



# ESCOLA NAVAL



talant de bi-faire

**Beatriz Manuel Evangelista Paiva**

Caracterização de fontes hidrotermais oceânicas com  
recurso a técnicas acústicas

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares  
Navais, na especialidade de Marinha**



**Alfeite  
2018**





# ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



**Beatriz Manuel Evangelista Paiva**

*Caracterização de fontes hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas  
acústicas*

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na  
especialidade de Marinha**

**Orientação de: Professor Mário Gatta**

**Co-orientação de: CMG Lopes da Costa**

**O Aluno Mestrando**

Beatriz Manuel Evangelista Paiva

**O Orientador**

Mário Gatta

**ASPOF Evangelista Paiva**

**Prof. Mário Gatta**



## **Epígrafe**

*“Se tiver o hábito de fazer as coisas com alegria, raramente encontrará situações difíceis.”*

*Robert Baden-Powell*



## **Dedicatória**

Aos meus pais, que desde o início sempre me fizeram acreditar que tudo é possível e sempre me apoiaram nas minhas decisões.

Aos meus avós, por sempre terem sido um apoio tão grande para nós e por se orgulharem sempre do mais pequeno trabalho.



## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu Orientador, Professor Mário Gatta, pelo acompanhamento, auxílio prestado e interesse demonstrado durante todo o período de realização da dissertação.

Agradeço também ao meu Coorientador, Comandante Lopes da Costa, pelo apoio e disponibilidade.

Agradeço ao Professor Miguel Moreira, pelo apoio prestado e partilha de conhecimento transmitida.

Aos meus amigos e camaradas, que durante os meus cinco anos de permanência na Escola Naval nunca deixaram de ser um apoio e sempre estiveram presentes em todos os momentos bons e menos bons.

Ao comando, câmara de oficiais e guarnição do NRP Sagres, navio no qual efetuei o meu estágio de embarque e me apoiou e ajudou a crescer como pessoa e como Oficial de Marinha.

À minha família deixo o maior agradecimento, pelo apoio, pelo carinho, pela saudade e, acima de tudo por saber que sempre terei um porto seguro. Muito obrigada.



## **Resumo e palavras-chave**

O oceano é um tema de interesse e de descoberta infinito. O seu estudo é fundamental, não só no meio onde nos inserimos mas também para a população em geral. Este trabalho debruça-se sobre uma ínfima parte do oceano, que são as fontes hidrotermais. Estas, são descargas de água a alta temperatura que se desenvolvem a partir do fundo do oceano. São uma grande fonte de biodiversidade e interesse, no entanto são ainda um pouco desconhecidas.

Baseados em estudos anteriores, optámos por aprofundar o nosso estudo no comportamento da trajetória do raio sonoro no interior destas fontes. Numa primeira parte deste trabalho, fizemos uma revisão que nos ajudou a entender melhor, não só as fontes hidrotermais, como também o comportamento do som no oceano.

De seguida, introduzimos duas equações da velocidade do som já conhecidas, para avaliar o comportamento do raio sonoro no interior das fontes, tendo em conta as alterações nos parâmetros da água. Os parâmetros estudados no presente trabalho foram: a temperatura, a profundidade e a salinidade, sendo que parece poder afirmar-se, que aquele que apresenta maior influência é a temperatura. De acordo com os estudos iniciais, foram construídos alguns modelos com o objetivo de obtermos uma visão inicial dos resultados pretendidos.

Importa referir, que após a leitura aprofundada sobre esta matéria, baseada em investigações anteriores, considerámos a tomografia acústica, ou seja definimos que não só estudaríamos a trajetória do raio sonoro ao longo da fonte mas, também, os tempos efetuados pelo mesmo. Com isto, sugerimos a colocação de emissores e recetores ao redor da fonte, o que nos permitiu observar o comportamento das trajetórias. Isto porque são introduzidos parâmetros iniciais como por exemplo, a posição do emissor e o ângulo de emissão do mesmo.

Os resultados deste trabalho são efetuados através da ferramenta MATLAB e apresentados em gráficos que contêm os desenhos das trajetórias e os tempos calculados das mesmas.

**Palavras-chave:** Acústica, Oceano, Fonte Hidrotermal, Refração, Trajetória.

## **Abstract**

The study of the ocean is a theme of infinite interest and discovery. Not only for navy officials but also for the population in general. This work focuses on a tiny part of the ocean, that which concerns the recently discovered hydrothermal vents. These are discharges of very hot water that escape through crevices from the bottom of the ocean. They are a great source of biodiversity and interest, but still largely unstudied as regards their morphology, composition, possible economic interest and so on.

Having reviewed some previous recent studies, we choose to deepen our study on the behaviour of the sound ray trajectories through these vents.

In a first part of this work, we did a review that helped us to understand better, the propagation of sound, with ray approximation, through pre-defined temperature field modelling simple deep water hydrothermal vent.

Next, we introduce some known sound velocity equations in order to be able to evaluate the behaviour of the sound rays due to changes in the water parameters. Such as temperature, depth and salinity. The one that has greater influence in this case is the temperature. With these initial studies, some models were constructed so that we had an initial assessment of what one should observe in the field experiments.

We also considered besides the trajectory of the sound ray through the vents, the times of their propagation between emitter and receiver properly placed around the source. The different trajectories and propagation times, vary as we choose different initial positions of the emitter and of the angle of emission of the ray relative to the vent, but always in a horizontal plane.

The results of this work are obtained by solving a nonlinear ODE (ordinary differential equation) with MATLAB and are shown in various graphs containing drawings of the trajectories and their calculated times.

**Key words:** Acoustic, Ocean, Hydrothermal Vent, Refraction, Trajectory.

## Índice

|  |      |
|--|------|
| Epígrafe .....   | v    |
| Dedicatória.....   | vii  |
| Agradecimentos .....   | ix   |
| Resumo e palavras-chave .....  | xi   |
| Abstract.....  | xii  |
| Índice .....   | xiii |
| Índice de figuras .....  | xvi  |
| Índice de tabelas .....  | xix  |
| Lista de abreviaturas, siglas e acrónimos .....                      | xx   |
| Capítulo 1 .....   | 1    |
| Introdução.....  | 1    |
| 1.1. Enquadramento geral .....                                       | 1    |
| 1.2. Objetivos e metodologia utilizada .....                         | 2    |
| 1.3. Pertinência do tema.....  | 4    |
| 1.4. Estrutura da dissertação .....                                  | 5    |
| Capítulo 2 .....   | 7    |
| Enquadramento teórico.....   | 7    |
| 2.1. Fontes hidrotermais.....  | 7    |
| 2.2. Propagação do som .....   | 11   |
| 2.2.1. Velocidade do som na água .....                               | 11   |
| 2.2.2. Ondas sonoras.....  | 14   |
| 2.2.3. Raios sonoros.....  | 15   |
| 2.2.4. Ondas sonoras vs raios sonoros .....                          | 25   |
| 2.3. Refração do som .....   | 28   |
| Capítulo 3 .....   | 33   |
| Exposição e interpretação de estudos realizados no passado .....     | 33   |
| Capítulo 4 .....   | 45   |
| Desenvolvimento: Refração em estruturas cilíndricas (profundas)..... | 45   |
| 4.1. Cilindro homogéneo.....   | 45   |
| 4.1.1. Estudo do gráfico da velocidade do som na água.....           | 45   |
| 4.1.2. Estudo da propagação do som no cilindro.....                  | 47   |

|  |     |
|--|-----|
| 4.2. Várias camadas cilíndricas.....   | 48  |
| 4.3. Cilindro com variação contínua de $c(T)$ .....  | 57  |
| Capítulo 5 .....   | 59  |
| Desenvolvimento de resultados para diferentes $c(T(x,y))$ a partir de meios computacionais (MATLAB)..... | 59  |
| 5.1. Aplicação do princípio de Fermat a diferentes equações para trajetórias do raio sonoro.....         | 59  |
| 5.2. Determinação da equação da temperatura .....  | 66  |
| 5.3. Construção dos gráficos das trajetórias do raio sonoro e cálculo de tempos associados .....         | 70  |
| 5.3.1. Para $c(x,y) = \sqrt{kR\sqrt{T(x,y)}}$ .....  | 76  |
| 5.3.2. Para $c(x,y) = \alpha + \beta T(x,y) + \gamma T^2(x,y) + \epsilon T^3(x,y)$ .....                 | 80  |
| 5.3.3. Para a expressão de Del Grosso.....   | 84  |
| Capítulo 6 .....   | 91  |
| Análise dos gráficos criados computacionalmente.....   | 91  |
| 6.1. Interpretação dos gráficos de temperatura .....   | 91  |
| 6.2. Interpretação dos gráficos da trajetórias e dos tempos correspondentes .....                        | 92  |
| Capítulo 7 .....   | 97  |
| Conclusões e Recomendações .....   | 97  |
| Conclusões do trabalho realizado .....   | 97  |
| Recomendações para trabalhos futuros .....   | 101 |
| Referências bibliográficas .....   | 103 |
| Apêndices .....  | 107 |
| Apêndice 1 – Código dos gráficos criado para apresentação dos diferentes $c(T)$ ....                     | 107 |
| 1.1. Del Grosso a variar a temperatura .....   | 107 |
| 1.2. Del Grosso a variar a profundidade.....   | 108 |
| 1.3. Outras equações de $c(T)$ .....   | 110 |
| Apêndice 2– Dedução das fórmulas para a trajetória do raio sonoro .....                                  | 112 |
| 2.1. Princípio de Fermat para raios sonoros .....  | 112 |
| 2.2. Caso 1 para $c(x,y)$ .....  | 114 |
| 2.3. Caso 2 para $c(x,y)$ .....  | 115 |
| 2.4. Caso 3 para $c(x,y)$ .....  | 115 |
| Apêndice 3 – Código criado para apresentação dos gráficos do comportamento das temperaturas.....         | 115 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.1. Para as temperaturas vistas de cima .....   | 115 |
| 3.2. Para as temperaturas vistas de lado .....   | 117 |
| Apêndice 4 – Códigos criados para apresentação dos gráficos do comportamento das trajetórias e cálculo dos respetivos tempos ..... | 118 |
| 4.1. A variar o ângulo de emissão .....  | 118 |
| 4.2. Pós-tratamento de 5.1. ....   | 126 |
| 4.3. A variar a posição inicial do emissor.....  | 130 |
| 4.4. Pós-tratamento de 5.3 .....   | 138 |

## Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Localização de fontes hidrotermais nos Açores entre 1992 e 2013. ....   | 4  |
| Figura 2 – Localização de fontes hidrotermais (2010). ....   | 8  |
| Figura 3 - Modelos pluma hidrotermal. ....   | 9  |
| Figura 4 - Modelo de formação de fonte hidrotermal. ....   | 9  |
| Figura 5 – Exposição de elementos de uma fonte hidrotermal. ....   | 10 |
| Figura 6 – Volume que envolve um limite de raios com áreas limite S1 e S1 separadas por uma distância de $\Delta h$ ao longo dos raios. ....   | 21 |
| Figura 7 – Representação do vetor unitário $s$ . ....  | 23 |
| Figura 8 - Visualização em 3D de plumas hidrotermais. ....   | 27 |
| Figura 9 - Variação da velocidade do som apenas com a profundidade segundo o modelo de Del Grosso. ....  | 29 |
| Figura 10 - Modelo refração ( $c_1 > c_2$ ) ; Modelo refração ( $c_1 < c_2$ ). ....  | 30 |
| Figura 11 – Situação de limite do raio refletido rasante com $c_1 < c_2$ . ....  | 31 |
| Figura 12 – Representação 3D de plumas hidrotermais. ....  | 35 |
| Figura 13 – Representação da frequência de Sully e Puffer. ....  | 35 |
| Figura 14 – Representação de dois campos de temperatura (à esquerda, com um pico de temperatura e à direita com dois); (a) distribuição das temperaturas; (b) distribuição radial; (c) ondas sonoras. .... | 39 |
| Figura 15 – Distribuição presumida da temperatura (esquerda) e a distribuição medida da temperatura (direita). ....  | 40 |
| Figura 16 – Representação 3D do campo térmico através do método TLS a partir de dados reais. ....  | 41 |
| Figura 17 – Distribuição da temperatura através do método TLS a partir de dados reais. ....  | 42 |
| Figura 18 – Reconstrução da temperatura em 3D. ....  | 43 |
| Figura 19 – Isotérmicas da reconstrução do campo da temperatura. ....  | 44 |
| Figura 20 – Gráfico da velocidade do som $c(T,S,P)$ , segundo modelo de Del Grosso. .  | 46 |
| Figura 21 – Gráfico da velocidade do som $c(T)$ , segundo modelo $c = k \cdot R \cdot T$ . ....  | 46 |
| Figura 22 – Gráfico da velocidade do som $c(T)$ , segundo modelo $cT = a + bT + cT^2 + dT^3$ . ....  | 47 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 23 – Propagação do som com apenas uma variação de $c$ .   | 48 |
| Figura 24 – Propagação do som com mais que uma variação de $c$ .   | 49 |
| Figura 25 – Fonte hidrotermal com transmissor (TX) e recetor (RX) – Aumento da velocidade do som para o centro da fonte.   | 50 |
| Figura 26 – Fonte hidrotermal com transmissor (TX) e recetor (RX) – Aumento da temperatura para o centro da fonte.   | 51 |
| Figura 27 – Cálculo do ângulo do raio refratado em meios planos.   | 52 |
| Figura 28 – Coordenadas polares.   | 53 |
| Figura 29 – Visualização da trajetória do raio sonoro de cima.   | 55 |
| Figura 30 – Projeção da trajetória do raio sonoro para um gráfico de coordenadas $x$ e $y$ , para facilitar o cálculo em coordenadas polares.  | 55 |
| Figura 31 – Exemplo da trajetória de um raio sonoro para auxílio da introdução o princípio de Fermat.  | 60 |
| Figura 32 – Visualização lateral e de cima da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal em $z=0$ m.  | 69 |
| Figura 33 – Visualização lateral e de cima da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal em $z=3$ m.  | 69 |
| Figura 34 – Visualização lateral e de cima da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal em $z=6$ m.  | 70 |
| Figura 35 – Visualização lateral e de cima da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal em $z=9$ m.  | 70 |
| Figura 36 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 0$ m em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ . | 76 |
| Figura 37 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 3$ m em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ . | 77 |
| Figura 38 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 6$ m em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ . | 78 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 39 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 9\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 79 |
| Figura 40 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 0\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 80 |
| Figura 41 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 3\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 81 |
| Figura 42 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 6\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 82 |
| Figura 43 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 9\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 83 |
| Figura 44 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 0\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 84 |
| Figura 45 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 3\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 85 |
| Figura 46 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 6\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 86 |
| Figura 47 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em $z = 9\text{m}$ em que há variação da posição do emissor (a) $TX=0$ ; (b) $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c) $\theta=0^\circ$ ; (d) $\theta=30^\circ$ ..... | 87 |
| Figura 48– Cálculo do tempo da trajetória do raio sonoro em linha reta. ....   | 88 |
| Figura 49 – Comparação dos raios de trajetória em $z=3\text{ m}$ para ambas as equações (à esquerda c1; à direita c2). ....  | 94 |

## **Índice de tabelas**

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 - Comparação de equações da velocidade do som.....                         | 14 |
| Tabela 2 - Comparação das ondas sonoras com raios sonoros.....                      | 26 |
| Tabela 3 – Cálculo dos tempos de trajetória efetuados pelo estudo de Cai, 2012..... | 89 |

## **Lista de abreviaturas, siglas e acrónimos**

atm – atmosfera

$c$  – velocidade do som em m/s

CINAV – centro de investigação naval

DSV – deep submergence vehicle

Hz – hertz

km – quilómetros

m – metros

NASA – national aeronautics and space administration

ODE – Ordinary differential equation

$P$  – pressão em atmosferas

ppm – partes por milhão

QC – questão central

QD – questão derivada

RX – recetor

$S$  – salinidade em ppm

$T$  – temperatura em graus celcius

TLS – “total least square”

TOF – “time of flight”

TOT – “time of travel”

TX – transmissor

$z$  – profundidade em km

2D – duas dimensões

3D – três dimensões

## **Capítulo 1**

### **Introdução**

#### **1.1. Enquadramento geral**

De há uns anos para cá, tem surgido o interesse do estudo de fontes hidrotermais oceânicas devido ao facto de estas, para além de terem características diferentes da restante água do oceano, serem fontes de minerais e nutrientes, o que leva à formação e desenvolvimento de minúsculos organismos que não têm contacto com a luz solar, e que acabam por habitar nas mesmas. Ainda assim, importa referir, que permanece o desconhecimento sobre a proveniência remota destes organismos.

Para além das detetadas e existentes na Terra, foram também identificadas por cientistas da NASA (National Aeronautics and Space Administration), em 2005, fontes hidrotermais no leito do oceano global sob a crosta congelada de Encélado, uma das luas de Saturno. Estas foram encontradas pela Sonda *Cassini*, sendo este um lugar um local onde existe a hipótese remota de haver vida, pois existem vestígios de vapor de água hidrogénio e dióxido de carbono da sua constituição (Oliveira, 2017, para.2). A mesma agência afirmou, também observar numa das luas de Júpiter, Europa, uma atividade semelhante à de Encélado. Esta atividade foi detetada pelo telescópio *Hubble*, no entanto o estudo da mesma neste planeta tem sido mais complicado, devido à dificuldade de deteção das plumas (Ferreira, 2016, para.3).

As fontes hidrotermais terrestres encontram-se distribuídas por zonas vulcânicas ativas onde há normalmente movimento das placas tectónicas. Também, podemos encontrá-las em bacias oceânicas ou *hotspots*. Como referido, anteriormente, apenas são conhecidas 400 de cerca das 1300 fontes existentes (Beaulieu, 2015, para.4).

De 1992 a 2013 foram encontrados sete campos hidrotermais ao redor dos Açores. Deste modo, compete-nos, também ter o conhecimento sobre as características, comportamentos e desenvolvimento, das mesmas. Isto porque, se estudadas e bem conhecidas, podem ser um foco de interesse e estudo para o desenvolvimento das áreas da ciência, como por exemplo, biologia, geologia, oceanografia e outras relacionadas, no nosso país.

Assim, foi proposta a análise, neste estudo, de alguns dos comportamentos existentes nestas fontes, nomeadamente, a variação da velocidade do som dentro das fontes, pois as variáveis com maior influência, temperatura, salinidade e profundidade são objetos de estudo muito característicos, das mesmas. O percurso e a alteração de raios sonoros constituiriam um importante meio de diagnóstico da distribuição da temperatura ao longo da coluna quente, que se vai dissipando em altura.

O estudo destas fontes pode revelar-se um processo complicado, pois estas localizam-se em grandes profundidades. No entanto, foram já efetuadas algumas investigações, quer em ambientes simulados (aquecendo a água de forma semelhante ao que acontece nas fontes), quer em meios reais. Esses estudos ajudar-nos-ão na realização deste trabalho pois fornecem-nos algumas informações e dados relevantes e essenciais.

## **1.2. Objetivos e metodologia utilizada**

Uma dissertação é um trabalho científico que é apresentado no final de um curso, no presente caso, para obtenção do grau de mestre. Tem, deste modo, um carácter didático, por ser uma espécie de introdução de investigação. Sendo então um estudo teórico, mas de natureza reflexiva, requer três condições: sistematização, ordenação e interpretação de dados (Marconi, 2008, p.162).

A metodologia de investigação é um processo de escolha da estratégia a utilizar na investigação que condiciona a forma como se irá processar todo o trabalho. A seleção da metodologia a utilizar numa dissertação tem como base os objetivos da mesma, assim como os resultados que se pretendem obter (Sousa, 2014, p.53).

Os métodos (abordagem) são o caminho a seguir, isto é, os passos a dar, seguindo uma ordem específica para obter determinados fins. As técnicas (procedimentos operacionais) são o material utilizado que nos permitem realizar o método (Carvalho, 2009, p.83).

De acordo com, o presente trabalho parece poder afirmar-se, que este tem como objetivo o aprofundamento e organização de factos e noções já existentes. Deste modo partiremos de uma questão central. A partir desta, foram criadas quatro questões derivadas, que servem como caminho de chegada à questão principal.

No incluir destas questões, há temas acerca dos quais já houve estudos anteriormente efetuados e portanto, este será um caminho em que será construída uma reunião de ideias das quais serão tiradas, posteriormente, conclusões.

Esta dissertação tem, como intuito o estudo das fontes hidrotermais baseado em técnicas acústicas. Importa referir que já existem alguns estudos sobre as mesmas, no entanto o que se pretende, com este trabalho é concentrarmo-nos na propagação do raio sonoro e no seu comportamento em ambientes como os das fontes hidrotermais, em ambientes com temperaturas muito elevadas e a grandes profundidades. A demonstração deste comportamento será feita através de gráficos elaborados com auxílio da ferramenta MATLAB. A iniciativa para a realização deste tema surgiu com a necessidade de elaborar um meio computacional para o estudo das fontes hidrotermais.

Deste modo, parte-se da seguinte questão central:

QC. Quais são as características físicas das fontes hidrotermais que se poderão estudar, utilizando para tal, técnicas acústicas?

Derivadas à questão central, surgiram também diversas questões derivadas:

QD1. Quais as características gerais de uma fonte hidrotermal?

QD2. Qual o comportamento geral do raio sonoro no meio oceânico?

QD3. Quais as possíveis perturbações do raio sonoro no oceano?

QD4. Qual a aplicação do estudo do raio sonoro nas fontes hidrotermais?

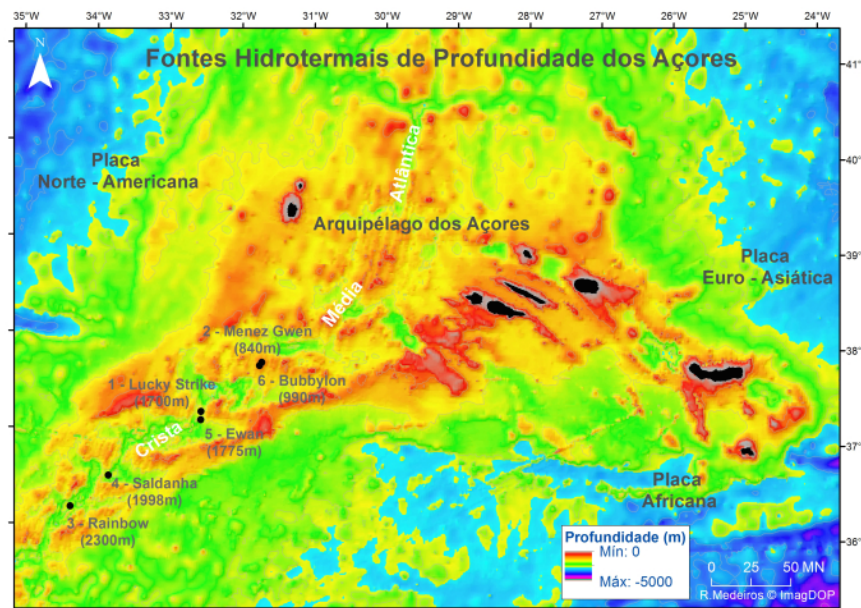
Ao longo do desenvolvimento desta dissertação, serão adquiridos e expostos conhecimentos e, desenvolvidas e validadas hipóteses que consolidem e enriqueçam teorias já existentes relativas ao tema. Inicialmente, debruçar-nos-emos sobre artigos científicos e estudos já existentes para podermos elaborar uma introdução teórica consistente e rica. Seguidamente, com base na descrição teórica adequada será elaborado um código em MATLAB que permita mostrar os resultados obtidos através de gráficos onde seja possível a visualização do comportamento da trajetória do raio sonoro no meio pretendido. Com estes gráficos poderemos, por fim, fazer uma análise em que haja uma explicação daquilo que pretendíamos obter e concluir.

A questão central e as questões derivadas serão, após todo o trabalho realizado, respondidas nas conclusões.

### 1.3. Pertinência do tema

Embora o estudo do oceano se venha a desenvolver há vários anos, é ainda um tema que está muito no campo do desconhecido no que toca às fontes hidrotermais e ao seu comportamento. As denominadas fontes são fumarolas de água muito quente, que se encontram a grandes profundidades (que podem ir até aos 6000 m), daí a falta de informação acerca das mesmas.

Como já foi mencionado anteriormente, foram identificadas nas áreas circundantes dos Açores sete fontes hidrotermais. Localizam-se, portanto, numa zona de interesse para o nosso país e deste modo temos toda a vantagem em estudá-las e conhecê-las, para possível aproveitamento num futuro não muito longínquo.



**Figura 1** – Localização de fontes hidrotermais nos Açores entre 1992 e 2013.

(“O que é isso de uma “fonte hidrotermal de profundidade?””,  
<https://blogmarprofundo.wordpress.com/tag/fonte-hidrotermal/>)

Este é um tema de alguma relevância nos estudos que foram desenvolvidos ao longo dos anos, pois é o culminar de algumas matérias e a aquisição de outras novas que possam vir a ser relevantes para o futuro. Também, tendo em conta a instituição em que nos inserimos, que é a Marinha Portuguesa, podemos afirmar que é de grande

importância o estudo do meio em que nos deslocamos e principalmente, onde trabalhamos diariamente. Este é um estudo que não diz tanto respeito à parte operacional da Marinha Portuguesa mas sim à área mais científica, pois esta também é da nossa responsabilidade e do nosso interesse.

Importa salientar, que esta dissertação enquadra-se nos trabalhos decorrentes da participação da Escola Naval, através do CINAV, nos projetos DEEPFLOAT e SIDENAV.

#### **1.4. Estrutura da dissertação**

A presente dissertação inicia-se com o capítulo 1, onde é feita uma abordagem ao que se vai tratar assim como o âmbito em que a mesma se insere, e a metodologia de trabalho selecionada e a sua pertinência.

Seguidamente, no capítulo 2, é feita uma revisão da literatura para que haja uma base teórica do que vai ser estudado e aprofundado. Isto é, um reunir de informação acerca das fontes hidrotermais, a propagação e a refração do som no oceano. Toda esta revisão é baseada numa seleção de estudos e investigações já existentes. Poderá vir a constituir, uma base sólida e consolidada para que, quem leia este trabalho, pela primeira vez, fique bem enquadrado em relação ao assunto, mesmo que não esteja, propriamente, confortável com o mesmo.

No capítulo 3 serão abordados alguns dos estudos e investigações feitos até ao momento, que considerámos relevante mencionar ao longo do trabalho, bem como os seus resultados. Estes estudos são de importância para o nosso trabalho, pois deram-nos algumas bases indicativas para o que pretendíamos obter.

No capítulo 4 será estudada a propagação e refração do som em meios cilíndricos uniformes, por esta ser uma forma idealizada das fontes hidrotermais. Primeiro será tida apenas em conta uma camada na fonte hidrotermal, havendo apenas uma mudança de temperaturas ou velocidades e depois essas camadas aumentarão. Serão efetuados modelos daquilo que será possível visualizar-se com a ferramenta MATLAB.

No capítulo 5 serão aplicados os conhecimentos adquiridos ao longo deste trabalho para que seja possível a visualização do comportamento do raio sonoro no ambiente das fontes hidrotermais. Nestes termos, estudaremos em primeiro lugar a variação de temperaturas dentro da fonte hidrotermal e só depois o comportamento dos raios, assim como, o cálculo dos tempos efetuados por estes.

Neste caso, considerámos colocar emissores e recetores na fonte de modo a que seja também possível o cálculo dos tempos de propagação. Isto será feito através da elaboração de diversos gráficos que se diferenciam pela variação de características como a profundidade, a localização dos emissores e o ângulo de incidência dos mesmos. Os cálculos serão feitos através da ferramenta MATLAB, na qual serão inseridas as diversas equações de  $c(T(x,y))$ .

No capítulo 6 será feita uma análise dos gráficos elaborados com as trajetórias dos raios sonoros e com o cálculo dos tempos para que os resultados sejam consolidados e concluídos.

Por fim teremos, no capítulo 7, as conclusões e recomendações em que serão respondidas as questões colocadas no presente capítulo e serão feitas recomendações para futuros trabalhos.

## **Capítulo 2**

### **Enquadramento teórico**

Neste capítulo, o enquadramento teórico ou revisão de literatura, o principal objetivo foi a recolha de informação que possa vir a ser pertinente para a área de investigação em geral e à nossa investigação em particular. Deste modo, será um capítulo em que será feita uma recolha de conhecimentos que nos sejam relevantes para podermos a vir a responder às questões da nossa investigação (Sousa, 2014, p.33).

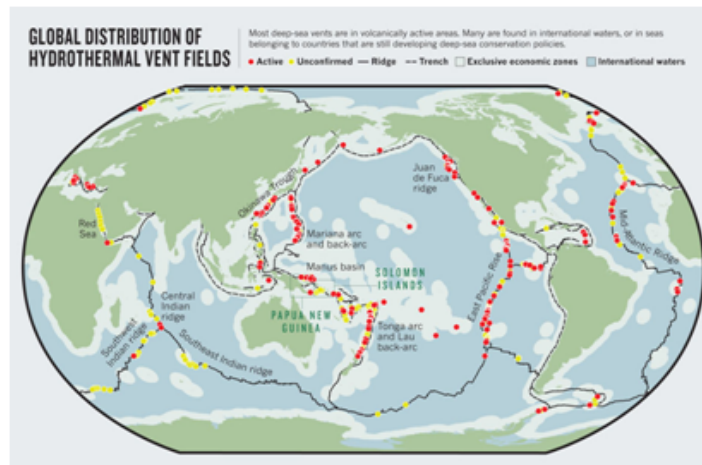
Independentemente do tema da dissertação, a leitura de livros, artigos, estudos anteriores, e outros documentos já existentes na área, é indispensável para uma melhor compreensão. Com isto, poderemos desde já referir algumas das conclusões que existem acerca do que vamos estudar, assim como o estado da investigação para o mesmo (Sousa, 2014, p.33).

#### **2.1. Fontes hidrotermais**

Encontradas pela primeira vez em 1977, a cerca de 2700m de profundidade, no mar das Galápagos, as fontes hidrotermais são aberturas no fundo oceânico, cuja água está aquecida a altas temperaturas, e que pode variar dos 40°C aos 450°C, sendo que a água a estas profundidades se encontra normalmente a 2°C. As profundidades, mínima e máxima, registadas para as fontes são entre 400 m e 6000 m, respetivamente (Beaulieu, 2015, para.1).

Estas fontes, desde que foram encontradas, têm sido tema de interesse para várias áreas, tais como a geologia, a geofísica, a biologia, entre outros. Isto, devido ao seu potencial em fornecer informação sobre as condições abaixo do fundo do mar e, devido ao facto dos materiais bio e geoquimicamente reativos como sulfuretos e metais reduzidos, serem transportados para o oceano (Iorio, 2012, p.169).

Encontram-se normalmente junto a zonas vulcânicas ativas, onde as placas tectónicas poderão estar em movimento. Podem também encontrar-se em bacias oceânicas ou *hotspots* (ver Figura 2) (Cólin-Garcia, 2016, p.p.599-600). Podemos observar na figura abaixo uma distribuição feita em 2010 das fontes hidrotermais a nível mundial.



**Figura 2** – Localização de fontes hidrotermais (2010).  
(Beaulieu, 2015)

Surgindo de uma descarga de uma zona de água para outra, são consideradas, deste modo, condutas de muito calor e de alterações químicas entre a litosfera e o próprio oceano. Para além disto, a densidade da água no interior da fonte aumenta à medida que está mais próxima da superfície<sup>1</sup>, enquanto a da água envolvente diminui. Perante estas condições e, com a ajuda da gravidade, formam-se as plumas hidrotermais. Estas consistem numa espécie de haste e numa cobertura (Figura 3), não totalmente uniformes. Geralmente são curvadas devido à corrente envolvente no fundo do oceano (Rona, 2002, p.147).

As fontes têm tendência a ser da forma de uma chaminé cilíndrica, que forma minerais que são dissolvidos ao longo da mesma. São também responsáveis por ambientes locais químicos, minerais e biológicos (Cólin-Garcia, 2016, p.600).

<sup>1</sup> A densidade aumenta com a diminuição de temperatura e vice versa, pois com a diminuição de temperatura as moléculas ficam mais próximas umas das outras.

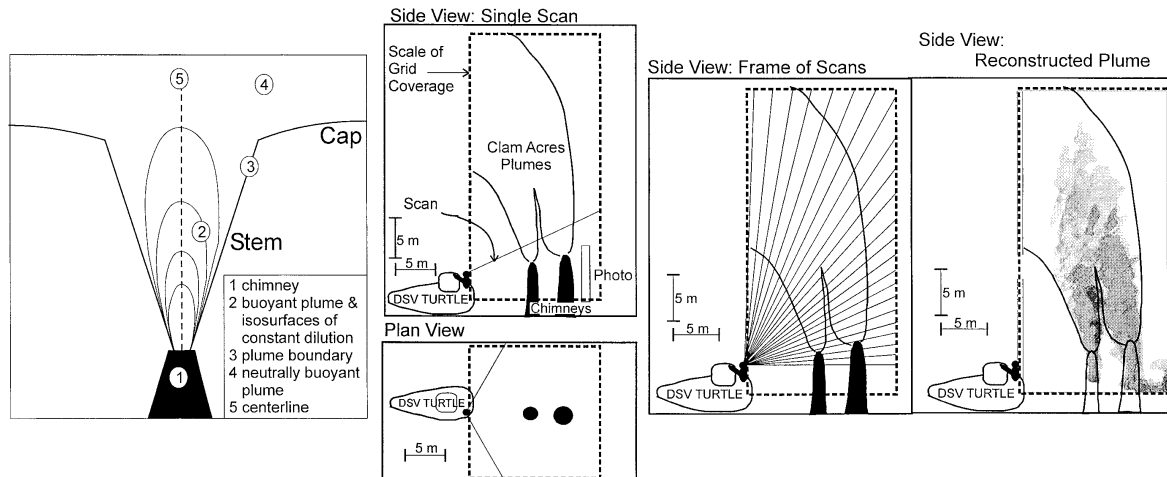


Figura 3 - Modelos pluma hidrotermal.

(Rona, 2002, p.p. 148 e 150)

À medida que a água do mar penetra na crosta oceânica, sobreaquece e consequentemente enriquece quimicamente. Torna-se tão dinâmica que regressa à superfície do fundo oceânico. Quando esta água, a cerca de 300°C, entra em contacto com a água do oceano profundo a 2°C, os minerais transportados pelo fluido quente são precipitados para fora da solução formando as plumas e os depósitos minerais (Figura 4) (Amon, 2016, para.2).

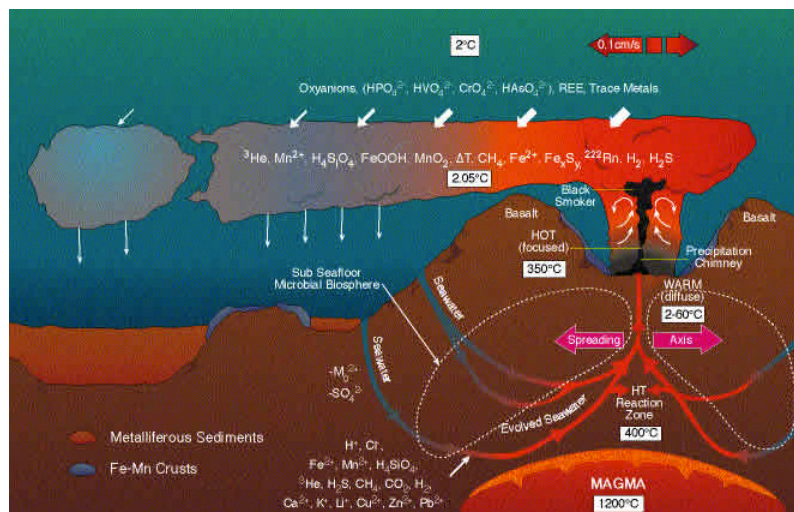


Figura 4 - Modelo de formação de fonte hidrotermal.

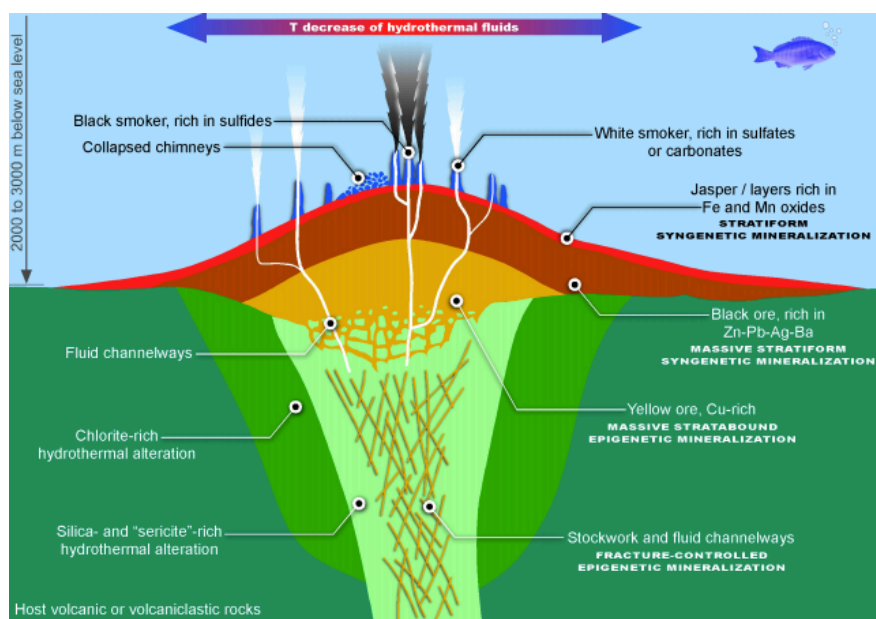
(Amon, 2016)

A água proveniente das fontes hidrotermais, por estar perto de zonas vulcânicas, poderá por vezes ser, em parte, água magmática, vinda do magma ascendente. Uma boa comparação com estas fontes, mas na terra, são os geiserais.

As altas temperaturas das fontes são descarregadas como fluidos claros na fissura da fonte e têm a maior parte da sua carga de partículas nos primeiros metros da coluna.

Por vezes, estas fontes têm menores temperaturas (0,2°C a 100°C), e são descarregadas lentamente através de fluxos de lava fraturados, conjuntos de “tapetes de bactérias” e macrofauna. (Bemis, 2012, p.182). Isto acontece em áreas onde o fluxo envolvente cria no fundo do mar uma camada irregular com alguns metros. Os fluidos presentes nestas fontes chamam-se fluidos difusos.

As fumarolas das fontes hidrotermais podem ser negras ou brancas, dependendo da sua composição mineral. As fumarolas negras são principalmente ricas em sulfuretos e as brancas em sulfatos ou carbonatos. As segundas têm tendência a ter temperaturas mais baixas e geralmente estão mais afastadas da fonte de calor (Cólin-Garcia, 2016, p.p. 603-604). Visualizemos então a imagem seguinte:



**Figura 5** – Exposição de elementos de uma fonte hidrotermal.

(García, 2016, p.604)

Em relação aos organismos formados nas fontes, as bactérias quimioautotróficas utilizam produtos químicos, como sulfuretos e metano, como fonte de energia para produzir material orgânico. Este processo, chamado de quimiossíntese, ocorre de forma semelhante ao que é feito pelas plantas, com recurso à luz solar, a conhecida

fotossíntese. Como o alimento é fácil de obter, as fontes hidrotermais são abundantes na vida marinha, embora seja em baixa diversidade numa mesma fonte (Amon, 2016, para.3). Assim, os organismos formados nestas fontes, por serem seres que não têm contacto com a luz solar, dependem dos nutrientes encontrados nos depósitos químicos e fluidos hidrotermais de onde habitam.

No fundo do mar, as distribuições de temperatura envolventes das fontes hidrotermais são de difícil medição devido aos elevados contrastes, onde altas temperaturas, altas pressões e fluidos ricos em metais são misturados com a água fria do oceano profundo.

Tendo, então uma melhor noção do que são as fontes hidrotermais que iremos estudar, começaremos agora a abordar as características daquilo que pretendemos estudar nas mesmas. Nomeadamente, a velocidade do som na água, as ondas e raios sonoros e a sua refração.

## **2.2. Propagação do som**

Começaremos agora um subcapítulo em que o enfoque será a propagação do som na água para que, mais tarde, seja possível estudar o mesmo nas condições particulares em que encontramos as fontes hidrotermais.

Iniciaremos, então por fazer uma breve introdução à velocidade do som na água em que introduziremos duas das equações conhecidas para o cálculo da velocidade da água. Estas duas equações são sugeridas por dois diferentes autores, Del Grosso e Coppens. Após uma comparação das mesmas estudaremos as ondas sonoras e os raios sonoros em particular e explicaremos o motivo pelo qual utilizaremos os raios sonoros para o nosso estudo posterior.

Por fim, introduziremos a refração do som pela lei de Snell do meio aquático para uma boa compreensão e justificação daquilo que será o comportamento dos raios sonoros aquando a exposição dos nossos resultados.

### **2.2.1. Velocidade do som na água**

A velocidade do som está dependente do meio onde se propaga e da sua temperatura, sendo que por norma esta é mais elevada nos meios sólidos. No

subcapítulo que se segue, analisaremos duas equações destinadas ao cálculo da velocidade do som na água que dependem não só da temperatura mas também de outros parâmetros.

Existe então, uma equação desenvolvida por Del Grosso (1974) para a velocidade de propagação do som em águas oceânicas, que é a seguinte:

$$c(T, S, P) = 1449,08 + 4,57T e^{-\left[\frac{T}{86,9} + \left(\frac{T}{360}\right)^2\right]} + 1,33(S - 35) e^{-\frac{T}{120}} + 0,1522P e^{\left[\frac{T}{1200} + \frac{S-35}{400}\right]} + 1,46 * 10^{-5} P^2 e^{-\left[\frac{T}{20} + \frac{S-35}{10}\right]} \quad (2.1)$$

onde  $c$  é a velocidade do som em m/s;  $T$  a temperatura em graus Celsius;  $S$  a salinidade em ppm (partes por milhão) e  $P$  a pressão em atm (Kinsler, 2000, p.436).

Estas fórmulas, normalmente existem para incluir conversões entre pressão e profundidade, no entanto pode ser assumido que 1 atm corresponde aproximadamente a 10 m de imersão (para latitude de 45°). Com esta aproximação,  $P$  pode ser substituído por  $100Z$  ( $Z$ , profundidade em km). Para uma melhor precisão temos:

$$P = (99,5(1 - 0,00263 \cos(2\varphi))Z + 0,239Z^2) \quad (2.2)$$

em que  $\varphi$  é a latitude, pois a relação entre a pressão e a profundidade é uma função de latitude e densidades sobrepostas na coluna de água (Kinsler, 2000, p.436). Esta equação é válida para temperaturas dos 0°C aos 30°C, e em valores de salinidades dos 30 ppm aos 40 ppm e pressão dos 0 aos 1000 kg/cm<sup>2</sup>.

Temos também uma outra fórmula muito utilizada para a velocidade do som na água do mar, a fórmula de Coppens (1981):

$$c(z, S, T) = 1449,05 + 45,7t - 5,21t^2 + 0,23t^3 + (1,333 - 0,126t + 0,009t^2)(S - 35) + \Delta z \quad (2.3)$$

em que

$$\Delta z = 16,3z(1 - 0,0026 \cos(2\varphi)) + 0,18z(1 - 0,0026 \cos(2\varphi))^2 \quad (2.4)$$

$$t = \frac{T}{10}. \quad (2.5)$$

Nesta fórmula, tal como a anterior,  $T$  vem em graus centígrados,  $z$  e  $\Delta z$  em km e  $S$  em ppm.  $\varphi$  representa a latitude. Esta fórmula é apropriada para cálculos de velocidade nas latitudes de  $0^\circ$  a  $45^\circ$  e tem uma boa aproximação em profundidades até aos 4000 m (Costa, 2017, p.71), para temperaturas dos 0 aos  $35^\circ\text{C}$  e salinidades dos 0 aos 45 ppm.

Comparando ambas as equações (Tabela 1), o que podemos verificar é que as velocidades calculadas são muito semelhantes dos  $0^\circ\text{C}$  até aos  $100^\circ\text{C}$ . Isto acontece devido ao facto de as próprias equações terem formas diferentes de se comportarem. A fórmula de Del Grosso possui exponenciais, enquanto que a de Coopens é polinomial. Por isso a de Coopens cresce acentuadamente, enquanto que a de Del Grosso inverte a velocidade aproximadamente à temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . Isto será possível observar posteriormente, na Figura 20.

Ambas as equações não estão previstas para temperaturas tão elevadas como aquelas que queremos estudar, no entanto são um bom exemplo para entendermos o comportamento da velocidade do som perante diferentes condições físicas do meio envolvente (neste caso, a temperatura), que é o oceano. E atendamos que para ambas as equações, nos intervalos em que as equações são válidas, a velocidade do som tem um comportamento idêntico (aumenta à medida que a temperatura aumenta até aos  $40^\circ\text{C}$ ).

Estes intervalos de temperaturas para os quais as expressões são válidas, foram também já mencionados em estudos e artigos anteriores. Um dos quais nos serviu como base para entendimento dos conceitos da acústica, que foi Urick. Este menciona no seu livro, "*Principles of underwater sound*", a existência de apenas três variáveis físicas das quais a velocidade do som depende, a temperatura, a pressão (ou profundidade) e a salinidade. Assim pegou também em equações cujas variáveis eram estes parâmetros. Para isto teve também de ter em conta os seus limites de intervalo. Chegando a conclusões semelhantes às nossas, em que as expressões são utilizadas para intervalos mais curtos que aqueles que nós pretendemos para as fontes hidrotermais (Urick, 1983, p.113).

| $T$ (°C) | $C$ (m/s) - Del Grosso | $C$ (m/s) - Coppens |
|----------|------------------------|---------------------|
| 330      | 1485,65682993112       | 5567,089818         |
| 300      | 1492,20123113807       | 4359,169818         |
| 280      | 1498,02438834393       | 3711,089818         |
| 260      | 1505,21139077279       | 3175,889818         |
| 240      | 1513,90094668862       | 2742,529818         |
| 220      | 1524,17282075152       | 2399,969818         |
| 200      | 1536,00386410428       | 2137,169818         |
| 180      | 1549,20767455602       | 1943,089818         |
| 160      | 1563,35407308300       | 1806,689818         |
| 140      | 1577,66426222367       | 1716,929818         |
| 120      | 1590,87737263960       | 1662,769818         |
| 100      | 1601,08419011593       | 1633,169818         |
| 80       | 1605,52429974917       | 1617,089818         |
| 60       | 1600,34386102319       | 1603,489818         |
| 40       | 1580,31306274310       | 1581,329818         |
| 20       | 1538,50573342020       | 1539,569818         |
| 0        | 1465,95044647371       | 1467,169818         |

**Tabela 1** - Comparação de equações da velocidade do som.

### 2.2.2. Ondas sonoras

As ondas sonoras são ondas longitudinais<sup>2</sup> (ao contrário das da luz, em que os campos elétrico e magnético são transversais). São ondas de origem mecânica, isto é, são produzidas por deformações num meio elástico. A propagação das mesmas envolve a vibração do material do meio onde se propagam. Assim, propagam-se melhor em sólidos e em líquidos (meios em que as moléculas estão mais próximas umas das outras), e pior em gases, não se propagando no vácuo (Junior, 1999, p.p. 469-470).

As ondas sonoras constituem um tipo de flutuação de pressão que pode existir num fluido ou sólido compressível. Propagam-se por vibração que produz zonas alternadas de compressão e rarefação. Em conjunto com a pressão audível os campos

<sup>2</sup> São as ondas cuja direção de vibração é paralela à direção de propagação da onda.

mais frequentes de ondas com intensidade moderada são as ultrassónicas, com frequências acima do audível para o ser humano ( $> 20000$  Hz) e infra sónicas, com frequências abaixo do audível para o ser humano ( $< 20$  Hz). Sendo que o ser humano consegue apenas ouvir ondas entre os 20 Hz e os 20000 Hz (Junior, 1999, p.470).

No estabelecimento das equações fundamentais da acústica, são feitas aproximações macroscópicas da estrutura microscópica subjacente.

As moléculas de um líquido não têm posições fixas no meio. Mesmo quando não existe a presença de uma onda acústica, elas estão em constante movimento aleatório. No entanto, um pequeno volume deve ser tratado como uma unidade não alterável desde que as moléculas presentes, quando o deixam, sejam substituídas, em média, por um número igual de partículas com as mesmas propriedades. Isto é, a partícula de fluido pode ser definida como um volume elementar, com milhões de moléculas. Assim o meio poderá ser considerado contínuo, mas pequeno o suficiente para que as variáveis acústicas sejam constantes no interior de cada volume elementar.

As variáveis acústicas das partículas movidas pelo som são então: o deslocamento ( $\xi$ ), a velocidade ( $u$ ), a aceleração ( $a$ ), a densidade ( $\rho$ ) e a pressão acústica ( $p$ ). Esta última é a diferença entre a pressão instantânea ( $P$ ) e a pressão de equilíbrio constante ( $P_0$ ). Por último, temos a condensação, que é a variação relativa da densidade,

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (2.6)$$

sendo  $\rho$  a densidade instantânea e  $\rho_0$  a densidade média de equilíbrio (Costa, 2017, p.7).

### **2.2.3. Raios sonoros**

A velocidade do som normalmente é uma função de um ponto no espaço. Há ondas cujas direções de propagação se alteram à medida que se propagam no meio. Um bom modo para o estudo deste efeito, quando possível, assume que a energia se transporta ao longo de caminhos razoavelmente bem definidos no meio onde se propaga. Deste modo, é mais útil pensar em raios em vez de ondas, por estes

simplificarem o estudo. Um raio define a direção do feixe acústico enquanto este se propaga no espaço e é uma linha sempre perpendicular à superfície de fase constante (frente de onda).

No entanto, os raios sonoros não são substitutos das ondas. São aproximadamente válidos pois definem a direção do feixe acústico à medida que este se propaga no espaço. Isto, apenas para comprimentos de onda suficientemente pequenos à escala da variação das características da propagação sonora do meio (Kinsler, 2000, p.135).

Admitindo a densidade  $\rho_0$  constante, a equação de onda que seguidamente se apresenta descreve a relação entre a distribuição espaço-temporal da pressão flutuante  $p = p(x, y, z, t)$  e a velocidade  $c = c(x, y, z)$  (especialmente variável) de propagação do som no meio em estudo. Nesta equação, a velocidade do som depende do ponto no espaço.

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2(x, y, z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(x, y, z, t) = 0, \quad (2.7)$$

em que  $c$  é a velocidade do som na água,  $t$  é o tempo e  $p$  é a pressão acústica. Esta equação descreve como a pressão varia no espaço e no tempo.

Para o som atravessar um fluido, a elongação varia com a posição em que esta se encontra. A forma das superfícies de fase constante pode tornar-se complicada. Assumamos então a seguinte igualdade:

$$p(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{i\omega \left[ t - \frac{\Gamma(x, y, z)}{c_0} \right]}, \quad (2.8)$$

onde  $A$  é a amplitude da pressão variável,  $\Gamma$  é uma função de fase (tem unidades de comprimento) e  $c_0$  é uma velocidade de referência arbitrária. A quantidade

$$\frac{\Gamma(x, y, z)}{c_0} \quad (2.9)$$

é a chamada *eikonal*. Os valores de  $(x, y, z)$  para cada  $\Gamma$  constante definem as superfícies de igual fase. Sendo  $\Gamma(x, y, z)$  um campo escalar, pela definição básica de gradiente

$\nabla\Gamma(x, y, z)$ , é sempre perpendicular a essas superfícies e aponta sempre na direção de propagação.

Substituindo a forma anterior de  $p(x, y, z, t)$  na equação de onda temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2(x, y, z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, y, z, t) = -\frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} p(x, y, z, t) = \\ -\frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} A(x, y, z) e^{i\omega[t - \frac{\Gamma(x, y, z)}{c_0}]} \\ \nabla^2 p(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \nabla^2 [A(x, y, z) e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma(x, y, z)}] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Seja,

$$\nabla^2 \left[ A(x, y, z) e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma(x, y, z)} \right] = \nabla^2 [A(x, y, z) B(x, y, z)] \text{ em que} \quad (2.11)$$

$$B(x, y, z) = e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma(x, y, z)}.$$

Então, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A(x, y, z) B(x, y, z)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A}{\partial x} B + \frac{\partial B}{\partial x} A \right) \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} B + 2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} A \end{aligned} \quad (2.12)$$

e como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B}{\partial x} = e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma} \left( -\frac{i\omega}{c_0} \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \\ = -\frac{i\omega}{c_0} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\frac{i\omega}{c_0} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma} - \frac{i\omega}{c_0} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) \left[ e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma} \left( -\frac{i\omega}{c_0} \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right] \\ = -\frac{i\omega}{c_0} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right)^2 e^{-i\frac{\omega}{c_0}\Gamma} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

então,

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \rightarrow \nabla^2 [A(x, y, z)B(x, y, z)] &= \nabla^2 \left[ A(x, y, z) e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma(x, y, z)} \right] \\
 &= (\nabla^2 A) e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma} + 2(\nabla A) \cdot \left( -\frac{i\omega}{c_0} e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma} \right) (\nabla \Gamma) \\
 &\quad + A \left( -\frac{i\omega}{c_0} \right) \nabla^2 \Gamma e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma} - A \frac{\omega^2}{c_0^2} (\nabla \Gamma) \cdot (\nabla \Gamma) e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Substituindo tudo na equação das ondas de pressão  $p(x, y, z, t)$  temos que

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega t} \left[ (\nabla^2 A) e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma} - i \frac{2\omega}{c_0} e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma} (\nabla A) \cdot (\nabla \Gamma) - \frac{i\omega}{c_0} A e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma} \nabla^2 \Gamma \right. \\
 \left. - A \frac{\omega^2}{c_0^2} e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma} (\nabla \Gamma) \cdot (\nabla \Gamma) \right] \\
 = -\frac{\omega^2}{c^2} A e^{i\omega t} e^{-\frac{i\omega}{c_0}\Gamma}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \nabla^2 A - i \frac{2\omega}{c_0} (\nabla A) \cdot (\nabla \Gamma) - \frac{i\omega}{c_0} A \nabla^2 \Gamma - \frac{\omega^2}{c_0^2} A (\nabla \Gamma) \cdot (\nabla \Gamma) \\
 = -\frac{\omega^2}{c^2} A.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Separando componentes reais e imaginários, vem

$$\begin{array}{l}
 \text{reais, } \nabla^2 A - \frac{\omega^2}{c_0^2} A (\nabla \Gamma) \cdot (\nabla \Gamma) = -\frac{\omega^2}{c^2} A \\
 \text{imaginários, } -\frac{2\omega}{c_0} (\nabla A) \cdot (\nabla \Gamma) - \\
 \frac{\omega}{c_0} A \nabla^2 \Gamma = 0
 \end{array} \left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{\nabla^2 A}{A} + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \nabla \Gamma \cdot \nabla \Gamma = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \\
 2 \frac{\nabla A}{A} \cdot \nabla \Gamma + \nabla^2 \Gamma = 0 \\
 \text{(equação de transporte)}
 \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Estas equações são complicadas de resolver pois são acopladas e não lineares.

No entanto, se admitirmos:

$$\nabla^2 \Gamma \ll \frac{\omega}{c} e \frac{\nabla A}{A} \cdot \nabla \Gamma \quad (2.18)$$

e

$$\left| \frac{\nabla^2 A}{A} \right| \ll \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.19)$$

podemos dizer que a amplitude de pressão,  $A$ , e a velocidade do som,  $c$ , variam muito pouco ao longo da distância de um comprimento de onda  $\lambda$ , podendo assumir-se que não variam. Então, a equação

$$-\frac{\nabla^2 A}{A} + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 (\nabla \Gamma) \cdot (\nabla \Gamma) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.20)$$

assume uma forma simplificada, que é (desprezando o primeiro termo face aos restantes):

$$(\nabla \Gamma) \cdot (\nabla \Gamma) = (c_0/c)^2 = n^2 \quad (2.21)$$

onde,

$$n = c_0/c \quad (2.22)$$

é o índice de refração. Esta última é a equação da *eikonal*. Por fim podemos afirmar, com base nesta última igualdade (aproximada), que

$$\nabla \Gamma = n \hat{s} \quad (2.23)$$

onde  $\hat{s}$  é o vetor que nos dá a direção local de propagação. Dando um ponto  $(x,y,z)$  no campo do som e depois analisando como  $\nabla \Gamma$  muda de direção, à medida que avança de ponto a ponto dentro do líquido, define-se a direção de propagação  $\hat{s}$  de cada raio (*ray path*) ou seja, a trajetória definida pelo raio. A solução da equação *eikonal* dá-nos então as trajetórias dos raios de energia acústica.

Substituamos agora  $\nabla \Gamma$  por  $n \hat{s}$  na equação de transporte atrás estabelecida. Vem

$$2 \frac{\nabla A}{A} \cdot (n\hat{s}) + \nabla \cdot (n\hat{s}) = 0 \quad (2.24)$$

e como,

$$\nabla \cdot (n\hat{s}) = (\nabla n) \cdot \hat{s} + n \nabla \cdot \hat{s}, \quad (2.25)$$

virá

$$2 \frac{\nabla A}{A} \cdot (n\hat{s}) + (\nabla n) \cdot \hat{s} + n \nabla \cdot \hat{s} = 0 \quad (2.26)$$

e

$$\begin{cases} \nabla A \cdot (n\hat{s}) = n \frac{dA}{ds} \because \nabla A(n\hat{s}) = (\nabla A \cdot \hat{s})n = n \frac{dA}{ds} \\ \nabla \cdot (n\hat{s}) = (\nabla n) \cdot \hat{s} + n \nabla \cdot \hat{s} = \frac{dn}{ds} + n \nabla \cdot \hat{s} \end{cases} \quad (2.27)$$

onde  $dn = (\nabla n) \cdot \hat{s} ds = \nabla n \cdot \vec{ds}$  é a variação de  $n$  ao longo de um  $\vec{ds}$  particular

também  $dA = \nabla A \cdot \vec{ds}$  = variação de  $A$  ao longo de um  $\vec{ds}$  particular

e portanto

$$\nabla A \cdot (\hat{s} ds) = (\nabla A \cdot \hat{s}) ds \Rightarrow \nabla A \cdot \hat{s} = \frac{dA}{ds} \quad (2.28)$$

então,

$$2 \frac{\nabla A}{A} \cdot (n\hat{s}) + (\nabla n) \cdot \hat{s} + n \nabla \cdot \hat{s} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{A} n \frac{dA}{ds} + \frac{dn}{ds} + n \nabla \cdot \hat{s} = 0 \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{A} \frac{dA}{ds} + \frac{1}{n} \frac{dn}{ds} = -\nabla \cdot \hat{s} \Leftrightarrow \frac{d}{ds} \ln(nA^2) = -\nabla \cdot \hat{s} \quad (2.30)$$

$$\because \frac{d}{ds} \ln(nA^2) = \frac{\frac{d}{ds}(nA^2)}{nA^2} = \frac{\frac{dn}{ds}A^2 + n2A \frac{dA}{ds}}{nA^2} = 2 \frac{1}{A} \frac{dA}{ds} + \frac{1}{n} \frac{dn}{ds}$$

Para distâncias com mais que alguns comprimentos de onda afastados da fonte a intensidade é:

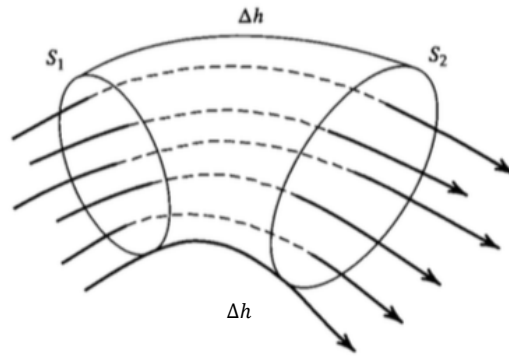
$$I = \frac{\rho^2}{2\rho_0 c} = \frac{nA^2}{2\rho_0 c_0} \quad (2.31)$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \ln(nA^2) = -\nabla \cdot \hat{s} &\Rightarrow \frac{d}{ds} \ln(2\rho_0 c_0 I) = -\nabla \cdot \hat{s} \\ \Leftrightarrow \frac{2\rho_0 c_0}{2\rho_0 c_0 I} \frac{dI}{ds} = -\nabla \cdot \hat{s} &\Leftrightarrow \frac{1}{I} \frac{dI}{ds} = -\nabla \cdot \hat{s} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{I} \frac{dI}{ds} = \text{mudança fracional de intensidade por unidade de} \\ \text{distância ao longo do caminho do raio} \\ \nabla \cdot \hat{s} \rightarrow \text{convergência ou divergência de raios em cada ponto} \end{array} \right.$

Considerando agora um volume no qual estão presentes raios sonoros. O comprimento deste volume é dado por  $\Delta h$ .



**Figura 6** – Volume que envolve um limite de raios com áreas limite S1 e S1 separadas por uma distância de  $\Delta h$  ao longo dos raios.

(Kinsler, 2000, p.137)

Calculando o integral do volume,

$$\begin{aligned}
 \iiint \frac{1}{I} \frac{dI}{ds} d^3\vec{r} &= \iiint -\nabla \cdot \hat{s} d^3\vec{r} \\
 &= -\oiint \hat{s} \cdot d\vec{a} = -\oiint \hat{s} \cdot \hat{n} da = -(S_2 - S_1) = -\Delta S \\
 &= -\frac{dS}{ds} \Delta h
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\iiint \frac{1}{I} \frac{dI}{ds} d^3\vec{r} \approx \frac{1}{I} \frac{dI}{ds} \Delta h S = \frac{d}{ds} (\ln I) S \Delta h$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} (\ln I) S \Delta h = -\frac{dS}{ds} \Delta h &\Leftrightarrow \frac{d}{ds} (\ln I) = -\frac{1}{S} \frac{dS}{ds} = -\frac{d}{ds} (\ln S) \Leftrightarrow \frac{d}{ds} (\ln I + \\
 \ln S) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{ds} (IS) = 0 \Rightarrow IS = \text{constante (Watt)}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ou seja, ao longo de um tubo de raios sonoros, a energia transmitida na unidade de tempo é constante.

Estudando agora as equações das trajetórias dos raios sonoros, é da resolução em cada ponto da equação

$$\nabla \Gamma = n \hat{s} \tag{2.35}$$

que extraímos o comportamento espacial de  $\hat{s}$  e também a trajetória dos raios sonoros (onde  $n = c_0/c$ , é o índice de refração).

Para saber o comportamento espacial do vetor unitário  $\hat{s}$ , começamos por expressá-lo nas suas componentes cartesianas,

$$\hat{s} = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} \tag{2.36}$$

com

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{2.37}$$

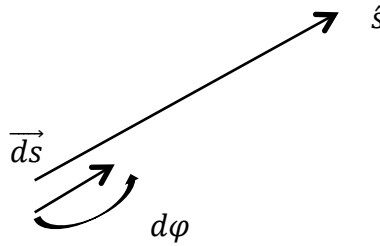
$\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são os cossenos diretores do versor  $\hat{s}$ .

Como

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy + \frac{\partial s}{\partial z} dz \quad (2.38)$$

é um elemento de linha, em geral, podemos expressar a variação elementar  $d\varphi$  de um qualquer campo escalar  $\varphi(x, y, z)$  consoante passando da origem para o fim do vetor elementar  $\vec{ds}$ ,

$$d\varphi|_{\vec{ds}} = \nabla\varphi \cdot \vec{ds} \quad (2.39)$$



**Figura 7** – Representação do vetor unitário  $\hat{s}$ .

Se, entretanto, escolhermos um eixo ordenado ao longo da direção do próprio  $\vec{ds}$ , também é verdade que

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{ds} ds. \quad (2.40)$$

Mas, regressando aos eixos cartesianos  $(x, y, z)$ , temos,

$$\begin{aligned} d\varphi|_{\vec{ds}} &= \nabla\varphi \cdot \vec{ds} \\ &= \left( \hat{x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \cdot (ds \hat{s}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} d\varphi|_{\vec{ds}} &= \left( \hat{x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \cdot [ds(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{z})] \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \alpha ds + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \beta ds + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \gamma ds = \frac{d\varphi}{ds} ds \end{aligned} \quad (2.42)$$

Desta última igualdade tiramos,

$$\frac{d\varphi}{ds} ds = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \gamma \right) ds \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \gamma \quad (2.43)$$

ou seja, o operador  $\frac{d}{ds}$  satisfaz a igualdade,

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial x}\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\beta + \frac{\partial}{\partial z}\gamma. \quad (2.44)$$

Consideremos agora a variável espacial das componentes de vetor unitário  $\hat{s}$ , multiplicadas pelo índice de refração, em termos de variação espacial do próprio índice de refração  $n$ . Temos, com

$$\begin{aligned} \nabla\Gamma &= n\hat{s}, \\ \frac{d}{ds}(\nabla\Gamma) &= \frac{d}{ds}(n\hat{s}) = \frac{d}{ds}(n\alpha\hat{x} + n\beta\hat{y} + n\gamma\hat{z}) \\ &= \hat{x}\frac{d(n\alpha)}{ds} + \hat{y}\frac{d(n\beta)}{ds} + \hat{z}\frac{d(n\gamma)}{ds} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por outro lado, como

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial x}\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\beta + \frac{\partial}{\partial z}\gamma, \quad (2.46)$$

também é

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\nabla\Gamma) &= \nabla\left(\frac{d\Gamma}{ds}\right) = \nabla\left(\alpha\frac{\partial\Gamma}{\partial x} + \beta\frac{\partial\Gamma}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right) = \nabla(\hat{s} \cdot \nabla\Gamma) = \nabla(\hat{s} \cdot n\hat{s}) \\ &= \nabla(n) = \hat{x}\frac{\partial n}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial n}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial n}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Igualando os dois resultados, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\nabla\Gamma) &= \nabla\left(\frac{d\Gamma}{ds}\right) \Rightarrow \hat{x}\frac{d(n\alpha)}{ds} + \hat{y}\frac{d(n\beta)}{ds} + \hat{z}\frac{d(n\gamma)}{ds} \\ &= \hat{x}\frac{\partial n}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial n}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial n}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou seja, igualando componentes,

$$\frac{d(n\alpha)}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.49)$$

$$\frac{d(n\beta)}{ds} = \frac{\partial n}{\partial y} \quad (2.50)$$

$$\frac{d(n\gamma)}{ds} = \frac{\partial n}{\partial z} \quad (2.51)$$

Concluimos com tudo isto que, a partir da equação de *eikonal*, se obtêm estas três equações que nos dão a evolução do percurso do raio sonoro em resultado da variação local do índice de refração  $n$ . Inversamente, se soubermos o comportamento dos raios sonoros, poderemos obter o índice de refração em função do ponto do espaço.

E, sendo este intrinsecamente o inverso da velocidade de propagação do som no meio, a qual depende da respetiva temperatura, temos aqui uma relação possível entre o percurso de raios sonoros e o comportamento da temperatura do meio consoante o ponto do espaço.

(Kinsler, 2000, pp. 135-138)

Este último parágrafo dá-nos aquilo onde queremos chegar. Que é exatamente a possibilidade do estudo de características acústicas de um meio, como a velocidade e a temperatura, no espaço. Neste caso, através de raios sonoros.

#### **2.2.4. Ondas sonoras vs raios sonoros**

Observemos agora uma tabela (Urlick, 1983, p.122) de comparação entre utilização da teoria ondulatória para a teoria dos raios sonoros:

| 1. Ondas Sonoras                                  | 2. Raios Sonoros   |
|---|--|
| 1.1 Solução formalmente completa                  | 2.1. Não lida com problemas de difração  |
| 1.2 Solução complicada de interpretar             | 2.2. Facilmente desenhados. Distribuição do som facilmente visualizada   |
| 1.3. Dificil inserir condições reais de fronteira | 2.3. Condições reais de fronteira facilmente inseridas   |
| 1.4. Funções de origem facilmente inseridas       | 2.4. Independente da origem  |
| 1.5. Requer um programa de computador             | 2.5. Podem ser desenhados utilizando a lei de Snell, para variações simples do índice de refração do meio  |
| 1.6. Possível utilizar em todas as frequências    | 2.6. Utilizados apenas em altas frequências se o raio de curvatura dos raios sonoros for maior que o comprimento de onda ou se a velocidade do som não se alterar muito no comprimento de onda |

**Tabela 2** - Comparação das ondas sonoras com raios sonoros.

Pegando no ponto 2.6. da tabela 2, podemos acrescentar que sendo

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (2.52)$$

e

$$n = \frac{c_0}{v}, \quad (2.53)$$

então

$$\lambda = \frac{c_0}{n f} = \frac{c_0}{n f} \quad (2.54)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda,  $v$  a velocidade da onda sonora do meio,  $f$  a frequência,  $c_0$  a velocidade do som e  $n$  o índice de refração.

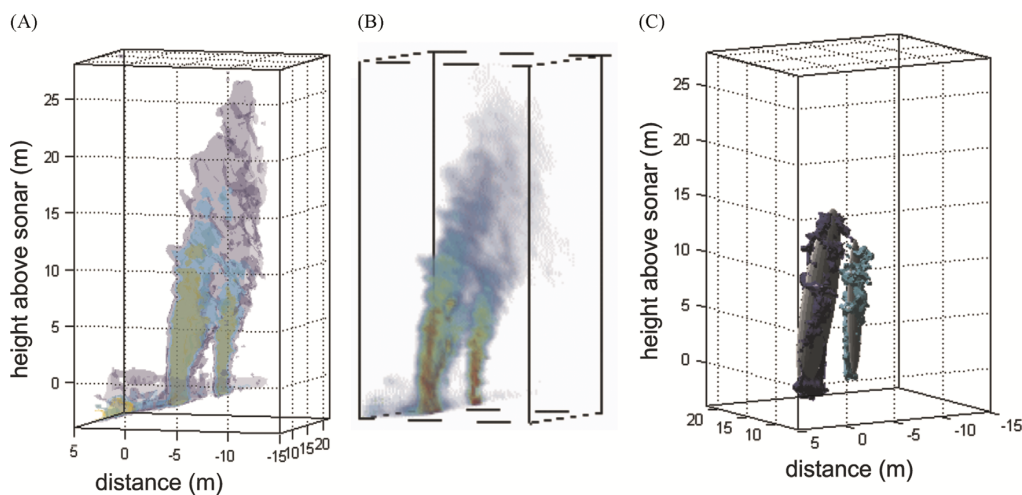
Sabemos então que o comprimento de onda não será constante devido à variação do índice de refração no meio.

Todos estes fatores influenciam a utilização dos raios para o estudo do sinal sonoro, pois este conceito só pode ser utilizado para suficientemente grandes frequências ou baixos comprimentos de onda (Urlick, 1983, p.122), para os quais podemos fazer,

$$\frac{\nabla^2 A}{A} \ll \left(\frac{\omega}{c}\right) \sim \frac{1}{\lambda^2}$$

sendo que a variação da amplitude de pressão com a velocidade do som continuará reduzida apenas se existirem baixos comprimentos de onda que não a influenciem.

Para alguns testes já efetuados foram utilizados sonares de frequências elevadas para deteção das fontes. Estas frequências foram dos 200kHz aos 400kHz e proporcionaram melhores resultados que outras mais baixas utilizadas anteriormente. (Bemis, 2015, pp. 6 e 7). Temos então abaixo a Figura 8, em que podemos observar uma visualização em 3D de plumas hidrotermais de diferentes visualizações: (A) camada de isosuperfícies parcialmente transparentes, (B) raios sonoros (*ray tracing*) e (C) ajuste de formas arbitrárias. Estas imagens foram retiradas dia 20 de novembro de 1990 às 20h24min pelo DVS Turtle (Bemis, 2015, p.7).



**Figura 8** - Visualização em 3D de plumas hidrotermais.

(Bemis, 2015, p.7)

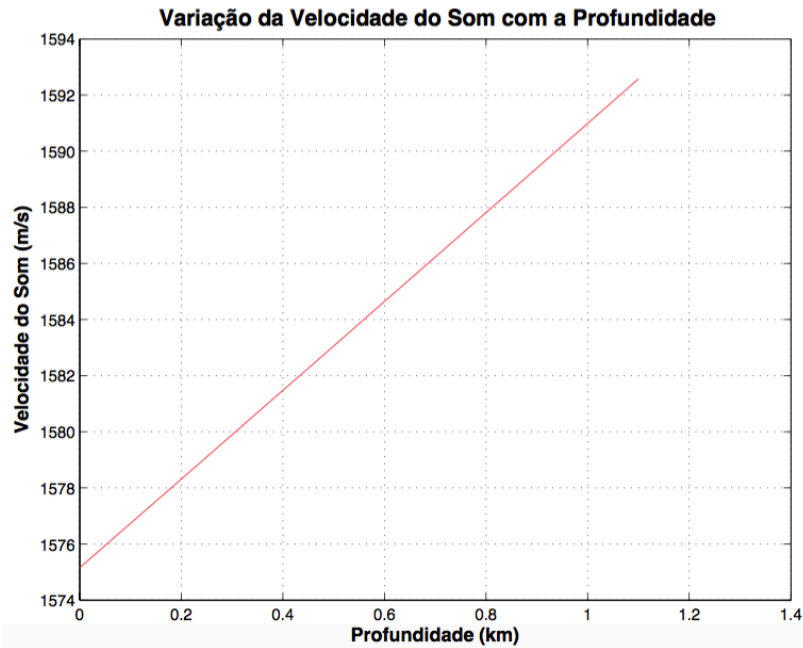
### **2.3. Refração do som**

Um dos fenómenos mais importantes<sup>3</sup> na alteração das características da propagação do som no oceano é a refração, que resulta da variação espacial da velocidade do som, induzida pela não homogeneidade de temperatura, salinidade e pressão. Variações na salinidade normalmente são sentidas em regiões onde águas de diferentes salinidades se encontram ou à superfície, onde a chuva e a evaporação têm um efeito máximo. Variações na velocidade do som na água, com o variar da profundidade não são tão sentidas como as da temperatura. A mudança da pressão sobre uma profundidade de 100 m (10 atm) aumenta a velocidade do som apenas em 1,6 m/s (0,1%) (Kinsler, 2000, p.438).

Tal como se pode observar no gráfico abaixo (Figura 9), utilizando a equação de Del Grosso apresentada em 2.2.1., considerando uma temperatura e salinidade constantes e variando apenas o valor de profundidade, observamos que para uma profundidade de 896 m temos uma velocidade de 1589 m/s e para uma profundidade de 1100 m temos uma velocidade de 1592 m/s. Há portanto uma variação de 3 m/s em 204 m, tal como seria de esperar (Apêndice 1.2, no MATLAB: “graf\_DelGrosso\_prof.m”).

---

<sup>3</sup> Outros são por exemplo: atenuação, absorção, dispersão, canais de som, formas de vida que emitam sons e reflexão.



**Figura 9** - Variação da velocidade do som apenas com a profundidade segundo o modelo de Del Grosso.

Mudanças na temperatura são as que mais se fazem sentir. Há diferenças de cerca de 5°C nos primeiros 100 m do oceano. Para temperaturas perto dos 15°C, um aumento de 5°C leva a um aumento da velocidade de 16 m/s (1%) (Kinsler, 2000, p.438).

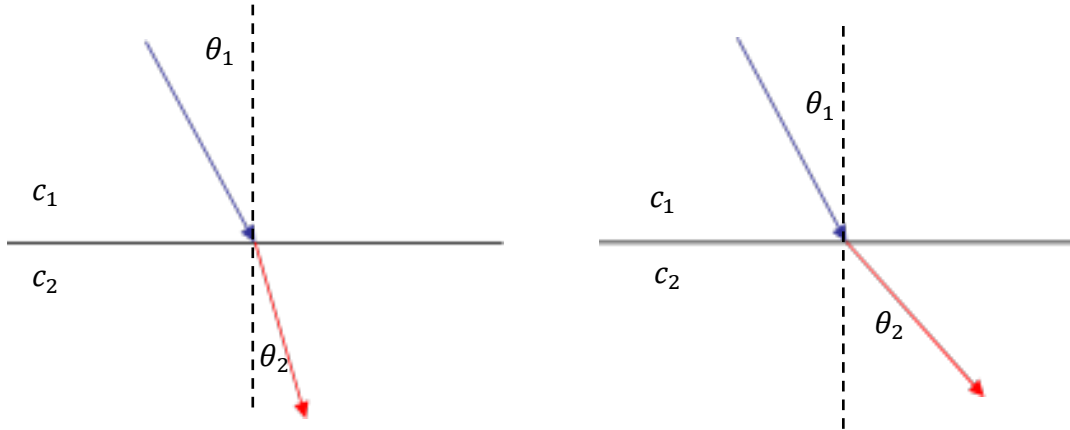
A velocidade do som no oceano é também afetada pela refração quando viaja horizontalmente, e não apenas verticalmente. Esta propagação dá-se em trajetórias curvas. Numa situação idealizada em que consideramos variações descontínuas da velocidade do som, estas trajetórias serão linhas quebradas, cuja orientação apelativa é dada pela conhecida Lei de Snell. Segundo esta, a relação entre o ângulo de incidência ( $\theta_1$ ) e o ângulo de refração ( $\theta_2$ ), em relação à normal, e a velocidade do som nas duas diferentes camadas ( $c_1$  e  $c_2$ ) é dada por:

$$\frac{\text{sen}(\theta_1)}{c_1} = \frac{\text{sen}(\theta_2)}{c_2} . \quad (2.55)$$

(Benjamin, 2016, p.24).

Assim, tal como podemos observar na Figura 10, quando a velocidade do som no meio incidente ( $c_1$ ) é maior que a do meio refratado ( $c_2$ ), o raio incidente aproxima-

se da normal à superfície de separação ao ser refratado, ficando  $\theta_1 > \theta_2$ . E quando a velocidade no meio incidente é menor, o raio afasta-se da normal, ficando  $\theta_1 < \theta_2$ .



**Figura 10** - Modelo refração ( $c_1 > c_2$ ) ; Modelo refração ( $c_1 < c_2$ ).

O ângulo de incidência crítico ( $\theta_{ic}$ ) é o ângulo acima do qual não há mais refração do som, ou seja, passa a haver reflexão total. Considerando  $c_2 > c_1$ , e assumindo que se  $\theta_2$  for  $90^\circ$ , consequentemente  $\text{sen}(90^\circ) = 1$ , teremos,

$$\text{sen}(\theta_c) = 1 = \frac{c_2}{c_1} * \text{sen}(\theta_{ic}). \quad (2.56)$$

então, sabemos que

$$\frac{c_2}{c_1} = \text{sen}(\theta_{ic}), \quad (2.57)$$

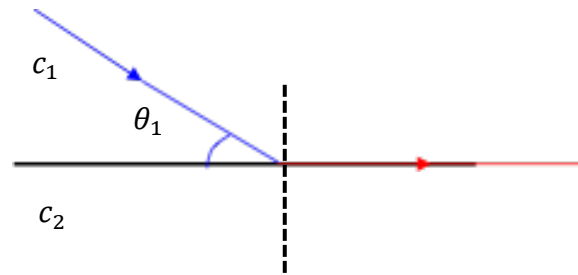
Neste caso

$$\text{sen}(\theta_1) = \text{sen}(\theta_{ic}) \quad (2.58)$$

e

$$\text{sen}(\theta_2) = \text{sen}(\theta_c) \quad (2.59)$$

Podemos então observar o fenómeno da reflexão total na Figura 11.



**Figura 11** – Situação de limite do raio refletido rasante com  $c_1 < c_2$ .

Após a redação deste capítulo, tornar-se-á mais simples a compreensão daquilo que será feito durante o desenvolver deste trabalho. Pois para a organização e estudo de uma investigação existe a necessidade de expor primeiro todo o nosso conhecimento base para a realização da mesma.

No capítulo seguinte, será feita uma exposição daquilo que foi até à data apresentado por diferentes autores, relativamente à nossa pesquisa, e que poderá ter interesse para nós.



## Capítulo 3

### Exposição e interpretação de estudos realizados no passado

A investigação para esta dissertação foi então iniciada com a pesquisa de estudos efetuados no passado por diversos autores. Apesar dos diferentes modos de pesquisa e dos diversos e distintos materiais utilizados, todos os autores tiveram a mesma finalidade, que foi a de estudar as fontes hidrotermais, as suas localizações, os seus comportamentos, as suas variações, entre outros. Ao ler todos estes artigos, foi-nos possível entender melhor o comportamento das fontes, a sua origem e formação e algumas variações muito importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho, tal como a evolução e variação da temperatura dentro das mesmas.

Iremos então fazer uma breve síntese do que considerámos mais relevante na leitura destes estudos.

Em 1985, os americanos Edward T. Baker, *et al.*, iniciaram os seus estudos das fontes, numa fonte hidrotermal no sul da *Juan de Fuca Ridge*, que se localiza no nordeste do Oceano Pacífico. Esta era já uma zona de conhecida atividade hidrotermal. Esta investigação teve como finalidade estudar as movimentações das fontes hidrotermais como transportadoras de partículas, mesmo que escassas. Para esta avaliação, mapearam a sua distribuição dos 80 m aos 100 m de profundidade. Contínuas medições da dispersão da luz definiram numerosas plumas de partículas centradas 30 m a 120 m acima do fundo. Análises destas plumas e da sua temperatura e salinidade verificaram as suas origens. As concentrações de partículas hidrotérmicas permaneceram elevadas a profundidades do cume da crista, pelo menos, a 100 km, indicando a dispersão distante do eixo das emissões hidrotermais (Baker, 1985, p.p. 342-344).

Mais tarde, em 1997, P. A. Rona, *et al.*, começaram os seus estudos nestas fontes com a finalidade de mapear os fluidos difusos na fonte hidrotermal *Monolith*, *Juan de Fuca Rigde*. Para isto foi montado o DSV (*Deep Submergence Vehicle*) SEA CLIFF, um submersível que foi colocado no fundo do oceano, estático, cobrindo toda a fonte *Monolith*. Esta fonte é uma fumarola negra rica em sulfuretos, com uma altura de 17 m a uma profundidade de 2249 m. Estes testes foram efetuados mais que uma vez por uma

questão de redundância pois existiam resultados de experiências semelhantes que eram diferentes, não correspondendo aos anteriores. Estes ocorriam quando estavam presentes fluidos difusos.

Observações anteriores das fontes hidrotermais revelaram que as plumas podem ocorrer sob a forma de fluidos discretos ou difusos. Os discretos ocorrem da descarga de água a altas temperaturas a partir de fontes individuais. Estes podem ser detetados através de medições diretas. Os fluidos difusos resultam de descargas com água a menores temperaturas e menor intensidade, através de áreas do fundo do oceano. Com isto, tornou-se mais simples a determinação mais precisa de fluidos difusos e químicos nas fontes hidrotermais (Rona, 1997, p.p. 2351-2354).

Em 2002, P. A. Rona, *et al.*, iniciaram estudos na imagem, visualização e quantificação acústica das fontes hidrotermais. Aqui foram desenvolvidas novas técnicas acústicas para visualizar fumarolas negras nas fontes hidrotermais. O objetivo desta investigação foi estudar as descargas das fontes já apresentadas anteriormente (Figura 3). O processo das fontes hidrotermais mostrou-se estável no tempo e no espaço e permitiram a construção de modelos 3D de plumas hidrotermais (Figura 12) (Rona, 2002, p.p. 147-166).

Proveniente da *School of Oceanography, University of Washington, Seattle, Washington, United States of America*, em 2006, surgiu um estudo por parte de Timothy J. Crone, *et al.*. Este teve como abordagem o estudo do som gerado pelas fumarolas negras das fontes da cordilheira mesoceânica do Pacífico. Neste estudo é apresentada a primeira descrição detalhada do som localizado gerado por estas fumarolas.

Inicialmente foram discutidos os prováveis mecanismos da fonte de som que operam para produzir sinais de banda larga e banda estreita. De seguida, discutem-se as variações de correntes observadas. A força destas afeta a circulação de fluidos no sistema hidrotermal.

Concluiu-se também acerca das implicações biológicas da produção de som nas fumarolas negras. Para este estudo foram utilizadas duas fontes (*Sully e Puffer*), presentes na fonte *Main Endeavour* na *Juan de Fuca Ridge*. Concluiu-se que ambas as fontes emitiam energia acústica em todas as frequências em banda larga acima dos 500 Hz (Figura 13), com potência de 10-30 dB acima do nível do ruído ambiente. Estas

também geravam sinal acústico de banda estreita com frequências a variar dos 10 aos 250 Hz, com níveis de potência dos 10-20 dB acima do nível do sinal de banda larga e largura de banda 5-15 Hz (Crone, 2006, p.p. 1-3).

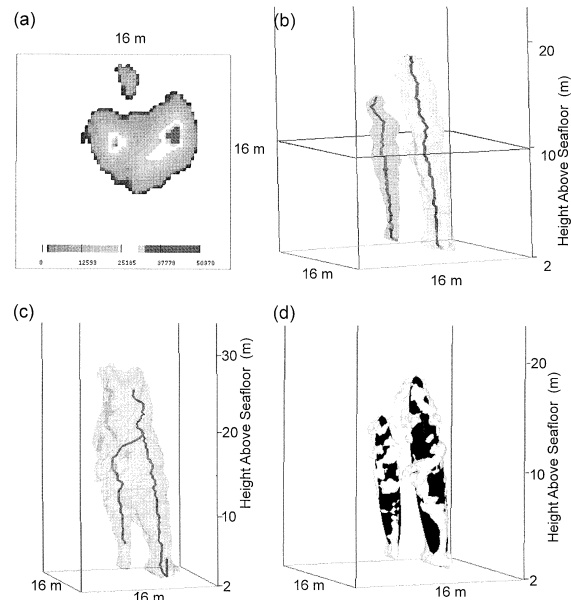


Figura 12 – Representação 3D de plumas hidrotermais.

(Rona, 2002, p.155)

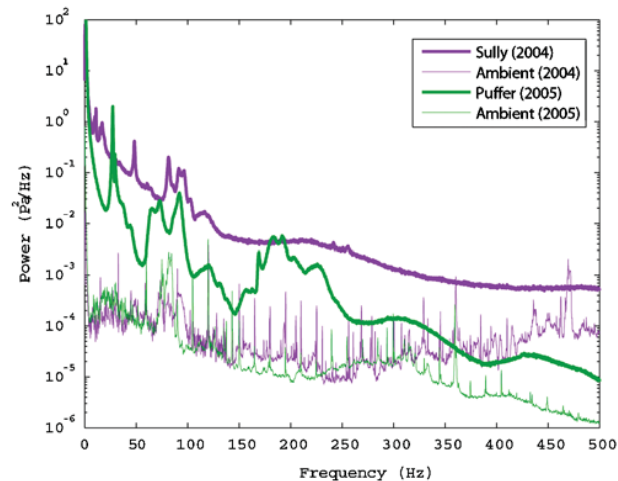


Figura 13 – Representação da frequência de Sully e Puffer.

(Crone, 2006, p.3)

Em 2000, surgiu um artigo, por J. Lu *et al.*, em que o principal objetivo foi o de projetar, em duas dimensões, a medição de gases a altas temperaturas, tendo em conta a refração das ondas de som. Já sabendo que os métodos intrusivos poderiam contaminar

o meio e deteriorar os resultados das medições, optaram por meios não intrusivos<sup>4</sup>, como infravermelhos e medições a laser. Ainda assim, mesmo com estes métodos, existiria a possibilidade de os resultados não serem totalmente precisos. Portanto, seguiram pelo caminho da pirometria acústica (método de medição a altas temperaturas), que foi também tido como método não intrusivo usando o método da tomografia computacional. Na pirometria acústica, assume-se que a velocidade do som é função da temperatura do gás. Assim, quando uma onda sonora passa por um campo de temperatura não uniforme, esta sofre refração. Este efeito é inteiramente relevante para a construção de campos de temperatura (Lu, 2000, p.692).

Neste caso, os autores do artigo utilizaram a seguinte equação para a velocidade do som:

$$c = \sqrt{k * R * T(x, y)}, \quad (3.1)$$

em que  $c$  é a velocidade do som,  $k$  a relação dos calores específicos,  $R$  a constante dos gases e  $T(x,y)$  a temperatura absoluta de um local de coordenadas  $(x,y)$ . É também importante ter em conta se a localização do transmissor e do recetor é dada, pois o tempo de trânsito da onda sonora pode ajudar no cálculo da temperatura média do gás.

Notemos que, para este caso, temos uma equação da velocidade do som correspondente a medições dirigidas a gases. E, apesar de não estar direcionada para o nosso tema de interesse, é também trabalhada em campos de temperaturas não uniformes e foi adaptada para o nosso ambiente de estudo.

Para a reconstrução da distribuição do campo de temperatura em 2D (duas dimensões), foi utilizado o “método dos mínimos quadrados” (TLS (*Total Least Squares*))<sup>5</sup>, principalmente por ser possível integrar o efeito da refração no mesmo. Na tomografia acústica o sinal ganha a seguinte forma:

---

<sup>4</sup> Que não interagem diretamente com a fonte, não havendo possibilidade de alteração de características. Exemplos de métodos não intrusivos são infravermelhos, laser e monitorização acústica, isto é, não colocando medidores na própria fumarola.

<sup>5</sup> Técnica geral utilizada para determinar parâmetros funcionais entre uma ou mais grandezas de um fenómeno de uma grandeza medido mais que uma vez. A exigência deste método é que os erros que afetam as medições sejam aleatórios.

$$D = \int a \, ds, \quad (3.2)$$

onde  $a$  é o fator que indica a propriedade do espaço, nomeando o inverso da velocidade do som,  $ds$  é o elemento de caminho e  $D$  o tempo de trânsito do sinal. Foi então tido em consideração um espaço circular aquecido por uma fonte hidrotermal, colocando oito transdutores nomeados de S1 a S8 instalados à sua volta. Quando um deles transmitia, todos os outros funcionavam como recetores. O espaço das medições foi dividido em blocos numerados em que a temperatura é desconhecida. A precisão destes blocos foi fundamental para uma boa construção do campo de temperaturas.

Em relação à refração, e tendo em conta a equação da velocidade do som, se a distribuição da temperatura for dada, então podemos exprimir a trajetória de um raio da onda sonora da seguinte forma:

$$y_k = y_k(x). \quad (3.3)$$

O diferencial da trajetória “ $ds$ ” ao longo do seu caminho é:

$$ds = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (3.4)$$

Deste modo, o tempo requerido para o trajeto do som desde o emissor  $(x_1, y_1)$  até ao receptor  $(x_2, y_2)$  é:

$$t = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{c} = \frac{1}{(kR)^{1/2}} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{1 + y'^2}{T(x, y)} \right)^{1/2} dx \quad (3.5)$$

Tendo em conta o teorema de tempo mínimo de Fermat<sup>6</sup>, pode deduzir-se que

$$y'' = \frac{1}{2} \frac{1 + y'^2}{T(x, y)} \left( z \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \quad (3.6)$$

Após a temperatura  $T(x, y)$  ser obtida existiam os seguintes interesses:

1. Desenvolver o algoritmo que reconstrói o campo de temperatura;

---

<sup>6</sup> Esta será desenvolvida no subcapítulo 4.3.1. e no apêndice 2.1.

2. Calcular a refração usando o resultado acima.

Por não ser possível resolver os pontos 1. e 2. em simultâneo, efetua-se o seguinte:

- a. Uma primeira aproximação do campo de temperaturas assumindo que os caminhos da onda sonora são diretos (primeira aproximação);
- b. A partir do campo de temperaturas obtido, uma primeira aproximação da refração;
- c. Utilizado o ponto b. uma segunda aproximação do campo da temperatura;
- d. Repetição de b. e c. até ter bons resultados.

Isto é, primeiramente concluiriam o que era pretendido, que é uma aproximação do campo de temperaturas, tendo em conta o caminho percorrido pelas ondas sonoras e o tempo efetuado. Depois disto, seria possível calcular aproximações da refração com a equação da trajetória.

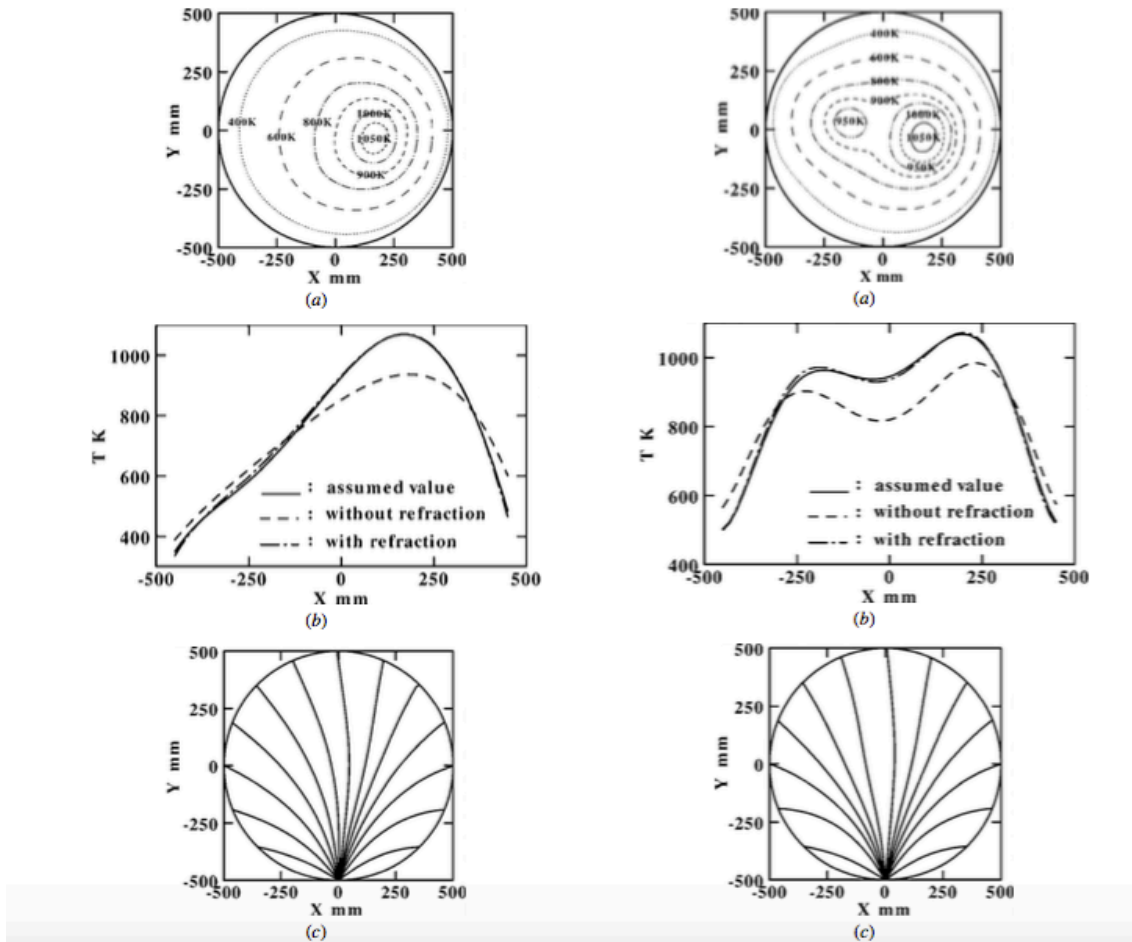
Este processo seria repetido diversas vezes para que houvesse uma melhor precisão dos resultados.

Em modo de confirmação dos resultados dados pelo algoritmo e tendo em conta a refração, os tempos do caminho da trajetória foram calculados utilizando métodos computacionais.

As conclusões tiradas deste trabalho foram as de um desenvolvimento apropriado do algoritmo através do método dos mínimos quadrados e do teorema de Fermat. Chegaram também à conclusão de que, quando a projeção de dados criada por uma simulação computacional é usada para reconstruir campos de temperaturas, a sua precisão pode ser melhorada aplicando um algoritmo que tenha em conta a refração. Para uma melhor resolução é também aconselhado o aumento do número de transdutores.

(J. Lu, 2000, p.p. 693-694).

Nas figuras abaixo podemos observar alguns dos resultados gráficos destes estudos,



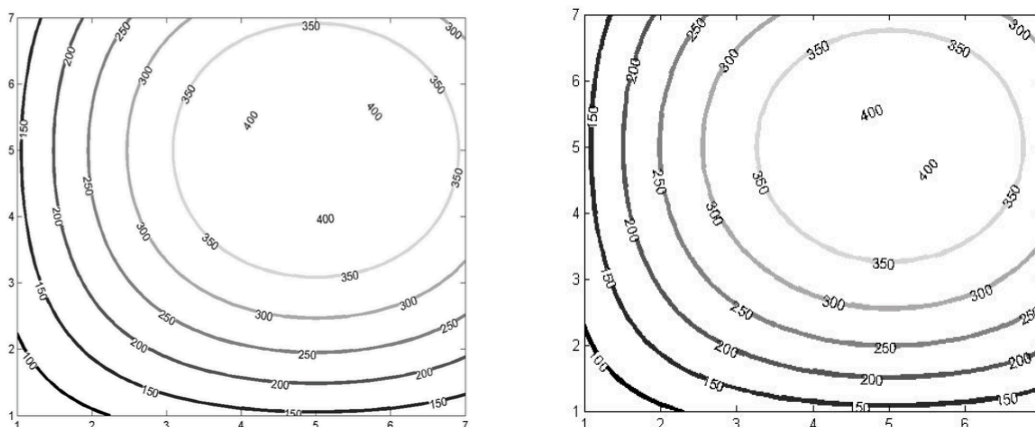
**Figura 14** – Representação de dois campos de temperatura (à esquerda, com um pico de temperatura e à direita com dois); (a) distribuição das temperaturas; (b) distribuição radial; (c) ondas sonoras.

(Lu, 2000)

Em 2008, foi publicado um artigo por Huachen Pan, *et al.*, cujo interesse foi desenvolver um medidor do fluxo de calor das fontes hidrotermais utilizando meios acústicos. No estudo em questão, optaram por um método local, não intrusivo da medição de temperatura e velocidade baseados em técnicas acústicas. A ideia de medição foi utilizar feixes sonoros e ultrassonoros, transmitidos e recebidos por transdutores. O TOF (*Time of flight*) de cada transmissão de som é a função da temperatura e velocidade da água envolvente ao longo do caminho de transmissão (Pan, 2008), sendo o tempo percorrido entre os transdutores após a emissão do sinal.

Baseados na informação do TOF, em cada caminho do sinal, o campo 2D da temperatura e a componente 2D da velocidade seriam representados, obtendo imagens semelhantes às que se obtêm com a técnica de tomografia. O fluxo de calor poderia ser obtido após a distribuição de temperatura e velocidade serem obtidas também. Tendo em conta as condições extremas do fundo do mar, foi decidido neste estudo não utilizar qualquer sensor móvel. Assim, foram utilizados somente sensores do tipo fixo. Com este estudo, primeiro, o TOF para cada caminho foi obtido tendo em conta a distribuição de temperatura. Depois, foi utilizado um método de análise de erro para recuperar as temperaturas. Por fim, foi utilizado um esquema de interpolação para suavizar os dados recuperados (Pan, 2008).

A Figura 15 mostra a distribuição presumida da temperatura e a distribuição obtida posteriormente, da temperatura.



**Figura 15** – Distribuição presumida da temperatura (esquerda) e a distribuição medida da temperatura (direita).

(Pan, 2008)

No ano de 2010 foram tiradas mais algumas conclusões por Wei Fan *et al.*, pois foi efetuado um estudo em representação 2D da distribuição de temperatura em fontes termais no Lago Qiezishan, na China, com recurso a técnicas acústicas. Mais uma vez, foram utilizados métodos não intrusivos por se ter noção de que estes possibilitam uma melhor construção de imagens 2D das fontes hidrotermais, pois garantem a cobertura de uma grande área sem que seja afetada a distribuição de temperatura (Fan, 2010, p.1334).

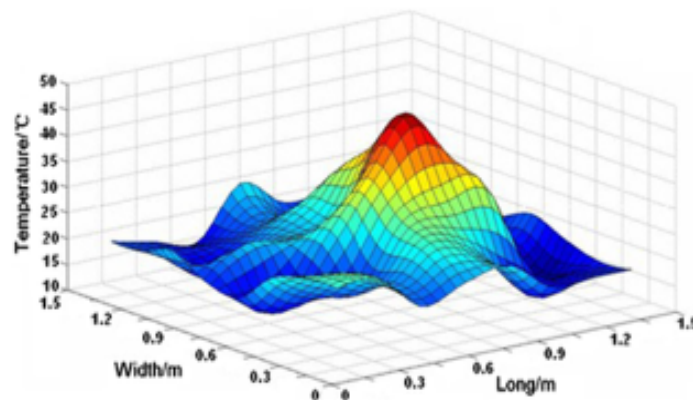
Assim, foi simulada uma estrutura que posteriormente foi colocada no lago em questão para que fosse possível a simulação das fontes hidrotermais. Foi implementado

um método para a construção das imagens 2D da distribuição de temperatura.

Finalmente, seriam efetuadas comparações entre medições acústicas e dados obtidos por termopares<sup>7</sup>. Devido ao facto de esta experiência ter sido efetuada num lago, teve como consequência o facto de as temperaturas não serem tão elevadas como numa fonte hidrotermal no fundo do oceano. No entanto os métodos baseados na medição da propagação de ondas acústicas que foram utilizados podem ser úteis também na medição a grandes profundidades e temperaturas elevadas.

O que concluíram neste estudo foi o facto de que, a medição de temperatura, através da acústica, é mais fidedigna no que toca a pequenas escalas, podendo substituir métodos intrusivos (Fan, 2010, p.p. 1335-1344). Algumas das imagens resultantes deste estudo encontram-se abaixo (Figuras 16 e 17).

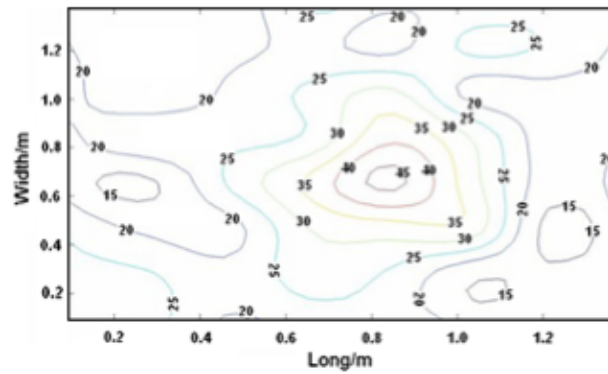
Consideremos que seria muito interessante efetuar um estudo deste género num trabalho posterior. Sabendo que em pequenas escalas, os resultados se tornam mais fidedignos, poderia ser do nosso interesse simular uma fonte hidrotermal e medir tanto os tempos de propagação da trajetória como o estudo da direção da mesma.



**Figura 16** – Representação 3D do campo térmico através do método TLS a partir de dados reais.

---

<sup>7</sup> Sensor muito versátil de medição de temperatura. Quando dois fios compostos por metais diferentes são unidos nas suas extremidades e uma delas é aquecida, há uma corrente contínua que flui no circuito termoelétrico. A outra é ligada a um corpo de temperatura conhecida. Assim, o termopar mede a temperatura desconhecida do corpo relativamente à conhecida do outro.



**Figura 17** – Distribuição da temperatura através do método TLS a partir de dados reais. (Fan, 2010, p.1343)

Em 2012, Yuong Cai *et al.*, prosseguiram com as medições acústicas para determinação do campo da temperatura das fontes hidrotermais. Refletindo acerca de estudos e investigações anteriores (nomeadamente a de Pan *et al.*, 2008 e Lu *et al.*, 2000) visualizaram-se dificuldades no cálculo preciso do atraso de medições em ambientes mais adversos. Isto está diretamente relacionado com a precisão das imagens acústicas do campo da temperatura nas fontes. Constatou-se também que o raio acústico se desloca em linha curva, em campos onde a temperatura varia de forma contínua (caso das fontes hidrotermais). Deste modo, neste estudo começaram a considerar a refração da propagação do som num campo de temperatura não uniforme (Cai, 2012, p.p. 723-724).

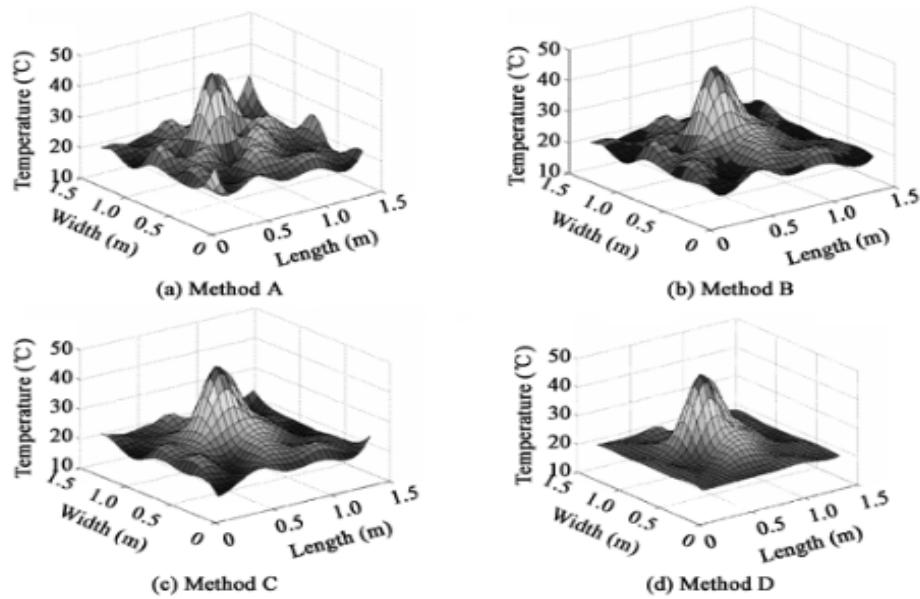
Para a medição de temperatura nestes módulos foram tidos em conta os seguintes passos: primeiramente, os transdutores foram colocados no local onde seria feita a medição, seguidamente um dos transdutores assumiu a função de transmissor, enquanto que os outros assumiram a de recetor. Foram utilizadas técnicas padronizadas de análise de sinais para estimar o tempo de viagem (TOT (*Time of Travel*)) do sinal acústico entre os transdutores por forma a obter a velocidade do som.

Neste caso, para uma certa localização e numa certa profundidade, foi usada a velocidade do som em função da temperatura dada pela seguinte equação:

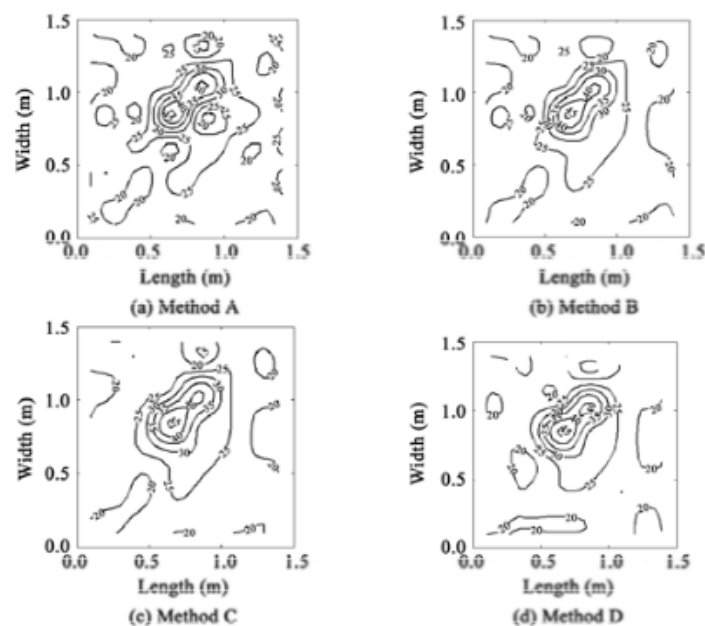
$$c(T) = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (3.7)$$

Este estudo, tal como previsto, aumentou a precisão da medição do campo de temperatura nas fontes hidrotermais, através das duas técnicas utilizadas. No entanto,

permaneceram presentes alguns erros no que diz respeito à medição do TOT. Os resultados encontram-se nas imagens abaixo (Figuras 18 e 19). De acordo com diferentes tratamentos dos sinais. Foram usados quatro diferentes métodos A, B, C e D de complexidade crescente. As análises de erro, após efetuadas, demonstraram que o método que obteve o menor erro foi o Método D. (Cai, 2012, p.p. 724-729).



**Figura 18** – Reconstrução da temperatura em 3D.



**Figura 19** – Isotérmicas da reconstrução do campo da temperatura.

(Cai, 2012, p. 729)

Estes são apenas alguns dos estudos que considerámos e através dos quais estudamos alguns dos comportamentos das fontes hidrotermais. Sendo que existem também alguns outros que incidem sobre o mesmo e até sobre outras características que nós não falaremos neste trabalho. A sequência que expusemos neste capítulo, foi para nós uma linha de pensamento que nos auxiliou na escolha dos métodos utilizados.

Tendo olhado para todos estes estudos efetuados, aqueles que mais nos interessam e nos quais nos debruçaremos mais para obter resultados, são aqueles que fazem um estudo do campo de temperaturas das fontes hidrotermais. E da sua influência na velocidade do som através das mesmas. Escolhemos então estudar a velocidade do som através de raios acústicos.

O facto de já existirem alguns estudos também nos ajudou, pois deste modo já são conhecidos resultados semelhantes em que nos podemos basear para termos uma opinião crítica acerca dos mesmos.

Aqueles em que iremos pegar com mais ênfase serão o de J. Lu *et al.*, 2000 e Young Cai *et al.*, 2012. Destes iremos pegar nas equações do som para aplicarmos ao nosso trabalho.

## **Capítulo 4**

### **Desenvolvimento: Refração em estruturas cilíndricas (profundas)**

Começamos então a aplicar aquilo que falámos até agora. Sendo a nossa ideia efetuar um estudo acerca da propagação do raio sonoro na fonte hidrotermal, a primeira coisa que definimos foi qual seria a forma geométrica que iríamos utilizar, sendo que a forma das fontes, apesar de ter um padrão, não tem valores constantes. Com isto, escolhemos o cilindro, para termos uma primeira perspetiva do comportamento dos raios sonoros, sem recurso a computador.

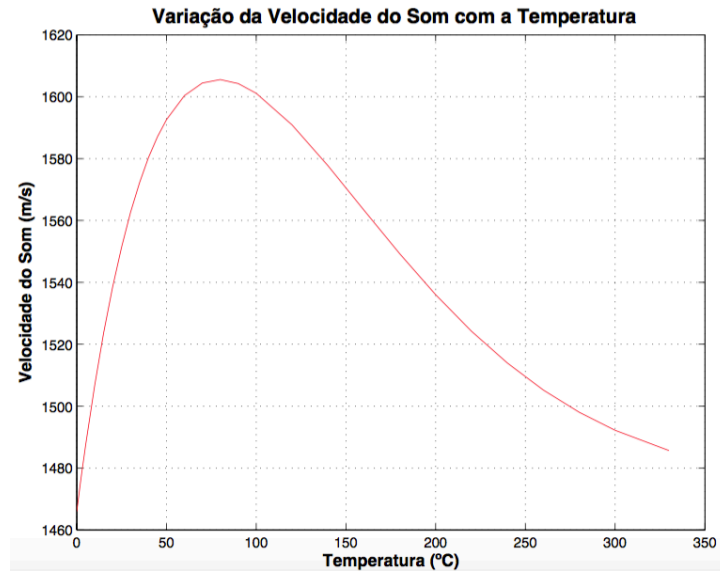
De seguida definimos que este primeiro estudo teria ênfase na incidência apenas horizontal do cilindro ou seja, não haverá variação contínua de  $z$  (verticalmente). Deste modo, primeiramente efetuámos uma simulação num cilindro em que houvesse apenas uma variação da temperatura (uma temperatura para o exterior e outra para o interior) e depois fomos aumentando essas camadas cilíndricas concêntricas. Pois numa real fonte hidrotermal não há camadas, mas sim uma variação contínua da temperatura no seu interior, como é evidente.

#### **4.1. Cilindro homogéneo**

##### **4.1.1. Estudo do gráfico da velocidade do som na água**

Inicialmente foi efetuado um estudo da velocidade do som tendo em conta a equação do som de Del Grosso, já exposta em 2.2.1. e duas equações introduzidas no capítulo anterior, referente a estudos efetuados no passado. Tomámos como exemplo para este gráfico, o campo hidrotermal “Lucky Strike”, constituído por diversas fontes hidrotermais, ( $\varphi = 37^{\circ} 18,5' N$ ;  $L = 32^{\circ} 16,5' W$ ), na profundidade de 1100 m (tornando-se a pressão uma constante). Este gráfico é o início do estudo da propagação horizontal do som nas fontes hidrotermais. Foi tida como base uma salinidade de 35 ppm por ser a salinidade média da água do mar abaixo dos 1000 m. Para a equação de Del Grosso, tendo em conta o cálculo da pressão, também apresentado em 2.2.1., considerámos a latitude da fonte:  $\varphi = 37^{\circ}18'5N$ .

O gráfico obtido pode observar-se na Figura 20.



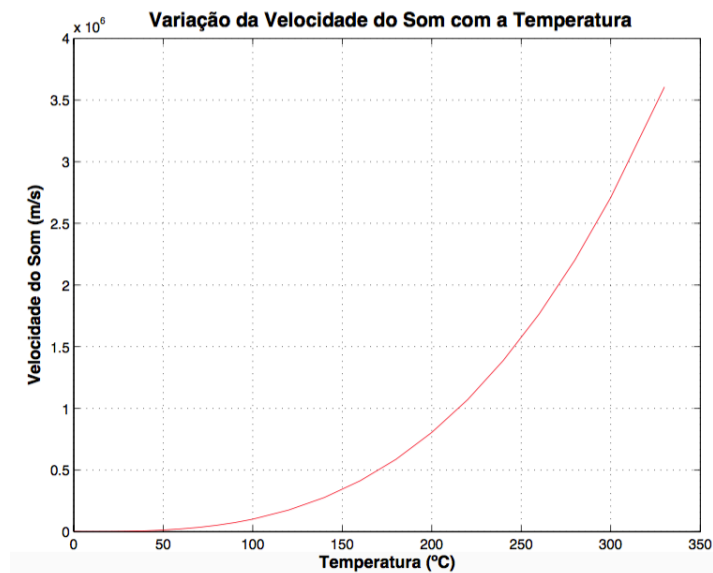
**Figura 20** – Gráfico da velocidade do som  $c(T,S,P)$ , segundo modelo de Del Grosso.

Verifiquemos mais uma vez o facto de com o aumento de temperatura, haver uma inversão da velocidade do som, neste caso.

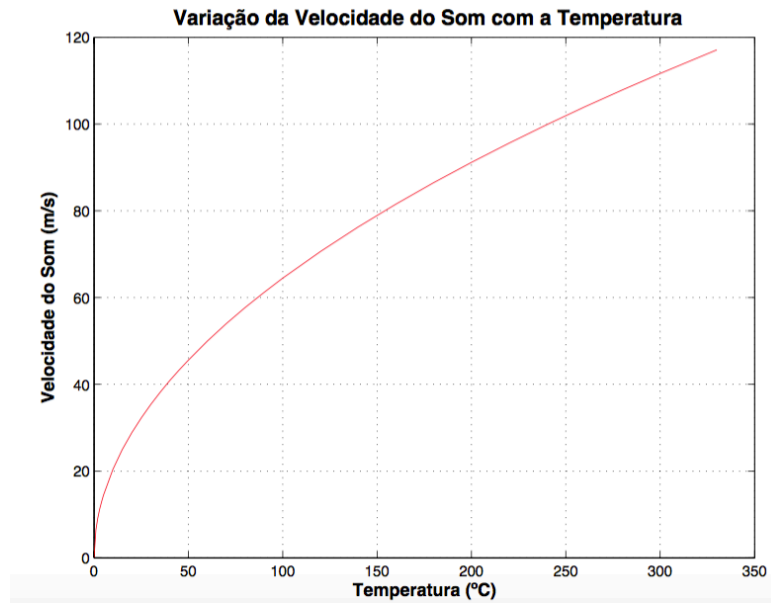
Efetuuou-se, também o mesmo gráfico para duas das equações introduzidas no capítulo anterior:

$$c(T) = \sqrt{k * R * T(x, y)} \text{ (Figura 21)}$$

$$c(T) = a + bT + cT^2 + dT^3 \text{ (Figura 22).}$$



**Figura 21** – Gráfico da velocidade do som  $c(T)$ , segundo modelo  $c = \sqrt{k * R * T}$ .



**Figura 22** – Gráfico da velocidade do som  $c(T)$ , segundo modelo  $c(T) = a + bT + cT^2 + dT^3$ .

Nestes últimos dois gráficos, reparemos que, apesar de os valores da velocidade serem muito diferentes daquilo que se espera, estes têm a tendência a ser crescentes, não invertendo a sua velocidade com o aumento de temperatura. Isto é aquilo que nós pretendemos obter para conseguirmos estudar a trajetória do raio sonoro para grandes temperaturas.

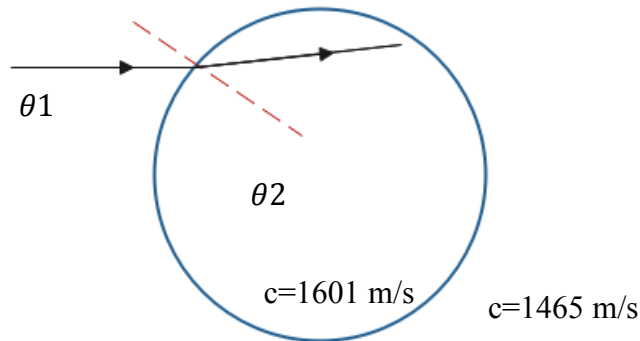
Estes três gráficos foram efetuados através da ferramenta MATLAB (sendo que o seu código se encontra no Apêndice 1.1 e 1.3 e no MATLAB têm o nome de “graf\_DelGrosso\_temp.m” e “gráficos\_de\_cT.m”).

#### 4.1.2. Estudo da propagação do som no cilindro

Utilizaremos inicialmente a figura de um cilindro para nos auxiliar nos cálculos da propagação do raio sonoro no interior da fonte hidrotermal por esta ser a forma geométrica mais próxima.

Para o estudo horizontal da propagação do som no cilindro foi usada a lei refração de Snell. Para um primeiro estudo, utilizámos valores da Figura 20, em que  $c_1 = 1465$  m/s e  $c_2 = 1601$  m/s, considerando que o raio sonoro atravessa uma temperatura de 0°C para 100°C.

Com esta primeira análise, assumindo um cilindro homogéneo, pudemos observar que o  $\theta_2$  se afasta ligeiramente da normal ao penetrar o mesmo. Isto acontece, quando a velocidade presente no meio do raio incidente é menor que a presente no meio do raio refratado.



**Figura 23** – Propagação do som com apenas uma variação de  $c$ .

Na figura acima representada o círculo azul representa o cilindro (fonte) visto de cima, as retas pretas os raios sonoros e o tracejado vermelho é a normal à superfície (neste caso, limite da zona cilíndrica).

#### 4.2. Várias camadas cilíndricas

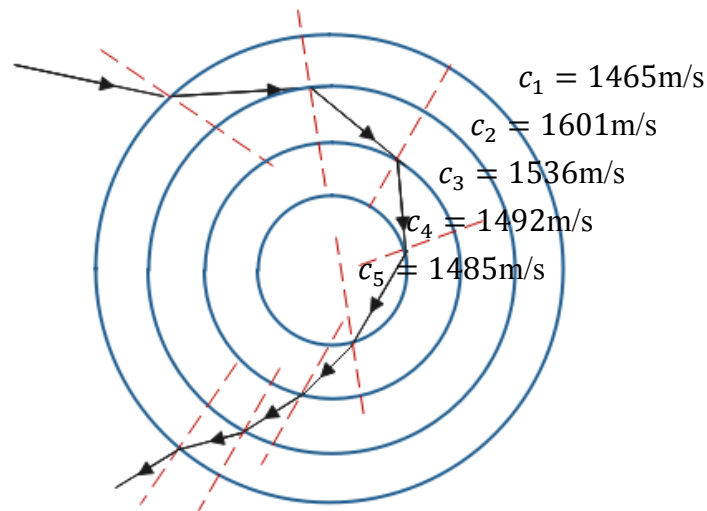
Considerando que numa fonte hidrotermal a temperatura da água aumenta quando mais perto estiver do centro, tomámos como exemplo inicial simples, quatro camadas cilíndricas de igual dimensão com temperaturas diferentes e crescentes para o eixo (centro) do cilindro (logo  $c$  variante). Inicialmente o raio incidirá de uma região em que a água tem uma temperatura muito baixa (oceano circundante) para um em que as temperaturas da água serão muito altas (fonte hidrotermal). Seguidamente, este continuará a atravessar a fonte (horizontalmente), passando pelas quatro camadas. À medida que o raio muda de camada a temperatura altera, ou seja, a velocidade do som alterará também. Isto fará com que o raio se comporte de forma variável.

Mais uma vez, utilizando como base a Figura 20, ou seja, tendo em conta a equação de Del Grosso, passámos inicialmente dos  $0^\circ\text{C}$  para os  $100^\circ\text{C}$ . Seguidamente para os  $200^\circ\text{C}$  e de seguida para os  $300^\circ\text{C}$ . E por último dos  $300^\circ\text{C}$  para os  $330^\circ\text{C}$ . O que acontece à velocidade do som com estas temperaturas é uma inversão da mesma. Isto é,

dos 0°C para os 100°C a velocidade aumenta, mas a partir desta temperatura, começa a diminuir. Com isto há também uma mudança no comportamento dos ângulos em relação à normal.

Sendo assim, temos  $c_1 = 1465$  m/s,  $c_2 = 1601$  m/s,  $c_3 = 1536$  m/s,  $c_4 = 1492$  m/s e  $c_5 = 1485$  m/s. Sabendo que ao diminuir a velocidade o raio incidente se aproxima da normal, temos o comportamento exibido na figura seguinte (Figura 24).

Consideremos que estas velocidades foram calculadas pela expressão de Del Grosso para obtermos uma imagem inicial daquilo que obteríamos como visualização da trajetória do raio sonoro tendo também em conta a Lei de Snell.



**Figura 24** – Propagação do som com mais que uma variação de  $c$ .

Na figura acima representada o círculo azul representa o cilindro (fonte) visto de cima, os segmentos de reta pretos os raios sonoros e o tracejados vermelhos são a normal à superfície, em cada transição (neste caso, limite da fonte).

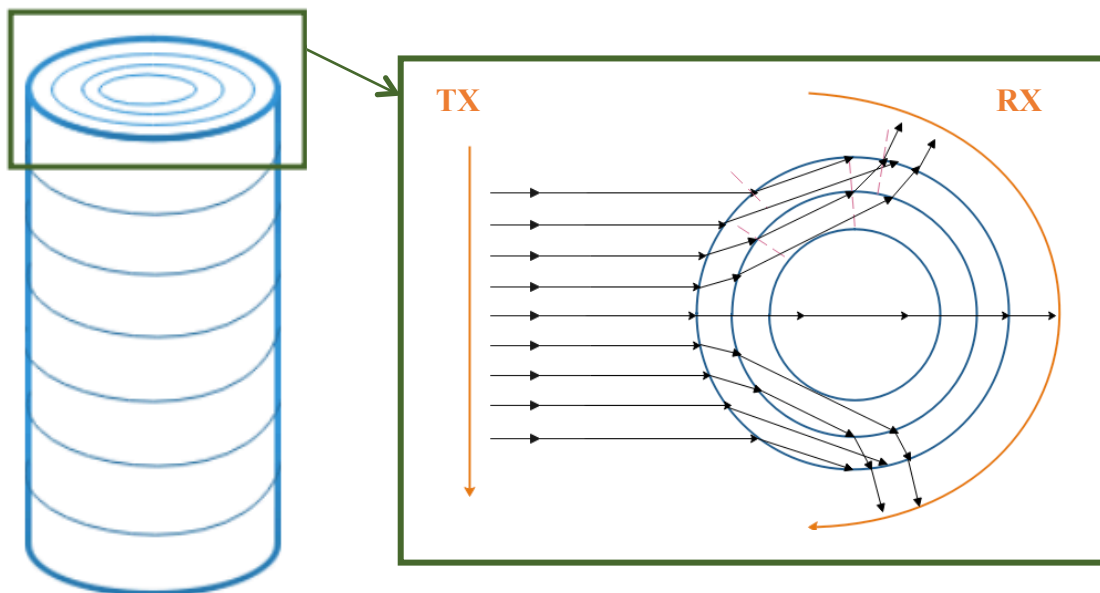
A trajetória representada na Figura 24 é uma simulação baseada no gráfico da Figura 20, sendo que o comportamento do raio acústico poderá variar consoante as diferentes características das fontes hidrotermais e as diferentes equações selecionadas. Apesar de todas as fontes, na sua base de constituição, terem o mesmo tipo de características, as suas dimensões, variação de temperatura e outras, variam.

É de grande relevância mencionar que para o estudo do raio acústico é-nos necessário ter, pelo menos, dois transdutores, um transmissor (TX) e um recetor (RX)

com posições variáveis. Pois só desta forma conseguiremos estudar a propagação do raio acústico.

Abaixo, na Figura 25, temos um exemplo do que realmente é suposto acontecer ao raio acústico, ao percorrer uma fonte hidrotermal. Isto porque a velocidade do som aumenta para o interior da fonte hidrotermal, o que no caso dos cálculos da mesma pela equação de Del Grosso não acontece. Acontecendo para outras expressões diferentes, pois o suposto comportamento da velocidade do som dependendo da temperatura é de aumentar enquanto esta aumenta.

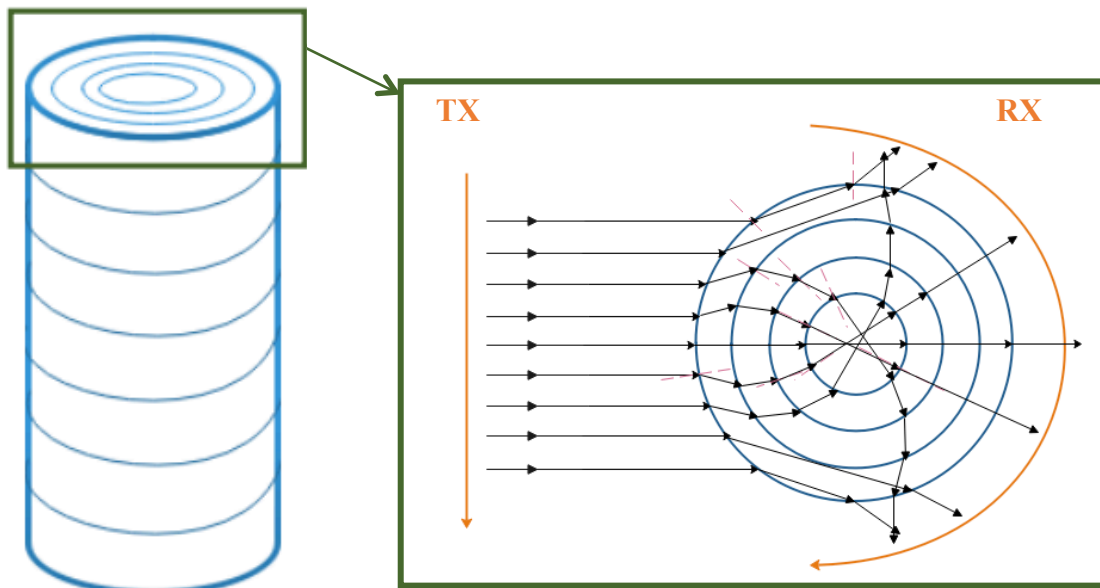
O que pretendemos com o modelo criado em MATLAB é demonstrar a figura abaixo, com diferentes expressões e valores, introduzidos por nós.



**Figura 25** – Fonte hidrotermal com transmissor (TX) e recetor (RX) – Aumento da velocidade do som para o centro da fonte.

Tenhamos noção de que nada difere da imagem anterior (Figura 24), em termos de significado dos símbolos e cores. Apenas acrescentámos as possíveis posições de interesse do transmissor (TX) e do recetor (RX) que se encontram a cor de laranja. O cilindro à esquerda, representa uma fonte hidrotermal, para que entendamos como iremos estudar as suas diversas camadas.

Pelo contrário, se continuássemos com o raciocínio da equação de Del Grosso a reação que o raio teria perante esta seria a da figura 26, que não é o pretendido.



**Figura 26** – Fonte hidrotermal com transmissor (TX) e recetor (RX) – Aumento da temperatura para o centro da fonte.

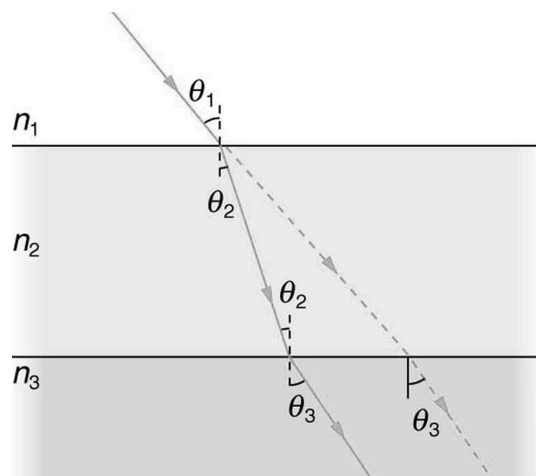
É importante lembrar que, devido às características das fontes hidrotermais, a trajetória do raio não será reta (tal como podemos observar nas figuras anteriores). É devido a este facto que o recetor do sinal cobriria uma maior área do que o transmissor. Podemos observar uma projeção de uma primeira proposta para o posicionamento dos transdutores.

A trajetória dos raios sonoros que observamos acima (Figura 26) é efetuada através do cálculo da velocidade do som na água por Del Grosso que, apesar de ser uma equação credível e com resultados aceitáveis, não está prevista para altas temperaturas (tal como as de uma fonte hidrotermal). Assim, apesar de considerarmos a temperatura a aumentar para o centro da fonte, o mesmo não acontece com a velocidade neste caso.

Sabemos então com isto, que a equação de Del Grosso, apesar de ser uma boa expressão para o estudo acústico não é um bom exemplo a ser aplicado naquilo que queremos estudar (devido ao intervalo de temperaturas em questão). Assim, esta poderá ser apenas utilizada como referência para mais tarde, se forem efetuadas medições experimentais concretas vir a ajudar a criar novas funções de velocidade do som a altas temperaturas, para elaboração de novos modelos. Neste caso em concreto, será utilizada a título de comparação para com as outras expressões que também já dispomos. Pois,

visto ainda não haver grandes desenvolvimentos nesta área, utilizaremos o que temos disponíveis e conhecemos.

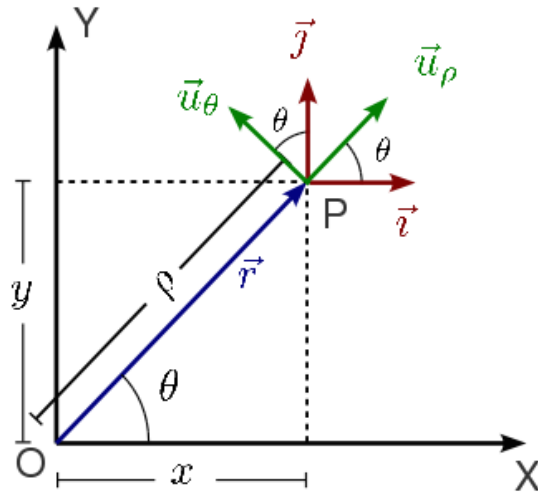
Em 4.1.2. é fácil o cálculo de  $\theta_2$ , pois existe apenas uma camada, ou seja, uma mudança na trajetória. Quando se trata de várias camadas a situação torna-se mais complicada, visto que as superfícies de separação entre as diferentes camadas, cada uma à sua temperatura, não são planas (ao contrário do que acontece na Figura 27). Devido ao facto de os meios não serem planos, o novo ângulo incidente após a refração não é igual ao ângulo refratado.



**Figura 27** – Cálculo do ângulo do raio refratado em meios planos.

(“The law of refraction”, <https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/25-3-the-law-of-refraction/>)

Temos, com esta figura a confirmação do que foi dito anteriormente. O que nós pretendemos calcular para as fontes não é tão simples. Ou seja, apesar de a situação ser semelhante, havendo assim várias camadas com diferentes temperaturas, nas fontes a separação das mesmas não é plana como na figura acima. Poderíamos então, calcular os  $\theta_{incidente}$ , para cada camada sucessiva, através de coordenadas polares.



**Figura 28** – Coordenadas polares.

Em relação a estas coordenadas recordamos que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \quad (4.2)$$

com

$$\begin{cases} \rho \in [0, +\infty[ \\ \theta \in [0, 2\pi[ \end{cases} \quad (4.3)$$

Sabendo que, com coordenadas cartesianas em 2D, um raio vetor posição será

$$\vec{r}(x, y) = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y. \quad (4.4)$$

Então, usando (4.2) vem

$$\vec{r} = \rho \cos\theta \hat{u}_x + \rho \sin\theta \hat{u}_y. \quad (4.5)$$

Tendo em conta a Figura 28, podemos concluir que

$$\vec{u}_\rho(\rho, \theta) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}(\rho, \theta)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}(\rho, \theta) \right|} = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y \quad (4.6)$$

e que

$$\vec{u}_\theta(\rho, \theta) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\rho, \theta)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\rho, \theta) \right|} = -\text{sen}\theta \vec{u}_x + \text{cos}\theta \vec{u}_y. \quad (4.7)$$

Concluimos que os versores das coordenadas polares dependem apenas de  $\theta$ , isto é,

$$\vec{u}_\rho(\theta) = \text{cos}\theta \vec{u}_x + \text{sen}\theta \vec{u}_y; \quad (4.8)$$

$$\vec{u}_\theta(\theta) = -\text{sen}\theta \vec{u}_x + \text{cos}\theta \vec{u}_y. \quad (4.9)$$

A direção dos versores indicados acima variam com o azimute, no entanto, estes também são ortogonais:

$$\vec{u}_\rho(\theta) \cdot \vec{u}_\theta(\theta) = 0. \quad (4.10)$$

Podemos então tirar algumas conclusões em relação à componente radial do vetor posição e à componente azimutal:

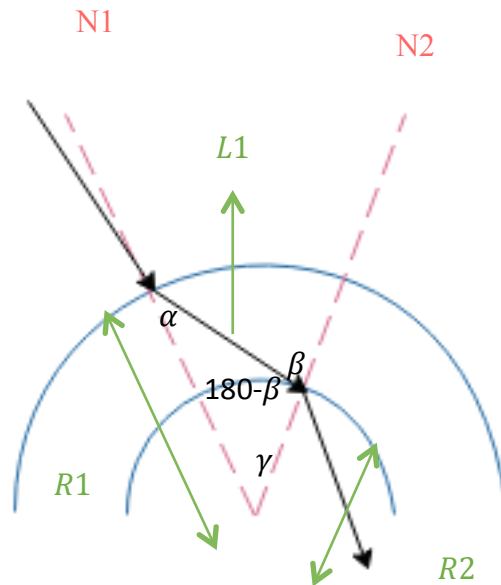
$$r_\rho = \rho \quad (4.11)$$

$$r_\theta = 0 \quad (4.12)$$

e então:

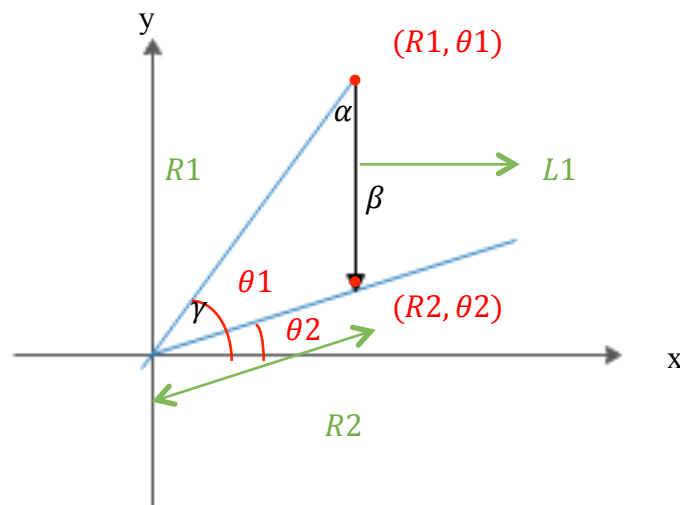
$$\vec{r}(\rho, \theta) = \rho \vec{u}_\rho(\theta) \quad (4.13)$$

Vejamos então agora, a nossa questão inicial, o cálculo dos  $\theta_{\text{incidentes}}$  após a possível refração no meio da fonte hidrotermal.



**Figura 29** – Visualização da trajetória do raio sonoro de cima.

Passemos agora esta questão para um eixo de coordenadas x e y (Figura 30).



**Figura 30** – Projeção da trajetória do raio sonoro para um gráfico de coordenadas x e y, para facilitar o cálculo em coordenadas polares.

Tendo em conta as Figuras 29 e 30 tentámos encontrar uma forma de calcular os  $\theta_{incidentes}$  após a refração no meio da fonte hidrotermal.

$$\begin{aligned} \alpha + (180 - \beta) + \gamma &= 180 \\ \Rightarrow \beta &= \alpha + \gamma \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$R1 = R2\cos\gamma + L1\cos\alpha \quad (4.15)$$

$$L1 \approx \frac{R1 - R2}{\cos\alpha} \Rightarrow L1 \approx R2\cos(\gamma) + (R1 + R2) \quad (4.16)$$

$$\cos(\gamma) \approx \frac{R1}{R2} \quad (4.17)$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{R1}{R2}\right)$$

$$\beta = \alpha + \cos^{-1}\left(\frac{R1}{R2}\right) \quad (4.18)$$

Tendo em conta agora a Figura 28, consideremos os pontos

$$(R1, \theta1) = (x1, y1) \quad (4.19)$$

$$(R2, \theta2) = (x2, y2) \quad (4.20)$$

então,

$$L1 = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} \quad (4.21)$$

com

$$x1 = R1\cos\theta1; \quad (4.22)$$

$$y1 = R1\sen\theta1; \quad (4.23)$$

$$x2 = R2\cos\theta2; \quad (4.24)$$

$$y2 = R2\sen\theta2. \quad (4.25)$$

Temos então,

$$L1 = \sqrt{(R2\cos\theta2 - R1\cos\theta1)^2 + (R2\sen\theta2 - R1\sen\theta1)^2} \quad (4.26)$$

Com isto, se supuséssemos um  $\theta2$ , conseguiríamos chegar ao valor pretendido, por exemplo, se tivéssemos em conta  $\theta2 = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow L1 &= \sqrt{(R2 - R1\cos\theta1)^2 + R1^2\sin^2\theta1} \\
 &= \sqrt{R2^2 + R1^2\cos^2\theta1 - 2R1R2\cos\theta1 + R1^2\sin^2\theta1} \\
 &= \sqrt{R2^2 + R1^2 - 2R1R2\cos\theta1}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{R1^2 + R2^2 - 2R1R2\cos\theta1} = \sqrt{R1^2 + R2^2 - 2R1R2\cos\gamma} \\
 R1 &= L1\cos\alpha + R2\cos\gamma \\
 &= \sqrt{R1^2 + R2^2 - 2R1R2\cos\gamma} * \cos\alpha + R2\cos\gamma
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Ao por tudo em ordem a  $\gamma$  saberíamos os valores de  $\alpha$ ,  $R1$  e  $R2$ . E não saberíamos os de  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $L1$ , sendo que o  $\gamma$  é o valor que nós queremos saber ( $\theta_{incidentes}$  após a refração no meio da fonte hidrotermal).

Tenhamos em conta que estes cálculos seriam apenas utilizados se existisse a necessidade de calcular os ângulos à mão para obter as trajetórias. O que não será necessário devido à elaboração de um programa. Ainda assim, são importantes para uma boa abordagem a estas trajetórias e ao seu comportamento perante diferentes temperaturas, pois as características intrínsecas a estas coordenadas tornam possível o cálculo da trajetória do raio acústico nas fontes hidrotermais.

Deste modo, podem servir como redundância em futuros cálculos e justificações para obtenção de mais conclusões relativas a este tema. No nosso caso, foram-nos úteis para a determinação da expressão da temperatura no interior da fonte hidrotermal, que se encontra no subcapítulo 5.2..

### 4.3. Cilindro com variação contínua de $c(T)$

Numa fonte hidrotermal não existem camadas bem definidas de temperatura, tal como foi simulado e proposto nos subcapítulos anteriores. No entanto, nós sabemos que a sua temperatura é maior quanto mais no centro da fonte, pois é onde esta tem maior contacto com a fissura do solo oceânico por onde foi extraída a água quente. Sabemos também que a fonte apresenta uma estrutura de grosso modo cilíndrica (em chaminé), o que significa que o seu estudo horizontal (como quem olha para a fonte de cima), será feito em aproximação, na forma de um círculo. Deste modo, podemos afirmar que a

evolução do raio sonoro será feita através de infinitas “camadas” de variação de temperatura, cada uma de espessura infinitesimal no limite.

O  $z$  será considerado como constante, pois será apenas tida em conta o cálculo da velocidade do som na camada horizontal, não havendo deste modo variação na profundidade. Se houvesse esta variação poderiam ser consideradas as coordenadas cilíndricas, pois estas são o equivalente às polares mas também com a variação do  $z$ .

Tal como já foi dito anteriormente, não existem camadas definidas logicamente nas fontes hidrotermais. No entanto, visto que estas têm um comportamento equivalente entre si, assumimos que as trajetórias sejam semelhantes. Por isso, pretendemos, com o auxílio destes cálculos, efetuar um modelo das fontes e do comportamento do raio sonoro ao atravessar as mesmas.

O comportamento do raio poderá vir a ser diferente nas diferentes “camadas” também verticais, pois a velocidade do som deixa-se também afetar pela profundidade, apesar de não tanto como com a temperatura.

Principalmente porque numa fonte hidrotermal não visualizaremos um cilindro, mas sim uma estrutura em que a parte superior já está mais suave e dispersa. Isto sim, poderá influenciar os resultados quando alterada a profundidade estudada. Pois, no começo da fonte, existirá um muito mais elevado choque de temperaturas e no seu fim já estarão mais envolvidas e semelhantes à temperatura esperada no oceano profundo.

No capítulo seguinte, teremos então o desenvolvimento computacional daquilo que propusemos desde o início estudar. Isto é, o comportamento da trajetória do raio sonoro no interior das fontes hidrotermais.

## **Capítulo 5**

### **Desenvolvimento de resultados para diferentes $c(T(x,y))$ a partir de meios computacionais (MATLAB)**

Começaremos agora um capítulo em que nos propomos a recorrer à ferramenta MATLAB como auxiliar de cálculo e construção de gráficos. A nossa ideia em construir este código é a de ter um meio de cálculo e visualização dos nossos resultados.

Então, primeiramente iremos mostrar a variação de temperatura das fontes hidrotermais lateralmente (em 3D) e de cima (em 2D) para termos uma visualização inicial do que temos vindo a explicar até aqui.

Posteriormente, iremos expor e comparar as três expressões de  $c(T)$ , em que com diversos gráficos possamos verificar o comportamento dos raios sonoros para cada uma delas e calcular os tempos de propagação.

#### **5.1. Aplicação do princípio de Fermat a diferentes equações para trajetórias do raio sonoro**

O estudo do comportamento do raio sonoro dentro das fontes hidrotermais, e já tendo em conta tudo o que foi dito nos capítulos anteriores, será na prática uma aplicação da tomografia acústica. Esta é normalmente utilizada para reconstrução de características do oceano ao nível da mesoescala. São colocados emissores e recetores em várias posições e são criados caminhos de sinais acústicos. A diferença do tempo da viagem de cada caminho no volume de água (comparado com modelos computacionais) é invertido para estudar anomalias na velocidade do som. Estas anomalias são utilizadas para calcular parâmetros do oceano (por exemplo temperaturas ou salinidade). Estes parâmetros ajudam a calcular a dinâmica do oceano numa determinada área (Ostashev, 2009, p.p. 125-127). Nós faremos o processo inverso, suporemos distribuições de temperatura da água e calcularemos raios sonoros e tempos de propagação.

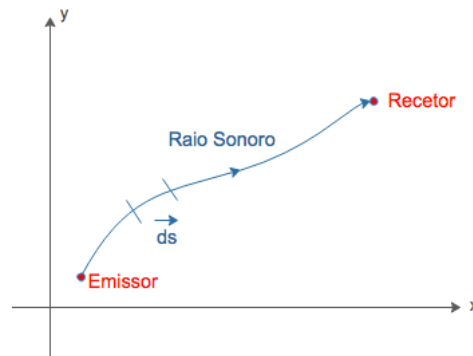
Tal como já foi mencionado anteriormente, serão utilizados raios sonoros e não ondas, por estes providenciarem uma imagem mais simples da transmissão do som no

oceano. Suporemos portanto, que são válidas as aproximações mencionadas no capítulo 2, ou seja, que as frequências sonoras usadas são suficientemente elevadas para que os comprimentos de onda sejam muito menores que as dimensões da fonte hidrotermal.

De facto, na tomografia podemos considerar dois problemas, o direto e o inverso. No primeiro, tendo a velocidade do som (considerando propriedades da refração) e as características da fonte do som, é possível detalhar computacionalmente o sinal no recetor. Poderemos ir mais longe e imaginar várias distribuições razoáveis de temperatura, deduzir as propriedades dos raios sonoros e aproximar essas distribuições da real, aproximando os resultados teóricos aos observadores. No inverso queremos calcular propriedades do oceano (velocidade, temperatura e outros) tendo dados dos sinais transmitido e recebido (Ostashev, 2009, p.p. 127-129).

No nosso caso, não procedendo para a parte experimental, iremos então deduzir e interpretar para vários exemplos da distribuição de temperatura, em diferentes profundidades, a trajetória de raios sonoros e os tempos de propagação respetivos.

Introduzindo o Princípio de Fermat para raios sonoros, com a finalidade de chegar à equação da trajetória dos mesmos temos o esquema geral da figura seguinte (processo utilizado e mostrado do capítulo 3, dos estudos anteriores, por Lu, 2000).



**Figura 31** – Exemplo da trajetória de um raio sonoro para auxílio da introdução o princípio de Fermat.

O princípio de Fermat ou princípio do tempo mínimo afirma que o facto de a trajetória ter menor distância não significa que esta tenha menor tempo. O que acontece então é a procura da menor distância afirmando que o tempo deve ser mínimo (derivando e igualando o tempo a zero para encontrar o valor mínimo de  $ds$ ).

Aqui será,

$$\begin{aligned} |\vec{ds}| &= ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \end{aligned} \quad (5.1)$$

e o tempo entre a emissão ( $E$ ) e a receção ( $R$ ) é, dado que,  $dt = \frac{ds}{c}$  (sendo  $ds$  um elemento infinitésimo de comprimento,

$$t_{E \rightarrow R} = \int_E^R \frac{ds}{c(x, y)} \quad (5.2)$$

com  $c(x, y)$  sendo a velocidade do som em cada ponto  $(x, y)$ , com  $z$  constante. Substituindo, vem

$$t_{E \rightarrow R} = \int_{(x_E, y_E)}^{(x_R, y_R)} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{c(x, y)} dx. \quad (5.3)$$

Segundo o princípio de Fermat a trajetória  $y(x)$  do raio é tal que  $t_{E \rightarrow R}$  é mínimo.

Então, a variação do tempo de percurso em torno da trajetória real será nula,

$$\Rightarrow \delta t_{E \rightarrow R} = 0 \Rightarrow \delta \int_E^R \frac{ds}{c(x, y)} = 0 \quad (5.4)$$

Neste caso será

$$\delta \int_{(x_E, y_E)}^{(x_R, y_R)} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{c(x, y)} dx = 0 \quad (5.5)$$

que é da forma

$$\delta \int_A^B F(x, y, y'(x)) dx = 0, \quad (5.6)$$

condição esta que, de acordo com o cálculo das variações, leva à equação de Euler-Lagrange respetiva:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (5.7)$$

com

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{c(x, y)} \text{ com } y'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \quad (5.8)$$

Com isto chegamos à seguinte expressão (ver Apêndice 2):

$$y''(x) = \frac{1 + y'(x)^2}{c(x, y)} \left[ y'(x) \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \right] \quad (5.9)$$

sendo esta a equação diferencial geral da trajetória  $y(x)$  do raio sonoro que iremos utilizar, a duas dimensões. Trata-se, como se vê, de uma equação diferencial de segunda ordem, não linear.

Iremos então neste subcapítulo propor o estudo das trajetórias dos raios para três exemplos de possíveis equações de  $c(x, y)$ . A primeira é

$$c(x, y) = \sqrt{kR} \sqrt{T(x, y)} \quad (5.10)$$

em que recordamos que  $k$  é a relação dos calores específicos e  $R$  é a constante dos gases. Neste caso a equação da trajetória é a seguinte (Apêndice 2),

$$y''(x) = \frac{1 + y'(x)^2}{2T(x, y)} \left[ y'(x) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right] \quad (5.11)$$

A segunda é,

$$c(x, y) = \alpha + \beta T(x, y) + \gamma T^2(x, y) + \varepsilon T^3(x, y) \quad (5.12)$$

em que  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\varepsilon$  são coeficientes da fórmula. Neste caso temos então a seguinte equação da trajetória (Apêndice 2),

$$y''(x) = \frac{1 + y'(x)^2 [2\gamma T(x, y) + 3\varepsilon T^2(x, y)]}{\alpha + \beta T(x, y) + \gamma T^2(x, y) + \varepsilon T^3(x, y)} \left[ y'(x) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right] \quad (5.13)$$

Por último, incluímos a já anteriormente falada equação de Del Grosso,

$$c(T, S, P) = 1449,08 + 4,57T e^{-\left[\frac{T}{86,9} + \left(\frac{T}{360}\right)^2\right]} + 1,33(S - 35) e^{-\frac{T}{120}} + 0,1522P e^{\left[\frac{T}{1200} + \frac{S-35}{400}\right]} + 1,46 * 10^{-5} P^2 e^{-\left[\frac{T}{20} + \frac{S-35}{10}\right]} \quad (5.14)$$

em que a equação de trajetória obtida foi calculada através do MATLAB e é demasiado extensa, encontrando-se no código do programa em apêndice (Apêndice 4).

A escolha destas equações não se deu de forma aleatória. As duas primeiras mencionadas são equações que já foram utilizadas em estudos anteriores.

Para a primeira (Lu, 2000), havia o objetivo de projetar, em duas dimensões, a medição de gases a altas temperaturas, tendo em conta a refração das ondas de som seguindo pelo caminho da pirometria acústica onde se assume que a velocidade do som é função da temperatura do gás. Este efeito é inteiramente relevante para a construção de campos de temperatura pois quando uma onda sonora passa por um campo de temperatura não uniforme, esta sofre refração. Este algoritmo foi confirmado através de uma projeção de dados criada por uma simulação computacional. Foi então simulado um campo de medições com a forma de um círculo e com 16 transdutores (que servem simultaneamente de transmissores e recetores).

No nosso caso, em vez de um gás, estamos perante um meio aquático. Ainda assim, o objetivo do estudo é o mesmo. Mas, apesar de construirmos campos de temperatura através da refração das ondas sonoras, pretendíamos estudar a trajetória do raio acústico no interior de um campo de temperaturas não uniforme (fonte hidrotermal), já sabendo as respetivas temperaturas.

Para a segunda expressão (Cai, 2012), os estudos efetuados prosseguiram com as medições acústicas para determinação do campo da temperatura das fontes hidrotermais, onde se constatou também que o raio acústico se desloca em linha curva,

em campos onde a temperatura varia de forma contínua. Deste modo, neste estudo começaram a considerar a refração da propagação do som num campo de temperatura não uniforme. Para a medição de temperatura nestes módulos foram tidos em conta os seguintes passos: primeiramente, os transdutores foram colocados no local onde seria feita a medição, seguidamente um dos transdutores assumiu a função de transmissor, enquanto que os outros assumiram a de recetor. Foram utilizadas técnicas padronizadas de análise de sinais para estimar o tempo de viagem do sinal acústico entre os transdutores por forma a obter a velocidade do som.

Neste caso, para uma certa localização e numa certa profundidade, foi usada a velocidade do som em função da temperatura dada pela equação que decidimos utilizar em segundo lugar.

Este estudo, ao contrário do anterior, foi complementado com a parte experimental, tendo havido a reconstrução dos campos de temperatura de fontes termais num lago, na China. Estes campos têm temperaturas inferiores às fontes hidrotermais oceânicas que pretendemos estudar. No entanto são um bom exemplo experimental, sendo que é ainda muito complicado colocar qualquer equipamento para as estudar a tão grandes profundidades.

Para nós, mais uma vez o problema que propomos é o que estudar a velocidade do som e a trajetória do raio acústico efetuada no campo de temperaturas.

A equação de Del Grosso, tal como já foi mencionado anteriormente, é uma equação que não está prevista para as temperaturas existentes nas fontes hidrotermais. No entanto, é uma função cujos resultados são credíveis e que nos é útil em termos de comparação. Tanto para o que pretendemos, como para o que não pretendemos obter. Isto é, nós estudamos anteriormente o comportamento da velocidade do som, existindo uma ideia de como é suposto esta reagir ao aumento de temperatura. E já tendo feito os cálculos dos capítulos anteriores sabemos que segundo a equação de Del Grosso não há este comportamento e sabemos o porquê.

Assim, ao efetuarmos o modelo, posteriormente, saberemos o porquê deste do comportamento gráfico desta função. E desse modo, teremos um termo de comparação quando forem elaborados os gráficos com as expressões que nós pretendemos que deem os resultados previstos.

O uso destas três expressões será exemplificativo, pois não existem ainda estudos com expressões previstas para tão elevadas temperaturas como as das fontes hidrotermais. É importante relembrar que a nossa questão central se debruça nas características físicas de uma fonte hidrotermal possíveis de se estudarem, recorrendo a técnicas acústicas. Estas expressões e o modelo construído nesta dissertação são um início do estudo destas características, e uma boa base para o desenvolver de uma nova função melhor para o cálculo da velocidade do som nestes ambientes.

Vejam agora o seguimento da construção do modelo pretendido. Começaremos então por supor a distribuição de temperaturas para cada profundidade. Após isto, tendo em conta as diferentes expressões da velocidade do som, iremos inseri-las na seguinte equação (expressão da trajetória):

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{c(x, y)} \left( y' \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \right) \quad (5.15)$$

de cada  $c(T(x, y))$ .

Deste modo, obtemos a trajetória  $y(x)$  para cada profundidade e expressão pretendida.

Após isto aplicaremos a expressão:

$$t = \int_E^R \frac{ds}{c}, \quad (5.16)$$

correspondente a cada uma das equações de velocidade  $c(T(x, y))$  de modo a obter uma distribuição de tempos de propagação entre os emissores e recetores que seriam colocados na fonte hidrotermal. Esta equação foi também baseada no estudo de Lu, 2000.

Para a equação 5.10, 5.12 e 5.14 obtemos as seguintes equações de tempo, respetivamente:

$$t = \frac{1}{\sqrt{kR}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{T(x, y)}} dx, \quad (5.17)$$

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{a+bT+cT^2+dT^2} dx, \quad (5.18)$$

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1449.08+4.57T e^{-\left[\frac{T}{86.9}+\left(\frac{T}{360}\right)^2\right]}+1.33(S-35)e^{-\frac{T}{120}}+0.1522P e^{\left[\frac{T}{1200}+\frac{S-35}{400}\right]}+1.46*10^{-5}P^2 e^{-\left[\frac{T}{20}+\frac{S-35}{10}\right]}} dx, \quad (5.19)$$

Com estas três expressões do tempo, as equações da trajetória e as da temperatura (desenvolvidas no subcapítulo seguinte), será elaborado o modelo em MATLAB pretendido.

## 5.2. Determinação da equação da temperatura

Para a modelação das diferentes temperaturas no interior da fonte propomos a seguinte equação (em graus centígrados):

$$T(\rho, \theta) = A e^{-(\alpha\rho^2)}. \quad (5.20)$$

E, tendo em conta as coordenadas polares recordadas em 4.2. e as variações de temperatura e profundidade, generalizamos para a seguinte expressão:

$$T_z(x, y) = A e^{-(\gamma z)} e^{-(\alpha_0 - \alpha_1 z)(x^2 + y^2)}, \quad (5.21)$$

Estamos então, perante uma função Lorentziana, isto devido ao facto de o comportamento desta ser semelhante àquilo que acontece no interior de uma fonte hidrotermal (valores maiores no centro), podendo assim representar a sua distribuição de temperaturas. Deste modo, introduzimos diferentes variáveis para que a função se comportasse do modo que nós pretendíamos.

Agora, façamos então a atribuição dos valores de algumas das variáveis que podemos conhecer. Podemos ter em conta  $A = 400^\circ\text{C}$ , pois é uma possível temperatura máxima no interior de uma fonte hidrotermal. Sabendo também que a grandes profundidades a temperatura média e o oceano é de cerca de  $2,5^\circ\text{C}$  (ou seja, temperatura exterior da fonte hidrotermal), e considerando uma fonte hidrotermal de 0,5 m de raio, teremos em conta o seguinte (para  $z = 0$ , isto é, no fundo do oceano),

$$2,5 = 400e^{-(\alpha_0)(0,5)^2} \Leftrightarrow e^{-(\alpha_0)(0,25)} = \frac{2,5}{400} \Leftrightarrow e^{(\alpha_0)(0,25)} = \frac{400}{2,5} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{400}{2,5}\right) = \alpha_0 0,25 \Leftrightarrow \alpha_0 = \frac{1}{0,25} \ln\left(\frac{400}{2,5}\right) \Leftrightarrow \alpha_0 = 20m^{-2}. \quad (5.22)$$

Olhemos agora para o parâmetro  $\gamma$ , que será calculado no momento em que a fonte hidrotermal tem o seu máximo de altura. Consideremos assim, que a fonte tem uma altura de 10 m, ou seja, quando  $z$  atinge este valor, as características da fonte hidrotermal serão idênticas às do oceano circundante. E já não influenciarão a trajetória do raio sonoro.

Cheguemos agora ao  $\alpha_1$ :

$$\alpha_0 - \alpha_1 * 10 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\alpha_0}{10} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{20}{10} \Leftrightarrow \alpha_1 = 2 m^{-2}. \quad (5.23)$$

Então, no centro da coluna térmica virá,

$$2,5 = 400e^{-(\gamma*10)} \Leftrightarrow 10\gamma = \ln\left(\frac{400}{2,5}\right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{400}{2,5}\right) \Leftrightarrow \gamma = 0,5m^{-1}. \quad (5.24)$$

isto porque queremos que, para  $z=10$  m, se atinja a temperatura do meio circundante.

Vejamos agora então a expressão geral para  $T(x,y)$ :

$$T_z(x, y) = 400e^{-(0,5z)} e^{-(20-2z)(x^2+y^2)}, \quad (5.25)$$

sendo  $z$  a suposta altura da fonte hidrotermal, em metros, como dissemos.

Iremos então estudar esta situação para as seguintes alturas (a partir do fundo, em  $z=0$  m): 0 m, 3 m, 6 m e 9 m, tal como podemos ver nos gráficos da Figura 32 à Figura 35 (substituindo os valores em  $z$ ).

Aos 0 m,

$$T_z(x, y) = 400e^{-(20)(x^2+y^2)} \quad (5.26)$$

Aos 3 m,

$$T_z(x, y) = 400e^{-(0,5*3)}e^{-(20-2z*3)(x^2+y^2)} \quad (5.27)$$

Aos 6 m,

$$T_z(x, y) = 400e^{-(0,5*6)}e^{-(20-2z*6)(x^2+y^2)} \quad (5.28)$$

Aos 9 m,

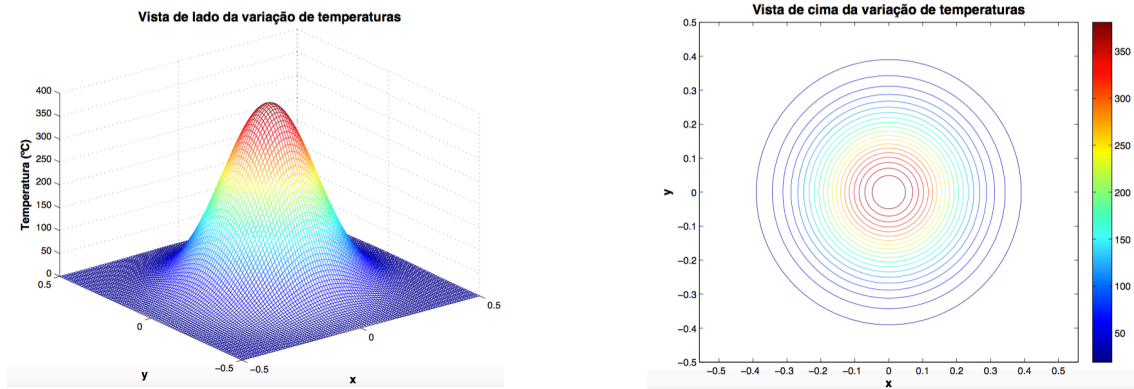
$$T_z(x, y) = 400e^{-(0,5*9)}e^{-(20-2*9)(x^2+y^2)} \quad (5.29)$$

Com isto, obtemos visualizações laterais da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal, e também a vista de cima das mesmas distribuições.

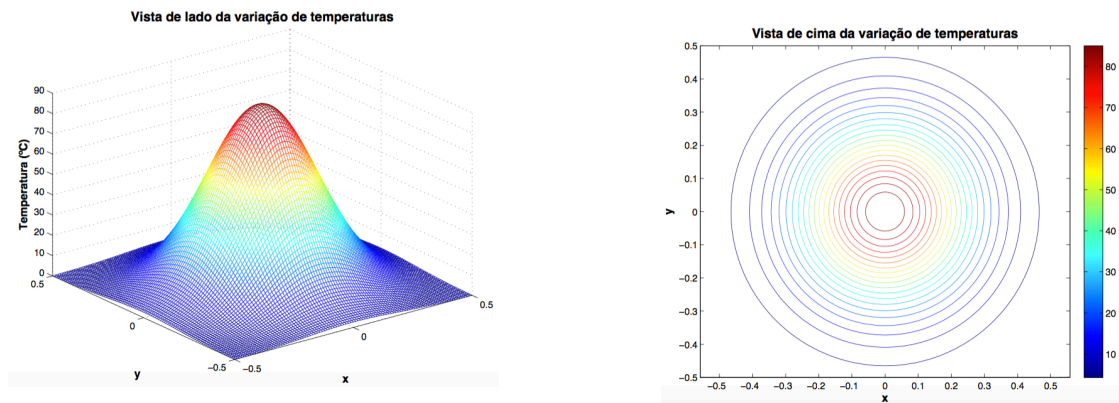
Os gráficos efetuados são apenas uma representação do que poderá ser a distribuição de temperatura nas fontes a estudar. E não uma visualização da fonte em si, pois estas são mais intensificadas em baixo, por ser onde a temperatura é mais alta, e vão suavizando, quanto mais para cima, pois a água aquecida gerada pela libertação da fonte hidrotermal começa a misturar-se com a restante água do oceano.

Isto virá a ser útil para uma melhor e mais fácil visualização da trajetória do raio sonoro, pois este desloca-se principalmente influenciado pela temperatura (sendo esta a maior influente da velocidade do som na água).

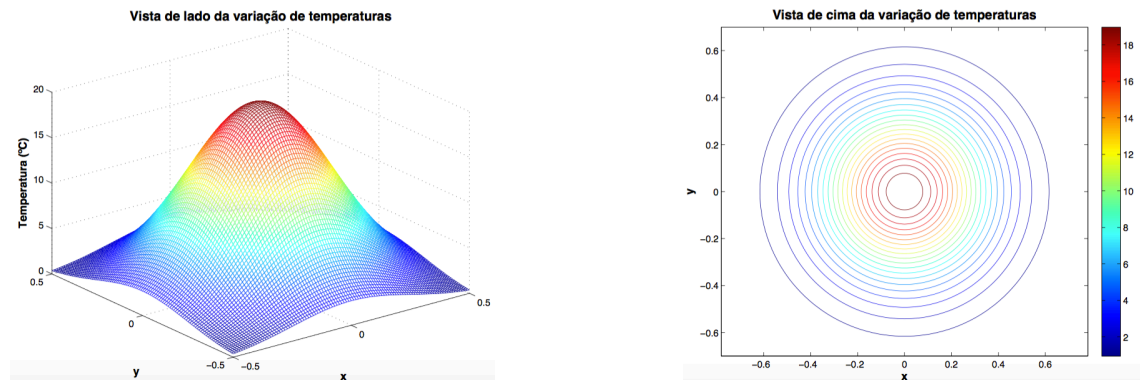
Observemos então abaixo os gráficos correspondentes aos diferentes planos horizontais que cortam a fonte hidrotermal. E notemos que nos diferentes  $zz$  há características que variam, tal como a temperatura máxima, que diminui, enquanto o  $z$  aumenta e o diâmetro da fonte, que aumenta enquanto o  $z$  aumenta.



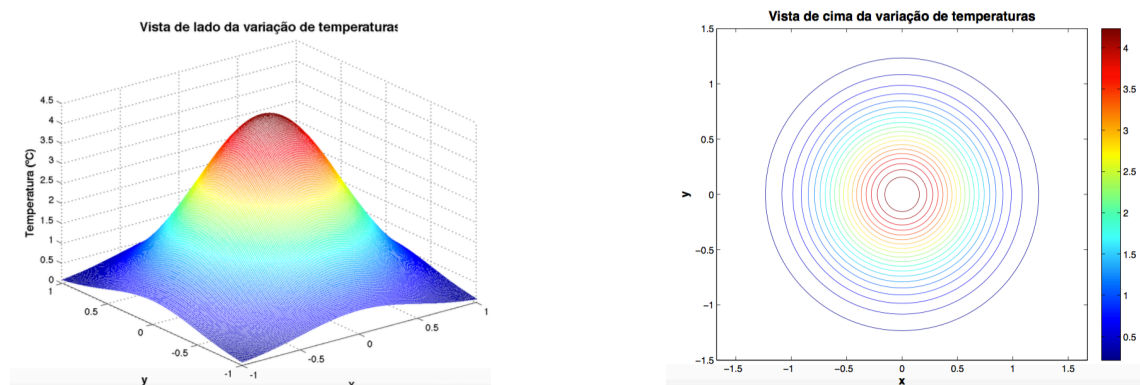
**Figura 32** – Visualização lateral e de cima da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal em  $z=0$  m.



**Figura 33** – Visualização lateral e de cima da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal em  $z=3$  m.



**Figura 34** – Visualização lateral e de cima da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal em  $z=6$  m.



**Figura 35** – Visualização lateral e de cima da distribuição de temperaturas da fonte hidrotermal em  $z=9$  m.

Os gráficos apresentados foram efetuados através da ferramenta MATLAB, com instruções dadas a partir das nossas equações de temperatura. Os códigos respetivos têm os seguintes nomes “pos\_trat\_temp\_cima.m” e “pos\_trat\_temp\_lado.m” (Apêndice 3).

### 5.3. Construção dos gráficos das trajetórias do raio sonoro e cálculo de tempos associados

Após a criação dos gráfico de temperaturas, passemos para o cálculo das trajetória  $y(x)$  recorrendo à fórmula 5.9 (fórmula geral).

Para efetuar e demonstrar as trajetórias dos raios sonoros recorreremos à resolução de equações diferenciais ordinárias no MATLAB (função ode45) com o objetivo de efetuar gráficos em que seja possível visualizar a trajetória efetuada pelo raio sonoro tendo em conta diferentes posições dos emissores e ângulos de emissão. Houve esta necessidade devido ao facto de, tal como já observámos anteriormente, as equações da trajetória serem equações diferenciais não lineares. E não ser possível resolvê-las através de métodos elementares.

A posição dos emissores e o ângulo de lançamento do raio sonoro serão dados como condições iniciais nas equações diferenciais, o que condicionará a direção e comportamento da trajetória do mesmo.

O que define o código “anguloemissor.m” são as seguintes linhas de código:

```
%variação do ângulo de incidência do emissor
n1=8;
theta=-pi/n1:0.05:pi/n1;
tang_theta=tan(theta);
%início do ciclo de cálculos para obtenção dos valores
da
%trajetória (equação diferencial ode45)
for y2 = tang_theta
[x,y]=ode45(@trajetoria,eixo_xx,[0.075,y2]);
My1=[My1 y(:,1)]; %y
My2=[My2 y(:,2)]; %y'
end
```

Nas linhas de código acima, é possível alterar a posição inicial do emissor (neste caso 0,075). Deste modo, a partir desta posição, serão emitidos os raios acústicos definidos nos intervalos de ângulos definidos (neste caso de  $-\pi/8$  a  $\pi/8$  de 0.05 em 0.05).

E o que define o código “posicaoinicial.m” são as seguintes linhas de código:

```
%variação da posição do emissor
n1=19;
pemissor=-0.2:0.02:0.2;
%início do ciclo de cálculos para obtenção dos valores
da
%trajetória (equação diferencial ode45)
for y1 = pemissor;
[x,y]=ode45(@trajetoria,eixo_xx,[y1,0]);
size(y(:,1))
My1=[My1 y(:,1)]; %y
My2=[My2 y(:,2)]; %y'
end
```

Nas linhas de código acima, é possível alterar o ângulo inicial do emissor (neste caso 0), sendo que o que se coloca é a  $\tan \theta$ . Deste modo, a partir deste ângulo, serão emitidos os raios acústicos definidos nos intervalos definidos (neste caso de  $-0.2$  a  $0.2$ , de  $0.02$  em  $0.02$ ).

Serão então expostos dois códigos distintos entre si, um em que o que irá variar são os ângulos de emissão dos raios sonoros e outro em que variará a posição do emissor em relação à fonte. Dentro dos mesmos será possível a distinção das diferentes equações de  $c(T(x,y))$  para a criação dos diferentes gráficos. É no código em si que existirá a possibilidade de ativar ou não as funções  $c(T(x,y))$  pretendidas para a obtenção dos resultados pretendidos.

À direita dos gráficos encontrar-se-ão os tempos calculados de acordo com as equações 5.17, 5.18 e 5.19, em segundos (s).

Para as diferentes equações de  $c(T(x,y))$ , serão calculadas as trajetórias e os tempos para as diferentes profundidades visualizadas nas distribuições de temperatura em 5.2. ( $z = 0$  m;  $z = 3$  m;  $z = 6$  m;  $z = 9$  m). Dentro da mesma profundidade variaremos a posição do emissor e o ângulo de emissão do raio sonoro.

Existiram então, no total, quatro programas MATLAB. Dois deles já foram referidos num dos parágrafos acima. Estes serão os códigos principais, em que se encontram as três equações da velocidade do som que utilizámos e os cálculos dos tempos. Com estes códigos são efetuados os cálculos e guardados os valores. São também desenhados os gráficos. Posteriormente, nos outros dois códigos é efetuado o tratamento de dados, em que as imagens são tratadas para que sejam criados ficheiros próprios para colocar posteriormente nesta dissertação. Os nomes dos programas são então: “posicao inicial.m”, “anguloemissor.m”, “pos\_trat\_pos.m”, e “pos\_trat\_ang.m”. Todos estes códigos estão expostos e comentados no apêndice 5, sendo que as linhas de código do mesmo que são editadas para que os comportamentos dos gráficos se alterem consoante a expressão escolhida, se encontram abaixo expostas.

Após corrermos os primeiros programas, são criados automaticamente, pelos mesmos, ficheiros “.mat”, que serão chamados nos códigos do tratamento de dados.

Nos primeiros dois programas fazemos as alterações para seleccionarmos aquilo que queremos mostrar nos gráficos. Ou seja:

- Alterando a linha 25 → alteramos “z”, isto é, a altura da fonte (em m; 0m, 3m, 6m ou 9m) para a qual queremos fazer os cálculos;

```
z=9;%profundidade em m
```

- Da linha 71 à 85 → escolhemos uma delas (comentando (%) as outras duas), consoante a equação da velocidade que queremos utilizar;

```
%auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./[400.*exp(-...
```

```
%auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./(a+b.*([400.*exp(-...
```

```
auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./((82949.*exp((exp((auxili...
```

- Na linha 92 e 93 → seleccionamos apenas uma (comentado (%) a outra), consoante a equação da velocidade que queremos utilizar (sendo que a primeira é para a primeira equação e a outra é para a segunda e a terceira).

```
%Mt=(1/sqrt(k*R))*trapz(auxiliar2,1)*passo
```

```
Mt=trapz(auxiliar2,1)*passo
```

- Alterando a linha 125 → alteramos “z”, isto é, a altura da fonte (em m; 0m, 3m, 6m ou 9m) para a qual queremos fazer os cálculos;

```
z=9;%profundidade em m
```

- A partir da linha 141 temos as três equações da velocidade do som que decidimos utilizar. Assim seleccionamos apenas as linhas correspondentes a uma delas, comentando (%) as outras duas, para que não interfiram nos cálculos.

```
%%%%%%se c=sqrt(k)*sqrt(T) - equação 1%%%%%%%%
```

```
...
```

```
%%%%%%se c=a+b.*T+c.*T^2+d.*T^3 - equação 2%%%%%%%%
```

```
...
```

```
%%%%se c=1449.08+4.57.*T.*exp(-
```

```
(T/86.9)+(T/360).^2)+1.33.*(S-35).*exp(-
```

```
T/120)+0.1522.*P.*exp((T/1200)+((S-35)/400))+1.46.*10.^(-
```

```
5).*P.^2).*exp((-T/20)+((S-35)/10) - equação 3%%%
```

```
...
```

Nos outros dois programas, correspondentes ao tratamento de dados:

- Na linha 14 → alteramos “z”, isto é, a altura da fonte (em m; 0m, 3m, 6m ou 9m) para a qual queremos fazer os cálculos;

```
z=9;%profundidade em m
```

- Da linha 41 à 54 → escolhemos uma delas (comentando (%) as outras duas), consoante a equação da velocidade que queremos utilizar;

```
%auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./[400.*exp(-...
%auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./(a+b.*([400.*exp(-...
auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./((82949.*exp((exp((auxili...
```

- Na linha 61 e 62 → selecionamos apenas uma (comentado (%) a outra), consoante a equação da velocidade que queremos utilizar.

```
%Mt=(1/sqrt(k*R))*trapz(auxiliar2,1)*passo
Mt=trapz(auxiliar2,1)*passo
```

É em  $z = 0\text{m}$  que tudo começa, ou seja, é do fundo do oceano que são expelidas as fontes hidrotermais e por isso é o local onde as temperaturas são mais altas. Nesta posição da fonte é onde ela é mais estreita, tendo o raio sonoro de atravessar um menor comprimento.

Em  $z = 9\text{m}$  já existe uma grande dispersão e mistura da água correspondente à fonte com a água do restante oceano. As temperaturas já são mais normalizadas, tal como podemos observar na Figura 35, em que a temperatura máxima é de  $4,5^\circ\text{C}$ . Assim, é previsível que haja uma menor refração dos raios.

Nas restantes profundidades observaremos a evolução da fonte e as diferenças dos raios sonoros, tanto a nível de direção da trajetória como de tempo de propagação. Com isto, será possível uma comparação das diferentes equações do som estudadas e justificar qual a mais adequada à situação.

Nos gráficos seguintes observaremos então para as diferentes expressões e diferentes profundidades as seguintes quatro imagens:

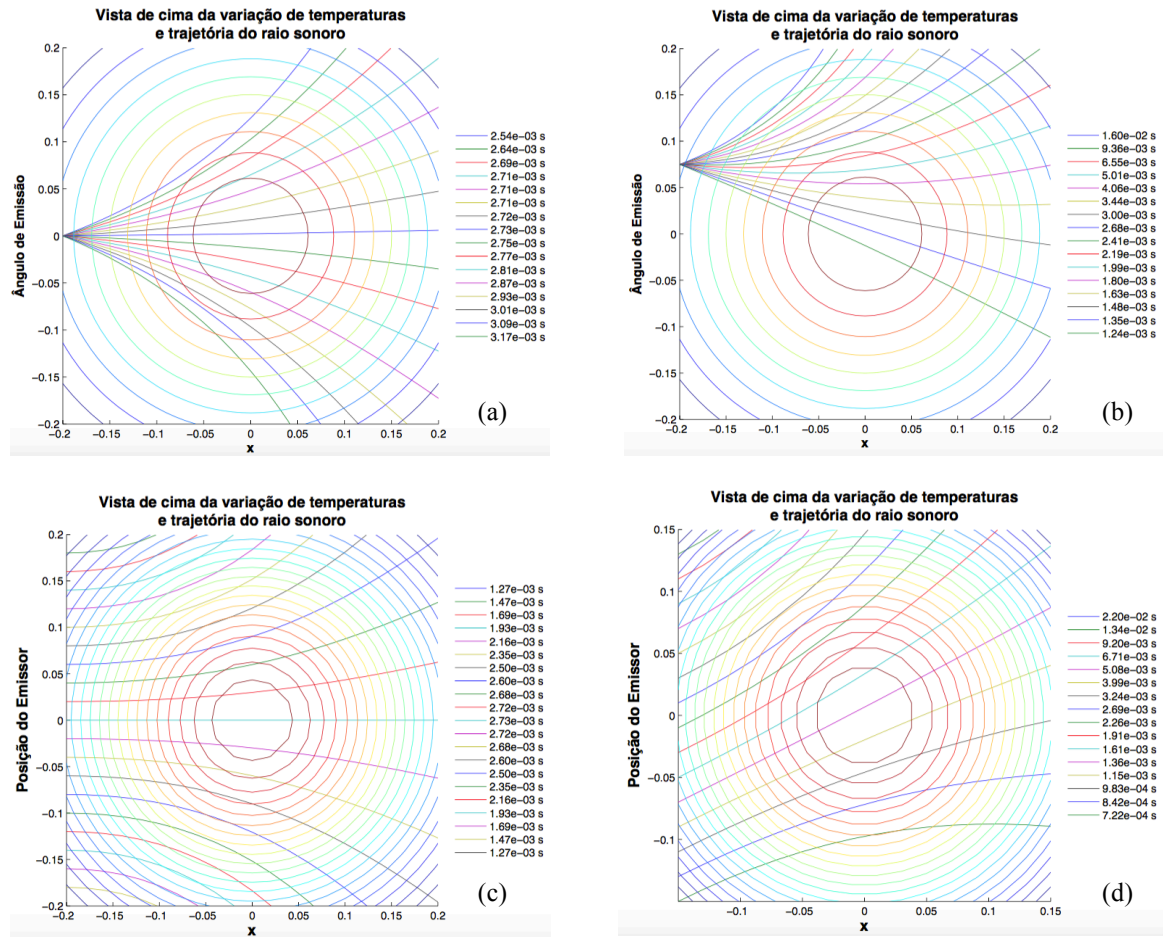
- (a) A posição do emissor está em  $x = 0$  e o ângulo de emissão varia dos  $-\pi/8$  aos  $-\pi/8$

- (b) A posição do emissor está em  $x = 0,075$  e o ângulo de emissão varia dos  $-\pi/8$  aos  $\pi/8$
- (c) Emitidos raios de várias posições em que o ângulo de emissão é sempre  $\theta = 0^\circ$
- (d) Emitidos raios de várias posições em que o ângulo de emissão é sempre  $\theta = 30^\circ$

Em todos os quatro gráficos, está do lado direito, o cálculo dos tempos efetuados pelos raios sonoros (em segundos), ao efetuarem este caminho no interior da fonte hidrotermal e tendo em conta os diferentes parâmetros a variar.

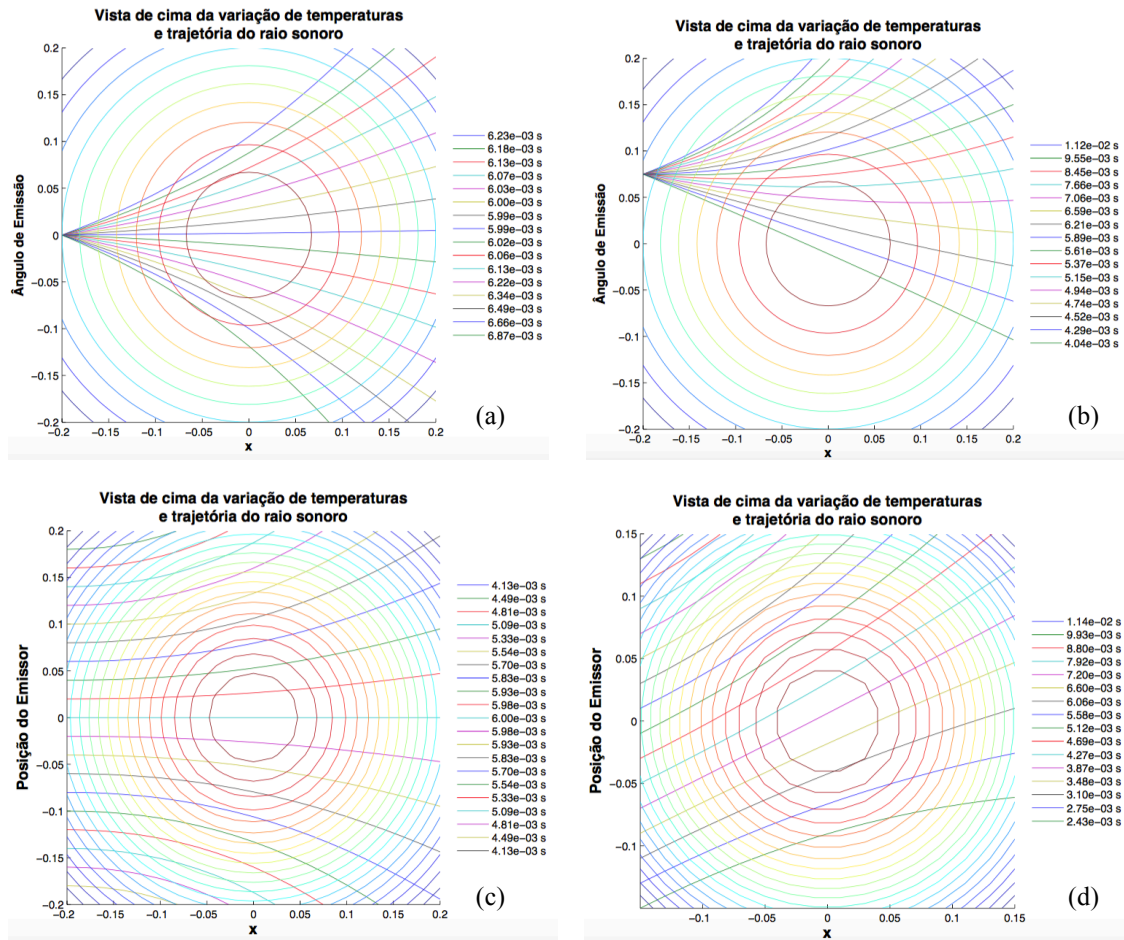
5.3.1. Para  $c(x, y) = \sqrt{kR}\sqrt{T(x, y)}$

5.3.1.1. Para  $z = 0m$



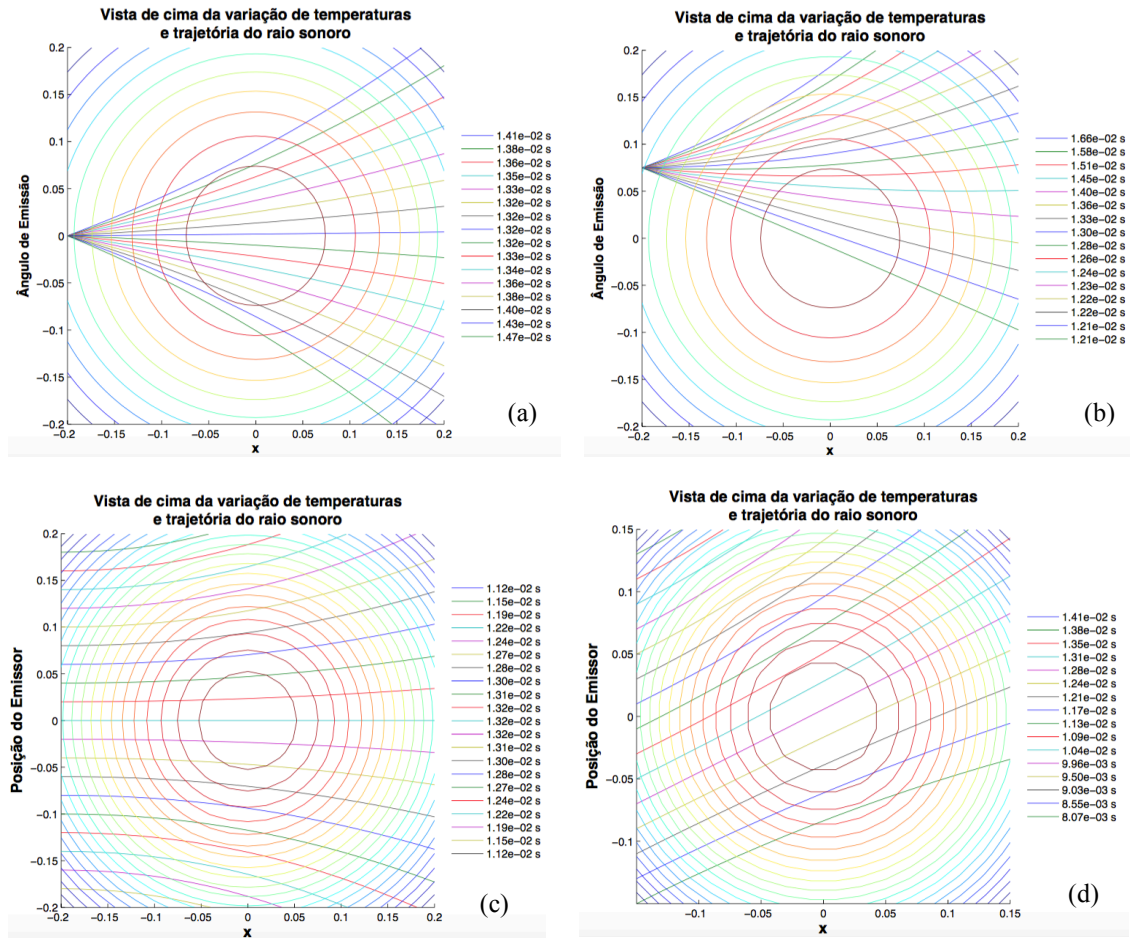
**Figura 36** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 0m$  em que há variação da posição do emissor (a) TX=0; (b) TX=0,075; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.1.2. Para  $z = 3m$



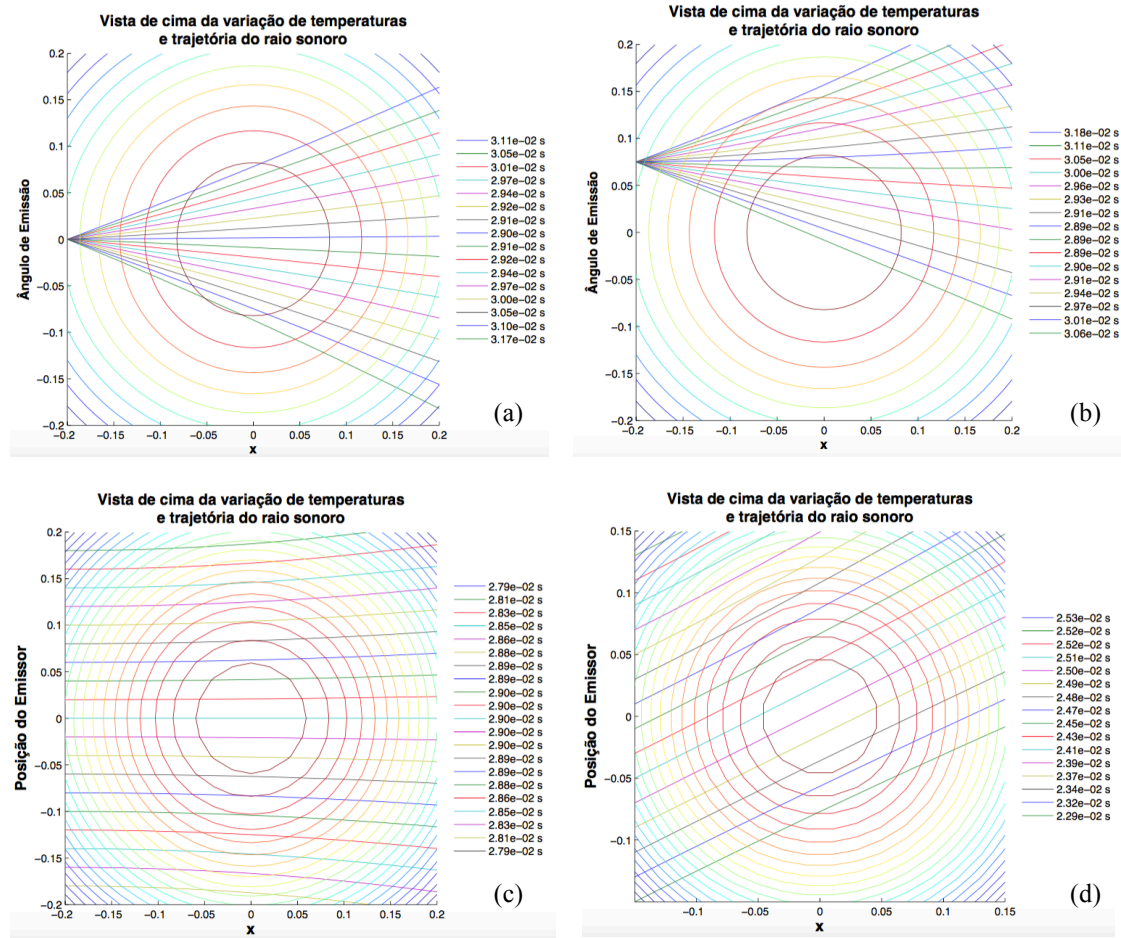
**Figura 37** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 3m$  m em que há variação da posição do emissor (a) TX=0; (b) TX=0,075; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.3.1.3. Para  $z = 6m$



**Figura 38** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 6m$  em que há variação da posição do emissor (a)  $TX=0$ ; (b)  $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.3.1.4. Para  $z = 9m$



**Figura 39** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 9m$  em que há variação da posição do emissor (a)  $TX=0$ ; (b)  $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.3.2. Para  $c(x, y) = \alpha + \beta T(x, y) + \gamma T^2(x, y) + \epsilon T^3(x, y)$

5.3.2.1. Para  $z = 0m$

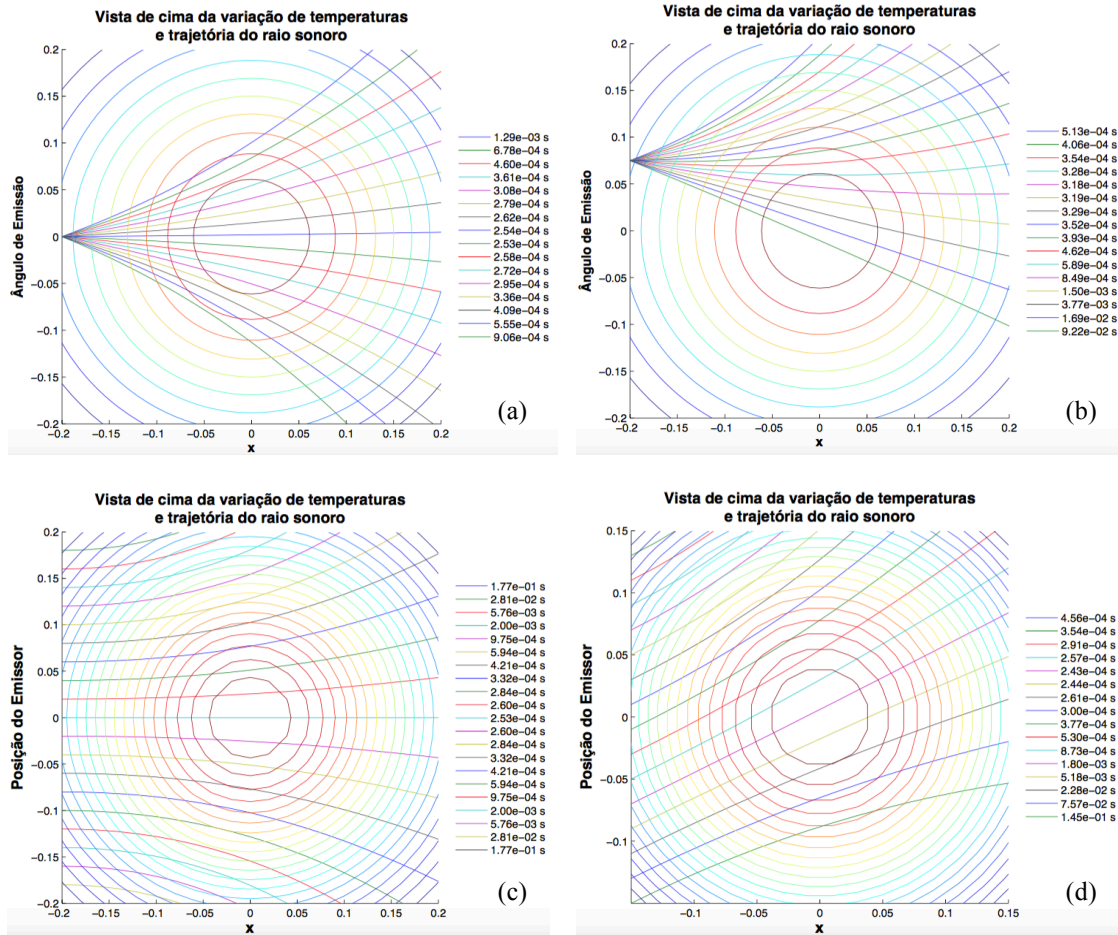
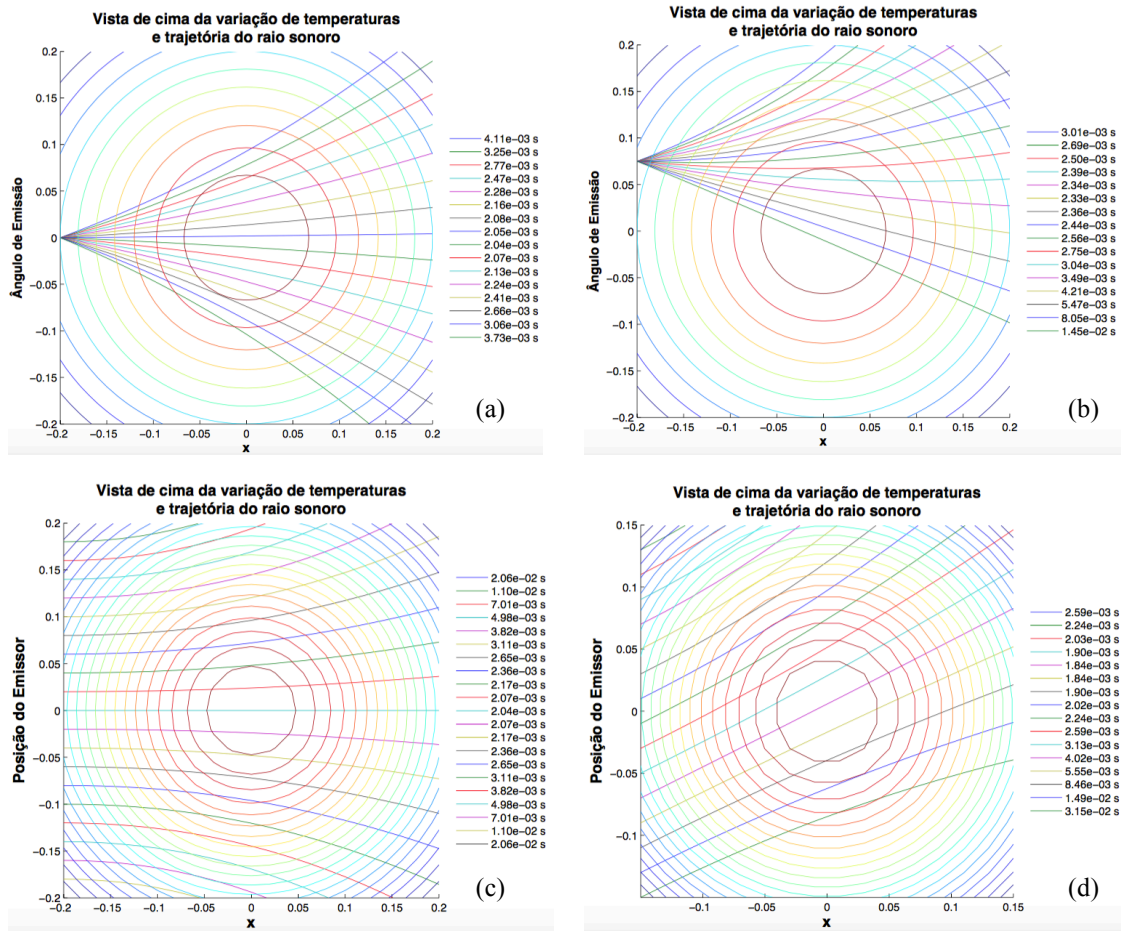


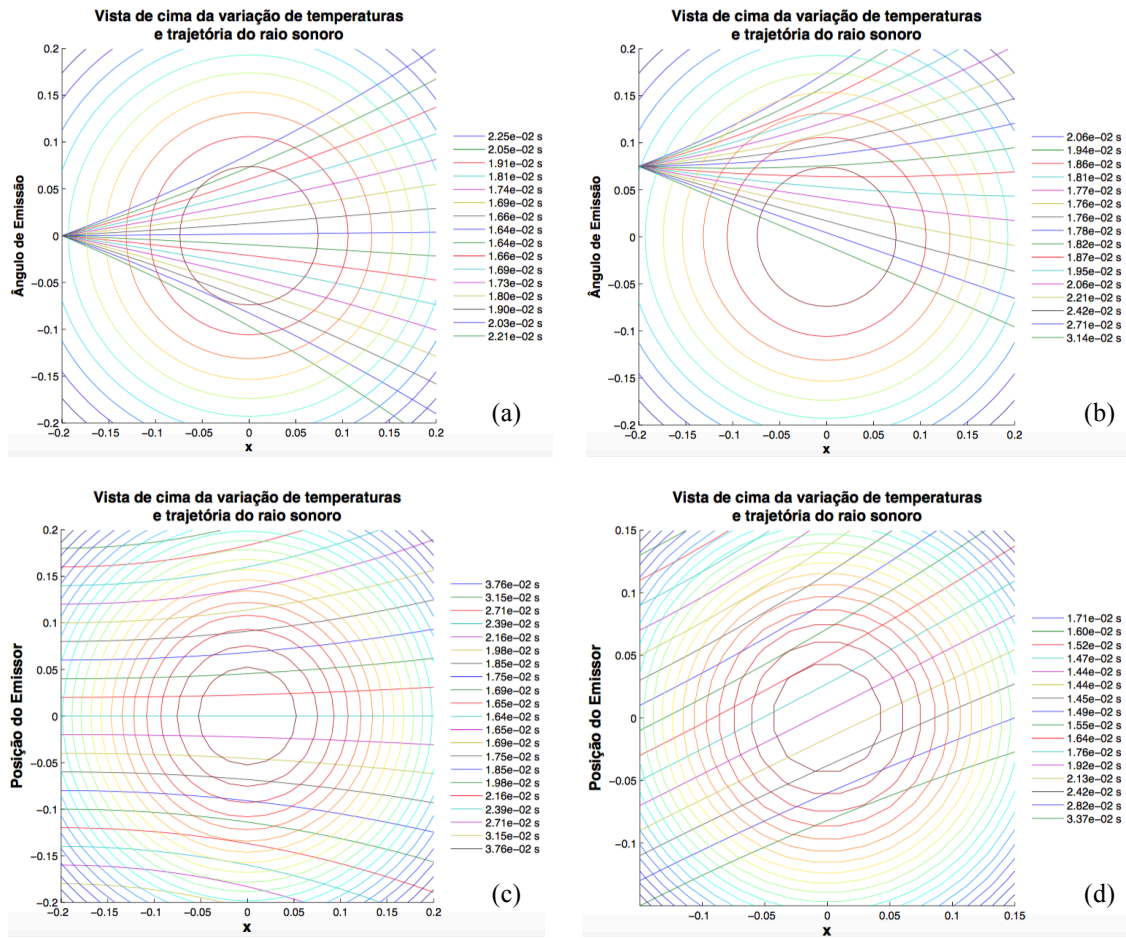
Figura 40 – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 0m$  em que há variação da posição do emissor (a)  $T_x=0$ ; (b)  $T_x=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.3.2.2. Para  $z = 3m$



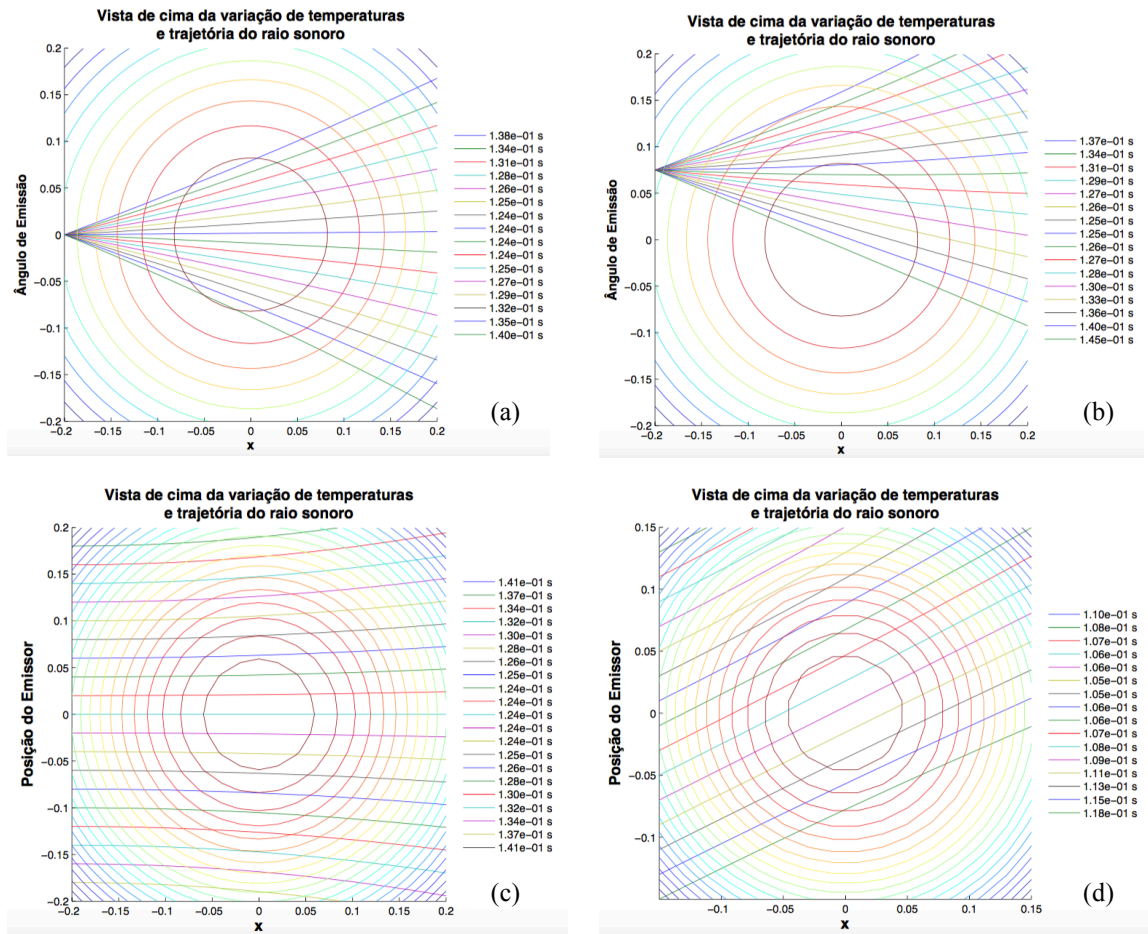
**Figura 41** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 3m$  em que há variação da posição do emissor (a) TX=0; (b) TX=0,075; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.3.2.3. Para  $z = 6m$



**Figura 42** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 6m$  em que há variação da posição do emissor (a)  $TX=0$ ; (b)  $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30$ .

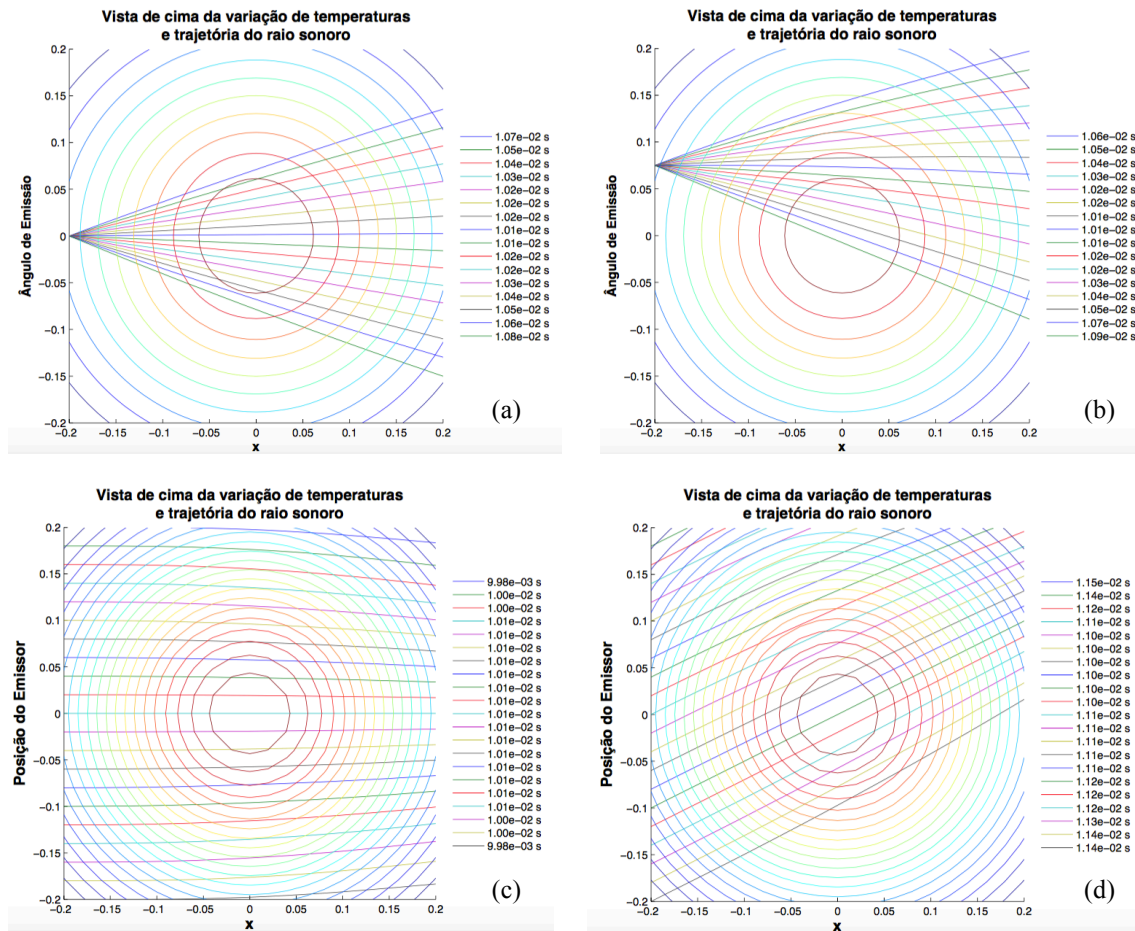
5.3.2.4. Para  $z = 9m$



**Figura 43** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 9m$  em que há variação da posição do emissor (a)  $TX=0$ ; (b)  $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

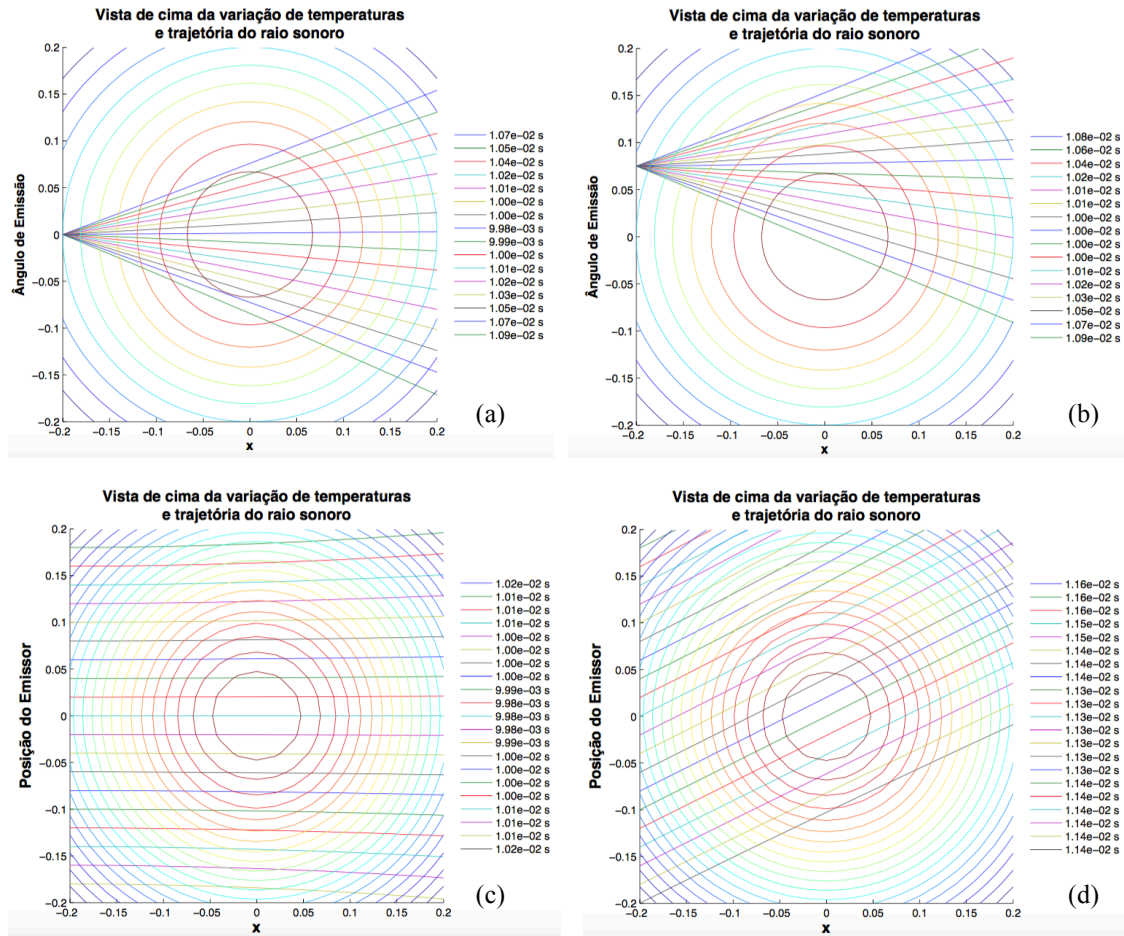
### 5.3.3. Para a expressão de Del Grosso

#### 5.3.3.1. Para $z = 0m$



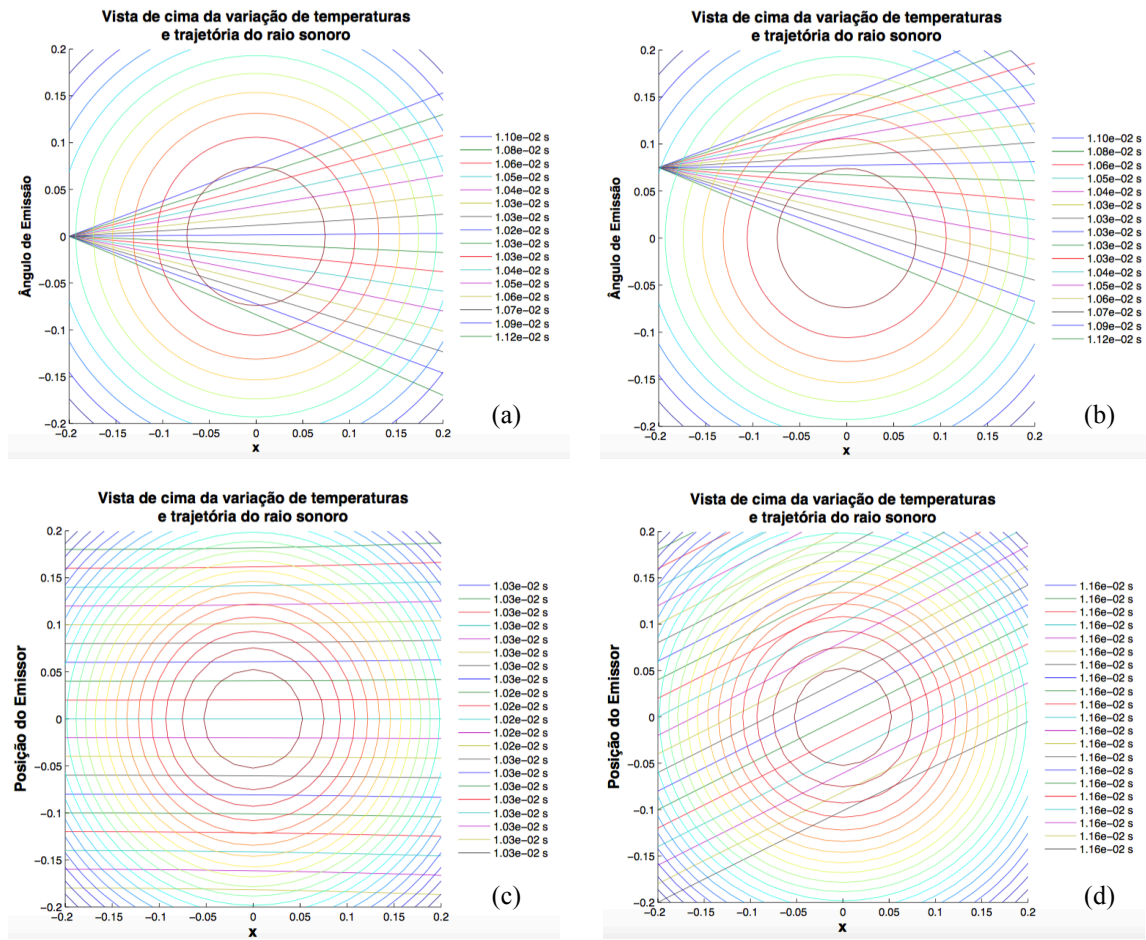
**Figura 44** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 0m$  em que há variação da posição do emissor (a)  $TX=0$ ; (b)  $TX=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.3.3.2. Para  $z = 3\text{m}$



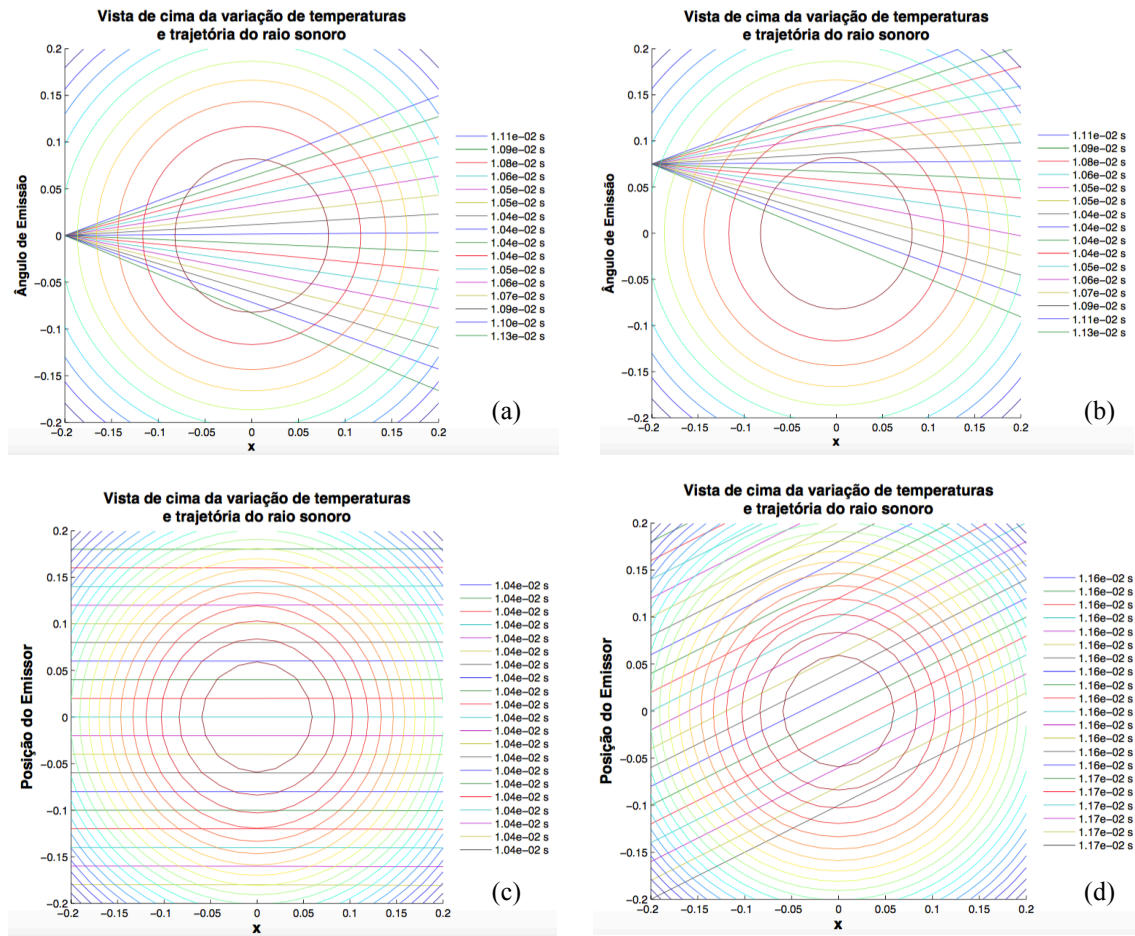
**Figura 45** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 3\text{m}$  em que há variação da posição do emissor (a)  $T_X=0$ ; (b)  $T_X=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.3.3.3. Para  $z = 6m$



**Figura 46** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 6m$  em que há variação da posição do emissor (a) TX=0; (b) TX=0,075; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

5.3.3.4. Para  $z = 9m$

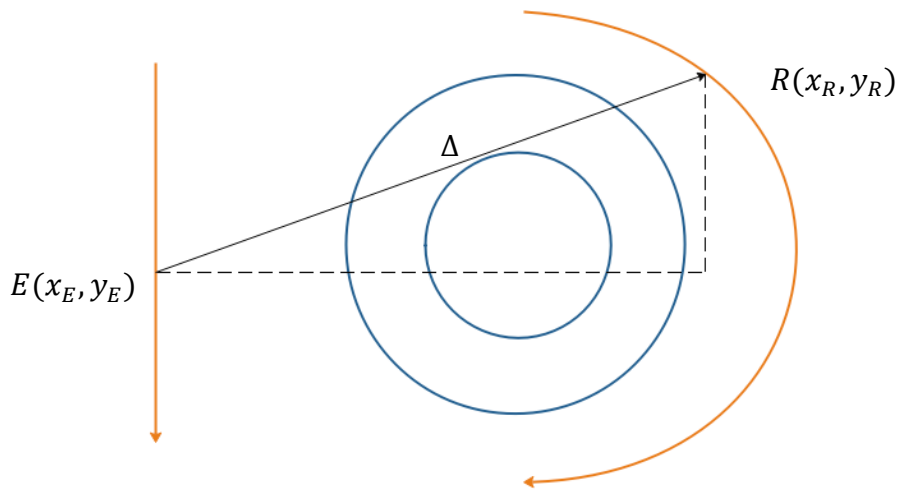


**Figura 47** – Comportamento da trajetória do raio sonoro em  $z = 9m$  em que há variação da posição do emissor (a)  $T_x=0$ ; (b)  $T_x=0,075$ ; e do ângulo de emissão (c)  $\theta=0^\circ$ ; (d)  $\theta=30^\circ$ .

Após a exposição dos gráficos podemos dizer que não há grande dispersão visual de uns para outros, do ponto de vista de quem os observa pela primeira vez. Tendo em conta que as condições são as mesmas para todos eles, ou seja, os intervalos estudados são os mesmos e o próprio objetivo daquilo que estamos a estudar em cada um é o mesmo, faz com que esta situação seja justificável. No entanto, no capítulo seguinte, será feita uma análise dos mesmos e será possível entender a diferença de comportamentos, tendo em conta as diferentes expressões. Observando com atenção e reparando nas diferenças que estes ostentam, tanto a nível de desenho da trajetória como a nível de tempo efetuado por esta.

O motivo pelo qual definimos os limites dos gráficos apenas de -0,2m a 0,2m (sendo que é possível definir outros intervalos no modelo efetuado), tanto para  $x$  como para  $y$  foi devido ao facto de, no cálculo das equações diferenciais começarmos a ter declives infinitos, ou seja, valores para os quais o cálculo não era possível e portanto os gráficos tornavam-se impossíveis também.

Em relação aos tempos consideremos estes cálculos feitos à mão para a mesma trajetória mas, neste caso em linha reta. Isto para que tenhamos uma noção aproximada da grandeza de valores e para que os que obtivemos computacionalmente façam sentido.



**Figura 48**– Cálculo do tempo da trajetória do raio sonoro em linha reta.

$$\Delta = \sqrt{(y_R - y_E)^2 + (x_R - x_E)^2} \quad (5.30)$$

Consideremos  $c \approx 1500 \text{ m/s}$ , pois é a velocidade média do som na água do mar.

$$t = \frac{\Delta}{c} \quad (5.31)$$

Agora, tendo em conta,  $x_E = -0,2, x_R = 0,15, y_E = 0$  e  $y_R = 0,2$  então,

$$\Delta = \sqrt{(0,2 - 0)^2 + (0,15 - (-0,2))^2} = 0,40 \text{ m}$$

$$t = \frac{0,40}{1500} = 0,0002666 \text{ s} = 0,267 * 10^{-3} \text{ s} = 267 \mu\text{s}$$

Com este resultado, conseguimos chegar à conclusão de que os resultados obtidos nos gráficos criados pelo *software* fazem sentido segundo o que seria suposto. A velocidade que escolhemos neste exemplo é a velocidade *standard* para o som na água e não segundo nenhuma das equações seleccionadas. Desta forma, os resultados deste cálculo não serão iguais ao dos gráficos mas dão-nos uma noção de veracidade dos mesmos.

Para além destes cálculos, temos também a comparação com o estudo já falado anteriormente, Cai 2012, no qual também foram calculadas as trajetórias efetuadas pelos raios acústicos a atravessar uma fonte hidrotermal. Vejamos então a tabela abaixo:

**Table 2** *TOT* values of different sound rays

| Sound rays <i>i-j</i> | <i>TOT</i> ( $\mu$ S ) | Sound rays <i>i-j</i> | <i>TOT</i> ( $\mu$ S ) | Sound rays <i>i-j</i> | <i>TOT</i> ( $\mu$ S ) | Sound rays <i>i-j</i> | <i>TOT</i> ( $\mu$ S ) |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| 1-5                   | 856(856.42)            | 3-5                   | 473(473.45)            | 5-9                   | 854(854.03)            | 8-9                   | 302(301.70)            |
| 1-6                   | 929(929.40)            | 3-6                   | 595(594.70)            | 5-10                  | 926(925.58)            | 8-10                  | 470(470.22)            |
| 1-7                   | 1041(1040.51)          | 3-7                   | 753(753.30)            | 5-11                  | 1029(1029.43)          | 8-11                  | 659(659.44)            |
| 1-8                   | 1172(1171.85)          | 3-8                   | 927(926.90)            | 5-12                  | 1160(1160.44)          | 8-12                  | 853(853.20)            |
| 1-9                   | 1211(1210.93)          | 3-9                   | 1057(1056.84)          | 5-13                  | 1197(1197.24)          | 8-13                  | 1030(1030.28)          |
| 1-10                  | 1116(1116.22)          | 3-10                  | 1033(1032.74)          | 5-14                  | 1108(1107.76)          | 8-14                  | 1052(1052.42)          |
| 1-11                  | 1056(1056.12)          | 3-11                  | 1052(1052.01)          | 5-15                  | 1048(1048.03)          | 8-15                  | 1113(1114.97)          |
| 1-12                  | 1035(1034.75)          | 3-12                  | 1108(1107.68)          | 5-16                  | 1031(1031.17)          | 8-16                  | 1206(1205.51)          |
| 1-13                  | 852(851.88)            | 3-13                  | 1030(1029.51)          | 6-9                   | 658(657.91)            | 9-13                  | 861(861.29)            |
| 1-14                  | 657(657.24)            | 3-14                  | 874(874.44)            | 6-10                  | 747(747.14)            | 9-14                  | 931(930.80)            |
| 1-15                  | 471(470.81)            | 3-15                  | 752(751.54)            | 6-11                  | 875(875.24)            | 9-15                  | 1038(1038.09)          |
| 1-16                  | 308(307.50)            | 3-16                  | 658(658.13)            | 6-12                  | 1029(1028.74)          | 9-16                  | 1176(1175.85)          |
| 2-5                   | 661(660.95)            | 4-5                   | 310(309.55)            | 6-13                  | 1105(1105.10)          | 10-13                 | 661(661.35)            |
| 2-6                   | 753(752.60)            | 4-6                   | 474(474.14)            | 6-14                  | 1050(1050.05)          | 10-14                 | 753(752.84)            |
| 2-7                   | 885(884.52)            | 4-7                   | 664(663.80)            | 6-15                  | 1031(1030.61)          | 10-15                 | 884(883.64)            |
| 2-8                   | 1037(1037.42)          | 4-8                   | 857(857.07)            | 6-16                  | 1051(1051.14)          | 10-16                 | 1038(1037.67)          |
| 2-9                   | 1117(1117.42)          | 4-9                   | 1036(1036.05)          | 7-9                   | 470(470.35)            | 11-13                 | 472(471.79)            |
| 2-10                  | 1055(1054.95)          | 4-10                  | 1055(1054.87)          | 7-10                  | 592(591.53)            | 11-14                 | 594(593.94)            |
| 2-11                  | 1034(1033.59)          | 4-11                  | 1108(1108.26)          | 7-11                  | 747(746.65)            | 11-15                 | 752(751.90)            |
| 2-12                  | 1051(1050.79)          | 4-12                  | 1199(1198.61)          | 7-12                  | 921(920.96)            | 11-16                 | 925(925.43)            |
| 2-13                  | 920(919.99)            | 4-13                  | 1163(1163.26)          | 7-13                  | 1048(1048.17)          | 12-13                 | 309(308.66)            |
| 2-14                  | 744(744.17)            | 4-14                  | 1027(1027.17)          | 7-14                  | 1030(1029.81)          | 12-14                 | 475(475.13)            |
| 2-15                  | 590(589.77)            | 4-15                  | 926(925.51)            | 7-15                  | 1050(1050.03)          | 12-15                 | 662(661.96)            |
| 2-16                  | 471(471.13)            | 4-16                  | 856(855.76)            | 7-16                  | 1111(1111.20)          | 12-16                 | 855(854.77)            |

Note: (1) The sign of *i-j* represents the sound ray path between the *i*-th transmitter and the *j*-th receiver. (2) *TOT* outside the bracket is directly measured in the hot springs of the Qiezhishan Lake in the configuration of Fig. 1. However, *TOT* inside the bracket is received by parabola interpolation.

**Tabela 3** – Cálculo dos tempos de trajetória efetuados pelo estudo de Cai, 2012.

(Cai, 2012, p. 730)

Consideremos que aqui o diâmetro estudado foi para 1,5m enquanto que o nosso foi para 0,4m. E as temperaturas neste caso são inferiores, sendo que esta fonte tem no

máximo uma temperatura de 50°C. Mesmo com estas características diferentes conseguimos ter noção dos valores pretendidos, e deram-nos mais confiança para a continuidade do trabalho a partir do modelo criado.

Assim, conseguimos afirmar que os valores obtidos pelo modelo efetuado nesta dissertação fazem sentido, aproximando-se da realidade.

No capítulo seguinte será feita uma análise e comentário dos gráficos expostos, em que para cada equação haverá uma explicação do porquê do comportamento das trajetórias e seus respetivos tempos. Será também feita uma comparação entre elas para que seja selecionada aquela que faz mais sentido.

## Capítulo 6

### Análise dos gráficos criados computacionalmente

Os gráficos criados e apresentados no capítulo anterior foram criados com o objetivo de haver um melhor entendimento daquilo que queríamos concluir. Assim, nos próximos dois subcapítulos será feita uma análise desses gráficos com a relação dos resultados para que haja um melhor entendimento e posteriormente seja possível tirar conclusões.

#### 6.1. Interpretação dos gráficos de temperatura

Em relação aos gráficos da temperatura, os resultados que obtivemos eram os que já estávamos à espera, isto é, dentro da fonte que decidimos interpretar (com 10 m de altura e 400°C de temperatura máxima), verificamos os seus gráficos de variação de temperaturas para quatro alturas.

Com isto, verificámos que à medida que subimos na fonte em altura, para além de a sua temperatura máxima diminuir, o seu diâmetro aumentou. Ora olhemos agora para os valores:

$$\text{Para } z = 0 \text{ m } \begin{cases} T_{\text{máx}} = 400 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ d \simeq 0,4 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Para } z = 3 \text{ m } \begin{cases} T_{\text{máx}} = 90 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ d \simeq 0,5 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Para } z = 6 \text{ m } \begin{cases} T_{\text{máx}} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ d \simeq 0,6 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Para } z = 9 \text{ m } \begin{cases} T_{\text{máx}} = 4,5 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ d \simeq 1,25 \text{ m} \end{cases}$$

Os resultados obtidos fazem sentido, pois numa fonte hidrotermal, tendo em conta o que já estudámos até aqui, podemos afirmar que esta vai dispersando à medida que a sua altura aumenta. Sendo assim, é normal que a sua temperatura máxima diminua por difusão até chegar à temperatura do mar envolvente e o seu diâmetro aumente até que já não haja uma fonte e seja apenas o oceano profundo novamente.

Estes resultados serão também de grande relevância nos pontos seguintes, pois o comportamento do raio sonoro na água é sem dúvida muito influenciado pela temperatura da mesma.

## **6.2. Interpretação dos gráficos da trajetórias e dos tempos correspondentes**

Começemos por comentar o que acontece na primeira equação da velocidade utilizada, isto é, no ponto 5.3.1.

$$c(x, y) = \sqrt{kR} \sqrt{T(x, y)}$$

Aqui deparámo-nos com algo que não nos surpreendeu. Em relação aos tempos de propagação da trajetória, pudemos verificar que estes aumentam à medida que  $z$  aumenta também. O aumento de  $z$  significa que há já uma dispersão da fonte hidrotermal e que as temperaturas são inferiores no seu interior. Assim, podemos afirmar com estes resultados, que para esta equação da velocidade do som, a trajetória é mais rápida quanto maiores forem as temperaturas que ela atravessa e menor a sua altura.

Já no interior da fonte em  $z = 0m$ , verificámos que não se confirma o que prendíamos. Sendo que os tempos são ligeiramente maiores no centro da fonte que nos seus extremos. O que à partida não faz sentido, pois quanto maior a temperatura, maior a velocidade do som e menores serão os tempos. Isto poderá ser justificável com o facto de esta equação estar prevista para gases e não para o oceano e não estar prevista para temperaturas tão elevadas (principalmente em  $z = 0m$ , que é quando as temperaturas são mais elevadas).

Em relação à direção da trajetória, notámos também que esta possuía curvas mais acentuadas em  $z = 0 m$  e que estas iam ficando cada vez menos acentuadas quanto maior fosse o  $z$ . Isto, mais uma vez, nos leva a mencionar o facto de a fonte ir ficando mais dispersa aquando a sua evolução em altura. Ao haver praticamente uma uniformidade de temperaturas em  $z = 9 m$  faz com que haja uma praticamente mínima refração do raio sonoro.

Passemos agora então à análise dos gráficos da segunda equação da velocidade do som que estão presentes no ponto 5.3.2.

$$c(x, y) = \alpha + \beta T(x, y) + \gamma T^2(x, y) + \varepsilon T^3(x, y)$$

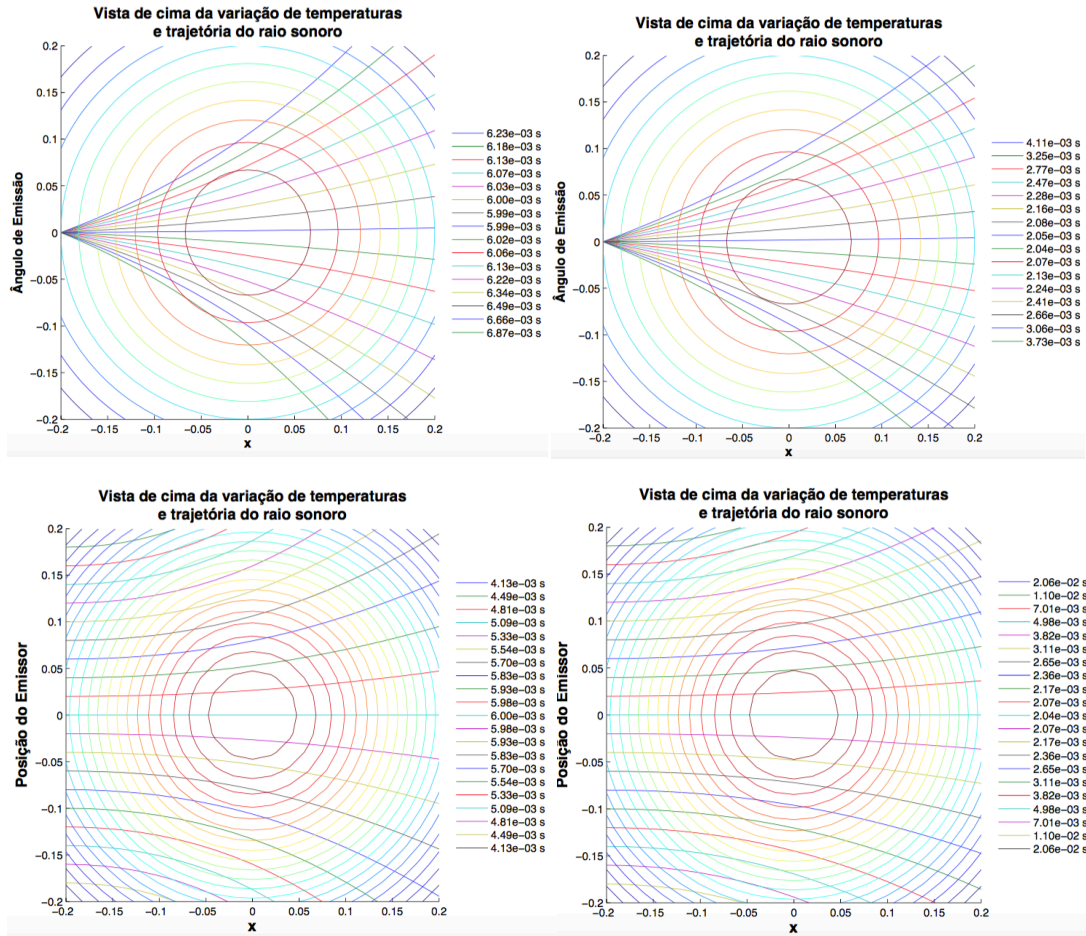
Neste caso, temos resultados semelhantes à equação anterior, a partir dos 3m. Isto é, quanto mais a coluna de água aumenta em altura e menor é a sua temperatura máxima, maiores são os tempos percorridos pelo raio sonoro ao longo da fonte.

Em relação à equação anterior, não é possível observar grandes alterações nos comportamentos das trajetórias. A maior diferença é observada no cálculo de tempos, em que para esta segunda equação os tempos têm uma maior diferença entre os diferentes  $zz$  na mesma equação. Esta diferença nos tempos é justificável devido ao facto das expressões escolhidas serem de diferente origem e terem sido estudadas para diferentes ambientes (isto em estudos anteriores). Deste modo, pegando nelas e colocando as mesmas no estudo em questão temos um bom termo de comparação para a criação de uma expressão que seja passível de ser estudada em ambientes como o das fontes hidrotermais.

Foram consideradas no ponto 4.1.1. do capítulo 4 os gráficos das velocidades versus temperaturas, tanto para uma equação como para a outra. E, apesar de ambas terem a mesma tendência, a de aumentar a velocidade à medida que a temperatura aumenta, podemos ver que a diferença nos valores é ainda significativa. Claro que com tudo o que acrescentámos nestes últimos capítulos, tal como a equação para a temperatura, as velocidades não se mantiveram tal como nos gráficos das Figuras 21 e 22, mas os comportamentos não diferenciaram em termos de trajetória. Ou seja, o comportamento pretendido foi obtido e os valores dos tempos também.

Tal como já foi mencionado anteriormente as equações são diferentes e é claro que os resultados fazem sentido serem diferentes. No entanto, mesmo podendo não ser as mais apropriadas para as condições das fontes hidrotermais, são as equações estudadas e disponíveis que consideramos mais apropriadas. Um dos objetivos deste trabalho foi precisamente avaliar a influência das funções  $c(T(x,y))$  nas trajetórias e nos tempos dos raios sonoros.

A pouca diferença observada nos resultados destas duas equações de  $c(T(x,y))$  podem ainda ser confirmadas nos gráficos abaixo:



**Figura 49** – Comparação dos raios de trajetória em  $z=3$  m para ambas as equações (à esquerda c1; à direita c2).

Na imagem acima temos quatro gráficos, em dois (esquerda) são correspondentes à primeira equação (5.10) e os outros dois (direita) à segunda (5.12). Não se notam grandes alterações e isso já era espectável, e as alterações que existem, nos tempos, são devido às diferenças nas próprias equações, tal como já tínhamos mencionado anteriormente.

Por último, olhemos para a equação da velocidade do som presente no ponto 5.3.3., a do modelo de Del Grosso,

$$c(x, y) = 1449,08 + 4,57T e^{-\left[\frac{T}{86,9} + \left(\frac{T}{360}\right)^2\right]} + 1,33(S - 35) e^{-\frac{T}{120}} + 0,1522P e^{\left[\frac{T}{1200} + \frac{S-35}{400}\right]} + 1,46 * 10^{-5} P^2 e^{-\left[\frac{T}{20} + \frac{S-35}{10}\right]}$$

Olhando para esta expressão, não tiramos resultados muito diferentes daqueles que já tínhamos observado anteriormente nos outros capítulos quando abordámos esta equação. Ou seja, tendo esta equação sido estudada anteriormente, para inicialmente fazer cálculos que nos permitissem entender o comportamento do raio sonoro perante grandes diferenças de temperatura, já havia uma breve ideia do que se poderia encontrar. Isto, visto esta equação não estar prevista para temperaturas tão elevadas como as de uma fonte hidrotermal.

Esta é uma equação que não foi delineada para ser estudada nas condições que encontramos as fontes hidrotermais, principalmente com tão grandes temperaturas. É por isto que o resultado correspondente difere das duas equações anteriores. Podemos, apesar disso, observar que a partir dos 3 m (correspondente aos 90°C de máximo) o comportamento faz sentido, sendo que os tempos são maiores quanto menores são as temperaturas. Em  $z=0$ m, o comportamento dos raios não faz sentido, pois o tempo é maior quando a temperatura é maior. Podemos também observar que no gráfico dos 0 m os raios de propagação curvam para o interior da fonte, ao contrário de todos os outros, que se afastam do interior. Esta situação confirma o que foi mencionado no Capítulo 4 e demonstrado nas Figuras 24 e 26.

Em suma, desta análise de gráficos podemos concluir que as equações de  $c(T(x,y))$  mais apropriadas para o estudo da trajetória nestas condições são as duas primeiras. Principalmente a segunda. Isto, porque têm o comportamento que está previsto. E, apesar de poderem ter lacunas no estudo das fontes hidrotermais, tendo em conta todas as suas características, são equações que já foram utilizadas em condições semelhantes e para estudar comportamentos do mesmo género.

A equação de Del Grosso, apesar de não estar prevista para estas condições é um bom exemplo para estudar a trajetória do raio sonoro, pois sabemos que é credível e já foi utilizada por diversos autores para estudar o comportamento da velocidade do som no oceano. Podendo então ser utilizada mais tarde, se efetuados testes reais, como referencia, para auxílio de criação de novas funções da velocidade do som a altas temperaturas. Esta foi uma boa referência no início da dissertação, pois por ter sido uma das primeiras expressões que encontramos, foi a que nos deu noção dos

comportamentos da velocidade do som na água e quais os fatores mais influentes. Deste modo, foi para nós uma boa referência a seguir para a análise dos gráficos efetuados.

Ainda assim, tenhamos em conta que estas não são as únicas equações da velocidade do som para meios aquáticos e que outras podem ser inseridas e estudadas neste mesmo código.

Em relação a todos os gráficos, algo que não conseguimos alcançar e gostaríamos de o ter feito, seria a demonstração destes mesmos raios para maiores intervalos. Isto é, conseguir demonstrar uma melhor curvatura dos raios sonoros e uns tempos diferentes. Isto não foi possível de alcançar pois, como foi explicado anteriormente, o cálculo das equações diferenciais não nos permitiram demonstrar graficamente a exposição destes valores.

## Capítulo 7

### Conclusões e Recomendações

Chegando ao último capítulo desta dissertação, encontramos as conclusões e respostas às questões efetuadas no início da mesma. Estas ajudam-nos a sintetizar o trabalho e a reunir os pontos que tiveram maior relevância.

Claramente, com este trabalho não efetuámos tudo o que seria possível sobre o tema ao qual, inicialmente, nos propusemos ou, pelo menos, na área em que este se encontra inserido. Assim, incluem-se ainda neste capítulo, algumas recomendações efetuadas para possíveis trabalhos futuros.

#### Conclusões do trabalho realizado

Reconhecemos, que este trabalho nos proporcionou, novos desafios e novas questões com as quais não estávamos a contar, inicialmente. Tínhamo-nos proposto, primeiramente a realizar testes, através da montagem de uma fonte hidrotermal num ambiente não muito profundo mas tentativamente com as mesmas características das fontes hidrotermais oceânicas. No entanto, não houve a necessária disponibilidade logística para seguir por este caminho, assim optámos por elaborar um *software* que fosse capaz de simular a trajetória do raio sonoro e, também calcular os tempos de viagem do mesmo dentro da fonte hidrotermal.

A parte computacional foi elaborada através do MATLAB, que nos permitiu a visualização dos possíveis comportamentos do raio sonoro nas condições estabelecidas, assim como o cálculo dos tempos efetuados pelo mesmo em diversas situações.

Passemos agora a abordar novamente as questões derivadas, efetuadas no início do desenvolvimento deste trabalho, para que se possa, por fim, responder à questão central.

A nossa primeira questão derivada debruçou-se sobre quais seriam as características gerais de uma fonte hidrotermal, à qual podemos responder que as principais características, e até mesmo motivo pelas quais estas fontes são tão interessantes, são as suas altas temperaturas (dos 40°C aos 450°C), o facto de serem

situadas a tão grandes profundidades (400m a 6000m) e a presença de nutrientes, minerais e vida dentro das mesmas.

A vida dos organismos existentes nas fontes apenas efetuam a quimiossíntese por não terem contacto com a luz solar, por isso não é possível realizarem a fotossíntese e criam material orgânico que permanece na fonte. É, também de salientar que apesar de existir vida animal nas fontes, não existe muita biodiversidade, pois a variedade de nutrientes é escassa.

Esta questão foi investigada em vários artigos e estudos já efetuados e pode ser respondida no Capítulo 2 desta dissertação. De tudo o que foi investigado e exposto no trabalho, aquilo que considerámos mais relevante para esta questão são de facto, as características que influenciam qualquer tipo de efeito exterior à fonte e que seja relevante para estudo. No nosso caso, este efeito serão as trajetórias dos raios sonoros. O que considerámos mais relevante foram os fatores que mais influenciaram os raios ao atravessarem a fonte e que são: a profundidade e a temperatura, tendo a segunda um impacto muito superior. Esta questão ajudou-nos também a ter alguma noção das dimensões das fontes, apesar de que estas variam de fonte para fonte. Ainda assim, foi um bom auxílio para efetuar o modelo desejado.

A segunda questão derivada debruçava-se sobre o comportamento geral de um raio sonoro no meio oceânico. Esta questão foi respondida no mesmo capítulo que a anterior, mas num subcapítulo diferente, onde é abordada a velocidade do som, as ondas sonoras e os raios sonoros. Assim, são inicialmente consideradas duas diferentes equações da velocidade do som, para que seja possível começar a ter-se noção daquilo que será abordado no decorrer do trabalho. Após isto, é feita uma abordagem tanto às ondas como aos raios sonoros, pois apesar de as ondas sonoras serem uma abordagem mais realista para o que possa vir a passar-se no oceano, e abrangerem um maior feixe de frequências em que podem ser estudadas, estas tornam-se muito complicadas de interpretar. Nestes termos, direcionamos o nosso estudo para os raios sonoros, sendo esta uma abordagem mais simples e descomplicada.

Podemos dizer, em relação ao comportamento do raio sonoro, que este se comporta tendo em conta as diferentes características do meio onde se desloca, ou seja, considerando que o nosso ambiente de estudo é o meio aquático, estas características

são a temperatura, a salinidade e a profundidade. Considerando que nos debruçámos, principalmente, sobre a temperatura e concluímos que o raio sonoro se afasta do centro da fonte, quanto maior é a temperatura e, que podemos observar que o aumento da velocidade é diretamente proporcional, pode constatar-se que estas duas características estão diretamente relacionadas.

Passando agora para a terceira questão, que aborda as possíveis perturbações do raio sonoro no oceano, podemos olhar para o subcapítulo seguinte (2.3.) onde abordámos a refração do som. Aqui, é exposta a forma como a velocidade do som poderá sofrer refração tendo em conta diversos parâmetros, como sejam a profundidade e a temperatura. Sendo que se chega à conclusão de que a maior perturbação está ligada à mudança de temperatura. Após isto é introduzida a lei de Snell, que trata do estudo do comportamento do raio ao mudar de meio, isto é, quando há alteração do índice de refração e conseqüentemente, da velocidade da propagação do som nos meios (neste caso, a água). Esta abordagem foi-nos útil, pois ajudou-nos à compreensão do comportamento do raio sonoro perante diferentes condições oceânicas e, posteriormente, à construção de modelos que explicam este comportamento.

Por fim, temos uma quarta questão derivada que é a aplicação do estudo do raio sonoro nas fontes hidrotermais, abordada nos capítulos seguintes da dissertação. No terceiro capítulo, é feita referência a trabalhos e estudos anteriores que se debruçaram sobre questões semelhantes à nossa e nos deram uma primeira visão sobre o assunto.

No capítulo seguinte, começámos então a desenvolver a nossa visão acerca do comportamento do raio sonoro nas fontes hidrotermais onde, inicialmente criámos três gráficos baseados nas equações que pretendíamos estudar, em que está exposta a evolução da velocidade do som em relação ao aumento da temperatura. Com os resultados destes gráficos construímos modelos de uma fonte hidrotermal com um raio sonoro a atravessá-la. Inicialmente, estes modelos tinham apenas uma camada, mudando o raio apenas uma vez de direção, e posteriormente as camadas aumentaram. As camadas foram definidas como diferentes velocidades do som calculadas, em que o que variou entre elas foi a temperatura no interior da fonte.

Após isto, foram então escolhidas três equações que pudéssemos utilizar para construir um modelo o máximo possível realista e fazer comparações que nos ajudassem a chegar cada vez mais perto dos resultados pretendidos.

Estando a nossa questão central debruçada sobre quais as características físicas das fontes hidrotermais oceânicas que se poderão estudar, utilizando técnicas acústicas, nós concluímos que a maior relevância para este estudo é estudar a trajetória do raio sonoro para estes ambientes. Utilizando para estes estudos, a variação de temperatura, profundidade e salinidade. Com este estudo conseguimos, através de três diferentes equações da velocidade do som, comparar resultados da trajetória, estudá-los e interpretá-los de forma a podermos criar resultados relevantes. Estes resultados foram expostos em forma de gráficos efetuados no MATLAB. Nestes podemos observar as trajetórias dos gráficos e os tempos calculados. Através destes tornou-se possível fazer uma análise, no capítulo 6, para comparar as três equações e chegar à conclusão de quais faziam mais sentido ser usadas neste estudo.

Notemos que neste programa, para além das abordadas neste trabalho, é possível introduzir novas equações. Isto é, com estudos futuros, poderá ser possível desenvolver uma expressão da velocidade do som que seja mais próxima da realidade. Esta poderá ser introduzida no nosso código e corrida, de forma a estudar as diferentes características para a mesma e, por conseguinte, para as fontes hidrotermais.

Claro que para futuros trabalhos, os nossos resultados poderão ser úteis. Mesmo tendo em conta que com estas expressões ultrapassámos o seu limite de validade, tenhamos noção que estas expressões foram úteis pois são as que tínhamos disponíveis e já tinham sido testadas anteriormente. O que é positivo para o desenvolver de uma expressão futura, válida.

Ainda assim, nós propomos, com as mesmas equações do som, que haja uma otimização das mesmas para melhores resultados. Isto é, que com o possível efetuar de testes reais e comparação dos resultados dos mesmos com o modelo criado nesta dissertação, seja possível um melhoramento e aumento de precisão quanto aos valores obtidos. E que com isto, seja possível a dedução de novas expressões para auxílio de investigações futuras.

## **Recomendações para trabalhos futuros**

Apesar de, este estudo ter sido apenas realizado computacionalmente e não ter havido uma parte prática em que pudéssemos comprovar o que estudámos, consideramos que este é válido e pode ser um ponto de partida para novos estudos sobre esta matéria, ou seja, este pode ser um projeto onde é simulada uma fonte hidrotermal e sejam feitos os testes possíveis e necessários para que se possam fazer as comparações exequíveis.

Para além disto existem também outros testes e estudos interessantes para este tema. Tal como a variação vertical na fonte do ângulo de emissão, podendo estudar-se não só a trajetória a nível horizontal mas também a nível vertical, formulando possíveis distribuições assimétricas do raio sonoro. Podendo, deste modo, fazer-se um estudo em três dimensões das fontes, e não apenas a duas dimensões. Nesta variação a nível vertical seria também interessante estudar os reflexos dos raios sonoros no fundo do mar. Pois os disparos neste caso não seriam efetuados como proposto neste trabalho, mas sim de forma enviesada.

Claro que para futuros trabalhos, relacionados com este, é de considerar também algumas perdas de propagação devido às características do oceano. Existem em localizações dispersas do oceano, diferentes parâmetros a nível dos constituintes da água. Isto faz com que o comportamento do som seja diferente em diferentes localizações.

Poderia também considerar-se para um futuro trabalho, o cálculo das velocidades do som mas tendo também em conta as impurezas e minerais presentes nas fontes hidrotermais oceânicas.

Outra recomendação para trabalhos futuros é incluir as diversas expressões para  $c(T(x,y))$  no próprio programa, em MATLAB, de modo a que as correspondentes derivadas, a inserir na equação diferencial geral resultante da aplicação do princípio de Fermat, sejam calculadas também pelo próprio programa. Assim, torna-se mais fácil testar outros modelos de dependência da velocidade do som com a temperatura.

Uma possível generalização, dirá respeito à consideração de modelos mais complexos da distribuição espacial da temperatura, incluindo nomeadamente

deformações da fonte estudada devido à possível presença de correntes submarinas, à existência de mais de uma fenda e outras características variáveis das fontes.

Por fim, e como grande objetivo seria o encontro de uma expressão da velocidade do som adequada para altas temperaturas, que fosse credível e não fosse necessário ultrapassar os seus limites de validade para estudo das fontes hidrotermais e das suas características.

Finalmente parece poder concluir-se, que por mais que se trabalhe num determinado tema desta matéria, existe sempre trabalho a ser feito e existem sempre novas hipóteses e novas sugestões.

## Referências bibliográficas

- AMON, Diva e CLICKSON, Deborah, (2016), “Hydrothermal Vents”, disponível em:  
<http://oceanexplorer.noaa.gov/oceanos/explorations/ex1605/background/vents/welcome.html>, acessado em 2 de novembro de 2017.
- BAKER, Edward T., *et al.*, (1985), “Hydrothermal particle plumes over the Southern Juan de Fuca Ridge”, em *Nature*, vol. 316, p.p. 342-344;
- BEAULIEU Stace E., BAKER Edward T. e GERMAN Christopher R. (2015) “O que são fontes hidrotermais e qual a sua importância para o planeta?”, disponível em: <https://econserv.wordpress.com/2016/06/07/o-que-sao-fontes-hidrotermais-e-qual-sua-importancia-para-o-planeta/>, acessado em 8 de novembro de 2017;
- BEMIS, K.G., *et al.*, (2015) “The path to COVIS: A review of acoustic imaging of hydrothermal flow regimes. *Deep-Sea Res. II*”, disponível em <http://dx.doi.org/10.1016/j.dsr2.2015.06.002i>, acessado em 10 de março de 2018;
- BEMIS, Karen, LOWELL Robert P. e FARAOUGH Aida, (2012), “Diffuse Flow On and Around Hydrothermal Vents at Mid-Ocean Ridges”, em *The official Magazine of the Oceanography Society*, vol. 25, no. 1, p.p. 182-191;
- BEN-BENJAMIN, (2016), “Snell’s law and SOFAR channels: a particle view”, em *Journal of Modern Optics*, vol. 63, no.1, p.p. 23-26, disponível em <http://dx.doi.org/10.1080/09500340.2015.1081990>, acessado em 5 de novembro de 2017;
- CAI, Yong *et al.*, (2012), “Study on the High Precision Acoustic Measurement Techniques for Determining Temperature Field Around Seafloor Hydrothermal Vent”, em *China Ocean Eng.*, Vol. 26, No. 4, p.p. 723 – 732;
- CARVALHO, J. Eduardo, (2009), “Metodologia do Trabalho Científico”, Lisboa, Escolar Editora;
- CÓLIN-GARCIA, María, *et al.*, (2016), “Hydrothermal vents and prebiotic chemistry: a review”, em *Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana*, p.p. 599-620;
- COSTA, Carlos Nélson Lopes da, (2017), “Apontamentos sobre acústica submarina e equações do sonar – Sebenta de apoio e ensino de oceanografia”, Alfeite, Escola Naval;
- CRONE TJ *et al.*, (2006) “The Sound Generated by Mid-Ocean Ridge Black Smoker Hydrothermal Vents” disponível em <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0000133>, acessado em 13 de junho de 2017;
- FAN, Wei, *et al.*, (2010), “Experimental study on underwater acoustic imaging of 2-D

temperature distribution around hot springs on floor of Lake Qiezhishan, China”, em *Experimental Thermal and Fluid Science* vol. 34, p.p. 1334-1345;

FERREIRA, Nicolau (2016), “A lua Europa tem um oceano interior e está a lança-lo (aos poucos) para o espaço”, disponível em: <https://www.publico.pt/2016/09/26/ciencia/noticia/nasa-anuncia-que-ha--na-lua-europa-1745244>, acedido em 17 de novembro de 2017;

IORIO, Daniela Di, *et al.*, (2012), “Measurements and Models of Heat Flux and Plumes from Hydrothermal Discharges Near the Deep Seafloor” em *The official Magazine of the Oceanography Society*, vol. 25, no. 1, p.p. 168-179;

JUNIOR, Francisco Ramalho, FERRARO, Nicolau Gilberto e SOARES Paulo Antônio de Toledo, (1999), *Os fundamentos da Física*, São Paulo, Editora Moderna.-7edi;

KINSLER, (2000) “Fundamentals of Acoustics”, EUA, 4ªedi, John Willey & Sons;

LU, J, *et al.*, (2000), “Acoustic computer tomographic pyrometry for two-dimensional measurement of gases taking into account the effect of refraction of sound wave paths” em *Meas. Sci. Technol.* vol.11, p.p. 692-697;

MARCONI, Marinha de Andrade e LAKATOS, Eva Maria, (2008), “Metodologia do Trabalho Científico”, São Paulo, Editora Atlas;

OLIVEIRA, André Jorge de (2017), “NASA descobre ingredientes da vida em lua de Saturno”, disponível em : <http://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Espaco/noticia/2017/04/nasa-descobre-ingredientes-da-vida-em-lua-de-saturno.html> , acedido em 17 de novembro de 2017;

OSTASHEV, Vladimir E., (2009), “Recent Progress in Acoustic Travel-Time Tomography of the Atmospheric Surface Layer” disponível em <http://digitalcommons.unl.edu/usarmyresearch/45>, p.p. 126-132, acedido em 15 de janeiro de 2018;

PAN, Huachen, *et al.*, (2008), “Progress in Developing a Device for Measuring Heat Flux from the Hydrothermal Vent in Deep Ocean using Acoustic Method”;

RONA, PA, *et al.*,(1997), “Acoustic mapping of diffuse flow at a seafloor hydrothermal site: Monolith Vent, Juan de Fuca Ridge”, in *Geophysical research letters*, vol 24, no. 19, p.p. 2351-2354;

RONA, PA, *et al.*, (2002), “Acoustic imaging, visualization, and quantification of buoyant hydrothermal plumes in the Ocean” in *Marine Geophysical Researches* vol. 23: p.p. 147-168;

SOUSA, Maria José e BAPTISTA, Cristina Sales, (2014), *Como fazer investigação, dissertações, teses e relatórios Segundo bolonha*, Lisboa, PACTOR;

URICK, R.J. (1983) “Principles of Underwater Sound for Engineers”, McGraw-Hill Book Co., New York;

“Estrutura em todas as escalas: criticalidade”, disponível em <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo3/modulo8/topico2.php>, acedido em 8 de novembro de 2017;

“O que é isso de uma “fonte hidrotermal de profundidade?””, disponível em: <https://blogmarprofundo.wordpress.com/tag/fonte-hidrotermal>, 15 de agosto de 2018.

“The law of refraction”, disponível em: <https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/25-3-the-law-of-refraction/>, 19 de dezembro de 2017.



## Apêndices

### Apêndice 1 – Código dos gráficos criado para apresentação dos diferentes $c(T)$

#### 1.1. Del Grosso a variar a temperatura

```
%programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da  
%dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de  
fontes
```

```
%hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas
```

```
%graf_DelGrosso_temp
```

```
%gráfico da velocidade do som por Del Grosso a variar com  
temperatura
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
close all
```

```
h=figure
```

```
%carregar os valores de temperatura
```

```
load ('every.mat')
```

```
%entrar com a equação da velocidade do som na água por Del  
Grosso
```

```
cT=1449.08+4.57.*T.*exp(-  
( (T./86.9)+(T./360).^2))+0.1522.*P.*exp...  
(T./1200)+1.46.*10.^(-5).*P.^(2).*exp(-T./20)
```

```
%para mostrar o gráfico
```

```
plot(T,cT, 'r')
```

```
%legendas presentes no gráfico no eixo do x, y e no título
a1=xlabel('Temperatura (oC)')
set(a1,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a2=ylabel('Velocidade do Som (m/s)')
set(a2,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a3=title(['Variação da Velocidade do Som com a
Temperatura'])
set(a3,'FontSize',14,'Fontweight','bold')
%colocar a grelha de fundo
grid on

%para a saída das imagens com boa resolução que quero
mostrar
%no documento por escrito
iprt=input('Press 1 to save the plot, 0 otherwise:');
if iprt==1
    fig1='figura_em_color_ps';
    print(h,'-dpsc',fig1)
    fig2='figura_em_jpeg';
    print(h,'-djpeg',fig2)
    iprt=0
end
```

## **1.2. Del Grosso a variar a profundidade**

```
%programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da
%dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de
fontes
%hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas

%graf_DelGrosso_prof
%gráfico da velocidade do som por Del Grosso a variar com
profundidade
```

```
clear all
clc
close all

h=figure

%carregar os valores de profundidade
load ('palt.mat')

%entrar com a equação da velocidade do som na água por Del
Grosso
cP=1449.08+4.57.*50.*exp(-
((50./86.9)+(50./360).^2))+0.1522.*P.*exp...
(50./1200)+1.46.*10.^(-5).*P.^2).*exp(-50./20)

%para mostrar o gráfico
plot(Z,cP,'r')
%legendas presentes no gráfico no eixo do x, y e no título
a1=xlabel('Profundidade (km)')
set(a1,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a2=ylabel('Velocidade do Som (m/s)')
set(a2,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a3=title(['Variação da Velocidade do Som com a
Profundidade'])
set(a3,'FontSize',14,'Fontweight','bold')
%colocar a grelha de fundo
grid on
%para a saída das imagens com boa resolução que quero
mostrar
%no documento por escrito
iprt=input('Press 1 to save the plot, 0 otherwise:');
if iprt==1
    fig1='figura_em_color_ps';
    print(h,'-dpsc',fig1)
```

```
fig2='figura_em_jpeg';  
print(h, '-djpeg',fig2)  
iprt=0  
end
```

### 1.3. Outras equações de c(T)

```
%programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da  
%dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de  
fontes  
%hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas
```

```
%graficos_de_cT  
%Variação com a temperatura%
```

```
clear all  
clc  
close all
```

```
h=figure
```

```
%para carregar os valores de temperatura  
load ('every.mat')
```

```
%valores necessários para a utilização das equações  
escolhidas
```

```
k=5; %relação dos calores específicos  
R=8.31; %constante dos gases  
a=0.1; %coeficiente de fórmula  
b=0.1; %coeficiente de fórmula  
c=0.1; %coeficiente de fórmula  
d=0.1; %coeficiente de fórmula
```

```
%Das equações abaixo selecionar apenas uma para criação do
gráfico%
% $cT = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$ ; %equação 1
cT=a+b.*T+c.*T.^2+d.*T.^3; %equação 2

%para mostrar o gráfico
plot(T,cT,'r')

%legendas presentes no gráfico no eixo do x, y e no título
a1=xlabel('Temperatura (oC)')
set(a1,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a2=ylabel('Velocidade do Som (m/s)')
set(a2,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a3=title(['Variação da Velocidade do Som com a
Temperatura'])
set(a3,'FontSize',14,'Fontweight','bold')
%colocar grelha de fundo
grid on

%para a saída das imagens com boa resolução que quero
mostrar no
%documento por escrito
iprt=input('Press 1 to save the plot, 0 otherwise:');
if iprt==1
    fig1='figura_em_color_ps';
    print(h,'-dpsc',fig1)
    fig2='figura_em_jpeg';
    print(h,'-djpeg',fig2)
    iprt=0
end
```

## Apêndice 2– Dedução das fórmulas para a trajetória do raio sonoro

### 2.1. Princípio de Fermat para raios sonoros

Tendo

$$F(x, y, y'(x)) = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{c(x, y)}$$

e querendo explicitar a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

precisamos de primeiro calcular as diversas derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{c(x, y)} = \sqrt{1 + y'(x)^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{c(x, y)} = \sqrt{1 + y'^2} (-1) c^{-2} \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \\ &= - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{c^2(x, y)} \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{c(x, y)} = \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{c(x, y)} \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} (0 + 2y') \\ &= \frac{y'}{c(x, y)} (1 + y'^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{c(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) \\ &= \frac{y''(x) c(x, y) \sqrt{1 + y'^2} - y'(x) \frac{d}{dx} [c(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2}]}{c^2(x, y) (1 + y'(x)^2)} \end{aligned}$$

mas

$$\frac{d}{dx} [c(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2}] = \frac{dc(x, y)}{dx} \sqrt{1 + y'^2} + c(x, y) \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} 2y'y''$$

mas

$$\frac{dc(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

pelo que

$$\frac{d}{dx} \left[ c(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2} \right] = \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \sqrt{1 + y'^2} + \frac{c(x, y) y' y''}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

então,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \\ &= \frac{y'' c(x, y) \sqrt{1 + y'^2} - y' \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} y' \right) \sqrt{1 + y'^2} + c(x, y) y' y'' (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \right]}{c^2(x, y) (1 + y'(x)^2)} \\ &= \frac{y'' c(x, y) \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{\partial c}{\partial x} \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{\partial c}{\partial y} y' \sqrt{1 + y'^2} - c(x, y) y'^2 y'' (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}}{c^2(x, y) (1 + y'^2)} \\ &= \frac{y'' c(x, y) \sqrt{1 + y'^2} - y' \sqrt{1 + y'^2} \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right) - y'^2 \sqrt{1 + y'^2} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right) - y'^2 y'' \sqrt{1 + y'^2} c(x, y)}{c^2(x, y) (1 + y'^2)} \\ &= \frac{y'' c(x, y) [-y'^2 (1 + y'^2)^{-1/2}] - y' \sqrt{1 + y'^2} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + y' \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^2(x, y) (1 + y'^2)} \\ &= \frac{y'' c(x, y) (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} [(1 + y'^2)^{2/2} - y'^2] - y' \sqrt{1 + y'^2} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + y' \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^2(x, y) (1 + y'^2)} \\ &= \frac{y'' c(x, y) (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} [1] - y' \sqrt{1 + y'^2} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + y' \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^2(x, y) (1 + y'^2)} \end{aligned}$$

E portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{y'' c(x, y) (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} - y' \left( \frac{\partial c}{\partial x} + y' \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^2(x, y) (1 + y'^2)} - \sqrt{1 + y'^2} c^2(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{y''}{c^2(x, y) (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y'}{c^2(x, y) (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + y' \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{c^2(x, y)} \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{y''}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{y'}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{y'^2}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{c^2(x,y)} \frac{\partial c}{\partial y} \\
 &\Leftrightarrow \frac{y''}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{y'}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{c^2(x,y)} \frac{\partial c}{\partial y} \left[ \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{1+y'^2} \right] \\
 &\Leftrightarrow \frac{y''}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y'}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{c^2(x,y)} \frac{y'^2 - 1 - y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial c}{\partial y} \\
 &\Leftrightarrow \frac{y''}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{y'}{c^2(x,y)(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{c^2(x,y)} \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial c}{\partial y} \\
 &\Leftrightarrow y''(x) = \frac{y'(1+y'^2)}{c(x,y)} \frac{\partial c(x,y)}{\partial x} - \frac{1}{c(x,y)} (1+y'^2(x)) \frac{\partial c(x,y)}{\partial y} \\
 &\Rightarrow y''(x) = \frac{1+y'(x)^2}{c(x,y)} \left[ y'(x) \frac{\partial c(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial c(x,y)}{\partial y} \right]
 \end{aligned}$$

Sendo esta a fórmula geral.

## 2.2. Caso 1 para $c(x,y)$

$$c(x,y) = \sqrt{kR} \sqrt{T(x,y)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial c(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{kR} \sqrt{T(x,y)} = \sqrt{kR} \frac{1}{2} T^{-1/2} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\sqrt{kR}}{2} T^{-1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial c(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{kR} \sqrt{T(x,y)} = \sqrt{kR} \frac{1}{2} T^{-1/2} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\sqrt{kR}}{2} T^{-1/2} \frac{\partial T}{\partial y} \end{cases}$$

$$\rightarrow y''(x) = \frac{1 + y'(x)^2}{\sqrt{kR}\sqrt{T(x,y)}} \left[ y'(x) \frac{\sqrt{kR}}{2} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\sqrt{kR}}{2} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial y} \right]$$

$$y''(x) = \frac{1 + y'(x)^2}{2T(x,y)} \left[ y'(x) \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right]$$

### 2.3. Caso 2 para c(x,y)

$$c(x,y) = \alpha + \beta T(x,y) + \gamma T^2(x,y) + \varepsilon T^3(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial c(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\alpha + \beta T(x,y) + \gamma T^2(x,y) + \varepsilon T^3(x,y)] = \beta \frac{\partial T}{\partial x} + 2\gamma T \frac{\partial T}{\partial x} + 3\varepsilon T^2 \frac{\partial T}{\partial x} = \\ = [\beta + 2\gamma T(x,y) + 3\varepsilon T^2(x,y)] \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial c(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\alpha + \beta T(x,y) + \gamma T^2(x,y) + \varepsilon T^3(x,y)] = \beta \frac{\partial T}{\partial y} + 2\gamma T \frac{\partial T}{\partial y} + 3\varepsilon T^2 \frac{\partial T}{\partial y} = \\ = [\beta + 2\gamma T(x,y) + 3\varepsilon T^2(x,y)] \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \end{cases}$$

$$y''(x) = \frac{(1 + y'(x)^2)[\beta + 2\gamma T(x,y) + 3\varepsilon T^2(x,y)]}{\alpha + \beta T(x,y) + \gamma T^2(x,y) + \varepsilon T^3(x,y)} \left[ y'(x) \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right]$$

### 2.4. Caso 3 para c(x,y)

$$c(T,S,P) = 1449.08 + 4.57T e^{-[\frac{T}{86.9} + (\frac{T}{360})^2]} + 1.33(S - 35) e^{-\frac{T}{120}} \\ + 0.1522P e^{[\frac{T}{1200} + \frac{S-35}{400}]} + 1.46 * 10^{-5} P^2 e^{-[\frac{T}{20} + \frac{S-35}{10}]}$$

Para este caso, a expressão não foi calculada à mão, mas sim no programa MATLAB.

## Apêndice 3 – Código criado para apresentação dos gráficos do comportamento das temperaturas

### 3.1. Para as temperaturas vistas de cima

```
%programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da
% dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de
fontes
% hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas
```

```
%pos_trat_temp_cima

%para mostrar a distribuição de temperaturas vista de cima

clear all
clc
close all

h=figure

    %alterar consoante a profundidade que queremos mostrar
z=0

    %para mostrar o gráfico nos intervalos pretendidos
[x,y]=meshgrid(-0.5:.01:0.5,-0.5:.01:0.5);

    %equação da temperatura
T=[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z)*(x.^2+y.^2));
mesh(x,y,T)

    %para que o gráfico seja visto de cima
contour(x,y,T,20)

    %legenda do gráfico no eixo do x, y e o título
a1=xlabel('x')
set(a1,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a2=ylabel('y')
set(a2,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a3=title(['Vista de cima da variação de
temperaturas']);
set(a3,'FontSize',14,'Fontweight','bold');

    %barra colorida na lateral
```

```
colorbar
```

```
    %para que o eixo do x e do y tenham as mesmas dimensões  
axis equal
```

```
    %para obter imagens com boa resolução para o documento  
escrito
```

```
    iprt=input('Press 1 to save the plot, 0 otherwise:');
```

```
    if iprt==1
```

```
        fig1='figura_em_color_ps';
```

```
        print(h, '-dpsc', fig1)
```

```
        fig2='figura_em_jpeg';
```

```
        print(h, '-djpeg', fig2)
```

```
        iprt=0
```

```
    end
```

### **3.2. Para as temperaturas vistas de lado**

```
%programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da  
%dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de  
fontes
```

```
%hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas
```

```
%pos_trat_temp_lado
```

```
%para mostrar a distribuição de temperaturas vista de cima
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
close all
```

```
h=figure
```

```
    %alterar consoante a profundidade que queremos mostrar
```

```
z=0
```

```
%para mostrar o gráfico nos intervalos pretendidos
[x,y]=meshgrid(-0.5:.01:0.5,-0.5:.01:0.5);

%equação da temperatura
T=[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z)*(x.^2+y.^2));
mesh(x,y,T)

%legenda do gráfico no eixo do x, y, z e o título
a3=title(['Vista de lado da variação de temperaturas'])
set(a3,'FontSize',14,'Fontweight','bold')
a1=xlabel('x')
set(a1,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a2=ylabel('y')
set(a2,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
a4=zlabel('Temperatura (oC)')
set(a4,'FontSize',12,'Fontweight','bold')

%para obter imagens com boa resolução para o documento
escrito
iprt=input('Press 1 to save the plot, 0 otherwise:');
if iprt==1
    fig1='figura_em_color_ps';
    print(h,'-dpsc',fig1)
    fig2='figura_em_jpeg';
    print(h,'-djpeg',fig2)
    iprt=0
end
```

## Apêndice 4 – Códigos criados para apresentação dos gráficos do comportamento das trajetórias e cálculo dos respetivos tempos

### 4.1. A variar o ângulo de emissão

%programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da

```
%dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de fontes  
%hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas
```

```
%gráfico das trajetórias do raio sonoro que alteram de acordo  
%com o ângulo emissor
```

```
function anguloemissor
```

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
close all;
```

```
%valores necessários para introdução nas equações da  
velocidade do som
```

```
k=5; %relação dos calores específicos
```

```
R=8.31; %constante dos gases
```

```
a=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
b=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
c=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
d=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
hold on
```

```
%profundidade (alterar consoante o pretendido)
```

```
z=9;%profundidade em m
```

```
%para construir a matriz dos valores calculados
```

```
My1=[];
```

```
My2=[];
```

```
%delimitações para o eixo do x
```

```
passo=0.01
```

```
eixo_xx=-0.2:passo:0.2;
```

```
%variação do ângulo de incidência do emissor
n1=8;
theta=-pi/n1:0.05:pi/n1;
tang_theta=tan(theta);

%início do ciclo de cálculos para obtenção dos valores
da
%trajetória (equação diferencial ode45)
for y2 = tang_theta
[x,y]=ode45(@trajetoria,eixo_xx,[0.075,y2]);
My1=[My1 y(:,1)]; %y
My2=[My2 y(:,2)]; %y'
end

%para mostrar os gráficos
figure (1)
plot(eixo_xx,My1)
axis([min(eixo_xx) max(eixo_xx) -0.2 0.2]);
axis equal; %tamanho do eixo do x = tamanho do eixo do
y
xlim([min(eixo_xx) max(eixo_xx)])
ylim([-0.2 0.2])
drawnow
[x,y]=meshgrid(eixo_xx,-0.2:.01:0.2);
T=[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z)*(x.^2+y.^2));
contour(x,y,T,10)
title('Trajetória do raio sonoro e tempos de
propagação',...
'FontSize',14,'Fontname','Helvetica','FontWeight','bold')

s1=length(theta) %comprimento do vetor theta
```

```
    auxiliar1=eixo_xx'*ones(1,s1); %multiplicar por 1 todos
os valores
    %que tenha a mais

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%TEMPOS PARA AS TRÊS DIFERENTES EQUAÇÕES DA
VELOCIDADE DO SOM%%
%(neste momento do programa selecionaremos apenas um
dos "auxiliar
%2",consoante a equação da velocidade do som escolhida
%   auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./[400.*exp(-0.5.*z)].*...
%       exp(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2+My1.^2)));
%   auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./(a+b.*([400.*exp(-
%       0.5.*z)].*exp...
%       (-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2.+My1.^2)))+c.*...
%       ([400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z).*...
%       (auxiliar1.^2.+My1.^2))).^2+d.*([400.*exp(-0.5.*...
%       z)].*exp(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2+My1.^2))).^3));
auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./((82949.*exp((exp((auxiliar1.^2
+...
    My1.^2).*(2.*z - 20)).*exp(-z/2))/3))/5000 + ...
    (6249648805781739.*exp(-20.*exp((auxiliar1.^2 +
My1.^2)*...
    (2.*z - 20)).*exp(-z/2)))...
    /36028797018963968 + 1828.*exp((auxiliar1.^2 +
My1.^2).*...
    (.2*z - 20)).*exp((100.*exp(2.*(auxiliar1.^2 +
My1.^2).*...
    (2.*z - 20)).*exp(-z))/81 - (4000.*exp((auxiliar1.^2
+ ...
    My1.^2).*(2.*z - 20)).*exp(-z/2))/869).*exp(-z/2) +
36227/25))
```

```
%expressão para calcular os tempos da trajetória
%(neste momento do programa selecionaremos apenas um dos
"Mt",
%consoante a equação da velocidade do som escolhida

%calculo do integral
%Mt=(1/sqrt(k*R))*trapz(auxiliar2,1)*passo
Mt=trapz(auxiliar2,1)*passo

%para que os resultados dos tempos apareçam em exponencial
format shortEng
Mt

%%para colocar os tempos calculados em legenda no
gráfico%%

    aux6=length(Mt)
    aux4=num2str(Mt','%8.2e\n')
    aux10=[];

    for i = 1: aux6
        aux9=[aux4(i,:), ' s']
        aux10=[aux10;aux9];
    end
    legend(aux10)
    legend('Location','eastoutside')
    legend('boxoff')

    %%%%para guardar tudo para depois aparecer na imagem
final%%%%

    aux1=num2str(max(eixo_xx)-min(eixo_xx));
    aux2=num2str(n1);
    aux3=['traj_ang','_ax_',aux1,'_atheta_',aux2,'.mat']
    save(aux3,'My1','My2','eixo_xx','theta','Mt','passo')
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%chamar a equação diferencial e parâmetros necessários
para
%o cálculo
function dydx = trajetoria (x,y)
z=9;%profundidade em m
T=[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-
2.*z)*(x.^2+y(1).^2)); %expressão
    %da tempetarura
a=0.1;%coeficiente de fórmula
b=0.1;%coeficiente de fórmula
c=0.1;%coeficiente de fórmula
d=0.1;%coeficiente de fórmula
S=35 %salinidade
P=109 %P=(99.5(1-0.00263 cos(2l))Z+0.239Z^2) , com
Z=1.1km e l=37o
dydx=zeros(2,1);
dydx(1)=y(2);

%DAS TRÊS EQUAÇÕES ABAIXO HAVERÃO SEMPRE DUAS NÃO
ATIVAS E UMA A
%CORRER
%Estas são as equações da velocidade do som na água%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%se c=sqrt(k)*sqrt(T) - equação 1%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% var1=1+y(2).^2;
% var2=2.*[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-
2.*z)*(x.^2+y(1).^2));
% dydx(2)=(var1/var2).*(var3-var4);
% var3=y(2).*(800*x*exp((x^2 + y(1)^2)*(2*z - 20))*...
% exp(-z/2)*(2*z - 20));
% var4=800*y(1)*exp((x^2 + y(1)^2)*(2*z - 20))*exp(-

```

```

%      z/2)*...
%      (2*z - 20);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      se c=a+b.*T+c.*T^2+d.*T^3 - equação 2%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      var1=1+y(2).^2;
%      var2=b+2.*c.*T+3.*d.^2.*T.^2;
%      var3=a+b.*T+c.*T.^2+d.*T.^3;
%      var4=y(2).*(800*x*exp((x^2 + y(1)^2)*(2*z -
%              20))*exp(-z/2)*...
%      (2*z - 20));
%      var5=800*y(1)*exp((x^2 + y(1)^2)*(2*z - 20))*exp(-
%              z/2)*...
%      (2*z - 20);
%      dydx(2)=(var1.*var2)./var3.*(var4-var5);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      se c=1449.08+4.57.*T.*exp(-
(T/86.9)+(T/360).^2)+1.33.*(S-35)
%      .*exp(-T/120)+0.1522.*P.*exp((T/1200)+((S-
35)/400))+1.46.*10.^(-5)
%      .*P.^2).*exp((-T/20)+((S-35)/10) - equação 3%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      var1=1+y(2).^2
%      var2=(82949*exp((exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-
z/2))/3)...
%      )/5000 + (6249648805781739*exp(-20*exp((x.^2 +
y(1).^2)*...
%      (2*z - 20))*exp(-z/2)))/36028797018963968 +...
%      1828*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp((100*exp(2*...
%      (x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z))/81 -
(4000*exp...
%      ((x^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z/2))/869)*...
%      exp(-z/2) + 36227/25

```

```

var3=y(2)
var4=(82949*x*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp((exp(...
(x.^2+ y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z/2))/3)*exp(-
z/2)*...
(2*z - 20))/7500 - 1828*exp((x.^2 + y(1).^2)*...
(2*z - 20))*exp((100*exp(2*(x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))...
*exp(-z))/81 - (4000*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))...
*exp(-z/2))/869)*exp(-z/2)*((8000*x*exp((x.^2 +
y(1).^...
2)*(2*z - 20))*exp(-z/2)*(2*z- 20))/869 -
(400*x*exp(2*(x.^...
2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z)*(2*z - 20))/81) -
...
(31248244028908695*x*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp(-...
20*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-
z/2))*exp(-z/2)*...
(2*z - 20))/4503599627370496 + 3656*x*exp((x.^2 +
y(1)...
.^2)*(2*z - 20))*exp((100*exp(2*(x.^2 +
y(1).^2)*(2*z - ...
20))*exp(-z))/81 - (4000*exp((x.^2 +
y(1).^2)*(2*z...
- 20))*exp(-z/2))/869)*exp(-z/2)*(2*z - 20)
var5=(82949*y(1)*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp((exp(...
(x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z/2))/3)*exp(-
z/2)*(2*z...
- 20))/7500 - 1828*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp(...

```

```
(100*exp(2.*(x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-
z))/81 - (...
4000*exp((x.^2 ...
+ y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z/2))/869)*exp(-
z/2)*(...
(8000*y(1)*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-
z/2)*...
(2*z - 20))/869 - (400*y(1)*exp(2*(x.^2 +
y(1).^2)*(2*z - ...
20))*exp(-z)*(2*z - 20))/81) -
(31248244028908695*y(1)*exp...
((x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-20*exp((x.^2 +
y(1).^2)*...
(2*z - 20))*exp(-z/2))*exp(-z/2)*(2*z - 20))/...
4503599627370496 + 3656*y(1)*exp((x.^2 +
y(1).^2)*(2*z - ...
20))*exp((100*exp(2*(x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp(-z))/...
81 - (4000*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-
z/2))/869)...
*exp(-z/2)*(2*z - 20)
dydx(2)=(var1./var2).*((var3*var4)-var5);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

#### 4.2. Pós-tratamento de 5.1.

```
%programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da
%dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de
fontes
%hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas

%pos_trat_ang
```

```
%função para tratamento dos gráficos obtidos em
'anguloemissor.m'

clear all
clc
close all

[file_name path_name]=uigetfile('*.mat','?');
load(file_name);

h=figure

hold on
    z=9;%profundidade
    a=0.1;%coeficiente de fórmula
    b=0.1;%coeficiente de fórmula
    c=0.1;%coeficiente de fórmula
    d=0.1;%coeficiente de fórmula
    k=5; %relação dos calores específicos
    R=8.31; %constante dos gases

    figure (1)
    My1=fliplr(My1)
    plot(eixo_xx,My1)
    axis([min(eixo_xx) max(eixo_xx) -0.2 0.2]);
    axis equal; %tamanho do eixo do x = tamanho do eixo do
y
    a3=title(['Vista de cima da variação de
temperaturas',...
            'e trajetória do raio sonoro'])
    set(a3,'FontSize',14,'Fontweight','bold')
    a1=xlabel('x')
    set(a1,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
    a2=ylabel('Ângulo de Emissão')
```

```
set(a2,'FontSize',12,'Fontweight','bold')
    s1=length(theta) %comprimento do vetor theta
    auxiliar1=eixo_xx'*ones(1,s1); %multiplicar por 1 todos
os valores
    %que tenha a mais

    %TEMPOS PARA AS TRÊS DIFERENTES EQUAÇÕES DA VELOCIDADE
DO SOM%
    %(neste momento do programa selecionaremos apenas um
dos
    %"auxiliar 2", consoante a equação da velocidade do som
escolhida
%   auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./[400.*exp(-0.5.*z)].*...
%       exp(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2+My1.^2)));
%   auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./(a+b.*([400.*exp(-
0.5.*z)].*exp...
%   (-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2.+My1.^2)))+c.*...
%   ([400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z).*...
%   (auxiliar1.^2.+My1.^2))).^2+d.*([400.*exp(-0.5.*...
%   z)].*exp(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2+My1.^2))).^3));
auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./((82949.*exp((exp((auxiliar1.^2
+...
    My1.^2).*(2.*z - 20)).*exp(-z/2))/3))/5000
+ ...
    (6249648805781739.*exp(-
20.*exp((auxiliar1.^2 + My1.^2)*...
    (2.*z - 20)).*exp(-z/2)))*...
    /36028797018963968 +
1828.*exp((auxiliar1.^2 + My1.^2).*...
    (.2*z -
20)).*exp((100.*exp(2.*(auxiliar1.^2 + My1.^2).*...
    (2.*z - 20)).*exp(-z))/81 -
(4000.*exp((auxiliar1.^2 + ...
```

```
My1.^2).*(2.*z - 20)).*exp(-
z/2))/869).*exp(-z/2) + 36227/25))

%expressão para calcular os tempos da trajetória
%(neste momento do programa selecionaremos apenas um
dos "Mt",
%consoante a equação da velocidade do som escolhida

%calculo do integral
%Mt=(1/sqrt(k*R))*trapz(auxiliar2,1)*passo
Mt=trapz(auxiliar2,1)*passo
%para que os resultados dos tempos apareçam em
exponencial
format shortEng
Mt
%%para colocar os tempos calculados em legenda no
gráfico%%
aux6=length(Mt)
aux4=num2str(Mt','%8.2e\n')
aux10=[];
for i = 1: aux6
    aux9=[aux4(i,:), ' s']
    aux10=[aux10;aux9];
end
aux10=flipud(aux10)
legend(aux10)
legend('Location','eastoutside')
legend('boxoff')
xlim([min(eixo_xx) max(eixo_xx)])
ylim([-0.2 0.2])
drawnow
[x,y]=meshgrid(eixo_xx,-0.2:.01:0.2);
T=[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z)*(x.^2+y.^2));
contour(x,y,T,10)
```

```
%para criação de imagem com boa resolução
iprt=input('Press 1 to save the plot, 0 otherwise:');
    if iprt==1
        fig1='figura_em_color_ps';
        print(h, '-dpsc',fig1)
        fig2='figura_em_jpeg';
        print(h, '-djpeg',fig2)
        iprt=0
    end
```

#### 4.3. A variar a posição inicial do emissor

programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da  
%dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de  
fontes

%hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas

%gráfico das trajetórias do raio sonoro que alteram de  
acordo com a

%posição do emissor

```
function posicaooinicial
```

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
close all;
```

%valores necessários para introdução nas equações da  
velocidade do som

```
a=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
b=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
c=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
d=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
k=5; %relação dos calores específicos
```

```
R=8.31; %constante dos gases

hold on

%profundidade (alterar consoante o pretendido)
z=9;

%para construir a matriz dos valores calculados
My1=[];
My2=[];

%delimitações para o eixo do x
passo=0.02
eixo_xx=-0.2:passo:0.2;

%variação da posição do emissor
n1=19;
pemissor=-0.2:0.02:0.2;

%início do ciclo de cálculos para obtenção dos valores
da
%trajetória (equação diferencial ode45)
for y1 = pemissor;
[x,y]=ode45(@trajetoria,eixo_xx,[y1,0]);
size(y(:,1))
My1=[My1 y(:,1)]; %y
My2=[My2 y(:,2)]; %y'
end

%para mostrar os gráficos
figure (1)
plot(eixo_xx,My1)
axis([min(eixo_xx) max(eixo_xx) min(pemissor)
max(pemissor)]);
```

```

axis equal %tamanho do eixo do x = tamanho do eixo do y
xlim([min(eixo_xx) max(eixo_xx)])
ylim([min(pemissor) max(pemissor)])
drawnow
[x,y]=meshgrid(eixo_xx,pemissor);
T=[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z)*(x.^2+y.^2));
contour(x,y,T,20)
title('Trajetória do raio sonoro e tempos de
propagação',...

'FontSize',14,'Fontname','Helvetica','FontWeight','bold')
s1=length(pemissor);%comprimento do vetor pemissor
auxiliar1=eixo_xx'*ones(1,s1); %multiplicar por 1 todos
os valores
    %que tenha a mais

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%TEMPOS PARA AS TRÊS DIFERENTES EQUAÇÕES DA
VELOCIDADE DO SOM%%
    %(neste momento do programa selecionaremos apenas um
dos "auxiliar
    %2",consoante a equação da velocidade do som escolhida
%   auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./[400.*exp(-0.5.*z)].*...
%       exp(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2+My1.^2)));
%   auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./(a+b.*([400.*exp(-
0.5.*z)].*exp...
%       (- (20-2.*z)*(auxiliar1.^2.+My1.^2)))+c.*...
%       ([400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z).*...
%       (auxiliar1.^2.+My1.^2))).^2+d.*([400.*exp(-0.5.*...
z)].*exp(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2+My1.^2))).^3));
auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./((82949.*exp((exp((auxiliar1.^2
+...
My1.^2).*(2.*z - 20)).*exp(-z/2))/3))/5000 + ...

```

```
(6249648805781739.*exp(-20.*exp((auxiliar1.^2 +
My1.^2)*...
(2.*z - 20)).*exp(-z/2)))...
/36028797018963968 + 1828.*exp((auxiliar1.^2 +
My1.^2).*...
(.2*z - 20)).*exp((100.*exp(2.*(auxiliar1.^2 +
My1.^2).*...
(2.*z - 20)).*exp(-z))/81 - (4000.*exp((auxiliar1.^2
+ ...
My1.^2).*(2.*z - 20)).*exp(-z/2))/869).*exp(-z/2) +
36227/25))
```

```
%%expressão para calcular os tempos da trajetória%%
%(neste momento do programa selecionaremos apenas um dos
"Mt",
```

```
%consoante a equação da velocidade do som escolhida
```

```
%calculo do integral
```

```
%Mt=(1/sqrt(k*R))*trapz(auxiliar2,1)*passo
```

```
Mt=trapz(auxiliar2,1)*passo
```

```
%para que os resultados dos tempos apareçam em exponencial
```

```
format shortEng
```

```
Mt
```

```
%%para colocar os tempos calculados em legenda no
gráfico%%
```

```
aux6=length(Mt)
```

```
aux4=num2str(Mt', '%8.2e\n')
```

```
aux10=[];
```

```
for i = 1: aux6
```

```
    aux9=[aux4(i,:), ' s']
```

```
    aux10=[aux10;aux9];
```

```
end
    legend(aux10)
    legend('Location','eastoutside')
    legend('boxoff')

    %%%%%%%%%para guardar tudo para depois aparecer na imagem
final%%%%%%%%
    aux1=num2str(max(eixo_xx)-min(eixo_xx));
    aux2=num2str(n1);
    aux3=['traj_pos','_ax_',aux1,'_apemissor_',aux2,'.mat']
    save(aux3,'My1','My2','eixo_xx','pemissor','Mt','passo')

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %chamar a equação diferencial e parâmetros necessários
para
    %o cálculo
    function dydx = trajetoria (x,y)
    z=9;
    T=[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-
2.*z)*(x.^2+y(1).^2)); %expressão
        %da temperatura
    a=0.1;%coeficiente de fórmula
    b=0.1;%coeficiente de fórmula
    c=0.1;%coeficiente de fórmula
    d=0.1;%coeficiente de fórmula
    S=35 %salinidade
    P=109 %P=(99.5(1-0.00263 cos(2l))Z+0.239Z^2) , com
Z=1.1km e l=37o
    dydx=zeros(2,1);
    dydx(1)=y(2);

    %DAS TRÊS EQUAÇÕES ABAIXO HAVERÃO SEMPRE DUAS NÃO
ATIVAS E UMA A
```

%CORRER

%Estas são as equações da velocidade do som na água%

%%%%%%%%se  $c = \sqrt{k} \cdot \sqrt{T}$  - equação 1%%%%%%%%

```
% var1=1+y(2).^2;
% var2=2.*[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-
2.*z)*(x.^2+y(1).^2));
% dydx(2)=(var1/var2).*(var3-var4);
%var3=y(2).*(800*x*exp((x^2 + y(1)^2)*(2*z - 20))*...
exp(-z/2)*(2*z - 20));
%var4=800*y(1)*exp((x^2 + y(1)^2)*(2*z - 20))*exp(-z/2)*...
(2*z - 20);
```

%%%%%%%%se  $c = a + b \cdot T + c \cdot T^2 + d \cdot T^3$  - equação 2%%%%%%%%

```
% var1=1+y(2).^2;
% var2=b+2.*c.*T+3.*d.^2.*T.^2;
% var3=a+b.*T+c.*T.^2+d.*T.^3;
% var4=y(2).*(800*x*exp((x^2 + y(1)^2)*(2*z -
20))*exp(-z/2)*...
(2*z - 20));
% var5=800*y(1)*exp((x^2 + y(1)^2)*(2*z - 20))*exp(-
z/2)*...
(2*z - 20);
% dydx(2)=((var1.*var2)./var3).*(var4-var5);
```

```
%%%%%%%%se  $c = 1449.08 + 4.57 \cdot T \cdot \exp(-
(T/86.9) + (T/360).^2) + 1.33 \cdot (S-35)
\cdot \exp(-T/120) + 0.1522 \cdot P \cdot \exp((T/1200) + ((S-
35)/400)) + 1.46 \cdot 10.^{-5}
\cdot P.^2 \cdot \exp((-T/20) + ((S-35)/10))$  - equação 3%%%%
```

```

var1=1+y(2).^2
var2=(82949*exp((exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-
z/2))/3)...
    )/5000 + (6249648805781739*exp(-20*exp((x.^2 +
y(1).^2)*...
    (2*z - 20))*exp(-z/2)))/36028797018963968 +...
    1828*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp((100*exp(2*...
    (x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z))/81 -
(4000*exp...
    ((x^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z/2))/869)*...
    exp(-z/2) + 36227/25
var3=y(2)
var4=(82949*x*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp((exp(...
    (x.^2+ y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z/2))/3)*exp(-
z/2)*...
    (2*z - 20))/7500 - 1828*exp((x.^2 + y(1).^2)*...
    (2*z - 20))*exp((100*exp(2*(x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))...
    *exp(-z))/81 - (4000*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))...
    *exp(-z/2))/869)*exp(-z/2)*((8000*x*exp((x.^2 +
y(1).^...
    2)*(2*z - 20))*exp(-z/2)*(2*z- 20))/869 -
(400*x*exp(2*(x.^...
    2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-z)*(2*z - 20))/81) -
...
    (31248244028908695*x*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z -
20))*exp(-...
    20*exp((x.^2 + y(1).^2)*(2*z - 20))*exp(-
z/2))*exp(-z/2)*...
    (2*z - 20))/4503599627370496 + 3656*x*exp((x.^2 +
y(1)...

```

$$\begin{aligned}
 & \cdot^2) * (2 * z - 20)) * \exp((100 * \exp(2 * (x.^2 + \\
 y(1).^2) * (2 * z - \dots \\
 & 20)) * \exp(-z)) / 81 - (4000 * \exp((x.^2 + \\
 y(1).^2) * (2 * z \dots \\
 & - 20)) * \exp(-z/2)) / 869) * \exp(-z/2) * (2 * z - 20) \\
 \text{var5} = & (82949 * y(1) * \exp((x.^2 + y(1).^2) * (2 * z - \\
 20)) * \exp(\dots \\
 & (x.^2 + y(1).^2) * (2 * z - 20)) * \exp(-z/2)) / 3) * \exp(- \\
 z/2) * (2 * z \dots \\
 & - 20)) / 7500 - 1828 * \exp((x.^2 + y(1).^2) * (2 * z - \\
 20)) * \exp(\dots \\
 & (100 * \exp(2 * (x.^2 + y(1).^2) * (2 * z - 20)) * \exp(- \\
 z)) / 81 - (\dots \\
 & 4000 * \exp((x.^2 \dots \\
 & + y(1).^2) * (2 * z - 20)) * \exp(-z/2)) / 869) * \exp(- \\
 z/2) * (\dots \\
 & (8000 * y(1) * \exp((x.^2 + y(1).^2) * (2 * z - 20)) * \exp(- \\
 z/2) * \dots \\
 & (2 * z - 20)) / 869 - (400 * y(1) * \exp(2 * (x.^2 + \\
 y(1).^2) * (2 * z - \dots \\
 & 20)) * \exp(-z) * (2 * z - 20)) / 81) - \\
 (31248244028908695 * y(1) * \exp \dots \\
 & ((x.^2 + y(1).^2) * (2 * z - 20)) * \exp(-20 * \exp((x.^2 + \\
 y(1).^2) * \dots \\
 & (2 * z - 20)) * \exp(-z/2)) * \exp(-z/2) * (2 * z - 20)) / \dots \\
 4503599627370496 + 3656 * y(1) * \exp((x.^2 + \\
 y(1).^2) * (2 * z - \dots \\
 & 20)) * \exp((100 * \exp(2 * (x.^2 + y(1).^2) * (2 * z - \\
 20)) * \exp(-z)) / \dots \\
 & 81 - (4000 * \exp((x.^2 + y(1).^2) * (2 * z - 20)) * \exp(- \\
 z/2)) / 869) \dots \\
 & * \exp(-z/2) * (2 * z - 20) \\
 \text{dydx}(2) = & (\text{var1} ./ \text{var2}) .* ((\text{var3} * \text{var4}) - \text{var5});
 \end{aligned}$$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

#### 4.4. Pós-tratamento de 5.3

```
%programa efetuado pela ASPOF Evagelista Paiva no âmbito da  
%dissertação de mestrado com o tema "Caracterização de  
fontes
```

```
%hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas
```

```
%pos_trat_pos
```

```
%função para tratamento dos gráficos obtidos em  
'posicaoInicial.m'
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
close all
```

```
[file_name path_name]=uigetfile('*.mat','?');
```

```
load(file_name);
```

```
h=figure
```

```
hold on
```

```
z=9 %profundidade
```

```
a=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
b=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
c=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
d=0.1;%coeficiente de fórmula
```

```
k=5; %relação dos calores específicos
```

```
R=8.31; %constante dos gases
```

```
figure (1)
```

```
My1=fliplr(My1)
plot(eixo_xx,My1)
axis([min(eixo_xx) max(eixo_xx) min(pemissor)
max(pemissor)]);
axis equal %tamanho do eixo do x = tamanho do eixo do y
a3=title(['Vista de cima da variação de
temperaturas',...
'e trajetória do raio sonoro'])
set(a3,'FontSize',14,'Fontweight','bold')
a1=xlabel('x')
set(a1,'FontSize',14,'Fontweight','bold')
a2=ylabel('Posição do Emissor')
set(a2,'FontSize',14,'Fontweight','bold')
s1=length(pemissor);%comprimento do vetor pemissor
auxiliar1=eixo_xx'*ones(1,s1); %multiplicar por 1 todos
os valores
%que tenha a mais

%TEMPOS PARA AS TRÊS DIFERENTES EQUAÇÕES DA VELOCIDADE
DO SOM%
%(neste momento do programa selecionaremos apenas um
dos
%"auxiliar 2", consoante a equação da velocidade do som
escolhida
% auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./[400.*exp(-0.5.*z)].*...
% exp(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2+My1.^2)));
% auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./(a+b.*([400.*exp(-
0.5.*z)].*exp...
%(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2.+My1.^2)))+c.*...
%([400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z).*...
%(auxiliar1.^2.+My1.^2))).^2+d.*([400.*exp(-0.5.*...
%z)].*exp(-(20-2.*z)*(auxiliar1.^2+My1.^2))).^3));
auxiliar2=sqrt((1.+My2.^2)./((82949.*exp((exp((auxiliar1.^2
+...
```

```
My1.^2).*(2.*z - 20)).*exp(-z/2))/3))/5000 + ...  
  (6249648805781739.*exp(-20.*exp((auxiliar1.^2 +  
My1.^2)*...  
  (2.*z - 20)).*exp(-z/2)))...  
/36028797018963968 + 1828.*exp((auxiliar1.^2 + My1.^2).*...  
  (.2*z - 20)).*exp((100.*exp(2.*(auxiliar1.^2 +  
My1.^2)).*...  
  (2.*z - 20)).*exp(-z))/81 - (4000.*exp((auxiliar1.^2 + ...  
My1.^2).*(2.*z - 20)).*exp(-z/2))/869).*exp(-z/2) +  
36227/25))
```

```
%expressão para calcular os tempos da trajetória  
%(neste momento do programa selecionaremos apenas um dos  
"Mt",
```

```
%consoante a equação da velocidade do som escolhida
```

```
%calcula do integral
```

```
%Mt=(1/sqrt(k*R))*trapz(auxiliar2,1)*passo
```

```
Mt=trapz(auxiliar2,1)*passo
```

```
%para que os resultados dos tempos apareçam em exponencial
```

```
format shortEng
```

```
Mt
```

```
%%para colocar os tempos calculados em legenda no  
gráfico%%
```

```
aux6=length(Mt)
```

```
aux4=num2str(Mt, '%8.2e\n')
```

```
aux10=[];
```

```
for i = 1: aux6
```

```
    aux9=[aux4(i,:), ' s']
```

```
    aux10=[aux10;aux9];
```

```
end
```

```
aux10=flipud(aux10)
legend(aux10)
legend('Location','eastoutside')
legend('boxoff')
xlim([min(eixo_xx) max(eixo_xx)])
ylim([min(pemissor) max(pemissor)])
drawnow
[x,y]=meshgrid(eixo_xx,pemissor);
T=[400.*exp(-0.5.*z)].*exp(-(20-2.*z)*(x.^2+y.^2));
contour(x,y,T,20)

%para criação de imagem com boa resolução
iprt=input('Press 1 to save the plot, 0 otherwise:');
if iprt==1
    fig1='figura_em_color_ps';
    print(h,'-dpsc',fig1)
    fig2='figura_em_jpeg';
    print(h,'-djpeg',fig2)
    iprt=0
end
```