com o intuito de as ordenar, de modo a que a sequência seja coerente, existindo a preocupação com a progressão e interligação, entre as tarefas que a compõem. Nesta fase foi pensada a ordem pela qual os problemas seriam explorados pelos alunos. Para tal, foram tidos em consideração os contextos associados aos problemas e os seus objetivos, de modo a que existisse uma coerência na progressão da aprendizagem a promover, de problema para problema. Nesta fase, pensei numa sequência de quatro problemas ordenados como mostra a Tabela 5.

Tabela 5 – Ordenação da sequência de problemas, na fase 3.

Problemas	Objetivos	Aspetos a ter em conta nos contextos associados aos problemas
Ida ao circo	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. - Efetuar produtos, recorrendo a produtos conhecidos em que um dos fatores é o 5. - Usar, intuitivamente, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a propriedade associativa. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é aditivo. - Uso de estratégias e registos informais, recorrendo a desenhos, esquemas ou operações conhecidas. - Uso de produtos das tabuadas aprendidas anteriormente, nomeadamente a do 2, do 5 e do 6. - Uso de números de referência, nomeadamente o 2 e o 5, facilitando os cálculos dos alunos.
Sala de aula	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. - Usar e compreender a propriedade comutativa da multiplicação. - Efetuar produtos, recorrendo a produtos conhecidos da tabuada do 3 e do 4. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é aditivo. - Uso do modelo retangular. - Incentivar o uso do produto das tabuadas aprendidas anteriormente, nomeadamente a do 3 e do 4. - Uso de números pequenos, como o 3 e o 4, de modo a facilitar os cálculos dos alunos.
O prédio do Manuel	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. - Usar estratégias multiplicativas associadas ao modelo de disposição retangular, recorrendo a produtos conhecidos da tabuada do 3 e do 6. - Usar relações de dobro. - Usar a propriedade comutativa da adição. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é aditivo. - Uso do modelo retangular. - Incentivar o uso do produto das tabuadas aprendidas anteriormente, nomeadamente a do 3 e do 6. - Aumento do grau de dificuldade de cálculo através do uso do número 6. - Propor situações que permitam o uso de relações de dobro.
Páscoa doce	<ul style="list-style-type: none"> - Usar procedimentos de cálculo associados às estratégias multiplicativas tendo em conta o sentido combinatório da multiplicação. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é combinatório. - Uso de estratégias e registos informais, recorrendo a desenhos, esquemas ou operações conhecidas.

Seguem-se as fases 4 e 5 que se encontram interligadas.

Fase 4. Esta fase envolve todas as tarefas da sequência pois, corresponde ao percurso que cada tarefa percorre desde da sua conceção final e preparação até à reflexão sobre a sua exploração na sala de aula e sobre as aprendizagens que permitiu desenvolver nos alunos. Neste estudo, esta fase corresponde ao momento em que são explorados os problemas da sequência prevista e todos os que foram sendo introduzidos ao longo do desenvolvimento da sequência de problemas, nomeadamente Problema III – Cortinas da casa do João (anexo 3); Problema V – O pátio do João (anexo 5); Problema VII – Organizando menus (anexo 7). Nesta fase distinguem-se dois momentos, assinalados na Figura 1 por A e B, designados como subfases. A subfase A corresponde à conceção e preparação do problema e a subfase B à reflexão acerca da exploração do problema e das aprendizagens desenvolvidas pelos alunos. Entre estas duas subfases ocorre a exploração do problema que será referida na secção 4.3.

Subfase A. Esta subfase corresponde à conceção final e preparação da tarefa que será explorada em sala de aula. Deste modo, após a seleção dos problemas na fase 2, cada um deles foi analisado, tendo em conta a situação associada ao contexto, o modelo subjacente e os números envolvidos, permitindo-me verificar se era necessária alguma adaptação ou se pelo contrário poderia ser aplicado exatamente como era apresentado no material didático de onde foi retirado. Quando se verificava que o problema não se encontrava construído da forma mais indicada a explorar com a turma foram realizadas adaptações. Estas adaptações ocorreram de duas formas diferentes, que passo a explicar. Por um lado, houve problemas cuja adaptação baseou-se na alteração dos números envolvidos, mantendo-se quer a situação associada ao contexto quer o modelo subjacente, nomeadamente no Problema VII – Organizando menus (anexo 7). Por outro lado, existiram problemas cuja adaptação teve por base a alteração da situação associada ao contexto e dos números envolvidos, mantendo-se apenas o modelo subjacente ao contexto, nomeadamente, no Problema VI – Páscoa doce (anexo 6). Assim, para a conceção dos problemas foram tidas em consideração os exemplos presentes em dois materiais didáticos, já referidos anteriormente, tendo sido retirado, na íntegra, problemas destes materiais, retirados problemas que sofreram algumas adaptações mas que mantiveram o contexto e ainda, foram construídos problemas inspirados nos problemas presentes nestes documentos. Na conceção destes problemas foi

necessário produzir imagens que apelassem à utilização de determinados modelos, nomeadamente o modelo retangular, como por exemplo no Problema II – Sala de aula (anexo 2).

A preparação da exploração da tarefa na sala de aula inclui: a antecipação dos possíveis caminhos a seguir pelos alunos, a identificação dos materiais necessários e a organização do trabalho a realizar em torno da tarefa na sala de aula. Neste sentido, foram preparados os materiais necessários para usar na sala de aula. A impressão dos problemas teve em conta a necessidade dos alunos terem espaço suficiente para a sua realização, contendo espaço suficiente para efetuarem cálculos, esquemas e/ou desenhos. Para além da preocupação com a preparação dos materiais a usar na sala de aula ao longo da resolução dos problemas, foi preciso delinear um plano a seguir, o qual previa o tempo da sua exploração e o modo como os vários momentos da aula iriam ser organizados. Foi ainda realizada uma antecipação dos possíveis caminhos a seguir pelos alunos na resolução dos problemas, contemplando diferentes estratégias e procedimentos de cálculo.

Subfase B. Esta subfase surge após a exploração da tarefa na sala de aula e corresponde ao momento de reflexão sobre a exploração da tarefa e sobre a aprendizagem dos alunos. Para tal, recorre-se às produções dos alunos e às gravações áudio das aulas.

Depois da exploração de cada um destes problemas foi sendo realizada uma reflexão acerca da sua exploração em sala de aula, tendo em conta as produções dos alunos. A sua análise permitiu realizar uma apreciação global das dificuldades dos alunos, identificar as estratégias e os procedimentos de cálculo mais utilizados e os que se destacam pela sua diferença. Esta análise ajudou-me a decidir que problema deveria propor de seguida.

Fase 5. Nesta fase é analisada a tarefa da sequência prevista a ser explorada de seguida. Para esta análise são tidos em conta os aspetos identificados na reflexão sobre a tarefa e sobre as aprendizagens dos alunos, realizada na *subfase B*. Desta análise poderá resultar a decisão de propor a tarefa tal como tinha sido planeada, de a reformular, de a excluir ou, até, de incluir uma nova tarefa. Assim, neste estudo, a sequência de problemas prevista podia manter-se ou não, consoante a reflexão sobre cada um dos problemas explorados. Por exemplo, o Problema III “As cortinas

da casa do João” (anexo 3) foi introduzido após a exploração do Problema II “Sala de aula” (anexo 2). Esta decisão decorreu da necessidade de explorar com os alunos tarefas que permitissem o recurso ao modelo de disposição retangular que incentivassem o uso da multiplicação pois, na exploração do Problema II os alunos recorreram, essencialmente, a estratégias aditivas, nomeadamente a adição sucessiva de parcelas iguais.

A inclusão de mais problemas à sequência inicialmente prevista repete-se, sempre pelo facto de sentir a necessidade de reforçar o uso de estratégias multiplicativas.

É possível observar as alterações praticadas na sequência de problemas através da comparação entre a sequência prevista e a sequência explorada em sala de aula, como mostra a figura 2.

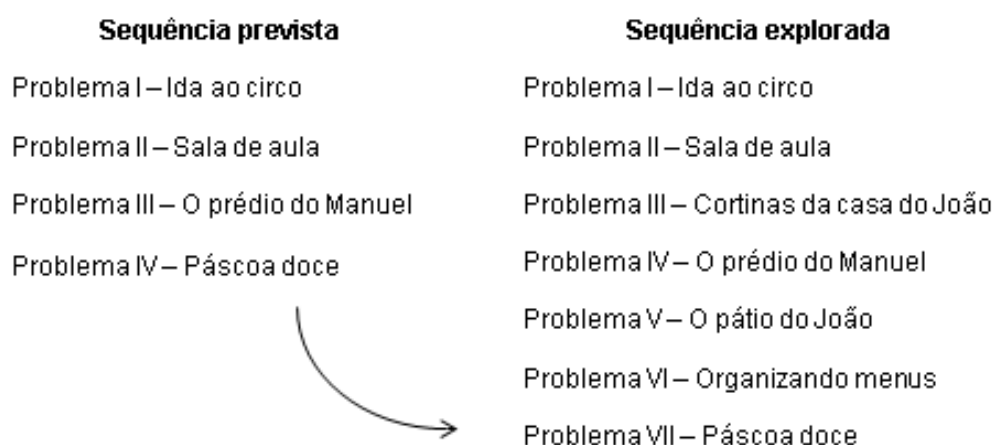


Figura 2 – A sequência de problemas prevista e a sequência de problemas explorada

Sempre que é explorado um problema da sequência repetem-se as ações descritas na *fase 4*.

Assim, a tabela 6 constitui o conjunto de problemas explorados no âmbito deste estudo, apresentando os objetivos e os aspetos a ter em consideração acerca dos contextos associados a cada problema.

Tabela 6 – Sequência de problemas explorada.

Problema	Objetivos	Aspectos a ter em conta nos contextos associados aos problemas
Ida ao circo	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. - Efetuar produtos, recorrendo a produtos conhecidos em que um dos fatores é o 5. - Usar, intuitivamente, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a propriedade associativa. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é aditivo. - Uso de estratégias e registos informais, recorrendo a desenhos, esquemas ou operações conhecidas. - Uso de produtos das tabuadas aprendidas anteriormente, nomeadamente a do 2, do 5 e do 6. - Uso de números de referência, nomeadamente o 2 e o 5, facilitando os cálculos dos alunos.
Sala de aula	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. - Usar e compreender a propriedade comutativa da multiplicação. - Efetuar produtos, recorrendo a produtos conhecidos da tabuada do 3 e do 4. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é aditivo. - Uso do modelo retangular. - Incentivar o uso do produto das tabuadas aprendidas anteriormente, nomeadamente a do 3 e do 4. - Uso de números pequenos, como o 3 e o 4, de modo a facilitar os cálculos dos alunos.
Cortinas da casa do João	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. - Usar estratégias multiplicativas associadas ao modelo de disposição retangular, recorrendo a produtos conhecidos das tabuadas do 2, 3, 4 e 6 (3x4 ou 4x3; 4x6 ou 6x4; 4x4; 8x4; 7x2; 7x4). - Usar relações de dobro (2x12; 2x16; 2x14). - Usar a propriedade comutativa da multiplicação. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é aditivo. - Uso do modelo retangular. - Incentivar o uso do produto das tabuadas aprendidas anteriormente, nomeadamente a do 3, 4 e 6. - Aumento do grau de dificuldade através do recurso a imagens cobertas. - Propor situações que permitam o uso de relações de dobro.
Prédio do Manuel	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. - Usar estratégias multiplicativas associadas ao modelo de disposição retangular, recorrendo a produtos conhecidos da tabuada do 3 e do 6. - Usar relações de dobro. - Usar a propriedade comutativa da adição. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é aditivo. - Uso do modelo retangular. - Incentivar o uso do produto das tabuadas aprendidas anteriormente, nomeadamente a do 3 e do 6. - Aumento do grau de dificuldade de cálculo através do uso do número 6. - Propor situações que permitam o uso de relações de dobro.

<p>Pátio do João</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Usar estratégias multiplicativas associadas ao modelo de disposição retangular. - Usar e compreender a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. - Usar a propriedade comutativa da adição. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é aditivo. - Uso do modelo retangular. - Incentivar o uso do produto das tabuadas aprendidas anteriormente, nomeadamente a do 4, 5 e 6. - Redução do grau de dificuldade através do uso de números mais pequenos e de referência (múltiplos de 5). - Explorar situações associadas à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
<p>Organizando menus</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Usar procedimentos de cálculo associados às estratégias multiplicativas tendo em conta o sentido combinatório da multiplicação. 	<ul style="list-style-type: none"> - Explorar problemas de multiplicação cujo sentido é combinatório. - Uso de estratégias e registos informais, recorrendo a desenhos, esquemas ou operações conhecidas.
<p>Páscoa doce</p>		<ul style="list-style-type: none"> - Propor situações que permitam o uso de estratégias multiplicativas associadas ao sentido combinatório da multiplicação.

Fase 6. A fase 6 determina o fim da construção da sequência de tarefas. Esta fase implica uma reflexão sobre as potencialidades da sequência de tarefas, centrando-se no que os alunos aprenderam e nas suas dificuldades. Assim, terminada a exploração da sequência de problemas realizo uma reflexão global acerca das dificuldades e aprendizagens dos alunos, considerando as estratégias e os procedimentos de cálculo utilizados na resolução dos problemas propostos, analisando se os objetivos estabelecidos para esta sequência foram atingidos. Esta reflexão final está intrinsecamente ligada ao capítulo V – Análise de dados.

4.2. Os problemas

Para a concretização deste estudo foi selecionado um tipo de tarefa, os problemas. Porém, também os problemas podem ser de diferentes tipos, pelo que, o tipo de problemas explorados, ao longo deste estudo, corresponde ao que os autores Vale e Pimentel (2004) designam por problemas de processo.

Efetivamente, foram explorados problemas que apresentavam uma única solução mas que possibilitavam a adoção de diferentes estratégias.

Tal como já referido, exceto o primeiro problema, todos os restantes foram retirados, adaptados ou inspirados em problemas de materiais didáticos construídos

por profissionais da área da Matemática. Na tabela 6 consta o nome de cada problema proposto, a data a que foram realizados e a sua respetiva fonte.

Tabela 7 – Designação, data e fonte dos problemas explorados.

Designação	Data	Fonte
Ida ao circo	15.04.15	Criado por mim
Sala de aula	22.04.15	Inspirado no documento “Projeto Desenvolvimento Sentido do Número: Perspetivas e Exigências Curriculares” (Equipa do projeto DSN, 2005)
Cortinas da casa do João	29.04.15	Retirado de um documento “Projeto Desenvolvimento Sentido do Número: Perspetivas e Exigências Curriculares” (Equipa do projeto DSN, 2005)
O prédio do Manuel	4.05.15	Inspirado na brochura “Números e Operações – 3.º ano” (Mendes F. <i>et al.</i> , 2010)
O pátio do João	6.05.15	Retirado de um documento “Projeto Desenvolvimento Sentido do Número: Perspetivas e Exigências Curriculares” (Equipa do projeto DSN, 2005)
Organizando menus	11.05.15	Adaptado da brochura “Números e Operações – 3.º ano” (Mendes <i>et al.</i> , 2010)
Páscoa doce	13.05.15	Inspirado na brochura “Números e Operações – 3.º ano” (Mendes <i>et al.</i> , 2010)

Dado que uma das questões do estudo pretende compreender de que modo é que a sequência de problemas de multiplicação contribui para a aprendizagem desta operação, a explicitação dos seus objetivos e intencionalidades será realizada no capítulo de análise dos dados, integrada com as estratégias e procedimentos de cálculo usados pelos alunos.

4.3. A exploração dos problemas na sala de aula

Apresentados os problemas realizados em sala de aula penso que seja pertinente referir o modo como estes foram explorados, tendo em conta a organização e o desenrolar da aula. A perspetiva de ensino dinamizada ao longo da exploração da sequência de problemas foi o ensino exploratório. Optei por este método de ensino por o considerar uma mais-valia para a aprendizagem dos alunos pois, possibilita, após a realização da tarefa, a discussão, a comunicação e a negociação das resoluções, contribuindo para que a aprendizagem da matemática se desenvolva com compreensão.

Esta perspetiva de ensino caracteriza-se por se centrar nos alunos e na sua aprendizagem, tendo como principal característica a promoção da descoberta e,

consequentemente, a construção do conhecimento matemático (Ponte, 2005). Neste sentido, pode-se considerar que o ensino exploratório diferencia-se do ensino 'tradicional ou direto', uma vez que os papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos modificam-se. Neste tipo de ensino, o professor não explica tudo, pois acredita que os alunos devem ter um papel ativo na realização do trabalho proposto (Ponte, 2005).

Também Canavarro (2011) reforça esta ideia, considerando que a aprendizagem dos alunos decorre do trabalho que realizam em torno de tarefas propícias a discussões coletivas com os colegas e com o professor. Esta partilha permite o surgimento de ideias matemáticas que serão sistematizadas pelos alunos e pelo professor. Oliveira *et al.*, (2013) afirmam que a “natureza interativa do ensino, envolvendo professor e alunos, é uma marca distinta do ensino exploratório” (p. 31). Os mesmos autores referem ainda que a aprendizagem, neste tipo de ensino, ocorre individualmente e em grupo, resultando da interação dos alunos com os colegas e com o professor, tendo contacto com o conhecimento matemático, sendo-lhes dada a oportunidade de negociar significados, no final de cada tarefa.

Além da seleção de tarefas matemáticas significativas que permitam aos alunos raciocinar matematicamente, o professor deve equacionar o modo como explorar as potencialidades destas tarefas, junto dos alunos, preparando-se para a complexidade dessa mesma exploração na sala de aula (Stein *et al.*, 2008). Neste sentido, os mesmos autores propõem que as aulas, de ensino exploratório, sejam estruturadas em três momentos: a de apresentação da tarefa, a de exploração/resolução, por parte dos alunos, e a de discussão e sistematização. Neste estudo assume-se esta mesma perspetiva, uma vez que na exploração da sequência de problemas, foram tidos em consideração estes três momentos.

Deste modo, importa explicitar cada um destes momentos, de modo a que seja perceptível como cada um deles deve decorrer e como foi desenvolvido na minha prática.

Apresentação do problema. Este primeiro momento caracteriza-se por ser o momento de apresentação da tarefa, no caso deste estudo da apresentação do problema a explorar. Neste momento o professor deve garantir que todos os alunos compreendem o objetivo a atingir, ou seja o que se espera que realizem e que se

sintam motivados para tal, devendo proporcionar-se os recursos materiais necessários e um ambiente favorável à exploração da tarefa (Anghileri, 2006).

Considerando Oliveira *et al.*, (2013) para a apresentação da tarefa, a prática do professor deve ter em conta a gestão da sala de aula e promoção da aprendizagem da matemática. Assim, as ações desenvolvidas devem reger-se por três intenções fundamentais: organizar o trabalho dos alunos, garantir que os alunos se apropriam da tarefa e promover a sua adesão na exploração da mesma, relacionada com a promoção da aprendizagem matemática. A primeira intenção diz respeito a aspetos relacionados com a organização da sala de aula, nomeadamente, o tempo que os alunos dispõem para a realização da tarefa, o modo de trabalho adotado (individual, pares ou em grupo), etc. A segunda intenção corresponde ao modo como o professor apresenta a tarefa aos alunos, esclarecendo a sua interpretação e estabelecendo os objetivos da sua resolução e a forma como a contextualiza, permitindo a familiarização com o seu contexto. A última, pretende desafiar os alunos para a exploração da tarefa, estabelecendo conexões com experiência anteriores, de modo a que se sintam motivados.

Para a exploração dos problemas optei sempre pela mesma forma de organização do trabalho (pares e trios), sendo estes organizados antes de iniciar a apresentação da tarefa. Neste momento, disponibilizava, ainda, o enunciado de cada problema, dispondo do espaço necessário para que os alunos registassem os seus cálculos. Na apresentação dos problemas pedi sempre que um aluno lesse o enunciado, de modo a envolver o grupo na apresentação do problema a explorar, além disso, permitia desenvolver a capacidade de leitura em voz alta, objetivo definido no programa de português para este ano de escolaridade. Esta opção nem sempre foi fiável pois os alunos estavam no início da exploração desta capacidade, tendo havido alguns alunos com dificuldades em ler alto, sendo necessário que a restante turma estivesse em silêncio para conseguir compreender o que o colega estava a ler. Quando a turma não conseguia ouvir o colega, optei por reler o enunciado. Além disso, após a leitura do enunciado, os alunos podiam colocar questões sobre o mesmo, de modo compreender o que era pretendido. Neste sentido, procurei garantir que todos os alunos entendiam o enunciado do problema, esclarecendo-os na sua interpretação, e que compreendiam o que se pretendia descobrir com a resolução do mesmo. Além disso, sempre que já se tive explorado

problemas com contextos semelhantes, questionava os alunos, de forma a suscitar conexões com os mesmos, contribuindo para a adesão dos alunos na resolução dos problemas.

Resolução do problema. Após a apresentação do problema surge o momento da realização do mesmo. Neste, os alunos iniciam a resolução do problema, de forma autónoma, em pequenos grupos, tendo sido esta a modalidade de trabalho adotada. Ao professor cabe a função de apoiar os alunos, assegurando que todos participam na resolução do problema (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012). No entanto é fundamental que os comentários que o professor realiza de modo a auxiliar os alunos nas suas dúvidas, enquanto exploram o problema, não reduzam o nível de exigência cognitiva e não conduzam a uma uniformização das estratégias e procedimentos de cálculo utilizados na resolução (Stein & Smith, 1998).

É no decorrer deste momento que o professor prepara o momento seguinte, para tal, enquanto circula pela sala de aula deve selecionar as resoluções que considera contributos positivos para a discussão coletiva e a sequência pela qual será realizada a sua apresentação. Esta seleção e ordenação das estratégias e procedimentos de cálculo deve partir da observação e apreciação do trabalho que os alunos estão a desenvolver (Stein *et. al.*, 2008).

A duração dos momentos de resolução dos problemas variou, de problema para problema, pelo que só se dava início às discussões coletivas após todos os alunos terem terminado as suas resoluções.

Discussão e Sistematização. Após a resolução do problema ocorre o momento de discussão e sistematização do problema. Para o desenvolvimento deste momento tem-se por base as resoluções selecionadas e sequenciadas ao longo do momento anterior.

Cabe ao professor orquestrar a discussão, devendo para tal, gerir as interações dos alunos, procurando promover a qualidade matemática das suas explicações e argumentações, promovendo a comparação entre os diferentes procedimentos de cálculo apresentados e a discussão sobre as suas diferenças e eficácia (Ruthven, Hofmann, & Mercer, 2011). Também Oliveira *et al.*, (2013) consideram, que para promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos, o professor deve colocar questões que conduzam à explicação das resoluções, justificando os resultados e as formas de representação e à análise das diferenças e eficácia das

resoluções apresentadas. Além disso, os mesmos autores consideram que o professor deve incentivar os alunos a questionar os colegas de modo a clarificarem as ideias apresentadas ou a esclarecerem as dúvidas que possam surgir partindo da sua apresentação.

A partilha de ideias pode promover o surgimento de novas ideias matemáticas ou o esclarecimento de conceitos aprendidos anteriormente, daí que não seja apenas um momento de discussão mas também de sistematização. Para tal, é fulcral que o professor oriente os alunos para a sistematização das principais ideias matemáticas que surgiram ao longo da discussão (Anghileri, 2006). Assim, deseja-se que no final deste momento os alunos reconheçam “os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos, [estabeleçam] conexões com as aprendizagens anteriores e, [reforcem] os aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais (...)” (Oliveira *et al.*, 2013, p. 34).

Para que o momento da discussão coletiva se caracterize como produtivo, Stein *et al.* (2008) consideram que o professor deve prepará-lo e conduzi-lo atendendo a um conjunto de cinco práticas: antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões. As práticas antecipar e monitorizar dizem respeito à preparação para o momento de discussão.

Antecipar. Esta prática corresponde à previsão dos diferentes modos de resolução da tarefa (Stein *et al.*, 2008). Na minha prática letiva, quando planificava cada um dos problemas, realizava uma antecipação das diferentes estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos poderiam utilizar.

Monitorizar. Esta prática está relacionada como o trabalho a realizar ao longo da realização da tarefa, ou seja com a observação do trabalho realizado pelos alunos (Stein *et al.*, 2008). Para tal, quando os alunos se encontravam a explorar os problemas fui circulando pelos vários pares/trios de modo a compreender o que estavam a fazer, quais as estratégias e procedimentos de cálculo que estavam a utilizar, as dificuldades sentidas, etc. Esta prática permitiu-me analisar e compreender o modo com os alunos pensavam e preparar os momentos seguintes da aula.

Selecionar. Esta prática decorre da anterior. Uma vez analisadas as resoluções dos alunos, o professor decide quais as estratégias e procedimentos de cálculo a apresentar, tendo em conta os objetivos estabelecidos para a aula (Stein *et al.*,

2008). Para o desenvolvimento deste momento optei, sempre, por selecionar estratégias e procedimentos de cálculo distintos, com níveis de eficácia diferentes.

Sequenciar. Está relacionada com a ordem pela qual as resoluções dos alunos são apresentadas (Stein *et al.*, 2008). Na minha prática procurei organizar as resoluções dos alunos atendendo ao seu grau de eficácia. Assim, partia das resoluções, cujas estratégias e procedimentos de cálculo se caracterizavam como sendo as menos eficazes para as mais eficazes.

Estabelecer conexões. Esta prática consiste em estabelecer conexões entre as diferentes resoluções apresentadas, bem como a sistematização de ideias matemáticas (Stein *et al.*, 2008). Este trabalho deve ser realizado em conjunto com os alunos de modo a que estes se apropriem mais facilmente destas conexões. Deste modo, ao longo da minha prática procurei resumir as ideias apresentadas no momento da discussão e, concluir quais as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados mais eficazes.

Capítulo V – Análise dos Dados

Este capítulo consiste na apresentação e análise dos dados recolhidos durante a intervenção pedagógica, durante a qual foi proposta a exploração de uma sequência de problemas de multiplicação. Esta sequência, composta por sete problemas, pretendia promover o uso de procedimentos multiplicativos, baseados nas propriedades da multiplicação e apoiados nos contextos dos problemas. Este estudo, além de pretender identificar e caracterizar as estratégias e procedimentos de cálculo usados pelos alunos procura analisar de que modo a exploração de uma sequência de problemas contribui para a aprendizagem da multiplicação. Neste sentido, dividi este capítulo em duas secções. Na primeira secção optei por identificar e analisar as diferentes estratégias e procedimentos de cálculo usados, na resolução de cada problema. Em seguida, na segunda secção, relaciono as estratégias e procedimentos utilizados com as características particulares dos problemas, tendo em consideração as intencionalidades específicas de cada um.

5.1. Estratégias e procedimentos de cálculo

Para a exploração da sequência de problemas, tal como já referido, adotei o método de ensino exploratório. Deste modo, na exploração de cada problema proposto segui a mesma estrutura, pelo que, num primeiro momento apresentei o problema a explorar, tendo para tal, realizado a sua leitura e respondido às questões/dúvidas, colocadas pelos alunos, prestando as explicações necessárias para a resolução do problema.

Realizada a apresentação do problema, deu-se início à sua resolução, tendo para tal, cada par efetuado os registos que consideravam necessários à sua exploração. Ao longo deste momento, procurei circular por todos os pares/trios de modo a observar o trabalho que os alunos estavam a desenvolver, podendo auxiliá-los quando necessário e, conseqüentemente, selecionar e sequenciar as produções a serem apresentadas e discutidas.

Após todos terminarem a resolução do problema foram selecionadas as produções de vários pares/trios, cujas resoluções apresentavam diferentes estratégias e procedimentos de cálculo, representativas das utilizadas pela restante turma. A discussão é composta pela apresentação de vários pares, iniciando-se no par que recorreu a uma estratégia menos eficaz e terminando com o par que optou por uma estratégia mais eficaz. Durante este momento, os alunos explicaram aos colegas o modo como resolveram o problema e responderam a questões que lhes foram colocadas.

Finalizada a discussão/sistematização do problema, concretizei entrevistas com alguns pares/trios, de modo a compreender com maior pormenor as estratégias utilizadas, sendo estas representativas das resoluções da turma.

5.1.1. Problema I – Ida ao circo

Na exploração do primeiro problema estiveram envolvidos 16 alunos. Para dar início à exploração do mesmo, informei os alunos da modalidade de trabalho que iria adotar, tendo-os organizado em pares. A exploração deste problema teve a duração de 60 minutos, incluindo os diferentes momentos de aula.

Questão 1

Estratégias de Contagem

O par Camila e Carolina foi o único que recorreu a uma estratégia de contagem. Apesar de não ter sido selecionado para o momento de discussão coletiva ou para a entrevista é possível perceber, através da análise da sua produção (Figura 3), que a estratégia utilizada é uma estratégia de contagem. As alunas parecem recorrer ao procedimento de contagem por saltos em que cada

círculo corresponde a 5€. Optam por desenhar 20 círculos, que representam as 20 crianças, colocando no final 100 €, ou seja o valor pago por todas as crianças.

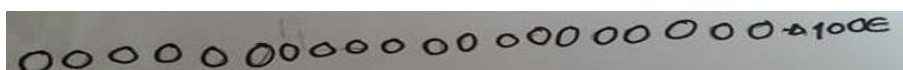


Figura 3 – Resolução de Camila e Carolina – Problema I, questão 1.

Estratégias Aditivas

Na resolução deste problema metade da turma recorreu a uma estratégia aditiva, tendo utilizado o mesmo procedimento de cálculo. Como tal, foi selecionado o registo de um par, Iris e Tiago, para ilustrar o uso desta estratégia (Figura 4).

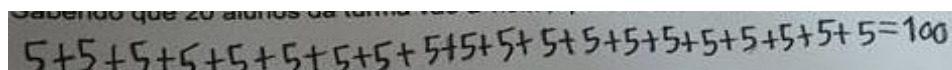


Figura 4 – Resolução de Iris e Tiago – Problema I, questão 1.

O procedimento de cálculo, associado à estratégia aditiva, é o de adição sucessiva, uma vez que, para descobrir o valor a pagar pelos 20 alunos, o par adiciona sucessivamente o número 5, que corresponde ao valor a pagar por cada aluno. Para melhor compreender o raciocínio dos alunos realizei uma entrevista ao Tiago.

Eu: Nós tínhamos de descobrir quanto é que 20 alunos pagavam para ir ao circo, certo? Então o que são estes cincos todos? O que é que representam?

Tiago: Representa quanto é que as crianças pagavam, cada criança.

Eu: Então cada criança pagou cinco euros e como é que vocês descobriram que as vinte crianças pagavam cem euros?

Tiago: 5 + 5 + 5 até chegar aos 20 alunos.

(Entrevista Problema I, questão 1; 9'40"; 15-4-15)

Considerando a produção e a explicação do par, quando realizada a entrevista, é perceptível que os alunos recorreram ao procedimento de cálculo, adicionar sucessivamente, ou seja, realizaram a adição sucessiva de um mesmo número, neste caso o 5 (valor pago por cada criança), contabilizando todas as crianças de forma a determinar o valor pago no total, apresentando os cálculos horizontalmente.

Estratégias Multiplicativas

O uso de uma estratégia multiplicativa para a primeira questão foi adotado pela outra metade da turma, ou seja, quatro pares. Dois pares escreveram na sua folha de registo a expressão multiplicativa e o respetivo cálculo para a sua resolução, como é possível observar pela produção realizada pelo par Iara e Joana (Figura 5).

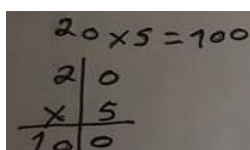

$$\begin{array}{r} 20 \times 5 = 100 \\ 20 \\ \times 5 \\ \hline 100 \end{array}$$

Figura 5 – Resolução de Iara e Joana – Problema I, questão 1.

No momento da discussão coletiva, o par explica como resolveu esta questão.

Eu: Fizeram 20×5 , porquê?

Joana: Porque eram 20 alunos que iam ao circo e cada aluno pagou 5 euros.

(Discussão coletiva do Problema I; 2'00";15-4-15)

Considerando a produção e a apresentação do par, durante o momento de discussão, é possível verificar que a estratégia utilizada foi a estratégia multiplicativa dado que multiplicaram 20 (alunos) por 5 (valor pago por cada aluno). Ao analisar o registo escrito é possível verificar que, os alunos separaram as dezenas das unidades de modo a facilitar a concretização do seu cálculo, tendo recorrido para tal ao algoritmo tradicional da multiplicação.

Os outros dois pares que recorreram à estratégia multiplicativa parecem ter recorrido a outro procedimento pois, não apresentam quaisquer cálculos associados à expressão multiplicativa escrita na sua folha de registo, como por exemplo o par Diana e Leandro (Figura 6).

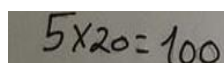

$$5 \times 20 = 100$$

Figura 6 – Resolução de Diana e Leandro – Problema I, questão 1.

Apesar de não terem sido selecionados para a discussão ou entrevista, ao analisar os seus registos penso que o procedimento de cálculo a que recorreram foi o uso de produtos conhecidos. Pois, possivelmente terão recorrido à utilização das

tabuadas já trabalhadas, não sentindo a necessidade de efetuarem registos escritos, no entanto, dado a grandeza dos números envolvidos não é possível confirmar.

Questão 2

Estratégias Aditivas

Na resolução desta questão apenas dois pares não optaram pelo uso de estratégias aditivas, tendo seis pares recorrido ao mesmo procedimento de cálculo, adição sucessiva. Como tal, à semelhança da questão anterior, foi selecionada a produção de um par, Iris e Tiago, representativo deste procedimento (Figura 7).


$$6 + 6 = 12 \quad 12 + 100 = 112$$

Figura 7 – Resolução de Iris e Tiago – Problema I, questão 2.

Iris: Fizemos $6 + 6$, que são os seis da professora e da estagiária e vimos que deu 12 euros. Depois fizemos $12 + 100$ que dava o total de 112.

Eu: O que era o 12?

Iris: O 12 era o valor do dinheiro da estagiária e da professora.

Eu: E o 100?

Iris: O 100 era o total de todo o dinheiro das crianças.

(Entrevista Problema I, questão 2; 10'45"; 15-4-15)

O procedimento de cálculo, associado à estratégia aditiva, é o de adição sucessiva, uma vez que, para descobrir o valor a pagar pela professora e estagiária, o par adiciona duas vezes o número 6, que corresponde ao valor a pagar por cada adulto.

Descoberto o valor a pagar pelos adultos e a pagar pelas crianças, o grupo indica que adicionou o resultado obtido nas duas questões, ou seja, adiciona o valor a pagar pela estagiária e pela professora (12) ao valor a pagar pelos alunos (100). Em ambas as adições, o par recorre a cálculos horizontais.

Estratégias Multiplicativas

Dois pares optaram pelo uso de uma estratégia multiplicativa, para a resolução desta questão, pelo que foi selecionada a produção do par Alexandre e o Silvano, permitindo ilustrar o uso desta estratégia (Figura 8).

do preço a pagar por cada criança, na segunda questão, adicionou duas vezes o 6, ou seja o valor a pagar por cada adulto. Porém, após realizarem estes cálculos, os alunos decidiram converter as adições sucessivas em produtos.

5.1.2. Problema II – Sala de aula

Na exploração deste problema estiveram envolvidos 14 alunos. Para dar início à exploração do mesmo, informei os alunos da modalidade de trabalho que iria adotar, tendo-os organizado em pares. A exploração deste problema teve a duração de 45 minutos, incluindo os diferentes momentos de aula.

Estratégias de contagem

Na resolução deste problema apenas um par optou por usar uma estratégia de contagem, a contagem de um em um. Como tal, foi selecionada a sua produção para ilustrar o uso desta estratégia (Figura 11).

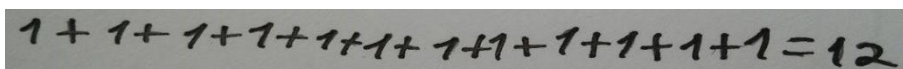

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12$$

Figura 11 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema II.

Apesar da produção escrita dos alunos poder levar a pensar que o par Catarina e Fábio usaram uma estratégia aditiva, a adição sucessiva, a verdade é que durante o momento de discussão Fábio afirma “Nós contamos todas as cadeiras e por isso fizemos esta conta” (Discussão coletiva do Problema II; 13’40”;22-4-15). Explica, assim, que contaram cadeira a cadeira, tendo depois decidido realizar a adição sucessiva do 1, ou seja de cada cadeira. Deste modo, é possível compreender que o procedimento de cálculo adotado foi a contagem de um em um.

Estratégias aditivas

O uso de estratégias aditivas foi opção para quatro pares, tendo surgido dois procedimentos de cálculo distintos, a adição sucessiva e a adição dois a dois. No que se refere ao uso do procedimento de cálculo adição sucessiva, este não foi aplicado de igual modo pelos três pares, pelo que foram selecionadas duas produções ilustrativas do uso deste procedimento (Figuras 12 e 13). Estes pares

contabilizaram todas as cadeiras disponíveis, na sala de aula, de forma a determinar o número de alunos que podiam estar sentados na mesma.

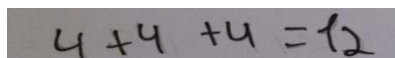

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Figura 12 – Resolução de Camila e Leandro – Problema II.

Camila e Leandro não foram selecionados para o momento de discussão nem para a entrevista, no entanto, é possível verificar que o procedimento de cálculo utilizado foi a adição sucessiva, na medida em que o par adiciona três vezes o número quatro. Considerando a imagem presente no enunciado deste problema a opção por adicionar três vezes o número quatro prende-se com o facto de existirem três colunas com quatro cadeiras cada.

Apesar do seguinte par também ter recorrido ao mesmo procedimento de cálculo, da resolução anterior, a adição sucessiva, a verdade é que este par utilizou-o de outra forma, adicionando sucessivamente o número de cadeiras existentes por fila (linha).

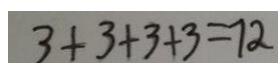

$$3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

Figura 13 – Resolução de Iris e Marco – Problema II.

Eu: Como é que vocês fizeram?

Iris: Nós contamos de três em três.

Marco: Fizemos 3 cadeiras, mais 3 cadeiras, mais 3 cadeiras e mais 3 cadeiras (apontando na imagem cada fila, com as respetivas cadeiras).

Eu: Então quantas cadeiras havia no total?

Iris: 12.

(Discussão coletiva do Problema II; 15'50";22-4-15)

Analisando a produção dos alunos e a sua apresentação é possível constatar, que este par, ao contrário do anterior, decidiu adicionar quatro vezes o número três, tendo, portanto, em conta o facto de existirem quatro linhas com três cadeiras cada.

Para além dos três pares que recorreram ao procedimento de cálculo de adicionar sucessivamente, houve outro par que recorreu, igualmente, a uma

estratégia aditiva para a resolução deste problema, no entanto o procedimento utilizado foi a adição dois a dois (Figura 14).

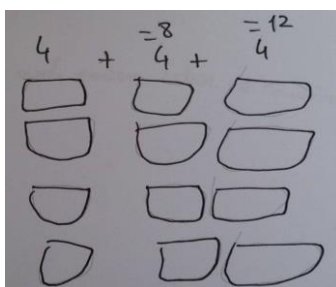


Figura 14 – Resolução de Alexandre e Lara – Problema II.

Eu: Explica lá Alexandre o que é que vocês fizeram.

Alexandre: Desenhámos 4, mais 4 e mais 4, que eram as cadeiras.

Eu: Então desenharam quantas colunas?

Alexandre: 3 colunas.

Eu: 3 colunas que tinham quantas cadeiras?

Alexandre: 4.

Eu: Por isso fizeram 4 cadeiras de uma coluna...

Alexandre: Mais 4 de outra, são 8 e mais 4 de outra são 12.

(Discussão coletiva do Problema II; 21'30";22-4-15)

Ao analisar a resolução dos alunos e a sua apresentação verifica-se que este par optou por adicionar dois a dois, pelo que foi agrupando as parcelas iguais. Assim, considerando que realizaram os seus cálculos tendo em conta o número de cadeiras por coluna, este par realizou o cálculo 4 cadeiras mais 4 cadeiras, que é igual a 8 cadeiras, e só depois adicionou a última coluna, 8 cadeiras mais 4 cadeiras é igual a 12 cadeiras.

Estratégias multiplicativas

O uso de uma estratégia multiplicativa para a resolução deste problema foi adotado por dois pares. Estes não apresentam quaisquer cálculos associados à expressão multiplicativa escrita na sua folha de registo, como por exemplo o par Matilde e Rodrigo (Figura 15).

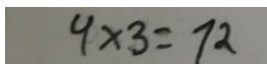
A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $4 \times 3 = 12$ in black ink.

Figura 15 – Resolução de Matilde e Rodrigo – Problema II.

No momento da entrevista, o par explica como é que resolveu esta questão.

Matilde: Fizemos $4 \times 3 = 12$.

Eu: O que é o 4?

Matilde: O 4 são as filas.

Eu: E o 3?

Matilde: As cadeiras que estavam dentro de cada fila.

(Entrevista Problema II; 30'15";22-4-15)

Ao analisar a sua resolução e explicação, ao longo da entrevista, não é possível saber qual é procedimento de cálculo utilizado. Contudo, penso que terá sido o recurso a produtos conhecidos, tendo recorrido à utilização das tabuadas já trabalhadas, não sentindo a necessidade de efetuarem cálculos, apresentando apenas a expressão na horizontal 4 (número de filas) vezes 3 (número de cadeiras por fila).

À semelhança do que aconteceu com a resolução do problema anterior, também na exploração deste problema houve um par que apresentou nas suas produções dois tipos de estratégias, aditivas e multiplicativas, como ilustra a Figura 16.

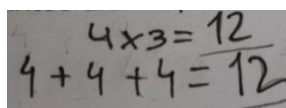
A photograph of a piece of paper with two handwritten equations in black ink: $4 \times 3 = 12$ and $4 + 4 + 4 = 12$.

Figura 16 – Resolução de Carolina e Maria – Problema I, questão 1.

Eu: Então vocês fizeram aqui 4×3 . Então o que é que era o 4?

Carolina: Era as filas.

Eu: E o 3?

Maria: Era a outra fila... As cadeiras.

Eu: Então e depois fizeram $4 + 4 + 4 = 12$?

Maria: Não, fizemos primeiro essa, depois é que fizemos a de vezes.

Eu: Então explica lá porque é que fizeram primeiro.

Maria: Fizemos $4 + 4 + 4$ que eram as filas com as cadeiras.

Eu: Então e como é que descobriram o 4×3 ?

Carolina: Porque fomos à tabuada do 4.

Maria: 4 filas vezes 3 cadeiras.

(Entrevista Problema II; 24'50";22-4-15)

Considerando a explicação do par sobre as estratégias utilizadas na resolução deste problema é possível perceber que a estratégia utilizada para a sua resolução foi a aditiva, tendo recorrido à adição sucessiva do número de cadeiras por coluna, ou seja $4+4+4$. No entanto, após finalizarem os cálculos aditivos as alunas revelam que perceberam que podiam ter resolvido o problema utilizando uma estratégia multiplicativa, tendo decidido resolvê-lo utilizando, também, cálculos multiplicativos. O par explica, durante a entrevista, que pode multiplicar o número de filas (linhas) pelo número de cadeiras (colunas), 4×3 . Para além disso, referem que para descobrir o resultado recorreram à tabuada do 4^2 , podendo constatar que o procedimento de cálculo utilizado foi o uso de produtos conhecidos.

5.1.3. Problema III – Cortinas da casa do João

Na exploração deste problema estiveram envolvidos 18 alunos. Para dar início à exploração do mesmo, informei os alunos da modalidade de trabalho que iria adotar, tendo-os organizado em pares. No entanto como alguns alunos chegaram mais tarde foi necessário integrá-los, passando a existir 6 pares e 2 trios. A exploração deste problema teve a duração de 90 minutos, incluindo os diferentes momentos de aula.

Questão 1

Estratégias de Contagem

Para a resolução da primeira questão o uso de uma estratégia de contagem foi opção apenas para um par, Gonçalo e Luiz. Como tal, foi selecionada a sua produção para ilustrar o uso desta estratégia (Figura 17).

² Note-se que os alunos identificam como produtos da tabuada do 4 os que têm como multiplicador o número 4.

Handwritten text in black ink on a light background, reading "Descobri a contar de um em um e deu 12".

Figura 17 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema III, questão 1.

Considerando a produção dos alunos não restam dúvidas que a estratégia utilizada foi de facto de contagem, tendo recorrido ao procedimento de cálculo contagem de um em um.

Estratégias Aditivas

As estratégias aditivas foram as mais usadas na resolução deste problema, tendo sido opção para três pares e dois trios, os cinco grupos recorreram ao mesmo procedimento de cálculo, a adição sucessiva, porém, o uso deste procedimento não foi igual em todos os pares/trios, tendo dois trios e um par recorrido à adição sucessiva do número de rãs em linha e dois pares, optado pela adição sucessiva do número de rãs em coluna. Considerando que o procedimento de cálculo foi utilizado de duas formas diferentes, foram selecionadas duas produções que o permitem ilustrar (Figuras 18 e 19).

Handwritten equation in black ink on a light background, reading "4+4+4=12".

Figura 18 – Resolução de Camila e Leandro – Problema III, questão 1.

Leandro: Contámos de 4 em 4.

Eu: Então quer dizer que contaram na vertical, coluna, ou na horizontal, linha?

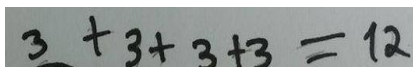
Leandro: Em linha.

Eu: Então o 4 é o quê?

Leandro: São as rãs de cada linha (apontando para a figura) e são 3 linhas.

(Discussão coletiva do Problema III; 2^o; 29-4-15)

No momento de discussão do problema de Camila e do Leandro é possível compreender que este par, à semelhança de outros dois grupos, optou por descobrir o número de rãs existentes no cortinado do quarto de João, recorrendo à adição sucessiva destas, considerando o número de rãs existentes na horizontal (em linha), tendo, portanto, adicionado 4+4+4. Já o par formado por Alexandre e Lara usou o número de rãs existentes na vertical (em coluna).



A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ written in black ink. The paper is slightly wrinkled and has a light beige background.

Figura 19 – Resolução de Alexandre e Lara – Problema III, questão 1.

Alexandre: Contámos as rãs.

Eu: E contaram as rãs na...

Alexandre: Na vertical.

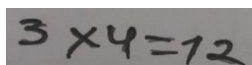
Eu: Então o que é que é este 3, mais este 3, mais este 3 e mais este 3?

Alexandre: São as rãs de cada coluna.

(Discussão coletiva do Problema III; 0'15";29-4-15)

Estratégias Multiplicativas

Para a resolução desta questão, dois pares, optaram pela utilização de estratégias multiplicativas. Como tal, foi selecionada a produção de um par, representativa do uso desta estratégia (Figura 20).



A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $3 \times 4 = 12$ written in black ink. The paper is slightly wrinkled and has a light beige background.

Figura 20 – Resolução de Diana e Joana – Problema III, questão 1.

Eu: A Joana e a Diana fizeram 3×4 . Explica lá Joana, o que é que é o 3 e o que é que é o 4?

Joana: Contámos no desenho.

Eu: Então mas no desenho como é que descobriste o 3 e 4?

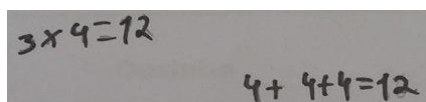
Joana: Aqui contámos 3 (apontando para as rãs na vertical) e aqui contámos 4 (apontando para as rãs na horizontal) e depois multiplicámos uma pela outra.

(Discussão coletiva do Problema III; 4'30";29-4-15)

Considerando a produção escrita e a apresentação parece que o procedimento de cálculo utilizado foi o uso de produtos conhecidos, na medida em que recorreram a tabuadas já exploradas em sala de aula para descobrir o número de rãs existentes no cortinado do quarto do João, tendo portanto multiplicado 3×4 . Para além disso, importa salientar que estes dois pares exploraram as potencialidades da imagem ilustrativa da cortina. Assim, tendo em conta a sua disposição retangular compreenderam que podiam multiplicar o número de rãs na vertical pelo número de rãs na horizontal para descobrir o número total de rãs, revelando que perante

problemas com contexto associado a este modelo são capazes de os resolver utilizando estratégias multiplicativas.

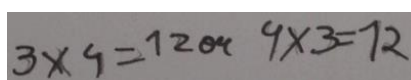
Na resolução desta questão os cinco grupos que recorreram ao uso de estratégias aditivas, apresentam nas suas produções escritas, além das estratégias aditivas, estratégias multiplicativas. Como tal, foi selecionada uma produção para o ilustrar (Figura 21).



Handwritten mathematical expressions: $3 \times 4 = 12$ and $4 + 4 + 4 = 12$

Figura 21 – Resolução de Matilde, Rodrigo e Tiago – Problema III, questão 1.

Importa ainda referir que um destes pares, apresenta as seguintes expressões ‘ $3 \times 4 = 12$ ou $4 \times 3 = 12$ ’ revelando compreender a propriedade comutativa da multiplicação, tal como ilustra a sua produção (Figura 22).



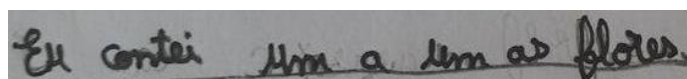
Handwritten mathematical expressions: $3 \times 4 = 12$ or $4 \times 3 = 12$

Figura 22 – Resolução de Iris e Marco – Problema III, questão 1.

Questão 2

Estratégias de Contagem

O uso de estratégias de contagem para a resolução desta questão foi opção para dois pares e um trio, assim, foi selecionada uma produção de modo a ilustrar o uso desta estratégia (Figura 23).



Handwritten text: *Eu contei um a um as flores.*

Figura 23 – Resolução de Matilde, Rodrigo e Tiago – Problema III, questão 2.

Matilde: Contámos duas vezes, de um em um, cada flor.

(Entrevista Problema III, questão 2; 3; 29-4-15)

Considerando a produção e explicação é possível constatar que os alunos, para resolver esta questão, utilizaram o procedimento de cálculo, contar de um em um. Na medida em que, estes afirmaram que contaram todas as flores da cortina, como se esta estivesse fechada.

Estratégias Aditivas

Três pares e um trio optaram pelo uso de estratégias aditivas para a resolução desta questão, tendo surgido o mesmo procedimento de cálculo, embora com algumas variantes. Assim, foram selecionadas três produções que ilustram o uso deste procedimento (Figuras 24, 25 e 26).

Iris e Marco optaram por desenhar as flores da cortina do quarto da irmã do João, tendo de seguida, recorrido à adição sucessiva do número de flores por coluna, adicionado seis vezes (número de colunas) o quatro (número de flores por coluna), tal como ilustra a Figura 24.

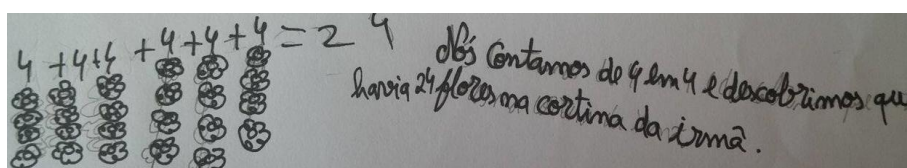


Figura 24 – Resolução de Iris e Marco – Problema III, questão 2.

O par Camila e Leandro ao contrário do par anterior, adicionou sucessivamente o número de flores existentes por linha, adicionando quatro vezes (número de linhas) o número 6 (número de flores por linha), tal como ilustra a Figura 25.

$$6 + 6 + 6 + 6 = 24$$

Figura 25 – Resolução de Camila e Leandro – Problema III, questão 2.

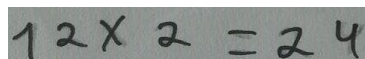
Os outros dois grupos que recorreram ao procedimento de cálculo, adição sucessiva, parecem ter optado por agrupar o número de flores existentes em metade da cortina e adicioná-lo mais uma vez. O par Carolina e Maria foi um deles, cujo registo escrito é apresentado na Figura 26.

$$12 + 12 = 24$$

Figura 26 – Resolução de Carolina e Maria – Problema III, questão 2.

Estratégias Multiplicativas

Para a resolução desta questão apenas o par constituído por Gonçalo e Luiz recorreu ao uso de uma estratégia multiplicativa (Figura 27).



Handwritten equation: $12 \times 2 = 24$

Figura 27 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema III, questão 2.

Eu: Vocês fizeram 12×2 . O que é o 12?

Gonçalo: São estas flores (apontando para as flores da metade da cortina).

Eu: Então e porque fizeram vezes 2?

Gonçalo: Porque era a outra parte.

Luiz: Também podíamos fazer $12 + 12$, é igual.

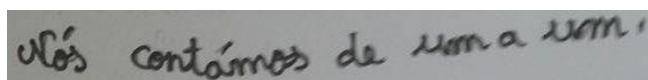
(Entrevista Problema III, questão 2; 5'20"; 29-4-15)

Considerando a produção e a entrevista do par é possível constatar que o procedimento de cálculo utilizado foi o uso de relações de dobro, na medida em que os alunos compreendem que apenas está representado metade do cortinado do quarto da irmã do João e, com tal, sabem que o número de flores totais tem de ser o dobro das que estão visíveis.

Questão 3

Estratégias de Contagem

À semelhança com a questão anterior, também nesta, foram três os grupos que recorreram a estratégias de contagem para a resolver, tendo utilizado a contagem de um em um como procedimento de cálculo. Como tal, foi selecionada uma produção representativa do uso desta estratégia (Figura 28).



Handwritten text: Nós contamos de um a um.

Figura 28 – Resolução de Matilde, Rodrigo e Tiago – Problema III, questão 3.

Tiago: Nós pensámos como se a cortina estivesse fechada.

Eu: Então como é que contaram?

(Tiago conta, de um em um, duas vezes, os morangos representados na imagem ilustrativa da cortina da cozinha).

(Entrevista Problema III, questão 3; 3'45"; 29-4-15)

Estratégias Aditivas

Na resolução desta questão o uso de estratégias aditivas foi opção para três grupos, tendo surgido o uso do procedimento de cálculo, a adição sucessiva. No entanto este não foi utilizado da mesma forma por todos os pares/trios. Como tal, foram selecionadas duas produções que permitem ilustrar o uso deste procedimento (Figuras 29 e 30).

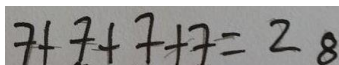

$$7+7+7+7=28$$

Figura 29 – Resolução de Iris e Marco – Problema III, questão 3.

Considerando a produção da figura 29 é possível verificar que o par Iris e Marco adicionaram sucessivamente o número de morangos existentes em cada linha até contabilizar o número total de morangos que compõem a cortina da cozinha. Assim, uma vez que a imagem ilustrativa da cortina apenas tem à vista metade dos morangos, ou seja, duas linhas com sete morangos cada, o par decidiu adicionar quatro vezes (número de linhas) o sete (número de morangos por linha), de modo a descobrir o número total de morangos.

Já no que respeita à produção da figura 30 e à explicação dos alunos Carolina e Maria conclui-se que estes terão contado o número de morangos de cada uma das partes da cortina e, em seguida, adicionaram-nos.

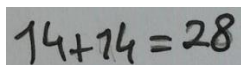

$$14+14=28$$

Figura 30 – Resolução de Carolina e Maria – Problema III, questão 3.

Eu: O que é que é este 14?

Carolina: É da cortina da cozinha, os morangos.

Maria: Contámos primeiro esta parte (aponta para a parte da imagem onde está representada metade da cortina) e depois fizemos mais 14. Por isso fizemos 14+14.

(Entrevista Problema III, questão 3; 1'25"; 29-4-15)

Estratégias Multiplicativas

Para a resolução desta questão dois pares utilizaram estratégias multiplicativas, parecendo recorrer ao uso de produtos conhecidos para descobrir o

número de morangos que compõem a cortina. Dado que o procedimento de cálculo utilizado foi o mesmo, foi selecionada apenas uma produção, a de Gonçalo e Luiz (Figura 31).

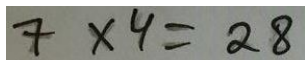
A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $7 \times 4 = 28$ written in black ink.

Figura 31 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema III, questão 3.

Eu: Então nesta resolução o que é que é o 7 e o que é que é o 4? Como é que descobriram?

Gonçalo: O 7 era estes aqui...

Eu: Eram estes aqui? Explica lá melhor.

Gonçalo: Os morangos.

Eu: Os morangos em coluna ou em linha?

Gonçalo: Em linha.

Eu: Havia 7 morangos em linha. E o 4?

Gonçalo: Assim.

Eu: Explica melhor.

Gonçalo: A coluna.

Eu: Isso quer dizer que havia 4 colunas com...

Gonçalo: Com 7 morangos em cada.

(Entrevista Problema III, questão 3; 7'15"; 29-4-15)

Considerando o registo e entrevista conclui-se que o par compreendeu que pode utilizar uma estratégia multiplicativa quando está perante problemas com contextos associados à disposição retangular. Assim, o par identifica o número de morangos na horizontal e o número de morangos na vertical e multiplica-os, parecendo recorrer em seguida ao uso de produtos conhecidos, uma vez que a tabuada do 4 já foi explorada em sala de aula.

Questão 4

Estratégias de Contagem

Assim como nas questões anteriores, os mesmos pares continuaram a utilizar o mesmo procedimento de cálculo, associado à estratégia de contagem, para resolver a questão. Como tal, foi selecionada uma produção representativa do uso desta estratégia (Figura 32).

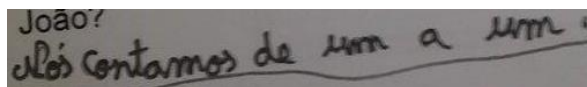


Figura 32 – Resolução de Matilde, Rodrigo e Tiago – Problema III, questão 3.

Matilde: Fizemos sempre a mesma coisa.

Eu: Então utilizaram a mesma estratégia?

Matilde: Sim, contámos de um em um.

(Entrevista Problema III, questão 4; 4'31"; 29-4-15)

Estratégias Aditivas

Também na resolução desta questão, três pares recorreram ao uso de estratégias aditivas, tendo surgido o mesmo procedimento de cálculo, a adição sucessiva. Tal como na questão anterior, o uso deste procedimento não foi igual em todos os pares, pelo que foram selecionados dois registos escritos que o permitem ilustrar (Figuras 33 e 34).

O par Iris e Marco volta a recorrer ao uso da adição sucessiva para resolver esta questão, tal como revela a sua produção escrita (Figura 33).

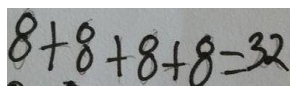


Figura 33 – Resolução de Iris e Marco – Problema III, questão 4.

Considerando os seus registos, observa-se que o par adicionou sucessivamente o número de joaninhas presentes em cada linha, até descobrir o número total de joaninhas do cortinado do quarto do irmão do João. Deste modo, e atendendo à imagem representativa do cortinado, é possível compreender que Iris e Marco adicionaram quatro vezes (número de linhas) o número oito (número de joaninhas por linha), de forma a contabilizarem o número total de joaninhas. Já Carolina e Maria determinaram o número de joaninhas de parte da cortina e parecem perceber que a outra parte tem o mesmo número de joaninhas. Adicionam, no final, duas vezes a quantidade 16. Note-se que, neste caso, não é explícito como é que este par descobre o número de joaninhas de uma parte da janela.

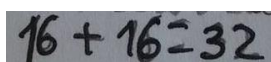


Figura 34 – Resolução de Carolina e Maria – Problema III, questão 4.

Maria: Neste fizemos $16+16$, que eram as joaninhas.

Eu: Então como é que contaram?

Maria: Metade, estas não contamos (aponta para as 4 joaninhas presentes na metade da cortina incompleta).

(Entrevista Problema III, questão 4; 1'50"; 29-4-15)

Estratégias Multiplicativas

Tal como na questão anterior, dois pares optaram pelo uso de estratégias multiplicativas, tendo recorrido ao mesmo procedimento de cálculo, uso de produtos conhecidos. Assim, foi selecionada uma produção representativa do uso deste procedimento correspondente ao par Gonçalo e Luiz (Figura 35).

A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $4 \times 8 = 32$ written in black ink. The paper is slightly wrinkled and has a light background.

Figura 35 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema III, questão 4.

Eu: Como é que descobriram o 4×8 ?

Gonçalo: Contei as joaninhas assim.

Eu: Assim? Como é que se chama?

Gonçalo: Na vertical.

Eu: E o 8?

Gonçalo: Era as joaninhas na horizontal. E depois fui ver à tabuada do 4.

(Entrevista Problema III, questão 4; 8'10"; 29-4-15)

Analisando a produção escrita e a entrevista deste par é perceptível que este recorre a uma estratégia multiplicativa para resolver um problema com contexto associado ao modelo de disposição retangular. Pois, o par afirma que contou o número de joaninhas na vertical e o número de joaninhas na horizontal, multiplicando um pelo outro e, em seguida, recorreu à tabuada. O procedimento de cálculo utilizado foi o uso de produtos conhecidos, na medida em que o próprio aluno afirma que recorreu à tabuada do 4^3 , explorada anteriormente.

³ Note-se que os alunos identificam como produtos da tabuada do 4 os que têm como multiplicador o número 4.

5.1.4. Problema IV – Prédio do Manuel

Na exploração deste problema estiveram envolvidos 16 alunos. Para dar início à exploração do mesmo, informei os alunos da modalidade de trabalho que iria adotar, tendo-os organizado em pares. A exploração deste problema teve a duração de 45 minutos, incluindo os diferentes momentos de aula.

Questão 1

Estratégias de Contagem

Para a resolver esta questão, dois pares, recorreram ao uso de estratégias de contagem, tendo sido selecionado o registo de Gonçalo e Luiz para ilustrar a sua utilização (Figura 36).

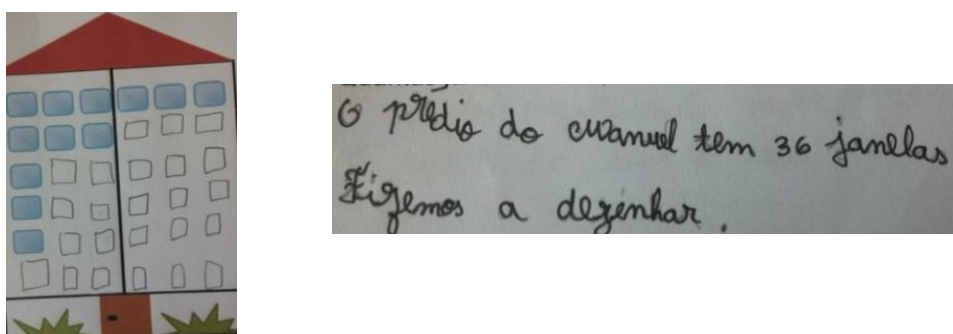


Figura 36 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema IV, questão 1.

Eu: Como é que vocês descobriram que o prédio do Manuel tinha 36 janelas?

Gonçalo: Desenhámos as janelas todas.

Luiz: Depois, contamos assim: 1, 2, 3 ...

Eu: Então contaram de um em um?

Gonçalo: Sim.

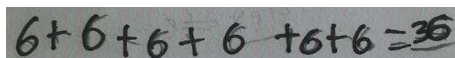
(Entrevista Problema IV, questão 1; 7'10"; 5-5-15)

Considerando a produção escrita e a explicação deste par é notório que recorreram à contagem de um em um. Para tal, desenharam as janelas em falta e de seguida contaram-nas, uma a uma, até contabilizar o número total de janelas do prédio do Manuel.

Estratégias Aditivas

Quatro pares utilizaram estratégias aditivas para resolver esta questão, tendo recorrido a dois procedimentos de cálculo, a adição sucessiva e o algoritmo tradicional da adição. A adição sucessiva efetivou-se de duas formas diferentes, tendo sido selecionadas duas produções que possibilitam ilustrar o uso deste procedimento (Figuras 37 e 38).

Atendendo à produção escrita e entrevista, dada por Carolina e Maria, é perceptível que este par recorreu à adição sucessiva do número de janelas existentes em coluna. Assim, desenharam as janelas em falta, contabilizaram-nas coluna a coluna e, de seguida, adicionaram-nas sucessivamente, até descobrirem o número total de janelas.



A photograph of a handwritten mathematical expression on a piece of paper. The expression is $6+6+6+6+6+6=36$. The numbers and plus signs are written in black ink, and the equals sign and the final number 36 are underlined.

Figura 37 – Resolução de Carolina e Maria – Problema IV, questão 1.

Maria: Nós fizemos $6+6...$

Eu: Então e o que é que é cada 6?

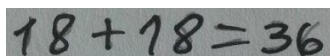
Maria: Os 6 são os grupos (o par formou grupos com 6 janelas cada).

Carolina: Juntámos assim, assim... (aponta para as janelas em coluna).

Eu: Fizeram em colunas?

Maria: Sim.

(Entrevista Problema IV; questão 1; 1'30"; 5-5-15)



A photograph of a handwritten mathematical expression on a piece of paper. The expression is $18+18=36$. The numbers and plus sign are written in black ink, and the equals sign and the final number 36 are underlined.

Figura 38 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema IV, questão 1.

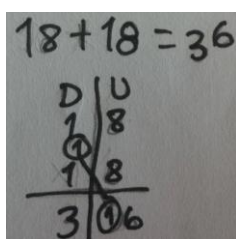
Catarina: Nós contámos aqui primeiro, estas janelas (aponta para as janelas de metade do prédio). Que era 18. Depois contei aqui (aponta para as janelas da outra metade do prédio) que também era 18. $18+18$ é 36.

(Entrevista Problema IV; questão 1; 3'30"; 5-5-15)

Analisando a produção escrita (Figura 38) e a explicação de Catarina e Fábio verifica-se que este par, tal como o anterior, optou por desenhar as janelas em falta. De seguida, considerando que a imagem, ilustrativa do prédio do Manuel, divide o

prédio ao meio, o par contabilizou o número de janelas existentes em cada metade do prédio e adicionou esse valor, ou seja, verificou que em cada metade do prédio existiam 18 janelas, adicionando assim, $18+18$. Deste modo, parece que os alunos recorreram à adição sucessiva, no entanto, dado a grandeza dos números não é possível confirmar como terão realizado os seus cálculos.

O procedimento do cálculo, algoritmo tradicional da adição, foi utilizado pelo par Joana e Silvano, tal como se mostra na Figura 39.


$$18 + 18 = 36$$

D	U
1	8
1	8
<hr/>	
3	6

Figura 39 – Resolução de Joana e Silvano – Problema IV, questão 1.

Este par não foi selecionado nem para o momento de discussão nem para a entrevista. Porém, ao analisar a sua produção escrita é possível verificar que tal como o par anterior, estes alunos contabilizaram o número de janelas existentes em cada metade do prédio, adicionando, assim, $18+18$, sendo esta adição realizada com recurso ao algoritmo tradicional da adição.

Estratégias Multiplicativas

A estratégia multiplicativa foi opção para dois pares que recorreram ao uso de produtos conhecidos para descobrir o número total de janelas. A figura 40 ilustra o uso desta estratégia a que se segue a explicação do modo como este par pensou.

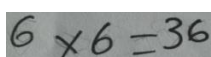

$$6 \times 6 = 36$$

Figura 40 – Resolução de Iris e Marco – Problema IV, questão 1.

Eu: Expliquem-me o que é que fizeram, o que são estes 6?

Iris: Este 6 são os andares e, este 6 é o número de janelas...

Marco: Em cada andar.

Marco: Fizemos 6 andares vezes 6 janelas.

Iris: E descobrimos que havia 36 janelas.

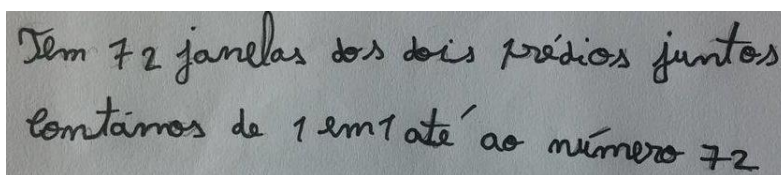
(Entrevista Problema IV, questão 1; 00'10"; 5-5-15)

Analisando a produção e a explicação de Iris e Marco é perceptível que estes alunos não necessitaram de recorrer ao desenho das janelas em falta, pois basearam-se nas informações disponibilizadas. Assim, considerando o modelo de disposição retangular, associado ao contexto desta questão, o par multiplicou o número de janelas existentes em coluna pelo número de janelas existentes em linha, ou seja, 6×6 . Parecem ter recorrido a produtos conhecidos, uma vez que já tinha sido trabalhada a tabuada do 6.

Questão 2

Estratégias de Contagem

O uso de estratégias de contagem foi opção para um par, na resolução desta questão, tendo este contado de um em um, até contabilizarem o número total de janelas dos dois prédios (Figura 41).



Tem 72 janelas dos dois prédios juntos.
Contamos de 1 em 1 até ao número 72

Figura 41 – Resolução de Joana e Silvano – Problema IV, questão 2.

Joana: Contámos de um em um, duas vezes.

(Discussão coletiva do Problema IV ; 31'35"; 5-5-15)

Considerando a produção escrita e a apresentação de Joana e Silvano é perceptível que contaram de um em um as janelas do prédio do Manuel, repetindo este procedimento para contar as janelas do prédio vizinho. Assim, para contabilizar o número de janelas totais, existentes nos dois prédios, o par contou, de um em um, duas vezes, as janelas do prédio do Manuel.

Estratégias Aditivas

As estratégias aditivas foram opção para quatro pares, tendo dois pares recorrido ao procedimento de cálculo, que indicam o recurso à adição sucessiva e os outros dois à adição através do algoritmo tradicional. Deste modo, foram selecionadas duas produções que ilustram cada um dos procedimentos de cálculo (Figuras 42 e 43, respetivamente).

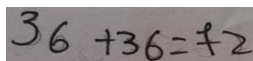

$$36 + 36 = 72$$

Figura 42 – Resolução de Camila e Leandro – Problema IV, questão 2.

Analisando a produção escrita de Camila e Leandro verifica-se que o procedimento de cálculo adotado para a resolução desta questão parece ter sido a adição sucessiva, pelo que, os alunos adicionaram duas vezes o número de janelas existentes num prédio, ou seja, $36+36$. Contudo, tendo em conta a grandeza dos números envolvidos não é perceptível como é que foi efetuado este cálculo.

Os outros dois pares que recorreram a estratégias aditivas, optaram por recorrer ao algoritmo tradicional da adição. O registo de Gonçalo e Luiz (Figura 43) ilustra este procedimento.

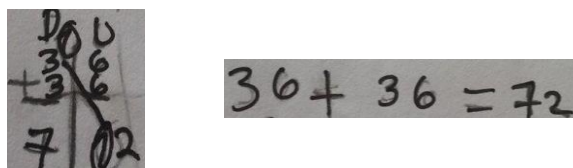

$$\begin{array}{r} 36 \\ + 36 \\ \hline 72 \end{array}$$

Figura 43 – Resolução de Gonçalo e Luiz – Problema IV, questão 2.

Estratégias Multiplicativas

As estratégias multiplicativas foram escolhidas para três pares na resolução desta questão, parecendo ter surgido dois procedimentos de cálculo, o uso de produtos conhecidos e o uso de relações de dobro. Assim, foram selecionadas duas produções representativas de cada um dos procedimentos (Figuras 44 e 45, respetivamente).

O par Catarina e Fábio parecem ter recorrido ao uso de produtos conhecidos, tal como revela a sua produção (Figura 44) e entrevista.

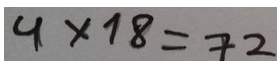

$$4 \times 18 = 72$$

Figura 44 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema IV, questão 2.

Eu: Porque é que fizeram 4×18 ?

Catarina: O Fábio disse que era $18+18+18+18$, que era 4×18 . Porque era 4 vezes.

Eu: Então dividiram os prédios ao meio?

Catarina: Sim.

Eu: Então e qual era a outra maneira que podiam ter feito?

Catarina: 2×36 . 2 Prédios vezes 36 janelas.

(Entrevista Problema IV, questão 2; 05'45"; 5-5-15)

Ao analisar os seus registos e a explicação dos seus cálculos, durante o momento da entrevista, verifica-se que estes alunos decidiram contabilizar o número de janelas existentes numa parte do prédio, pois na imagem ilustrativa presente no enunciado o prédio está dividido ao meio. Atendendo a esta característica, o par multiplicou o número de partes, existentes em dois prédios, ou seja 4 partes, pelo número de janelas que compunham cada uma dessas partes, ou seja 18 janelas. Este cálculo foi realizado na horizontal, parecendo terem recorrido a produtos conhecidos da tabuada do 4⁴, contudo, não se percebe como efetuaram este produto.

O uso de relações de dobro foi opção para dois pares, no entanto não foi utilizado da mesma forma, como tal, selecionei duas produções de modo a ilustrar o uso deste procedimento (Figuras 45 e 46).

Ao analisar a produção de Alexandre e Lara (Figura 45) é perceptível que o procedimento de cálculo adotado foi o uso de relações de dobro pois, o par multiplica o número de prédios pelo número de janelas existentes, num prédio, compreendendo que estes prédios eram iguais, e que por isso, continham o mesmo número de janelas. Contudo não se percebe como efetuaram este produto.

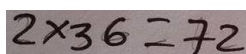
A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $2 \times 36 = 72$ written in black ink. The paper is slightly tilted and has a light background.

Figura 45 – Resolução de Alexandre e Lara – Problema IV, questão 2.

O par Matilde e Rodrigo revelam ter optado pelo mesmo procedimento, uso de relações de dobro, uma vez que afirmam que multiplicaram o número de janelas, de um prédio, pelos dois prédios, visto que são iguais. Porém, este par, ao contrário do anterior, recorre ao algoritmo tradicional da multiplicação.

⁴ Note-se que os alunos identificam como produtos da tabuada do 4 os que têm como multiplicador o número 4.

$$36 \times 2 = 72$$
$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 2 \\ \hline 72 \end{array}$$

Figura 46 – Resolução de Matilde e Rodrigo – Problema IV, questão 2.

Matilde: Nós sabíamos que um prédio tinha 36 janelas e por isso fizemos vezes 2, porque eram dois prédios.

(Discussão coletiva do Problema IV; 29'16"; 5-5-15)

5.1.5. Problema V – O pátio do João

Na exploração deste problema estiveram envolvidos 17 alunos. Para dar início à exploração do mesmo, informei os alunos da modalidade de trabalho que iria adotar, tendo-os organizado em 7 pares e 1 trio. A exploração deste problema teve a duração de 45 minutos, incluindo os diferentes momentos de aula.

A análise deste problema é diferente das restantes, na medida em que, agrupei as diferentes questões, que compõem este problema, numa única análise. Esta opção prende-se ao facto de todas as questões terem sido resolvidas com recurso às mesmas estratégias e procedimentos de cálculo.

Questões 1, 2, 3, e 4

Estratégias de Contagem

Para a resolução das três primeiras questões, três pares optaram pelo uso de estratégias de contagem, na quarta questão, apenas dois pares recorreram a esta estratégia. Deste modo foi selecionada a produção de Matilde e Rodrigo, de forma a ilustrar o uso desta estratégia, na resolução das diferentes questões (Figura 47).

Se pensávi a contar de 1 em 1

Figura 47 – Resolução de Matilde e Rodrigo – Problema V.

Analisando a produção escrita do par é possível constatar que a estratégia adotada foi a de contagem, tendo os alunos contado de um em um o número de pedras existentes em cada empedramento. Em alguns casos terão contado os quadrados do empedrado imaginando-os por baixo das figuras.

Estratégias Multiplicativas

Na resolução das questões associadas a este problema, a maioria dos pares optou por estratégias multiplicativas, tendo recorrido ao mesmo procedimento de cálculo, o uso de produtos conhecidos. Deste modo, foram selecionadas as produções e explicações de um par, permitindo ilustrar o uso desta estratégia, na resolução das diferentes questões (Figuras 48, 49, 50 e 51).

$$5 \times 5 = 25$$

Figura 48 – Resolução de Iris e Marco – Problema V, questão 1.

$$5 \times 6 = 30$$

Figura 49 – Resolução de Iris e Marco – Problema V, questão 2.

$$5 \times 4 = 20$$

Figura 50 – Resolução de Iris e Marco – Problema V, questão 3.

$$5 \times 9 = 45$$

Figura 51 – Resolução de Iris e Marco – Problema V, questão 4.

Eu: Então vocês utilizaram sempre a mesma estratégia?

Iris: Sim. Nós contamos na vertical.

Marco: E na horizontal.

Eu: Contaram os quadradinhos da vertical e da horizontal e depois o que fizeram?

Iris: Fizemos 5×5 (questão 1).

Eu: Porquê?

Marco: Porque aqui está 5, na vertical e, aqui está 5, na horizontal

Eu: Então multiplicaram os números da vertical...

Iris: Pelos números da horizontal.

Iris: Aqui (questão 2) eu vi que estavam 2 quadrados escondidos. Por isso contei por cima.

Eu: E como é que descobriram aqui onde estavam pedras escondidas? (questão 3)

Marco: Nós contámos por cima da menina.

Eu: E no do menino (Questão 4).

Iris: Aqui tínhamos de ver assim (aponta para as pedras em coluna) e assim (aponta para as pedras em linha).

Marco: Contámos aqui 9 (pedras em linha) e aqui 5 (pedras em coluna).

(Entrevista Problema V; 00'05"; 6-5-15)

Estes alunos recorreram à tabuada do 5⁵, não sentido a necessidade de realizar outros cálculos, apresentando apenas a expressão na horizontal. Para além disso, importa referir que para a concretização deste procedimento os alunos atenderam ao modelo associado ao contexto deste problema, o modelo de disposição retangular, tendo multiplicado o número de pedras existentes na vertical pelo número de pedras existentes na horizontal.

5.1.6. Problema VI – Organizando menus

Na exploração deste problema estiveram envolvidos 18 alunos. Para dar início à exploração do mesmo, informei os alunos da modalidade de trabalho que iria adotar, tendo-os organizado em pares. No entanto, como alguns alunos chegaram mais tarde foi necessário integrá-los, passando a existir 3 pares e 4 trios. A exploração deste problema teve a duração de 60 minutos, incluindo os diferentes momentos de aula.

Questão 1

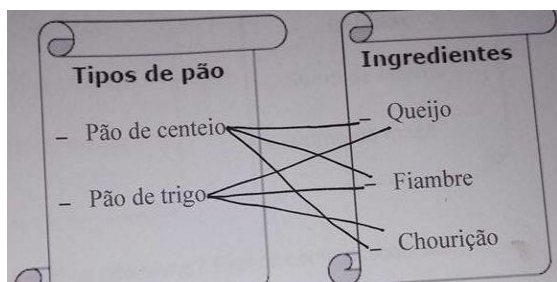
Estratégias de Contagem

Na resolução desta questão as estratégias de contagem foram as mais utilizadas, tendo 5 grupos optado por contar um a um os diferentes tipos de sandes que se podia fazer. No entanto, para a realização desta contagem foram tomadas três opções diferentes, três grupos recorreram ao uso de ligações/esquemas, como ilustra a Figura 52, um par preferiu usar desenhos, tal como demonstra a Figura 53,

⁵ Note-se que os alunos identificam como produtos da tabuada do 5 os que têm como multiplicador o número 5.

e um grupo optou pela escrita das diferentes sandes, assim como revela a Figura 54.

Considerando a produção e explicação de lara, Joana e Luiz (Figura 52) é possível constatar que os alunos decidiram ligar os diferentes tipos de pão aos ingredientes disponíveis, contando de seguida as diferentes combinações que podiam fazer.



Nós ligamos os 3 ingredientes a 2 tipos de pães.

Figura 52 – Resolução de lara, Joana e Luiz – Problema VI, questão 1.

Joana: Para o pão de centeio usámos o queijo, o fiambre e o chourição. E para o pão de trigo o queijo, o fiambre e o chourição.

lara: Ligámos tudo.

Eu: Como é que descobriram que eram 6 tipos de sandes diferentes?

lara: Contámos todos os tracinhos.

Joana: 3 mais 3 são 6.

(Entrevista Problema VI; 05'20"; 11-5-15)

Ao analisar o registo escrito e explicação de Alexandre e Lara (Figura 53) compreende-se que estes optaram por desenhar os diferentes tipos de sandes que se podiam fazer, tendo criado dois grupos, um com as sandes possíveis de fazer com o pão de trigo e outro com as sandes possíveis com pão de centeio. Construídos estes dois grupos, este par afirma que se podem fazer seis tipos de sandes, três com pão de trigo e três com pão de centeio.

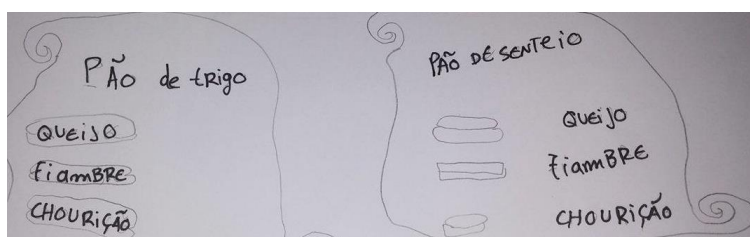


Figura 53 – Resolução de Alexandre e Lara – Problema VI, questão 1.

Eu: Como é que vocês descobriram quantas sandes diferentes podiam fazer?

Alexandre: Contámos, o queijo, o fiambre e o chourição para os dois tipos de pães. Pus o queijo, o fiambre e o chourição para o pão de centeio e, para o de trigo, também.

Eu: E como descobriste que eram 6?

Alexandre: Então 3 para aqui, mais 3 para aqui são 6.

(Entrevista Problema VI; 01'50"; 11-5-15)

A produção escrita de Camila, Leandro e Silvano (Figura 54) não foi selecionada nem para o momento de discussão nem para as entrevistas, no entanto, atendendo aos seus registos é possível verificar que optaram pelo uso de uma estratégia de contagem, tendo recorrido à escrita para identificar os diferentes tipos de sandes possíveis de fazer com os ingredientes e tipos de pão disponíveis.

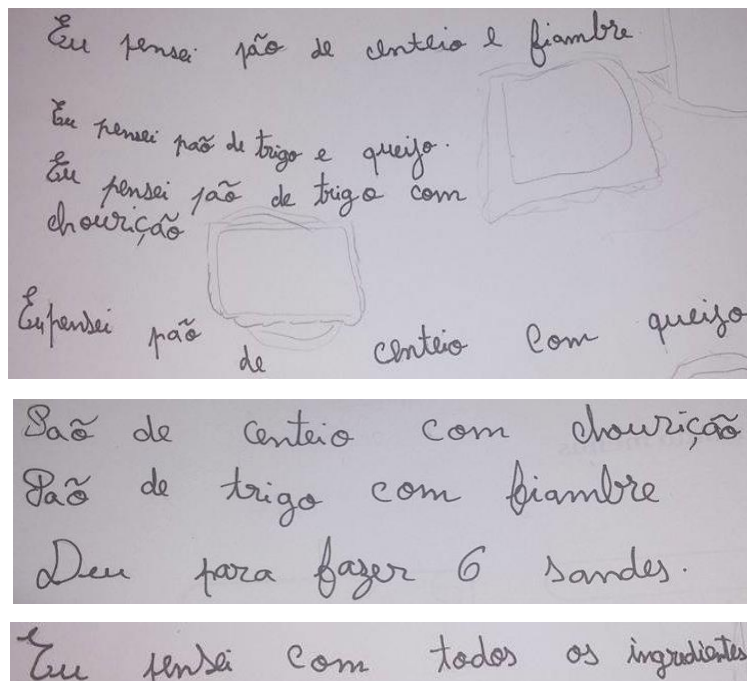


Figura 54 – Resolução de Camila, Leandro e Silvano – Problema VI, questão 1.

Estratégias Multiplicativas

O uso de uma estratégia multiplicativa, para a resolução desta questão, foi opção apenas para dois pares. Ambos recorreram ao mesmo procedimento de cálculo, uso de produtos conhecidos, pelo que foi selecionada a produção de um par, (Carolina e Maria) de modo a ilustrá-lo (Figura 55).

A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $2 \times 3 = 6$ in black ink.

Figura 55 – Resolução de Carolina e Maria – Problema VI, questão 1.

Maria: Fizemos os dois pães vezes os ingredientes.

Eu: E quantos eram os ingredientes?

Carolina: 3.

Maria: Portanto, fizemos 2×3 , que é igual a 6.

Eu: A 6 quê?

Maria: 6 tipos de sandes.

(Entrevista Problema VI; 00'05"; 11-5-15)

Considerando a produção escrita e explicação destas alunas constata-se que o procedimento de cálculo utilizado foi o uso de produtos conhecidos, não necessitando de efetuar cálculos pois já conhecem os seus produtos. Assim, considerando o número de tipos de pães (2) e de ingredientes (3), o par multiplicou-os, encontrando o valor correspondente ao número de tipos de sandes possíveis de fazer (6).

Questão 2

Estratégias Multiplicativas

Na resolução desta questão todos os grupos recorreram ao uso de estratégias multiplicativas, sendo o procedimento de cálculo utilizado comum em todas as resoluções. Assim, foi selecionada a produção de um par, (Carolina e Maria) que permite ilustrar o uso desta estratégia e respetivo procedimento de cálculo (Figura 56).

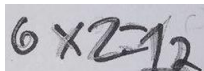
A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $6 \times 2 = 12$ in black ink.

Figura 56 – Resolução de Carolina e Maria – Problema VI, questão 2.

Maria: O 6 são as sandes.

Carolina: E o 2 são as bebidas.

Eu: Então e cada menu tinha de ter o quê?

Maria: Uma sandes e uma bebida.

Eu: Então como é que descobriram quantos menus diferentes podiam existir?

Maria: Fizemos $6 \times 2 = 12$.

Carolina: Podemos fazer 12 menus.

(Entrevista Problema VI; 01'10"; 11-5-15)

Estas alunas parecem ter recorrido a produtos conhecidos. Consideraram o número de tipos de sandes (6), descoberto na questão anterior, e multiplicaram-no pelo número de bebidas disponíveis (2), descobrindo assim, quantos menus diferentes podiam existir.

5.1.7. Problema VII – Páscoa doce

Na exploração deste problema estiveram envolvidos 18 alunos. Para dar início à exploração do mesmo, informei os alunos da modalidade de trabalho que iria adotar, tendo-os organizado em pares. No entanto como alguns alunos chegaram mais tarde foi necessário integrá-los, passando a existir 3 pares e 4 trios. A exploração deste problema teve a duração de 60 minutos, incluindo os diferentes momentos de aula.

Estratégias de Contagem

Na resolução deste problema apenas um par, (Alexandre e Diana) optou pelo uso de estratégias de contagem (Figura 57).

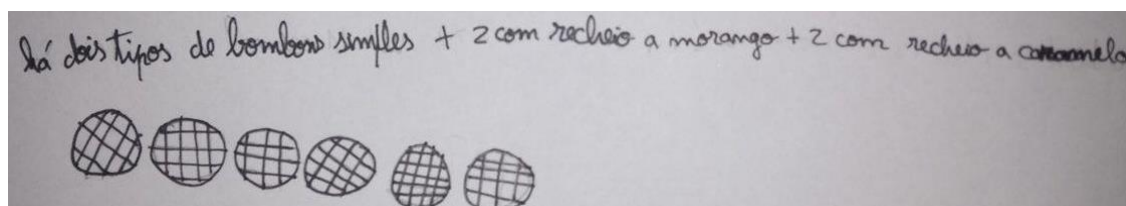


Figura 57 – Resolução de Alexandre e Diana – Problema VII.

Eu: Vocês dizem que há dois tipos de bombons simples, quais é que são?

Alexandre: São os que só têm chocolate.

Eu: Os que não têm recheio?

Alexandre: Sim.

Eu: E quais é que são?

Alexandre: Chocolate de leite e chocolate preto.

Eu: Depois têm mais 2 com recheio de morango.

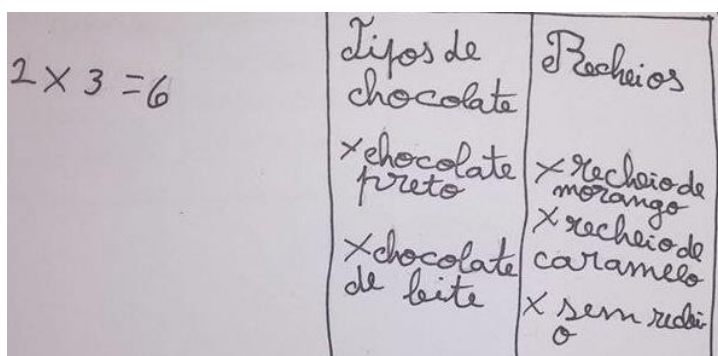
Alexandre: Sim, um de chocolate de leite e um de chocolate preto. E mais dois com recheio de caramelo.

(Entrevista Problema VII; 03'40";13-5-15)

O par revela que descobriu quantos bombons diferentes havia através da contagem de dois em dois, tendo contado dois chocolates sem recheio (chocolate de leite e chocolate preto), dois chocolates com recheio de morango (chocolate de leite com recheio de morango e chocolate preto com recheio de morango) e dois chocolates com recheio de caramelo (chocolate de leite com recheio de caramelo e chocolate preto com recheio de caramelo). Para além de recorrerem ao registo escrito dos diferentes tipos de bombons o par, desenhou-os. Ao contar o número de bombons parece recorrer ao procedimento de cálculo de contagem por saltos.

Estratégias Multiplicativas

O uso de estratégias multiplicativas foi quase unânime na resolução deste problema, tendo sido opção para 6 grupos. Estes usaram o mesmo procedimento de cálculo, uso de produtos conhecidos. Foi selecionado o registo escrito de Catarina e Fábio de forma a ilustrar o uso deste procedimento (Figura 58).



$2 \times 3 = 6$	Tipos de chocolate	Recheios
	x chocolate preto	x recheio de morango
	x chocolate de leite	x recheio de caramelo
		x sem recheio

Figura 58 – Resolução de Catarina e Fábio – Problema VII.

Catarina: Nós escrevemos os tipos de bombons.

Eu: E quais é que eram?

Catarina: Chocolate de leite e chocolate preto.

Eu: E depois?

Catarina: Fizemos os recheios. O primeiro recheio era o de morango, depois o recheio de caramelo...

Fábio: E sem recheio.

Eu: Depois de fazerem a tabela, o que é que fizeram?

Catarina: Como aqui está 2 (aponta para o lado da tabela correspondente aos tipos de chocolate) e aqui está 3 (aponta para o lado que corresponde aos recheios), fizemos 2×3 .

Eu: Então descobriram que havia quantos bombons?

Catarina: 6.

Fábio: Porque olhámos para a tabuada do 2.

(Entrevista Problema VII; 00'20";13-5-15)

Ao analisar a produção escrita e a explicação do modo como estes alunos pensam verifica-se que optaram primeiro por organizar os dados presentes no enunciado, construindo um tabela que separa os tipos de chocolate dos diferentes recheios. Assim, de um lado da tabela colocaram os tipos de chocolate (chocolate de leite e chocolate preto), do outro lado da tabela os recheios (morango, caramelo e sem recheio/simples). Depois de construída a tabela e organizados os dados, os alunos multiplicam o número de tipos de chocolate (2) pelo número de recheios possíveis (3), recorrendo ao uso de produtos conhecidos. Tal como o Fábio afirma, foi ver o resultado à tabuada do 2⁶.

5.2. A sequência de problemas e as estratégias e procedimentos dos alunos

Na tabela 8 apresento as estratégias e procedimentos de cálculo usados na resolução da sequência de problemas e a frequência de cada um. De um modo geral, é possível constatar que a passagem de estratégias de contagem e aditivas para estratégias multiplicativas desenvolveu-se de forma pouco evidente nos primeiros cinco problemas.

⁶ Note-se que os alunos identificam como produtos da tabuada do 2 os que têm como multiplicador o número 2.

Tabela 8 – Estratégias e Procedimentos de cálculo usados pelos alunos na exploração da sequência de problemas.

		Sentido associado		Aditivo											Combinatório					
		Problema		I		II		III				IV		V				VI		VII
Estratégias	Procedimentos de cálculo	Q1	Q2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q1	Q2	Q1		
Contagem	Contar de um em um	-	-	1	1	3	3	3	2	1	3	3	3	2	5 ⁷	-	-	-		
	Contar por saltos	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1		
Aditivas	Adicionar sucessivamente	3	6	3	5	4	3	3	3	2	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Adicionar 2 a 2	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Adicionar em coluna	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Algoritmo tradicional da adição	-	-	-	-	-	-	-	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-		
Subtrativas	Subtrair sucessivamente	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos	2	2	2	2	-	2	2	2	1	5	5	5	6	2	7	6	-		
	Usar relações de dobro	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Usar múltiplos de 5 e de 10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Usar uma decomposição decimal de um dos fatores	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Ajustar e compensar	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Usar relações de dobro e metade	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Multiplicar em coluna	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	Algoritmo tradicional da multiplicação	2	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-		

⁷ A contagem de um em um não foi realizada da mesma forma pelos 5 grupos. Assim, 3 grupos recorreram a ligações/esquemas, 1 grupo a desenhos e 1 grupo à escrita.

Efetivamente, só a partir do quinto problema é que o uso de estratégias multiplicativas passa a ser mais predominante do que o uso de estratégias de contagem e aditivas. Neste sentido, na exploração dos primeiros quatro problemas as estratégias multiplicativas surgiram em menor número do que as estratégias aditivas, o que pode ser justificado pelo facto dos alunos não estarem familiarizados com o modelo associado a estes problemas, o modelo de disposição retangular e ainda, pelo facto de parecer que sentem pouca confiança no recurso a estratégias multiplicativas. Esta falta de confiança é notória quando os alunos apresentam diferentes tipos de estratégias na resolução dos primeiros problemas. No entanto, parece que a exploração deste modelo ao longo dos primeiros quatro problemas contribuiu para que no quinto problema esta situação se invertesse, existindo um aumento significativo de alunos a recorrer a estratégias multiplicativas.

Aos primeiros cinco problemas estava associado o sentido aditivo da multiplicação, procurando estabelecer uma relação entre a adição sucessiva de parcelas iguais e a multiplicação. Considerando os resultados obtidos no problema V, penso que este objetivo foi atingido com sucesso, embora não na totalidade, visto que alguns pares/trios ainda recorreram a estratégias menos eficazes para resolver problemas com estas características.

Aos dois últimos problemas estava associado o sentido combinatório da multiplicação. Nestes a progressão de estratégias menos eficazes para estratégias mais eficazes foi imediata, pelo que, na resolução do problema VII, o último da sequência, apenas um par não recorreu a estratégias multiplicativas.

Ao analisar a tabela 8 verifica-se que há procedimentos de cálculo usados com maior frequência do que outros. Deste modo, destacam-se, pela sua frequência, a contagem de um em um (estratégia de contagem), a adição sucessiva de parcelas iguais (estratégia aditiva) e o recurso a produtos conhecidos (estratégia multiplicativa).

Como já foi referido anteriormente, os procedimentos de cálculo associados às estratégias de contagem e aditivas são mais frequentes no início da exploração da sequência de problemas, reduzindo a sua frequência, conforme os alunos vão avançando na resolução dos problemas, contribuindo para o aumento do uso de estratégias multiplicativas. Associado às estratégias multiplicativas está o uso de produtos conhecidos, um dos procedimentos de cálculo com maior frequência. O

recurso a este procedimento parece relacionar-se com o facto de os alunos conhecerem os produtos das tabuadas, não sentido necessidade de justificar como foram realizados os seus cálculos. Os procedimentos de cálculo utilizados com menor frequência são a adição 2 a 2 (estratégia aditiva) e o uso de relações de dobro (estratégia multiplicativa). Uma das razões para esta situação poderá estar associada ao facto de estes procedimentos de cálculo parecerem estar dependentes do contexto e dos números envolvidos nos problemas.

Importa referir que os problemas propostos não apresentavam contextos que fizessem emergir o uso de estratégias subtrativas, assim como, o uso de alguns procedimentos de cálculo associados às estratégias multiplicativas referidos por Mendes (2012). Porém, surgiram três procedimentos de cálculo que não estavam previstos no quadro de categorias de análise realizado por esta autora. Estes três procedimentos de cálculo estão associados a diferentes tipos de estratégias. Associado às estratégias de contagem foi necessário introduzir o procedimento de cálculo, *contagem de um em um*. No que se refere às estratégias aditivas, surgiu o procedimento, *uso do algoritmo tradicional da adição*. E, referente às estratégias multiplicativas, apareceu o procedimento de cálculo, *uso do algoritmo tradicional da multiplicação*.

Na tabela 9 apresento as características dos contextos e os números dos problemas explorados, assim como os objetivos de cada um, e em seguida, interpreto os resultados apresentados na tabela 8 relacionando-os com as características dos contextos de cada problema, justificando as opções tomadas na seleção e exploração dos problemas desta sequência, nomeadamente com os modelos e números associados a cada um dos contextos. Pretendo, assim, compreender se os objetivos estabelecidos para cada problema foram atingidos e, conseqüentemente, em que medida a exploração desta sequência de problemas contribuiu para o desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação.

Tabela 9 – A sequência de problemas, os seus contextos e números.

Problemas		Sentido associado	Objetivos	Modelos	Números
1	Q1	Aditivo	Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. Efetuar produtos, recorrendo a produtos conhecidos em que um dos fatores é o 5.	Linear.	5 e 20
	Q2				2 e 6
2			Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. Usar e compreender a propriedade comutativa da multiplicação. Efetuar produtos, recorrendo a produtos conhecidos da tabuado do 3 e do 4.	Disposição retangular.	3 e 4
3	Q1		Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. Usar estratégias multiplicativas associadas ao modelo de disposição retangular, recorrendo a produtos conhecidos das tabuadas do 2, 3, 4 e 6 (3x4 ou 4x3; 4x6 ou 6x4; 4x4; 8x4; 7x2; 7x4). Usar relações de dobro (2x12; 2x16; 2x14). Usar a propriedade comutativa da multiplicação.		3 e 4
	Q2				4 e 6
	Q3				4 e 7
	Q4				4 e 8
4	Q1		Relacionar a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. Usar estratégias multiplicativas associadas ao modelo de disposição retangular, recorrendo a produtos conhecidos da tabuada do 3 e do 6. Usar relações de dobro. Usar a propriedade comutativa da multiplicação.		3 e 6
	Q2		2 e 36		
5	Q1		Usar estratégias multiplicativas associadas ao modelo de disposição retangular. Usar e compreender a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Usar a propriedade comutativa da adição.		5
	Q2	5 e 6			
	Q3	5 e 4			
	Q4	5 e 9			
6	Q1	Combinatório	Usar procedimentos de cálculo associados às estratégias multiplicativas tendo em conta o sentido combinatório da multiplicação.		2 e 3
	Q2				2 e 6
7					2 e 3

Ao **primeiro problema** da sequência, designado de “Ida ao circo” (anexo 1), está associado o sentido aditivo da multiplicação. Este problema é composto por duas questões que apresentam um contexto ao qual está associado ao modelo linear. A opção por iniciar a sequência com um problema com estas características prende-se com o facto de este promover a exploração de situações em que os alunos relacionam a adição sucessiva de parcelas iguais com a multiplicação. Antes de explorar este problema com a turma previ que os alunos podiam recorrer a três tipos de estratégias: as de contagem, as aditivas e as multiplicativas, tendo realizado uma antecipação dos possíveis procedimentos de cálculo usados pelos alunos (anexo 2.1). No que se refere aos procedimentos de cálculo associados a estratégias multiplicativas, e uma vez que os alunos estavam habituados a decompor um dos fatores, tanto na soma de duas parcelas como no produto de dois fatores, previ que, mesmo de forma intuitiva, os alunos recorressem quer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, quer à propriedade associativa da multiplicação (anexo 2.1).

Considerando os dados recolhidos e apresentados na tabela 7, constata-se que de facto os alunos recorreram aos três tipos de estratégias previstas e a alguns dos procedimentos de cálculo antevistos. Assim sendo, no que se refere à Questão 1, um par optou pelo uso de estratégias de contagem, parecendo ter realizado contagem por saltos, na medida em que apresentam 20 círculos (que parecem ilustrar os alunos) referindo no final desta representação 100€. Este registo leva-me a crer que o par terá realizado contagens de 5 em 5, até contabilizar o valor pago por 20 crianças (Figura 3). Considerando os números envolvidos nesta questão, era pouco provável a contagem de um em um pois, estes não representam um valor unitário. Tal poderá ter contribuído para o reduzido número de grupos a recorrer a estratégias de contagem. O uso de estratégias aditivas para a resolução desta questão foi opção para três pares, tendo recorrido ao mesmo procedimento de cálculo, a adição sucessiva, uma vez que adicionaram sucessivamente o valor a pagar por cada aluno (Figura 4). As estratégias multiplicativas foram opção para quatro pares, tendo surgido dois procedimentos de cálculo diferentes. Assim sendo, dois pares optaram pelo uso do algoritmo tradicional da multiplicação (Figura 5). Os outros dois pares aparentam ter recorrido ao uso de produtos conhecidos (Figura 6). Apresentam apenas o cálculo na horizontal, fazendo-me crer que poderão ter

recorrido, intuitivamente, à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou à propriedade associativa da multiplicação, tal como previ (anexo 2.1). No entanto, após a resolução deste problema apercebi-me que, no momento de antecipação de estratégias e procedimentos de cálculo, possivelmente estaria a ser demasiado ambiciosa no que se refere ao recurso das propriedades da multiplicação, por parte dos alunos, para a resolução desta questão. Na medida em que estes ainda se encontram numa fase inicial da aprendizagem desta operação, sendo pouco provável o recurso às suas propriedades.

Na resolução da segunda questão previ que os alunos poderiam recorrer a dois tipos de estratégias: as aditivas e as multiplicativas (anexo 2.1). Esta previsão coincidiu com as opções dos alunos, tendo seis pares recorrido à adição sucessiva (Figura 7) e dois pares ao uso de produtos conhecidos (Figura 8). Na resolução desta questão o uso de estratégias aditivas teve maior expressão. Penso que esta situação deve-se ao facto dos números envolvidos serem pequenos (o 6) e do problema sugerir uma adição de apenas duas parcelas. Note-se que para alguns alunos o resultado $6+6$ pode já ser um facto conhecido.

O **segundo problema** a ser explorado foi o problema “Sala de aula” (anexo 1). Este, tal como o anterior, também lhe está associado o sentido aditivo da multiplicação. No entanto, o modelo subjacente alterou-se, passando do modelo linear para o modelo de disposição retangular. Optei por alterar o modelo associado ao contexto pelo facto de o modelo de disposição retangular ser considerado por vários autores, nomeadamente Fosnot e Dolk (2001), o mais indicado para suportar as primeiras aprendizagens da multiplicação. Assim sendo, associado ao contexto do problema e ao seu modelo é apresentada uma imagem da planta da sala de aula, com uma estrutura retangular, que possibilita, não só a relação entre a multiplicação e a adição sucessiva de parcelas iguais, como também a compreensão e o uso da propriedade comutativa da multiplicação. Os números escolhidos foram números pequenos, o 3 e o 4, com os quais os alunos estão habituados a trabalhar, conhecendo os produtos das suas tabuadas. Para a resolução deste problema previ que os alunos poderiam recorrer a três tipos de estratégias: as de contagem, as aditivas e as multiplicativas (anexo 2.2). Contudo, antevi que a última estratégia seria pouco ou nada utilizada, pois a possibilidade de beneficiar da disposição retangular para a concretização de cálculos multiplicativos é-lhes, ainda,

desconhecida, recorrendo a esta disposição para a contagem ou adição de objetos por grupo, neste caso concreto, do número de cadeiras disponíveis por linha ou por coluna.

Considerando os resultados da tabela 7 verifica-se que os alunos recorreram às estratégias previstas (anexo 2.2). Deste modo, um par optou pelo uso de estratégias de contagem, recorrendo à imagem, e contando de um em um, as cadeiras disponíveis na sala de aula (Figura 11). Confesso que esperava que houvesse mais alunos a recorrer a este tipo de estratégia, pois a imagem permitia a visualização de todas as cadeiras, contento um número reduzido de elementos (12), o que poderia conduzir à contagem de um em um de forma bastante fácil. A estratégia aditiva foi opção para quatro pares, tendo surgido dois procedimentos de cálculo associados a esta estratégia, a adição sucessiva e a adição dois a dois. A adição sucessiva foi usada por três pares, tendo sido concretizada de duas formas diferentes. Assim, dois pares adicionaram sucessivamente o número de cadeiras existentes por coluna e um par optou por adicionar por fila (Figuras 12 e 13). Apenas um par recorreu ao uso da adição dois a dois (Figura 14). Dois pares optaram pelo uso de estratégias multiplicativas, parecendo ter recorrido ao uso de produtos conhecidos, apresentando apenas a indicação da multiplicação entre dois fatores. Possivelmente utilizaram os produtos das tabuadas já exploradas (Figura 15)

Tal como previsto, as estratégias multiplicativas foram utilizadas por poucos pares, pois foi a primeira vez que a turma teve contato com problemas com contexto associado ao modelo de disposição retangular. As estratégias aditivas foram as mais utilizadas, tendo a maioria dos pares aproveitado a estrutura da imagem para formar grupos, adicionando-os de seguida de modo a contabilizar o número total de cadeiras disponíveis.

Uma vez que foram poucos os alunos a usar estratégias multiplicativas beneficiando do contexto associado ao modelo de disposição retangular, optei por não seguir a sequência planeada, pois considerei que o problema previsto a explorar de seguida, apresentava um grau de dificuldade demasiado avançado, tendo em conta a grandeza dos números envolvidos. Neste sentido, decidi explorar um problema com um contexto semelhante ao problema anterior. Assim, o **terceiro problema** foi “Cortinas da casa do João” (anexo 1). Este está, igualmente, associado ao sentido aditivo da multiplicação e apresenta um contexto ao qual está

associado o mesmo modelo – disposição retangular. No entanto, ao contrário do problema previsto, este é composto por números mais pequenos, sendo do conhecimento da turma as suas tabuadas. Para além disso, as imagens associadas a cada questão deste problema permite aumentar a estruturação da operação multiplicação, uma vez que a primeira revela todos os elementos que compõem o cortinado em questão, mas as seguintes não, procurando estimular o uso da operação multiplicação, das suas propriedades e das relações de dobro, evitando a contagem de um em um.

O problema “Cortinas do João” é composto por quatro questões, tendo sido realizada a sua exploração em duas partes. Numa primeira parte, explorei a primeira questão, pois a imagem que lhe estava associada apresenta todos os elementos decorativos visíveis, sendo mais fácil determinar o número destes elementos. Para além deste motivo, pretendia, mais uma vez, que os alunos passassem a recorrer a estratégias multiplicativas, compreendendo que para calcular o número de elementos decorativos da cortina bastaria multiplicar o número de linhas pelo número de colunas, ou vice-versa. A segunda parte é composta pelas, restantes, três questões, nas quais as imagens não revelam todos os elementos que compõem os cortinados, suscitando o uso de estratégias multiplicativas, nomeadamente o uso de relações de dobro. Para a resolução das quatro questões e apesar de se pretender explorar os procedimentos de cálculo associados às estratégias multiplicativas previ que os alunos pudessem recorrer, para além deste tipo de estratégias, a estratégias de contagem e aditivas (anexo 2.3). Presumi que na resolução da primeira questão surgiriam mais estratégias de contagem, pois os elementos decorativos estavam todos visíveis, reduzindo o número de pares a recorrer a este tipo de estratégia nas questões seguintes, uma vez que as restantes imagens não revelavam todos os seus elementos decorativos. Para além disso, previ que após a discussão coletiva sobre a resolução da primeira questão iria fomentar o uso de estratégias multiplicativas.

Apesar de os alunos terem recorrido aos três tipos de estratégias e a alguns dos procedimentos de cálculo previstos (anexo 2.3), através dos dados apresentados na tabela 7 verifica-se que ao contrário do esperado, na primeira questão apenas um par usou a contagem de um em um (Figura 17), tendo o número

de pares a recorrer a esta estratégia aumentado para três, nas questões seguintes (Figuras 23, 28 e 32).

Na resolução da primeira questão, o uso de estratégias aditivas foi opção para cinco pares/trios, que recorreram à adição sucessiva. Assim sendo, três pares/trios optaram por adicionar sucessivamente o número de elementos decorativos existentes em cada linha (Figura 18), enquanto dois pares/trios preferiram adicionar sucessivamente o número de elementos existentes em cada coluna (Figura 19). O número de grupos a recorrer a este tipo de estratégia foi diminuindo, pelo que, na resolução da segunda questão, quatro pares/trios usaram a adição sucessiva, esta concretizou-se de três formas distintas. Um par optou por adicionar o número de elementos decorativos por coluna (Figura 24), outro preferiu adicionar os elementos decorativos por linha (Figura 25). Para além destes, houve dois grupos, que parecem ter utilizado uma relação de dobro, sem que esta se materializasse sob a forma de uma multiplicação, parecendo ter contabilizado o número de elementos decorativos em metade do cortinado, adicionando de seguida, esse mesmo valor, juntando assim os elementos de cada metade do cortinado (Figura 26). Na resolução das questões três e quatro, foram três os pares/trios que recorreram a estratégias aditivas. Estes usaram o mesmo procedimento, a adição sucessiva, tendo surgido de duas formas distintas. Assim sendo, em ambas as questões um par optou por adicionar sucessivamente o número de elementos decorativos por linha (Figuras 29 e 33), enquanto dois grupos, parecem ter recorrido, novamente, a relações de dobro sem que estas se materializassem sob a forma de multiplicação, parecendo ter contabilizado o número de elementos decorativos em metade do cortinado, adicionando, esse valor, duas vezes (Figuras 30 e 34).

Ao contrário do esperado, o uso de estratégias multiplicativas não aumentou após o primeiro momento de discussão coletiva. Neste sentido, na resolução da primeira questão dois pares parecem ter recorrido ao uso de produtos conhecidos, multiplicando o número de elementos decorativos em linha pelo número de elementos decorativos em coluna (Figura 20). Estes dois pares revelam compreender que quando o problema tem associado ao seu contexto o modelo retangular podem usar estratégias multiplicativas, de modo a resolvê-lo de forma mais eficiente, multiplicando o número de elementos em coluna pelo número de elementos em linha ou vice-versa. Na resolução da segunda questão apenas um par

recorre a este tipo de estratégias, tendo utilizado relações de dobro para descobrir o número de elementos decorativos. Deste modo, este par contabilizou o número de elementos existentes em metade do cortinado e duplicou-os (Figura 27). Na resolução da terceira e quarta questões, dois pares recorreram a estratégias multiplicativas, parecendo usar produtos conhecidos, socorrendo-se das tabuadas já exploradas em sala de aula (Figuras 31 e 35). Estes dois pares ao analisarem as imagens correspondentes a cada questão verificaram que estas apresentavam uma estrutura retangular, beneficiando da mesma, multiplicando o número de elementos em linha pelo número de elementos em coluna.

Penso que o facto de ter havido um aumento do número de alunos a recorrer a estratégias de contagem prende-se com o facto de estes sentirem falta de confiança quando confrontados com imagens que não apresentam todos os elementos decorativos. Esta falta de confiança revelou-se não só no aumento do uso de estratégias de contagem como na estagnação do uso de estratégias multiplicativas, pelo que os pares que recorreram a este tipo de estratégias foram sempre os mesmos, ou seja, os que já sentem confiança no uso desta operação. Para além disso, apesar de se esperar que os alunos recorressem ao uso relações de dobro, associadas às estratégias multiplicativas, a verdade é que apenas um par recorreu a este procedimento de cálculo na resolução de uma questão, tendo no entanto, existido mais grupos a compreender a existência deste tipo de relações, materializando-as sob a forma de adição. Penso que este facto está associado à elevada grandeza dos números envolvidos e ao facto de ser necessário, apenas, efetuar a adição de duas parcelas.

Com o intuito de dar continuidade à exploração de problemas que promovam a estruturação da multiplicação, propus o **quarto problema** “O prédio do Manuel” (anexo 1). A este, tal como nos problemas anteriores, está associado o sentido aditivo da multiplicação e apresenta um contexto que inclui o modelo de disposição retangular. À semelhança com o problema três, a imagem que acompanha o enunciado deste problema não tem visível todos os elementos, procurando, uma vez mais, reduzir a tendência do uso de estratégias de contagem. Os números envolvidos apresentam uma maior grandeza do que os dos problemas anteriores, tendo optado pelo número seis, sendo, ainda assim, do conhecimento da turma os produtos desta tabuada. Optei por aumentar a grandeza dos números envolvidos

pois, segundo Mendes (2012) a sua crescente grandeza contribui para o uso de estratégias multiplicativas.

O problema “O prédio do Manuel” é composto por duas questões. Com a sua resolução pretendia que diminuísse o uso de estratégias de contagem e aditivas e, conseqüentemente, aumentasse o uso de estratégias multiplicativas. Assim, na resolução da primeira questão, previ que os alunos recorreriam ao uso de estratégias multiplicativas, tendo em consideração o modelo de disposição retangular, subjacente ao contexto deste problema, uma vez que, já tinham explorado problemas semelhantes, com o mesmo tipo de modelo (anexo 2.4). Na resolução da segunda questão, esperava que os alunos recorressem ao uso de relações de dobro, uma vez que pretendia-se descobrir quantas janelas existiam em dois prédios iguais (anexo 2.4). Para além do uso deste tipo de estratégias previ que os alunos poderiam também recorrer a estratégias de contagem e aditivas (anexo 2.4).

Considerando os resultados apresentados na tabela 8, constata-se que os alunos recorreram às estratégias e procedimentos de cálculo antecipados. Porém, o uso de estratégias multiplicativas não foi tão evidente como o esperado, pois, apesar de os alunos já estarem mais familiarizados com problemas com contexto associado ao modelo de disposição retangular, a grandeza dos números envolvidos poderá ter contribuído para que a maioria dos alunos optasse pelo uso de estratégias com as quais se sentem mais confiantes, nomeadamente as estratégias de contagem e aditivas. Neste sentido, na resolução da primeira questão, dois pares optaram pelo uso de estratégias de contagem, estes desenharam as janelas em falta e contaram de um em um até contabilizarem todas as janelas do prédio do Manuel (Figura 36). Na resolução da segunda questão apenas um par recorreu a esta estratégia, tendo contado de um em um as janelas dos dois prédios (Figura 41).

As estratégias aditivas foram opção para quatro pares, em ambas as questões, tendo sido a estratégia mais utilizada na resolução deste problema. Deste modo, na primeira questão, surgiram dois procedimentos de cálculo distintos, a adição sucessiva e o uso do algoritmo tradicional da adição. A adição sucessiva de parcelas iguais foi opção para três pares, que recorreram a este procedimento de duas formas, um par adicionou sucessivamente o número de janelas existentes em coluna (Figura 37), enquanto os outros dois pares optaram por adicionar sucessivamente o

número de janelas existentes em linha (Figura 38). O algoritmo tradicional da adição foi opção para um par, que recorreu a este procedimento para adicionar o número de janelas existentes em cada metade do prédio (Figura 39). Na segunda questão, dois pares optaram pela adição sucessiva de parcelas iguais, tendo adicionado o número de janelas existentes no prédio do Manuel, duas vezes, visto que os prédios eram iguais (Figura 42). Note-se que não foi possível compreender de que forma os alunos concretizaram estes cálculos, tendo em conta a elevada grandeza dos números envolvidos, podendo ter recorrido a outros procedimentos de cálculo ou alguma das propriedades da adição, nomeadamente, a propriedade associativa.

O uso de estratégias multiplicativas na primeira questão foi opção para dois pares que parecem ter recorrido ao uso de produtos conhecidos, tendo multiplicado o número de janelas existentes em linha pelo número de janelas em coluna, considerando o modelo de disposição retangular, associado ao contexto do problema (Figura 40). Na resolução da segunda questão, o número de pares a usar estratégias multiplicativas sobe para três, surgindo três procedimentos de cálculo, o uso de produtos conhecidos, o uso de relações de dobro e o uso do algoritmo tradicional da multiplicação. O uso de produtos conhecidos parece ter sido opção para um par que, considerando a imagem ilustrativa do prédio do Manuel (dividido ao meio), multiplicou o número de partes, dos dois prédios, ou seja quatro, pelo número de janelas existentes em cada parte, dezoito. Neste sentido, parece que o par recorreu aos produtos da tabuada do 4 (Figura 44), no entanto, não é possível ter certeza de que terá sido este o procedimento de cálculo utilizado dada a grandeza dos números envolvidos. O uso de relações de dobro foi opção para um par que apresentou apenas a expressão na horizontal (Figura 45), podendo ter recorrido, intuitivamente, à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição [$2 \times 36 = (2 \times 30) + (2 \times 6) = 72$ ou $2 \times 36 = (2 \times 10) + (2 \times 10) + (2 \times 10) + (2 \times 6) = 72$]. O terceiro par a recorrer a este tipo de estratégia optou por usar o algoritmo tradicional da multiplicação, tendo em consideração que para descobrir o número total de janelas dos dois prédios teria de duplicar o número de janelas do prédio do Manuel, uma vez que estes eram iguais (Figura 46).

Ao contrário do esperado o uso de estratégias multiplicativas não aumentou na resolução da primeira questão, quando comparado com os problemas anteriores, tendo apenas dois pares recorrido a este tipo de estratégia. Na segunda questão

existiu um aumento pouco significativo deste tipo de estratégias, tendo passado a existir três pares a usá-las. O uso de estratégias de contagem teve um pequeno decréscimo quando comparado com o problema anterior, continuando as estratégias aditivas continuaram a ser as mais utilizadas. Penso que esta situação se deve à crescente grandeza dos números envolvidos, tendo provocado nos alunos falta de confiança no uso de estratégias multiplicativas. Para além disso, na segunda questão, previa-se que os alunos recorressem ao uso de relações de dobro, associadas às estratégias multiplicativas, porém, apenas dois pares usaram este procedimento de cálculo, tendo ficado à quem das expectativas. Contudo, existiram mais grupos a compreender a existência de relações de dobro, materializando-as sob a forma de adição.

Dado que o número de alunos a recorrer a estratégias multiplicativas na resolução de problemas aos quais está associado o sentido aditivo da multiplicação e com contextos que têm subjacente o modelo de disposição retangular mantinha-se bastante reduzido, optei por introduzir mais um problema com contextos semelhantes. O **quinto problema** “O pátio do João” (anexo 1), pretendida, assim, reforçar as aprendizagens promovidas com a exploração dos problemas anteriores, ou seja, que os alunos compreendessem e recorressem a estratégias multiplicativas quando perante problemas aos quais estão associados o sentido aditivo da multiplicação e o modelo de disposição retangular. Além disso, considerando a sequência de empedrados apresentados neste problema, procurava, sobretudo, que os alunos compreendessem e utilizassem a propriedade distributiva da multiplicação, através da relação entre três dos empedrados – o primeiro, o terceiro e o quarto (anexo 2.5). À semelhança dos problemas anteriores, também este é acompanhado por imagens ilustrativas que apresentam obstáculos à contagem direta de elementos. No entanto, ao contrário do problema anterior, decidi diminuir a grandeza dos números envolvidos, de modo evitar que os alunos se sentissem inseguros perante os mesmos. Uma vez que no problema anterior os números envolvidos eram demasiado grandes, o que poderá ter contribuído para que os alunos optassem essencialmente pelo uso de estratégias de contagem e aditivas. Assim sendo, neste problema, os números envolvidos são 4, 5, 6 e 9, pelo que, as pedras presentes em todos os empedrados são múltiplos de 5, sendo este considerado um número de referência.

Este problema é composto por quatro questões, na sua resolução esperava que a maioria dos alunos tivesse em consideração o modelo associado – disposição retangular, recorrendo a estratégias multiplicativas para descobrir o número de pedras existentes em cada empedrado, não descartando a hipótese dos alunos optarem pelo uso de outro tipo de estratégias, nomeadamente de contagem e aditivas (anexo 2.5). Na resolução da quarta questão, esperava, ainda, que alguns alunos identificassem a relação entre os vários empedrados – primeiro, terceiro e quarto; explorando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (anexo 2.5).

Ao analisar os dados apresentados na tabela 8 verifica-se um aumento significativo do uso de estratégias multiplicativas e, conseqüentemente, a diminuição do uso de estratégias de contagem e extinção do uso de estratégias aditivas. Este aumento do uso de estratégias multiplicativas parece revelar que a maioria dos alunos compreendeu que perante problemas com contextos semelhantes a este, ou seja, associados ao modelo de disposição retangular, a estratégia mais eficaz na sua resolução é a multiplicativa, bastando multiplicar o número de elementos por linha pelo número de elementos por coluna.

Posto isto, na resolução das três primeiras questões, três pares optaram pelo uso de estratégias de contagem, tendo contado de um em um o número de pedras existentes em cada empedrado (Figura 47). Enquanto cinco pares recorreram ao uso de estratégias multiplicativas, parecendo ter optado pelo uso de produtos conhecidos, ou seja, recorreram aos produtos da tabuada do 5 (Figuras 48, 49 e 50). Note-se que os alunos identificam como produtos da tabuada do 5 os que têm como multiplicador o número 5. Na quarta questão, o número de pares a recorrer a estratégias de contagem passou para dois, tendo, conseqüentemente, aumentado para seis, o número de pares a recorrer a estratégias multiplicativas. Tal como nas questões anteriores, o procedimento associado à estratégia de contagem foi a contagem de um em um, assim como, o procedimento associado à estratégia multiplicativa foi o uso de produtos conhecidos (Figura 51). Na resolução desta questão, não surgiu qualquer cálculo associado à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, tendo os alunos optado por recorrer ao modelo associado a esta questão, não fazendo relação entre os diferentes empedrados.

Uma vez que com a resolução do quinto problema o número de alunos a recorrer a estratégias multiplicativas aumentou significativamente, decidi introduzir, na sequência de problemas, dois problemas associados ao sentido combinatório, proporcionando a oportunidade dos alunos contactarem com problemas com contextos diversificados, que permitam explorar este sentido da multiplicação. Assim, propus o **sexto problema** “Organizando menus” (anexo 1) ao qual está associado o sentido combinatório e cujos números envolvidos são 2, 3 e 6. A opção por números pequenos prende-se com o objetivo de facilitar os cálculos realizados pelos alunos, uma vez que estão perante problemas aos quais estão associados um sentido, com o qual não estão familiarizados.

O problema “Organizando menus” inclui imagens ilustrativas de um cardápio, apelando à combinação entre os vários elementos que o compõem e é composto por duas questões, tendo optado por explorar uma questão de cada vez, existindo, deste modo, dois momentos de discussão coletiva. Com esta opção pretendia que os alunos, após a resolução e discussão da primeira questão, compreendessem que as estratégias mais eficazes, quando perante problemas associados ao sentido combinatório, são as estratégias multiplicativas. Considerando que este era o primeiro problema, ao qual está associado o sentido combinatório, previ que para a sua resolução os alunos recorreriam a dois tipos de estratégias: contagem e multiplicativas (anexo 2.6), antevendo que os procedimentos de cálculo associado às estratégias multiplicativas surgiriam em menor número.

Considerando os dados apresentados na tabela 8 confirma-se que de facto os alunos recorreram a estes dois tipos de estratégias. Assim, na resolução da primeira questão, cinco grupos recorreram ao uso de estratégias de contagem, enquanto apenas dois grupos optaram pelo uso de estratégias multiplicativas. Os cinco grupos a recorrer a estratégias de contagem optaram por contar de um em um, as diferentes sandes possíveis de fazer. Porém, estas contagens foram realizadas de três formas distintas, neste sentido, três grupos recorreram ao uso de ligações/esquemas entre os diferentes tipos de pão e os ingredientes disponíveis para fazer as sandes (Figura 52). Um par decidiu desenhar as diferentes sandes que poderia fazer, utilizando os diferentes tipos de pão e de ingredientes (Figura 53). E por fim, um grupo optou por escrever as diferentes sandes que poderiam fazer (Figura 54). O procedimento de cálculo associado às estratégias multiplicativas foi o

uso de produtos conhecidos, tendo os dois grupos recorrido ao uso de tabuadas já exploradas anteriormente, não sentido necessidade de efetuar cálculos (Figura 55). Estes dois grupos revelaram compreender o sentido combinatório da multiplicação, uma vez que perceberam que para descobrir o número de tipos de sandes que se poderia fazer, bastava multiplicar os tipos de pão (2) pelo número de ingredientes disponíveis (3), ou vice-versa.

Na resolução da segunda questão todos os alunos recorreram a estratégias multiplicativas, indiciando que o momento de discussão coletiva permitiu que estes compreendessem que as estratégias multiplicativas são as mais eficazes perante problemas associados ao sentido combinatório da multiplicação. Assim sendo, todos recorreram ao uso de produtos conhecidos (Figura 56). Para a resolução desta questão os alunos tiveram em consideração o número de sandes, descoberto na questão anterior, usando este resultado para descobrirem quantos menus poderiam construir com essas sandes e com as bebidas disponíveis.

O **sétimo problema**, “Páscoa doce” (anexo 1), também a ele associado o sentido combinatório da multiplicação, pretendia reforçar as aprendizagens desenvolvidas com a exploração do problema anterior. Os números envolvidos neste eram igualmente pequenos, o 2 e o 3, existindo no entanto, um aumento no grau de dificuldade, pois a este problema não estava associada uma imagem diretamente relacionada com a questão a resolver.

Na antecipação das estratégias e procedimentos de cálculo tive em consideração o facto de no problema anterior, com contexto semelhante a este, os alunos terem recorrido ao uso de estratégias multiplicativas para o resolver. Assim, previ que a maioria da turma voltaria a recorrer a este tipo de estratégia, considerando, no entanto, a hipótese que alguns alunos poderiam voltar a optar pelo uso de estratégias de contagem (anexo 2.7).

Ao analisar a tabela 8 constata-se que de facto a maioria da turma optou pelo uso de estratégias multiplicativas. No entanto, um par preferiu recorrer a estratégias de contagem. Este contabilizou o número de bombons através da contagem por saltos, contando de dois em dois, os diferentes bombons existentes na caixa, esta contagem foi realizada com o auxílio da escrita e do desenho, na medida em que o par escreveu e desenhou os respetivos bombons (Figura 57). Os restantes seis grupos, que utilizaram estratégias multiplicativas para resolver este problema,

recorreram ao uso de produtos conhecidos. Todos estes grupos construíram, primeiramente, uma tabela onde organizaram os dados apresentados no enunciado, separando os tipos de chocolate (2) dos tipos de recheio (3), multiplicando-os, de seguida (Figura 58). Penso que esta organização de dados surgiu por influência do problema anterior, uma vez que apresentava todos os dados organizados num cardápio, que fazia lembrar uma tabela. O facto de quase todos os alunos terem recorrido ao uso de estratégias multiplicativas na resolução deste problema parece revelar que compreenderam o sentido combinatório da multiplicação e, como devem proceder perante problemas com este tipo de contexto.

Capítulo VI – Conclusão

O presente estudo tem como objetivo compreender o modo como os alunos desenvolvem a aprendizagem da multiplicação através da resolução de uma sequência de problemas. Do ponto de vista metodológico, esta investigação enquadra-se numa metodologia qualitativa, seguindo a vertente de investigação-ação. Neste âmbito, foi proposto, a uma turma de 2.º ano de escolaridade, com vinte alunos, a exploração de uma sequência de problemas de multiplicação, centrada na aprendizagem desta operação, pretendendo que os alunos progredissem nas estratégias utilizadas, passando de estratégias de contagem e aditivas para estratégias multiplicativas. Este capítulo é composto por duas secções, uma destina-se às conclusões do estudo e, a outra, a uma reflexão sobre o desenvolvimento do projeto.

6.1. Conclusões do estudo

As conclusões do estudo serão organizadas de acordo com as questões de investigação: (i) Que estratégias e procedimentos de cálculo são utilizados pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação? e (ii) De que modo é que a proposta de sequências de problemas de multiplicação contribui para a aprendizagem desta operação?

6.1.1. Estratégias e procedimentos de cálculo

Ao analisar as produções escritas dos alunos e as suas apresentações e explicações, nos momentos de discussão coletiva e entrevistas, foi possível identificar as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados, em cada problema.

Para resolver a sequência de problemas proposta os alunos recorreram a três tipos de estratégias: as de contagem, as aditivas e as multiplicativas. Os procedimentos de cálculos utilizados associados às estratégias de contagem foram: *contar de um em um* e *contar por saltos*. No caso das estratégias aditivas surgiram os procedimentos de cálculo: a *adição sucessiva*, a *adição 2 a 2* e o *uso do algoritmo tradicional da adição*. Associado às estratégias multiplicativas, os procedimentos de cálculo usados foram: o *uso de produtos conhecidos*, o *uso de relações de dobro* e o *uso do algoritmo tradicional da multiplicação*.

A tabela 8 resume as estratégias e os procedimentos de cálculo utilizados ao longo da exploração dos problemas de multiplicação que compõem a sequência proposta.

Tabela 10 – Resumo das estratégias/procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos

Estratégias	Procedimentos de cálculo
Contagem	Contar de 1 em 1
	Contar por saltos
Aditivas	Adicionar sucessivamente
	Adicionar 2 a 2
	Usar algoritmo tradicional da adição
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar algoritmo tradicional da multiplicação

Os resultados deste estudo revelam que os alunos recorrem a diferentes estratégias para resolver os problemas propostos, surgindo alguma variedade de procedimentos de cálculo. Esta diversidade também é indicada por Mendes (2012) afirmando que a mesma surge associada aos contextos das tarefas propostas aos alunos. Também no presente estudo esta diversidade de estratégias parece estar associada aos contextos dos problemas propostos, atendendo aos modelos e números envolvidos. Segundo Mendes (2012) nas tarefas de multiplicação as estratégias utilizadas pelos alunos variam também de acordo com os seus conhecimentos e, como tal, vão evoluindo, passando de estratégias de contagem e

aditivas para estratégias multiplicativas, consoante os alunos compreendem as relações numéricas e as propriedades desta operação.

Para além destes dois aspetos, a metodologia adotada na exploração dos problemas, em sala de aula, parece ter fomentado a progressão das estratégias utilizadas pelos alunos, na medida em que estes eram encorajados a apresentar as suas resoluções e a discuti-las com os colegas.

Já no que diz respeito aos procedimentos de cálculo, estes não se apresentam tão diversificados como no estudo de Mendes (2012). O conhecimento do algoritmo da multiplicação poderá ter contribuído para que os alunos usassem este procedimento em vez de recorrer a diversos procedimentos que permitem o uso de relações numéricas e propriedades da multiplicação.

No início da exploração desta sequência de problemas havia alguns alunos que usavam várias estratégias e procedimentos de cálculo para resolver o mesmo problema, tendo esta situação diminuído ao longo do tempo, conforme os alunos iam percebendo que o objetivo era resolver os problemas da maneira mais eficaz. Também Mendes (2012) confrontou-se com esta situação na sua investigação, referindo que esta situação pode estar relacionada com o facto de os alunos se sentirem inseguros com o uso de estratégias multiplicativas, recorrendo a outros procedimentos de cálculo, que permitem a confirmação dos resultados obtidos.

Para além disso, ao longo da exploração da sequência de problemas, foram vários os alunos que mesmo depois de já terem recorrido a estratégias multiplicativas voltam a optar por estratégias de contagem ou aditivas, revelando ter maior confiança no uso de procedimentos de cálculo associados a estas estratégias. Esta situação surgiu quando os alunos foram confrontados com alguma dificuldade associada ao contexto do problema proposto, nomeadamente, dificuldade em calcular o valor dos produtos. No entanto, durante os momentos de partilha, os alunos reconheciam que poderiam resolver os problemas recorrendo a estratégias multiplicativas.

Analisando a tabela 7, verifica-se que quando os alunos usam estratégias de contagem para resolver os problemas de multiplicação, o procedimento mais utilizado é *contar de um em um*. Por sua vez, quando usam estratégias aditivas, o procedimento que surge em maior número é *adicionar sucessivamente*.

Relativamente às estratégias multiplicativas, o procedimento de cálculo mais comum é *uso de produtos conhecidos*.

Em suma, dando resposta à questão – Que estratégias e procedimentos de cálculo são utilizados, pelos alunos, na resolução de problemas de multiplicação? – concluo que:

- Os alunos usam três tipos de estratégias para resolver problemas de multiplicação: *contagem, aditivas e multiplicativas*. E alguns procedimentos de cálculo: *contar de um em um, contar por saltos, adicionar sucessivamente, adicionar 2 a 2, uso do algoritmo tradicional da adição, uso de produtos conhecidos, uso de relações de dobro e uso do algoritmo tradicional da multiplicação*.
- A diversidade de estratégias e procedimentos de cálculo parece estar associada ao contexto dos problemas propostos e à metodologia adotada na exploração dos mesmos.
- O conhecimento do algoritmo da multiplicação poderá ter contribuído para a reduzida variedade de procedimentos de cálculo associados a esta operação.
- Na resolução dos primeiros problemas há alunos que usam diferentes estratégias e procedimentos de cálculo para resolver o mesmo problema, diminuindo esta tendência consoante os alunos compreendem que o objetivo é resolver os problemas da maneira mais eficaz.
- Por vezes, durante a resolução de um problema, os alunos regridem na estratégia utilizada, comparando com a que usaram no problema anterior da sequência. Nestes casos recorrem a procedimentos de cálculo associados a estratégias consideradas menos eficazes.
- Ao longo da resolução da sequência de problemas surgiram procedimentos de cálculo utilizados com maior frequência, associados a três tipos de estratégias. Neste sentido, associado à estratégia de contagem o procedimento de cálculo mais utilizado foi *contar de um em um*, à estratégia aditiva o procedimento de cálculo que predomina é *adicionar sucessivamente* e associado à estratégia multiplicativa destaca-se o *uso de produtos conhecidos*.

6.1.2. Contributos da sequência de problemas na aprendizagem da multiplicação

A segunda questão deste estudo pretendia compreender de que modo a proposta de uma sequência de problemas de multiplicação contribui para a aprendizagem desta operação. A análise das estratégias e procedimentos de cálculo dos alunos utilizados ao longo da resolução da sequência de problemas, assim como a articulação entre os problemas e as suas características permite-me concluir sobre as suas potencialidades na aprendizagem da multiplicação. No que se refere às características dos problemas foco-me nos seus contextos, considerando os modelos e nos números envolvidos.

Ao longo da resolução da sequência de problemas os alunos tiveram a oportunidade de explorar problemas com contextos associados a dois modelos: o modelo linear e o modelo de disposição retangular. Considerando Fosnot e Dolk (2001) os alunos devem de iniciar a aprendizagem da multiplicação com a exploração de tarefas que tenham subjacente a adição de parcelas iguais. Neste sentido, decidi iniciar a sequência de problemas com um problema ao qual estava associado o modelo linear, uma vez que este se relaciona com a adição sucessiva por “saltos”. Considerando ainda Fosnot e Dolk (2001) após a exploração de tarefas associadas ao modelo acima referido, deve-se introduzir, gradualmente tarefas associadas ao modelo de disposição retangular. Esta sequência de problemas procurou realizar uma passagem gradual entre estes dois modelos, pelo que do segundo ao quinto problema pretendia que os alunos passassem do modelo linear para o modelo de disposição retangular, abandonando a adição sucessiva de parcelas iguais e, conseqüentemente, passando a recorrer à multiplicação. Para tal, nestes quatro problemas, recorri ao uso de imagens cuja estrutura fosse retangular, pois as imagens para além de “ilustrativas da situação associada ao contexto, podem também suscitar o uso de determinados modelos” (Brocardo & Delgado, 2009).

Neste sentido, as imagens que acompanhavam estes problemas revelaram ter um papel importante na escolha das estratégias e procedimentos de cálculo usados pelos alunos, na resolução de cada problema. Tendo sido utilizadas imagens com estruturas retangulares que procuravam, por um lado, auxiliar os alunos nos seus

cálculos e, por outro, aumentar o grau de dificuldade de cada problema. Uma vez que inicialmente revelavam todos os elementos que a compunham, com o avançar da exploração dos problemas, esta situação foi-se alterando, passando a revelar apenas alguns elementos, procurando reduzir o uso de estratégias de contagem e aditivas e, conseqüentemente, aumentar o uso de estratégias multiplicativas. Porém, este objetivo nem sempre foi atingido, pelo que, quando esta situação se verificou pela primeira vez não existiu um aumento do número de alunos a recorrer a estratégias multiplicativas. Tal situação poderá estar relacionada com o facto de os alunos sentirem falta de confiança em realizar cálculos multiplicativos, quando perante imagens com elementos não visíveis.

Para além disso, grande parte dos números envolvidos na sequência de problemas proposta caracterizam-se por serem números de referência ou com os quais os alunos já trabalharam várias vezes, procurando facilitar os cálculos efetuados por estes. Considerando Mendes (2012) que afirma que consoante a grandeza dos números envolvidos aumenta é identificada uma maior frequência de procedimentos multiplicativos. Procurei aumentar, gradualmente, a grandeza dos números envolvidos de problema para problema, pretendendo que os alunos abandonassem o uso de estratégias aditivas, por serem menos eficazes e passassem a recorrer a estratégias multiplicativas. Porém, esta realidade não foi tão evidente como o esperado, pois quando existiu um aumento mais significativo da grandeza dos números envolvidos, os alunos mantiveram, na sua maioria, a opção pelo uso de estratégias de contagem e aditivas. Neste sentido, a adequação dos números parece constituir um elemento fundamental para o uso de estratégias multiplicativas, podendo provocar o efeito contrário quando os números são demasiado grandes.

A articulação entre os problemas II, III, IV e V parece ter contribuído para que os alunos realizassem relações entre os contextos, nomeadamente no que se refere ao uso do modelo retangular, optando por estratégias e procedimentos de cálculo já explorados. Assim, progressivamente, aumentou o número de alunos a recorrer a estratégias multiplicativas, quando perante problemas com contextos idênticos. No entanto, penso que a passagem de estratégias de contagem e aditivas para estratégias multiplicativas, na resolução de problemas aos quais estão associados o sentido aditivo da multiplicação e o modelo de disposição retangular, seria mais

observável se os alunos tivessem explorado mais problemas com este tipo de contexto.

Os dois últimos problemas estão associados a outro sentido da multiplicação, o combinatório, procurando proporcionar aos alunos a exploração de contextos diversificados, de modo a que estes compreendam diferentes situações associadas à multiplicação.

Em suma, dando resposta à questão – De que modo é que a proposta de sequências de problemas de multiplicação contribui para a aprendizagem desta operação? – concluo que:

- Os problemas de multiplicação com contextos associados ao modelo de disposição retangular parecem contribuir para o uso de estratégias multiplicativas (quando os números envolvidos são adequados).
- As imagens que acompanham cada problema, tendem a influenciar a escolha das estratégias e procedimentos de cálculo a utilizar na resolução de cada problema.
- Os números envolvidos nos problemas, quer de referência quer das tabuadas já conhecidas, facilitam os cálculos efetuados pelos alunos.
- A crescente grandeza dos números envolvidos pode não contribuir para o aumento do uso de estratégias multiplicativas.
- A articulação entre os problemas da sequência de problemas parece contribuir para que os alunos estabeleçam relações entre os seus contextos, progredindo nas estratégias utilizadas na sua resolução.

6.2. Reflexão sobre o estudo

Para terminar este relatório considero importante refletir sobre alguns aspetos relacionados com o desenvolvimento desta investigação. Assim, começo por refletir acerca da minha prática, (i) atendendo a alguns desafios e dificuldades sentidas ao longo do desenvolvimento deste estudo. Seguidamente, (ii) analiso algumas das opções metodológicas tomadas no decorrer deste projeto. Termino com um balanço das aprendizagens realizadas e eventuais influências que este estudo terá na minha prática profissional futura.

O objetivo desta investigação é centrado nas aprendizagens dos alunos, no entanto, para o atingir houve um grande investimento, da minha parte, na planificação e no trabalho realizado em sala de aula. Neste sentido, após a escolha do tema, senti necessidade de procurar literatura sobre as temáticas em estudo, ou seja, sobre a resolução de problemas, a aprendizagem da multiplicação e a sequência de problemas, de forma a aprofundar a minha compreensão acerca destas temáticas. Uma vez que o meu objetivo com este estudo era compreender de que forma a sequência de problemas promovia a aprendizagem da multiplicação, foi importante perceber como deveria proceder, tanto na preparação das aulas como em sala de aula, para atingir este objetivo. Assim, os conhecimentos resultantes destas leituras foram utilizados ao longo da minha prática letiva, tendo-se revelado fulcrais para o desenvolvimento deste estudo e para o meu conhecimento profissional.

Neste sentido, o primeiro desafio com que me deparei foi a construção de uma sequência de problemas, favorável à aprendizagem da multiplicação, cujos problemas apresentassem contextos adequados e articulados entre si. Penso que, efetivamente, consegui propor problemas desafiadores, com contextos diversificados, que proporcionaram a oportunidade de explorar diferentes estratégias de resolução. Associado à maioria dos problemas propostos estava a exploração do modelo de disposição retangular entendido como um modelo que proporciona o surgimento de estratégias multiplicativas. Para além disso, tive cuidado com a seleção dos números envolvidos, procurando que estes fossem de referência ou que fizessem parte de produtos conhecidos pelos alunos, para que se sentissem familiarizados com a sua exploração. A construção desta sequência de problemas permitiu-me perceber que não é fácil criar ou adaptar problemas de forma a existir uma articulação adequada, que promova a progressão das aprendizagens dos alunos. Pelo que, para que esta sequência de problemas desse resposta às necessidades dos alunos foi necessário uma constante reflexão e análise da minha prática e das resoluções da turma. Os momentos de discussão coletiva e as entrevistas foram essenciais para a adequação da sequência de problemas, uma vez que durante estes momentos os alunos tinham a oportunidade explicar os seus raciocínios matemáticos. Perante a análise realizada foram mantidos os problemas da sequência de problemas inicialmente prevista e introduzidos novos problemas,

quando necessário, de modo a que estivessem adequados ao nível de cálculo dos alunos e procurando promover o uso de procedimentos de cálculo mais potentes. As alterações à sequência de problemas nem sempre foram bem-sucedidas uma vez que, se voltasse a explorar esta sequência de problemas, trocava o problema quatro e cinco, invertendo a sua ordem. Pois o problema quatro apresenta um grau de dificuldade mais avançado do que o problema cinco, envolvendo números de maior grandeza. Penso que esta desarticulação entre os problemas deveu-se à minha falta de experiência na medida em que considere que os alunos, após explorarem dois problemas associados ao modelo de disposição retangular, seriam capazes de resolver um problema semelhante com números de maior grandeza. Contudo, considero que aumentei demasiado a grandeza desses números. Na sequência das dificuldades dos alunos na resolução deste problema, optei por introduzir um novo problema à sequência prevista, com um grau de dificuldade menor, recorrendo a números mais pequenos. Penso que fiz bem em ter optado por voltar a explorar um problema com contextos semelhantes, embora com um grau de dificuldade mais reduzido, uma vez que quando os alunos resolveram o quinto problema, a opção pelo uso de estratégias multiplicativas aumentou significativamente.

Outro aspeto da minha prática e que apesar de ter sido um desafio, considero um ponto bastante positivo, foi a antecipação das estratégias e dos procedimentos de cálculo que os alunos poderiam utilizar na resolução de cada problema. Esta antecipação para além de me ajudar a compreender com mais clareza os objetivos problemas, facilitou a identificação das dificuldades dos alunos na sua resolução, permitindo-me encontrar uma forma de os ajudar a ultrapassá-las. Efetivamente Mendes *et al.*, (2011a) salientam a importância do professor antecipar as estratégias dos alunos, permitindo-lhe identificar eventuais estratégias e dificuldades dos alunos.

O momento de apresentação foi realizado sem grandes dificuldades e, facilmente ultrapassáveis quando surgiam. Assim, a leitura do problema ficou a cargo dos alunos, sendo selecionado um aluno para a sua leitura em voz alta. Quando esta era concretizada com dificuldade ou quando os alunos manifestavam dificuldade em ouvir o que o colega estava a ler o enunciado era relido por mim, dissipando-se todos os constrangimentos que pudessem surgir ao longo da leitura anterior.

Os momentos de resolução do problema e de discussão coletiva caracterizam-se por terem sido os momentos em que senti mais dificuldades. Neste sentido, o momento de resolução dos problemas foi marcado por algumas dificuldades no apoio prestado aos alunos. Pois, senti, constantemente, que os meus comentários poderiam estar a facilitar a resolução do problema e a induzi-los no recurso de determinadas estratégias e procedimentos de cálculo. Porém, sentia que devia continuar a apoiá-los na interpretação dos enunciados visto que, este aspeto era uma das dificuldades mais sentidas pelo grupo, encontrando-se diretamente relacionada com o Português.

Também os momentos de discussão coletiva revelaram-se momentos difíceis de gerir. Segundo Stein *et al.* (2008) a gestão das intervenções dos alunos é um grande desafio para os professores. Ao longo da minha prática letiva, senti, por várias vezes, que a participação dos alunos estava à quem do pretendido, persistindo o silêncio, quando os colegas apresentavam as suas resoluções. Para colmatar esta situação foi necessária uma intervenção mais ativa da minha parte, tendo colocado questões quer aos alunos que estavam a apresentar as suas resoluções, quer à restante turma, de modo a promover a participação de todos na discussão dos problemas e na sistematização das aprendizagens matemáticas que daí resultavam. Esta situação foi melhorando, de problema para problema, pois os alunos foram-se adaptando a esta dinâmica. Neste sentido, foi um grande desafio começar a desenvolver uma cultura de sala de aula na qual os alunos partilhassem as suas resoluções, colocassem questões e explicitassem os seus raciocínios.

Relativamente à metodologia adotada para a realização deste estudo, há dois aspetos sobre os quais gostaria de refletir, um relacionado com a recolha dos dados e outro com a análise dos dados.

No que se refere à recolha dos dados, tal como referido no capítulo destinado à Metodologia, optei por realizar gravações áudio de todos os momentos que compuseram a exploração dos problemas, ou seja, desde da sua apresentação até ao momento da discussão dos problemas, bem como das entrevistas que se sucederam. Estas gravações revelaram-se um instrumento muito importante na recolha dos dados, uma vez que os discursos dos alunos mantiveram-se intactos, permitindo-me no momento da análise dos dados aceder aos raciocínios matemáticos e dificuldades manifestadas pelos alunos. Além das gravações áudio

recolhi as produções escritas dos alunos o que me permitiu cruzar os diferentes dados, tornando-se uma mais-valia no momento de análise dos dados.

Ainda no que respeita à recolha dos dados, senti, ao longo da realização da análise dos mesmos que as entrevistas ficaram à quem do pretendido, uma vez que são vários os momentos em que não é possível compreender de que modo é que os alunos realizaram os seus cálculos, acedendo apenas à estratégia utilizada. Esta situação deve-se ao facto de neste momento não ter questionado os alunos sobre como pensaram para efetuar os cálculos. Percebi que deveria ter preparado antecipadamente as entrevistas, de modo a compreender os procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos, através de uma análise mais aprofundada das suas produções antes de as realizar.

Relativamente à análise dos dados, esta foi realizada em dois momentos. O primeiro momento concretizou-se ao longo da minha prática letiva e teve como base as produções escritas pelos alunos. Neste momento analisei superficialmente as estratégias e procedimentos de cálculo usado na resolução de cada problema, permitiu-me verificar se os objetivos estabelecidos tinham sido alcançados, possibilitando a concretização de uma constante adaptação dos problemas a propor de seguida. O segundo momento efetivou-se com a construção deste relatório, pelo que, inicialmente, analisei as produções dos alunos, organizando-as tendo em conta as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados em cada problema e, de seguida analisei as gravações áudio, permitindo-me ter uma perceção mais exata dos raciocínios matemáticos dos alunos. Considero que a opção por cruzar diferentes dados foi bastante acertada pois, permitiu-me verificar se os objetivos estabelecidos para a sequência de problemas foram atingidos. Além disso, facilitou a caracterização das estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos ao longo da exploração da sequência de problemas. No entanto, a análise de dados não foi, de todo fácil de concretizar, pois foi necessário realizar o cruzamento entre as diferentes fontes, o que implicou um trabalho minucioso e de longa duração. Tal como refere Merriam (1991), “analisar os dados recolhidos numa investigação de estudo é um trabalho complexo que exige tempo” (p. 145).

A realização deste estudo constituiu para mim um momento de grande e profunda aprendizagem pois, pude contactar com um método de ensino diferente do que havia experienciado até ao momento, permitindo-me fazer um ligação entre o

aprendido na teoria e a prática, promovendo um enriquecimento da minha prática, enquanto futura professora. Este estudo, contribuiu para o desenvolvimento da minha capacidade de reflexão, pois esta era permanente. Refletia sobre as aprendizagens dos alunos e sobre a minha prática letiva, procurando adaptar a sequência de problemas às características e necessidades da turma, tendo sempre em consideração os objetivos de aprendizagem que estabeleci para os alunos e simultaneamente o objetivo deste estudo. Neste sentido, percebi que é essencial que o professor selecione e prepare tarefas com contextos motivadores e potenciadores de aprendizagens. Assim, as tarefas a explorar com os alunos devem promover a sua participação ativa, com um grau de dificuldade adequado às suas capacidades de modo a que se sintam motivados para a sua resolução e atender às características dos contextos das tarefas (modelos e números) e sua articulação proporcionando a progressão das aprendizagens.

Para terminar, penso que a concretização desta investigação permitiu-me abrir os horizontes, no que se refere ao modo com se pode explorar com os alunos os vários conteúdos programáticos, reforçando a minha vontade de optar por práticas relacionadas com o ensino exploratório. Para além disso, considero que me ajudará, futuramente, a tomar decisões mais acertadas e refletidas no que toca à exploração de uma sequência de problemas.

Referências Bibliográficas

- Afonso, C. (2014/2015). *Plano de Trabalho de Turma*. Setúbal.
- Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação. Um guia prático e crítico*. Porto: Edições Asa.
- Almeida, J. F. (1990). Técnicas de investigação. In J. F. Almeida, & J. M. Pinto, *A investigação nas ciências sociais* (4ª ed., pp. 92-123). Lisboa: Editorial Presença.
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 33-52.
- Arends, R. (2008). *Aprender a Ensinar* (7º ed.). Lisboa: McGraw-Hill de Portugal, Lda.
- AVEOS. (2013/2017). *Projeto Educativo - Agrupamento Vertical de Escolas Ordem de Sant'Iago*. Obtido em junho de 2015, de Agrupamento de Escolas Ordem de Sant'Iago: www.aveordemsantiago.pt/pdfs/projecto_educativo.pdf
- Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer & E. v. Lieshout, *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht: The Netherlands.
- Boavida, A. & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. In L. S. (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). Portalegre: SPIEM.
- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brocardo, J. & Delgado, C. (2009). Desafios e complexidades na concepção e exploração de tarefas para o desenvolvimento do sentido do número. In *Números e Estatística: refletido no presente, perspectivando o futuro - Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vila Real: SPCE.
- Brocardo, J., Delgado, C. & Mendes, F. (2005). A multiplicação no contexto de sentido de número. In *Desenvolvendo o sentido de número: Materiais para o educador e para o professor do 1.º Ciclo Vol. II* (pp. 9-17). Equipa do Projeto

- DSN: perspetivas e exigências curriculares. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e Desafios. *Educação e Matemática*, 115, pp. 11-17.
- Canavarro, A. P. & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. Práticas de Ensino da Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira, *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). Lisboa: SPIEM.
- Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: o caso de Célia. In P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira, *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática: Práticas de Ensino da Matemática*. Portalegre: SPIEM.
- Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Edições Almedina.
- Coutinho, C., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J. & Vieira, S. (2009). Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas. *Psicologia, Educação e Cultura*, 2 (XIII), pp. 355 - 380.
- Delgado, C. (2013). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número: Um estudo no 1.º ciclo*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa - Instituto de Educação).
- Dolk, M. (2008). Problemas realistas: Um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 35-53). Lisboa: Escolar Editora.
- Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Graue, M. E., & Walsh, D. J. (2003). *A investigação etnográfica com crianças: teorias, métodos e ética*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, rations and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston, Virginia: NCTM.
- IGE, M. E. (2010/2011). *Avaliação Externa das Escolas*. Obtido em Junho de 2015, de IGE: http://www.ige.min-edu.pt/upload/AEE_2011_DRLVT/AEE_11_Ag_Ordem_Santiago_R.pdf

- Jacob, L. & Willis, S. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. *26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Goup of Australasia* (pp. 460-467). Sydney, Australia: Deakin University.
- Johnson, D. W. & Johnson, F. (2013). *Joining Together: group theory and goup skills* (11ª ed.). Boston: Allyn & Bacon.
- Klein, J. & Pereira, S. (2011). Resolução de Problemas: Concepções e uso no ensino da matemática. *XIII Conferência InterAmericana de Educação Matemática*. Recife, Brasil.
- Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido de número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Edits.), *O sentido de número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.
- Latorre, A. (2003). *La investigación-acción*. Barcelo: Graó.
- Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em Matemática*. Porto: Edições Asa.
- Marchão, A. (2012). *No jardim de infância e na escola do 1.º ciclo do Ensino Básico. Gerir o currículo e criar oportunidades para construir o pensamento crítico*. Lisboa: Edições Colibri.
- Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-acção*. Porto: Porto Editora.
- Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º Ciclo*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa - Instituto de Educação).
- Mendes, F., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2011a). A multiplicação: Construir oportunidades para a sua aprendizagem. In M. Isoda & R. Olfos (Orgs.), *Enseñanza de la multiplicación: Desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas* (pp. 321-350). Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Val paraíso.
- Mendes, F., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2011b). Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução. *Indagatio Didáctica*, 3 (1), pp. 6-24.
- Mendes, F., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Revista Quadrante*, Vol. XXII, Nº1, 133-162.

- Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C. & Gonçalves, F. (2010). *Números e Operações - 3º ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Mendes, F., Oliveira, H. & Brocardo, J. (2011). As potencialidades de sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. *Atas do XXII SIEM* (pp. 237-252). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Merriam, S. B. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ministério da Educação. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ministério da Educação DEB (ed.). (2001). *Currículo nacional para o Ensino Básico. Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.
- Morais, C. (2011). *O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, ESELx - Instituto Politécnico de Lisboa).
- Moreira, D. (2001). Educação Matemática e Comunicação: uma abordagem no 1º ciclo. *Educação e Matemática*, n.º 65, pp. 27-32.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991/1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Documento original em Inglês, publicado em 1991).
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000/2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Documento original em Inglês, publicado em 2000).
- Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3º Ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, Vol. XXII, Nº2, pp. 29-53.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. California: Sage Publications, Lda.
- Pinto, E. & Canavarro, A. P. (2012). O Papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O.

- Magalhães & A. Folque, *Práticas de investigação em Educação*. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.
- Ponte, J. P. (2002). *Investigar a nossa própria prática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ramos, A., Mateus, A., Matias, J. & Carneiro, T. (2002). Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução. *MAT450 - Seminários de Resolução de Problemas*. São Paulo, Brasil: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
- Ruthven, K., Hofmann, R. & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4, pp. 81-88. Ankara, Turkey: PME.
- Sanches, I. (2005). Compreender, agir, mudar, incluir. Da investigação-acção à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação*, 5, 127-142.
- Serrazina, L. (s.d.). *Resolução de problemas*. Obtido em 24 de março de 2016, de ESEV:
https://www.google.pt/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwiEsNjDudrLAhXIPRQKHcsQAcoQFggBMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.esv.ipv.pt%2Fmat1ciclo%2FCOORDENADORES%2FMateriais%2520Coordenad%2FTextos%2FProblemas_texto_Coord.pdf&usq=AFQj
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), pp. 313-340.
- Stein, M. & Smith. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Stein, M., Remillard, J. & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

- Tenreiro-Vieira, C. (2010). *Promover a literacia Matemática dos alunos: Resolver problemas e investigar desde os primeiros anos de escolaridade*. Porto: Educação Nacional.
- Treffers, A. & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) - Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 61-88). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Tuckman, B. W. (2000). *Manual de investigação em educação. Como conceber e realizar o processo de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In P. Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para professores do ensino básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel.
- Watson, A. & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. In *Journal of Mathematics Teacher Education* 10 (3-4) (pp. 205-215).
- Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods*. London: Sage.
- Yin, R. (2010). *Estudo de Caso - Planejamento e Métodos* (2.^a ed.). Porto Alegre: Bookman.

Anexos

Anexo 1 – Enunciados dos problemas

Problema I - Ida ao Circo

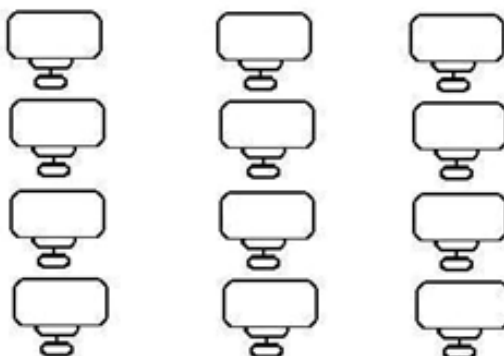


A turma 20 gosta muito de passear por isso, a professora decidiu levá-los ao circo. Para poderem ir cada aluno tem de pagar 5 euros pela entrada no circo.

Sabendo que 20 alunos da turma vão à visita, qual será o valor a pagar?

Os alunos vão acompanhados pela professora e pela estagiária. Qual é a despesa total, sabendo que as entradas dos adultos custam 6 euros cada?

Problema II – Sala de aula

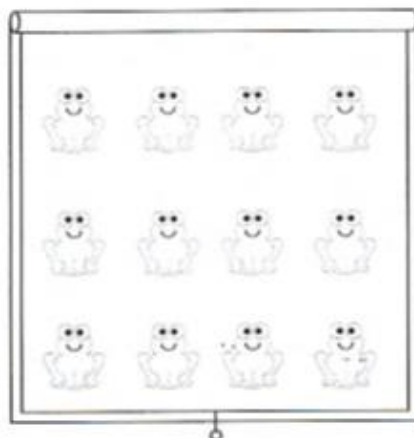


Numa sala de aula a professora distribuiu os alunos por quatro filas, com 3 cadeiras em cada fila.

Quantos alunos podem estar sentados na sala de aula?

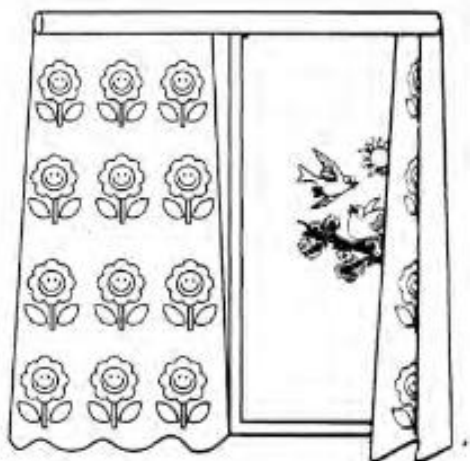
Problema III – Cortinas da casa do João

O João tem dois irmãos. Na figura temos as cortinas do quarto dele, dos irmãos e da cozinha.

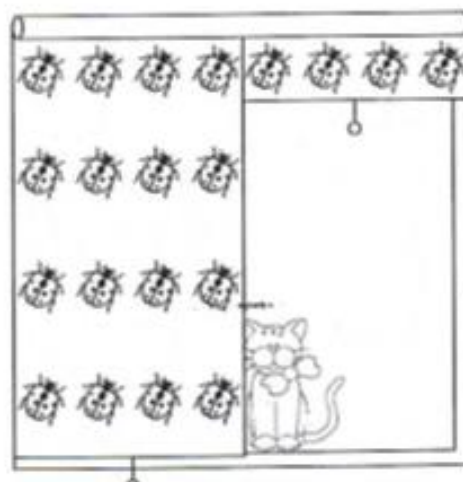


Quarto do João

1. Quantas rãs estão na cortina do quarto do João?



Quarto da irmã



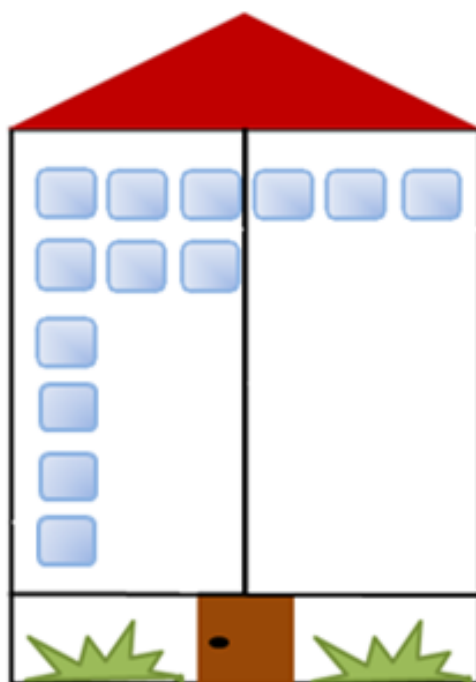
Quarto do irmão



Cozinha

2. A cortina do quarto da irmã do João não está corrida, mas és capaz de dizer quantas flores tem a cortina? Como pensaste?
3. Os morangos da cortina da cozinha não estão todos à vista, mas consegues descobrir quantos são? Explica como fizeste.
4. E como consegues saber quantas joaninhas tem a cortina do quarto do irmão do João?

Problema IV – O Prédio do Manuel

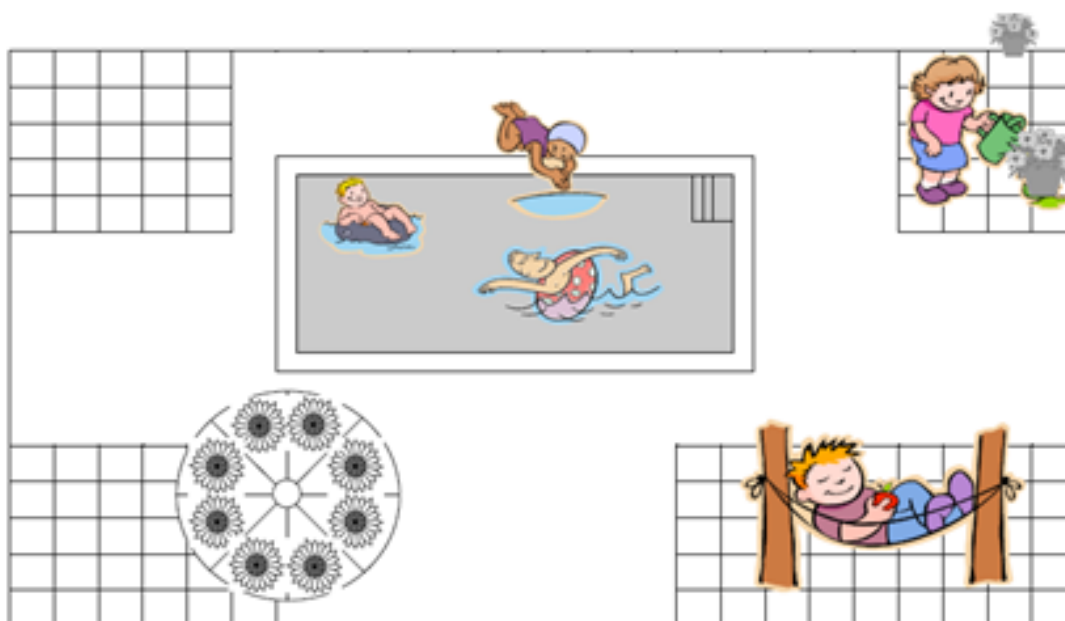


O prédio do Manuel tem seis andares, em cada andar há 2 habitações, cada habitação tem 3 janelas.

Quantas janelas há naquele prédio?

Ao lado o prédio do Manuel existe outro prédio com o mesmo número de janelas, quantas janelas têm os dois prédios?

Problema V – O pátio do João

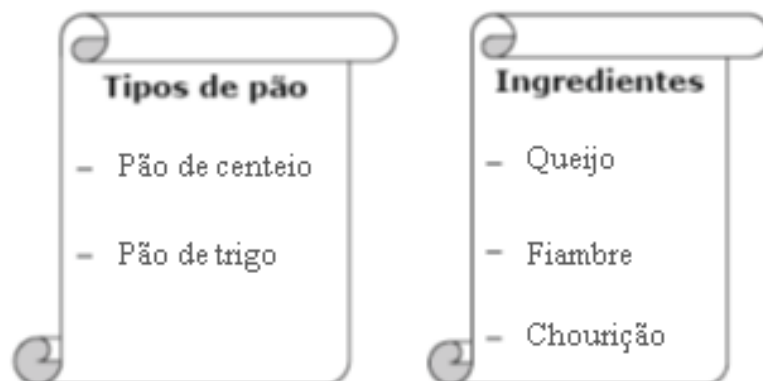


O pátio do João está todo empedrado, descobre quantas pedras existem no empedrado:

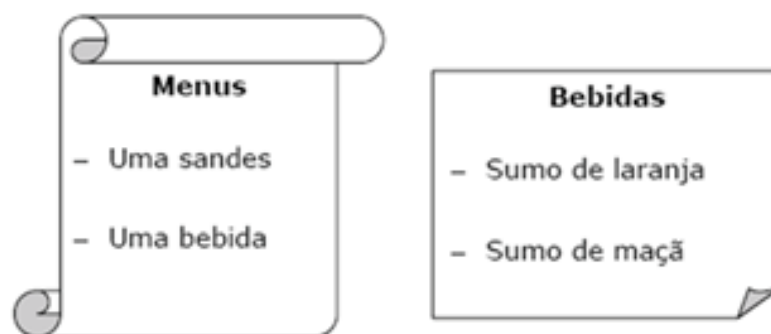
- a) Vazio?
- b) Do chapéu-de-sol?
- c) Da menina a regar as flores?
- d) Do menino da rede?

Explica como pensaste.

Problema VI – Organizando menus



Quantos tipos de sandes se podem fazer utilizando apenas um ingrediente?
Explica como pensaste.



E quantos menus diferentes? Explica como descobriste.

Problema VII – Páscoa doce




Na Páscoa a professora comprou uma caixa cheia de bombons. Uns eram de chocolate de leite e outros eram de chocolate preto. Para além dos bombons simples, havia bombons que tinham diferentes tipos de recheio. Havia bombons com recheio a morango e com recheio a caramelo.

Quantos tipos de bombons diferentes existem na caixa?

Anexo 2 – Quadros de antecipação de estratégias e procedimentos de cálculo

2.1. Antecipação dos procedimentos de cálculo – Problema 1.

	Estratégias	Procedimentos de cálculo
Questão 1	Contagem	<p>Na resolução da primeira questão os alunos podem percorrer caminhos diferentes, uns mais informais do que outros. A maioria, que ainda não está muito familiarizada com os cálculos multiplicativos, realizará representações mais informais, fazendo a representação através de desenhos, simulando os 20 alunos, realizando de seguida a contagem de 5 em 5. Estas representações podem estar organizadas de modo a facilitar a contagem ou podem estar dispersas na folha.</p> 
	Aditivas	<p>Podem recorrer à adição de parcelas iguais, uma vez que esta é a operação que conhecem melhor. Esta operação pode ser representada na horizontal ou na vertical ($5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=100$).</p>
	Multiplicativas	<p>Em alguns casos podem aparecer procedimentos relacionados com a representação horizontal da multiplicação, recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito.</p> <p>$10 \times 5 = 50$ (10 meninos pagam 50 euros) $50 + 50 = 100$ (20 meninos pagam 100 euros, porque 20 é o dobro de 10).</p> <p>Nesta resolução está implícita a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição porque: $20 \times 5 = (10 + 10) \times 5 = 10 \times 5 + 10 \times 5$.</p> <p>Ou, optam por uma resolução, na qual, está implícita a propriedade associativa da multiplicação, ou seja: $20 \times 5 = 2 \times (10 \times 5) = 2 \times 50 = 100$.</p> <p>Penso que possa surgir ainda, a seguinte resolução, tendo implícita a mesma propriedade, colocando em prática a regra de multiplicar por 10, ou seja de acrescentar um zero: $20 \times 5 = 2 \times 5 \times 10 = 10 \times 10 = 100$.</p>
Questão 2	Aditivas	<p>Pode surgir a operação da adição de parcelas iguais, para descobrir o valor pago pela professora e estagiária, ou seja, $6 + 6 = 12$.</p>
	Multiplicativas	<p>Há alunos que podem recorrer à multiplicação através da representação horizontal: $2 \times 6 = 12$.</p>

2.2. Antecipação dos procedimentos de cálculo - Problema 2.

	Estratégias	Procedimentos de cálculo
Questão 1	Contagem	<p>Na resolução deste problema podem surgir estratégias mais informais e pouco eficazes, como por exemplo, a contagem de um em um. Penso que será uma estratégia bastante utilizada pela turma, uma vez que não está familiarizada com a exploração da disposição retangular.</p>
	Aditivas	<p>Pode surgir a adição de parcelas iguais, somando linha a linha ou coluna a coluna. ($3+3+3+3=12$ ou $4+4+4=12$).</p>

	Multiplicativas	Penso que as estratégias multiplicativas surgirão em menos número, no entanto podem aparecer. Assim, pode surgir a multiplicação do número de linhas pelo número de colunas ou vice-versa ($4 \times 3 = 12$ ou $3 \times 4 = 12$).
--	------------------------	---

2.3. Antecipação dos procedimentos de cálculo - Problema 3.

	Estratégias	Procedimentos de cálculo
Questão 1	Contagem	Na resolução desta questão penso que podem surgir estratégias mais informais e pouco eficazes, nomeadamente, a contagem de um em um, a contagem de quatro em quatro (linhas) e a contagem de três em três (colunas).
	Aditivas	No que se refere às estratégias aditivas pode surgir a adição de parcelas iguais, somando linha a linha ou coluna a coluna ($4+4+4=12$ ou $3+3+3+3=12$).
	Multiplicativas	As estratégias multiplicativas terão em conta a disposição retangular da imagem representativa do quarto do João. Pelo que, podem optar por multiplicar o número de rãs em linha pelo número de rãs em coluna ou vice-versa, explorando a propriedade comutativa da multiplicação ($4 \times 3 = 12$ ou $3 \times 4 = 12$).
Questão 2	Contagem	Para a realização desta questão penso que muitos alunos podem optar por desenhar as flores em falta, procedendo de seguida à contagem de um em um. No caso dos alunos que não realizem desenhos e que ainda não dominem estratégias mais complexas, penso que poderão surgir os seguintes procedimentos de contagem de um em um, contagem de três em três (linha) e contagem de quatro em quatro (coluna) da parte da cortina corrida, podendo contar duas vezes as flores presentes nesta parte da cortina.
	Aditivas	No que se refere às estratégias aditivas são vários os procedimentos de cálculo que os alunos podem realizar. Adicionar em coluna ($4+4+4=12$) e, após obter o resultado, somar duas vezes o mesmo valor ($12+12=24$). No caso dos alunos que optem por desenhar as flores em falta ou que as visualizem mentalmente, podem adicionar, igualmente, em coluna ($4+4+4+4+4+4=12$). Adicionar em linha ($3+3+3+3=12$) e, tal como no procedimento de cálculo anterior, após obter o resultado, somar duas vezes ($12+12=24$) ou usar o dobro ($2 \times 12 = 24$). Ou ainda, os alunos que optem por desenhar as flores em falta ou que as visualizem mentalmente, podem adicionar, igualmente, em linha ($6+6+6+6=24$).
	Multiplicativas	Também os procedimentos associados às estratégias poderão ser vários, tendo em conta a disposição retangular da imagem representativa da cortina do quarto da irmã do João. Assim, podem multiplicar o número de flores em linha pelo número de flores em coluna ($3 \times 4 = 12$), ou vice-versa ($4 \times 3 = 12$) e somar o seu resultado duas vezes ($12+12=24$) ou usar o dobro ($2 \times 12 = 24$). Multiplicar o número de flores em linha pelo número de flores em coluna ($4 \times 6 = 24$), ou vice-versa ($6 \times 4 = 12$), podendo ou não recorrer ao desenho das flores em falta, tendo no entanto em consideração a cortina no seu total e não apenas a parte visível.

Questão 3	Contagem	<p>Para a realização desta questão penso que alguns alunos optarão por desenhar os morangos em falta, procedendo de seguida à contagem de um em um.</p> <p>No caso dos alunos que não realizem desenhos e que ainda não dominem estratégias mais complexas, penso que poderão seguir os seguintes procedimentos de contagem: contagem de um em um, contagem dois em dois (coluna) da parte da cortina corrida, podendo contar duas vezes os morangos visíveis nesta parte da cortina.</p> <p>A contagem em linha penso que não surgirá por ser de sete em sete, requerendo que os alunos já conheçam os múltiplos de sete.</p>
	Aditivas	<p>No que se refere à estratégias aditivas são vários os procedimentos de cálculo que os alunos podem realizar:</p> <p>Adicionar em coluna ($2+2+2+2+2+2+2=14$) e, após obter o resultado somar duas vezes o valor ($14+14=28$).</p> <p>Desenhar os morangos em falta ou, no caso dos alunos que os visualizem mentalmente, podem adicionar, igualmente, em coluna, tendo no entanto em consideração todos os elementos decorativos presentes na cortina, visíveis e não visíveis ($4+4+4+4+4+4+4=28$).</p> <p>Adicionar em linha ($7+7=14$) e, após obter o resultado somar duas vezes o mesmo ($14+14=28$).</p> <p>Ou ainda, considerando todos os morangos da cortina (visíveis e não visíveis), os alunos poderão optar por em linha ($7+7+7+7=28$)</p>
	Multiplicativas	<p>Também os procedimentos de cálculo associados às estratégias multiplicativas poderão ser vários, tendo em conta o modelo associado ao contexto desta questão, modelo de disposição retangular.</p> <p>Assim, os alunos poderão multiplicar o número de morangos em linha pelo número de morangos em coluna ($7 \times 2=14$). Após obterem o resultado poderão somar duas vezes ($14+14=28$) ou usar o dobro ($2 \times 14=28$).</p> <p>Poderão ainda, tendo em consideração todos os elementos decorativos da cortina (visíveis e não visíveis) multiplicar, igualmente, o número de morangos em linha pelo número de morangos em coluna ($7 \times 4=28$). Penso que o contrário não surgirá pois os alunos ainda não exploraram a tabuada do 7.</p> <p>Note-se que mesmo recorrendo a estratégias multiplicativas os alunos poderão sentir necessidade de desenhar os morangos em falta.</p>
Questão 4	Contagem	<p>Para a realização desta questão penso que alguns alunos poderão optar por desenhar as joaninhas em falta, procedendo de seguida à contagem de um em um.</p> <p>Para além da contagem de um em um, pode surgir a contagem de quatro em quatro (linha/coluna), podendo contar duas vezes as joaninhas presentes nesta parte da cortina, caso não optem por desenhar as joaninhas não visíveis.</p>
	Aditivas	<p>No que se refere às estratégias aditivas os alunos podem optar por adicionar $4+4+4+4=16$, tendo em consideração apenas os elementos visíveis, somando de seguida o seu resultado duas vezes ($16+16=32$) ou usando o dobro ($2 \times 16=32$).</p> <p>Caso optem por desenhar as joaninhas em falta ou visualizem-nas mentalmente, poderão adicionar em coluna ($4+4+4+4+4+4+4+4=32$) ou em linha ($8+8+8+8=32$).</p>

	Multiplicativas	<p>Tendo em consideração o modelo associado a esta questão, disposição retangular, os alunos poderão optar por:</p> <p>Considerar apenas metade da cortina e multiplicar o número de joaninhas em coluna pelo número de joaninhas em linha, ou vice-versa ($4 \times 4 = 16$). Em seguida, soma duas vezes o resultado obtido ($16 + 16 = 32$) ou usa o dobro ($2 \times 16 = 32$).</p> <p>Ou, uma vez que a imagem ilustrativa da cortina permite saber o número de joaninhas existentes em linha e em coluna, os alunos poderão multiplicar o número de joaninhas em linha pelo número de joaninhas em coluna ($8 \times 4 = 32$). Penso que o inverso não surgirá pois os alunos ainda não exploraram a tabuada do 8.</p>
--	------------------------	--

2.4. Antecipação dos procedimentos de cálculo - Problema 4.

	Estratégias	Procedimentos de cálculo
Questão 1	Contagem	Os alunos podem optar por desenhar as janelas em falta ou imaginá-las e contá-las de um em um. Além disso, podem surgir contagens de três em três ou de seis em seis.
	Aditivas	<p>Uma vez que o prédio está dividido ao meio os alunos poderão adicionar parcelas iguais:</p> <p>Os alunos poderão optar por adicionar o número de janelas de habitação em habitação ($3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 36$).</p> <p>Poderão optar por adicionar o número de janelas existentes em cada fila ou em cada coluna ($6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36$).</p> <p>Além destas duas formas, os alunos poderão optar por contar ou adicionar o número de janelas existentes em metade do prédio ($6 + 6 + 6 = 18$) e, de seguida, somar duas vezes o resultado ($18 + 18 = 36$).</p>
	Multiplicativas	<p>Os alunos que recorrem à multiplicação poderão percorrer caminhos diferentes na medida em que alguns alunos poderão:</p> <p>Multiplicar o número de habitações pelo número de andares ($2 \times 6 = 12$) identificando o número total de habitações. Após a sua identificação, procedem à multiplicação do número de janelas por cada habitação pelo número de habitações ($12 \times 3 = 36$).</p> <p>Por outro lado, poderão optar por identificar o número de janelas existentes em em linha (andar) e multiplicar pelo número de janelas existentes em coluna, ou vice-versa (6×6).</p> <p>Pode ainda surgir, alunos que optem por multiplicar o número de janelas existentes em coluna pelo número de janelas existentes em linha ($6 \times 3 = 18$), ou vice-versa ($3 \times 6 = 18$), tendo em consideração apenas metade do prédio. Após obterem o resultado poderão somar duas vezes esse valor ($18 + 18 = 36$) ou usar o dobro (2×18).</p>
Questão 2	Contagem	<p>Penso que alguns alunos recorrerão à representação de mais um prédio através do desenho, de modo a terem uma visão concreta das janelas dos dois prédios. Posto isto, julgo que alguns alunos procederão, novamente, à contagem um em um das janelas, embora esta estratégia seja pouco eficaz.</p> <p>Outros poderão desenhar as janelas de um prédio, efetuar a contagem de um em um e no final adicionar duas vezes o número de janelas de um prédio ($36 + 36 = 72$).</p>

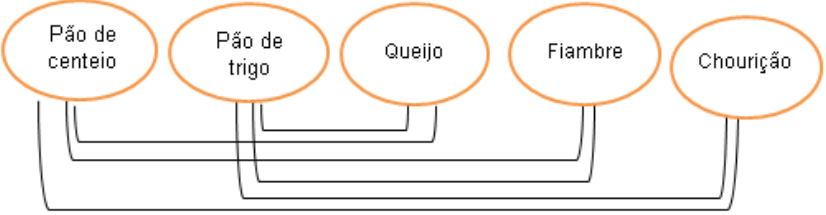
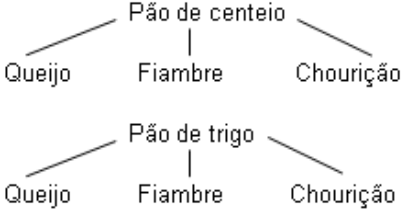
	Aditivas	Penso que esta será a estratégia mais utilizada na resolução desta questão dada a grandeza dos números envolvidos. Assim, penso que os alunos partirão do valor descoberto na questão anterior (número total de janelas existentes no prédio do Manuel) e adicionarão duas vezes ($36+36=72$).
	Multiplicativas	Partindo do resultados obtidos na resolução da questão anterior, penso que os alunos poderão recorrer ao uso do dobro para descobrir o número total de janelas dos dois prédios ($2 \times 36=72$). Embora seja pouco previsível os alunos também poderão fazer $6 \times 12=72$ ou $12 \times 6=72$ para descobrir o número de janelas dos dois prédios. Para efetuar este cálculo os alunos poderão usar, intuitivamente, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição pois, $6 \times 12=6 \times 6+6 \times 6$.

2.5. Antecipação dos procedimentos de cálculo - Problema 5.

	Estratégias	Procedimentos de cálculo
Questão 1	Contagem	Na resolução desta questão penso que podem surgir estratégias mais informais e pouco eficazes, nomeadamente, a contagem de um em um e a contagem de cinco em cinco (linha e coluna).
	Aditivas	No que se refere às estratégias aditivas pode surgir a adição de parcelas iguais, somando linha a linha ou coluna a coluna ($5+5+5+5+5=25$).
	Multiplicativas	Penso que a estratégia associada à multiplicação terá em conta a disposição retangular da imagem representativa do pátio empedrado vazio. Podendo surgir a multiplicação $5 \times 5=25$.
Questão 2	Contagem	Para a realização desta questão penso que vários alunos optarão por desenhar as pedras em falta, procedendo à contagem de um em um.
	Aditivas	No que se refere às estratégias aditivas penso que os alunos poderão optar por dois procedimentos, a adição de parcelas iguais em coluna ($5+5+5+5+5+5=30$), ou em linha ($6+6+6+6+6=30$), recorrendo ou não ao desenho das pedras em falta.
	Multiplicativas	Os procedimentos de cálculo associados às estratégias de multiplicação, adotados pelos alunos, poderão ser dois, tendo em conta a disposição retangular do pátio representado na imagem. Pelo que, podem optar por multiplicar o número de pedras em coluna pelo número de pedras em linha, ou vice-versa ($5 \times 6=30$ ou $6 \times 5=30$). Podendo ou não recorrer ao desenho das pedras em falta.
Questão 3	Contagem	Para a realização desta questão penso que alguns alunos optarão por desenhar as pedras em falta, procedendo de seguida à contagem de um em um.
	Aditivas	No que se refere às estratégias aditivas penso que os alunos poderão optar pela adição de parcelas iguais, em coluna ($5+5+5+5=20$), ou em linha ($4+4+4+4+4=20$).
	Multiplicativas	Penso que no que se refere às estratégias associadas à multiplicação, estas surgirão em maior número, pois a imagem permite perceber qual o número total de pedras em linha e número total de pedras em coluna que compõem este pátio. Deste modo, os alunos poderão optar por multiplicar o número de pedras em linha pelo número de pedras em coluna, ou vice-versa ($4 \times 5=20$ ou $5 \times 4=20$).

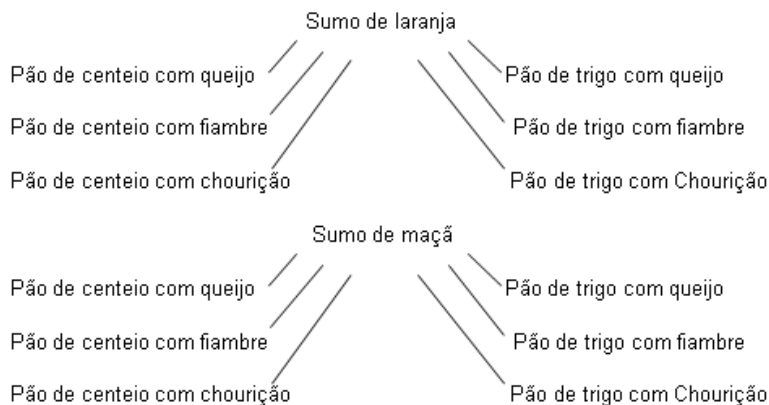
Questão 4	Contagem	Para a realização desta questão penso que vários alunos optarão por desenhar as pedras em falta, procedendo à contagem de um em um.
	Aditivas	No que se refere às estratégias aditivas penso que os alunos poderão optar pela adição de parcelas iguais em coluna ($5+5+5+5+5+5+5+5+5=45$).
	Multiplicativas	Penso que no que se refere às estratégias associadas à multiplicação, estas surgirão em maior número, pois a imagem permite perceber qual o número de pedras em linha e o número de pedras em coluna que compõem este pátio. Assim, penso que os alunos poderão optar por multiplicar o número de pedras em linha pelo número de pedras em coluna ($5 \times 9 = 45$). Ou, poderão ter reparado na relação entre o 1.º, 3.º e 4.º empedrado, fazendo $9 \times 5 = 5 \times 5 + 4 \times 5 = 25 + 20 = 45$ ou seja $9 \times 5 = (5+4) \times 5$. Explorando desta forma, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

2.6. Antecipação dos procedimentos de cálculo - Problema 6.

Questão 1		Estratégias	Procedimentos de cálculo
Contagem		<p>Na resolução desta questão os alunos poderão seguir caminhos muito diversificados, no que se refere ao uso de estratégias de contagem. Assim, alguns poderão recorrer à realização de desenhos, de modo a simular os vários tipos de sandes. Outros poderão optar pela construção de esquemas que facilitem a contagem do número de diferentes tipos de sandes.</p>  <p>Outro esquema que pode surgir é o diagrama em árvore.</p>  <p>Alguns alunos poderão optar por usar as palavras, de modo a representar e associar os diferentes tipos de pão com os diferentes ingredientes, formando, desta forma, as várias sandes possíveis de fazer.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pão de centeio com queijo; - Pão de centeio com fiambre; - Pão de centeio com chouriço; - Pão de trigo com queijo; - Pão de trigo com fiambre; - Pão de trigo com chouriço. 	
Multiplicativas			O procedimento multiplicativo que penso que possa surgir é a multiplicação do tipo de pão (centeio e trigo) pelos diferentes ingredientes (queijo, fiambre e chouriço), ou vice-versa ($2 \times 3 = 6$ ou $3 \times 2 = 6$).

Contagem

Tal como na questão anterior, os alunos poderão seguir diferentes caminhos, no que se refere ao uso de estratégias de contagem. Alguns alunos poderão recorrer à realização de desenhos, simulando e associando os vários tipos de sandes aos diferentes tipos de sumo. Outros poderão optar pela construção de um diagrama em árvore, facilitando a contagem dos diferentes menus que podem existir.



Outro caminho que poderão seguir é o uso das palavras para representar e associar os diferentes tipos de sandes aos diferentes tipos de sumo.

- Pão de centeio com queijo e sumo de laranja;
- Pão de trigo com queijo e sumo de laranja;
- Pão de centeio com fiambre e sumo de laranja;
- Pão de trigo com fiambre e sumo de laranja;
- Pão de centeio com chouriço e sumo de laranja;
- Pão de trigo com chouriço e sumo de laranja;
- Pão de centeio com queijo e sumo de maçã;
- Pão de trigo com queijo e sumo de maçã;
- Pão de centeio com fiambre e sumo de maçã;
- Pão de trigo com fiambre e sumo de maçã;
- Pão de centeio com chouriço e sumo de maçã;
- Pão de trigo com chouriço e sumo de maçã.

Multiplicativas

O procedimento multiplicativo que poderá surgir é a multiplicação do número de tipos de sumo (laranja e maçã) pelo número de diferentes tipos de sandes (pão de centeio com queijo, pão de centeio com fiambre, pão de centeio com chouriço, pão de trigo com queijo, pão de trigo com fiambre e pão de trigo com chouriço), ou vice-versa ($2 \times 6 = 12$ ou $6 \times 2 = 12$).

2.7. Antecipação dos procedimentos de cálculo - Problema 7.

Questão 1	Estratégias	Procedimentos de cálculo											
	Contagem	<p>Tal como no problema 6 penso que os alunos poderão seguir diferentes caminhos no que se refere ao uso de estratégias de contagem. Assim, alguns alunos poderão recorrer à realização de desenhos. Outros poderão optar por utilizar as palavras, representando e associando os diferentes tipos de chocolate aos diferentes tipos de recheio.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Chocolate de leite simples; - Chocolate de leite com recheio de morango; - Chocolate de leite com recheio de caramelo; - Chocolate preto simples; - Chocolate preto com recheio de morango; - Chocolate preto com recheio de caramelo. <p>Poderá surgir a representação dos diferentes chocolates através de um esquema:</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>Poderão optar pela construção de um esquema em diagrama de árvore:</p> <div style="text-align: center;"> <pre> Leite / \ / \ Sem recheio Recheio a Morango Recheio a Caramelo Preto / \ / \ Sem recheio Recheio a Morango Recheio a Caramelo </pre> </div> <p>Alguns alunos poderão optar por organizar os dados numa tabela:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Chocolates</th> <th>Leite</th> <th>Preto</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Sem recheio</td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">X</td> </tr> <tr> <td>Recheio a Morango</td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">X</td> </tr> <tr> <td>Recheio a Caramelo</td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">X</td> </tr> </tbody> </table>	Chocolates	Leite	Preto	Sem recheio	X	X	Recheio a Morango	X	X	Recheio a Caramelo	X
Chocolates	Leite	Preto											
Sem recheio	X	X											
Recheio a Morango	X	X											
Recheio a Caramelo	X	X											
Multiplicativas	<p>No que se refere ao uso de procedimentos multiplicativos penso que os alunos poderão recorrer à multiplicação do número de tipos de chocolate (leite e preto) pelo diferente tipo de recheio (simples, recheio de morango e recheio de caramelo), ou vice-versa ($2 \times 3 = 6$ ou $3 \times 2 = 6$).</p>												