



Estudo de Balística Interna

Daniel Filipe Fernandes Marques

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Mecânica

Orientadores: Prof. Aires José Pinto dos Santos
Capitão-Tenente Sara de Jesus de Vidigal e Almada Lobo

Júri

Presidente: Prof. Viriato Sérgio de Almeida Semião
Orientador: Prof. Aires José Pinto dos Santos
Vogais: Prof. Edgar Caetano Fernandes
Coronel Eng. MAT João Paulo Barreiros Pereira da Silva

Outubro de 2014

Agradecimentos

Manifesto os mais sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para este trabalho, com especial referência:

Ao meu orientador científico, o Professor Doutor Aires José Pinto dos Santos, pela orientação dada em todo o trabalho, mostrando-se sempre disponível para auxiliar no que fosse preciso. Agradeço ainda pela sua paciência, sugestões e esclarecimento de dúvidas ao longo do trabalho.

À minha coorientadora científica, Capitão-tenente Sara de Jesus de Vidigal e Almada Lobo, pelo esclarecimento de dúvidas referentes à carga propulsora utilizada no trabalho e disponibilidade para que se realizassem as medições necessárias a esta.

Ao Diretor de Curso de Serviço de Material da Academia Militar, Coronel Eng. MAT João Paulo Barreiros Pereira da Silva, que sempre me manteve motivado durante a realização do trabalho, estando sempre disponível a ajudar, não só no presente trabalho mas também em todo o meu percurso na Academia Militar.

Ao Doutor Bruno Miguel Almeida Martins Pereira, pelo apoio no trabalho realizado quando necessário a utilização do *software* Mathematica, e por todo o tempo que disponibilizou a este trabalho.

Ao Sargento Ajudante Alves, o meu muito obrigado pela ajuda no trabalho de campo e pelos seus conselhos.

Ao Professor Doutor José Borges, tendo sugerido a utilização do *software* PRODAS para a validação dos resultados do modelo matemático.

À minha prima Professora Teresa Gonçalves, pela paciência que teve na revisão de todo este trabalho, tornando-o mais agradável de ler.

À Academia Militar, que para além de me permitir ter estudado um tema pouco abordado em Portugal, deu-me uma formação de excelência nestes últimos seis anos da minha vida, contribuindo em muito para ser quem sou hoje.

Aos meus camaradas e amigos da Academia Militar por todo o apoio e amizade ao longo destes últimos anos.

À minha família. Pai, mãe e irmão por todo o amor, fé, confiança. Por tudo o que fizeram por mim e por estarem sempre presentes em todos os momentos da minha vida.

Resumo

O conhecimento e a compreensão dos processos que ocorrem no interior do tubo de uma arma de fogo, desde a ignição da carga propulsora, até à saída do projétil, é importante no desenvolvimento do armamento, de uma forma económica e segura.

Com a modelação matemática destes processos, que é uma abordagem muito utilizada atualmente, é possível otimizar a carga explosiva e os materiais utilizados. Este estudo foi realizado no âmbito do projeto FIREND, resultante da colaboração entre a Academia Militar e o Instituto Superior Técnico

O modelo desenvolvido foi aplicado a um sistema, arma, carga propulsora e projétil, já existente, tendo os resultados obtidos sido validados com o *software* PRODAS e tabelas referentes ao presente sistema.

Para melhor compreender a importância das variáveis envolvidas, é feita uma análise de sensibilidade a diversos parâmetros balísticos, mantendo constante as dimensões da arma em estudo.

Na análise dos resultados verifica-se que a cinta de travamento é um elemento muito importante, alterando significativamente os valores da pressão e da velocidade. Verificou-se também que com cargas propulsoras de maior taxa de queima é possível obter valores mais elevados de pressão máxima e velocidade à saída.

Palavras chave: Balística interna; Projétil de Artilharia; Pressão; Velocidade; Modelação matemática; Análise de sensibilidade.

Abstract

The knowledge and comprehension of the processes that occur inside a firearm's tube, since the propeller charge ignition, until the projectile's exit, is important in developing armament, in an economic and safe way.

With these processes mathematic modelling, which is currently a very used approach, it is possible to optimize the explosive charge and the used materials. This study was performed in the scope of the project FIREND, as a result of the cooperation between the Academia Militar and the Instituto Superior Técnico.

The developed model was applied to a system, weapon, propeller charge and projectile, already existent, and the obtained results were validated with the software PRODAS and charts related to the present system.

To better understand the importance of the variables involved, it is made a sensibility analysis to several ballistic parameters, maintaining steady the dimensions of the studied weapon.

In the results analysis, it is verified that the rotating band is a very important element, significantly altering the pressure and velocity values. It was also verified that with propeller charges of higher deflagration speed it is possible to obtain higher values of maximum pressure and velocity at exiting.

Key words: Internal ballistic; Artillery Projectile; Pressure; Velocity; Mathematic modelling; Sensibility analysis.

Conteúdo

Agradecimentos	II
Resumo	IV
Abstract	VI
Lista de Tabelas	X
Lista de Figuras	XIII
Nomenclatura	XIV
Glossário	XVI
1 Enquadramento da Dissertação	1
1.1 Introdução	1
1.2 Contexto e motivação	2
1.3 Objetivos	3
1.4 Estrutura da Dissertação	3
2 Descrição do Sistema	5
2.1 Introdução	5
2.2 Obus M114 A1 155 mm/23	5
2.2.1 Descrição Geral	5
2.2.2 Medições Efetuadas	6
2.3 Carga Propulsora	8
2.3.1 Carga M3A1 <i>green bag</i>	12
2.4 Projétil	15
3 Modelo Matemático de Balística Interna	19
3.1 Introdução	19
3.2 Estado da Arte	19
3.2.1 Evolução Histórica	19
3.2.2 Métodos Numéricos	23

3.2.3	Equações de Estado	25
3.3	Equações do Modelo	26
3.3.1	Caso $\theta = 0$	32
3.3.2	Caso $\theta \neq 0$	34
3.4	Considerando a cinta de travamento	36
3.4.1	Caso $\theta = 0$	37
3.4.2	Caso $\theta \neq 0$	38
3.5	Outras alterações	38
3.5.1	Correção do parâmetro balístico central	38
3.5.2	Hipótese de modelo isentrópico desde o início da deflagração	38
3.5.3	Influência da combustão não instantânea	41
4	Resultados	45
4.1	Introdução	45
4.2	Definição da Carga Ideal	46
4.3	Análise da aproximação de gás perfeito	49
4.4	Análise da influência do parâmetro θ	51
4.5	Análise da influência do parâmetro β	52
4.6	Análise da influência do atrito	54
4.7	Outros parâmetros	55
4.8	Resultados com cinta de travamento e comparação com o <i>software</i> PRODAS	57
5	Conclusões e Trabalho futuro	59
	Referências	63
	Anexos	65
	Anexo I: Propriedades Carga M3A1 <i>green bag</i>	67
	Anexo II: Propriedades Carga M4A2 <i>white bag</i>	68
	Anexo III: Dimensões do Obus M126A1 155 mm	69
	Anexo IV: Dimensões do projétil M107 155 mm	70

Lista de Tabelas

2.1	Relação entre θ e a progressividade	10
2.2	Massa das carga M3A1	14
2.3	Determinação da massa volúmica	15
4.1	Pressão máxima e velocidade à saída: modelo e valores de referência para diversas cargas de pólvora	47
4.2	Evolução dos erros de $u_{s_{saída}}$ e p_{sm} para carga 2 em função do desvio em massa	49
4.3	Resultados Carga 2, com desvio em massa de 24.21%	49
4.4	Valores de β	53
4.5	Erro em função do desvio em massa	57
4.6	Resultados: melhor solução	57

Lista de Figuras

2.1	Obus M114 A1 155 mm/23 - posição de tiro	6
2.2	Representação do interior do tubo do obus	6
2.3	Obus M114 A1 155 mm	7
2.4	Obus M114 A1 155 mm - vista do interior do tubo	7
2.5	Instrumentos de medida utilizados. 2.5a) Relógio Comparador. 2.5b) Micrómetro. 2.5c) Fita Métrica.	8
2.6	Grãos de Pólvora pertencentes à carga M3A1	8
2.7	Alguns tipos de Geometria de Grãos de Pólvora [12]	9
2.8	Progressividade - Gráfico Pressão <i>versus</i> deslocamento [12]	10
2.9	Combustão de um grão de pólvora tubular [1]	11
2.10	Carga M3A1	12
2.11	Grão de Pólvora com geometria Tubular $\theta = 0$	13
2.12	Balança analítica <i>Sartius</i> 2253	13
2.13	Carga Ignidora (CBI)	14
2.14	<i>Flash reducer pad</i> pertencentes à Carga M3A1	14
2.15	Medição da massa volúmica segundo a norma EN 13938-7 de 2004	15
2.16	2.16a) Projétil M107 155 mm. 2.16b)Esquema em corte.	16
2.17	Cinta de travamento vista em perspectiva [6]	16
3.1	<i>Ballista</i> [3]	20
3.2	Pêndulo Balístico [20]	21
3.3	Medição de pressão utilizando:. 3.3a) <i>Cooper Crusher Gauge</i> [38]. 3.3b) Piezoelétrico [38]. 3.3c) B251 IPG. [27]	23
3.4	RS 337-2000 Advanced Field Artillery Muzzle Velocity Radar System	23
3.5	Esquema simplificado do interior do tubo do obus	26
3.6	Esquema das forças aplicadas no projétil	28
3.7	Posição de Observação	39
4.1	Resultados do modelo para várias cargas, não considerando correções do parâmetro balístico central (M), ou variações de massa para simular atrito, cinta de travamento e resistência do ar	46
4.2	Erro da velocidade à saída em função do desvio em massa	48

4.3 Erro da pressão máxima na base do projétil em função do desvio em massa	48
4.4 Pressão na base do projétil (p_s) considerando gás perfeito e gás real	50
4.5 Velocidade (u_s) considerando gás perfeito e gás real	50
4.6 Desvio relativo à situação de gás perfeito em módulo	51
4.7 Pressão na base do projétil com grão de geometria progressiva	51
4.8 Velocidade do projétil com grão de geometria progressiva	52
4.9 Desvio relativo em módulo de grão de geometria progressiva em relação ao grão de geometria neutra, com carga 2	52
4.10 Alteração de β . 4.10a) Pressão na culatra para vários coeficientes β . 4.10b) Velocidade para vários coeficientes β	53
4.11 Desvio relativo em módulo ao caso de β_0 , aos diversos parâmetros em estudo	54
4.12 Desvio relativo em módulo devido ao atrito	55
4.13 Desvio relativo em módulo devido à correção no parâmetro balístico central	55
4.14 Erro de $u_{s\text{saída}}$ e p_{sm} para carga 2 em função do desvio em massa, considerando M_1 e atrito .	56
4.15 Erro de $u_{s\text{saída}}$ e p_{sm} para carga 2 em função do desvio em massa (24.2 a 24.6%), considerando M_1 e atrito	56
4.16 Comparação simultânea de modelos - Velocidade do projétil.	58
4.17 Comparação simultânea de modelos - Pressão na base do projétil.	58

Nomenclatura

A	- Área transversal do interior do tubo estriado
b	- Covolume
c	- Massa de carga propulsora
c_p	- Calor específico dos gases sob pressão constante
c_v	- Calor específico dos gases sob volume constante
d	- Diâmetro do tubo estriado
$d(t)$	- D num determinado instante t
D	- Espessura balística ou Dimensão característica de um grão de pólvora
F_{p_r}	- <i>The projectile resistive force</i>
f	- Fração da espessura balística restante (<i>Web fraction</i>)
g	- Aceleração da gravidade
h	- Entalpia específica
K_1	- Coeficiente de atrito efetivo
l	- Comprimento inicial da câmara de combustão
L	- Comprimento do tubo após l
n	- Número de moles
m	- Massa do projétil
m_1	- Massa Efetiva 1
m_2	- Massa Efetiva 2
m_g	- Massa de gás
p	- Pressão dos gases
\bar{p}	- Pressão média dos gases
p_s	- Pressão dos gases na base do projétil
p_B	- Pressão dos gases na culatra
p_r	- <i>Resistive pressure</i>
Q	- Troca de energia sob a forma de calor
R	- Constante específica do gás
R_L	- <i>Lagrange Ratio</i>
R_0	- Constante universal dos gases perfeitos
t	- Tempo decorrido

T_0	-	Temperatura de chama adiabática
U	-	Energia interna
u	-	Energia específica
u_g	-	Velocidade do gás
u_s	-	Velocidade do projétil
V	-	Volume de gás
V_i	-	Volume livre atrás do projétil
W	-	Troca de energia sob a forma de trabalho
x	-	Posição entre a culatra e a base do projétil
x_s	-	Posição da base do projétil

Símbolos Gregos

α	-	Ângulo das estrias
β	-	Taxa de Queima
γ	-	Razão dos calores específicos
ε_b	-	Eficiência balística
ε_p	-	Eficiência piezométrica
θ	-	Caraterística de forma do grão
λ	-	Energia específica da pólvora
μ	-	Coeficiente de atrito
ρ	-	Massa volúmica
v	-	Volume específico
ϕ	-	Fração de massa de pólvora queimada
τ	-	Tensor das tensões

Glossário

Projétil: Objeto que pode ser arremessado ou lançado por uma arma, destinado a provocar danos no objetivo.

Arma de fogo: Armas que disparam projéteis, utilizando para tal a força expansiva dos gases resultantes da combustão de produtos químicos, sólidos, líquidos ou gasosos.

Obus: É um tipo de boca-de-fogo de artilharia caracterizado principalmente por disparar projéteis em trajetórias curvas.

Carga Propulsora: Produto químico, sólido, líquido ou gasoso, destinado a produzir o movimento do projétil.

Espoleta: Componente que vai acionar a detonação do projétil no ponto desejado da trajetória.

Capítulo 1

Enquadramento da Dissertação

1.1 Introdução

O presente trabalho enquadra-se num projeto mais amplo denominado FIREND, no qual se pretende desenvolver um projétil de elevado calibre a ser propulsado por um obus de Artilharia para o auxílio no combate aos fogos florestais. Os principais dados que se pretendem fornecer para o projeto FIREND são as pressões e temperaturas que ocorrem durante todo o processo de balística interna. Assim para uma melhor compreensão de todo o processo que sucede no interior do tubo de um obus, desde que a carga propulsora é inflamada até à saída do projétil, é efetuada uma análise de sensibilidade a diversos parâmetros balísticos e feita a análise de como estes parâmetros afetam o disparo.

Para a recolha de resultados é desenvolvido um modelo matemático que tem por base o modelo de Carlucci exposto no livro *BALLISTICS Theory and Design of Guns and Ammunition* [1], considerado o livro de referência no presente trabalho, efetuando-se algumas alterações com o objetivo de se aproximar um pouco mais da realidade do processo. Na análise de resultados, por impossibilidade da realização de medições às pressões e velocidades em tiro real, são considerados valores de referência.

A área de estudo em que se encontra inserido o presente trabalho pode ser considerada como um ramo da mecânica e da química designado por Balística, que se ocupa do estudo dos fenómenos relacionados com a partida, o voo e a chegada dos projéteis, e também dos efeitos provocados pelo impacto do projétil no objetivo. Apoiando-se em leis físicas e em ensaios experimentais, tem-se vindo a desenvolver ao longo dos tempos métodos de estudo, tanto a nível teórico e de modelação computacional como a nível experimental.

Para que se possa estudar a balística mais em pormenor, esta é tipicamente dividida em três áreas distintas, referentes a momentos diferentes do tiro. A balística interna, onde se insere o presente trabalho, aborda as propriedades das pólvoras e todos os processos que ocorrem desde a ignição da carga propulsora até à saída do projétil à boca do cano da arma, baseando-se para tal em várias áreas da mecânica, como por exemplo, a termodinâmica e a mecânica de fluidos. A balística externa é responsável pelo estudo dos processos que ocorrem após a saída do projétil da arma e durante o seu percurso na atmosfera (movimentos de translação e de rotação) até que o projétil atinja o alvo. Por último, a balística terminal (ou dos efeitos)

estuda os efeitos causados pelo impacto do projétil no alvo.

Existe ainda quem considere a balística intermédia ou de transição, referente ao período de tempo que ocorre desde a saída do projétil do obus até que este deixe de ser atuado pelos gases resultantes da combustão da carga propulsora [2, 3].

1.2 Contexto e motivação

A instituição Exército está prioritariamente vocacionada para a defesa militar da República Portuguesa, tendo por isso como principal objetivo a geração, preparação e sustentação de forças da componente operacional [4]. Porém, a importância desta instituição para a República não se esgota nas situações eminentes de conflito bélico. Pelo contrário, cada vez mais se afirma como uma mais-valia do País durante os períodos de paz, como é o caso da colaboração com a "proteção civil e em tarefas relacionadas com a satisfação das necessidades básicas e a melhoria da qualidade de vida das populações" [4]. Um exemplo disso, foram os temporais na ilha da Madeira em Fevereiro de 2010, em que, o exército deu apoio à proteção civil. O exército está também incumbido de outras missões, as quais devido à conjuntura atual (terrorismo transnacional, proliferação de armas de destruição maciça entre outros) são cada vez mais de ordem diversa.

Utilizando o conhecimento bélico e compreendendo a diversidade das suas missões, pode-se pensar na aplicação deste saber no auxílio das populações, como é o caso dos incêndios que devastam milhares de hectares por ano da nossa floresta. Atualmente de modo a combater este flagelo, o exército quando necessário disponibiliza meios humanos e técnicos de apoio aos bombeiros. Porque não auxiliar no combate aos incêndios com meios e conhecimentos que apenas o exército possui? Pode não ser um meio que só por si seja suficiente para apagar um incêndio, mas pode ser um meio que auxilie as forças presentes no terreno, permitindo alcançar locais inacessíveis ao homem e mesmo de difícil acesso por meios aéreos, para além de poder atuar sob quaisquer condições meteorológicas e de visibilidade. Este apoio possibilita um combate seguro ao incêndio, atuando neste à distância, o que pode ser prioritário em situações críticas, como é o caso de fogos junto de depósitos de hidrocarbonetos.

Neste sentido e de acordo com o referido anteriormente, desde 2005 que está a ser desenvolvido o projeto denominado FIREND resultante da cooperação entre a Academia Militar e o Instituto Superior Técnico, com o objetivo de desenvolver um projétil de artilharia para combate a incêndios, tendo sido já testado uma versão de 105 mm com detonação mecânica em Vendas Novas [5]. O projétil serve neste caso como um meio de transporte de um agente extintor, escolhido em função do fogo em causa.

Com o objetivo de melhorar a eficácia, pretende-se que o projeto final seja de calibre 155 mm com um sistema de detonação controlado através de um mecanismo de altimetria. Este sistema foi projetado em 2013, mas ainda não foi sujeito a ensaios balísticos [6].

De modo a concretizar este projeto, o seu custo tem de ser sustentável e o impacto ambiental tem de ser minimizado, pelo que, é fundamental a escolha dos materiais e dos processos de fabrico. Os materiais escolhidos devem suportar as elevadas pressões e temperaturas determinadas no estudo de balística

interna.

1.3 Objetivos

Pretende-se desenvolver um projétil, leve e com o menor impacto ambiental possível, que transporte substâncias químicas para o combate a incêndios, garantindo velocidades à saída desejáveis e condições de estabilidade durante o voo, bem como a adaptação às tabelas de tiro existentes. De modo a alcançar estes objetivos, é necessário quantificar as condições adversas a que a munição está sujeita durante todo o processo do disparo. Só assim será possível selecionar novos materiais capazes de aguentar elevadas pressões e temperaturas. Para determinar estes valores foi desenvolvido um modelo matemático baseado no modelo de Carlucci no livro *BALLISTICS* [1], fazendo algumas alterações consideradas pertinentes.

1.4 Estrutura da Dissertação

A dissertação é constituída por cinco capítulos principais.

O 1º capítulo expõe o contexto em que se insere o trabalho, bem como das suas motivações. Neste capítulo explicam-se os objetivos do projeto.

O 2º capítulo descreve os diversos constituintes do sistema em estudo, de modo a facilitar a compreensão do modelo matemático desenvolvido e explicar a origem dos dados necessários à sua utilização.

No 3º capítulo apresenta-se o estado-da-arte e a evolução histórica dos estudos de balística, com especial atenção à balística interna. Neste capítulo descreve-se também o modelo matemático, e as suas equações.

O 4º capítulo apresenta os resultados obtidos e uma análise de sensibilidade a diversos parâmetros balísticos. É também feita a validação do modelo por comparação com valores de referência.

Finalmente, no 5º capítulo são feitas considerações finais e sugerem-se trabalhos futuros.

Capítulo 2

Descrição do Sistema

2.1 Introdução

Como em qualquer modelo matemático, o principal objetivo é descrever ou quantificar um determinado processo. Nesse sentido, e para que esta descrição seja adequada à realidade, é necessário conhecer as variáveis envolvidas. No presente capítulo, faz-se uma descrição dos elementos constituintes do sistema em estudo, com o objetivo de facilitar a compreensão do modelo matemático desenvolvido no capítulo 3.

Esta descrição permite compreender algumas das aproximações efetuadas, permitindo também identificar as componentes do sistema que têm maior influência no estudo efetuado.

Tratando-se de um estudo de balística interna, o sistema é constituído pela arma de fogo, que no presente trabalho é um obus de Artilharia; pela carga propulsora, responsável pela criação da pressão no interior do tubo do obus que obriga ao deslocamento do projétil; e pelo próprio projétil que é disparado do obus com objetivo de atingir um alvo a uma determinada distância.

2.2 Obus M114 A1 155 mm/23

2.2.1 Descrição Geral

O obus utilizado no presente estudo de balística interna é o Obus M114 A1 155 mm/23 de origem Americana, usado atualmente na Artilharia do Exército Português (figura 2.1). Para uma descrição detalhada do obus, o leitor poderá consultar as referências [7] e [8].

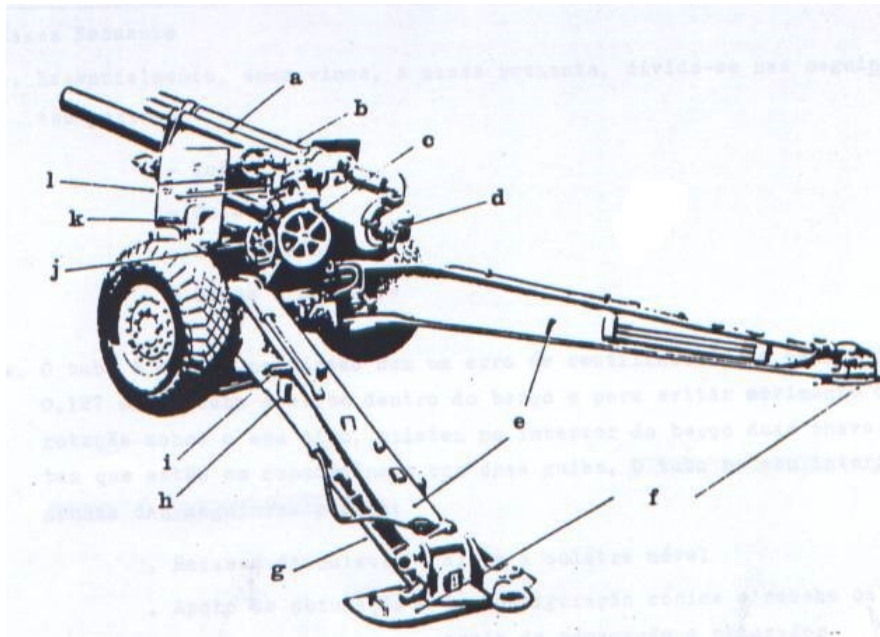


Figura 2.1: Obus M114 A1 155 mm/23 - posição de tiro

a. Cilindro de entrada em bateria; b. Cilindro de recuperador; c. Manivela de elevação d. Mecanismo da culatra; e. Flechas; f. Ferrões; g. Asa da flecha; h. Suporte da chaveta dos ferrões; i. Chaveta dos ferrões; j. Manivela da direção; k. Cofre da luneta panorâmica; l. Escudo esquerdo. [7]

No presente trabalho é importante conhecer em pormenor o interior do tubo do obus, pois é dentro deste que todos os processos em estudo ocorrem. São tidos em consideração a geometria e dimensões do seu interior. A geometria é apresentada na figura 2.2, encontrando-se as dimensões do obus no Anexo III.



Figura 2.2: Representação do interior do tubo do obus

O tubo do obus é feito em liga de aço [7]. Em (A) apresenta-se de forma simples a **Culatra**, a qual garante a obturação na retaguarda do tubo. Segue-se a **Câmara de Combustão** (B) onde é colocada a carga propulsora a deflagrar. A dimensão desta é importante, uma vez que, delimita a quantidade de pólvora a ser introduzida, sendo a região do interior do tubo onde se cria a pressão que provoca o deslocamento do projétil. O **Cone de Concordância** (C) tem como principal função a centragem do projétil. No **Cone de Forçamento** (D) a cinta de travamento (ver parágrafo 2.4) entra nas estrias do tubo, garantindo a obturação do projétil. A **Alma do Tubo** (E) corresponde à parte estriada. Por fim, a **Tulipa** ou **Joia** (F), é a parte interior final do tubo, com um diâmetro ligeiramente maior para reduzir o esforço do projétil no tubo à saída [7, 8].

2.2.2 Medições Efetuadas

Num processo de combustão em volume fechado é importante o conhecimento da geometria e dimensões da câmara de combustão. Nas instalações da Academia Militar, Aquartelamento da Amadora, encontra-se

um exemplar de um obus M114 A1 155mm que, embora em estado inoperacional devido a uma avaria na ligação elástica, se encontra em boas condições no interior do tubo, permitindo efetuar as medições necessárias (figuras 2.3 e 2.4).



Figura 2.3: Obus M114 A1 155 mm

As medições tiveram em consideração os conhecimentos adquiridos na Unidade Curricular de Metrologia e Qualidade. Os valores medidos serviram de aproximação dos valores exatos fornecidos pelo PRODAS, uma vez que, este obus não consta desta base de dados. Considerou-se, deste modo, o obus M126 A1 155mm, o qual apresenta valores próximos dos medidos (ver Anexo IV)



Figura 2.4: Obus M114 A1 155 mm - vista do interior do tubo

Para medir os diâmetros no interior do tubo, foi utilizado um relógio comparador digital e um micrómetro. Na medição das estrias utilizou-se um paquímetro e uma fita métrica, com precisão ao centímetro, para medir os comprimentos (figura 2.5).



(a)



(b)



(c)

Figura 2.5: Instrumentos de medida utilizados. 2.5a) Relógio Comparador. 2.5b) Micrómetro. 2.5c) Fita Métrica.

2.3 Carga Propulsora

Numa análise de balística interna é fundamental um bom conhecimento dos agentes propulsores utilizados. A escolha da carga propulsora é fundamental na evolução da curva da pressão com o deslocamento do projétil e na velocidade atingida pelo projétil à saída da arma.

As cargas tipicamente utilizadas no Obus M114 A1 155 mm são de dois tipos, a M3A1 *green bag*, e a M4A2 *with bag* [9]. Trata-se de agentes propulsores sólidos nomeadamente pólvora, pelo que, o estudo apresentado será restrito a este tipo de agentes propulsores. Na análise de resultados escolheu-se a carga M3A1 (figura 2.6).



Figura 2.6: Grãos de Pólvora pertencentes à carga M3A1

O processo de combustão dos agentes propulsores sólidos consiste na transformação da pólvora sólida em gás, libertando uma elevada quantidade de calor, que conseqüentemente provoca um elevado aumento de pressão, ou seja, a deflagração da pólvora "tem a propriedade de transformar com rapidez conveniente, a sua energia química em energia mecânica" [10].

Com esta definição anunciam-se de seguida dois conceitos importantes: a **taxa de queima** β , que indica a taxa de transformação da carga propulsora sólida em gás, apresentando valores variáveis ao longo da deflagração da pólvora, consoante a pressão e a progressividade do grão de pólvora (o conceito de progressividade é apresentado seguidamente); a **energia específica** ou **força da pólvora** (*specific force or propellant force*), λ , a qual, representa a energia por unidade de massa que pode ser obtida na queima de uma determinada carga propulsora. O valor desta constante pode ser obtido multiplicando a constante do gás resultante da combustão da pólvora pela sua temperatura de chama adiabática (T_0).

$$\lambda = RT_0 \quad (2.1)$$

Como em outros combustíveis sólidos, a transformação da pólvora sólida em gás é um fenómeno que ocorre à superfície do grão de pólvora. A geometria do grão de pólvora tem, deste modo, uma importância fundamental no processo em estudo, pois consoante a área de superfície, assim será maior ou menor a taxa de queima da pólvora sólida [1, 11].

Define-se o conceito de **progressividade** da pólvora, baseado na forma do grão de pólvora, como sendo o modo "como varia a velocidade de emissão de gases, isto é, a velocidade com que a massa de pólvora se transforma em gases" [10].

Tendo em conta a alteração da geometria do grão de pólvora, definem-se três tipos de grão quanto à progressividade, são eles, neutro, regressivo e progressivo [1, 12]. Na figura 2.7, apresentam-se algumas geometrias típicas e a respetiva progressividade do grão.

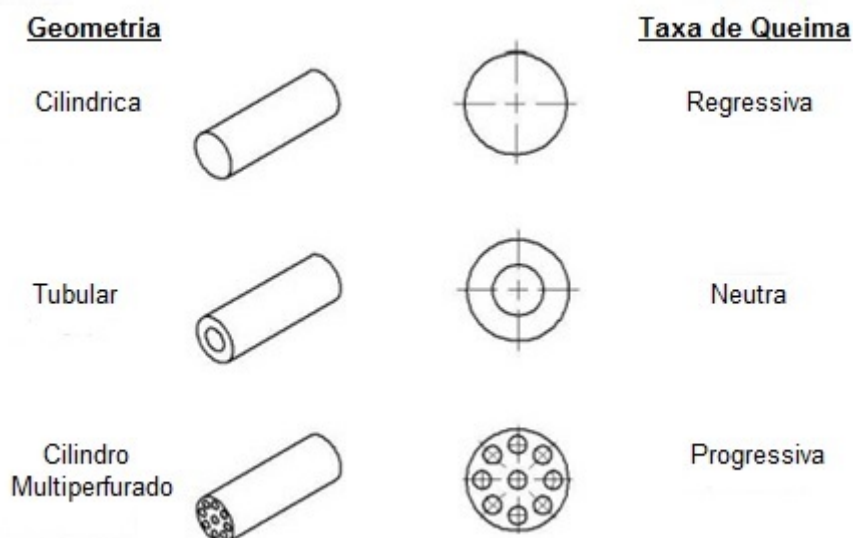


Figura 2.7: Alguns tipos de Geometria de Grãos de Pólvora [12]

Neutro: a área de superfície do grão de pólvora mantém-se aproximadamente constante ao longo da combustão, mantendo-se deste modo o valor de β .

Progressivo: como o nome indica, a área de superfície do grão de pólvora aumenta ao longo da combustão, aumentando assim também o valor de β

Regressivo: é o contrario do grão de pólvora progressivo [12, 10].

A progressividade do grão, afeta o tipo de curva pressão *versus* deslocamento obtida no tiro, sendo que o regressivo é o formato de grão que apresenta um aumento de pressão mais rápido atingindo maiores valores de pressão máxima e também decréscimos de pressão mais acentuados. Isto explica-se devido à elevada área de superfície no início da combustão, o que provoca uma grande formação de gás num volume ainda reduzido. O grão progressivo, tem um comportamento oposto e para uma progressividade neutra, a curva de pressão *versus* deslocamento situa-se entre os dois casos anteriores, como mostra a figura 2.8 [12].

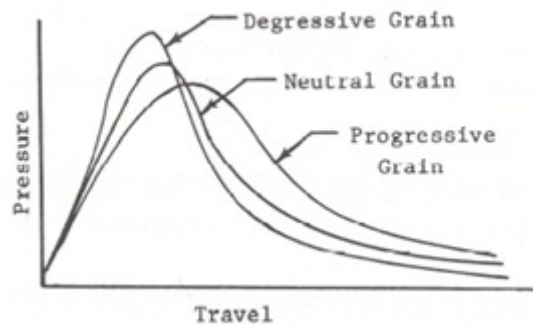


Figura 2.8: Progressividade - Gráfico Pressão *versus* deslocamento [12]

Um indicador da progressividade do grão é a **caraterística de forma** do grão (*form factor*), θ , como sugere a seguinte tabela, sendo $-1 < \theta < 1$ [10]:

Tabela 2.1: Relação entre θ e a progressividade

Característica de forma	Progressividade
$\theta < 0$	Progressiva
$\theta = 0$	Neutra
$\theta > 0$	Regressiva

Uma particularidade dos grãos de pólvora que importa referir quanto à sua geometria é a sua **espessura balística** (*web thickness*), representada por D , a qual consiste na menor espessura do grão inicial de pólvora [1, 10].

Designando por $d(t)$ a espessura balística por arder no instante t , define-se um fator adimensional designado por **fração de espessura balística restante** (*web fraction*) f (figura 2.9) [1, 10]:

$$d(t) = fD \tag{2.2}$$

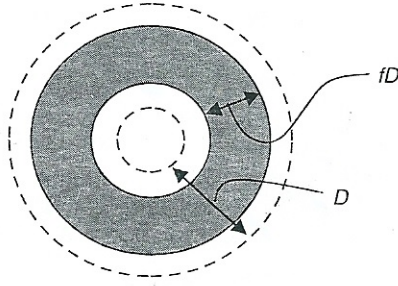


Figura 2.9: Combustão de um grão de pólvora tubular [1]

No instante inicial, antes de se iniciar a deflagração da pólvora $f = 1$ e no final da deflagração $f = 0$.

Em muitos casos existe maior interesse em saber qual a quantidade de pólvora queimada em vez de saber qual a espessura balística restante. Nesse caso utilizam-se *funções de forma* (*fraction of propellant burnt*) ϕ , com $0 < \phi < 1$, sendo 0 quando ainda não ocorreu deflagração e 1 quando toda a massa de pólvora está transformada em gás. Na função de forma, a definição de θ é bastante útil, permitindo simplificar a sua equação para a grande maioria das geometrias [1, 12]. Seja $m_g(t)$ a massa de gás formada no instante t e c a massa inicial de pólvora por queimar, a função de forma define-se como uma razão de massas.

$$\phi \equiv \frac{m_g(t)}{c} \quad (2.3)$$

Relaciona-se com f e θ através da seguinte equação [1]:

$$\phi = (1 - f)(1 + \theta f) \quad (2.4)$$

De acordo também com [1] a relação da taxa de queima β e f é feita é:

$$D \frac{df}{dt} = -\beta \bar{p} \quad (2.5)$$

Fazendo agora uma análise termodinâmica aos gases resultantes da combustão da pólvora, e usando as definições de calor específico a pressão constante (c_p) e calor específico a volume constante (c_v), tem-se [13]:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (2.6)$$

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (2.7)$$

A razão entre os calores específicos é designada por γ :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.8)$$

Considerando um modelo de gás ideal a constante do gás aplicada na equação dos gases perfeitos satisfaz a seguinte relação entre os calores específicos.

$$c_p - c_v = R \quad (2.9)$$

Com estas duas ultimas equações obtém-se, para gases ideais [13],

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (2.10)$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (2.11)$$

Caso a expansão do gás ideal seja considerada isentrópica, conclui-se que a evolução politrópica, com índice politrópico igual a γ

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad (2.12)$$

O que implica,

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.13)$$

As propriedades termodinâmicas e geométricas acima referidas utilizadas na obtenção dos resultados foram obtidas do *software* PRODAS, (ver Anexo I e II). Houve também a necessidade de efetuar medidas de massa e volume da carga M3A1 *green bag*, por ser a carga considerada na análise de resultados. Este trabalho foi realizado no Laboratório de Explosivos da Marinha como se explica em seguida.

2.3.1 Carga M3A1 *green bag*

A carga M3A1 *green bag* encontra-se dividida em cinco cargas, mais precisamente, a carga base (carga 1), e quatro incrementos que se colocam sequencialmente da 2 à 5 consoante a distância que se pretende alcançar com o projétil (figura 2.10).



Figura 2.10: Carga M3A1

No interior dos sacos de pólvora numerados de 1 a 5, encontram-se grãos de pólvora de geometria tubular (*single-perforated* $\theta = 0$) como ilustrado na figura 2.11, cujas propriedades e dimensões, provenientes do PRODAS se encontram em anexo (Anexo I e II).



Figura 2.11: Grão de Pólvora com geometria Tubular $\theta = 0$

No total a massa de pólvora contida nas 5 cargas é de aproximadamente 2.5 kg. As massas de cada carga foram medidas utilizando a balança analítica *Sartius 2253* do Laboratório de Explosivos da Marinha (os valores medidos não incluem os sacos (*green bag*) onde a pólvora vem inserida). A balança foi calibrada tendo em atenção os sacos de plástico onde foram colocadas as cargas para que fosse possível efetuar as medições (figura 2.12).



Figura 2.12: Balança analítica *Sartius 2253*

Obtiveram-se os seguintes valores de massa para as cargas:

Tabela 2.2: Massa das carga M3A1

Carga	Massa de Pólvora (kg)
1	0.7857
2	0.2849
3	0.3973
4	0.4380
5	0.5900
Total	2.4959

A carga M3A1 contém ainda uma carga ignidora (*clean-burning igniter*, CBI), de geometria lamelar, aproximadamente com a forma de um losango como, representado na figura 2.13. Foi pesada obtendo-se um valor de 99.4 g.



Figura 2.13: Carga Ignidora (CBI)

No topo da carga base, e nos incrementos 4 e 5 é ainda colocado um *flash reducer pad* (figura 2.14) constituído por nitrato de potássio com o objetivo de reduzir o clarão provocado pela deflagração da pólvora [9, 14]. A que se encontra no topo da carga base é a de maior dimensão contendo cerca de 55.8 g e as que se encontram no topo dos incrementos 4 e 5 apresentam a mesma quantidade de nitrato de potássio com cerca de 27.5 g cada.



Figura 2.14: *Flash reducer pad* pertencentes à Carga M3A1

Com o objetivo de se determinar o volume ocupado pela carga propulsora no interior da câmara de

combustão, utilizou-se a norma EN 13938-7 de 2004. Num cilindro calibrado de 250 ml foram colocados grãos de pólvora, lendo-se o peso correspondente. Realizaram-se 3 ensaios e fez-se uma média. Com os valores da massa e do volume calculou-se a massa volúmica (ou densidade de carregamento) (figura 2.15).

Tabela 2.3: Determinação da massa volúmica

Medição 1	190.70 g
Medição 2	190.80 g
Medição 3	190.75 g
Média	190.75 g
Medida volumétrica	250.00 cm ³
Massa volúmica	0.763 g/cm ³
	763 kg/m ³



Figura 2.15: Medição da massa volúmica segundo a norma EN 13938-7 de 2004

2.4 Projétil

Com o objetivo de comparar resultados que permitam validar o modelo desenvolvido, é utilizado no presente estudo de balística interna o projétil de Artilharia M107 155 mm em uso no Exército Português (figura 2.16), em vez do que está em desenvolvimento no projeto FIREND. A utilização deste projétil permite a comparação dos resultados com valores de referência.

O projétil em causa contém no seu interior um explosivo, podendo ser TNT ou compósito B, atuando através da fragmentação e do efeito de sopro resultante da sua explosão [2].

O corpo do projétil é feito em aço forjado e no seu topo é colocada a **espoleta**, a qual provoca a detonação do projétil, podendo ser de diversos tipos como por exemplo, espoleta de contacto, em que a detonação ocorre quando o projétil colide contra uma superfície, ou espoleta de tempos em que a detonação ocorre num período de tempo determinado após a realização do tiro. A espoleta é apenas colocada antes de introduzir o projétil no tubo do obus. Junto à base do projétil é colocada a cinta de travamento, a qual está

protegida por um anel de proteção, que é removido antes de se realizar o tiro [2, 15, 16].

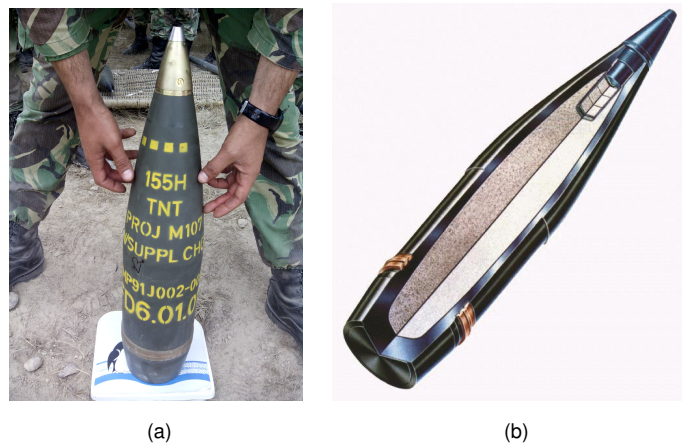


Figura 2.16: 2.16a) Projétil M107 155 mm. 2.16b)Esquema em corte.

Cinta de Travamento do Projétil

A **cinta de travamento** (*rotating band*), representada na figura 2.17, é o elemento responsável pelo movimento rotacional do projétil durante o seu deslocamento no interior do tubo da arma, o qual é fundamental para a estabilidade durante o voo. A cinta garante a obturação durante o disparo, evitando o escape dos gases propulsores. Em função da sua espessura e material condiciona ainda a pressão inicial na câmara de combustão no interior do tubo [17].



Figura 2.17: Cinta de travamento vista em perspectiva [6]

Verifica-se então, pelo acima descrito, que a cinta de travamento, apesar das suas reduzidas dimensões, tem funções muito importantes no modo como decorre o tiro, condicionando a rotação do projétil e a sua estabilidade durante o voo, bem como, a obturação da câmara de combustão, evitando o escape dos gases propulsores. O que conduz a um tiro menos disperso e a um menor desgaste do tubo [17, 18].

As elevadas pressões/temperaturas no interior da arma, bem como o atrito entre a cinta de travamento e o tubo estriado, fazem com que a cinta de travamento fique parcialmente derretida no deslocamento inicial do projétil [18]. Esta alteração do estado físico implica também que o coeficiente de atrito se altere ao longo do movimento de translação e rotação do projétil no interior do tubo [17].

Neste sentido e devido ao emprego de armas de elevado calibre, têm vindo a ser realizados estudos que

procuram a alteração dos materiais da cinta de travamento (tipicamente feitas de cobre ou latão), passando-se a utilizar outros materiais com melhores propriedades físicas e químicas, como o níquel, titânio e fibra de carbono [19].

Participação no Exercício Eficácia 2014

De modo a ter algum conhecimento sobre o funcionamento do sistema atuando como um todo e também com o objetivo de perceber todo o processo que engloba o tiro efetuado, tanto a nível técnico como tático, no dia 29 de Maio de 2014, teve-se o privilégio de assistir ao disparo de uma bateria de artilharia de obuses M114 A1 155 mm, constituída por seis obuses, pertencentes ao Regimento de Artilharia N°5 de Vendas Novas no Campo Militar de Santa Margarida, enquadrado no exercício Eficácia 2014. Viu-se cerca de 18 tiros todos efetuados com cargas 5 de M3A1 *green bag*, sendo disparado o projétil M107 155 mm.

A presença neste exercício do Exército permitiu ganhar uma maior sensibilidade para a continuação do trabalho, possibilitando novas perspetivas de abordagem, descartando outras. Pois, só tendo a oportunidade de ver o tiro deste obus ao vivo é que se consegue perceber a força do disparo.

Capítulo 3

Modelo Matemático de Balística Interna

3.1 Introdução

No presente capítulo é apresentado o desenvolvimento do modelo matemático de balística interna, pretendendo-se simular o tiro efetuado por um obus de artilharia durante o deslocamento do projétil no interior do tubo. Como principal base de desenvolvimento do modelo matemático considera-se como referência o livro *BALLISTICS, Theory and Design of Guns and Ammunition* [1], mencionado anteriormente.

Com este modelo pretende-se melhorar os resultados obtidos em [1], aproximando-os dos valores de referência do *software* PRODAS e tábuas de tiro. As principais contribuições inovadoras deste trabalho em relação ao livro anteriormente citado, dizem respeito à generalização dos resultados utilizando a equação de Noble-Abel em vez da equação de estado dos gases perfeitos e à inclusão do efeito da cinta de travamento.

Apresenta-se seguidamente um Estado da Arte para se compreender melhor a evolução do estudo da balística interna ao longo dos anos.

3.2 Estado da Arte

3.2.1 Evolução Histórica

Pode-se assumir que a balística teve início com o lançamento da primeira pedra por um homem pré-histórico, e a conseqüente necessidade de alcançar objetos cada vez mais distantes, o que levou ao aparecimento da funda e da lança. Seguiu-se o arco e, posteriormente a *ballista* (figura 3.1), cujo nome provém da palavra grega *ballein*, a qual significa lançar (atirar, arremessar), tendo capacidade de lançar grandes flechas. É do nome desta arma que surge a palavra balística [3].

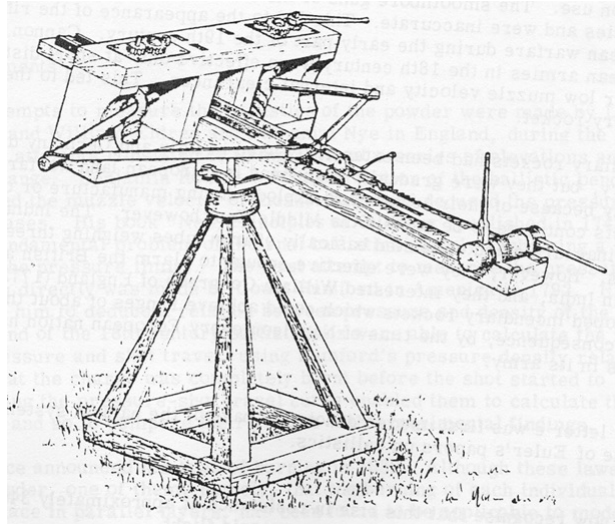


Figura 3.1: *Ballista* [3]

O estudo da balística interna começou com o início da utilização da pólvora, não sendo precisa a sua data. Julga-se que começou na batalha de *Crécy* entre Inglaterra e França em 1346 [3].

Com o contínuo desenvolvimento do armamento, foi **Leonardo da Vinci** (1452-1519) que deu início à engenharia do armamento, projetando diversas armas e munições, apresentando também os primeiros fundamentos teóricos para o estudo da aerodinâmica, de fundamental importância no estudo da balística externa [3].

Em 1578, **William Bourne** (1535-1582) inventou o primeiro dispositivo mecânico capaz de testar as pólvoras, queimando uma determinada quantidade de pólvora num pequeno cilindro metálico. Medindo o ângulo de deformação da tampa feita também em metal, calculou de um modo grosseiro, a força de detonação da pólvora [3, 20]. Só quase um século mais tarde, **Robert Hooke** (1635-1703) em 1663, apresentou um dispositivo com a capacidade de medir esta força de forma exata. O dispositivo consistia numa barra móvel, na qual se colocavam diversos pesos, determinando deste modo a força de detonação da pólvora [21].

No início do século XVIII, devido ao desenvolvimento da engenharia do armamento, inventaram-se diversos sistemas de artilharia, contudo, não havia ainda físicos, matemáticos nem engenheiros militares que compreendessem o exato funcionamento destas armas nem as variáveis em jogo (como exemplo a velocidade à saída era completamente desconhecida) [22]. Nestes tempos, o desenvolvimento do armamento era feito empiricamente, à falta de um modelo matemático que quantificasse o processo [12].

O primeiro equipamento capaz de recolher dados resultantes de um tiro efetuado por uma arma de fogo foi apresentado, em 1742, por **Benjamin Robins** (1707-1752), matemático inglês e engenheiro militar, no seu livro "*New Principles of Gunnery*". Neste livro Robins apresenta o primeiro dispositivo capaz de medir a velocidade de projéteis de mosquetes, designado por pêndulo balístico, apresentado na figura 3.2 [22].



Figura 3.2: Pêndulo Balístico [20]

Este aparelho de medida consiste num bloco de madeira colocado em frente da arma, sob o qual o projétil embate transferindo-lhe a sua quantidade de movimento. Medindo a amplitude máxima atingida pelo pêndulo e conhecendo a sua massa e dimensões, é possível determinar a velocidade do projétil com uma precisão razoável [22].

Depois de Benjamin Robins, começaram a surgir outros investigadores que estudaram os fenómenos da balística, criando-se, desta forma, as bases científicas atuais desta ciência.

Benjamin Thompson (1753-1814), em 1792, fez a primeira tentativa de medir diretamente a pressão de propulsão dos gases resultantes da queima da pólvora, conseguindo com estas experiências determinar a relação entre a pressão e o alcance do projétil, admitindo a combustão total e instantânea da pólvora antes do início do deslocamento do projétil no interior do tubo da arma [3].

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), durante o período da revolução francesa, dá início ao estudo do movimento dos gases no interior do tubo da arma, apresentando também de forma aproximada a relação de pressões entre a culatra da arma e a base do projétil. Os seus estudos foram continuados por **Guillaume Piobert**, o qual apresentou em 1839 as leis sobre a queima da pólvora negra, sendo que a sua lei empírica, é ainda hoje utilizada no estudo dos propulsores modernos [3].

O General **Thomas Jackson Rodman** (1816-1871), mostrou que a forma geométrica dos grãos de pólvora afeta a taxa de queima e, em 1857, apresentou um dispositivo capaz de medir a pressão máxima dos gases. No entanto, o sistema designado por medidor de *Crusher* (Cooper Crusher Gauge), apresentado por **Andrew Noble** (1831-1915) em 1860, é de qualidade superior, medindo de forma bastante mais precisa o valor desta pressão. Juntamente com **Federick Abel** (1827-1902), Andrew Noble apresentou a lei relativa à pressão e densidade, a volume constante [3].

Em 1864, **Henry Resal** apresenta a equação da energia da queima dos gases, colocando deste modo o estudo da balística interna na termodinâmica.

Com o passar dos anos modelos complexos foram sendo desenvolvidos, mas devido a diversas simplificações ou por falta de meios capazes de resolver as equações dos modelos, estes não tinham aplicabilidade no tiro real. O aparecimento dos computadores veio possibilitar a resolução dessas equações melhorando os resultados obtidos de forma significativa [3].

Muitos dos estudos analíticos realizados, têm como objetivo a previsão/medição de parâmetros globais importantes, como é o caso da velocidade à saída, da pressão e da temperatura máximas no interior da arma [23], mas para a compreensão de todo o processo desde a ignição da carga até à saída do projétil, tem vindo a ser desenvolvido *software* apoiado em modelos matemáticos sofisticados que permitem otimizar o projeto de armamento [12].

Com o progresso destes modelos matemáticos reduz-se o risco da ocorrência de acidentes e os custos monetários associados, pois, quando são efetuados tiros reais estes já foram previamente simulados por computador [23].

Estudos desta natureza só podem realizar-se, conhecendo diversas variáveis termodinâmicas e geométricas, que caracterizam o agente propulsor, informação que normalmente é facultada pelo fabricante da carga propulsora. É também fundamental o conhecimento das dimensões e geometria da câmara de combustão e do projétil [12].

Devido à complexidade dos processos envolvidos, os modelos de balística interna consideram determinadas hipóteses simplificativas, como por exemplo, uma taxa de queima do grão de pólvora constante, não variável em função da pressão, uma combustão adiabática, uma evolução isentrópica a partir do *burnout*, etc. [24].

Um importante impulsionador da necessidade de se desenvolverem modelos cada vez mais precisos, tem sido o lançamento e desenvolvimento de projéteis guiados. Nestes projéteis, a sofisticação da componente eletrónica exige o estudo do regime transiente, o que conduz a modelos complexos de balística interna [25, 26].

Não é apenas ao nível de modelação/simulação que tem existido uma grande evolução. Na parte experimental, associada à medição de pressões, velocidades e temperaturas, tem existido uma melhoria significativa dos métodos de observação, o que é fundamental na validação dos modelos matemáticos.

No caso da pressão, era tipicamente utilizado até meio da década de sessenta o medidor de *Crusher* (figura 3.3a), no qual, um pistão em contacto direto com os gases resultantes da combustão da carga propulsora deformava um cilindro de cobre devidamente calibrado (*crusher*), obtendo-se a pressão máxima através de uma tabela de conversão que relaciona deformações do *crusher* com pressões [27, 28]. O medidor de *Crusher* foi posteriormente substituído pelos transdutores piezoelétricos (figura 3.3b), mais precisos e com capacidade de descrever a curva da pressão durante todo o disparo, deixando de estar limitados ao conhecimento do seu máximo. Porém, em ambos os métodos é necessário efetuar furos na câmara de combustão da arma (instrumentalização do tubo da arma) [27], pelo que, os países da Organização Tratado Atlântico Norte (OTAN) que desenvolvem armamento, utilizam um dispositivo denominado *Internal Pressure Gage* (IPG) (figura 3.3c). Trata-se de um sistema de pequenas dimensões (comparado com o volume da câmara de combustão de armas de elevado calibre), capaz de resistir às condições adversas de pressão e temperatura durante todo o disparo, basta introduzir o IPG na câmara de combustão da arma, sem que para isso seja necessária qualquer adaptação do tubo da arma. Devido às suas pequenas dimensões, são desprezáveis os seus efeitos na combustão, obtendo-se também a curva da pressão ao longo de todo o processo de balística

interna [29].

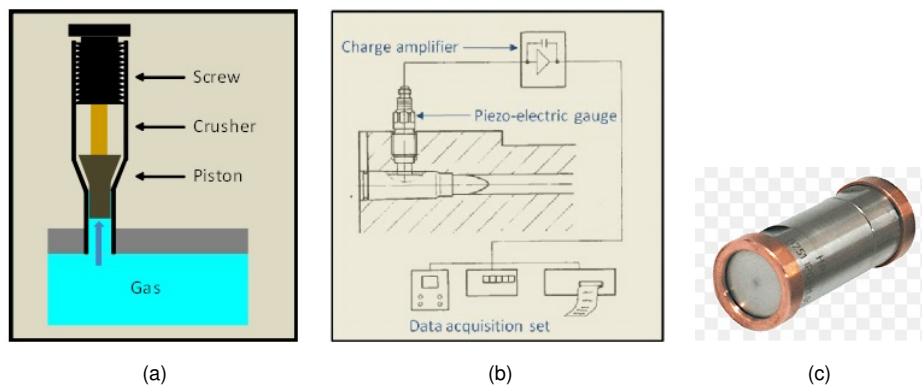


Figura 3.3: Medição de pressão utilizando:. 3.3a) *Cooper Crusher Gauge* [38]. 3.3b) Piezoelétrico [38]. 3.3c) B251 IPG. [27]

Relativamente à medição da velocidade de projéteis à saída, diversas formas têm sido desenvolvidas desde os primórdios do pêndulo balístico. O Exército Português, assim como muitos outros exércitos, utiliza atualmente o Radar RS 337-2000 *Advanced Field Artillery Muzzle Velocity Radar System*. Através da utilização em simultâneo do efeito de Doppler e do processamento de dados digitais, consegue-se determinar com boa precisão a velocidade de saída do projétil.

Apresenta-se na figura 3.4 duas fotografias tiradas no Campo militar de Santa Margarida onde se mostra a instalação deste radar.



Figura 3.4: RS 337-2000 Advanced Field Artillery Muzzle Velocity Radar System

3.2.2 Métodos Numéricos

Utilizando um referencial em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) pode definir-se uma hierarquia de modelos baseados na dimensão do escoamento para o estudo dos fenómenos que ocorrem durante o processo de balística interna. Quanto maior é a dimensão do modelo, mais preciso, complexo e moroso ele é.

Modelo zero dimensional

São os modelos mais simples, designados de *Lumped parameter models* [26, 30]. Permitem resolver muitos dos problemas de balística interna e são suficientemente precisos em projeteis convencionais [25], sem ser necessário recorrer a computadores com elevada potência de cálculo. Estes modelos assumem diversas hipóteses simplificativas, como ignição espontânea e uniforme de toda a carga propulsora, distribuída uniformemente no interior da câmara de combustão [26, 31]. Consideram também que a massa volúmica do gás resultante da combustão é constante desde a culatra até à base do projétil, o que permite relacionar, através das equações de Lagrange, a pressão na culatra, com a pressão média e a pressão na base do projétil [1]. Deste modo, qualquer acontecimento na culatra afeta imediatamente a base do projétil, uma vez que, este tipo de modelo não tem capacidade para simular a propagação de ondas de pressão [32]. Os modelos zero dimensional são muito utilizados quando se pretende determinar parâmetros globais como a pressão máxima ou a velocidade à saída [30].

Os códigos zero dimensional são os mais eficazes nos estudos simples de balística interna, conseguem-se resultados com uma precisão excelente, após a validação experimental, sem que para tal seja necessário o uso de grandes recursos computacionais [1].

Modelo unidimensional

Os modelos de uma dimensão permitem determinar a variação temporal das propriedades do escoamento na direção axial [30], mantendo-se constantes na direção radial [1].

Ao contrário dos modelos zero dimensionais, os modelos unidimensionais possibilitam a simulação da propagação de ondas de pressão na direção axial [26].

Modelo bidimensional

Na sequência dos estudos de balística interna e continuando na procura de resultados cada vez mais precisos e realistas, foram criados modelos multidimensionais de duas fases (carga sólida ainda por queimar, mais gases resultantes da combustão), que necessariamente exigem um maior nível de conhecimentos da parte do utilizador do modelo. Inserem-se neste tipo os modelos bidimensional e tridimensional de duas fases.

Num modelo bidimensional é possível estudar a frente de chama na direção axial e radial [30], bem como a formação e propagação das ondas de pressão. Consequente à maior complexidade deste modelo em comparação com os anteriormente apresentados, o tempo computacional aumenta consideravelmente [1].

Modelo tridimensional

Por fim, o modelo tridimensional é o mais complexo e moroso de usar, sendo preferencialmente utilizado em investigação e não em simulações de tiro. Com um modelo deste tipo, os grãos de pólvora podem ser estudados individualmente [1].

No desenvolvimento dos modelos com duas fases que consideram a influência tanto dos gases resultantes da combustão, como da pólvora ainda por queimar, utiliza-se tipicamente dois tipos de aproximações, as quais de uma forma resumida são [26, 33, 34]:

- Aproximação Euleriana-Euleriana: onde se considera a parte gasosa e o sólido ambos como meios contínuos;
- Aproximação Euleriana-Lagrangeana: neste modelo o gás é tratado como um meio contínuo e a parte sólida como uma partícula individual.

Quer os modelos baseados na aproximação Euleriana-Euleriana, quer na aproximação Euleriana-Lagrangeana, exigem balanços de massa, quantidade de movimento e energia.

Uma desvantagem dos modelos de duas fases e que por vezes leva a que sejam melhorados os modelos clássicos (zero dimensional), é a necessidade de impor muitos dados, alguns dos quais são mal conhecidos, sendo outros obtidos de experiências nas quais as condições de queima são muito diferentes das existentes na câmara de combustão em estudo [34].

3.2.3 Equações de Estado

Além dos balanços apresentados anteriormente, é necessário recorrer a equações de estado. A equação de estado mais simples é a dos gases perfeitos. Esta equação relaciona a pressão, volume, massa e temperatura de qualquer gás considerado ideal, ou seja, quando as moléculas não interagem umas com as outras e o volume por elas ocupado é desprezável em relação ao volume total ocupado pelo gás [35, 36].

A equação de estado dos gases perfeitos,

$$PV = nR_0T \quad (3.1)$$

satisfaz a lei de Boyle-Mariotte (a temperatura constante $pV = \text{const.}$) e a lei de Charles Gay-Lussac (a pressão constante $V/T = \text{const.}$), sendo $R_0 = 8314 \text{ J.kmol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ a constante universal dos gases perfeitos e n o número de moles do gás

Em muitas situações, a aplicação da equação de estado de gás perfeito consegue descrever adequadamente o comportamento do gás, contudo em situações de elevadas pressões e temperaturas os seus resultados tornam-se menos precisos. Outras equações de estado podem então utilizar-se, como é o caso da equação de estado de Noble-Abel, de uso muito frequente em balística interna [1, 37]:

$$P(V - m_g b) = m_g RT \quad (3.2)$$

Nesta equação de estado aparece o termo do covolume (b), o qual quantifica o tamanho das moléculas bem como as forças intermoleculares existentes devido à sua proximidade. Pode pensar-se neste termo não como uma variável com um real sentido físico, mas como um número que aproxima os resultados obtidos analiticamente dos obtidos experimentalmente [1].

Por vezes é também utilizada a equação de estado de Van der waals:

$$(P + \alpha/\bar{v}^2)(\bar{v} - b) = R_0T \quad (3.3)$$

Onde \bar{v} é o volume específico molar do gás, α/v^2 representa as forças de atração intermoleculares e b o volume ocupado pelas moléculas. Em balística, como consequência das elevadas temperaturas atingidas pelos gases resultantes da combustão da pólvora, as forças intermoleculares são desprezáveis quando comparadas com a energia cinética molecular, obtendo-se deste modo a equação de estado de Noble-Abel [37, 38, 39].

3.3 Equações do Modelo

Na figura 3.5, é apresentado um esquema simplificado do interior do Obus M114 A1 155 mm, onde todo o tubo, incluindo a câmara de combustão, tem um diâmetro constante e igual a d .

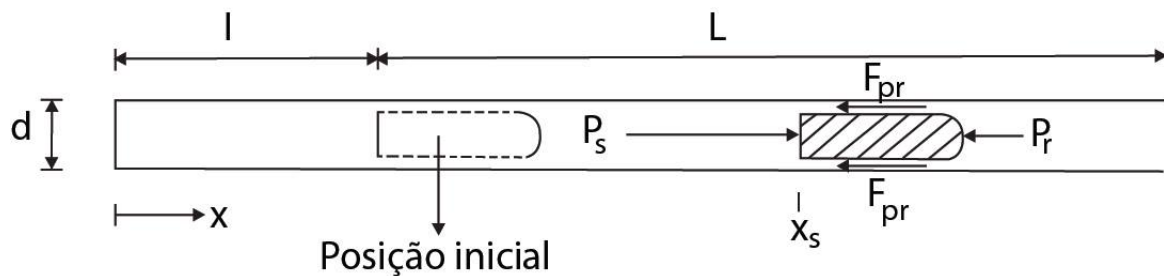


Figura 3.5: Esquema simplificado do interior do tubo do obus

É de notar que $a \gg g$, pelo que se pode desprezar a força gravítica e considerar o tubo do obus na horizontal. O comprimento l é o comprimento equivalente tal que $l = V_0/A$, sendo V_0 o volume inicial da câmara de combustão e A a área interior do tubo estriado.

Hipóteses do modelo:

Para o desenvolvimento do modelo assumiram-se diversas hipóteses simplificativas: (i) as perdas térmicas através das paredes do tubo do obus são desprezadas; (ii) a massa volúmica do gás resultante da combustão não varia espacialmente (modelo zero dimensional); (iii) para simplificação das equações, na equação da continuidade (e apenas nesta equação, ver [1]) considera-se que toda a carga explosiva é convertida instantaneamente em gás; (iv) o tubo do obus tem secção constante e igual ao menor valor medido (ver 2.2); (v) o gás propulsor não é considerado ideal, utilizando-se a equação de estado de Noble-Abel; (vi) tanto a resistência de atrito (contacto entre projétil e tubo) como a do ar no interior do tubo, são contabilizadas, substituindo a massa real do projétil por uma massa efetiva; (vii) após toda a carga propulsora se ter transformado em gás (instante designado na literatura por *burnout*), a evolução do gás é isentrópica; (viii) considerou-se constante a taxa de queima β , independentemente do valor da pressão na câmara de combustão.

Equação da continuidade:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0, \text{ considerando escoamento unidimensional obtém-se para o gás } \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{du_g}{dx} = 0$$

Considera-se que na combustão, toda a pólvora é transformada em gás, deste modo $\rho V = c$, sendo c a massa inicial de pólvora e $V = Ax_s$ o volume da câmara de combustão.

Das equações anteriores tem-se (derivando no tempo):

$$\rho = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -c \frac{dV/dt}{V^2} = -\frac{c}{V^2} A \frac{dx_s}{dt} = -\frac{c}{V^2} A u_s \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{V} A u_s = -\frac{u_s}{x_s}$$

Substituindo o 1º termo da equação da continuidade, e integrando ao longo de x :

$$-\frac{u_s}{x_s} + \frac{du_g}{dx} = 0 \Leftrightarrow \int_0^x \frac{u_s}{x_s} dx = \int_0^x \frac{du_g}{dx} dx \Leftrightarrow u_g = \frac{x}{x_s} u_s, \quad (3.4)$$

com a condição de fronteira $u_g(0) = 0$.

Conclusão: a velocidade no gás varia linearmente desde a culatra até à base do projétil.

Equação da quantidade de movimento do gás:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \tau$$

Desprezando as forças viscosas e gravíticas obtém-se para o gás, na direção x :

$$\frac{du_g}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

Derivando a equação (3.4):

$$u_g = u_s \frac{x}{x_s} \Rightarrow \frac{du_g}{dt} = \frac{x_s \left(\frac{du_s}{dt} x + u_s \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dx_s}{dt} u_s x}{x_s^2} = \frac{x}{x_s} \frac{du_s}{dt} \quad (3.5)$$

Na equação anterior os dois últimos termos anulam-se porque:

$$x_s u_s \frac{dx}{dt} - x u_s \frac{dx_s}{dt} = x_s u_s u_g - x u_s^2 = x_s u_s \left(u_s \frac{x}{x_s} \right) - x u_s^2 = 0$$

Substituindo na equação da quantidade de movimento, obtém-se:

$$\rho \frac{x}{x_s} \frac{du_s}{dt} = -\frac{dp}{dx}$$

Integrando ao longo de x :

$$\int \frac{dp}{dx} dx = -\frac{\rho}{x_s} \frac{du_s}{dt} \int x dx \Leftrightarrow p = -\frac{\rho}{2x_s} \frac{du_s}{dt} x^2 + const.$$

Com:

$$\frac{\rho}{x_s} = \frac{c}{V x_s} = \frac{c}{A x_s^2}$$

Resulta finalmente:

$$p = -\frac{c x^2}{2A x_s^2} \frac{du_s}{dt} + const. \quad (3.6)$$

Balanço de forças no projétil:

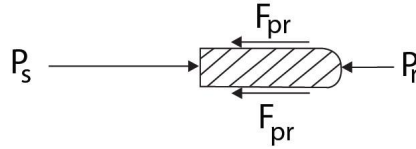


Figura 3.6: Esquema das forças aplicadas no projétil

$$m \frac{du_s}{dt} = (p_s - p_r)A - F_{pr} = (p_s - p_r)A - k_1 A$$

A força de resistência do ar $p_r A$, é proporcional ao quadrado da velocidade do projétil e, neste estudo, é desprezada. É no entanto, de modo simplificado, representada por um aumento de massa do projétil (a massa m é substituída por um massa efetiva m_1). A introdução da força de atrito F_{pr} , representada na figura 3.6 dá origem a uma nova correção na massa, definindo-se no final uma massa efetiva $m_2 = m_1(1 - k_1/A)$:

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{p_s A}{m_1} \left(1 - \frac{k_1}{A}\right) = \frac{p_s A}{m_2} \quad (3.7)$$

Tratando-se de uma peça de artilharia com tubo estriado a equação geral que descreve a força de atrito é [1]:

$$F_{pr} = \left(\frac{k}{d/2}\right)^2 (\mu + \tan\alpha) \tan\alpha A p_s = k_1 p_s$$

com $k_1 = \left(\frac{k}{d/2}\right)^2 (\mu + \tan\alpha) \tan\alpha A$, sendo μ , o coeficiente de atrito e α o ângulo das estrias.

De (3.6) obtém-se:

$$p_s = p(x_s) = -\frac{c}{2A} \frac{du_s}{dt} + const. \\ \Rightarrow const. = p_s + \frac{c}{2A} \frac{du_s}{dt} \xrightarrow{\text{aplicando 3.7}} const. = p_s \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)$$

Substituindo em (3.6):

$$p = -\frac{cx^2}{2Ax_s^2} \frac{du_s}{dt} + p_s \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right) = -\frac{cx^2}{2Ax_s^2} \frac{A}{m_2} p_s + p_s \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)$$

Deste modo a expressão que relaciona a pressão na base do projétil p_s com a pressão do gás em qualquer posição x é:

$$p(x) = p_s \left[1 + \frac{c}{2m_2} \left(1 - \frac{x^2}{x_s^2}\right)\right] \quad (3.8)$$

Assim sendo, a **pressão na culatra** é:

$$p_B = p(0) = p_s \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right) \quad (3.9)$$

e a pressão média na câmara de combustão:

$$\bar{p} = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} p dx = \frac{p_s}{x_s} \int_0^{x_s} \left[1 + \frac{c}{2m_2} \left(1 - \frac{x^2}{x_s^2}\right)\right] dx$$

$$\bar{p} = p_s \left(1 + \frac{c}{3m_2} \right) \quad (3.10)$$

e

$$\bar{p} = p_B \left(\frac{1 + \frac{c}{3m_2}}{1 + \frac{c}{2m_2}} \right) \quad (3.11)$$

Usando as equações (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) e substituindo \bar{p} por p_B na equação de β obtém-se, aplicando a equação de estado de Noble-Abel:

$$\bar{p}(V - m_g b) = m_g R T_0 \Leftrightarrow \bar{p}(A x_s - c \phi b) = c \phi \lambda \Leftrightarrow \bar{p} A \left(x_s - \frac{c \phi}{A} b \right) = c \phi \lambda \Leftrightarrow \bar{p} = \frac{c \phi \lambda}{A x_{s1}} \quad (3.12)$$

Onde $l_1 = \frac{cb}{A}$ e $x_{s1} = x_s - l_1 \phi$, sendo b o covolume do gás.

Partindo da equação (3.11) que representa a relação entre a pressão média \bar{p} , e a pressão na culatra p_B e definindo *Lagrange Ratio*, R_L como:

$$R_L = \frac{1 + \frac{c}{2m_2}}{1 + \frac{c}{3m_2}} \quad (3.13)$$

obtém-se:

$$p_B = \bar{p} R_L \Rightarrow p_B = \frac{c \phi \lambda}{A x_{s1}} R_L \quad (3.14)$$

Aplicando as equações (3.7) e (3.9) tem-se:

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{p_B A}{m_2 + \frac{c}{2}} \Leftrightarrow \left(m_2 + \frac{c}{2} \right) \frac{du_s}{dt} = p_B A \quad (3.15)$$

Pelo que:

$$D \frac{df}{dt} = -\beta p_B \Leftrightarrow -\frac{D}{\beta} \frac{df}{dt} = \frac{m_2}{A} \left(1 + \frac{c}{2m_2} \right) \frac{du_s}{dt} \quad (3.16)$$

Reescrevendo (3.16):

$$\frac{du_s}{dt} = -\frac{DA}{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2} \right)} \frac{df}{dt} \quad (3.17)$$

Integrando em ordem ao tempo:

$$u_s = -\frac{DA}{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2} \right)} f + const. \quad (3.18)$$

Usando a condição inicial $u_s = 0$ para $f = 1$ ($t = 0$) obtém-se:

$$const. = \frac{DA}{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2} \right)} \quad (3.19)$$

Substituindo em (3.18) resulta:

$$u_s(t) = \frac{DA}{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2} \right)} (1 - f) \quad (3.20)$$

Derivando em ordem ao tempo:

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{DA}{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)} \frac{df}{dt} \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.15) e usando (3.14) resulta:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{c\phi\lambda\beta}{ADx_{s1}} R_L \quad (3.22)$$

Tendo em conta que:

$$\frac{df}{dx_s} = \frac{1}{u_s} \frac{df}{dt}$$

obtem-se com (3.20):

$$\frac{df}{dx_s} = -\frac{\lambda c \phi \beta^2 m_2}{A^2 D^2 x_{s1} (1-f)} \left[\frac{\left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)^2}{1 + \frac{c}{3m_2}} \right] \Leftrightarrow \frac{df}{dx_s} = -\frac{\lambda c \phi \beta^2 m_2}{A^2 D^2 x_{s1} (1-f)} \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right) R_L \quad (3.23)$$

Aplicando a definição de $\phi = (1-f)(1+\theta f)$, a equação anterior pode ainda ser rescrita na forma:

$$\frac{dx_s}{df} = -\frac{A^2 D^2}{m_2 c \lambda \beta^2} \frac{x_{s1}}{R_L \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right) (1+\theta f)} \quad (3.24)$$

Define-se em seguida, o **parâmetro balístico central** M , definido por Corner [40]:

$$M = \frac{A^2 D^2}{m_2 c \lambda \beta^2} \left[\frac{1 + \frac{c}{3m_2}}{\left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)^2} \right] \quad (3.25)$$

Este parâmetro (função da arma, carga propulsora e projétil), substituído na equação anterior permite ainda escrever:

$$\frac{dx_s}{df} = -\frac{M x_{s1}}{1 + \theta f} \quad (3.26)$$

Resolvendo esta equação diferencial pode-se obter, para um determinado θ , a posição do projétil x_s , em função do valor de f , desde o início da deflagração ($f = 0$). Antes de resolver esta equação diferencial deduzir-se-á uma equação para o cálculo da velocidade do projétil u_s após o *burnout*. Admitindo que após o *burnout* o gás sofre uma evolução isentrópica e considerando que é ideal, é válida a equação $pv^\gamma = const.$ com $\gamma = c_p/c_v$.

Considerando, no entanto, a equação de estado de Noble-Abel, $P(V-m_g b) = m_g RT$ em vez da equação de estado dos gases perfeitos, o resultado será ligeiramente diferente, como se deduz em seguida:

Da segunda lei da termodinâmica:

$$Tds - pdv = du \Leftrightarrow ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv, \text{ considerando que } du = c_v dT$$

No caso da evolução isentrópica:

$$ds = 0 \Rightarrow c_v \frac{dT}{T} = -\frac{p}{T} dv \Leftrightarrow \int_{T_1}^{T_2} c_v \frac{dT}{T} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{R}{v-b} dv \Leftrightarrow c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = -R \ln \left(\frac{v_2 - b}{v_1 - b} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_2 - b}{v_1 - b} \right)^{-\frac{R}{c_v}} \Rightarrow T(v - b)^{\frac{R}{c_v}} = \text{const.}$$

Da equação de estado de Noble-Abel:

$$T = \frac{p(v - b)}{R} \Rightarrow p(v - b)^{\frac{R}{c_v} + 1} = \text{const.} \Leftrightarrow p(v - b)^\gamma = \text{const.}$$

Para um gás ideal o covolume $b = 0$ obtendo-se a equação da evolução politrópica $pv^\gamma = \text{const.}$

$$V = x_s A \Rightarrow v = \frac{V}{c} = \frac{Ax_s}{c} \Rightarrow v - b = \frac{Ax_s}{c} - b = \frac{A}{c} \left(x_s - \frac{bc}{A} \right) \Leftrightarrow v - b = \frac{A}{c} (x_s - l_1)$$

com l_1 , obtém-se ainda:

$$\frac{\bar{p}(x_s)}{\bar{p}_c} = \left(\frac{v(x_s) - b}{v(x_c) - b} \right)^{-\gamma} = \left(\frac{x_s - l_1}{x_c - l_1} \right)^{-\gamma} \quad (3.27)$$

sendo \bar{p}_c , e x_c , os valores da pressão média e da posição da base do projétil, no instante em que ocorre o *burnout*.

Para obter a equação da velocidade após o *burnout*, multiplica-se a equação da quantidade de movimento (3.7) por u_s obtendo-se uma equação de energia:

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \frac{p_s A}{m_2} \Rightarrow u_s \frac{du_s}{dt} = \frac{p_s A}{m_2} u_s \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{u_s^2}{2} = \frac{p_s A}{m_2} u_s \\ \Rightarrow \int_{t_c}^t \frac{d}{dt} \left(\frac{u_s^2}{2} \right) dt &= \int_{t_c}^t \frac{p_s A}{m_2} \frac{dx_s}{dt} dt \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 (u_s^2 - u_c^2) = A \int_{x_c}^{x_s} p_s dx_s \end{aligned} \quad (3.28)$$

Onde o índice c corresponde ao instante de *burnout*. O integral anterior pode também ser escrito em ordem a \bar{p} :

$$A \int_{x_c}^{x_s} \bar{p} dx = A \int_{x_c}^{x_s} (\bar{p} - p_s + p_s) dx = A \int_{x_c}^{x_s} (\bar{p} - p_s) dx + A \int_{x_c}^{x_s} p_s dx$$

De (3.10) subtraindo ambos os termos por p_s , tem-se:

$$\bar{p} - p_s = p_s \frac{c}{3m_2}$$

Substituindo na equação anterior:

$$A \int_{x_c}^{x_s} \bar{p} dx = \frac{Ac}{3m_2} \int_{x_c}^{x_s} p_s dx + A \int_{x_c}^{x_s} p_s dx = A \left(\frac{c}{3m_2} + 1 \right) \int_{x_c}^{x_s} p_s dx$$

Aplicando à equação anterior a equação (3.28),

$$A \int_{x_c}^{x_s} \bar{p} dx = A \left(\frac{c}{3m_2} + 1 \right) \frac{1}{2A} m_2 (u_s^2 - u_c^2) \Leftrightarrow A \int_{x_c}^{x_s} \bar{p} dx = \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{c}{3} \right) (u_s^2 - u_c^2) \quad (3.29)$$

Com (3.27) pode-se escrever:

$$A \int_{x_c}^{x_s} \bar{p} dx = A \bar{p}_c \int_{x_c}^{x_s} \left(\frac{x - l_1}{x_c - l_1} \right)^{-\gamma} dx = A \bar{p}_c \frac{(x_s - l_1)^{1-\gamma} - (x_c - l_1)^{1-\gamma}}{(x_c - l_1)^{-\gamma} (1 - \gamma)}$$

Substituindo-se em (3.29) obtém-se:

$$\frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{c}{3} \right) (u_s^2 - u_c^2) = \frac{A\bar{p}_c(x_c - l_1)}{(1 - \gamma)} \left[\left(\frac{x_s - l_1}{x_c - l_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \quad (3.30)$$

Com 3.12, considerando a equação da pressão média no instante em que ocorre o *burnout*, $x_s = x_c$ e $\phi = 1$, tem-se:

$$\bar{p} = \frac{c\lambda}{Ax_{s1}} \Rightarrow \bar{p}_c = \frac{c\phi\lambda}{A(x_c - l_1)} \Rightarrow A\bar{p}_c(x_c - l_1) = c\lambda \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) em (3.30) e definindo o parâmetro adimensional Φ :

$$\Phi = \frac{2}{1 - \gamma} \left[\left(\frac{x_s - l_1}{x_c - l_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right]$$

obtem-se:

$$u_s^2 - u_c^2 = \frac{\lambda c}{m_2 + \frac{c}{3}} \Phi \quad (3.32)$$

De (3.20) e (3.25) resulta, com simples manipulações algébricas, a seguinte equação para a velocidade, até ao instante do *burnout*:

$$u_s^2 = \frac{\lambda c M (1 - f)^2}{m_2 + \frac{c}{3}} \quad (3.33)$$

No *burnout*, ou seja, no instante em que $f = 0$:

$$u_c^2 = \frac{\lambda c M}{m_2 + \frac{c}{3}} \quad (3.34)$$

Com (3.34) e (3.32) obtém-se a velocidade do projétil após o *burnout*:

$$u_s^2 = \frac{\lambda c}{m_2 + \frac{c}{3}} (M + \Phi) \quad (3.35)$$

Determina-se seguidamente as expressões que permitem calcular a pressão do gás até que ocorra o *burnout*, sendo diferente consoante o fator de forma do grão de pólvora:

3.3.1 Caso $\theta = 0$

Regressando à equação diferencial (3.26), considerando as definições anteriores e $\theta = 0$:

$$\frac{dx_s}{df} + Mx_s = Ml_1(1 - f)$$

Esta equação diferencial é do tipo $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ cuja solução é $ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + const.$
No presente caso $y = x_s$, $x = f$, $P(x) = M$, $Q(x) = Ml_1(1 - x)$

$$\int P dx = \int M df = Mf;$$

$$\begin{aligned} \int Qe^{\int P dx} dx &= Ml_1 \int (1 - f) e^{Mf} df = Ml_1 \int e^{Mf} df - Ml_1 \int f e^{Mf} df \\ &= l_1 e^{Mf} - l_1 e^{Mf} \left(f - \frac{1}{M} \right) = l_1 e^{Mf} \left(1 - f + \frac{1}{M} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo na solução resulta:

$$x_s e^{Mf} = l_1 e^{Mf} \left(1 - f + \frac{1}{M} \right) + const.$$

Aplicando a condição inicial: $t = 0; x_s = l; f = 1 \Rightarrow l e^M = l_1 e^M \frac{1}{M} + const. \Rightarrow cconst. = e^M \left(l - \frac{l_1}{M} \right)$, substituindo a constante na equação diferencial, tem-se:

$$x_s e^{Mf} = l_1 e^{Mf} \left(1 - f + \frac{1}{M} \right) + e^M \left(l - \frac{l_1}{M} \right) \Leftrightarrow x_s = l_1 \left(1 - f + \frac{1}{M} \right) + e^{M(1-f)} \left(l - \frac{l_1}{M} \right) \quad (3.37)$$

Antes de continuar a dedução define-se Q , de modo a simplificar as equações:

$$Q = \frac{\lambda c R_L}{V_i}$$

Sendo V_i o volume inicial $V_i = Al$

Com (3.14) obtém-se:

$$p_B = Q \frac{\phi l}{x_{s1}} = Q \frac{(1-f)l}{\frac{l_1}{M} + e^{M(1-f)} \left(l - \frac{l_1}{M} \right)} \Leftrightarrow p_B = Q \frac{(1-f)Ml}{l_1 + e^{M(1-f)}(Ml - l_1)} \quad (3.38)$$

Derivando p_B em ordem a f de modo a obter o máximo resulta:

$$\frac{dp_B}{df} = Q \frac{-Ml [l_1 + e^{M(1-f)}(Ml - l_1)] + M e^{M(1-f)}(Ml - l_1)(1-f)Ml}{[l_1 + e^{M(1-f)}(Ml - l_1)]^2}$$

$$\frac{dp_B}{df} = 0 \implies l_1 + e^{M(1-f_m)}(Ml - l_1) - M e^{M(1-f_m)}(Ml - l_1)(1 - f_m) = 0 \iff$$

$$\iff l_1 - e^{M(1-f_m)}(Ml - l_1)[M(1 - f_m) - 1] = 0 \quad (3.39)$$

A equação anterior não permite obter o valor de f_m (valor de f para o qual p_B é máximo) analiticamente, tem que ser resolvida numericamente.

Para $l_1 = 0$, ou seja, considerando gás perfeito, obtém-se $f_m = 1 - 1/M$, que é o resultado obtido em [1]. Da mesma forma para $l_1 = 0$ obtém-se de (3.37) $x_s = l e^{M(1-f)}$ e de (3.38) $p_B = Q(1-f)e^{-M(1-f)}$, ou seja, os resultados obtidos por Carlucci em [1], para gases perfeitos.

Depois de se determinar f_m numericamente, calcula-se x_{s_m} com (3.37) e p_{B_m} com (3.38).

Para $t = t_c; x_s = x_c; f = 0; \phi = 1$ obtém-se p_{B_c} e x_c :

$$p_{B_c} = Q \frac{Ml}{l_1 + (Ml - l_1)e^M} \quad (3.40)$$

$$x_c = l_1 \left(1 + \frac{1}{M} \right) + \left(l - \frac{l_1}{M} \right) e^M \quad (3.41)$$

Para $l_1 = 0$ obtém-se os resultados de [1]: $p_{B_c} = Qe^{-M}$; com $x_c = l e^M$

Com (3.40) e (3.41), obtém-se a expressão que permite calcular a pressão após os *burnout*:

$$p_B = Q \left(\frac{x_s - l_1}{l e^M - l_1} \right)^{-\gamma} e^{-M} \quad (3.42)$$

3.3.2 Caso $\theta \neq 0$

Caso a geometria do grão lhe confira uma progressividade diferente da neutra obtém-se de (3.26):

$$\frac{dx_s}{df} = -\frac{M(x_s - l_1\phi)}{1 + \theta f} \Leftrightarrow \frac{dx_s}{df} + \frac{Mx_s}{1 + \theta f} = Ml_1(1 - f)$$

com $\phi = (1 - f)(1 + \theta f)$

A equação diferencial é do tipo $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ cuja solução é $ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + const.$ No presente caso $y = x_s$, $x = f$, $P(x) = \frac{M}{1+\theta x}$, $Q(x) = Ml_1(1 - x)$

$$\int P dx = \int \frac{M}{1 + \theta f} df = \frac{M}{\theta} \ln(1 + \theta f) \Rightarrow e^{\int P dx} = (1 + \theta f)^{M/\theta};$$

$$\int Qe^{\int P dx} dx = Ml_1 \int (1 - f)(1 + \theta f)^{M/\theta} df = Ml_1 \int (1 + \theta f)^{M/\theta} df - Ml_1 \int f(1 + \theta f)^{M/\theta} df$$

$$\begin{cases} \int (1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta}} df = \frac{(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta} + 1}}{M + \theta} \\ \int f(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta}} df = \frac{(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta} + 2}}{\theta(M + 2\theta)} - \frac{(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta} + 1}}{\theta(M + \theta)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int Qe^{\int P dx} dx = Ml_1 \left[\frac{(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta} + 1}(1 + \theta)}{\theta(M + \theta)} - \frac{(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta} + 2}}{\theta(M + 2\theta)} \right]$$

Solução:

$$x_s(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta}} = Ml_1 \left[\frac{(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta} + 1}(1 + \theta)}{\theta(M + \theta)} - \frac{(1 + \theta f)^{\frac{M}{\theta} + 2}}{\theta(M + 2\theta)} \right] + const.$$

Aplicando a condição inicial: $t = 0$; $x_s = l$; $f = 1$

$$const. = l(1 + \theta)^{\frac{M}{\theta}} - Ml_1 \left[\frac{(1 + \theta)^{\frac{M}{\theta} + 2}}{\theta(M + \theta)} - \frac{(1 + \theta)^{\frac{M}{\theta} + 2}}{\theta(M + 2\theta)} \right]$$

Substituindo a constante na equação da solução e fazendo algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$x_s = l \left(\frac{1 + \theta}{1 + \theta f} \right)^{M/\theta} + c_1 \left[(1 + \theta f)c_2 - (1 + \theta f)^2(M + \theta) - (1 + \theta f)^{-M/\theta} c_3 \right] \quad (3.43)$$

Sendo: $c_1 = \frac{Ml_1}{\theta(M + \theta)(M + 2\theta)}$; $c_2 = (1 + \theta)(M + 2\theta)$; $c_3 = \theta(1 + \theta)^{M/\theta + 2}$

Com (3.14) obtém-se:

$$\begin{cases} p_B = \frac{\lambda c R_L}{V_i} \frac{\phi l}{x_{s1}} = \frac{\lambda c R_L}{V_i} \frac{\phi l}{x_s - l_1 \phi} \\ \frac{x_s}{\phi} = l(1 + \theta)^{\frac{M}{\theta}} \frac{(1 + \theta f)^{-\frac{M}{\theta} - 1}}{1 - f} + c_1 \left[\frac{c_2}{1 - f} - \frac{(1 + \theta f)(M + \theta)}{1 - f} - \frac{(1 + \theta f)^{-\frac{M}{\theta} - 1}}{1 - f} c_3 \right] \end{cases}$$

Aplicando a definição de Q e dividindo por ϕ :

$$p_B = Q \frac{l}{\frac{x_s}{\phi} - l_1} \quad (3.44)$$

A pressão máxima obtém-se para $\frac{dp_B}{df} = 0$:

$$p_B = Q \frac{l}{\frac{x_s}{\phi} - l_1} \implies \frac{dp_B}{df} = Ql \frac{d}{df} \left(\frac{x_s}{\phi} - l_1 \right)^{-1} = -Ql \left(\frac{x_s}{\phi} - l_1 \right)^{-2} \frac{d}{df} \left(\frac{x_s}{\phi} \right);$$

$$\frac{dp_B}{df} = 0 \implies \frac{d}{df} \left(\frac{x_s}{\phi} \right) = 0$$

$$\frac{d}{df} \left(\frac{x_s}{\phi} \right) = l(1+\theta)^{\frac{M}{\theta}} \frac{d}{df} \left[\frac{(1+\theta f)^{-\frac{M}{\theta}-1}}{1-f} \right] + c_1 \left\{ c_2 \frac{d}{df} \left(\frac{1}{1-f} \right) + (M+\theta) \frac{d}{df} \left(\frac{1+\theta f}{1-f} \right) - c_3 \frac{d}{df} \left[\frac{(1+\theta f)^{-\frac{M}{\theta}-1}}{1-f} \right] \right\}$$

Com:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{df} \left[\frac{(1+\theta f)^{-\frac{M}{\theta}-1}}{1-f} \right] = \frac{(1+\theta f)^{-\frac{M}{\theta}-1} - (M+\theta)(1+\theta f)^{-\frac{M}{\theta}-2}(1-f)}{(1-f)^2} \\ \frac{d}{df} \left(\frac{1}{1-f} \right) = \frac{1}{(1-f)^2} \\ \frac{d}{df} \left(\frac{1+\theta f}{1-f} \right) = \frac{1+\theta}{(1-f)^2} \end{array} \right.$$

Substituindo as derivadas em $\frac{d}{df} \left(\frac{x_s}{\phi} \right)$ conclui-se que a condição $\frac{d}{df} \left(\frac{x_s}{\phi} \right) = 0$ é satisfeita se:

$$(1+\theta f_m)^{-\frac{M}{\theta}-1} - (M+\theta)(1-f_m)(1+\theta f_m)^{-\frac{M}{\theta}-2} = c_4 \quad (3.45)$$

com:

$$c_4 = \frac{c_1(M+\theta)(1+\theta) - c_1 c_2}{l(1+\theta)^{\frac{M}{\theta}} - c_1 c_3}$$

Desta equação obtém-se numericamente o valor de f_m e sabendo este calcula-se x_{sm} utilizando (3.43) e p_{B_m} através de (3.44).

Se $l_1 = 0$ então, $c_1 = 0$ logo $c_4 = 0$, resulta da equação anterior:

$$(1+\theta f) - (M+\theta)(1-f) = 0 \implies 1+\theta f - M + Mf - \theta + \theta f = 0 \implies f_m = \frac{\theta + M - 1}{2\theta + M}$$

O resultado obtido é igual ao obtido em [1] onde foi feita a dedução para gás perfeito.

Para $t = t_c$; $x_s = x_c$; $f = 0$; $\phi = 1$, obtém-se p_{B_c} e x_c :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = 1 \implies p_B = Q \frac{l}{x_s - l_1} \\ f = 0 \implies x_s = l(1+\theta)^{\frac{M}{\theta}} + c_1 [c_2 - (M+\theta) - c_3] \end{array} \right.$$

Após algumas manipulações algébricas conclui-se:

$$c_1 [c_2 - (M+\theta) - c_3] = \frac{Ml_1 [1 + M + 2\theta - (1+\theta)^{\frac{M}{\theta}+2}]}{(M+\theta)(M+2\theta)}$$

Substituindo nas equações anteriores:

$$p_{B_c} = \frac{Ql}{l(1+\theta)^{M/\theta} + \frac{Ml_1 [1 + M + 2\theta - (1+\theta)^{M/\theta+2}]}{(M+\theta)(M+2\theta)} - l_1} \quad (3.46)$$

$$x_c = l(1 + \theta)^{\frac{M}{\theta}} + \frac{Ml_1 \left[1 + M + 2\theta - (1 + \theta)^{\frac{M}{\theta} + 2} \right]}{(M + \theta)(M + 2\theta)} \quad (3.47)$$

Para $l_1 = 0$, obtém-se os resultados para gás perfeito de [1], ou seja:

$$p_{Bc} = Q \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^{\frac{M}{\theta}} e \quad x_c = l(1 + \theta)$$

Com (3.46) e (3.47), obtém-se a expressão que permite calcular a pressão após os *burnout*:

$$p_B = p_{Bc} \left(\frac{x_s - l_1}{x_s - l_1} \right)^{-\gamma} e^{-M} \quad (3.48)$$

3.4 Considerando a cinta de travamento

Nesta secção mostra-se como é possível simular o efeito da cinta de travamento, alterando apenas a condição inicial.

A condição inicial passa a ser:

$$t = 0 ; x_s = l ; u_s = 0 ; f = f_0 ; \phi = \phi_0$$

Sendo que:

$$f_0 < 1 \text{ e } \phi_0 > 0$$

De modo a considerar esta condição inicial é necessário conhecer o valor da pressão nesse instante imediatamente anterior ao início do deslocamento do projétil.

A pressão média da câmara de combustão no instante em que ocorre a rotura da cinta de travamento é:

$$\bar{p}_0 = \frac{c\lambda\phi_0}{A(l - l_1\phi_0)} \quad (3.49)$$

Conhecendo \bar{p}_0 obtém-se, da equação anterior, o valor de ϕ_0 :

$$\phi_0 = \frac{\bar{p}_0 A l}{c\lambda + A l_1 \bar{p}_0} \quad (3.50)$$

e, da relação entre ϕ e f , o valor de f_0 :

$$f_0 = \frac{-(1 - \theta) + \sqrt{(1 - \theta)^2 - 4\theta(\phi_0 - 1)}}{2\theta} \quad (3.51)$$

Partindo da equação (3.18), e aplicando a nova condição inicial, obtém-se um novo valor para a constante:

$$const. = \frac{DAf_0}{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2} \right)} \quad (3.52)$$

e para a velocidade do projétil:

$$u_s = \frac{AD}{\beta m_2 \left(\frac{c}{2m_2} + 1 \right)} (f_0 - f) \quad (3.53)$$

Do mesmo modo, (3.23) passa a:

$$\frac{df}{dx_s} = -\frac{\beta^2 c \lambda m_2 \phi}{A^2 D^2 x_{s1} (f_0 - f)} \left(\frac{c}{2m_2} + 1 \right) R_L \quad (3.54)$$

(3.24) fica:

$$\frac{dx_s}{df} = -\frac{A^2 D^2}{\beta^2 c \lambda m_2} \frac{x_{s1} (f_0 - f)}{(1 - f)(1 + \theta f) R_L \left(\frac{c}{2m_2} + 1 \right)} \quad (3.55)$$

e, finalmente, (3.26) passa a:

$$\frac{dx_s}{df} = -\frac{M x_{s1} (f_0 - f)}{(1 - f)(1 + \theta f)} \quad (3.56)$$

Note-se que a definição de M não se altera. Aplicando M em (3.53) obtém-se até ao *burnout*:

$$u_s^2 = \frac{\lambda c M (f_0 - f)^2}{m_2 + \frac{c}{3}} \quad (3.57)$$

pelo que:

$$u_c^2 = \frac{\lambda c M f_0^2}{m_2 + \frac{c}{3}} \quad (3.58)$$

De (3.32) e de (3.58) resulta após o *burnout*:

$$u_s^2 = \frac{\lambda c}{m_2 + \frac{c}{3}} (M f_0^2 + \Phi) \quad (3.59)$$

3.4.1 Caso $\theta = 0$

$$\frac{dx_s}{df} = -\frac{M x_{s1} (f_0 - f)}{1 - f} \Leftrightarrow \frac{dx_s}{df} + \frac{M (f_0 - f)}{1 - f} x_s = M l_1 (f_0 - f) \quad (3.60)$$

A equação diferencial é novamente do tipo $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ com $y = x_s$, $x = f$, $P(x) = \frac{M(f_0 - x)}{1 - x}$, $Q(x) = M l_1 (f_0 - x)$, sendo a solução geral dada pela equação $ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + const.$, obtendo-se no presente caso:

$$x_s (1 - f)^{M(1-f_0)} e^{Mf} = M l_1 \int (f_0 - f)(1 - f)^{M(1-f_0)} e^{Mf} df + const. \quad (3.61)$$

Resolvendo o integral da equação anterior com a função exponencial integral:

$$ExpIntegralE[n, z] = E_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n} dt$$

obtém-se:

$$x_s (1 - f)^{M(1-f_0)} e^{Mf} = (1 - f)^{1+M(1-f_0)} l_1 \{e^{fM} + e^M E_n(z)\} + const. \quad (3.62)$$

com $n = (f_0 - 1)M$; $z = M(1 - f)$

Aplicando a condição inicial $x_s(f_0) = l$:

$$const. = l(1 - f_0)^{M(1-f_0)} e^{Mf_0} - (1 - f_0)^{1+M(1-f_0)} l_1 [e^{f_0 M} + e^M E_n(-n)] \quad (3.63)$$

e substituindo na equação de x_s :

$$x_s = \frac{(1-f)^{1+M(1-f_0)} l_1 [e^{fM} + e^M E_n(z)] + l(1-f_0)^{M(1-f_0)} e^{Mf_0} - (1-f_0)^{1+M(1-f_0)} l_1 [e^{f_0 M} + e^M E_n(-n)]}{(1-f)^{M(1-f_0)} e^{Mf}} \quad (3.64)$$

3.4.2 Caso $\theta \neq 0$

$$\frac{dx_s}{df} = -\frac{Mx_{s1}(f_0 - f)}{(1-f)(1+\theta f)} \Leftrightarrow \frac{dx_s}{df} + \frac{M(f_0 - f)}{(1-f)(1+\theta f)} x_s = Ml_1(f_0 - f) \quad (3.65)$$

Tal como anteriormente, a equação diferencial é do tipo $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ com $y = x_s$, $x = f$, $P(x) = \frac{M(f_0 - x)}{(1-x)(1+\theta x)}$, $Q(x) = Ml_1(f_0 - x)$, sendo a solução geral dada pela equação $ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + const..$ Após algumas manipulações algébricas, a solução geral satisfaz a equação:

$$x_s(1+\theta f)^{\frac{M(1+f_0\theta)}{\theta(1+\theta)}} (1-f)^{\frac{M(1-f_0)}{1+\theta}} = Ml_1 \int (f_0 - f)(1+\theta f)^{\frac{M(1+\theta f_0)}{\theta(1+\theta)}} (1-f)^{\frac{M(1-f_0)}{1+\theta}} df + const. \quad (3.66)$$

Com a condição inicial $x_s(f_0) = l$, obtém-se o valor da constante e utilizando de novo a função exponencial integral é possível deduzir uma equação para $x_s = x_s(M, \theta, f_0, f, l_1, l)$. Como se constata, a simples alteração da condição inicial para um valor de $f_0 \neq 1$, aumenta consideravelmente a complexidade matemática do problema.

Para ambos os casos de valor θ , após se determinar x_s a expressão utilizada para determinar a pressão é a mesma:

$$p_B = Q \frac{\phi l}{x_s - l_1 \phi} \quad (3.67)$$

3.5 Outras alterações

3.5.1 Correção do parâmetro balístico central

Considerou-se que era interessante verificar o impacto nos resultados da aproximação feita anteriormente na equação que define a taxa de queima β :

$$D \frac{df}{dt} = -\beta \bar{p} \approx \beta p_B \quad (3.68)$$

Nas deduções anteriores utilizou-se a pressão na culatra em vez da pressão média, considerando esta última as equações anteriores continuam a ser válidas substituindo M por:

$$M_1 = MR_L^2$$

No capítulo dos resultados analisou-se as diferenças.

3.5.2 Hipótese de modelo isentrópico desde o início da deflagração

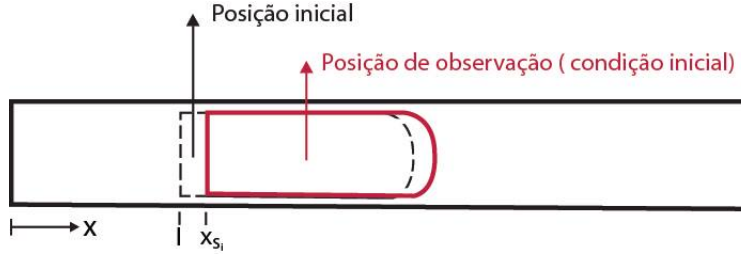


Figura 3.7: Posição de Observação

Nas deduções anteriores considerou-se que a temperatura dos gases se mantinha igual à temperatura de chama adiabática T_0 , até ao *burnout*, seguindo depois uma evolução dada pelas relações isentrópicas. Esta hipótese é utilizada no livro *BALLISTICS* [1], sendo tanto mais rigorosa quanto mais cedo ocorrer a transformação total da pólvora em gás (*burnout*). Em vez disto, poder-se-ia ter considerado a hipótese de evolução isentrópica desde o início da deflagração. É o que se faz em seguida, apesar de os resultados (não apresentados) mostrarem que é preferível a primeira hipótese. Como instante inicial t_i considera-se o instante imediatamente posterior ao total rompimento da cinta de travamento (figura 3.7).

Condição inicial:

$$t = t_i ; x_s = x_{si} ; \bar{p} = \bar{p}_i ; T = T_i ; u_s = u_{si} ; \phi = \phi_i ; f = f_i$$

Se no instante $t = t_i$ se medir \bar{p}_i e T_i , da equação de estado obtém-se m_{gi} e portanto $\phi_i = m_{gi}/c$ e f_i da relação entre (ϕ e f). Como o deslocamento inicial $x_{si} - l$ (correspondente ao comprimento da cinta de travamento) é desprezável, pode-se assumir, em primeira aproximação $T_i = T_0$.

Considerando evolução isentrópica desde o início.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p}(V - m_g b) = m_g RT \iff \bar{p} = \frac{RT}{v-b} \\ p(v-b)^\gamma = const. \text{ ou } T(v-b)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = const. \iff T = T_i \left(\frac{v_i-b}{v-b} \right)^{\gamma-1} \implies \bar{p} = \frac{RT_i}{v-b} \left(\frac{v_i-b}{v-b} \right)^{\gamma-1} \end{array} \right. \quad (3.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \frac{m_g}{c} \\ V = Ax_s \end{array} \right. \implies v-b = \frac{V}{m_g} - b = \frac{Ax_s}{c\phi} - b = \frac{A}{c\phi} \left(x_s - \frac{bc}{A} \phi \right) = \frac{Ax_{s1}}{c\phi}$$

Aplicando a definição de l_1 , tem-se,

$$\frac{v_i-b}{v-b} = \frac{\phi}{\phi_i} \frac{x_{si} - l_1 \phi_i}{x_s - l_1 \phi} = \frac{\phi x_{si}}{\phi_i x_s}$$

com:

$$x_{s1i} = x_{si} - l_1 \phi_i;$$

$$x_{s1} = x_s - l_1 \phi$$

Designando $\lambda = RT_i$, a equação de \bar{p} pode escrever-se:

$$\bar{p} = \frac{\lambda c \phi}{Ax_{s1i}} \left(\frac{\phi x_{si}}{\phi_i x_{s1}} \right)^{\gamma-1} \quad (3.70)$$

e a pressão na culatra:

$$p_B = \frac{\lambda c \phi}{A x_{s1i}} \left(\frac{\phi x_{si}}{\phi_i x_{s1}} \right)^{\gamma-1} R_L \quad (3.71)$$

As equações (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18) não se alteram. Utilizando a condição inicial $u_s = u_{si}$, para $f = f_i$, resulta de (3.18):

$$\begin{aligned} const. &= u_{si} + \frac{DAf_i}{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)} \\ u_s(t) &= u_{si} + \frac{DA(f_i - f)}{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)} \end{aligned} \quad (3.72)$$

A equação (3.21) não se altera. Substituindo (3.21) em (3.15) e usando (3.70) resulta:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{\lambda c \phi \beta R_L}{AD x_{s1}} \left(\frac{x_{s1i} \phi}{x_{s1} \phi_i} \right)^{\gamma-1} \quad (3.73)$$

Como

$$\frac{df}{dt} = u_s \frac{df}{dx_s} \implies \frac{df}{dx_s} = \frac{1}{u_s} \frac{df}{dt}$$

obtendo-se:

$$\frac{df}{dx_s} = -\frac{c \lambda \phi \beta^2 R_L m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)}{A^2 D^2 x_{s1} (f_i - f) \left[\frac{u_{si} \beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)}{DA(f_i - f)} + 1 \right]} \left(\frac{x_{s1i} \phi}{x_{s1} \phi_i} \right)^{\gamma-1} \quad (3.74)$$

Mantendo-se a definição de M , obtém-se de (3.74):

$$\frac{dx_s}{df} = -M (u_{si} c_5 + f_i - f) \left(\frac{x_{s1}}{\phi} \right)^{\gamma} \left(\frac{\phi_i}{x_{s1i}} \right)^{\gamma-1}$$

com:

$$c_5 = \frac{\beta m_2 \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)}{DA}$$

Como:

$$\begin{cases} \phi = (1 - f)(1 + \theta f) \\ x_{s1} = x_s - l_1 \phi \end{cases} \implies \left(\frac{x_{s1}}{\phi} \right)^{\gamma} = \left(\frac{x_s}{\phi} - l_1 \right)^{\gamma}$$

obtendo-se finalmente:

$$\frac{dx_s}{df} = c_7 \left[\frac{x_s}{(1 - f)(1 + \theta f)} - l_1 \right]^{\gamma} (c_6 - f) \quad (3.75)$$

com:

$$\begin{cases} c_6 = u_{si} c_5 + f_i \\ c_7 = -M \left(\frac{\phi_i}{x_{s1i}} \right)^{\gamma-1} \end{cases}$$

A equação anterior não tem solução analítica, podendo ser resolvida com um método numérico explícito. Conhecendo $x_s(f)$, pode-se determinar p_{Bm} , x_{sm} , p_{Bc} , x_c .

Da definição de M resulta:

$$\frac{Mm_2c\lambda}{1 + \frac{c}{3m_2}} = \frac{A^2D^2}{\beta^2 \left(1 + \frac{c}{2m_2}\right)^2}$$

Substituindo-se em (3.72):

$$u_s(t) = u_{si} + (f_i - f) \left(\frac{Mc\lambda}{m_2 + \frac{c}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.76)$$

Para $u_{si} = 0$ e $f_i = 1$, obtém-se da equação (3.33) apresentada anteriormente:

$$u_s^2 = \frac{\lambda c M (1 - f)^2}{m_2 + \frac{c}{3}}$$

Para $f = 0$ obtém-se:

$$u_c = u_{si} + f_i \left(\frac{Mc\lambda}{m_2 + \frac{c}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.77)$$

Com (3.30) e \bar{p} resulta:

$$u_s^2 - u_c^2 = \frac{\lambda c}{m_2 + \frac{c}{3}} \left[\frac{x_{s1i}}{\phi_i(x_c - l_1)} \right]^{\gamma-1} \Phi \quad (3.78)$$

Com (3.77) e (3.78) obtém-se:

$$u_s^2 = \frac{\lambda c}{m_2 + \frac{c}{3}} \left\{ \left[\frac{x_{s1i}}{\phi_i(x_c - l_1)} \right]^{\gamma-1} \Phi + M f_i^2 \right\} + u_{si} \left[u_{si} + 2f_i \left(\frac{\lambda c M}{m_2 + \frac{c}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.79)$$

Para $u_{si} = 0$, $x_{si} = l$ e $f_i = 1$ obtém-se a equação deduzida anteriormente.

$$u_s^2 = \frac{\lambda c}{m_2 + \frac{c}{3}} (M + \Phi)$$

3.5.3 Influência da combustão não instantânea

Se não se considerar que toda a carga propulsora é transformada instantânea em gás da equação da continuidade, obtém-se uma equação para a pressão de grande complexidade matemática que inviabiliza qualquer tentativa de obter soluções analíticas no processo de balística interna, como se mostra seguidamente.

$$\begin{cases} m_g = c\phi \\ \rho = \frac{m_g}{V} \end{cases} \implies \rho = \frac{c\phi}{V} \implies \frac{d\rho}{dt} = c \frac{d}{dt} \left(\frac{\phi}{V} \right) = \frac{c}{V^2} \left(V \frac{d\phi}{dt} - \phi \frac{dV}{dt} \right)$$

$$V = Ax_s \implies \frac{dV}{dt} = A \frac{dx_s}{dt} \implies \frac{d\rho}{dt} = -\frac{c}{V^2} \left(\phi A \frac{dx_s}{dt} - Ax_s \frac{d\phi}{dt} \right)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{V}{c\phi} \frac{c}{V^2} \left(\phi A u_s - Ax_s \frac{d\phi}{dt} \right) = -\frac{Ax_s}{\phi Ax_s} \left(\phi \frac{u_s}{x_s} - \frac{d\phi}{dt} \right) = -\frac{u_s}{x_s} + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{du_g}{dx} = 0 \iff -\frac{u_s}{x_s} + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{du_g}{dx} = 0 \implies \int_0^x \frac{du_g}{dx} dx = \int_0^x \frac{u_s}{x_s} dx - \int_0^x \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dt} dx$$

A equação (3.4) passa então a escrever-se:

$$u_g(x) = \frac{x}{x_s} u_s - \frac{x}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \quad (3.80)$$

Derivando em ordem ao tempo,

$$\begin{cases} \frac{du_g}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{x u_s}{x_s} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{x}{x_s} \frac{du_s}{dt} \text{ (como desenvolvido inicialmente)} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\phi} \right) \frac{d\phi}{dt} + \frac{x}{\phi} \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \phi - x \frac{d\phi}{dt}}{\phi^2} \frac{d\phi}{dt} + \frac{x}{\phi} \frac{d^2\phi}{dt^2} = \left(\frac{1}{\phi} \frac{dx}{dt} - \frac{x}{\phi^2} \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} + \frac{x}{\phi} \frac{d^2\phi}{dt^2} \end{cases}$$

$$-\rho \frac{du_g}{dt} = \frac{dp}{dx} \iff \frac{dp}{dx} = -\rho \frac{x}{x_s} \frac{du_s}{dt} + \frac{\rho}{\phi} \left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{x}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} + x \frac{d^2\phi}{dt^2} \right]$$

Com: $u_g - \frac{x}{\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{x u_s}{x_s} - \frac{2x}{\phi} \frac{d\phi}{dt}$ de 3.80.

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \frac{x}{x_s} \frac{du_s}{dt} + \frac{\rho}{\phi} \left[\left(\frac{x u_s}{x_s} - \frac{2x}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} + x \frac{d^2\phi}{dt^2} \right]$$

Integrando a equação anterior:

$$p = -\frac{\rho}{2x_s} \frac{du_s}{dt} x^2 + \frac{\rho}{\phi} \frac{x^2}{2} \left[\left(\frac{u_s}{x_s} - \frac{2}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] + const.$$

Note-se que:

$$\frac{\rho}{x_s} = \frac{m_g}{x_s V} = \frac{c\phi}{Ax_s^2}; \quad \frac{\rho}{\phi} = \frac{m_g}{\phi V} = \frac{c\phi}{\phi Ax_s} = \frac{c}{Ax_s}$$

Substituindo na equação anterior resulta:

$$p = -\frac{c\phi}{2A} \left(\frac{x}{x_s} \right)^2 \frac{du_s}{dt} + \frac{c}{2A} \left(\frac{x}{x_s} \right)^2 \left[\left(u_s - \frac{2x_s}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} + x_s \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] + const. \quad (3.81)$$

Partindo-se de (3.7),

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{p_s A}{m_2} \implies -\frac{c\phi}{2A} \frac{du_s}{dt} = -\frac{c\phi p_s}{2m_2}$$

$$\implies p = -\frac{c\phi p_s}{2m_2} \left(\frac{x}{x_s} \right)^2 + \frac{c}{2A} \left(\frac{x}{x_s} \right)^2 \left[\left(u_s - \frac{2x_s}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} + x_s \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] + const.$$

Para $x = x_s \implies p(x_s) = p_s$ obtendo-se

$$const. = p_s + \frac{c\phi p_s}{2m_2} - \frac{c}{2A} \left[\left(u_s - \frac{2x_s}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} + x_s \frac{d^2\phi}{dt^2} \right]$$

Substituindo na equação de p resulta:

$$p = p_s \left\{ 1 + \frac{c\phi}{2m_2} \left[1 - \left(\frac{x}{x_s} \right)^2 \right] \right\} + \frac{c}{2A} \left[\left(u_s - \frac{2x_s}{\phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \frac{d\phi}{dt} + x_s \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] \left[\left(\frac{x}{x_s} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.82)$$

Para $\phi = 1$, ou seja, $m_g = c$ obtém-se a equação deduzida anteriormente. A equação (3.82) é demasiado complicada para ser utilizada. O resultado seria ainda mais complicado se se tivesse considerado em vez de V , o volume apenas ocupado pelo gás, ou seja, $V_i = \rho_p(c - m_g)$, sendo ρ_p a massa específica da pólvora e V_i o volume inicial da câmara de combustão sem carga propulsora.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Introdução

Feito o desenvolvimento do modelo é realizada a recolha de resultados, seguida de uma análise de sensibilidade de vários parâmetros balísticos.

Considera-se o caso de $\theta = 0$, uma vez que, a carga estudada foi a M3A1 *green bag*. Vai-se começar o estudo sem considerar o efeito do atrito, de modo a que o seu efeito possa ser contabilizado na análise de sensibilidade.

Antes de apresentar resultados, importa introduzir dois conceitos que são utilizados em balística interna. São eles, a **eficiência balística** (ε_b) e a **eficiência piezométrica** (ε_p). A eficiência balística é a razão entre a energia cinética do projétil à saída do tubo da arma e a energia potencial total da carga propulsora [1, 39]:

$$\varepsilon_b = \frac{E_{c_{proj\acute{e}til}}}{E_{P_{carga}}} = \frac{\frac{1}{2}m_2V^2}{\frac{\lambda c}{\gamma-1}} \quad (4.1)$$

A eficiência piezométrica é a razão entre a pressão média ao longo de todo o processo de balística interna e a pressão máxima na culatra [1, 39].

$$\varepsilon_p = \frac{\bar{p}}{p_{B_m}} \quad (4.2)$$

Um aumento de ε_b implica um deslocamento do ponto de *burnout* em direção à culatra. Um aumento de ε_p implica que o *burnout* se desloca em direção à tulipa do tubo. O aumento da eficiência piezométrica também implica uma diminuição da razão entre o volume interior total do tubo do obus e o volume inicial da câmara de combustão. Por outras palavras, armas de elevado calibre têm grandes câmaras de combustão e consomem uma grande quantidade de carga explosiva. Valores típicos de ε_p variam entre 50% e 60%, enquanto que $\varepsilon_b \approx 33\%$ [1, 39].

4.2 Definição da Carga Ideal

Na análise de sensibilidade, vai ser escolhida a carga (1 a 5) da carga M3A1 *green bag* para a qual o modelo apresenta melhores resultados, usando como referência os valores do *software* PRODAS e das tábuas de tiro. No texto que se segue, esta carga será designada por **Carga Ideal**. Os parâmetros utilizados para a escolha da carga ideal são a eficiência piezométrica (ε_p), a eficiência balística (ε_b), a velocidade à saída e a pressão máxima na base do projétil.

No caso da pressão, é utilizado o valor de referência do *software* PRODAS considerando a cinta de travamento definida neste *software* para o projétil M107 (cinta de 15.24 mm de comprimento).

Por fim, para a velocidade à saída, usa-se como referência as velocidades fornecidas pelas tábuas de tiro utilizadas no Exército Português, no obus M114 A1 com o projétil M107 [41].

Os resultados apresentados em seguida não têm em conta o atrito ou o aumento de massa de modo a simular a cinta de travamento e a resistência do ar, utilizando-se por isso a massa real do projétil M107 (aproximadamente 43.09 kg, 95 lbm).

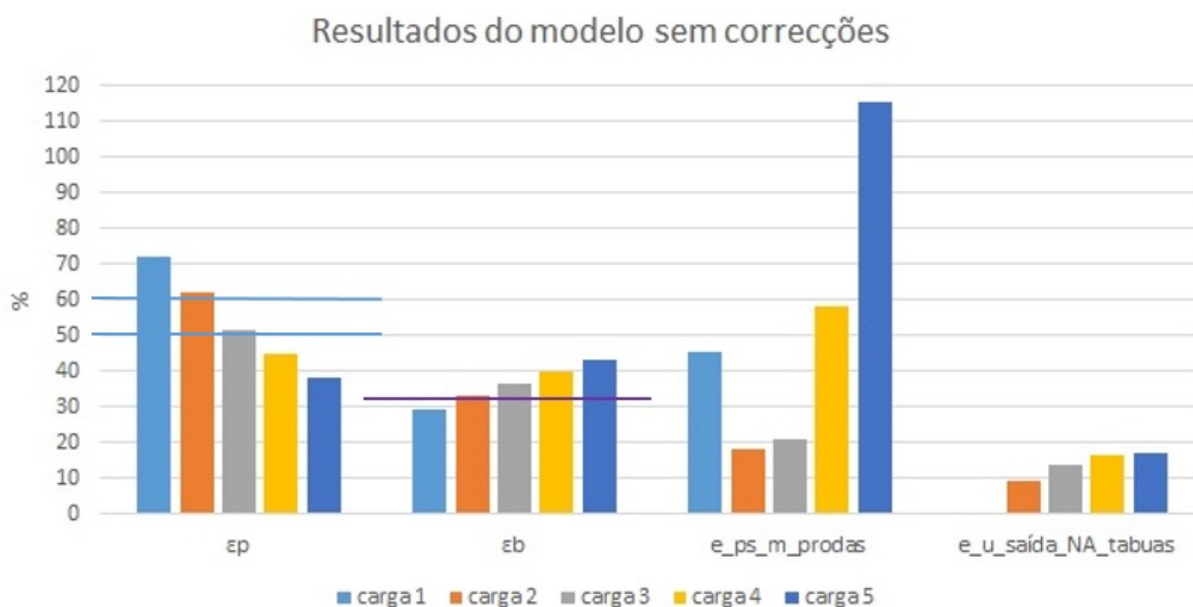


Figura 4.1: Resultados do modelo para várias cargas, não considerando correcções do parâmetro balístico central (M), ou variações de massa para simular atrito, cinta de travamento e resistência do ar

Os parâmetros de análise são as eficiências piezométrica e balística, e os erros relativos em módulo da pressão máxima (na base do projétil) e velocidade à saída.

Tabela 4.1: Pressão máxima e velocidade à saída: modelo e valores de referência para diversas cargas de pólvora

	Pressão máxima ($p_{s\ m}$) [MPa]		velocidade de saída ($u_{s\ saída}$) [m/s]	
	modelo	PRODAS	modelo	Tábuas de tiro
carga 1	22.50	41.45	212.77	211.80
carga 2	42.64	52.17	260.28	237.70
carga 3	83.43	69.06	315.91	277.40
carga 4	145.90	92.30	370.70	318.50
carga 5	273.34	126.87	440.21	374.90

Da figura 4.1 as cargas 4 e 5 devem ser excluídas, pois os erros relativos na pressão são superiores a 50% e 100%, respetivamente. São também as cargas que apresentam um maior desvio relativamente à velocidade na saída. Em ambas, a eficiência piezométrica é inferior à sugerida em [1] e a eficiência balística encontra-se aproximadamente nos 40%, consideravelmente superior ao valor de referência.

A carga 1 apresenta um elevado erro relativo na pressão máxima comparado com as cargas 2 e 3. Contudo, é a que apresenta um menor erro de velocidade à saída, pelo que não é excluída à partida. As cargas 2 e 3 são as que apresentam melhores resultados tanto nas eficiências como na pressão.

Para simular o efeito da cinta de travamento e da resistência do ar, obtendo assim uma maior concordância entre o modelo e os valores de referência, incrementou-se a massa do projétil. As figuras 4.2 e 4.3 mostram os erros relativos na velocidade à saída e na pressão máxima, em função deste incremento. Tanto para a carga 1 como para a carga 3, o incremento em massa tem efeitos antagónicos na pressão e velocidade. O melhor comportamento observa-se para a carga 2, conseguindo-se um erro quase nulo na velocidade e pressão, para um incremento de 24.21%, ou seja, para uma massa do projétil de 53.5 kg (tabelas 4.2 e 4.3). A tabela 4.2 mostra que um ligeiro aumento da massa contribui ainda para uma redução do erro na velocidade. Com esta análise escolheu-se a carga 2 como carga ideal.

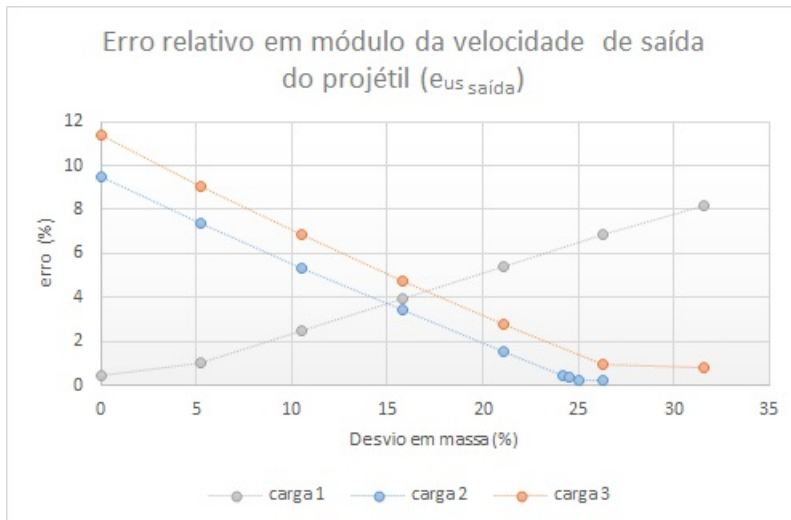


Figura 4.2: Erro da velocidade à saída em função do desvio em massa

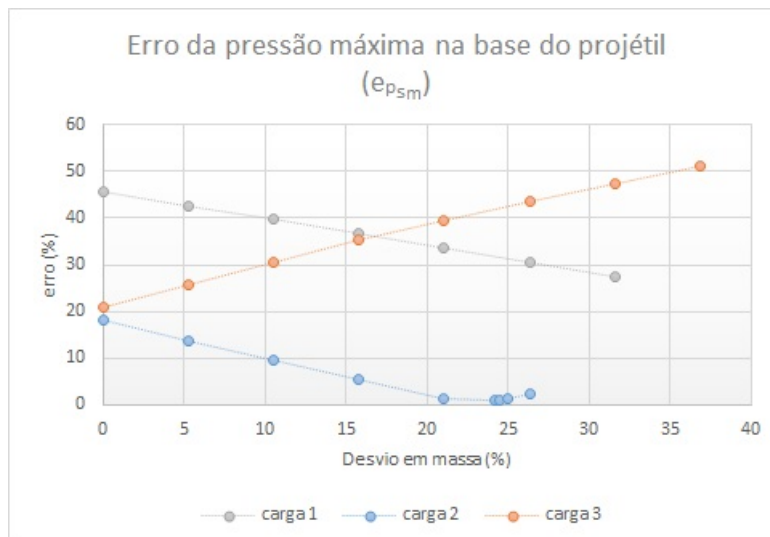


Figura 4.3: Erro da pressão máxima na base do projétil em função do desvio em massa

Tabela 4.2: Evolução dos erros de $u_{s\text{saída}}$ e p_{sm} para carga 2 em função do desvio em massa

Desvio em massa (%)	erro $u_{s\text{saída}}$ (%)	erro p_{sm} (%)
0	9.50	18.27
5.26	7.38	13.74
10.53	5.34	9.43
15.79	3.40	5.30
21.05	1.54	1.36
24.21	0.47	0.92
24.50	0.37	1.12
25.00	0.21	1.48
26.32	0.23	2.40

Apresenta-se finalmente os resultados para a carga 2 feita a correção em massa de 24.21%:

Tabela 4.3: Resultados Carga 2, com desvio em massa de 24.21%

Carga 2	$m_2 = 53.52 \text{ kg (118 lbm)}$
ε_p	55.58 %
ε_b	35.07 %
$e_{u_{s\text{saída}}}$	0.47 %
$e_{p_{sm}}$	0.92 %
Desvio em massa	24.21 %
p_{sm}	52.65 MPa
$u_{s\text{saída}}$	238.92 m/s

4.3 Análise da aproximação de gás perfeito

Após a escolha da carga 2 como carga ideal, segue-se a análise de sensibilidade. Começa-se por estudar a influência de considerar o gás resultante da combustão da pólvora como gás perfeito, ou em alternativa, satisfazendo a equação de estado de Noble-Abel.

É importante referir que na análise de sensibilidade não é considerado o desvio em massa utilizado para a escolha da carga ideal.

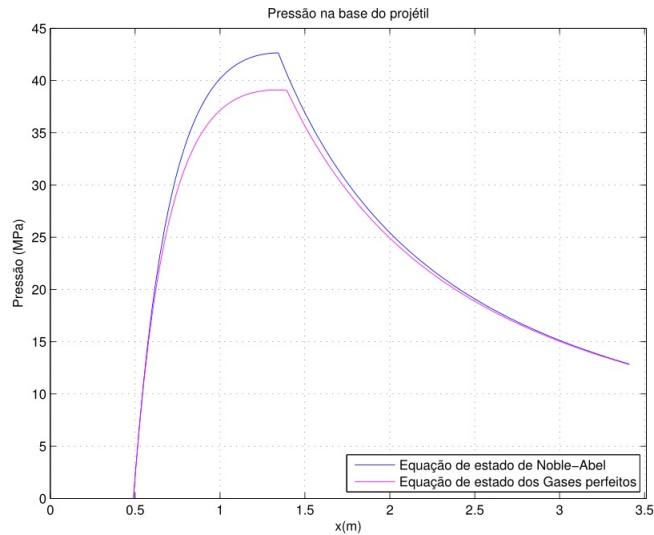


Figura 4.4: Pressão na base do projétil (p_s) considerando gás perfeito e gás real

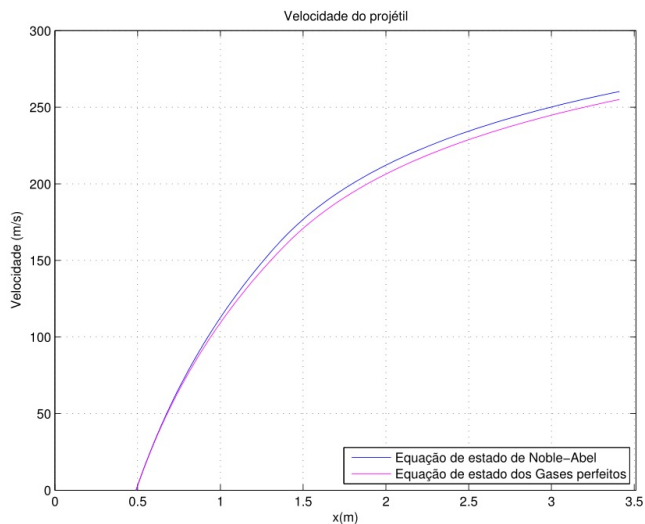


Figura 4.5: Velocidade (u_s) considerando gás perfeito e gás real

Como seria de esperar, olhando para as equações de estado de Noble-Abel e dos gases perfeitos, nota-se um aumento de pressão máxima e de velocidade à saída quando não se considera o gás perfeito (figuras 4.4 e 4.5). A alteração da pressão ainda é significativa (aproximadamente 9%), sendo o desvio na velocidade apenas de 2% (figura 4.6).

Quanto às eficiências, estas também são afetadas pelo facto de se considerar o covolume do gás, apresentando uma alteração superior a 3%. Outra alteração significativa é a posição do projétil no momento em que ocorre o *burnout* ($x_s = x_c$), verificando-se que ocorre mais cedo se se considerar a equação de estado de Noble-Abel, o que está de acordo com o aumento de ε_b (figura 4.6).

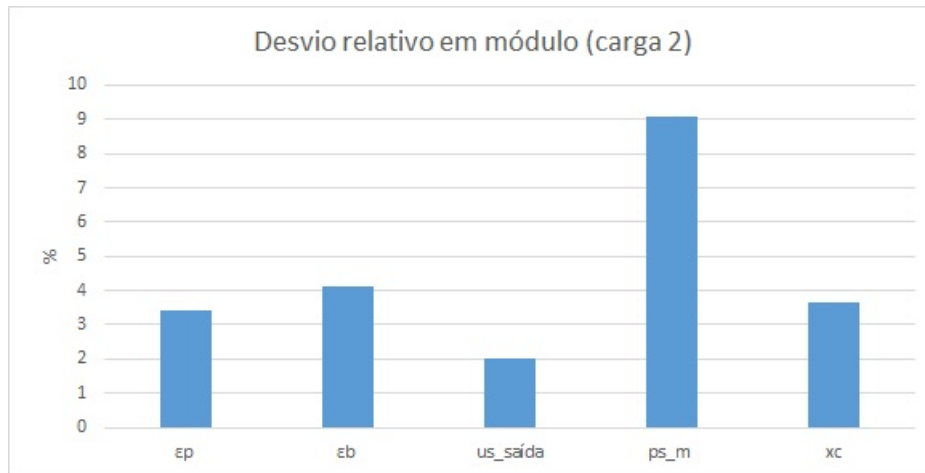


Figura 4.6: Desvio relativo à situação de gás perfeito em módulo

4.4 Análise da influência do parâmetro θ

De modo a estudar a influência da geometria do grão de pólvora, fez-se uma análise considerando a pólvora que constitui a carga M4A2 *white bag*. Trata-se de um grão multiperfurado, progressivo, com $\theta = -0.172$. Considerou-se a massa de pólvora da carga 2, para que seja possível fazer a comparação. As propriedades da pólvora utilizada foram fornecidas pelo PRODAS, exceto o valor do fator de forma, o qual foi retirado de [10].

Com este formato de grão verificou-se que não ocorre *burnout* enquanto o projétil está no interior do tubo, o que é sempre de evitar porque não se aproveita a totalidade da energia potencial da carga propulsora. A continuação da combustão após a saída do projétil aumenta também a emissão de fumos, contribuindo para uma fácil localização do obus, o que não é taticamente desejável. Por este motivo, não se analisou, neste caso, as alterações nas eficiências. Apresentam-se, contudo, os gráficos referentes à pressão e velocidade (figuras 4.7 e 4.8).

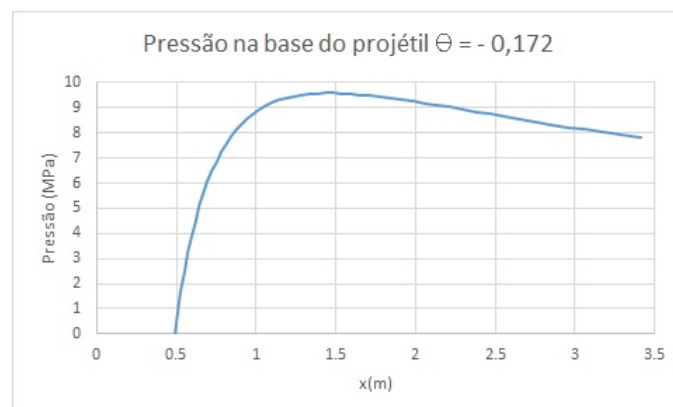


Figura 4.7: Pressão na base do projétil com grão de geometria progressiva

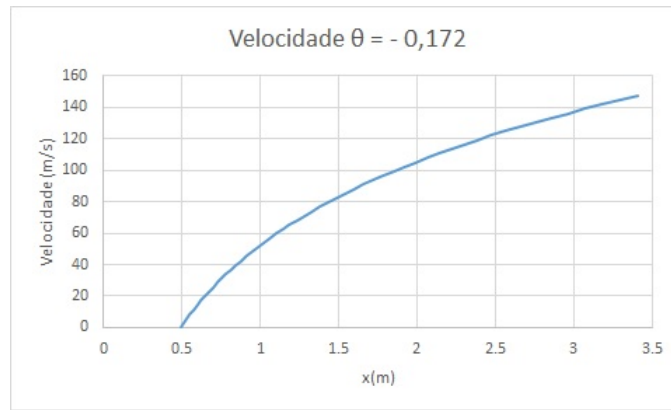


Figura 4.8: Velocidade do projétil com grão de geometria progressiva

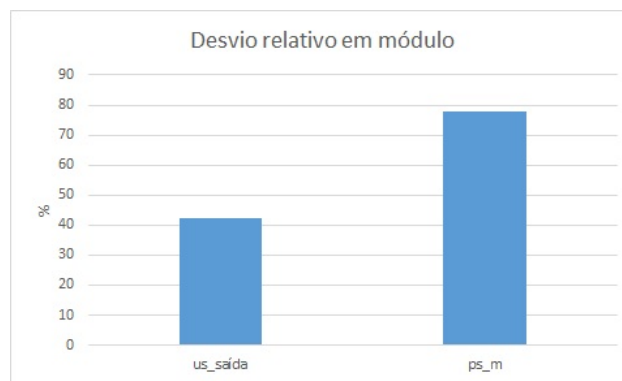


Figura 4.9: Desvio relativo em módulo de grão de geometria progressiva em relação ao grão de geometria neutra, com carga 2

Apesar do *burnout* ocorrer fora do obus, a existência de um máximo na pressão explica-se devido a dois efeitos antagônicos: a expansão da câmara de combustão, que tende a reduzir a pressão, e a inflamação da carga propulsora, que tende a aumentá-la. Este aumento, como se verá em seguida, depende substancialmente do valor da taxa de queima do grão de pólvora (parâmetro β). Comparando a pressão máxima para $\theta = 0$ e $\theta < 0$, observa-se um valor inferior neste último caso (figura 4.9), o que se explica tendo em conta que se trata de um grão de pólvora de geometria progressiva (ver 2.3).

4.5 Análise da influência do parâmetro β

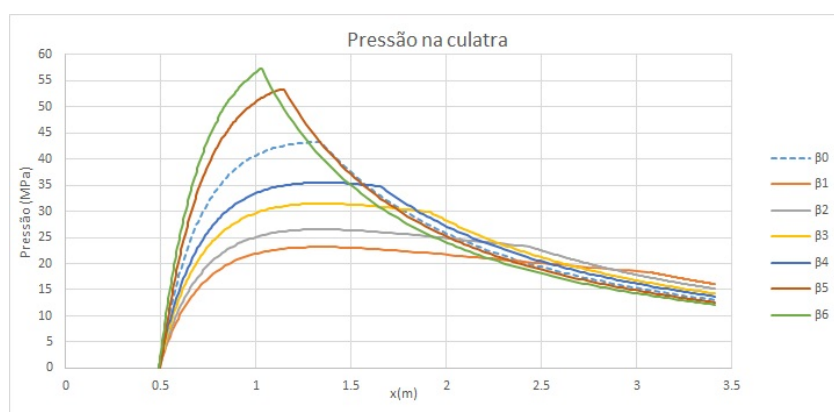
Fez-se uma análise de sensibilidade à taxa de queima do grão de pólvora β , a partir do valor de referência para a carga M3A1, fornecido pela base de dados do *software* PRODAS.

Tabela 4.4: Valores de β

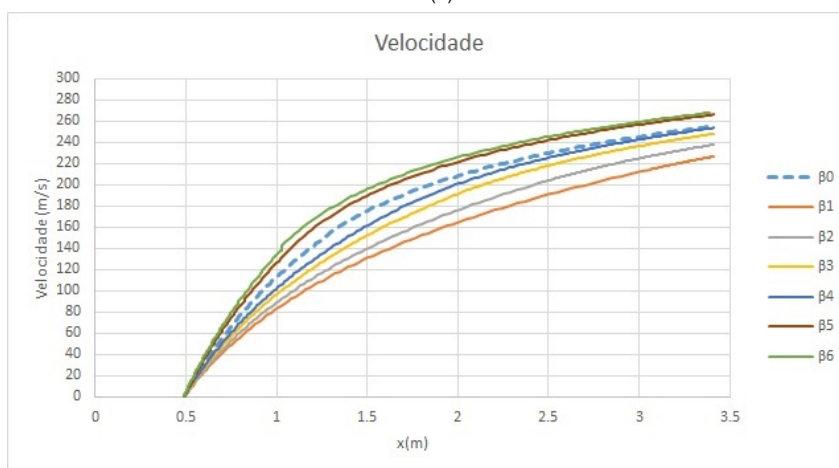
β_0	0.0011099	m/s/MPa	Desvio em módulo (%)
β_1	0.000828890	m/s/MPa	25.32
β_2	0.000884150	m/s/MPa	20.34
β_3	0.000957829	m/s/MPa	13.70
β_4	0.001013088	m/s/MPa	8.72
β_5	0.001234126	m/s/MPa	11.19
β_6	0.001289385	m/s/MPa	16.17

O valor de β_0 corresponde à carga M3A1 *green bag* (situação padrão), situando-se entre β_4 e β_5 .

Analisando-se a curva da pressão na culatra e da velocidade do projétil (figura 4.10), avaliou-se os desvios relativos à situação padrão (β_0), das eficiências, velocidade à saída, pressão máxima e posição do *burnout*, em relação à situação padrão (figura 4.11).



(a)



(b)

Figura 4.10: Alteração de β . 4.10a) Pressão na culatra para vários coeficientes β . 4.10b) Velocidade para vários coeficientes β .

Analisando a evolução da pressão com o deslocamento do projétil, os resultados obtidos mostram que quanto maior for a taxa de queima do grão de pólvora maior é a pressão máxima atingida e o *burnout* ocorre com o projétil mais perto da culatra. Por outro lado, uma maior pressão máxima leva a uma menor pressão no momento da saída do projétil, porque aumenta o decaimento da curva de pressão. De reparar também que para elevados valores de β a pressão máxima ocorre no *burnout*, o que já não é verdade para baixos valores deste parâmetro (figura 4.10a). Quanto a alteração da velocidade com β , é de notar que um aumento de β implica uma maior velocidade à saída (figura 3.18).

No gráfico que se segue, analisa-se a alteração dos parâmetros referidos anteriormente, em comparação a situação de β_0 .

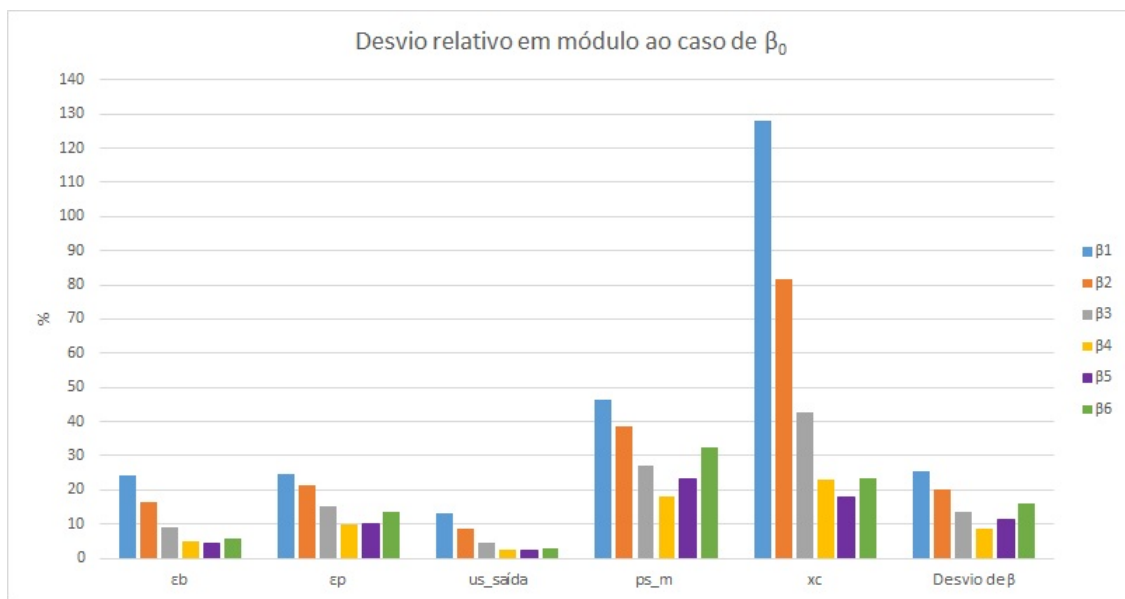


Figura 4.11: Desvio relativo em módulo ao caso de β_0 , aos diversos parâmetros em estudo

O parâmetro mais afetado é a posição onde ocorre o *burnout* (x_c), e a pressão máxima atingida. Uma redução de aproximadamente 25% de β (β_2) provoca uma alteração muito semelhante nas eficiências e na pressão à saída, mas por sua vez o *burnout* ocorre muito mais tarde praticamente antes da saída do projétil e a pressão máxima tem uma redução de aproximadamente 45%. Também com o aumento de 16% em β (β_6), os valores de pressão máxima e de posição de *burnout* são os que sofrem um maior desvio relativo à situação de β_0 .

4.6 Análise da influência do atrito

Até ao momento o atrito entre as superfícies em contacto foi desprezado, contudo nas deduções apresentadas este foi considerado através de uma aumento de massa do projétil. De acordo com [42], o material predominante na composição da cinta de travamento é cobre e, como referido na secção 2.2, o material do tubo é aço, retirando-se de [43] um coeficiente de atrito dinâmico de $\mu = 0.36$.

Existem estudos em que se considera μ variável com o deslocamento do projétil no interior do tubo da

arma (ver 2.4), contudo por falta de informação o valor é considerado constante ao longo de todo o processo de balística interna.

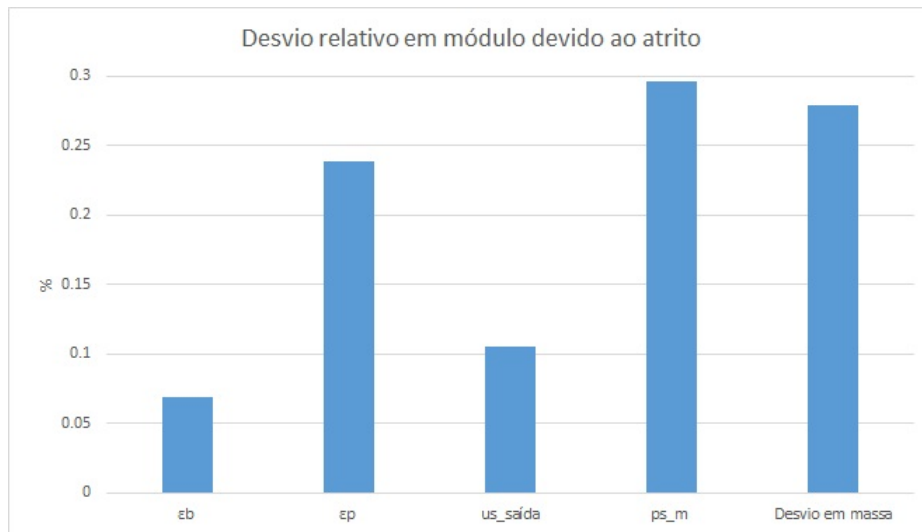


Figura 4.12: Desvio relativo em módulo devido ao atrito

As alterações nos resultados foram pouco significativas, visto que o atrito equivale a um aumento em massa do projétil de aproximadamente 116 g (figura 4.12). Novamente a pressão máxima é o parâmetro mais influenciado por esta alteração, apesar da alteração ser pouco significativa (aproximadamente 0.3%).

4.7 Outros parâmetros

Analisa-se em seguida os resultados obtidos, considerado a equação (3.68), com \bar{p} em vez de p_B , o que equivale a usar M_1 em vez de M (ver 3.5.1). A figura 4.13 mostra desvios relativos máximos de 1%.

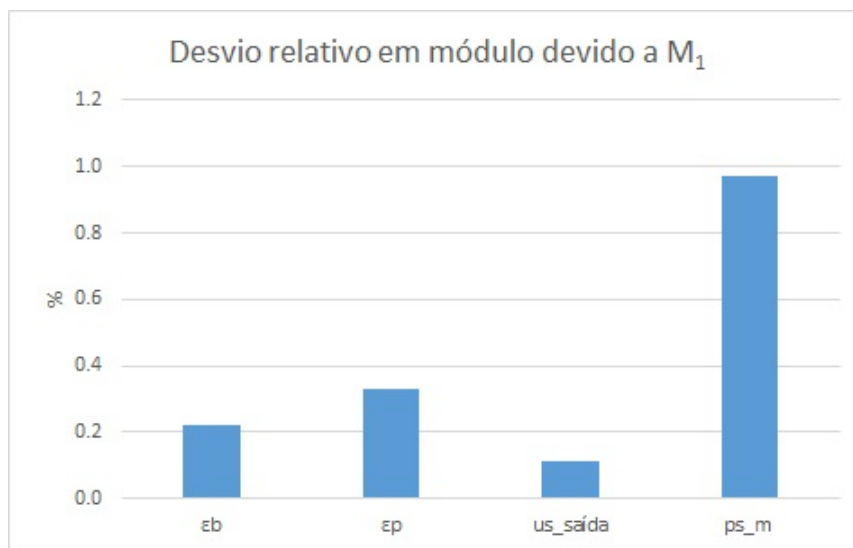


Figura 4.13: Desvio relativo em módulo devido à correção no parâmetro balístico central

Para a pressão máxima esta alteração é uma redução de 1%, o que está de acordo com as expectativas,

pois a pressão média é menor que a pressão na culatra.

Conjugando as duas correções anteriores (M_1 e atrito), é possível obter o valor de incremento em massa que minimiza o desvio relativo em relação aos valores de referência, melhorando deste modo os resultados obtidos em 4.3.

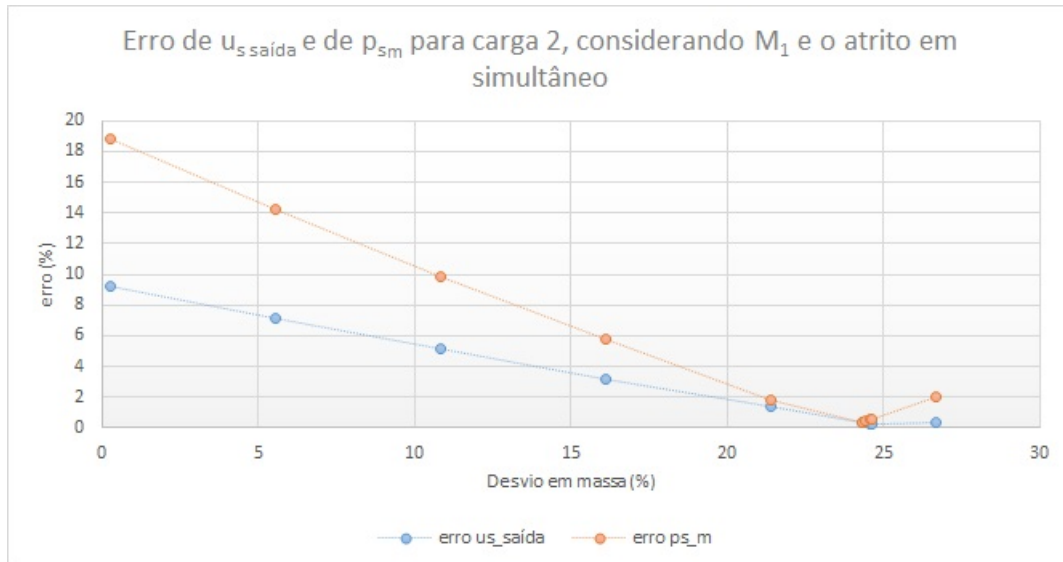


Figura 4.14: Erro de $u_{s\text{saída}}$ e p_{sm} para carga 2 em função do desvio em massa, considerando M_1 e atrito

A figura 4.14 mostra que o incremento ideal situa-se entre 24 e 25%. Fazendo um zoom, a figura 3.24 e a tabela 4.5 mostram que este incremento é de 24.35% em vez do valor de 24.21% obtido anteriormente.

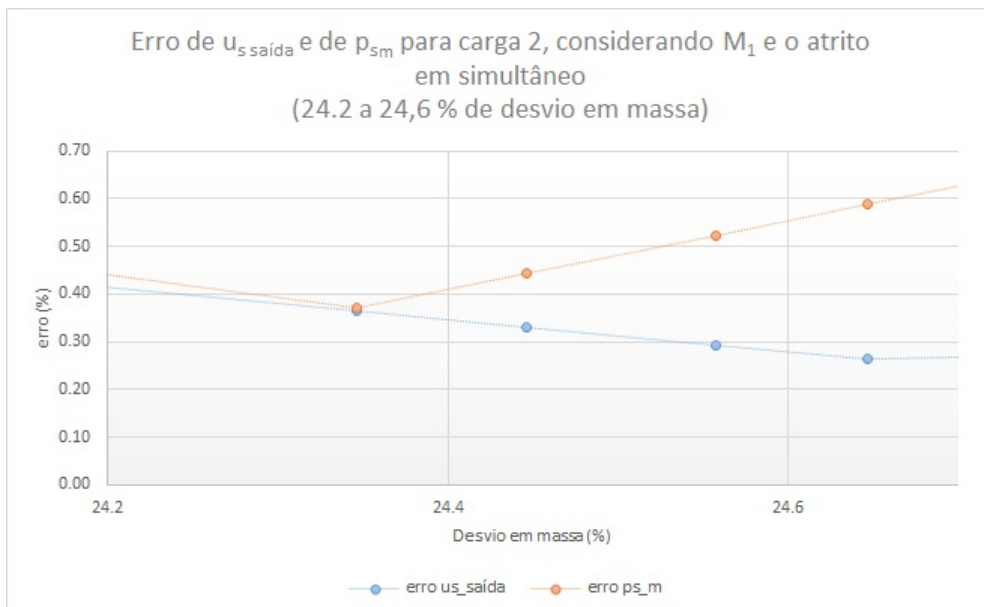


Figura 4.15: Erro de $u_{s\text{saída}}$ e p_{sm} para carga 2 em função do desvio em massa (24.2 a 24.6%), considerando M_1 e atrito

Note-se que um ligeiro aumento do desvio em massa continua a reduzir o erro relativo da velocidade, enquanto que o erro relativo da pressão começa a aumentar (tabela 4.5).

Tabela 4.5: Erro em função do desvio em massa

Desvio de massa (%)	erro de $u_{s_{saída}}$ (%)	erro de p_{sm} (%)
0.28	9.27	18.81
5.56	7.16	14.25
10.8	5.14	9.900
16.11	3.21	5.74
21.39	1.36	1.77
24.35	0.36	0.37
24.45	0.33	0.44
24.56	0.29	0.52
24.65	0.26	0.59
26.67	0.40	2.02

Como se vê na tabela 4.6, em que se faz um resumo dos resultados da presente solução, os valores mostram que as eficiências se encontram também dentro dos valores sugeridos.

Tabela 4.6: Resultados: melhor solução

m_2	53.43 kg (117.8 lbm)
ε_p	55.82 %
ε_b	35.02 %
$e_{u_{s_{saída}}}$	0.36 %
$e_{p_{sm}}$	0.37 %
Desvio em massa	24.35 %
p_{sm}	52.37 MPa
$u_{s_{saída}}$	238.57 m/s

4.8 Resultados com cinta de travamento e comparação com o *software* PRODAS

Com o auxílio do *Software Mathematica*, foi feita uma análise complementar ao estudo anteriormente apresentado. Partindo do conhecimento da pressão inicial p_0 , consegue-se determinar a evolução da pressão e da velocidade, sem recorrer a um aumento de massa do projétil para simular o efeito da cinta de travamento (ver 3.4). Não tendo nenhum dispositivo capaz de medir esta pressão inicial, utilizou-se o valor apresentado pelo *software* PRODAS no instante imediatamente anterior ao deslocamento do projétil. Na análise que se

segue, considerou-se um valor de $p_0 = 4.44 \text{ MPa}$ o que implica, devido à equação de estado, um valor de $f_0 = 0.9606$.

É feita uma comparação simultânea dos modelos desenvolvidos apresentando-se nas figuras 4.16 e 4.17, as curvas de velocidade e pressão das diversas soluções: *software* PRODAS, modelo desenvolvido sem correção em massa do projétil e sem atrito ($f_0 = 1$), modelo com a correção da massa do projétil, considerando também as correções de M_1 e atrito ($f_0 = 1$, melhor solução), e por fim o modelo com $f_0 = 0.9606$.

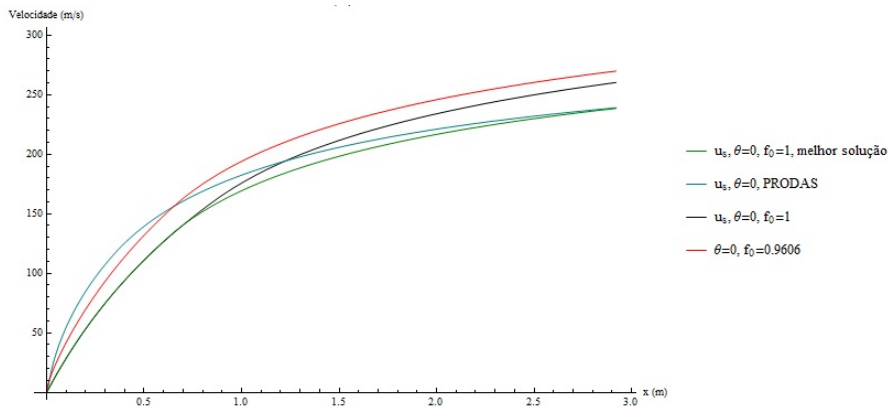


Figura 4.16: Comparação simultânea de modelos - Velocidade do projétil.

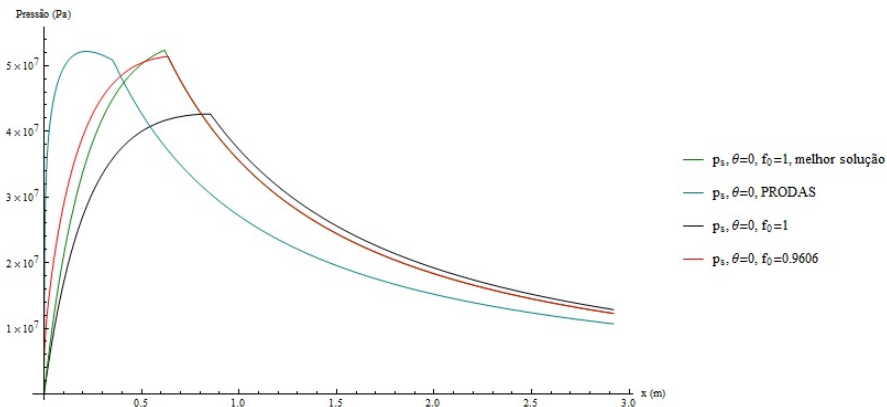


Figura 4.17: Comparação simultânea de modelos - Pressão na base do projétil.

Utilizando como referência a solução do PRODAS (neste caso também para a velocidade, de modo a ter a curva da velocidade durante todo o processo e não apenas o seu valor no instante em que o projétil sai do obus) conclui-se que, em relação à velocidade, a melhor solução continua a ser obtida com a correção em massa do projétil, sendo a pior solução, a que corresponde a $f_0 = 0.9606$, com um erro relativo à saída de 13.13%. Para a pressão obtém-se, no entanto, uma boa concordância entre a solução com correção em massa e com $f_0 = 0.9606$, sendo o erro relativo na pressão máxima deste em relação ao PRODAS igual a 1.49%.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalho futuro

Para o desenvolvimento de armamento, quer do sistema propulsor, quer do projétil, é necessária uma boa compreensão dos fenómenos que ocorrem enquanto o projétil se desloca no interior da arma de fogo, de modo a garantir a segurança dos utilizadores, bem como a velocidade de saída do projétil.

A necessidade de compreender e contabilizar os fenómenos de balística interna não constitui uma tarefa fácil, sendo uma área de estudo que iniciou o seu desenvolvimento há já alguns séculos. Devido à complexidade das equações que descrevem os processos envolvidos, a obtenção de resultados exige o recurso a computadores. As técnicas de aquisição de dados experimentais, tarefa essencial na validação dos também têm evoluído significativamente.

No presente trabalho desenvolveu-se um modelo matemático com o objetivo de simular o disparo efetuado por um obus de artilharia, utilizando-se os conhecimentos adquiridos nas disciplinas de termodinâmica e mecânica dos fluidos. Considerou-se como referência o livro BALLISTICS [1], tendo-se em seguida generalizado a análise de Carlucci para o caso de um gás real.

O projétil considerado neste trabalho foi o M107 155 mm, de modo a poder comparar os resultados numéricos obtidos com valores já tabelados. Durante o decorrer do trabalho foi possível assistir, no campo militar de Santa Margarida, ao disparo do Obus M114 A1 155 mm/23, com o projétil M107 155 mm, utilizando a carga propulsora M3A1 *green bag*.

Concluído o modelo, a primeira preocupação foi valida-lo com os resultados de referência, tanto de forma qualitativa, através das curvas de pressão e velocidade, como também a nível quantitativo, comparando os resultados com os valores das tábuas de tiro e do *software* PRODAS

Numa primeira análise dos resultados do modelo, verificou-se que sem aplicar correções à massa os valores apresentam erros significativos, o que está de acordo com o esperado, uma vez que, o modelo não simula o efeito da cinta de travamento. Contabilizando este efeito na forma de um aumento de massa do projétil. Verificou-se que o modelo melhorou significativamente, tendo-se escolhido a carga 2 da carga M3A1 *green bag*, como a carga ideal. Validado o modelo para esta carga, seguiu-se uma análise de sensibilidade de modo a verificar a importância de alguns parâmetros balísticos, nomeadamente, a hipótese de gás perfeito,

a influência da geometria do grão de pólvora e da taxa de queima.

Em relação à hipótese de gás perfeito verificou-se que a aplicação da equação de estado dos gases perfeitos, em ambientes de elevadas pressões, não é a melhor opção a tomar. Obteve-se uma alteração significativa na pressão máxima (aproximadamente 9%) quando se considerou a equação de estado de Noble-Abel, o que faz sentido, pois, esta equação tem em conta o volume ocupado pelas moléculas do gás.

Já com a alteração da geometria do grão de pólvora, considerando a mesma massa de pólvora que a carga 2, verificou-se a não ocorrência do *burnout* enquanto o projétil se encontra no interior do tubo do obus. Este fenómeno indesejado não permite aproveitar a totalidade da energia potencial da pólvora, uma vez que, momentos após a saída do projétil pelo tubo do obus, esta ainda não foi totalmente consumida.

Um parâmetro de fundamental importância no estudo realizado é o coeficiente de taxa de queima β . Uma maior taxa de queima implica valores de pressão máxima e de velocidade à saída mais elevados, visto que, aumenta a quantidade de gases que se libertam nos primeiros instantes do movimento do projétil. Caso se reduza o valor de β , a pressão máxima é inferior, porém a pressão à saída é superior, o que se justifica pela menor velocidade na transformação de carga sólida em gás, levando a ocorrência do *burnout* mais próximo da saída.

Com o objetivo de se aproximar ainda mais os resultados obtidos dos valores de referência, representou-se o atrito através de um aumento em massa do projétil.

Considerou-se ainda o efeito da cinta de travamento, alterando para tal a condição inicial do modelo. Os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que, não se corrigiu a massa do projétil, embora os resultados com a correção em massa sejam mais precisos.

A principal limitação do modelo é a impossibilidade de representar exatamente o efeito da cinta de travamento, elemento chave na pressão que se cria na câmara de combustão e na estabilidade de voo do projétil através do movimento de rotação induzido quando se desloca no interior do tubo estriado. O coeficiente da taxa de queima é constante, e não função da pressão, é outra limitação importante.

Como trabalho futuro pretende-se generalizar a análise efetuada para outras cargas e geometrias de grão de pólvora. O investimento em sistemas de aquisição de dados é também fundamental num país onde o desenvolvimento de modelos de balística começa a dar os primeiros passos. A este propósito a aquisição do *Internal Pressure Gauge* B251 e respetiva formação de pessoal técnico especializado, será um passo fundamental na obtenção da pressão atingida na câmara de combustão imediatamente antes do rebentamento da cinta de travamento e, de um modo geral na validação do modelo.

Bibliografia

- [1] D. E. Carlucci and S. S. Jacobson, *BALLISTICS, Theory and Design of Guns and Ammunition*, S. Edition, Ed. CRC Press, 2014.
- [2] *Military Analysis Network*, Federation of American Scientists Std. [Online]. Available: <http://fas.org/man/index.html>
- [3] *Slides da Unidade Curricular: Balística*, Academia Militar Std., 2013.
- [4] [Online]. Available: <http://www.exercito.pt/EP/Paginas/Missao.aspx>
- [5] C. Castanheira, *FABRICO E ENSAIO BALÍSTICO EM CONDIÇÕES REAIS DE CONCEITO MELHORADO DE UM PROJÉTEL DE DETONAÇÃO MECÂNICA*. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2012.
- [6] J. Calado, *PROJECTO DE UM PROJÉTEL DE CALIBRE 155mm PARA COMBATE A INCÊNDIOS FLORESTAIS*. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2013.
- [7] *Manual do Obus 155mm M114 A1*, Exército Português.
- [8] *Operator and Organizational Maintenance Manual Howitzer, Medium, Towed: 155mm, M114 and M114A1*, HEADQUARTERS, Department of the army, Washington, March 1965.
- [9] 7 2014. [Online]. Available: http://www.bravecannons.org/the_gun/munitions.html
- [10] T. C. E. J. M. D. C. Álvares, *Balística Interna*, O. G. da Academia Militar, Ed. Academia Militar, 1964.
- [11] P. Coelho and M. Costa, *Combustão*, Orion, Ed. Instituto Superior Técnico, 2013.
- [12] R. T. Miner, *Computational Interior Ballistics Modeling*. The University of New Mexico, 2012.
- [13] D. D. B. M. B. B. Michael J. Moran, Howard N. Shapiro, *FUNDAMENTALS OF ENGINEERING THERMODYNAMICS, SEVENTH EDITION*, I. John Wiley & Sons, Ed. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [14] S. B. D. V. Isabelle Poulin, Sonia Thiboutot, *Production of dioxins and furans from the burning of excess gun propellant*, D. V. T. 2009-365, Ed. Defence R&D Canada Valcartier, 2011.
- [15] [Online]. Available: <http://www.generalequipment.info/155MM%20AMMUNITION.htm>
- [16] *155MM M107 HE*, GENERAL DYNAMICS, Ordenance and Tactical Systems Std. [Online]. Available: http://www.gd-ots.com/155mm_M107.html

- [17] M. Lisov, "Modeling wear mechanism of artillery projectiles rotating band using variable parameters of internal ballistic process," *Scientific-Technical Review*, vol. 2, pp. 11–15, 2006.
- [18] T. Matsuyama, "Friction and wear mechanism at high sliding speeds," in *19 th International Symposium of Ballistics*, 2001.
- [19] R. R. M. Schupfer, K. Steinhoff, "New materials for large-caliber rotating bands for high charges," in *19 th International Symposium of Ballistics*, 2001.
- [20] *Military Explosives*, HEADQUARTERS, Department of the army, Washington, September 1984.
- [21] C. Ponting, *Gunpowder*. chatto & windus, 2005.
- [22] [Online]. Available: <http://spiff.rit.edu/classes/phys369/workshops/w10b/robins.html>
- [23] T.-S. R. a. D.-W. C. Jin-Sung Jang, Hyung-Gun Sung, "Numerical analysis of interior ballistics through eulerian-lagrangian approach," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 27, p. 2351 2357, 2013.
- [24] C. B. Titica Vasile, Doru Safta, "The fundamental problem solving of interior ballistics using the physical law of powder burning," *AARMS*, vol. 3, p. 407 a 414, 2004.
- [25] H. E. Mahmoud Rashad, Xiaobing Zhang, "Interior ballistic two-phase flow model of guided-projectile gun system utilizing stick propellant charge," *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, vol. 9, pp. 124–135, 2014.
- [26] H. E. S. Mahmoud Rashad, Xio-bing Zhang, "Interior ballistics two-phase reactive flow model applied to large caliber guided projectile-gun system," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 2014, p. 10, 2014.
- [27] P. v. d. M. A. K. F. Coghe, L. Elkarous and M. Pirlot, "Comparison of piezoelectric and crussher measurements of chamber pressure with finite element modeling results," in *27 th International Symposium on Ballistics*, 2013.
- [28] [Online]. Available: <http://www.google.com/patents/US6182496>
- [29] [Online]. Available: http://www.hpi-gmbh.com/redesign/products_04.htm
- [30] D. P. S. du Toit, "A two-dimensional internal ballistics model for modular solid propellant charges," in *19 th International Symposium of Ballistics*, 2001.
- [31] B. T. O. R. J. Gollan, I. A. Johnston and P. A. Jacobs, "Development of casbar: a two-phase flow code for the interior ballistics problem," in *16th Australasian Fluid Mechanics Conference*, 2007.
- [32] C. R. Woodley, "Comparison of 0d and 1d interior ballistic modelling of high performance direct fire guns," in *19 th International Symposium of Ballistics*, 2001.
- [33] C. Cheng and X. Zhang, "Modeling of interio ballistic gas-solid flow using a coupled cfd-dem approach," in *27 th International Symposium on Ballistics*, 2013.

- [34] P. E. D. J. D. Micković, S. Jaramaz and D. Micković, "Determination of pressure profiles behind projectiles during interior ballistic cycle," in *27 th International Symposium on Ballistics*, 2013.
- [35] [Online]. Available: <http://www.unr.edu/Documents/science/physics/labs/151/the-ideal-gas-law.pdf>
- [36] [Online]. Available: <http://www.unr.edu/Documents/science/physics/labs/151/the-ideal-gas-law.pdf>
- [37] I. A. Johnston, *The Noble-Abel Equation of State: Thermodynamic Derivations for Ballistics Modelling*. Defence Science and Technology Organisation PO Box 1500 Edinburgh, South Australia 5111, Australia, 2005.
- [38] J. R. Gonzalez, *Interior Ballistics Optimization*. Dept. of Mechanical Engineering, Kansas State University, 1990.
- [39] G. Dyckmans, "Fundamentals of ballistics - internal ballistics -." [Online]. Available: <http://e-ballistics.com>
- [40] J. Corner, *Theory of Interior Ballistics of Guns*. Jhon Wiley and Sons, New York, 1950.
- [41] *Firing Tables*, HEADQUARTERS DEPARTMENT OF THE ARMY, WASHINGTON, September 1972.
- [42] J. M. da Silva Balula, *FABRICO PARA ENSAIO DE CONCEITO MELHORADO DE UM PROJECTIL DE DETONAÇÃO MECÂNICA PARA O COMBATE A INCÊNDIOS FLORESTAIS*. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2008.
- [43] [Online]. Available: <https://thescienceclassroom.wikispaces.com/Vivians+Project+of+Newtons+3+laws+of+motion+and+universal+gravity>

Anexos

Anexo I: Propriedades Carga M3A1 *green bag*

Reference for _P2K240890155M107

Ref Data PropellantTable

	Units	Lock			
Density	gm/cm ³		1.5695	0.0000	0.0000
SpecificHeatRatio			1.2450	0.0000	0.0000
Impetus	MJ/kg		0.9117	0.0000	0.0000
Covolume	cm ³ /gm		1.1045	0.0000	0.0000
FlameTemperature	C		2143.8500	0.0000	0.0000
ChargeWeight	kg		2.4812	0.0000	0.0000
BurnRateExponent			0.8500	0.0000	0.0000
FinalBurnRateCoefficient	cm/sec/bar		.11099E-01	.00000E+00	.00000E+00
PropellantType			2	0	0
TimeDelay	msec		10.0000	0.0000	0.0000
InitialBurnRateCoefficient	cm/sec/bar		.11099E-01	.00000E+00	.00000E+00
PropellantWeb	mm		0.3998	0.0000	0.0000
GrainDiaThickness	mm		1.0516	0.0000	0.0000
PerforationDataSlotWidth	mm		0.2540	0.0000	0.0000
GrainLength	mm		8.8900	0.0000	0.0000
DeterrentConstant			0.0000	0.0000	0.0000
NumberOfPerforations			1	0	0

M1 - 155mm M3A1 Zone 5 Retrieve Data

Anexo II: Propriedades Carga M4A2 *white bag*

Reference for _P2K240890155M107

Ref Data PropellantTable

	Units	Lock			
Density	gm/cm ³		1.5695	0.0000	0.0000
SpecificHeatRatio			1.2450	0.0000	0.0000
Impetus	MJ/kg		0.9117	0.0000	0.0000
Covolume	cm ³ /gm		1.1045	0.0000	0.0000
FlameTemperature	C		2143.8500	0.0000	0.0000
ChargeWeight	kg		5.9647	0.0000	0.0000
BurnRateExponent			0.8500	0.0000	0.0000
FinalBurnRateCoefficient	cm/sec/bar		.13369E-01	.00000E+00	.00000E+00
PropellantType			1	0	0
TimeDelay	msec		10.0000	0.0000	0.0000
InitialBurnRateCoefficient	cm/sec/bar		.13369E-01	.00000E+00	.00000E+00
PropellantWeb	mm		0.8534	0.0000	0.0000
GrainDiaThickness	mm		4.1758	0.0000	0.0000
PerforationDataSlotWidth	mm		0.2540	0.0000	0.0000
GrainLength	mm		8.8900	0.0000	0.0000
DeterrentConstant			0.0000	0.0000	0.0000
NumberOfPerforations			7	0	0

M1 - 155mm M4A2 Zone 7 Retrieve Data

Anexo III: Dimensões do Obus M126A1 155 mm

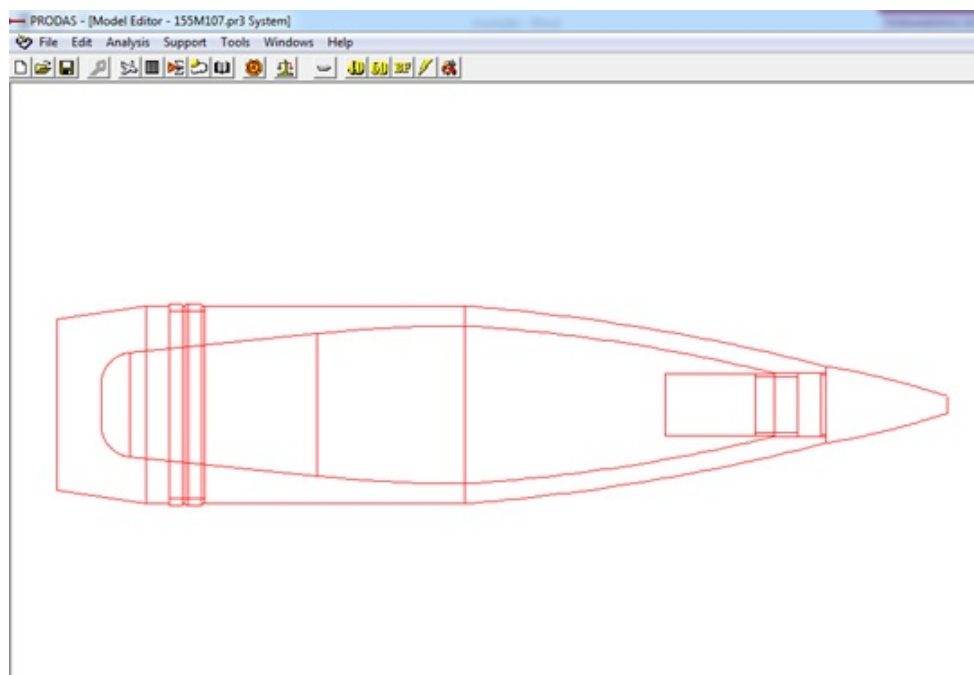
Reference for _P2K240890155M107

Ref Data | RiflingProfile

Gun Name	155MM M126A1 M109 SP HOWITZER	
Gun Description	155MM M109 SP HOWITZER	
Chamber/Volume	13061.290	cm ³
Barrel Length	292.100	cm
Gun Barrel Bore	154.991	mm
Bore Groove Dia	157.582	mm
Rifling Depth	1.296	mm
Groove Land Ratio	1.568	
Number Land Grooves		48
Start Angle	8.900	deg
End Angle	8.900	deg
Twist	20.06	cal/rev
Projectile Free Travel	0.00000	mm
Forcing Cone Half Angle	2.87900	deg
Rifled Gun Bore?	Yes	y/n
Target Breech Pressure	350.	Mpa

155MM M126A1 M109 SP HOWITZER Retrieve Data

Anexo IV: Dimensões do projétil M107 155 mm



Properties	Assembly	Units
Name	M107 HEI	
RefLength	.000	mm
Length *	697.100	mm
Weight *	43.096	kg
CG (from Ref)*	238.729	mm
IX *	.142	kg-m ²
IY *	1.226	kg-m ²
IXY *	.000	kg-m ²
IZ *	.000	kg-m ²
* Info ONLY		