



ESCOLA NAVAL

talant de biẽ-faire



Mark André Coelho Lourenço

Balística Externa Naval: Uma Proposta de Formulação Geral

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais,
na especialidade de Engenheiros Navais – Ramo de Armas e Eletrónica



**Alfeite
2019**



ESCOLA NAVAL

talant de biefaire



Mark André Coelho Lourenço

Balística Externa Naval: Uma Proposta de Formulação Geral

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na
especialidade de Engenheiros Navais – Ramo de Armas e Eletrónica**

Orientação de:

Prof. Mário Alexandre Pousão da Costa Gatta

Prof. Miguel Ângelo Pereira Bento Moreira

O Aluno Mestrando

O Orientador

O Coorientador

Mark André Coelho Lourenço
ASPOF EN-AEL

Mário Alexandre Pousão da Costa Gatta
Prof.

Miguel Ângelo Pereira Bento Moreira
Prof.

Alfeite

2019

"Truth is ever to be found in simplicity, and not in the multiplicity and
confusion of things."
Isaac Newton

À minha família e amigos que estiveram e estão sempre lá para mim e que são uma base fundamental da minha vida.

Agradecimentos

Gostaria inicialmente de agradecer ao meu orientador, Professor Mário Gatta, por toda a dedicação, apoio e acompanhamento no desenvolver da dissertação. Foi sem dúvida uma fonte de conhecimento e uma base que soube sempre encaminhar-me da melhor maneira no desenvolvimento da mesma.

De igual forma, gostaria também de agradecer ao meu coorientador, Professor Miguel Moreira por toda a disponibilidade em ajudar na elaboração da dissertação em que o seu apoio foi incondicional.

Um agradecimento também aos meus amigos e camaradas que estiveram sempre ao meu lado e apoiaram-me em todas as circunstâncias, quer tenham sido boas ou menos boas.

Por fim e não menos importante, obviamente um especial agradecimento à minha família por todo o auxílio que me deu neste grandioso percurso e que me apoiou em todas as minhas decisões e que me deu sempre força para seguir em frente.

Resumo

Nesta dissertação de Mestrado pretende-se explorar algumas vertentes bastante diferentes umas das outras de um mesmo problema geral, mas com muitos pontos de ligação. É de realçar, desde já, que no percurso escolar da EN (Escola Naval), aquando da transmissão de conhecimentos relacionados com esta área, mais especificamente na cadeira de Balística e Tiro, houve aproximações matemáticas que eram claramente grosseiras e em que supusemos que eram constantes grandezas obviamente variáveis.

Nesta tese tencionamos explorar a resolução analítica mais ambiciosa das equações do movimento das trajetórias balísticas com atritos atmosféricos em alguns casos específicos (movimento vertical, por exemplo), e numericamente no caso geral. De facto, nas lições da cadeira de Balística e Tiro admitia-se, por razões pedagógicas, que a força de atrito era uma constante ao longo de todo o percurso para que as equações diferenciais respetivas fossem resolúveis de uma forma analítica. No entanto, vão-se explorar outras maneiras de resolver o problema, nomeadamente por simulação computacional no caso geral, admitindo o caso em que há de facto uma variação da força e também do próprio coeficiente de atrito ao longo da trajetória, sempre a depender da velocidade do projétil. Este estudo vai-se focar, na sua componente de simulação, na formulação Newtoniana do problema em que, para além do que foi referido, irão ser obtidos gráficos e valores provenientes dos diferentes tipos de força de atrito em função de potências da velocidade instantânea do projétil.

Por outro lado, como base para futuros projetos, apresenta-se uma análise da formulação Lagrangeana em que neste caso, se pretende sugerir as possíveis vantagens desta formulação, para além do aspeto meramente formativo da utilização das equações de Euler-Lagrange no tratamento do cálculo das trajetórias que incluam dissipação, neste caso por atrito atmosférico, visto que normalmente os estudos feitos são principalmente decorrentes da formulação Newtoniana, para além da suposição generalizada, mas incorreta, que a formulação Lagrangeana não pode incluir forças dissipativas. No entanto, o estudo relacionado com $C_D(V)$, ou seja, o coeficiente de atrito a variar

VIII

ao longo da trajetória consoante a velocidade instantânea do projétil foi já suficientemente extenso e mais complexo do que o esperado, tendo acabado por constituir grande parte da tese, levando a que o formalismo Lagrangeano ficasse de certa forma apenas como parte introdutória, embora a inclusão do atrito já aqui surja neste âmbito. Paralelamente a isto, irá ser demonstrado um *software* construído de raiz em MATLAB baseado no formalismo Newtoniano em que, utilizando dados reais de projéteis de duas peças navais de grande calibre, será feita uma análise comparativa dos resultados das trajetórias balísticas obtidas.

Palavras chave: Força de atrito, Formulação Newtoniana, Formulação Lagrangeana.

Abstract

In this master's dissertation we aim to explore some strands quite different from one another of the same general problem but with many connection points.

It is to be emphasized that in the school course of the Navy Academy, when transmitting knowledge related to this area more specifically in the subject of "Balística e Tiro", there were many mathematical approximations that were clearly crude and in that we have assumed that there were constant quantities of obvious variables.

In this thesis we intend to explore the most ambitious analytical resolution of equations of motion of the ballistic trajectories with atmospheric drag in some specific cases (vertical movement, for example), and numerically in the general case. In fact, in the lessons of this subject it was admitted, for pedagogical reasons, that the drag force was a constant over the entire route so that the respective differential equations were solvable in an analytical way. However, other ways to solve the problem will be explored namely by computer simulation in the general case, admitting the case in which there is indeed a variation of the force and also of the drag coefficient itself along the trajectory, always depending on the speed of the projectile. This study will focus on its simulation component, mainly in the Newtonian formulation of the problem in which, in addition to what was referred, graphs and values from different types of drag force will be obtained depending on the power of the instantaneous velocity of the projectile.

On the other hand, as a basis for future projects, an analysis of the Lagrangean formulation is presented, in which case, it is intended to suggest the possible advantages of this formulation, beyond the purely formative aspect of the use of the Euler-Lagrange equations in the treatment of the calculation of trajectories that include dissipation, in this case due to atmospheric drag, since normally the studies done are mainly due to the Newtonian formulation, beyond the widespread but incorrect assumption that the Lagrangean formulation cannot include dissipative forces. However, the study related to $C_D(V)$ or the drag coefficient varying along the trajectory according to the

X

instantaneous velocity of the projectile was already sufficiently extensive and more complex than expected and therefore it constituted a large part of the thesis, allowing the Lagrangean formalism to be somewhat of an introductory part, although the inclusion of drag already appears in this context. In parallel with this, it will be demonstrated a software built from scratch on MATLAB where, using actual projectile data from two large-caliber naval pieces, a comparative analysis will be made of the results of the ballistic trajectories obtained.

Key words: Drag force, Newtonian formulation, Lagrangean formulation

Índice Geral

Epígrafe	I
Dedicatória	III
Agradecimentos	V
Resumo	VII
Abstract	IX
Índice Geral	XI
Índice de Figuras	XV
Índice de Tabelas	XVII
Lista de Acrónimos e Abreviaturas	XIX
Notação Técnica e Científica	XXI
Prefácio	XXIII
Introdução	1
1 Fundamentos Teóricos	3
1.1 Enquadramento Teórico	3
1.2 Evolução Histórica do Cálculo da Trajetória	5
1.2.1 Era Pré-Newton	5
1.2.2 Era Pós-Newton	6
1.3 Exposição de Modelos e Conceitos temáticos	8
1.3.1 Modelos de Trajetórias Balísticas adotadas	8
1.3.2 Sistemas de Combate	10
1.4 Fatores Dissipativos ao Movimento do Projétil na Atmosfera	12

1.4.1	Forças de Atrito Aerodinâmico	12
1.4.2	Efeitos de Rotação do Projétil	17
1.4.3	Efeito de Coriolis	17
1.4.4	Efeitos do Vento	19
2	Trajelórias Balísticas na Dinâmica de Newton	21
2.1	Resultados do Estudo das Trajelórias Balísticas na Dinâmica de Newton	21
2.1.1	Modelo Newtoniano do Movimento de um Projétil no Vácuo, com Gravidade	22
2.1.2	Resolução analítica do Movimento de um Projétil, com Atrito Proporcional à Velocidade	26
2.1.3	Resolução analítica e numérica do Movimento de um Projétil, com Atrito Proporcional ao Quadrado da Velocidade	32
3	Estudo das Equações de Euler-Lagrange	47
3.1	Objetivos definidos	47
3.2	Breve Dedução das Equações pelo Cálculo das Variações	48
3.3	Dedução das Equações através da Formulação Newtoniana	52
3.3.1	Exemplo simples	55
3.4	Invariância das Equações com Transformação de Coordenadas	56
3.4.1	Igualdade das Equações de Euler-Lagrange para dois Lagrangeanos	64
3.5	Situações onde se manifesta a Vantagem das Equações	66
3.5.1	Referenciais Não-Inerciais	66
3.5.2	Forças Inerciais na Equação de Euler-Lagrange	66
3.5.3	Equação do Movimento para Tiro Longo	76
3.6	Inclusão de Forças Não-Conservativas	78
3.6.1	Inclusão de Forças Dissipativas nas Equações de Euler-Lagrange	78
3.6.2	Diversas formas de Forças Dissipativas	79
3.6.3	Forças Generalizadas a partir de Funções de Potência	80
3.6.4	Aplicação	85
4	Trajelórias com Força de Atrito explícita	95
4.1	Potência da Velocidade como Parâmetro livre	95
4.2	Front-end em MATLAB	99
5	Análise e Discussão de Resultados	105
5.1	Trajelória Balística sem Atrito	105

5.2	Trajectoria Balística com Atrito Proporcional à Velocidade . . .	106
5.3	Trajectoria Balística com Atrito Proporcional ao Quadrado da Velocidade	108
5.4	Trajectoria Balística com Atrito e variação da Potência n da Velocidade v	112
5.5	Validação do Modelo relativamente a dados reais	113
6	Conclusão e Recomendações finais	119
	Referências Bibliográficas	123
A	Recolha de Informação	127
B	Código do Programa em MATLAB	129

Índice de Figuras

1.1	Velocidade relativa do projétil	9
1.2	Peça de 100 mm a bordo do NRP Corte-Real	11
1.3	Variação típica do coeficiente de resistência aerodinâmica de um projétil estável em função da velocidade em mach (retirado de diapositivos da cadeira de Balística e Tiro, 2016, da autoria de CFR Conceição Palma)	14
1.4	Coeficiente de atrito para um cilindro circular com a função do número de Reynolds (retirado de Feynman, 1964)	16
1.5	Extensão do alcance ao disparar para Leste a baixa altitude (retirado de Farrar and Leeming, 1983)	19
2.1	Trajectoria de um projétil apenas assumindo a gravidade, em que height é a altura, weight é o peso, vertex é o vértice e range é o alcance (retirado de Farrar and Leeming, 1983)	24
2.2	Trajectoria balística, sem atrito, obtida no MATLAB	26
2.3	Trajectoria balística, com atrito proporcional à velocidade	32
2.4	Trajectoria balística tendo em conta o peso do projétil e a resistência do ar	33
2.5	Trajectoria balística, com atrito proporcional ao quadrado da velocidade	40
2.6	Aproximação de um gráfico Velocidade vs Coeficiente de atrito	41
2.7	Variação da velocidade	44
2.8	Relação coeficiente de atrito variável e constante	45
3.1	Esquema de caminho percorrido	49
3.2	Coordenadas Polares	56
3.3	Coordenadas Esféricas	62
3.4	Orientação fixa dos eixos	67
3.5	Terceiro referencial, S	69
3.6	Referencial das forças mencionadas	72
3.7	Representação axial da situação em causa	75
3.8	Referencial de tiro longo	77

4.1	Trajectoria balística, com atrito a variar com potências n da velocidade v , em que $n = 1$	97
4.2	Trajectoria balística, com atrito a variar com potências n da velocidade v , em que $n = 1,3$	97
4.3	Trajectoria balística, com atrito a variar com potências n da velocidade v , em que $n = 1,7$	97
4.4	Trajectoria balística, com atrito a variar com potências n da velocidade v , em que $n = 2$	98
4.5	Front-end do MATLAB	99
4.6	Parâmetros de entrada	100
4.7	Calibre e janelas	100
4.8	Janela 1	101
4.9	Altura inicial, características do projétil e constantes	101
4.10	Parâmetros a serem usados futuramente	101
4.11	Parâmetros a serem usados futuramente	102
4.12	Janela 1	102
4.13	Janela 2	103
4.14	Secções superiores	103
5.1	Diferença nos ângulos	106
5.2	Diferença nos ângulos	107
5.3	Diferença nos coeficientes de atrito	107
5.4	Diferença nos coeficientes de atrito	108
5.5	Diferença nos ângulos	109
5.6	Diferença nos coeficientes de atrito	110
5.7	Diferença nos ângulos	110
5.8	Comparação entre coeficiente de atrito constante e variável	111
5.9	Diferença nas potências da velocidade na força de atrito	112
5.10	Comparação entre potências da velocidade na força de atrito n=1 e n=2	113
5.11	Projeções projétil 76 mm	114
5.12	Projeções projétil 100 mm	114
5.13	Projeções projétil 105 mm	115

Índice de Tabelas

1.1	Regimes de velocidade	15
5.1	Resultados provenientes da literatura, experiências - azul - e provenientes do software desenvolvido - verde (adaptado de A. E. G. Morales, 2000)	116

Lista de Acrónimos e Abreviaturas

CO	<i>Centro de Operações</i>
DAE	Departamento de Armas e Eletrónica
DOP	Departamento de Operações
DT/CT	<i>Direção de Tiro, com ou sem Central de Tiro</i>
EDO	<i>Equações Diferenciais Ordinárias</i>
EN	<i>Escola Naval</i>
ENIAC	<i>Electronic Numerical Integrator and Computer</i>
GUNO	<i>Gunnery Officer</i>
LEM	Laboratório de Explosivos da Marinha
MWCS	<i>Multi-Weapon Control System</i>
OAT	<i>Oficial de Ação Tática</i>
RK	<i>Runge-Kutta</i>
SPIDER	<i>Ships Processor Interconnection and Data Exchange Resource System</i>
STIR	<i>Signaal Tracking and Illumination Radar</i>

Notação Técnica e Científica

Latim

A	Área transversal do projétil.
m	Massa do projétil.
l	Comprimento do projétil.
d	Calibre do projétil.
C_D	Coefficiente de atrito.
g	Aceleração devido à gravidade.
n	Qualquer número real.
R	Alcance horizontal do projétil.
v	Velocidade do projétil em qualquer momento.
v_0	Velocidade inicial do projétil.
v_{x_0}	Componente horizontal da velocidade.
v_{y_0}	Componente vertical da velocidade.
c	Velocidade do som.
x, y	Coordenadas do centro de gravidade do projétil num determinado tempo t .
x_0, y_0	Coordenadas da origem da trajetória, quando $t = 0$.
y_v	Ordenada do vértice.
x_v	Abcissa do vértice.
t	Tempo de voo para qualquer ponto ao longo da trajetória.
h	Altura do projétil.
a	Aceleração do projétil.
t_v	Tempo até chegar à altura máxima da trajetória.
v_r	Velocidade restante num ponto de trajetória.
F_d	Força de atrito.
V	Velocidade terminal.
z	Derivação.
M	Nº de Mach.
Re	Nº de Reynold's.
c_L	Coefficiente translator.
c_M	Coefficiente de momento de yaw.
G	Posição do centro de gravidade.

Grego

- θ Ângulo de inclinação da trajetória relativamente ao plano horizontal num determinado tempo t .
- $\theta(x)$ Função degrau.

Prefácio

No que toca à estrutura desta dissertação, esta vai ser constituída por dois grandes domínios, sendo que uma delas é predominante à outra, ou seja, a formulação Newtoniana e a formulação Lagrangeana respetivamente. Em termos mais práticos, a demonstração e utilização do programa já referido anteriormente.

O 1º capítulo aborda uma contextualização teórica, de modo a que quando passarmos a estar mais ligados às equações e resoluções numéricas, já haja uma maior compreensão do conteúdo que está a ser tratado. De mencionar então que vai ser dada uma ideia de como tem sido o desenvolvimento do cálculo das trajetórias, os vários modelos de estudo existentes juntamente com uma simples descrição de onde, como e que parâmetros são usados nas fragatas da Marinha Portuguesa, constituindo assim o Tiro Naval visto que é um dos exemplos de onde se pode integrar na unidade curricular de Balística e Tiro e os diversos efeitos dissipativos que perturbam o movimento de um projétil.

No 2º capítulo encontra-se o estudo concentrado das trajetórias balísticas na dinâmica de Newton, em que se apresentam as duas formas mais comuns de analisar um problema deste tipo, ou seja, sem atrito e com atrito do meio circundante, neste caso do ar. Aqui irão ser resolvidas inúmeras equações, tanto analiticamente como numericamente.

No 3º capítulo temos o estudo das equações de Euler-Lagrange que embora não seja aqui intenso é uma boa base de partida para desenvolvimentos futuros em que se estudam igualmente estas equações tanto com forças conservativas como com não-conservativas. Ainda são apresentadas algumas das vantagens de se aplicar este caminho alternativo.

O 4º capítulo serve para analisar uma vez mais um modelo de trajetórias balísticas em que desta vez nos encontramos na presença de diferentes potências n da velocidade e assim concluir com resultados igualmente numéricos e por fim, ainda neste capítulo, a explicação do *software* construído ao longo do período dedicado à elaboração da dissertação de modo a que se torne uma ferramenta de fácil uso e com descrição suficiente para ser objeto de futuros

XXIV

estudos e aperfeiçoamentos dentro desta área.

Por fim, o 5^o e 6^o capítulos são aqueles onde vai ser possível apresentar os pontos de discussão dos resultados obtidos e onde se vão tirar conclusões e onde serão dadas as recomendações finais.

Introdução

O tema desta tese nasceu da curiosidade particular sentida na cadeira de Balística e Tiro dada no 1º semestre do 3º ano às classes de Engenheiros Navais ramos de Armas e Eletrónica e nos outros cursos também os Fuzileiros, isto no que diz respeito ao Capítulo de Balística Externa. De facto, a descrição do movimento com atrito atmosférico por resolução das equações do movimento de forma analítica, com as restrições pedagógicas impostas pelo tempo disponível, levou à necessidade de aproximações nessas equações do movimento que me pareceram forçadas e, em especial, que me levaram a procurar estender o estudo do movimento de projéteis na atmosfera mantendo a força de atrito atmosférico dependente da velocidade tangencial do projétil e ainda supondo regimes de forças deste atrito proporcionais a várias potências da velocidade e não só ao seu quadrado. De facto, ao atribuir um valor constante à projeção da força de atrito sobre cada um dos dois eixos, horizontal e vertical, do movimento suposto, para já, plano, estamos na prática a ignorar a possibilidade de outras potências da velocidade tangencial, para além da evidente aproximação analítica algo forçada. Não deixa de ser verdade que esta potência quadrática será a mais importante, na prática, para trajetórias à partida supersónicas, de acordo com a experiência. Mas a intenção foi abordar o problema da possível variação desse expoente na velocidade tangencial e, ainda mais importante, ir para além das aproximações necessárias numa abordagem analítica elementar, as quais serão revistas abaixo.

Neste sentido, a presente tese tem dois objetivos fundamentais: o primeiro é prosseguir pessoalmente o estudo matemático do movimento de projéteis balísticos de forma mais rigorosa e, em consequência, o segundo será permitir fornecer um instrumento de trabalho pedagógico que possa vir a ser incluído na leção da matéria de Balística Externa, permitindo uma melhor compreensão da situação física. Pretende-se que a utilidade didática deste trabalho seja estendida tirando partido do *software* aqui desenvolvido (em MATLAB) o qual simulará diferentes trajetórias com dados realísticos no contexto do Tiro Naval, ficando disponível, em código comentado, para po-

tenciais interessados.

Nesta perspectiva, é importante salientar, mesmo que seja evidente, que não é nossa intenção substituir de qualquer forma os sistemas de tiro atualmente em utilização nos navios da Armada Portuguesa. O nosso objetivo, como já foi afirmado, é científico e pedagógico e, por isso, completamente diferente.

Como sabemos, define-se o “problema principal” em Balística Externa como a resolução das equações do movimento na presença de duas forças somente, a saber, a gravidade e o atrito atmosférico. O “problema secundário” trata de outras influências sobre a trajetória, tais como a deriva giroscópica, o vento, a variação da densidade atmosférica com a altitude, o desvio de Coriolis, a variação do peso com a altitude, etc. Assim sendo, e também movido por alguma curiosidade científica, decidi explorar a possibilidade de abordar o problema do ponto de vista das equações do movimento de Euler-Lagrange visto que estas mantêm a sua forma em referenciais não-inerciais (como o da Terra em rotação) e permitem incluir, de forma sistemática, outras forças como as consideradas acima. Acresce que em geral se omite a presença de forças dissipativas na mecânica Lagrangeana, supondo que todas as forças em presença resultam de potenciais. Não quer isto dizer que será impossível incluir dissipação nas equações de Euler-Lagrange, mas trata-se em geral de matéria mais avançada. Consequentemente, decidi tentar esta abordagem com dois propósitos, o de ir para além da introdução breve por vezes dada na cadeira de Mecânica Física – só com forças conservativas – e, por outro lado, estabelecer um ponto de partida que cubra exclusivamente o problema principal da Balística Externa mas que permita, em princípio, futuras generalizações de forma razoavelmente sistemática, já que aqui se abordará exclusivamente o “problema principal” da Balística Externa. No entanto, a concretização da simulação em MATLAB das trajetórias com dissipação será principalmente baseada na dinâmica de Newton.

A metodologia para a realização deste trabalho consistiu em começar por fazer uma recolha de informação no que toca principalmente a conceitos teóricos, sendo que seguidamente houve um processo de investigação onde houve foco na análise prática.

Foi feito um tratamento e seleção da informação recolhida, sendo que houve a construção dos modelos de trajetória posteriormente. Foi feita a análise dos dados obtidos e foram tiradas as conclusões sobre os resultados.

Houve sempre a preocupação em visitar diversas unidades terrestres da Base do Alfeite e fragatas de modo a recolher informação mais concreta e mais próxima do real em meios operacionais.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

Balística Externa tem sido uma área de estudo das mais antigas aplicações de Mecânica Clássica que desde muito cedo adquiriu uma grande importância, em numerosos domínios. Este capítulo tem como objetivo descrever uma breve apresentação sobre a sua vasta história, estudo e aplicações.

1.1 Enquadramento Teórico

A balística é, mais uma vez, a ciência que lida com o movimento de projéteis. Escritores atuais dividem o assunto em balística interna, intermédia, externa e terminal, que descrevem, respetivamente, a ação de propulsão, movimento do projétil fora do cano da arma mas ainda influenciado pelos gases resultantes do tiro, o voo atmosférico e a ação do impacto do alvo dos projéteis. A ciência moderna da balística externa evoluiu como um ramo especializado da dinâmica de corpos rígidos, a moverem-se sob a influência de forças gravitacionais e aerodinâmicas.

A fase da balística externa, fase determinante para o nosso problema, ocorre quando o projétil sai do cano com uma certa velocidade inicial e deixa de ser influenciado pelos gases remanescentes à boca do cano da arma. Nesta fase, os fatores primários que atuam no projétil são a gravidade e a resistência do ar. No entanto, a trajetória do projétil também é afetada por outros fatores, designados por secundários: em primeiro lugar, as propriedades de um projétil que incluem a massa, o calibre, a geometria e a taxa de rotação e, em segundo lugar, os efeitos ambientais externos, como a densidade do ar, temperatura e velocidade do vento (Fann, 2006).

Sendo este um tema tão antigo que ainda percorre os dias de hoje, tem-se o conhecimento da existência de bastantes obras, que têm acrescentado muitas vezes algo de novo, de modo a tornar o estudo balístico mais real,

com o acréscimo dos efeitos perturbadores já referidos, no entanto são cada vez mais as ferramentas tecnológicas de cálculo numérico que estão na linha da frente para o auxílio da obtenção de resultados. A sequência de temas abordados reproduz, de certo modo, a evolução do tratamento teórico da descrição das trajetórias balísticas, começando pelos modelos e formalismos mais simples até às particularidades mais complexas.

Muitos modelos existem apenas como padrão, sendo que quanto mais real for a simulação, mais benefícios haverá num ambiente em que o conhecimento do efeito do tiro é determinante. Pretendemos desenvolver conhecimento próprio dentro da EN, tentando ir para além da simples utilização de soluções pré-feitas, deixando um texto completo passível de servir de ponto de partida para desenvolvimentos futuros.

1.2 Evolução Histórica do Cálculo da Trajetória

1.2.1 Era Pré-Newton

A balística existe como recurso bélico e de caça há milhares de anos, no entanto o desenvolvimento da balística como uma verdadeira ciência começou no século XVI. Esse desenvolvimento abrangeu as centenas de anos até os dias atuais (McCoy, 1999).

A primeira pedra arremessada pelo homem pré-histórico foi provavelmente o primeiro exemplo de balística externa. As vantagens de se poder lançar mais e com cada vez mais poder, levou à criação de dispositivos como as lanças. Em seguida veio o arco (*bow*), e uma extensão desta palavra fez com que se formasse a palavra "*ballista*" e por fim "*ballistics*". A "*ballista*" era um dispositivo que tinha a função de impulsionar flechas de grande dimensão. Foi o trabalho de Leonardo da Vinci (1452-1519) que levou ao desenvolvimento inicial da engenharia aplicada ao estudo de diferentes mecanismos lançadores, tendo projetado muitos tipos de armas, tanto ofensivas como defensivas, desde bolas de canhão, morteiros, armas portáteis/leves, até versões primitivas de um tanque e mesmo de um submarino. Da Vinci também foi o primeiro a fornecer uma base teórica para os fenômenos da aerodinâmica. A balística externa foi fundada como uma ciência formalizada com o trabalho de Galileo Galilei (1562-1642), que lançou as bases para um estudo científico preciso do movimento (Farrar and Leeming, 1983). Formulou a teoria do lançamento inclinado (segundo um dado ângulo com a horizontal) onde a trajetória de um projétil, lançado nas proximidades da superfície da Terra e através de um meio não resistente, poderia ser definida como uma parábola, simétrica em relação à ordenada do vértice (ponto mais alto da trajetória), tendo esta mais algumas características que irão ser mencionadas posteriormente.

No entanto sabe-se que a atmosfera condiciona consideravelmente o movimento do projétil, de tal forma que o esquema parabólico é modificado devido à resistência do ar, retardando-o desde o instante em que há o disparo, e em consequência a velocidade restante vai diminuindo até atingir o ponto de queda. Deste modo, contrariamente à situação anterior, a trajetória real não é simétrica em relação à ordenada do vértice, sendo que o seu comprimento no ramo descendente é menor do que no ramo ascendente (de Almeida Júnior, 2017).

O seu aluno Evangelista Torricelli (1608-1647) formulou a equação referente ao alcance de um projétil, construiu a parábola e estudou as suas

diversas propriedades, sendo que os métodos mais precisos de medir a velocidade inicial foram encontrados pela primeira vez no século seguinte à morte de Galileo. Concluiu-se então que os alcances reais atingidos pelos projéteis eram muito menores do que os previstos pela trajetória parabólica de Galileo. De referir que, no entanto, este já conhecia o comportamento dos projéteis perante a atmosfera e por isso afirmou que as suas demonstrações eram precisas apenas no caso de não haver resistência do ar e ainda afirmava que o atraso ou aceleração devido ao atrito do ar num corpo em movimento era em função da massa, da velocidade e da forma.

O trabalho de Galileo pavimentou o caminho para Isaac Newton (1642-1727), um cientista inglês que foi considerado uma das pessoas mais influentes na História da Humanidade. O trabalho de Newton sobre a dinâmica apareceu no famoso "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*". Aqui mostrava-se também a preocupação com o movimento de corpos rígidos e o movimento dos fluidos. Ambos são de interesse primordial na balística moderna (Farrar and Leeming, 1983).

1.2.2 Era Pós-Newton

A balística externa, como já foi dito anteriormente, existiu durante séculos como uma arte antes de se ter tornado numa ciência. Embora tenha havido grandes nomes de cientistas, investigadores e matemáticos dos séculos XVI e XVII associados ao desenvolvimento da balística, Isaac Newton foi muito provavelmente o maior dos fundadores da balística externa. As leis de Newton associadas ao movimento, estabeleceram a estrutura da mecânica clássica moderna, sem a qual nunca teria havido a evolução de arte para ciência.

Newton estava interessado no movimento de um projétil num meio resistente e avançou mesmo com a hipótese de que a resistência do fluido era proporcional à densidade do fluido, à área da secção transversal do projétil e ao quadrado da velocidade (McCoy, 1999). Newton esteve então envolvido na formulação da lei quadrática da velocidade, em que se admite que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade do projétil em estudo. Posteriormente foi verificado que, para velocidades subsónicas, o atrito é proporcional à velocidade, não se verificando para velocidades superiores (de Almeida Júnior, 2017).

O mais importante sucessor de Newton nesta área foi Leonhard Euler da Suíça (1707-1783), que analisou experimentalmente os alcances obtidos de disparos de munições de canhão para determinar as suas trajetórias e as características do atrito. Em 1742, Benjamin Robins (1707-1751) inventou o pêndulo balístico e com isto determinou a velocidade inicial das munições de

mosquetes.

A importância de métodos experimentais precisos para determinar o atrito de projéteis aumentou constantemente durante o século XIX. Charles Wheatstone (1802-1875) fez enormes progressos da determinação do tempo total da trajetória dos projéteis, fazendo uso de um suporte através do qual passava o projétil, o qual quebrava um circuito elétrico. Isto levou ao trabalho de Francis Bashforth (1819-1912), que usou um cronógrafo elétrico, que ele havia criado para determinar mais uma vez a trajetória e o atrito de projéteis de artilharia.

O trabalho experimental continuou em toda a Europa para obter uma determinada lei de atrito que envolvesse a velocidade. Foi durante o século XIX que se atingiu um grande conhecimento sobre a aerodinâmica, sendo que o atrito foi reconhecido como uma função das propriedades do ar e isso levou gradualmente à forma dos projéteis atuais. Os canos de alma lisa (sem estrias) do século XVIII apresentavam baixas velocidades à boca e eram imprecisos, tendo levado ao surgimento das armas estriadas nas guerras Europeias durante o início do século XIX.

Já no século XX, foram estabelecidas as bases matemáticas que permitem descrever todas as forças a atuar no projétil na fase de voo. Nos anos recentes a elaboração e uso das tabelas balísticas para o cálculo das trajetórias foi amplamente ultrapassado pelos computadores, (Farrar and Leeming, 1983) no entanto seguem-se algumas das características de um dos primeiros computadores a ter em conta muitos dos parâmetros já mencionados, no que se refere a cálculos balísticos.

O ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer), construído entre 1943 e 1946, é amplamente considerado, tal como já foi referido, como o primeiro computador digital eletrónico de uso geral. Os militares precisaram do ENIAC para o cálculo de tabelas balísticas, sendo que estas eram tabelas numéricas usadas por pessoal de artilharia que relatavam como o alcance de uma arma particular dependia de vários fatores como o tipo de projétil que era disparado, da carga colocada, do ângulo de disparo e, em alguns casos, das condições meteorológicas. Novas características dos projéteis e novos parâmetros de entrada exigiam novas tabelas, sendo que o cálculo envolvia a resolução de um complexo conjunto de equações diferenciais. A arquitetura do ENIAC era decimal e não binária como temos hoje em dia, com conjuntos de tabelas manuais para resolver as equações diferenciais de segunda ordem para trajetórias balísticas (Westkaemper, 2009).

Atualmente, de facto, são os computadores os principais responsáveis por resolver numericamente todo o tipo de problemas deste tipo.

1.3 Exposição de Modelos e Conceitos temáticos

1.3.1 Modelos de Trajetórias Balísticas adotadas

Ao longo dos tempos, os modelos existentes para o estudo da trajetória de projéteis foram evoluindo. Um dos primeiros modelos a ser estudado foi o Modelo no Vácuo, que é um modelo em que o projétil é representado por um ponto de massa que descreve uma trajetória no vácuo e é o mais simples e fácil de deduzir porque, como é óbvio, negligencia todas as forças e momentos aerodinâmicos e só tem em conta a ação gravítica (McCoy, 1999). Por este motivo, é altamente impreciso para a resolução a um nível satisfatório de um problema balístico. No entanto, pode ser útil na resolução do problema de tiro de projéteis cujos alcances são mais curtos e onde as resistências aerodinâmicas são mais reduzidas.

Seguidamente a este, no que toca à evolução deste estudo, a ter em conta o Modelo de Massa Pontual (com 3 graus de liberdade), que é um modelo que assume que a única força aerodinâmica a retardar o movimento do projétil é a resistência oferecida pelo ar atmosférico; até muito recentemente, era o único modelo utilizado, quer na resolução de problemas balísticos, quer na construção das respectivas Tabelas de Tiro entre outras aplicações. Fornece estimativas de alcance bastante satisfatórias de projéteis razoavelmente estáveis, podendo também ser utilizado para prever alguns dos efeitos produzidos pelo vento. O efeito de Coriolis que irá ser posteriormente explicado é também introduzido neste modelo (Barbosa et al., 2005).

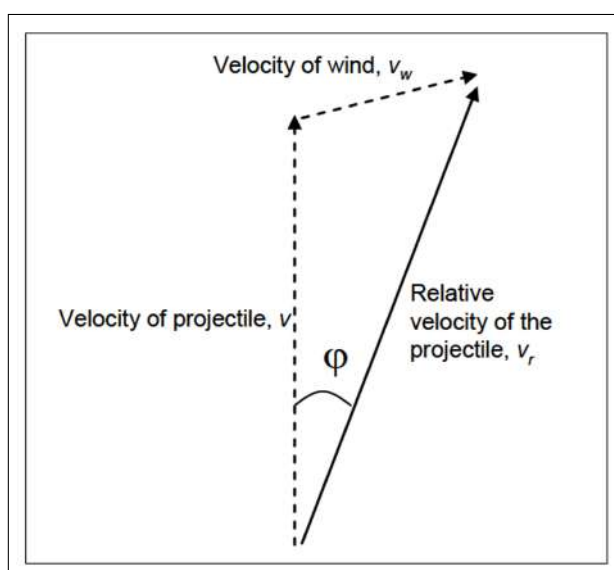


Figura 1.1: Velocidade relativa do projétil (retirado de Fann, 2006)

No entanto, ainda nos moldes deste modelo, criou-se um outro que apresenta algumas alterações relativamente ao anterior, tendo sido chamado de Modelo Modificado da Massa Pontual. Embora o princípio da sua dedução assente no modelo da massa pontual, o ângulo instantâneo de equilíbrio do *yaw* (ângulo formado entre o eixo do projétil e a tangente à trajetória, em cada ponto desta) é calculado e integrado ao longo da trajetória de modo a reproduzir resultados provenientes da deriva balística, da resistência aerodinâmica e da força de Magnus resultantes (Baranowski et al., 2016). Como este modelo requer uma grande quantidade de coeficientes aerodinâmicos para os dados iniciais do problema, este só é praticável através de computadores; para projéteis convencionais de artilharia (sem guiamento), este modelo pode apresentar soluções balísticas altamente rigorosas, e é encarado como o modelo a ser aplicado quer nas DT/CT's (Direcção de Tiro, com ou sem Central de Tiro) quer na construção das respectivas Tabelas de Tiro.

Por fim, o último modelo, o Modelo dos Seis Graus de Liberdade, que é o mais avançado no que se refere à modelação matemática de trajetórias balísticas, em que apresenta para além dos quatro graus de liberdade do modelo anteriormente descrito, a precessão giroscópica do projétil em dois planos. Como a base da sua dedução não assenta nos pressupostos sobre linearização dos fenómenos aerodinâmicos nem sequer na simetria geométrica do projétil, as soluções balísticas obtidas por este modelo deveriam ser extremamente rigorosas, no entanto a indeterminabilidade de várias das condições e dos coeficientes aerodinâmicos necessários para definir o início do prob-

lema, levam este modelo a apresentar muitas vezes resultados que não são significativamente melhores que os do modelo anterior, o que faz com que se ponha em causa a sua utilidade nas rotinas computacionais das soluções de fogo. Mesmo assim, é considerada a mais potente ferramenta de trabalho dos designers de munições (Barbosa et al., 2005).

1.3.2 Sistemas de Combate

Nesta secção irão ser referidas algumas das particularidades dos sistemas/peças existentes a bordo das duas classes de fragatas da Marinha Portuguesa, mais especificamente as peças de 100 mm e 76 mm das classes Vasco da Gama e Bartolomeu Dias, respetivamente. São os dois maiores calibres de peças de fogo da Marinha Portuguesa. Muita da informação que seguidamente irá ser descrita é baseada em documentação fornecida na unidade curricular de Sistemas de Armas e do conhecimento adquirido ao longo do estágio de embarque.

Começaremos então por falar um pouco sobre a peça de 100 mm. No final da 2ª Guerra Mundial, a Marinha Francesa estava equipada com armas de numerosos calibres, a maioria dos quais eram obsoletos. Em 1953 foi elaborado o projeto de uma peça de artilharia de 100 mm multifuncional, em que foi projetada para ser eficaz em defesa anti-aérea, combate anti-navio e anti-superfície.

O modelo mais comum, o modelo 68, apresenta uma ação e controlo completamente automatizado, podendo ser usada em dois modos:

- Controlo remoto através de um telecomando a partir do Centro de Operações (CO);
- Controlo local através de um "*joystick*" que se encontra na própria peça;

De referir então que é possível fazer fogo no CO e na própria peça, sendo que a peça é carregada a partir de um compartimento inferior à mesma e as munições depois sobem com recurso a um elevador integrado à peça, mas antes do carregamento, é colocada a espoleta. Dentro da torre da peça podem-se encontrar até duas pessoas quando é realizado tiro a partir da peça.

Apresenta uma capacidade rotativa tal que lhe permite uma grande amplitude de fogo, sendo que a movimentação em direção e elevação faz-se através de motores elétricos.

Ao longo dos anos, a peça de 100 mm passou por várias melhorias, notavelmente trazendo uma operação mais confiável e maior taxa de tiro, novas

munições otimizadas para derrubar mísseis e compatibilidade com computadores modernos com funcionalidade de controlo de tiro. No entanto, nos dias de hoje, tem caído em desuso.



Figura 1.2: Peça de 100 mm a bordo do NRP Corte-Real

Já no que toca à peça de 76 mm, sabe-se de acordo com documentação fornecida na unidade curricular de Sistemas de Armas que foi construída em Itália e desenvolvida em 1985 pela empresa designada por Oto Melara. Próprio para defesa anti-míssil, anti-aérea e anti-superfície.

No caso da peça de 76 mm, só é possível fazer fogo no CO. Já se encontrando espoletada, o carregamento da peça é feito na Torre Botom que pode levar até 80 munições. Esta possui um quadro de estados onde é possível saber na torre se está pronta e seguidamente passar ao CO. No que toca aos modos de operação, esta é controlada pelo MWCS (*Multi-Weapon Control System*), em que o STIR (*Signal Tracking and Illumination Radar*) é usado como sensor, o GUNO (*Gunnery Officer*) faz a seleção do alvo aéreo, o OAT (Oficial de Ação Tática) faz a seleção do alvo superfície e o STIRop dá o comando de fogo.

De acordo com *datasheets* dos projéteis das peças de 100 mm, de salientar que a sua massa é $m = 13.5$ kg, o alcance máximo de tiro é $R = 17$ km, a velocidade inicial à boca da arma é $v_0 = 870$ m/s; no caso do projétil de 76 mm são: $m = 6$ kg, $R = 16$ km, $v_0 = 915$ m/s. Em ambos os casos, sabe-se que o ângulo de tiro cujo qual é o que permite que o projétil alcance uma distância máxima é $\theta = 40^\circ$.

Posteriormente, de modo a obter a área da secção do projétil com o objetivo de a incluir na fórmula respeitante à força de atrito, usa-se a seguinte

equação:

$$A = \frac{\pi}{4}d^2 \quad (1.1)$$

sendo d o calibre.

O modelo utilizado para a resolução do problema balístico da peça de 100 mm é um modelo de massa pontual, com as características admitidas anteriormente.

1.4 Fatores Dissipativos ao Movimento do Projétil na Atmosfera

As forças dissipativas incluem qualquer tipo de força de tal natureza que a energia seja dissipada do sistema quando o movimento ocorre.

Na prática, o que acontece muitas vezes é que num determinado corpo, a magnitude da força de atrito (f) pode ser representada de perto, sobre certos regimes de velocidade por

$$f = kv^n \quad (1.2)$$

onde v é a velocidade do corpo em causa, n é qualquer real e k é uma constante ou uma função de coordenadas e/ou tempo (Wells, 1967). Esta acaba por ser uma componente de uma série de Taylor, no caso mais geral.

1.4.1 Forças de Atrito Aerodinâmico

Num fluido como a atmosfera, uma força adicional causada pela resistência desse fluido no projétil terá o sentido oposto ao movimento do mesmo, designando-se por atrito. Os três fatores que contribuem para o atrito aerodinâmico são a resistência de fricção (*skin friction*), resistência de base (*base drag*) e resistência de onda (*wave drag*). A resistência de fricção é causada pela aderência do ar à superfície do projétil. A resistência de base é causada pela turbulência do ar que é provocada por uma bolsa de ar de baixa pressão atrás do projétil visto que o fluxo de ar não retorna rápido o suficiente de modo a preencher esse espaço, criando assim um efeito de sucção que surge como uma resistência ao avanço do projétil. Por fim, a resistência de onda é causada pela compressão e expansão do ar à medida que passa pelo projétil, dependendo assim essencialmente da forma da sua ogiva (Fann, 2006).

É conveniente usar o coeficiente de atrito para expressar a performance balística de um determinado projétil. Já se viu anteriormente que o atrito aerodinâmico pode ser dividido em vários componentes, sendo que em geral,

a força total de atrito pode ser expressa da seguinte forma

$$F_D = \frac{1}{2}\rho AC_D V^2 \quad (1.3)$$

em situações específicas que irão ser abordadas posteriormente, onde ρ é a densidade do ar em kg/m^3 , V é a velocidade do projétil, A é a área transversal baseada no calibre do projétil e C_D é o coeficiente de atrito que tem um valor entre 0 e 2. Em geral, quanto menor o valor de C_D , menor a queda da velocidade com o alcance. Deve ser informado, no entanto, que o C_D é apenas constante a velocidades muito inferiores a 300 m/s ou muito superiores a 1500 m/s (Farrar and Leeming, 1983).

Esta equação é determinada a partir de

$$\begin{aligned} E &\sim F_D \cdot \ell \\ \iff F_D &\sim \frac{E}{\ell} \sim \frac{\frac{1}{2}\rho(A\ell)V^2}{\ell} \sim \frac{1}{2}\rho AV^2 \sim C_D \frac{1}{2}\rho AV^2 \end{aligned}$$

em que E é a energia retirada do projétil, ℓ o deslocamento do projétil e o C_D surge na equação e acerta-se fazendo experiências de vento etc. O projétil vai perder velocidade porque vai ter de fornecer trabalho sobre uma massa de ar que está à sua frente.

Dependência do Regime de Atrito com a Velocidade do Projétil no Flúido atmosférico

Voltando ao início da secção anterior, de referir que o coeficiente de resistência aerodinâmica é geralmente apresentado em função do n^o de Mach. Este apresenta o nome do físico e filósofo austríaco Ernst Mach (1838-1916) e é um número adimensional que relaciona a velocidade do escoamento, neste caso sobre o projétil, e a velocidade do som c , representado na equação

$$M = \frac{v}{c} \quad (1.4)$$

onde M é o n^o de Mach, v é a velocidade do projétil em movimento e c é a velocidade do som no meio, símbolo tradicionalmente usado em Balística (não confundir com o símbolo utilizado para representar a velocidade da luz, no vazio) (da Silva Fonte-Boa, 2014).

Neste trabalho a ser desenvolvido, este parâmetro tem uma enorme importância visto que através do gráfico e da sua interpretação é possível retirar valores que, embora sejam aproximados, estão relativamente próximos da realidade. Estes valores são os correspondentes aos coeficientes de atrito, sendo obtidos por essa análise do gráfico na relação velocidade (Mach) no

eixo horizontal e C_D no eixo vertical. Vai ser referido posteriormente com mais detalhe, mas irá haver uma tentativa de demonstrar que C_D varia efetivamente com a velocidade e que em velocidades supersónicas como é o caso dos projéteis de tiro naval, não é um valor constante.

Segue-se o gráfico (1.3) com um exemplo do comportamento da função representativa do que se tem vindo a falar:

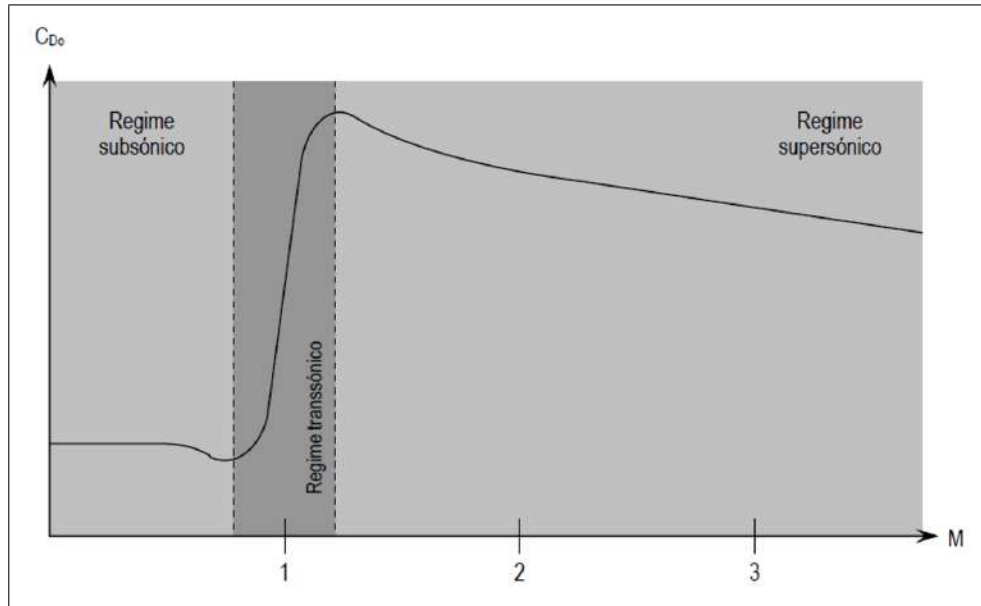


Figura 1.3: Variação típica do coeficiente de resistência aerodinâmica de um projétil estável em função da velocidade em mach (retirado de diapositivos da cadeira de Balística e Tiro, 2016, da autoria de CFR Conceição Palma)

Cada velocidade expressa em m/s pode ser convertida em M , sendo que para cada valor terão de ser tidos em conta os efeitos de compressibilidade, que em função deste parâmetro são estabelecidas diversas divisões de diferentes níveis de velocidade, como por exemplo a zona subsónica, transónica e supersónica.

Por definição, em Mach 1, a velocidade do projétil é igual a c . Por exemplo, quando se tem $M = 0.5$, v é 50% da velocidade do som na zona subsónica e quando $M = 1.20$ significa que v é 20% mais rápido do que a velocidade do som, isto na zona supersónica.

As classificações dos regimes de Mach que vão ser aqui abordadas estão descritas posteriormente na tabela (1.1).

Ainda referente à tabela, como foi possível verificar na figura (1.3), na região subsónica, o C_D é praticamente constante; em velocidades transónicas, o campo de escoamento em redor do projétil inclui partes subsónicas e

REGIME	VELOCIDADE	
	mach	m/s
Subsónico	<0.8	<272
Transónico	0.8 – 1.2	272 - 408
Supersónico	1.2 – 5.0	408 – 1 700

Tabela 1.1: Regimes de velocidade

supersónicas e o C_D é caracterizado por um aumento acentuado com o aumento do M . Quando um projétil excede Mach 1, uma grande diferença de pressão é criada na sua frente, sendo que essa diferença abrupta de pressão, chamada de onda de choque, estende-se para trás e para fora do projétil em forma de cone (cone de Mach), sendo que o comportamento de C_D é decrescer assintoticamente (Weinacht et al., 2005).

O número de Reynolds (Re) também é um fator importante na determinação do nosso C_D . O seu conceito é um pouco mais complexo, sendo posteriormente explicado detalhadamente, no entanto não vai ser tão utilizado quanto o M , visto que vai ser apenas importante para perceber o seu contexto. Este é um número adimensional que pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{\text{forças inerciais}}{\text{forças viscosas}} \\
 &= \frac{\rho u L}{\mu} \\
 &= \frac{u L}{\nu}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

sendo que u representa a velocidade do fluido em relação ao objeto em causa em m/s, ρ a densidade do ar (neste caso), L a dimensão linear característica em m, μ a viscosidade dinâmica do meio envolvente definido em kg/m.s e ν a viscosidade cinemática em m²/s e um exemplo de um gráfico característico é o seguinte:

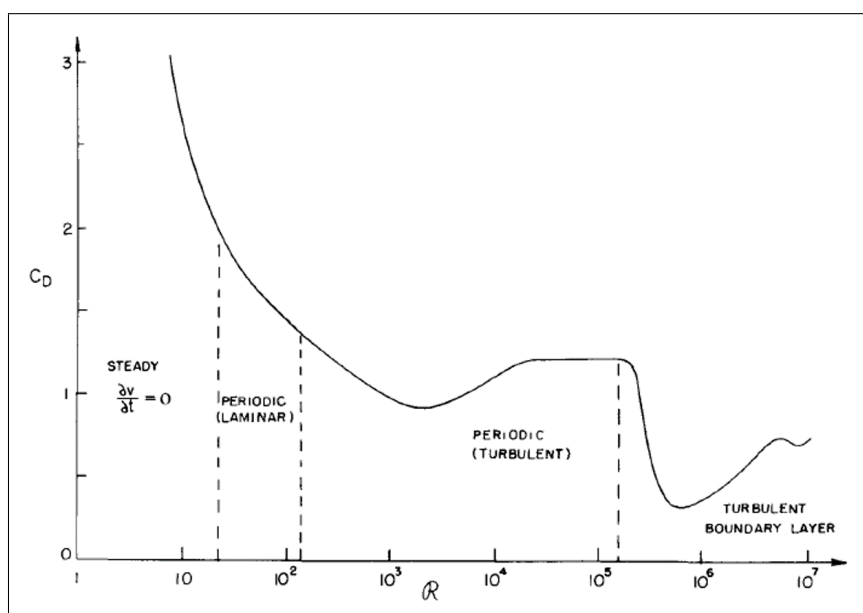


Figura 1.4: Coeficiente de atrito para um cilindro circular com a função do número de Reynolds (retirado de Feynman, 1964)

O seu significado físico pode ser definido como a proporção das forças de inércia para as forças viscosas, por isso quando o Re é elevado (regime de fluxo turbulento), quer dizer que as forças de inércia são dominantes sobre as forças viscosas, havendo tendência a haver instabilidades do escoamento; quando o Re é menor (regime de fluxo laminar), quer dizer que as forças viscosas são dominantes sobre as forças inerciais e é caracterizado pelo movimento do fluido suave e constante (da Silva Fonte-Boa, 2014).

O C_D varia de uma maneira bastante complexa, dando-nos uma indicação de que algo interessante está a acontecer no fluxo. Vamos agora descrever a natureza do mesmo para os diferentes regimes de Re . Primeiro, quando Re é muito pequeno, o fluxo é aproximadamente constante, ou seja, a velocidade é praticamente constante em qualquer lugar e o fluxo passa pelo cilindro, forma geométrica que vamos supor que é uma aproximação do nosso modelo em estudo, no entanto o caso concreto que estamos aqui a descrever é um cilindro que está transversal ao escoamento do fluido.

Quando nos encontramos na situação em que a velocidade é muito baixa ou equivalentemente quando a viscosidade é muito alta, então sabe-se que os termos inerciais são desprezíveis.

Vai havendo muitas fases até que à medida que Re vai aumentando cada

vez mais, a região turbulenta segue até atingir o ponto em que as linhas de fluxo deixam o cilindro - para fluxos um pouco acima de $Re = 10^3$ (Feynman et al., 1964).

1.4.2 Efeitos de Rotação do Projétil

Como se sabe, na construção de armas, no interior do cano das peças há uma série de estrias que têm a finalidade de fornecer um movimento giratório aos projéteis.

Ao viajar pelo ar, a sua ação giratória faz com que haja a tendência em suportar qualquer força que tente alterar a posição do eixo sobre o qual está a girar, sendo este fenômeno designado por ação giroscópica. No caso do projétil, essa ação tende a manter o projétil em curso, possibilitando a previsão do curso do mesmo, logo há uma maior precisão de fogo. Caso não houvesse este efeito giratório, este rodaria acentuadamente durante o voo e conseqüentemente surgia a impossibilidade de previsão da sua trajetória (Carlucci and Jacobson, 2008).

Verifica-se então que gira em torno do seu eixo geométrico e conseqüentemente em torno da tangente à trajetória, estando ora acima ora abaixo (precessão).

Com isto, surge a deriva em que a sua origem mais importante é mesmo essa, ou seja, devido ao movimento de rotação do projétil em torno da trajetória.

Apesar de que com o modelo a utilizar, este efeito não é considerado nos casos a ser comparados, vai ser introduzida no programa uma opção que permite adicionar a deriva ao resultado numérico da trajetória balística projetada, em que, sabendo que não há uma fórmula genérica para todos os casos que não apresente erros, vai-se supor a equação semi-empírica (1.6) como aquela que melhor traduz o valor da derivação, isto é, do afastamento em cada ponto de trajetória, em casos de Tiro Naval,

$$z = Kt^2 \cos(s) \quad (1.6)$$

sendo z o afastamento lateral em qualquer ponto; K a constante empírica obtida através de tiros experimentais, em que nestes projéteis em estudo é aproximadamente 0,1548; t a duração do percurso e s o ângulo de sítio.

1.4.3 Efeito de Coriolis

O Efeito de Coriolis é causado pela rotação da Terra e é simplesmente a deflexão de um corpo em movimento num referencial rotativo. Sabendo que

o movimento de um ponto da superfície terrestre descreve uma trajetória diária circular, o alvo fixo nessa superfície ter-se-ia afastado de acordo com a rotação da Terra enquanto o projétil ainda estivesse em voo.

Como a taxa de rotação da Terra é constante, o ângulo através do qual a Terra gira durante o voo de um projétil é dependente do tempo de voo, sendo que a deriva resultante é ampliada pelo alcance da trajetória e o tempo anteriormente referido e depende, por sua vez, da localização geográfica da peça que vai efetuar o tiro. Conseqüentemente, mísseis de longo alcance são severamente afetados por essa deriva.

Existem três formas distintas de abordar a deriva, sendo que as duas primeiras afetam principalmente o alcance do projétil e a terceira afeta principalmente o rumo relativamente ao alvo.

A primeira forma surge quando um projétil é disparado verticalmente no Equador. Durante o período de voo, a Terra gira de modo a que o projétil caia num ponto a Oeste do ponto de lançamento.

A segunda forma de deriva é observada para trajetórias entre pontos na mesma latitude. Ao disparar para Leste, ou seja, na mesma direção da rotação da Terra, vai fazer com que o projétil passe sobre o alvo. Por outro lado, disparar para Oeste faz com que o projétil fique aquém do alvo. Haja o tiro para Leste ou Oeste, esta forma de deriva é sempre para Leste. Estas duas formas de deriva são maiores no Equador e diminuem em direção aos pólos.

Seguidamente é apresentada uma imagem que mostra o alcance aquando de o tiro se dirigir para Leste, neste caso a baixa altitude, no entanto com duas situações distintas, em que na primeira a rotação da Terra é ignorada e na segunda observa-se a rotação real da Terra, ou seja, para Leste (Farrar and Leeming, 1983).

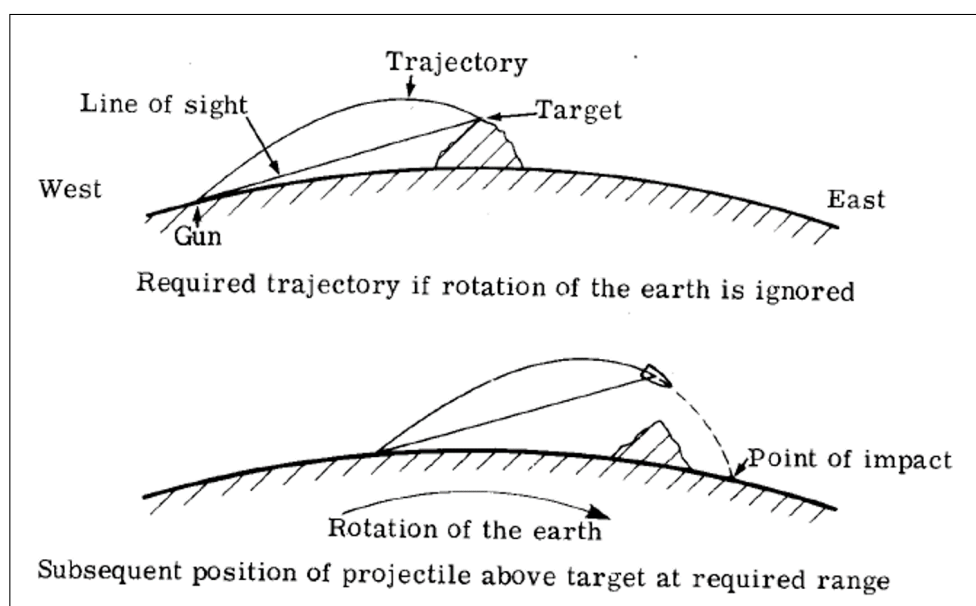


Figura 1.5: Extensão do alcance ao disparar para Leste a baixa altitude (retirado de Farrar and Leeming, 1983)

Já na terceira forma de deriva, considera-se que o tiro é feito através do Pólo Norte. Durante o tempo de voo, a Terra gira no sentido anti-horário, fazendo com que o projétil caia à direita do ponto de mira. Esta deriva para a direita ocorre em todo o hemisfério Norte, embora diminua em direção ao Equador, chegando a não haver no próprio Equador. O efeito é invertido no hemisfério Sul, causando deriva para a esquerda (Farrar and Leeming, 1983).

É possível fazer uma estimativa das correções a fazer na trajetória tendo em conta as localizações geográficas do ponto de lançamento e do alvo. A resolução analítica da deriva devido ao Efeito de Coriolis é complexa e até mesmo integrar este efeito em software computacional, é um trabalho exigente. Nesta tese, vai-se assumir que as correções necessárias já foram feitas e que o Efeito de Coriolis tem um efeito mínimo na precisão e por isso também pode ser desprezado (Fann, 2006).

No entanto, este efeito vai ser novamente invocado na parte da formulação de Euler-Lagrange, de modo a servir como um exemplo e mostrar como é que é possível inclui-lo numa só forma invariável com diferentes conteúdos implícitos, quando se quer que o tratamento balístico seja mais real.

1.4.4 Efeitos do Vento

O vento tem influência na trajetória do projétil, ou seja, se este soprar da esquerda, a trajetória do projétil direcionar-se-á para a direita e vice-

versa; se o projétil se direcionar no sentido do vento o alcance aumentará, caso contrário o alcance será diminuído.

Se o vento se direcionar em ângulo reto com a linha de fogo do projétil, este é designado de "vento cruzado"; se estiver a soprar ao longo da linha de fogo, com ou contra o projétil, é chamado de "vento longitudinal" (Farrar and Leeming, 1983).

No entanto, visto que os nossos objetivos focam-se principalmente com outros parâmetros primários, este também vai ser desprezado, no entanto num trabalho futuro poderá ser discutido.

Capítulo 2

Trajетórias Balísticas na Dinâmica de Newton

Este capítulo vai abordar de uma forma concentrada as trajetórias balísticas na dinâmica de Newton, em que se apresentam as duas maneiras mais comuns de analisar um problema desta natureza, isto é, sem atrito e com atrito do meio circundante. Inúmeras equações irão ser resolvidas tanto analiticamente como numericamente.

2.1 Resultados do Estudo das Trajetórias Balísticas na Dinâmica de Newton

É sabido, através da literatura, que o problema central da mecânica clássica de um corpo está normalmente focado na descoberta da função $\mathbf{x}(t)$ que descreve, em relação a um referencial cartesiano de referência inercial, as posições por ele tomadas em seqüências de tempo, t .

Este é o problema abordado por Newton, segundo o qual a nossa tarefa analítica é descobrir a solução da equação diferencial

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (2.1)$$

que esteja em conformidade com os dados inseridos inicialmente.

Nesta abordagem e relacionado com o que vai ser apresentado seguidamente ao longo do capítulo, vai haver a divisão entre o estudo das trajetórias balísticas em casos em que se supõem muitos valores constantes quando na realidade não o são e por outro lado já uma preocupação em fazer o estudo com mais realismo, através de métodos numéricos.

2.1.1 Modelo Newtoniano do Movimento de um Projétil no Vácuo, com Gravidade

Um caso típico deste tipo de problemas, em que se começa este assunto assumindo que não há atmosfera, mas sim vácuo, considera um projétil que é disparado num ângulo de elevação θ e com uma velocidade inicial de v m/s. A primeira lei do movimento de Newton afirma que um corpo em movimento continua a mover-se em linha reta a uma velocidade constante, a menos que seja aplicada uma força externa. Portanto, na ausência de gravidade ou outras forças, o projétil continuaria na sua direção inicial e manteria a sua velocidade inicial. Mas, obviamente, existe uma força externa conhecida que é a força resultante do campo gravitacional da Terra, que tem a particularidade de puxar o projétil de volta para o centro da Terra com uma aceleração de 9.81 m/s^2 . Este valor na realidade não é sempre constante, variando desde logo com a altitude, no entanto nesta tese, vai ser assim considerado.

Na formulação Newtoniana a dinâmica de um ponto material com massa m sob a acção dum campo de forças \mathbf{F} é deduzida a partir da 2ª Lei de Newton,

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= m\mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que \mathbf{a} representa a aceleração desse mesmo ponto material e m a massa inercial.

As equações do movimento são determinadas pela forma do peso em que temos

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$m_I\mathbf{a} = m_g\mathbf{g}$$

pelo que, sendo m_I a massa inercial, m_g a massa gravítica e $m_I = m_g$

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \quad (2.3)$$

A primeira conclusão que podemos tirar da equação (2.3) é que, tal como no caso particular da queda livre, o movimento de um projétil é independente do valor da sua massa, pelo que às mesmas condições iniciais deverá corresponder a mesma trajetória, para quaisquer dois projéteis que sejam lançados.

Tendo por base a mesma equação, modelemos a trajectória no vácuo de um ponto material de massa m sujeito à acção de um campo gravítico vertical constante. Assuma-se um referencial cartesiano com o eixo dos xx orientado

horizontalmente e o eixo dos yy orientado verticalmente (eixo de acção da interacção gravítica, g) fazendo

$$\mathbf{F}(t) = (0, -mg) \quad (2.4)$$

e

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) \quad (2.5)$$

Teremos as seguintes equações de movimento:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases} \quad (2.6)$$

em que as posições iniciais do projétil são, por hipótese

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Em termos de aceleração, de referir que como só há aceleração (g) na direcção vertical, a velocidade na direcção horizontal é constante. As componentes da aceleração em situação de condições iniciais são:

$$\begin{cases} a_{x_0} = \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_0 = 0 \\ a_{y_0} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)_0 = -g \end{cases} \quad (2.8)$$

No que toca à velocidade, a sua componente horizontal permanece inalterada durante o movimento, enquanto que a sua componente vertical muda linearmente devido à gravidade que é constante. As acelerações nos dois eixos podem ser integrados para resolver as componentes da velocidade em qualquer momento t , como se segue:

$$\begin{cases} v_{x_0} = \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = v_0 \cos(\theta_0) \\ v_{y_0} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 = v_0 \sin(\theta_0) - gt \end{cases} \quad (2.9)$$

tendo por base a expressão vetorial da velocidade de acordo com o teorema de pitágoras:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2.10)$$

Sendo as soluções das equações do movimento para estas condições iniciais

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos(\theta_0) \\ y(t) = v_0 t \sin(\theta_0) - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Ao determinar a expressão de t de modo a eliminar na 2ª equação, obtém-se o seguinte:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)} \\ y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)} \sin(\theta_0) - \frac{1}{2}g \left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \right) \end{cases}$$

Com esta eliminação de t , obtemos a equação da trajetória (2.12)

$$y(x) = x \tan(\theta_0) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \quad (2.12)$$

sendo que dá origem a uma trajetória com um comportamento parabólico como na figura (2.1).

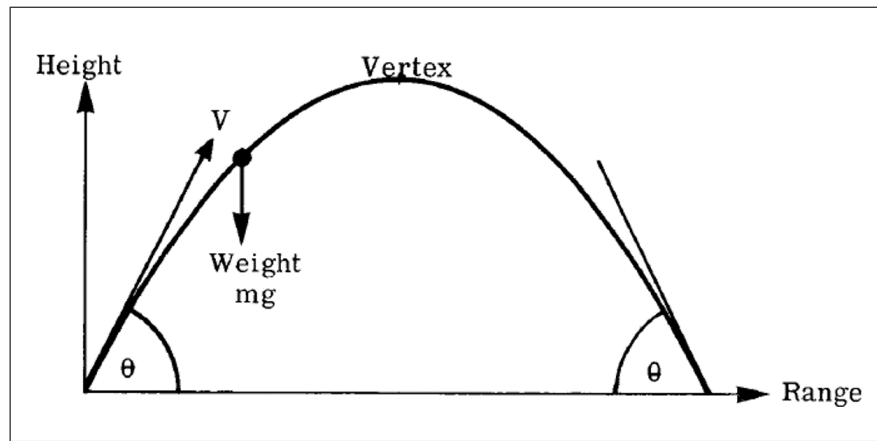


Figura 2.1: Trajetória de um projétil apenas assumindo a gravidade, em que height é a altura, weight é o peso, vertex é o vértice e range é o alcance (retirado de Farrar and Leeming, 1983)

Nestas condições, a parábola terá sempre a concavidade dirigida no sentido do vetor aceleração.

De modo a determinar o tempo total T durante o qual o projétil permanece no ar, impõe-se a seguinte condição:

$$y(t) = 0$$

visto que após o voo, o projétil retorna ao eixo longitudinal, ficando

$$\begin{aligned} v_0 T \sin(\theta_0) - \frac{1}{2}gT^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow T &= \frac{2v_0 \sin(\theta_0)}{g} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por acréscimo, de modo a conhecermos a altura máxima do projétil, deverá ser recordado que, nesse ponto, $v_y = 0$ para se saber o tempo até chegar à altura máxima y_v

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin(\theta_0) - gt_v \\ \Leftrightarrow t_v &= \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g} \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo que no fim basta substituir na equação de $y(t)$ o t determinado, ficando:

$$\begin{aligned} y_t &= v_0 t_v \sin(\theta_0) - gt_v^2 \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como se vê, a distância máxima (R) do projétil, juntamente com a sua altura máxima, não dependem da sua massa. Assim, o valor final destes dois mencionados são iguais para todos os corpos que são lançados com a mesma velocidade e direção. Sabendo que o alcance é a distância horizontal que o projétil percorreu quando retorna à sua altura inicial ($y = 0$)

$$v_0 t_R \sin(\theta_0) - gt_R^2 = 0$$

e recordando que

$$t_R = 2v_0 \frac{\sin(\theta_0)}{g}, \quad (2.16)$$

a partir da equação de movimento de componente horizontal, a sua expressão final é

$$\begin{aligned} R &= v_0 t_R \cos(\theta_0) \\ &= \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sendo que R apresenta o seu máximo valor quando

$$\begin{aligned} \sin(2\theta_0) &= 1 \\ \Rightarrow 2\theta_0 &= 90^\circ \\ \Leftrightarrow \theta_0 &= 45^\circ \end{aligned}$$

resultando em

$$R_{máx} = \frac{v_0^2}{g} \quad (2.18)$$

Como exemplo expresso graficamente em MATLAB, a figura seguinte representa a trajetória de um projétil de 100 mm com $v_0 = 870 \text{ m/s}$ e $\theta_0 = 30^\circ$:

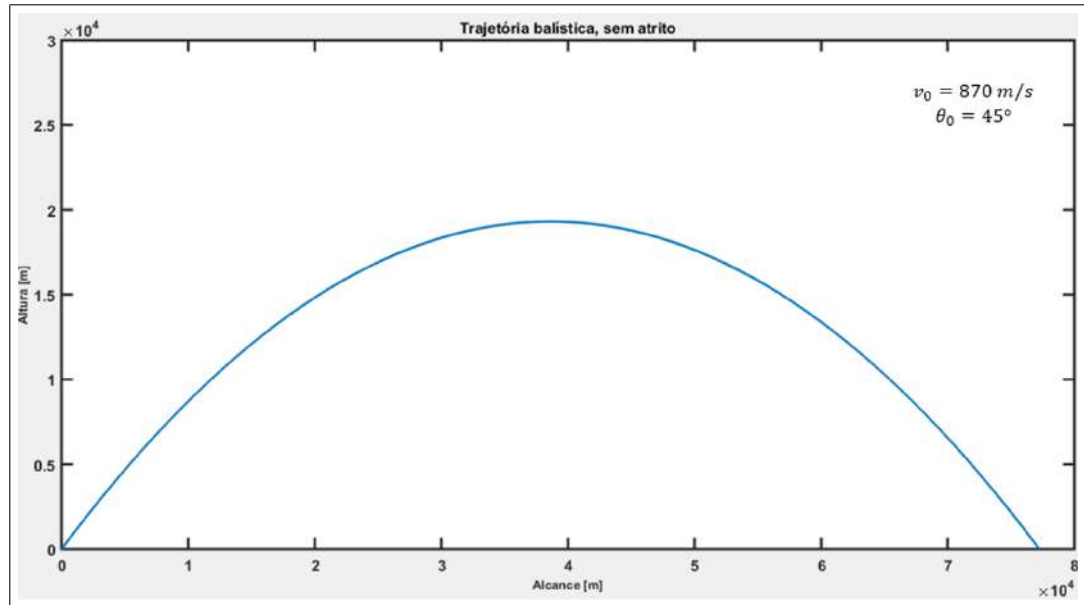


Figura 2.2: Trajetória balística, sem atrito, obtida no MATLAB

2.1.2 Resolução analítica do Movimento de um Projétil, com Atrito Proporcional à Velocidade

Até agora considerámos o voo de um projétil no vácuo tendo visto os efeitos da gravidade, da velocidade inicial e do ângulo de disparo na trajetória do projétil quando a resistência do ar é negligenciada. No entanto é claro que não deveremos supor que na área de combate existe o vácuo, por isso devemos compreender bem os efeitos da resistência do ar no curso do projétil, se é que queremos marcar impacto no alvo.

O efeito da gravidade sobre o projétil permanece constante e θ_0 e v_0 ainda afetam a trajetória do projétil da mesma maneira. Daí a discussão anterior destes efeitos no vácuo também se aplicar ao voo do projétil no ar.

Na diversa literatura sobre o assunto, também damos conta que quando um projétil percorre o seu caminho através do ar, este último é forçado a sair do seu caminho, sendo que conforme o ar é movido para o lado, este exerce uma força sobre o projétil que se opõe ao seu movimento. Quanto mais rápido o movimento do projétil no ar, mais rapidamente obriga o ar a sair do seu caminho e quanto mais rápido o ar é retirado da sua posição

original, maior é a força exercida sobre o projétil. Assim, a resistência do ar tem um efeito maior sobre os projéteis que se encontram a elevadas velocidades relativamente aos que apresentam valores mais baixos desse parâmetro, embora, no voo supersónico, C_D decresce ligeiramente com o aumento da velocidade, como ilustrado na figura (1.3). Aqui se encontra um dos motivos de estudo nesta secção visto que se pretende não só agora, mas posteriormente, conhecer os comportamentos de cada um dos regimes de atrito, visto que dependem da velocidade.

Aqui, v_0 , v_x e v_y serão usados para denotar, mais uma vez, a velocidade inicial, a velocidade ao longo do eixo das abcissas e a velocidade ao longo do eixo das ordenadas, respetivamente. A massa do projétil será denotado por m . Mais uma vez, o projétil é disparado da origem $(0, 0)$.

A força

$$\mathbf{F}_D = -k\mathbf{V} \quad (2.19)$$

é aqui representativa da resistência do ar cuja direção é oposta à velocidade do projétil. É assim expresso devido à suposição inicial de proporcionalidade direta que implica que essa resistência e a velocidade diferem apenas por um fator arbitrário constante.

As relações que representam o movimento da partícula são derivadas pela 2ª Lei de Newton, ambas nas direções x e y .

De um modo geral temos

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - m\mathbf{g} \quad (2.20)$$

em que temos que

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}} \quad (2.21)$$

e

$$\mathbf{g} = 0\hat{\mathbf{x}} + (-g)\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{z}} \quad (2.22)$$

e supondo que

$$k = \frac{1}{2}\rho AC_D \quad (2.23)$$

A partir daqui é então importante haver a referida separação que ocorre nos dois eixos x e y , obtendo

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \frac{dy}{dt} - mg \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{k}{m} v_y - g \end{array} \right. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Deve-se salientar, antes de prosseguirmos, que a verdadeira resistência real do ar contra um projétil em movimento é uma função mais complexa da velocidade, de modo que as soluções que obtemos serão apenas aproximadas, embora indiquem a natureza geral do movimento. Aqui, em particular, estamos a admitir que k não depende da velocidade (Hayen, 2015).

Se o projétil começa da origem em $t = 0$, as soluções das equações anteriormente representadas são as apresentadas abaixo, sendo que numa primeira instância irá ser deduzida a expressão $x(t)$.

Começando então por usar a equação de $\frac{dv_x}{dt}$,

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{k}{m}v_x \\ &= -\gamma v_x\end{aligned}\tag{2.25}$$

em que

$$\gamma = \frac{k}{m}\tag{2.26}$$

Primitivando ambos os termos, temos

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\gamma v_x \\ \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} &= -\gamma dt \\ \Rightarrow \ln v_x &= -\gamma t + \ln v_{x_0}\end{aligned}\tag{2.27}$$

Exponenciando de igual forma ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned}v_x(t) &= e^{-\gamma t} e^{\ln v_{x_0}} \\ &= v_{x_0} e^{-\gamma t}\end{aligned}\tag{2.28}$$

resultando em

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t v_{x_0} e^{-\gamma t} dt \\ &= v_{x_0} \left[\frac{e^{-\gamma t}}{-\gamma} \right]_0^t \\ &= (-\gamma v_{x_0} e^{-\gamma t}) - \left(-\frac{1}{\gamma} v_{x_0} e^0 \right) \\ &= \frac{v_{x_0}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + x_0\end{aligned}\tag{2.29}$$

Numa segunda instância irá ser deduzida a expressão de $y(t)$

Partimos então de

$$\begin{aligned}\frac{dv_y}{dt} &= -\gamma v_y - g \\ \Leftrightarrow \frac{dv_y}{dt} + \gamma v_y + g &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(v_y + \frac{g}{\gamma} \right) + \gamma \left(v_y + \frac{g}{\gamma} \right) &= 0\end{aligned}\quad (2.30)$$

Esta equação diferencial de primeira ordem, linear e homogênea, pode ser resolvida de várias maneiras, no entanto, neste caso, será mais rápido abordar a solução por meio de uma nova variável v'_y com

$$v'_y = v_y + \frac{g}{\gamma} \quad (2.31)$$

Daqui resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} v'_y + \gamma v'_y &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dv'_y}{v'_y} &= -\gamma dt\end{aligned}$$

Primitivando, fica

$$\ln v'_y = -\gamma t + \ln V'_y$$

onde $\ln V'_y$ é uma constante de integração. Após exponenciar a equação, temos

$$v'_y = V'_y e^{-\gamma t}$$

Mas

$$\begin{aligned}v'_y &= v_y + \frac{g}{\gamma} \\ \Rightarrow v_y &= v'_y - \frac{g}{\gamma} \\ &= V'_y e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}\end{aligned}\quad (2.32)$$

Ora, visto que em $t = 0$ se tem

$$\begin{aligned}v_y(0) &= v_{y0} = V'_y - \frac{g}{\gamma} \\ \Rightarrow V'_y &= v_{y0} + \frac{g}{\gamma}\end{aligned}$$

$$\implies v_y(t) = \left(v_{y_0} + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \quad (2.33)$$

Portanto, para a respetiva coordenada $y(t)$ temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int v_y(t) dt \\ &= \left(v_{y_0} + \frac{g}{\gamma} \right) \frac{e^{-\gamma t}}{-\gamma} - \frac{g}{\gamma} t + k_0 \\ &= -\frac{1}{\gamma} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} t + k_0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Admitindo a condição inicial $y(t=0) = y_0$, vem

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{1}{\gamma} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\gamma} \right) e^0 - 0 + k_0 \\ \implies k_0 &= \frac{1}{\gamma} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\gamma} \right) + y_0 \\ \implies y(t) &= \frac{1}{\gamma} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t + y_0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Agora, para extrair a forma da trajetória elimina-se a variável temporal t entre as expressões de $x(t)$ e $y(t)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_{x_0}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{\gamma} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t + y_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\beta t} = 1 - \frac{\gamma}{v_{x_0}} x \Rightarrow t = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma}{v_{x_0}} x \right) \\ y(t) = \frac{1}{\gamma} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{v_{x_0}} x - \frac{g}{\gamma} t \end{cases}$$

e substituindo em $y(t)$, vem

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\tan \theta_0 + \frac{g}{\gamma v_{x_0}} \right) x + \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma}{v_{x_0}} x \right) \\ &= \left(\frac{g}{\gamma v_{x_0}} + \tan \theta_0 \right) x - \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(\frac{v_{x_0}}{v_{x_0} - \gamma x} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

sendo que esta expressão de $y(x)$ é a nossa equação de trajetória quando se admite que o atrito é proporcional à velocidade.

De modo a obtermos o alcance, começa-se por esta última equação $y(x)$ e igualá-la a 0, de modo semelhante à situação da não existência de atrito.

Assim, e já supondo que a abcissa correspondente, isto é, o alcance, vai ser agora representada por R , fica

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\frac{g}{\gamma v_{x_0}} + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} \right) R - \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(\frac{v_{x_0}}{v_{x_0} - \gamma R} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{v_{x_0}}{v_{x_0} - \gamma R} \right) &= \frac{\gamma^2}{g} \left(\frac{g}{\gamma v_{x_0}} + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} \right) R \end{aligned}$$

Usando aqui a função exponencial e chamando $\gamma_2 = \frac{\gamma^2}{g} \left(\frac{g}{\gamma v_{x_0}} + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} \right)$ e posteriormente $\gamma_3 = \frac{\gamma}{v_{x_0}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{v_{x_0}}{v_{x_0} - \gamma R} &= e^{\gamma_2 R} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{v_{x_0}} R} &= e^{\gamma_2 R} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \gamma_3 R} &= e^{\gamma_2 R} \\ \Leftrightarrow \gamma_3 R &= 1 - e^{-\gamma_2 R}, \end{aligned}$$

uma equação não algébrica (isto é, transcendente).

Se $\gamma_2 R \ll 1$, então

$$e^{-\gamma_2 R} = 1 - \gamma_2 R + \frac{1}{2} \gamma_2^2 R^2$$

e fica

$$\begin{aligned} \gamma_3 R &= 1 - \left(1 - \gamma_2 R + \frac{1}{2} \gamma_2^2 R^2 \right) \\ \Leftrightarrow \gamma_3 R &= \gamma_2 R + \frac{1}{2} \gamma_2^2 R^2 \\ \Leftrightarrow \gamma_3 &= \gamma_2 + \frac{1}{2} \gamma_2^2 R \\ \Leftrightarrow R &\approx \frac{2(\gamma_3 - \gamma_2)}{\gamma_2^2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$R \approx \frac{2v_{x_0} v_{y_0}}{g} \quad (2.37)$$

(Symon, 1971)

Segue-se um exemplo da forma de uma trajetória com as forças de resistência do ar, lineares na velocidade, incluídas, também obtida no MATLAB, com $C_D = 0.2$.

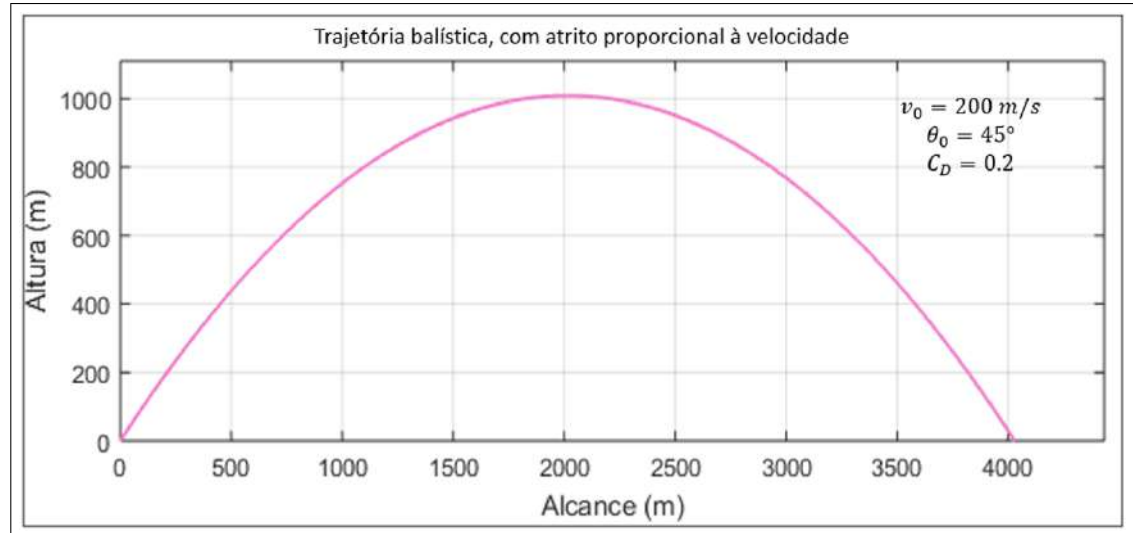


Figura 2.3: Trajetória balística, com atrito proporcional à velocidade

Conclusões e comparações entre os diversos regimes e mesmo dentro do mesmo regime serão tiradas posteriormente.

2.1.3 Resolução analítica e numérica do Movimento de um Projétil, com Atrito Proporcional ao Quadrado da Velocidade

Considera-se um movimento bidimensional a um projétil que está sob uma força gravitacional constante e também de uma força de atrito do fluido circundante que é quadrática com a velocidade do projétil. As equações de movimento são equações não lineares acopladas. As suas soluções apresentam propriedades gerais que são facilmente visualizadas, embora muito diferentes daquelas obtidas quando uma força de atrito é desprezada (Hayen, 2001). Nesta primeira secção, obtemos soluções simples aproximadas para as equações de movimento. Um exemplo numérico é usado para comparar essas soluções aproximadas com resultados precisos obtidos por integração numérica a partir de uma solução exata, mas implícita. Finalmente, a origem da força de atrito proporcional ao quadrado da velocidade é discutida (Parker, 1977).

Modelos balísticos de Resolução analítica

Modelo de aproximação com parâmetros constantes Nesta fase, tal como já foi referido, irá ser abordada a questão mais realista das trajetórias balísticas aquando da utilização de projéteis supersônicos, no entanto de uma forma ainda muito aproximada.

Sendo a 2ª Lei de Newton representada pela equação (2.2), seguindo a figura (2.4) (Chand and Panda, 2007)

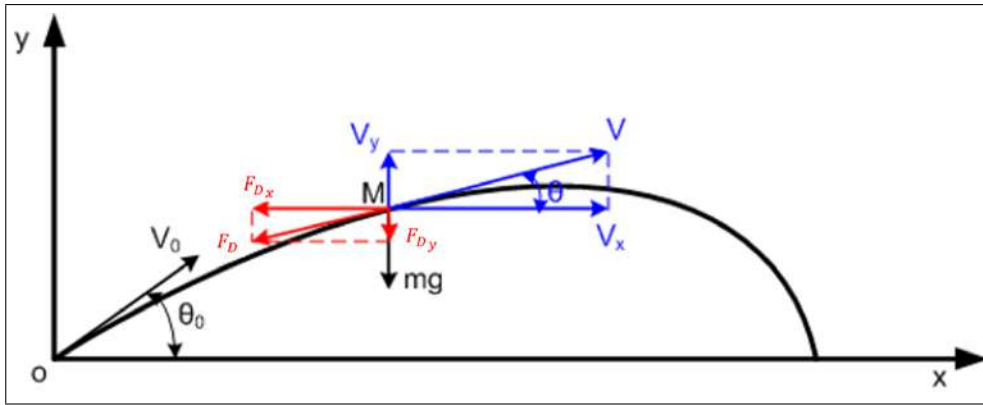


Figura 2.4: Trajetória balística tendo em conta o peso do projétil e a resistência do ar

temos que

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -F_D \cos(\theta) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -F_D \sin(\theta) - mg \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2} \rho A C_D V^2 \cos(\theta) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2} \rho A C_D V^2 \sin(\theta) - mg \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2} \rho A C_D V^2 \frac{dx}{dt} \frac{1}{V} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2} \rho A C_D V^2 \frac{dy}{dt} \frac{1}{V} - mg \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2} \rho A C_D V \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2} \rho A C_D V \frac{dy}{dt} - mg \end{cases} \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

em que se assume que α é uma constante que representa o coeficiente simplificado de atrito, apresentando os seguintes parâmetros

$$\alpha = \frac{1}{2} \rho A C_D V \quad (2.39)$$

onde ρ representa a densidade do ar em kg/m^3 , V a velocidade do projétil em m/s , A a seção transversal do projétil em m^2 e C_D o coeficiente de resistência aerodinâmica, compreendido entre 0 e 2. Utilizaremos a aproximação em que C_D é tomado como um valor constante, escolhido dentro daquela gama indicada, mas em resultado da velocidade à boca da arma. Já

$$F_D = \frac{1}{2}\rho AC_D V^2 \quad (2.40)$$

correspondente ao módulo da força de atrito atmosférico.

Daqui resulta, em termos de x

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{1}{2}\rho AC_D V \frac{dx}{dt} \\ \Leftrightarrow m \frac{dv_x}{dt} &= -\alpha v_x \\ \Leftrightarrow \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{\alpha}{m} v_x \\ &= -\beta v_x \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde é possível verificar que se usou a abreviatura

$$\beta = \frac{\alpha}{m} \quad (2.42)$$

Temos, para descobrir $v_x(t)$ e $x(t)$, os seguintes passos:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} + \beta v_x &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} &= -\beta dt \end{aligned}$$

Primitivando, ficamos com

$$\ln v_x = -\beta t + \ln v_{x_0}$$

Exponenciando fica

$$v_x(t) = v_{x_0} e^{-\beta t} \quad (2.43)$$

Primitivando de novo, fica

$$x(t) = \frac{v_{x_0} e^{-\beta t}}{-\beta} + X_0 \quad (2.44)$$

Mas com a condição em que $x(t=0) = x_0$, vem

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{v_{x_0}}{\beta} + X_0 \\ \Rightarrow X_0 &= x_0 + \frac{v_{x_0}}{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= \frac{v_{x0}}{-\beta} e^{-\beta t} + x_0 + \frac{v_{x0}}{\beta} \\ &= \frac{v_{x0}}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + x_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Já para o caso em que se vai ter em conta o eixo y , faz-se o seu estudo partindo então de

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= -\beta v_y - g \\ \Leftrightarrow \frac{dv_y}{dt} + \beta v_y + g &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(v_y + \frac{g}{\beta} \right) + \beta \left(v_y + \frac{g}{\beta} \right) &= 0 \end{aligned}$$

De um modo bastante semelhante ao procedimento utilizado no caso do atrito proporcional à velocidade, deverá a partir de agora ser usada uma nova variável

$$v'_{y2} = v_y + \frac{g}{\beta} \quad (2.46)$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v'_{y2} + \beta v'_{y2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dv'_{y2}}{v'_{y2}} &= -\beta dt \end{aligned}$$

Primitivando, fica

$$\ln v'_{y2} = -\beta t + \ln V'_{y2}$$

onde $\ln V'_{y2}$ é uma constante de integração.

Após exponenciar a equação, temos

$$v'_{y2} = V'_{y2} e^{-\beta t}$$

Mas

$$\begin{aligned} v'_{y2} &= v_y + \frac{g}{\beta} \\ \Rightarrow v_y &= v'_{y2} - \frac{g}{\beta} \\ &= v'_{y2} e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \end{aligned}$$

Ora, visto que em $t = 0$ se tem

$$\begin{aligned} v_y(0) &= v_{y_0} = V'_{y_2} - \frac{g}{\beta} \\ &\implies v_{y_2} = v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \\ &\implies v_y(t) = \left(v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Por isso, também se tem

$$\begin{aligned} y(t) &= \int v_y(t) dt \\ &= \left(v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \right) \frac{e^{-\beta t}}{-\beta} - \frac{g}{\beta} t + k_0 \\ &= -\frac{1}{\beta} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} t + k_0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Admitindo a condição inicial $y(t = 0) = y_0$

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{1}{\beta} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \right) e^0 - 0 + k_0 \\ &\implies k_0 = \frac{1}{\beta} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \right) + y_0 \\ &\implies y(t) = \frac{1}{\beta} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t + y_0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Agora, para determinar a expressão que representa o t , resolve-se o seguinte sistema:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_{x_0}}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{\beta} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t + y_0 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\beta t} = 1 - \frac{\beta}{v_{x_0}} x \Rightarrow -\beta t = \ln \left(1 - \frac{\beta}{v_{x_0}} x \right) \Rightarrow t = -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\beta}{v_{x_0}} x \right) \\ y(t) = \frac{1}{\beta} \left(v_{y_0} + \frac{g}{\beta} \right) \frac{\beta}{v_{x_0}} x - \frac{g}{\beta} t \end{cases}$$

e substituindo em $y(t)$,

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\tan \theta_0 + \frac{g}{\beta v_{x_0}} \right) x + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(1 - \frac{\beta}{v_{x_0}} x \right) \\ &= \left(\frac{g}{\beta v_{x_0}} + \tan \theta_0 \right) x - \frac{g}{\beta^2} \ln \left(\frac{v_{x_0}}{v_{x_0} - \beta x} \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

De modo a obtermos o alcance, começa-se por pegar nesta última equação $y(x)$ e igualar a 0, de modo semelhante à situação da não existência de atrito.

Assim, e já supondo que o x inicialmente apresentado vai ser aqui imposto como R , fica

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\frac{g}{\beta v_{x_0}} + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} \right) R - \frac{g}{\beta^2} \ln \left(\frac{v_{x_0}}{v_{x_0} - \beta R} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{v_{x_0}}{v_{x_0} - \beta R} \right) &= \frac{\beta^2}{g} \left(\frac{g}{\beta v_{x_0}} + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} \right) R \end{aligned}$$

Usando aqui a função exponencial e admitindo que $\beta_2 = \frac{\beta^2}{g} \left(\frac{g}{\beta v_{x_0}} + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} \right)$ e posteriormente que $\beta_3 = \frac{\beta}{v_{x_0}}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{v_{x_0}}{v_{x_0} - \beta R} &= e^{\beta_2 R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{\beta}{v_{x_0}} R} &= e^{\beta_2 R} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \beta_3 R} &= e^{\beta_2 R} \\ \Leftrightarrow \beta_3 R &= 1 - e^{-\beta_2 R}, \end{aligned}$$

uma equação transcendente.

Se $\beta_3 R \ll 1$, então

$$e^{-\beta_2 R} = 1 - \beta_2 R + \frac{1}{2} \beta_2^2 R^2$$

e fica

$$\begin{aligned} \beta_3 R &= 1 - \left(1 - \beta_2 R + \frac{1}{2} \beta_2^2 R^2 \right) \\ \Leftrightarrow \beta_3 R &= \beta_2 R + \frac{1}{2} \beta_2^2 R^2 \\ \Leftrightarrow \beta_3 &= \beta_2 - \frac{1}{2} \beta_2^2 R \\ \Leftrightarrow R &\approx \frac{2(\beta_2 - \beta_3)}{\beta_2^2} \\ \Leftrightarrow R &\approx \frac{2v_{x_0} v_{y_0}}{g} \end{aligned} \tag{2.52}$$

Notar a importância da aproximação realizada logo no início destas últimas deduções. De facto, embora a força de atrito D dependa do quadrado da velocidade do projétil, suposemos que afinal dela se obtinha um coeficiente constante α , o que é obviamente falso. Além disso, e pela mesma razão, as duas equações diferenciais a resolver estão acopladas, acoplamento este que desaparece também com aquela mesma aproximação (Han et al., 2016).

Modelo de aproximação admitindo tiro tenso Nesta secção em que a situação a analisar é referente ao tiro tenso ou tiro de pequeno ângulo (Parker, 1977), supõe-se que, pelo facto da velocidade horizontal ser muito maior que a vertical, se tem $v_x \gg v_y$ e conseqüentemente $v \cong v_x$.

Tendo em conta a equação (2.38) e supondo então a aproximação anteriormente referida, temos que resulta em:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x^2 \\ \frac{dv_y}{dt} = -\gamma v_x v_y - g \end{cases} \quad (2.53)$$

onde mais uma vez

$$\gamma = \frac{k}{m} \quad (2.54)$$

Pode-se resolver para v_x primeiro, do qual v_y , $x(t)$ e $y(t)$ podem ser obtidos. As soluções podem ser verificadas por substituição nas equações de movimento.

Assim, para x temos

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\gamma v_x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{v_x^2} dv_x &= -\gamma dt \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{v_x} &= -\gamma t + k \\ \Leftrightarrow v_x &= \frac{1}{\gamma t - k} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Visto que quando $t = 0$ se tem, por hipótese

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x_0} \\ \Rightarrow v_{x_0} &= \frac{1}{-k} \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{1}{v_{x_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow v_x &= \frac{1}{\gamma t - \frac{1}{v_{x_0}}} \\ \Rightarrow v_x &= \frac{v_{x_0}}{\gamma v_{x_0} t - 1}\end{aligned}\quad (2.56)$$

Obtido v_x , temos imediatamente

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma v_{x_0} t - 1) \quad (2.57)$$

Por outro lado, em termos de y , temos que

$$v_y = \frac{v_{y_0} - \frac{gt}{2}}{1 + \gamma v_{x_0} t} - \frac{1}{2}gt \quad (2.58)$$

de que resulta, por integração,

$$y(t) = \left(v_{y_0} + \frac{g}{2\gamma v_{x_0}} \right) \frac{1}{2\gamma v_{x_0}} \ln(1 + \gamma v_{x_0} t) - \frac{1}{4}gt^2 - \frac{gt}{2\gamma v_{x_0}} \quad (2.59)$$

Para encontrar o alcance do projétil, eliminamos t da equação (2.59) para obter

$$y(x) = \left(v_{y_0} + \frac{g}{2\gamma v_{x_0}} \right) \frac{x}{v_{x_0}} - \frac{g}{4(\gamma v_{x_0})^2} (e^{2\gamma x} - 1) \quad (2.60)$$

(Warburton et al., 2010)

Modelos balísticos de Resolução numérica

Modelo com velocidade variável Nesta secção, a resolução do nosso problema teve de ser feito numericamente através do software dedicado a este trabalho, em MATLAB, e em que foi possível obter a sua solução das nossas equações diferenciais.

Há vários métodos numéricos diferentes que podem ser usados para resolver as EDOs (Equações Diferenciais Ordinárias), sendo que estas encontram uma aproximação numérica para a solução da EDO. O método que será usado no cálculo numérico é o método de Runge-Kutta (RK), que foi publicado pela primeira vez por C. Runge e M. W. Kutta em 1895 e em 1905 o método RK de quarta ordem foi descrito. R. L. McCoy em 1998 concluiu que este método seria adequado para resolver EDOs num modelo balístico.

O MATLAB tem variadíssimas funções para resolver as EDOs, sendo que existem diversos solucionadores de EDOs que variam entre si de acordo com o erro de discretização. A rotina ODE45, aquele que vai ser aqui utilizado é então um método de quarta ordem RK, que será usado para resolver as EDO a

seguir representados. O método de quarta ordem RK que será usado, utiliza a inclinação em mais de um ponto para extrapolar e encontrar a próxima solução (Hooke, 2012).

Com suporte da equação (2.38) das outras secções, temos que

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -k\sqrt{v_x^2 + v_y^2}v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -k\sqrt{v_x^2 + v_y^2}v_y - g \end{cases} \quad (2.61)$$

A partir daqui (Mohazzabi, 2018) irão ser feitas as seguintes designações: $v_x = \dot{x} = z$, $v_y = \dot{y} = w$ e posteriormente $\frac{dv_x}{dt} = \dot{z}$, $\frac{dv_y}{dt} = \dot{w}$, sendo que resulta numa primeira instância em

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\dot{x} \\ \ddot{y} = -k\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\dot{y} - g \end{cases}$$

e seguidamente, de modo a diminuirmos a ordem das equações, em

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = w \\ \dot{z} = -k\sqrt{z^2 + w^2}z \\ \dot{w} = -k\sqrt{z^2 + w^2}w - g \end{cases} \quad (2.62)$$

Este sistema, assim como está escrito, vai ser colocado com uma estrutura específica, mas sem retirar o teor da informação, numa função do MATLAB que permite ao utilizador chamar a função principal e colocar os valores correspondentes às diferentes incógnitas, com o intuito de obter as trajetórias balísticas respetivas.

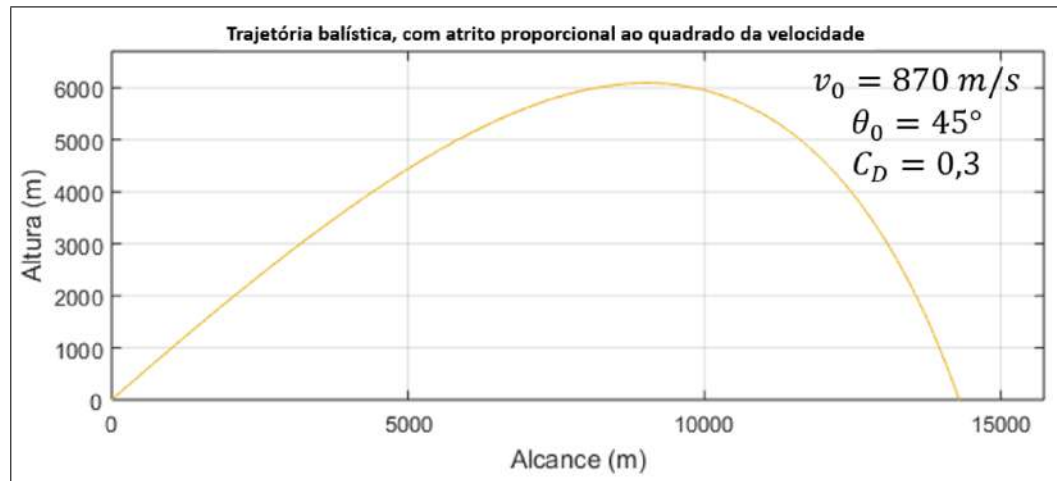


Figura 2.5: Trajetória balística, com atrito proporcional ao quadrado da velocidade

Modelo com velocidade e C_D variáveis Nesta secção, ainda seguindo o raciocínio anterior, voltamos ao assunto relacionado com a relação de velocidade em M e o C_D . O que também se tinha referido no início é que uma das aproximações que normalmente se faz de modo a simplificar os cálculos é que o C_D é constante, sendo que aqui vai ser exposta uma das maneiras possíveis de tentar chegar a uma expressão que faça com que o C_D varie com a velocidade, que é uma das características deste parâmetro.

Elaborou-se então uma expressão que generaliza o comportamento e tendo o conhecimento do $C_{D_{\min}}$ e $C_{D_{\max}}$ de um determinado projétil (normalmente encontram-se em manuais das peças no próprio navio), sabendo que as diferentes fases de velocidade estão normalmente de igual forma separadas nos gráficos típicos deste tipo de projéteis, conseguimos obter valores bastante aproximados da realidade dos C_D . Expressão que irá ser deduzida seguidamente, através da análise do esquema (2.6), que vem acompanhado de um exemplo típico de um projétil com valores inseridos (Carlucci and Jacobson, 2008). Na parte superior encontra-se o gráfico de um manual de balística e na parte inferior o já referido modelo com 3 fases que o permitem moldar segundo o comportamento típico, obviamente com bastantes aproximações.

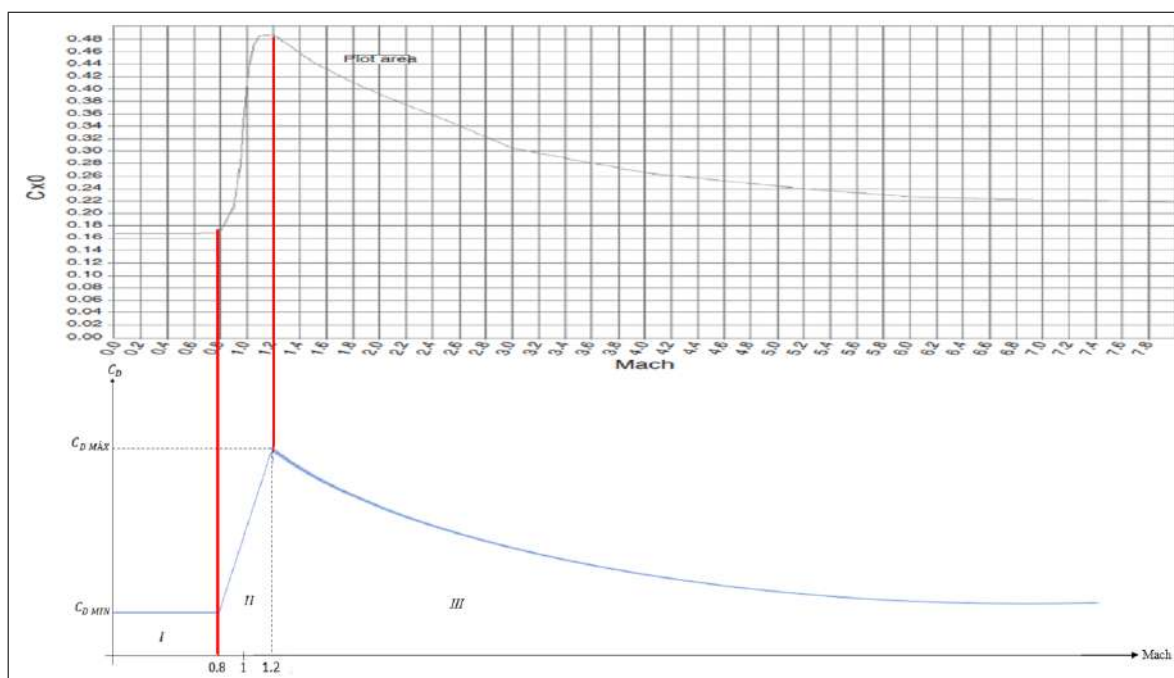


Figura 2.6: Aproximação de um gráfico Velocidade vs Coeficiente de atrito

Começamos por referir que na fase (I) assume-se que o valor é constante, representando então o valor fornecido pelo utilizador do programa. A este

vai ser multiplicado um degrau unitário $\theta(x)$, em que x equivale à diferença entre duas velocidades medidas em mach que está compreendida, neste caso, entre o valor 0.0 e 0.8.

Seguidamente é possível verificar que na fase (II) encontramos-nos na presença de uma reta com declive

$$\begin{aligned} m &= \frac{C_{D_{\max}} - C_{D_{\min}}}{1.2 - 0.8} \\ &= \frac{C_{D_{\max}} - C_{D_{\min}}}{0.4} \end{aligned} \quad (2.63)$$

sendo que no que toca à ordenada na origem, temos dois pontos da reta em que:

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \wedge y_2 = mx_2 + b \\ b &= \frac{y_1 + y_2 - m(x_1 + x_2)}{2} \end{aligned}$$

Assim fica

$$\begin{aligned} b &= \frac{(C_{D_{\min}} + C_{D_{\max}}) - \left(\frac{C_{D_{\max}} - C_{D_{\min}}}{0.4}\right)(0.8 + 1.2)}{2} \\ &= \frac{(C_{D_{\min}} + C_{D_{\max}})}{2} + \frac{C_{D_{\min}} - C_{D_{\max}}}{0.4} \\ &= \left(\frac{1}{2} + 2.5\right)C_{D_{\min}} + \left(\frac{1}{2} - 2.5\right)C_{D_{\max}} \\ &= 3C_{D_{\min}} - 2C_{D_{\max}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Na fase (III), em que o comportamento é aproximadamente $v^{-\frac{1}{2}}$, exigimos:

$$\begin{aligned} C_{D_{\max}} &= 1.2^{-\frac{1}{2}} + \Delta C_D \\ \Rightarrow \Delta C_D &= C_{D_{\max}} - 1.2^{-\frac{1}{2}} \\ &= C_{D_{\max}} - 0.9129 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Então, sendo $C_{D_{\min}}$ e $C_{D_{\max}}$ parâmetros de entrada, fica:

$$\begin{aligned} C_{D_0} &= C_{D_{\min}} \times \theta(0.8 - M) \\ &+ \left[\left(\frac{C_{D_{\max}} - C_{D_{\min}}}{0.4} \right) M + (3C_{D_{\min}} - 2C_{D_{\max}}) \right] \\ &\times \theta(M - 0.8) \times \theta(1.2 - M) \\ &+ \left[M^{-\frac{1}{2}} + (C_{D_{\max}} - 0.9129) \right] \times \theta(M - 1.2) \end{aligned} \quad (2.66)$$

com a função degrau unitário

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

No caso da peça de 100 mm, e mesmo na de 76 mm, não foi possível ter acesso ao manual respeitante à peça e projétil em questão nem a nenhum gráfico deste género através das diversas Unidades da Marinha Portuguesa, sendo que os valores do intervalo dos coeficientes de atrito que vão ser aqui apresentados estão de acordo com o gráfico da figura (2.6) acima representado com os valores de 0.2 e 0.5, visto que é um gráfico típico de um projétil. No entanto, com o modelo e para posteriores experiências em caso de se pretenderem melhorar os resultados, poderão ser escolhidos os coeficientes de atrito mínimo e máximo representados no eixo vertical.

Chegando a esta expressão, a mesma deverá ser colocada no MATLAB, de modo a estar integrada no solucionador de ODE's, ODE45.

Não esquecer que a equação que converte a velocidade em m/s para mach, é dada por

$$\begin{aligned} mach &= \frac{v}{340} \\ &= \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{340} \end{aligned} \quad (2.67)$$

em que os 340 m/s correspondem à velocidade do som.

É importante referir que embora se tenha criado de certa forma um modelo relativamente ao comportamento de C_D em função da velocidade em mach, a expressão (2.66) é uma aproximação analítica ao verdadeiro comportamento de C_D com as respetivas limitações, como por exemplo o facto de quando a velocidade tende para infinito, o C_D apresenta valores negativos, o que é fisicamente falso, como é evidente. Outra manifestação óbvia de carácter aproximado da equação (2.66) é que as transições entre os diferentes regimes (I, II e III) não são abruptas.

Encontra-se seguidamente representada na figura (2.7) uma trajetória balística admitindo que o C_D varia com a velocidade, acompanhada pelo gráfico da variação da sua velocidade ao longo do caminho percorrido pelo projétil no ar.

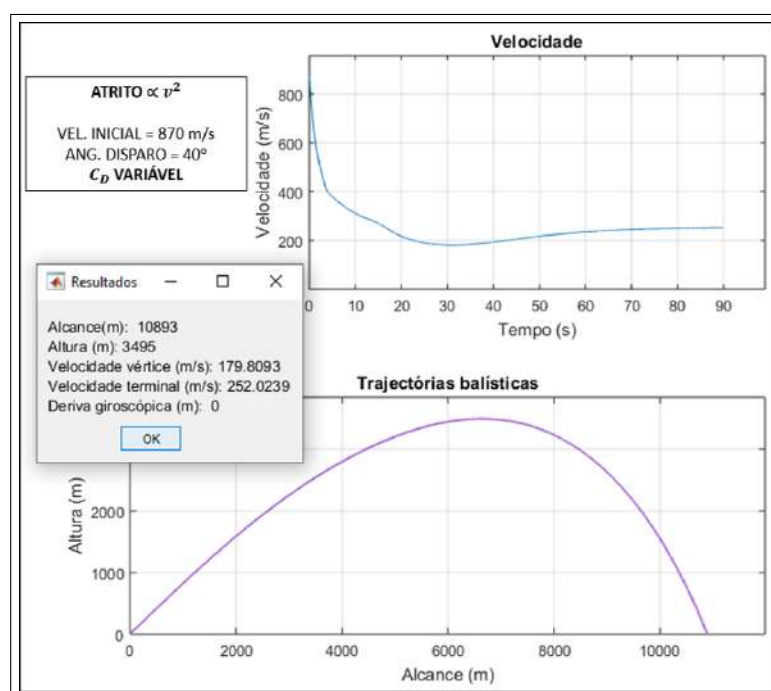


Figura 2.7: Variação da velocidade

Desta figura retira-se que há de facto uma variação da velocidade do projétil e que para além de termos acesso à velocidade inicial, também temos a velocidade no ponto mais alto (que costuma ser onde a velocidade é menor) e a velocidade terminal que tem um valor bastante próximo de muitos dos valores anteriores nos últimos segundos do percurso.

Isto para dizer que, sabendo da literatura que existem de facto estas curvas e gráficos para cada um dos projéteis que mostram a variação de C_D com a velocidade, e sabendo que a velocidade, pelo que nos transmite o gráfico da figura (2.7), se altera ao longo da trajetória, o C_D obrigatoriamente altera ao longo do percurso.

Em modo de concluir este capítulo, apresenta-se seguidamente o gráfico (2.8) onde é possível verificar a diferença entre admitir que o C_D é variável ou uma constante. A análise será feita no Capítulo 5.

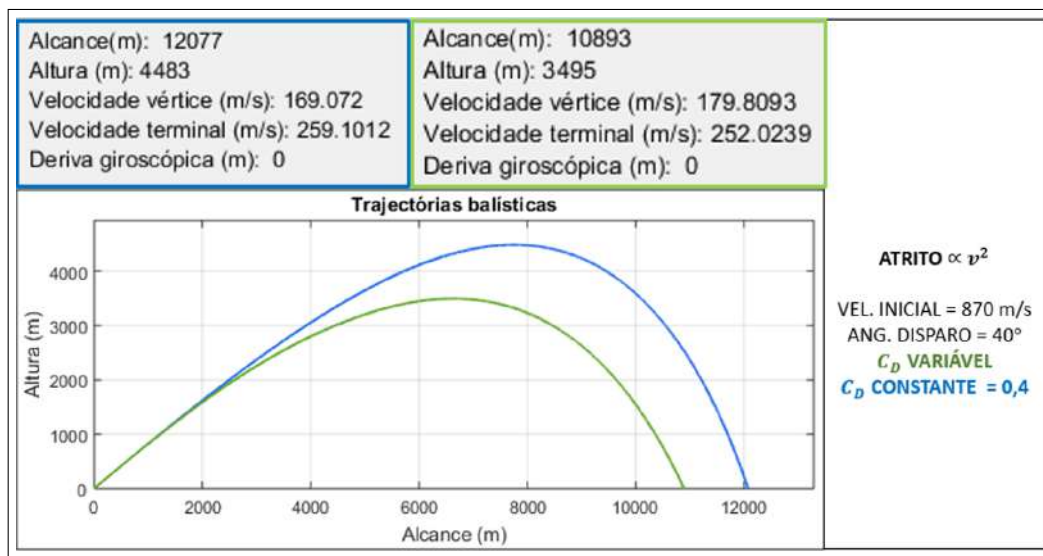


Figura 2.8: Relação coeficiente de atrito variável e constante

Capítulo 3

Estudo das Equações de Euler-Lagrange

Há conveniência em tratar de problemas mecânicos gerais partindo, não das equações do movimento de Newton ($m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i$, basicamente) mas sim das equações do movimento de Euler-Lagrange. São várias as razões dessa conveniência, desde a possível redução do n^o de variáveis independentes dos sistemas (sujeitos a constrangimentos), à invariância das ditas equações por mudança de referencial, mesmo que não-inercial (em contraste com as equações de Newton), e incluindo ainda a possibilidade de tratar fenômenos de dissipação, por exemplo por atrito, embora esta última possibilidade seja menos usualmente explorada.

3.1 Objetivos definidos

- Prever a conveniência de recorrer a coordenadas não-cartesianas no caso do tiro de longo alcance em que é necessário tomar em consideração a curvatura da Terra e a variação da aceleração gravitacional com a altitude.
- Incluir de forma sistemática, mas mantendo as equações do movimento, os efeitos da rotação da Terra sobre a trajetória do projétil, especificamente o efeito da força de Coriolis.
- Abrir o caminho para o tratamento da trajetória de um corpo com 6 graus de liberdade, problema que inclui a precessão giroscópica do projétil e a conseqüente deriva na atmosfera, embora nesta tese só recorramos ao modelo da massa pontual, com 3 graus de liberdade.

- Mostrar como, para além das complicações acima referidas, é possível ainda incluir o efeito do atrito atmosférico no mesmo formalismo geral.

Há várias maneiras de deduzir as equações do movimento de Euler-Lagrange, mas só referiremos duas, uma muita sucinta e intuitiva, através do cálculo das variações e do princípio da ação mínima, e outra partindo da 2ª Lei de Newton.

3.2 Breve Dedução das Equações pelo Cálculo das Variações

Aqui irá ser representada a dedução "heurística" das equações de Euler-Lagrange.

Suponhamos uma infinidade de possíveis comportamentos $x(t)$ do movimento de um copo, em cada instante t dependendo δx do comportamento verdadeiro, excepto nos extremos do trajeto 1D, correspondentes ao instante inicial t_1 e final t_2 .

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, \dot{x}) dt \quad (3.1)$$

com

$$L = T - U \quad (3.2)$$

em que L é a lagrangeana, T é a energia cinética e U é a energia potencial.

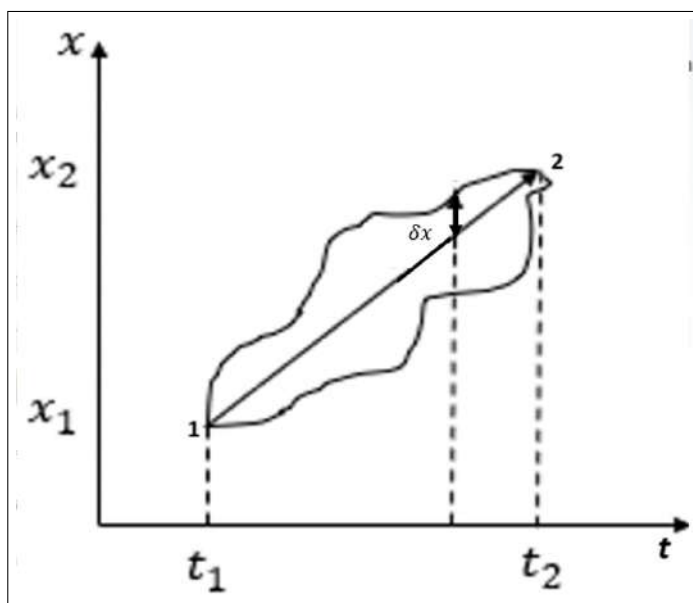


Figura 3.1: Esquema de caminho percorrido

Impondo variações δx arbitrárias em cada instante t , vem

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, \dot{x}) dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(t, x, \dot{x}) dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \delta(\dot{x}) &\equiv \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta x) \implies \\
 \implies \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt}(\delta x) \right] dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x \right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt \\
 \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Introduzindo agora o princípio que o comportamento $x(t)$ real é o que corresponde ao mínimo de δ , vem que será, em torno desse real $x(t)$, a condição $\delta S = 0$.

Sendo que δx é arbitrário e como impomos

$$\delta S = 0$$

somos levados a concluir que terá de ser

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{3.5}$$

Sendo este o resultado final da expressão que expressa a equação de Euler-Lagrange, de afirmar que cada uma destas equações deverá estar para cada grau de liberdade do sistema $x_1, x_2, x_3 \dots$. No entanto, estas coordenadas não têm de ser distâncias, o que constitui, desde logo, uma vantagem em relação às equações do movimento de Newton.

Por outro lado, se $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ formam coordenadas cartesianas de um ponto material, então teremos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{3.8}$$

E, em geral, seja qual fôr o sistema de coordenadas $\{q\}$ útil em cada caso, teremos, para cada uma delas, a respetiva equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.9)$$

cuja resolução conduz à determinação do movimento do sistema mecânico. O estabelecimento desta equação exige, por seu lado, que possam exprimir T e U em função das coordenadas generalizadas $\{q\}$.

Recordemos que, havendo uma energia potencial $U(\{q\})$, estamos automaticamente a supor sistemas conservativos, onde as forças serão gradientes de energias portenciais (Landau and Lifshitz, 1971). No entanto, é possível generalizar o método de Euler-Lagrange de forma a incluir forças não-conservativas, como as de atrito.

3.3 Dedução das Equações através da Formulação Newtoniana

Começamos pela transição que parte de conhecimentos mais elementares como a 2ª equação da dinâmica de Newton que é expressa em coordenadas cartesianas num referencial inercial qualquer, S .

Embora só estejam interessados na trajetória de um único ponto material, consideraremos o caso geral de N pontos materiais, de massas m_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Da 2ª Lei da forma $m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$ (sendo \mathbf{F}_i o somatório de todas as forças a atuar sobre a massa m_i), temos, em componentes

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_{i,x} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{i,y} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = F_{i,z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_i \ddot{x}_i = F_{i,x} \\ m_i \ddot{y}_i = F_{i,y} \\ m_i \ddot{z}_i = F_{i,z} \end{cases} \quad (3.10)$$

para cada uma das massas pontuais, onde, na notação de Newton, $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$, etc

Continuando em coordenadas cartesianas, a energia cinética (T_i) da massa m_i e do sistema total serão, respetivamente

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (3.11)$$

e

$$T = \sum_i \mathbf{T}_i \quad (3.12)$$

e, havendo uma energia potencial U do sistema (devido à interação entre todos os seus componentes ou a corpos exteriores ao sistema considerado), onde $U = U(\{x_i, y_i, z_i\})$, sabemos que existe uma relação entre a força total \mathbf{F}_i sobre a partícula e a função energia potencial na sua vizinhança, tal que

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U \quad (3.13)$$

já que forças conservativas são gradientes (∇_i) de energias potenciais ou seja,

$$\mathbf{F}_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \hat{z} \right) \quad (3.14)$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i,x} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ \mathbf{F}_{i,y} &= -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ \mathbf{F}_{i,z} &= -\frac{\partial U}{\partial z_i} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Há forças, nomeadamente as de atrito, para as quais não existe uma correspondente função potencial e uma função energia potencial; não as consideraremos, por enquanto.

Voltando às equações de Newton, podemos então escrever

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \ddot{y}_i &= -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \ddot{z}_i &= -\frac{\partial U}{\partial z_i} \end{aligned} \quad (3.16)$$

com $i = 1, \dots, N$

Mas, da expressão de energia cinética T_i , também se tem

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) \\ &= \frac{1}{2} m_i 2 \dot{x}_i \\ &= m_i \dot{x}_i \end{aligned} \quad (3.17)$$

pelo que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i) = m_i \ddot{x}_i \quad (3.18)$$

e também

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = m_i \ddot{y}_i, \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) = m_i \ddot{z}_i, \quad (3.20)$$

e então podemos escrever

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{i,x} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

De igual modo se pode escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial y_i} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial z_i} &= 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

3 equações para cada uma das N massas pontuais ($3N$ graus de liberdade, portanto).

Recordemos agora que a energia cinética T é só função das velocidades $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$, etc, ao passo que a energia potencial é só função das coordenadas x_i, y_i, z_i , etc.

Assim sendo é evidente que

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial y_i} = \frac{\partial T}{\partial z_i} = 0, \forall i \quad (3.23)$$

e também

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial U}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial U}{\partial \dot{z}_i} = 0, \forall i \quad (3.24)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (T - U), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} (T - U), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} (T - U) \end{aligned} \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} (T - U), \\ \frac{\partial U}{\partial y_i} &= -\frac{\partial}{\partial y_i} (T - U), \\ \frac{\partial U}{\partial z_i} &= -\frac{\partial}{\partial z_i} (T - U) \end{aligned} \quad (3.26)$$

e podemos substituir

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (T - U) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} (T - U) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial z_i} (T - U) = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Convém abreviar a função $T(\{\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\}) - U(\{x_i, y_i, z_i\})$ por uma só função

$$L(\{x_i, y_i, z_i\}, \{\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\}) \equiv T(\{\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\}) - U(\{x_i, y_i, z_i\}) \quad (3.29)$$

a que se chama o lagrangeano do sistema de N massas pontuais. Então, as equações do movimento ainda em coordenadas cartesianas ficarão na forma, com $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.3.1 Exemplo simples

A dificuldade deste método está concentrada na obtenção das expressões para as energias cinética e potencial, T e U , seja qual for o referencial usado e o conjunto de coordenadas (em geral, menos que $3N$) necessário. O movimento de um projétil no vácuo dá-nos um exemplo muito simples. Se x representar o eixo horizontal a partir da boca da peça, y o eixo vertical e z o restante eixo, teremos, sem considerar o atrito atmosférico

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \quad (3.31)$$

pelo que

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \frac{d(m\dot{x})}{dt} - 0 = 0 \\ \frac{d(m\dot{y})}{dt} + mg = 0 \\ \frac{d(m\dot{z})}{dt} - 0 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

ou seja, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$, $\ddot{z} = 0$, como esperado, e donde se tirará a habitual trajetória parabólica, por integrações sucessivas e dadas condições iniciais.

3.4 Invariância das Equações com Transformação de Coordenadas

Acabámos de ver o problema do projétil no vácuo. Como é evidente, poderíamos ter usado outro qualquer sistema de coordenadas, por exemplo polares (já que este movimento é em 2D). O que pretendemos mostrar agora é que, refazendo as expressões para T e U noutra sistema de coordenadas, as equações de Euler-Lagrange mantêm a forma. Especificamente, neste exemplo teríamos, com as coordenadas polares ρ e θ (aqui neste capítulo estes dois assumem diferentes significados dos casos anteriores), as equações formalmente idênticas às expressas em coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

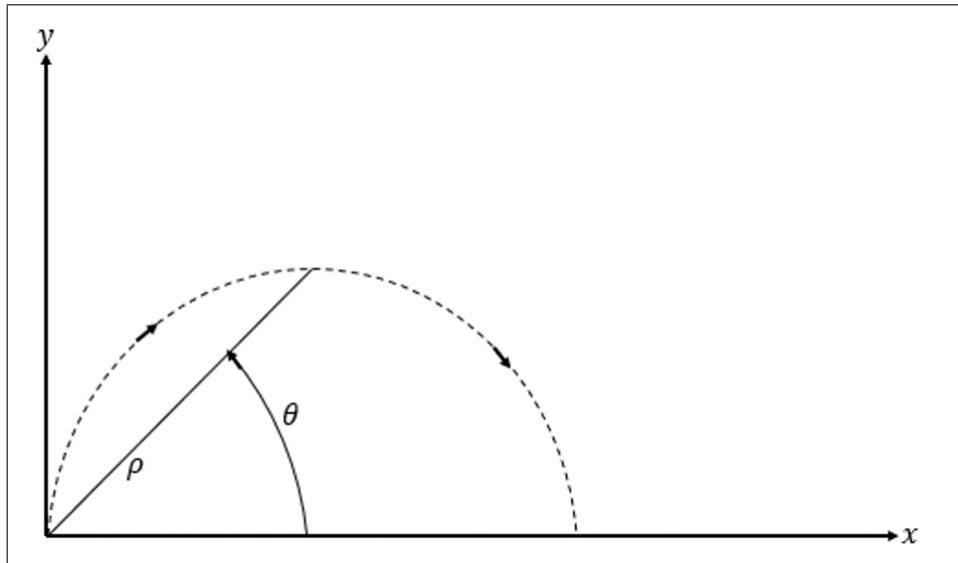


Figura 3.2: Coordenadas Polares

Continuemos então com um sistema de N massas pontuais às quais corresponderão $3N$ graus de liberdade se não houver constrangimentos. Um corpo sólido só precisará de 6 coordenadas para ficar completamente definido em torno da sua posição e orientação no espaço 3D, se for perfeitamente rígido. Estas coordenadas podem ser as 3 do centro de massa (cartesianas ou não) num referencial externo qualquer, mais, por exemplo, 2 ângulos a definir a orientação de um segmento de reta que une dois pontos no interior do sólido

e ainda outro ângulo a definir uma rotação em torno desse segmento de reta. A cada uma destas 6 coordenadas corresponderá a respectiva equação de Euler-Lagrange.

Chamando q_k (em geral $q_k(t)$) às novas coordenadas, em número necessário para descrever completamente o movimento do sistema, teremos em geral, relativamente à correspondente coleção de coordenadas cartesianas atrás utilizadas, funções do tipo

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \end{cases} \quad (3.34)$$

É de realçar que as novas coordenadas q_k são quaisquer e, não só podem ser menos que $3N$, como não estão necessariamente agrupadas em conjuntos de três, um para cada partícula e, claro, não têm de ter dimensões de distância. São coordenadas generalizadas, escolhidas da forma que for conveniente para o problema em questão.

Para prosseguirmos para a demonstração da invariância das equações de Euler-Lagrange, consideremos que

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3N}} \frac{dq_{3N}}{dt} \\ \Leftrightarrow \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (3.35)$$

e, claro também será

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (3.36)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (3.37)$$

onde os \dot{q}_j são componentes das velocidades generalizadas (que não terão de ser em m/s).

Também teremos, para as N partículas do sistema,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial q_j} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial q_j} \right) + \\
&+ \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial q_j} \right) + \\
&+ \left(\frac{\partial U}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_N} \frac{\partial y_N}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_N} \frac{\partial z_N}{\partial q_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -Q_j \quad (3.38)
\end{aligned}$$

onde Q_j será uma "força generalizada", não necessariamente em newtons.

Para a energia cinética teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\
&+ \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\
&+ \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_N} \frac{\partial \dot{x}_N}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_N} \frac{\partial \dot{y}_N}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_N} \frac{\partial \dot{z}_N}{\partial \dot{q}_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Voltamos agora à 2ª equação de Newton representada anteriormente na forma

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) &= 0, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \right) &= 0, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) &= 0,
\end{aligned} \quad (3.40)$$

e multiplicamos a 1ª por $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, a 2ª por $\frac{\partial y_i}{\partial q_j}$ e a 3ª por $\frac{\partial z_i}{\partial q_j}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

sendo $3N$ equações em que $i = 1, \dots, N$.

Se somarmos em 1º lugar todos os termos com a energia potencial U , vem

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_j} = -Q_j \quad (3.42)$$

Antes de somarmos os termos com energia cinética T , notamos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (3.43)$$

Mas como

$$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.44)$$

vemos que

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \forall k \in \{1, 3N\} \quad (3.45)$$

ou seja

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.46)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \right] \left(\frac{dq_k}{dt} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \right] \dot{q}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Então, da expressão acima tiramos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)\right] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)\right] = \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Retomamos agora o sistema de equações $3N$ (3.41) atrás e somamos todos os termos com energia cinética T :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}\right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j} \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j}\right) \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

onde o primeiro termo já tinha sido obtido anteriormente e o segundo é evidente.

Juntanto agora os dois somatórios, um com os termos que incluem a energia cinética T e o outro com os termos que incluem a energia potencial U , chegamos à conclusão que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \tag{3.50}$$

Mas como a energia potencial U só pode depender do conjunto de coor-

denadas $\{q_j\}$ e não das velocidades $\{\dot{q}_j\}$, também será verdade que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} &= 0 \\
 \Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \right) &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - U) &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

com $j = 1, 2, 3, \dots, 3N$ e

$$L = T(q_j, \dot{q}_j) - U(q_j) = L(q_j, \dot{q}_j) \tag{3.52}$$

sendo L a função de Lagrange, aqui dependente das coordenadas generalizadas $\{q_j\}$ e das velocidades generalizadas $\{\dot{q}_j\}$.

A conclusão importante que aqui nos interessa tirar é que, como se vê a cima, seja qual for o sistema de coordenadas utilizado, mesmo que não-inercial, a forma das equações de Euler-Lagrange se mantém.

Será o caso do estudo de trajetória de projéteis lançados de navios no oceano da Terra em rotação. Neste caso será conveniente, para tiro de longo alcance, usar coordenadas esféricas (r, θ, φ) e não cartesianas (x, y, z) . Ora, como sabemos, a relação entre elas é

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \tag{3.53}$$

sendo que θ é o ângulo polar, φ é o ângulo azimutal e r é a distância à origem, como ilustra a figura (3.3).

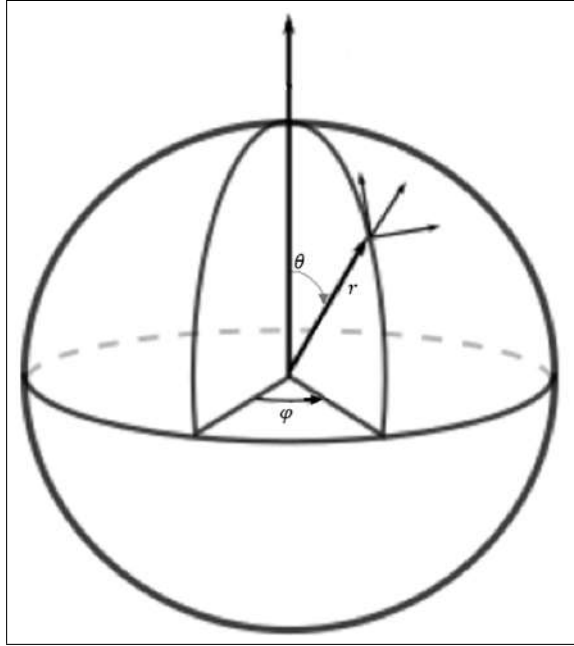


Figura 3.3: Coordenadas Esféricas

Então

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \end{aligned} \quad (3.54)$$

uma vez que o elemento infinitesimal de linha do quadrado, ds^2 , é

- em coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.55)$$

- em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.56)$$

Por seu lado, a energia potencial gravítica é simplesmente

$$U(r) = -G \frac{M_T m}{r} \quad (3.57)$$

sendo M_T a massa da Terra e m a massa do projétil, pelo que

$$L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{GM_T m}{r} \quad (3.58)$$

e tendo a massa pontual (projétil) 3 graus de liberdade, temos realmente 3 equações de movimento de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Fazendo as derivadas indicadas, temos

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m2r\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m2r\dot{r} \sin^2 \theta \dot{\varphi} + mr^2 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + mr^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} \end{cases} \quad (3.60)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{GM_T m}{r^2} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Substituindo nas 3 equações de Euler-Lagrange, fica

•

$$\begin{aligned} m\ddot{r} + \frac{GM_T m}{r^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ddot{r} &= -\frac{GM_T}{r^2} \end{aligned} \quad (3.62)$$

•

$$\begin{aligned} 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

•

$$\begin{aligned} 2mr\dot{r} \sin^2 \theta \dot{\varphi} + 2mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + mr^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2r\dot{r} \sin^2 \theta \dot{\varphi} + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + r^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Não trataremos de resolver este sistema de equações diferenciais visto que só pretendemos mostrar o papel da invariância das equações de Euler-Lagrange, sejam quais forem os sistemas de coordenadas usadas.

3.4.1 Igualdade das Equações de Euler-Lagrange para dois Lagrangeanos

Neste caso, esta igualdade que irá aqui ser analisada aplica-se a dois lagrangeanos que diferem de uma derivada temporal total de uma função $f(q, t)$ das coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ e do tempo $t(q \equiv \{q_i\})$, sendo que se tem assim interesse em provar que $L(q, \dot{q}, t)$ e $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$ correspondem às mesmas equações do movimento. Isto é, que podemos sempre adicionar ou subtrair uma derivada total de uma função qualquer em ordem ao tempo da forma $\frac{d}{dt}f(q, t)$ a um dado lagrangeano sem alterar a solução para o movimento do sistema.

Seja então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, 3N]$$

e também

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}. \quad (3.65)$$

Temos

$$\begin{cases} \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{df}{dt} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df}{dt} \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(L + \frac{df}{dt} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} \end{cases} \quad (3.66)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{df(q, t)}{dt} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \frac{df(q, t)}{dt} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Desta relação tiramos

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \quad (3.68)$$

sendo que $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = 0$ porque $\frac{\partial f(q, t)}{\partial t}$ não contém \dot{q}_j .

Sobra então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{df}{dt} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{\partial f(q, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{df}{dt} \right) &= \sum_i \frac{\partial f(q, t)}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \delta_{ij} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{df}{dt} \right) &= \frac{\partial f(q, t)}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.70)$$

ou, o que é o mesmo (só trocando o nome do índice),

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{df(q, t)}{dt} \right) = \frac{\partial f(q, t)}{\partial q_i} \quad (3.71)$$

Com este resultado, voltamos a

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{df}{dt} \right) \quad (3.72)$$

e escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

pelo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} &= \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \right] - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df}{dt} \right) \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

sendo que

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0$$

porque L satisfaz as equações de Euler-Lagrange e

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df}{dt} \right) = 0$$

porque $f(q, t)$ é diferenciável.

Concluimos portanto que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0 \quad (3.75)$$

também, ou seja, que

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt} \quad (3.76)$$

também satisfaz as mesmas equações de Euler-Lagrange que $L(q, \dot{q}, t)$.

3.5 Situações onde se manifesta a Vantagem das Equações

3.5.1 Referenciais Não-Inerciais

Tirando partido da forma das equações do movimento de Euler-Lagrange, da circunstância de ela não depender das coordenadas que usamos- podendo mesmo as de um referencial não-inercial - e da possibilidade de acrescentar ou subtrair à função lagrangeana uma derivada total no tempo (t) de uma função das coordenadas generalizadas e do tempo, vamos agora incluir a consideração de o referencial do navio de onde se faz o tiro estar solidário com um referencial em rotação, o próprio planeta Terra.

3.5.2 Forças Inerciais na Equação de Euler-Lagrange

Prosseguimos aqui a questão da expressão das forças inerciais, observadas em referenciais não-inerciais (Landau and Lifshitz, 1971).

Como vimos, para um ponto material de massa m sujeito a um campo de energia potencial $U(\mathbf{r})$, sabemos que num referencial de inércia S_0 se tem

$$S_0 \rightarrow L_0 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 - U(\mathbf{r}_0) \quad (3.77)$$

e a equação do movimento

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{v}_0} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{r}_0} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m2\mathbf{v}_0 \right) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_0} &= 0 \\ m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} &= - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_0} \end{aligned} \quad (3.78)$$

em S_0 .

Usamos aqui a notação habitual para apoiar $\mathbf{r}(t)$ para a velocidade $\mathbf{v}(t)$, do ponto material considerado em vez de $\{q_i\}$ e $\{\dot{q}_i\}$ usados atrás.

Passemos agora à descrição do mesmo sistema, aqui de um só ponto material, mas num referencial não-inercial S . As coordenadas deste ponto material são agora \mathbf{r} (com $\mathbf{r} = \mathbf{v}$) e sendo as equações de Euler-Lagrange invariantes, temos imediatamente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (3.79)$$

mas onde $L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \neq L_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t)$.

O referencial S sofre um movimento arbitrário visto do referencial inercial S_0 , isto é, um movimento em geral composto de translação e rotação.

Não vamos tratar da passagem direta da descrição num referencial inercial S_0 para um referencial em translação e rotação S , em relação a S_0 . Faremos esta passagem em 2 etapas, a primeira para um referencial S' em translação relativamente a S_0 , e depois para um referencial S em rotação relativamente a S' .

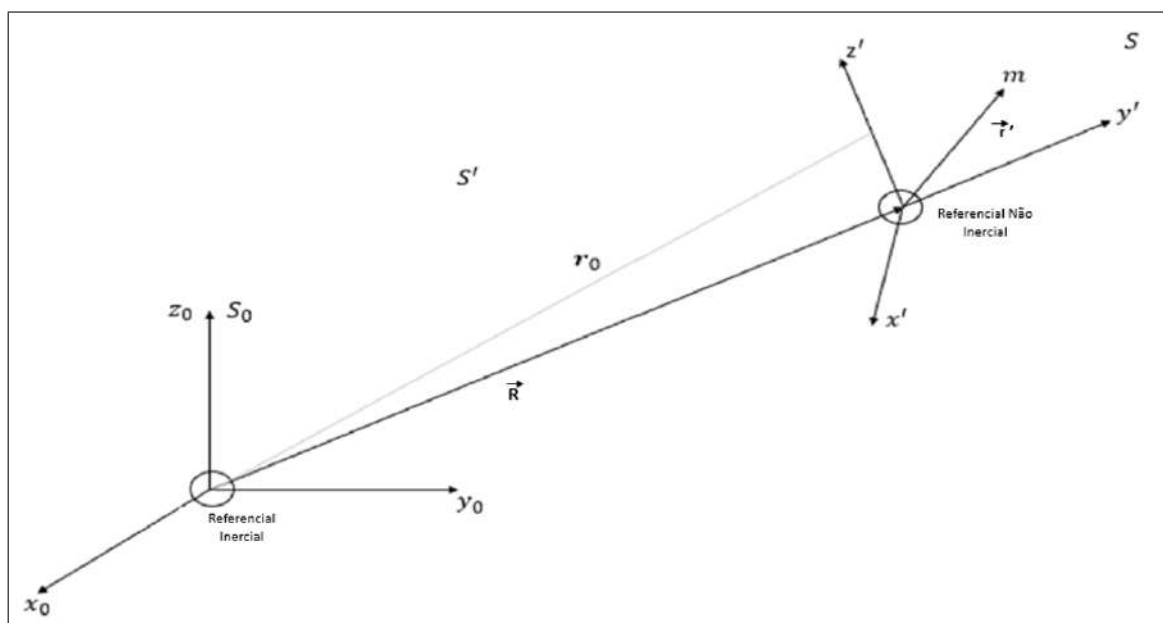


Figura 3.4: Orientação fixa dos eixos

Se a velocidade de S' relativamente a S_0 for $\mathbf{v}(t)$ em cada instante t , então

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t) \\ \Rightarrow \mathbf{v}_0(t) &= \mathbf{V}(t) + \mathbf{v}'(t) \end{aligned} \quad (3.80)$$

A função lagrangeana medida no referencial S' obtém-se re-exprimindo a energia cinética de m obtida no referencial inercial S_0 mas com as coordenadas usadas em S' .

A energia cinética é sempre a medida num referencial inercial S_0 , mesmo que expressa em termos das coordenadas de um sistema não-inercial S' . É nesta re-expressão do termo da energia cinética que surgirão as chamadas forças (e acelerações) não-inerciais, e não no termo de energia potencial U , que representa sempre só as forças de interação física, em particular as derivadas de uma energia potencial.

Temos então

$$T_0 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 \quad (3.81)$$

com $\mathbf{v}_0^2 \equiv \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0$ e

$$T = \frac{1}{2}m(\mathbf{V}(t) + \mathbf{v}'(t))^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} \quad (3.82)$$

Aqui, $\mathbf{V}^2 \equiv \mathbf{V}^2(t)$ é uma função dada do tempo, o quadrado da velocidade instantânea de S' medida em S_0 .

Em consequência, pode ser considerado como sendo a derivada total de uma outra função em relação ao tempo e, assim sendo, podendo subtraí-la do lagrangeano L' sem que isto altere as equações do movimento, como já vimos. Podemos escrever então, em S'

$$S' \rightarrow L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} - U(\mathbf{r}') \quad (3.83)$$

Esta expressão de L' pode ser simplificada notando que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}) &= m\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \cdot \mathbf{V} + m\mathbf{r}' \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ &= m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.84)$$

onde $\mathbf{A}(t)$ é a aceleração instantânea de S' vista de S_0 . Mas então

$$m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}) - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A} \quad (3.85)$$

e portanto

$$L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}) - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A} - U(\mathbf{r}') \quad (3.86)$$

Novamente, usamos o argumento da possibilidade de subtração uma função qualquer $\frac{df}{dt}$ para escrever, sem alterar as equações do movimento

$$L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A} - U(\mathbf{r}') \quad (3.87)$$

Aplicando diretamente as equações de Euler-Lagrange na sua forma invariante

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = 0$$

vem imediatamente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m2\mathbf{v}' \right) + m\mathbf{A} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{A}(t) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}$$

ou seja

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{A}(t) \quad (3.88)$$

em que $m\mathbf{A}(t)$ é a "força inercial", observada em S' .

Agora introduzimos um 3º referencial, S , cuja origem coincide com a de S' (O'), mas que está em rotação com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}(t)$ relativamente a S' . Notar que $\boldsymbol{\Omega}(t)$ tem módulo e direção em geral variáveis no tempo.

Como sabemos, a uma rotação de um ângulo infinitesimal $d\varphi$ de um vetor posição \mathbf{r}' corresponde o vetor deslocamento infinitesimal $d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}'$ em que $d\boldsymbol{\varphi} \uparrow \uparrow \boldsymbol{\Omega}$.

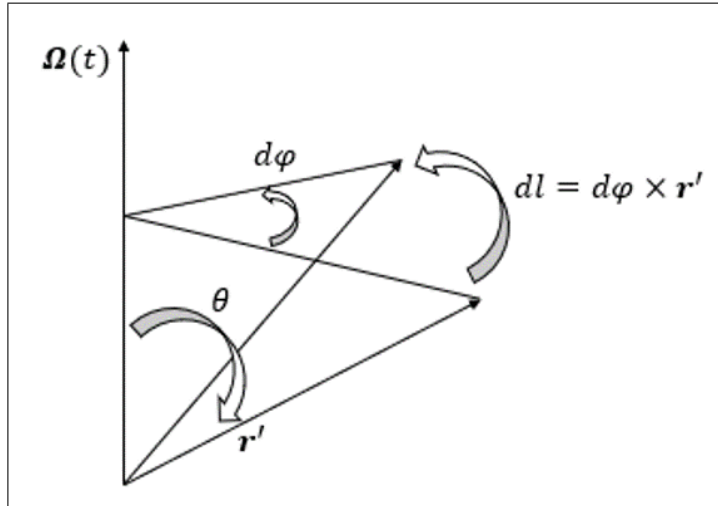


Figura 3.5: Terceiro referencial, S

A respetiva velocidade será então

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' \quad (3.89)$$

com $\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$.

Como o vetor posição $\mathbf{r}'(t)$ da massa pontual m no referencial S' coincide com o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ de m no referencial S (cuja origem coincide com a de S'), temos que

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (3.90)$$

e então, se a velocidade instantânea de m em S for $\mathbf{v}(t)$, a velocidade da mesma massa m vista de S' será a composição de $\mathbf{v}(t)$ com a velocidade de

rotação de S relativamente a S' :

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}(t) \quad (3.91)$$

Voltando à expressão do lagrangeano com coordenadas do referencial S' ,

$$L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A} - U(\mathbf{r}') \quad (3.92)$$

podemos agora exprimir o lagrangeano com as coordenadas do referencial S :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m [\mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}(t)]^2 - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A} - U(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{2}m [\mathbf{v}^2(t) + 2\mathbf{v}(t) \cdot (\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}(t)) + (\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}(t))^2] - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} - U(\mathbf{r}') \\ \Leftrightarrow L &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\mathbf{v} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] + \frac{m}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} - U(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.93)$$

sendo esta última expressão o lagrangeano expresso nas coordenadas da massa pontual m no referencial em rotação S .

Este é o resultado fundamental que nos permitirá descrever o movimento de um projétil a partir de um ponto sobre a superfície do globo terrestre em rotação. Para os nossos propósitos presentes, só falta um fator a incluir neste lagrangeano, o efeito do atrito atmosférico.

Esta força de atrito atmosférico deverá ser introduzida nas próprias equações do movimento de Euler-Lagrange, aparecendo como um termo "força generalizada" que se somará à força gravitacional, gradiente de uma energia potencial gravítica.

Para preparar essa inclusão de força de atrito, não-conservativa, é conveniente prosseguirmos antes de mais para o estabelecimento das equações do movimento no sistema S em rotação, a partir do lagrangeano acima, ou seja, queremos aplicar a equação (3.79)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

Torna-se conveniente começar por expressar o diferencial de L em termos dos diferenciais das coordenadas e das respectivas velocidades da massa pontual, isto é, de $d\mathbf{r}$ e de $d\mathbf{v} \equiv d\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{1}{2}md(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + md(\mathbf{v} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]) + \\ &\quad + \frac{m}{2}d(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - md(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) - dU(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}m2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + md\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r}) + \\ &\quad + \frac{m}{2}2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r}) - m\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.94)$$

onde

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \quad (3.95)$$

é o gradiente calculado relativamente às coordenadas \mathbf{r} .

Mas

$$\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r}) = (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.96)$$

e também

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r}) = [(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}] \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.97)$$

ambas porque $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

Substituindo em dL acima, vem

$$\begin{aligned} dL = & m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{v} + m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{r} + \\ & + m[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}] \cdot d\mathbf{r} - m\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.98)$$

e, conseqüentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \\ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}] - m\mathbf{A} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right. \quad (3.99)$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

leva a

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) - m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) - m[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}] + m\mathbf{A} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (3.100)$$

com $m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = -(m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})$ e portanto

$$\begin{aligned} \Rightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{A} - m \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \\ &+ 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}] \\ \Leftrightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{A} + m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right) \\ &+ 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m[\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})] \end{aligned} \quad (3.101)$$

onde usámos $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

Esta é a equação do movimento da massa pontual m observada no referencial em rotação S , onde a sua posição é dada pelo raio vetor \mathbf{r} e a sua velocidade pelo vetor $v \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, sujeita à força conservativa

$$-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \quad (3.102)$$

expressa também nestas coordenadas e estando o referencial S em rotação à frequência angular $\boldsymbol{\Omega} \equiv |\boldsymbol{\Omega}(t)|$ em torno do eixo $\boldsymbol{\Omega}$ do referencial S' .

As forças inerciais envolvidas são

- $m\mathbf{A}$: sem nome especial, devido à aceleração A do referencial S' em relação ao referencial inercial S_0 .
- $m(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt})$: há quem chame força de Euler (Lanczos, 1986) e é devida à não-uniformidade da frequência angular $\boldsymbol{\Omega}$.
- $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$: força de Coriolis, dependendo da primeira potência de velocidade da massa pontual m .
- $m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})$: força centrífuga, sendo que $\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})$ é dirigida para longe do eixo de rotação e de módulo $m\rho\boldsymbol{\Omega}^2$ sendo ρ o raio de rotação (na perpendicular ao eixo de rotação).

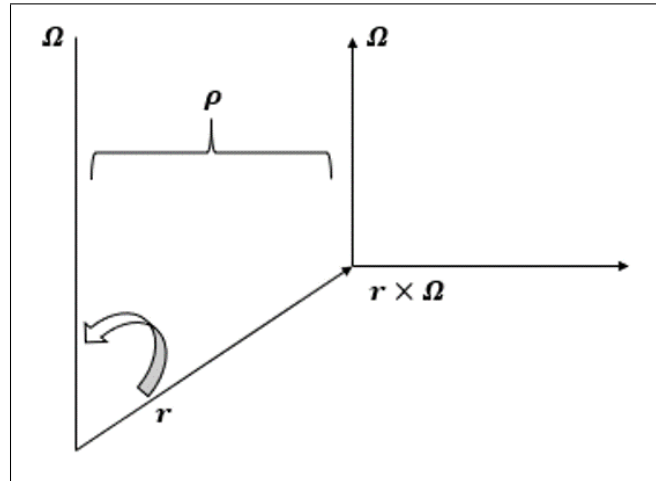


Figura 3.6: Referencial das forças mencionadas

No caso que nos interessa do Tiro Naval, a frequência de rotação $\boldsymbol{\Omega}$ será um vetor constante e não haverá aceleração translacional A , isto é, à parte a

rotação, o planeta Terra é considerado como um referencial inercial. Sobre então a equação

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (3.103)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ é aqui um vetor constante (orientado do sul para o Norte geográfico e com uma frequência angular de 2π radianos em 24 horas).

Para ilustrar, iremos calcular o desvio lateral sofrido por um projétil lançado com uma velocidade inicial \mathbf{v}_0 qualquer a partir de um ponto qualquer sobre a superfície da Terra em rotação.

Sendo a força centrífuga

$$m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}) \propto \boldsymbol{\Omega}^2, \quad (3.104)$$

desprezamos este termo face ao de Coriolis $m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})$ devido ao valor relativamente pequeno de $\boldsymbol{\Omega}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \frac{2\pi}{24 \times 3600} \\ &= 1,745 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

sobre então

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (3.105)$$

onde

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \\ \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} &= m\mathbf{g} \end{aligned} \quad (3.106)$$

pelo que

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= m\mathbf{g} + 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{g} + 2(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Seguindo Landau and Lifchitz, vamos resolver esta equação por aproximações sucessivas, tirando partido do fraco efeito da aceleração de Coriolis face ao da gravitação. Assim, obtemos em 1º lugar a solução $v_1(t)$ da equação

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{g} \\ \Rightarrow \mathbf{v}_1(t) &= \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0 \\ \hookrightarrow \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{g} \frac{t^2}{2} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

sendo que \mathbf{v}_0 a velocidade inicial e \mathbf{r}_0 a posição inicial dadas.

Agora substituímos $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ na equação completa, usando a solução obtida para \mathbf{v}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{g} + 2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \boldsymbol{\Omega} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{g} + 2\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\Omega} + 2\mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\Omega} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= 2(\mathbf{g}t + \mathbf{v}_0) \times \boldsymbol{\Omega} + 2\mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\Omega} \\ &= 2\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}t + 2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega} + 2\mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Mas sendo \mathbf{v}_2 uma pequena correção a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$, desprezamos o termo com \mathbf{v}_2 do lado direito e sobra

$$\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 2\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}t + 2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega} \quad (3.110)$$

cuja integração dá

$$\mathbf{v}_2(t) = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 2\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} \frac{t^2}{2} + 2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}t + \mathbf{v}_{2_0} \quad (3.111)$$

e nova integração dá

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} \frac{t^3}{3} + 2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega} \frac{t^2}{2} = \mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} \frac{t^3}{3} + \mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}t^2 \quad (3.112)$$

Juntando com $\mathbf{r}_1(t)$ vem finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \left(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} \right) + \left[(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega})t^2 + \mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} \frac{t^3}{3} \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \left[\frac{1}{2}\mathbf{g} + (\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}) \right] t^2 + \frac{1}{3}\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}t^3 \end{aligned} \quad (3.113)$$

Vejamos agora dois casos concretos, em que o primeiro envolve queda livre a partir de uma altura inicial h , no hemisfério norte, por exemplo e o segundo caso envolve tiro a partir de um ponto à superfície e com uma velocidade inicial \mathbf{v}_0 dada.

- Ao eixo na vertical do lugar chamaremos y e orientamos o eixo dos xx segundo o meridiano do local e virado para Norte e o eixo dos zz dirigido para Leste. Temos então

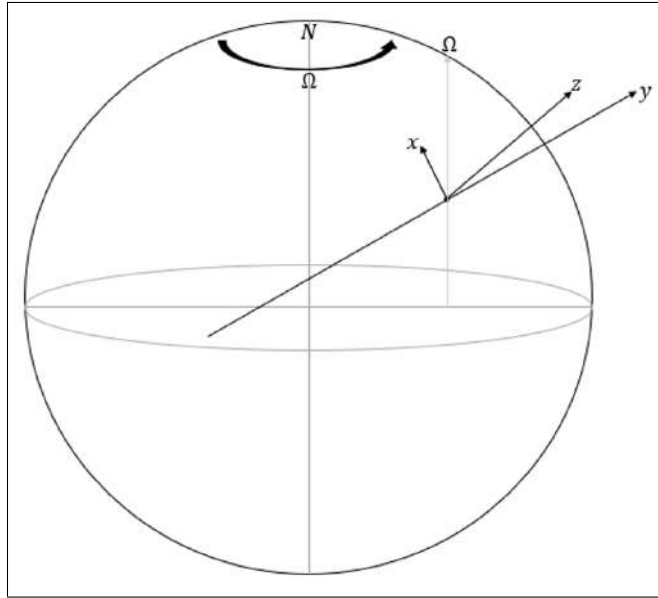


Figura 3.7: Representação axial da situação em causa

$$\begin{cases} g_x = g_z = 0 \\ g_y = -g \end{cases} \quad (3.114)$$

$$\begin{cases} \Omega_x = \Omega \cos \alpha' \\ \Omega_y = 0 \\ \Omega_z = \Omega \sin \alpha' \end{cases} \quad (3.115)$$

sendo α a latitude do lugar neste contexto.

Sendo a situação de queda livre, temos $\mathbf{v}_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega} = 0$, $\mathbf{r}_0 = z\hat{\mathbf{z}}$ e temos

$$\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} = g\Omega \sin(90^\circ - \alpha) \hat{\mathbf{z}} = g\Omega \cos \alpha \hat{\mathbf{z}} \quad (3.116)$$

pelo que

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = \frac{1}{3}g\Omega \cos \alpha t^3 \end{cases} \quad (3.117)$$

Usando o valor de tempo de queda aproximado igual ao que se verificaria sem aceleração de Coriolis,

$$t_{queda} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.118)$$

(visto que $h = \frac{1}{2}gt_{queda}^2$), fica

$$\begin{aligned} z(t_{queda}) &= \frac{1}{3}g\Omega\cos\alpha\sqrt{\frac{2h}{g}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{2gh}\Omega\cos\alpha', \end{aligned} \quad (3.119)$$

para leste do lugar.

- Temos agora um tiro com uma velocidade inicial \mathbf{v}_0 , da própria superfície do globo e no plano vertical do lugar, (x, y) .

Agora é

$$\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega} = \hat{\mathbf{x}}(v_{0y}\Omega_z - v_{0z}\Omega_y) + \hat{\mathbf{y}}(v_{0z}\Omega_x - v_{0x}\Omega_z) + \hat{\mathbf{z}}(v_{0x}\Omega_y - v_{0y}\Omega_x) \quad (3.120)$$

e o desvio lateral, segundo a direção do eixo dos zz (Leste) será

$$z(t) = \frac{1}{3}g(\Omega\cos\alpha')t^3 + (v_{0x}\Omega_y - v_{0y}\Omega_x)t^2 \quad (3.121)$$

onde $\Omega_x = \Omega\cos\alpha$ e $\Omega_y = \Omega\sin\alpha$, fazendo com que

$$z(t) = \frac{1}{3}g\Omega\cos\alpha t^3 + \Omega(v_{0x}\sin\alpha - v_{0y}\cos\alpha)t^2 \quad (3.122)$$

O desvio total poderá ser estimado pelo valor aproximado do tempo de trajeto, a substituir na expressão acima.

3.5.3 Equação do Movimento para Tiro Longo

No caso do Tiro Naval a grande distância, em que a força de Coriolis terá um efeito mais apreciável poderá ser mais apropriado não usar as coordenadas cartesianas com origem na localização do navio, mas sim coordenadas curvilíneas, ou esféricas ou cilíndricas. Temos duas direções de referência a considerar, a do vetor constante (no espaço e no tempo) $\boldsymbol{\Omega}$ (do pólo Sul para o pólo Norte), e a do vetor de aceleração da gravidade, $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, na direção radial ao longo da trajetória (e para o centro da Terra). Como tal, $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ não será um vetor constante (visto que vai mudando de direção ao longo da trajetória) e, em consequência, é aparente que será mais conveniente operar em coordenadas esféricas, em que $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ só terá uma componente

($\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -g(r)\hat{\mathbf{e}}_r$), decompondo o vetor de frequência angular $\boldsymbol{\Omega}$ em componentes esféricas, nas quais terá uma componente (constante) na radial e uma componente (constante) na direção do versor do ângulo polar θ' :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \Omega \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \Omega \cos (90^\circ + \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\Omega} = \Omega \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \Omega \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned} \quad (3.123)$$

onde, na realidade, o ângulo polar θ irá variando ao longo da trajetória.

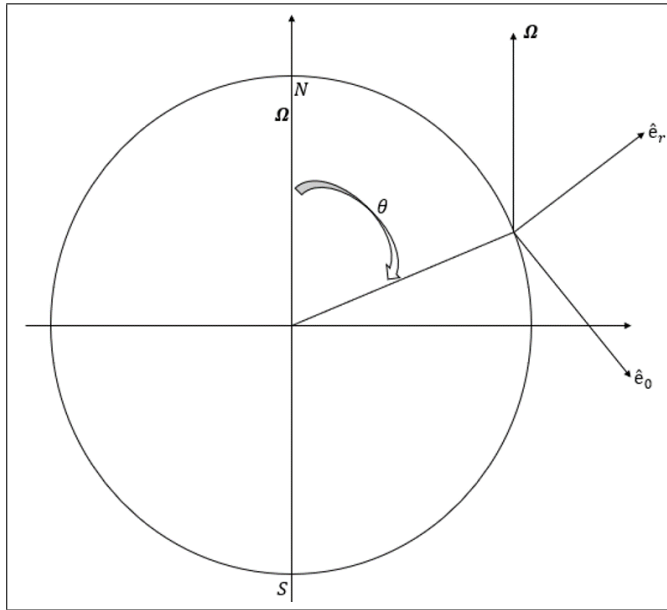


Figura 3.8: Referencial de tiro longo

A equação movimento continua a ser (para $\boldsymbol{\Omega}$ constante e desprezando a aceleração centrífuga)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + 2m (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (3.124)$$

com

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -mg(r)\hat{\mathbf{e}}_r \quad (3.125)$$

3.6 Inclusão de Forças Não-Conservativas

3.6.1 Inclusão de Forças Dissipativas nas Equações de Euler-Lagrange

Suponhamos um sistema de N partículas, $3N$ graus de liberdade com massas m_1, m_2, \dots, m_N . Em componentes cartesianas, a 2ª Lei de Newton permite escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{x_1} = m_1 \ddot{x}_1, F_{y_1} = m_1 \ddot{y}_1, F_{z_1} = m_1 \ddot{z}_1 \\ F_{x_2} = m_2 \ddot{x}_2, F_{y_2} = m_2 \ddot{y}_2, F_{z_2} = m_2 \ddot{z}_2 \\ \vdots \\ F_{x_N} = m_N \ddot{x}_N, F_{y_N} = m_N \ddot{y}_N, F_{z_N} = m_N \ddot{z}_N \end{array} \right. \quad (3.126)$$

e, como vimos, podemos passar das $3N$ coordenadas cartesianas

$$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N)$$

para $n = 3N - C$ coordenadas generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_n) , com menos graus de liberdade - agora só n - devido a possíveis constrangimentos, em número C . Teremos então, para $i = 1, 2, \dots, N$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{array} \right. \quad (3.127)$$

em que o referencial associado às coordenadas generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_n) poderá estar em movimento qualquer em relação ao referencial inercial cartesiano inicial - daí a possibilidade da dependência com t e também por uma possível variação temporal dos constrangimentos.

A estas coordenadas generalizadas correspondem um igual número de forças generalizadas (o que exclui as forças de constrangimento eventualmente presentes uma vez que não executam trabalho: por exemplo, a força de reação da superfície de um plano inclinado não tem nenhum movimento fisicamente possível que não lhe seja ortogonal).

Partindo das $3N$ componentes cartesianas das forças presentes neste sistema de N partículas, às quais correspondem n graus de liberdade, inferiores a $3N$ se houver constrangimentos, podemos obter as n componentes das forças generalizadas (que, como já vimos, não têm de ser medidas em newtons) através das relações

$$F_{q_r} = \sum_{i=1}^N \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right) \quad (3.128)$$

com $i = 1, \dots, N$ e $r = 1, \dots, n$.

Estas forças generalizadas, de componentes F_{q_r} , podem ser conservativas ou não. Se forem conservativas, são deriváveis de uma função energia potencial $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$, como vimos atrás, tal que

$$F_{q_r} = -\frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (3.129)$$

As que não forem conservativas não poderão ser expressas desta forma, visto que a elas não corresponde nenhuma função energia potencial. Podemos então dividir o conjunto de componentes $\{F_{q_r}\}$ das forças generalizadas numa parte conservativa e noutra parte dissipativa.

Recordado a exposição feita atrás só com forças conservativas, escreveremos agora

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{q_r \text{ conservativa}} + F_{q_r \text{ não-conservativa}} \quad (3.130)$$

ou seja, deixamos que a componente q_r de força generalizada contenha uma parte conservativa e outra parte dissipativa, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial U}{\partial q_r} + F_{q_r \text{ dissipativa}} \quad (3.131)$$

e, como $U\{F_{q_r}\}$ não depende, por hipótese, de \dot{q}_r (como atrás) também será

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_r} \right] - \frac{\partial}{\partial q_r} (T - U) = F_{q_r \text{ dissipativa}} \quad (3.132)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = F_{q_r \text{ dissipativa}} \quad (3.133)$$

onde, como é evidente, $L = T - U$ só inclui as interações conservativas do sistema, ao passo que $F_{q_r \text{ dissipativa}}$ do lado direito só inclui as interações não-conservativas, tais como o atrito. Chegámos portanto a uma generalização das equações do movimento de Euler-Lagrange, mas agora incluindo a possibilidade da presença de forças não-conservativas, ou dissipativas.

3.6.2 Diversas formas de Forças Dissipativas

Em geral, admitimos que as forças dissipativas são proporcionais a uma potência em geral inteira, mas não necessariamente, da velocidade do objeto móvel relativamente ao fluido dentro do qual se move. Mais geralmente,

poderá ser expressa por uma série de potências de velocidade, naturalmente truncada na prática, em que os próprios coeficientes poderão ser não constantes mas função das coordenadas ou do tempo.

No nosso caso concreto, poderemos supôr que em voo supersônico a força de atrito atmosférico depende do quadrado de velocidade, no caso mais simples, mas na realidade tornarem em consideração que o próprio coeficiente de atrito C_D é também função dessa mesma velocidade, o que complica significativamente a obtenção das trajetórias.

Nos casos mais simples tomamos então $F_D = av^n$ sendo F_D a força de atrito atmosférica e com a potência n dependente de situação concreta. Alguns tipos de valores de n são:

- Caso das forças de fricção entre duas superfícies sólidas: $n = 0, \forall v$.
- Caso das forças viscosas sobre um objeto sólido movendo-se num fluido a velocidades subsônicas: $n = 1$.
- Caso das forças de atrito mais gerais sobre um objeto sólido movendo-se num fluido a velocidades supersônicas: $n \approx 2$.
- Outros casos: $F_D = a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + \dots$ onde v aqui representa o módulo da velocidade.

Tomando este último caso, mais geral, podemos escrever as respectivas componentes cartesianas, sendo o sinal negativo resultado evidente de a força se opôr ao movimento, em cada direção (Wells, 1967):

$$\begin{cases} F_{D_x} = -(a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + \dots) \cos \theta_x = \\ \quad = -(a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + \dots) \frac{v_x}{v}, \text{ com } v_x \equiv \dot{x} \\ F_{D_y} = -(a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + \dots) \frac{v_y}{v}, \text{ com } v_y \equiv \dot{y} \\ F_{D_z} = -(a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + \dots) \frac{v_z}{v}, \text{ com } v_z \equiv \dot{z} \end{cases} \quad (3.134)$$

Por transformação de coordenadas, podemos obter as componentes de força de atrito generalizada segundo cada coordenada generalizada, partindo das componentes acima para cada uma das partículas do sistema.

3.6.3 Forças Generalizadas a partir de Funções de Potência

É importante, como temos salientado, poder exprimir as grandezas intervenientes, como as forças de atrito, num sistema conveniente de coordenadas generalizadas, e não somente em coordenadas cartesianas e respectivas velocidades.

Um dos possíveis caminhos para determinar as componentes das forças generalizadas, quer dissipativas quer conservativas, é definindo uma função potência, P :

$$P = \int \sum_{i=1}^N (F_{x_i} dx_i + F_{y_i} dy_i + F_{z_i} dz_i) \quad (3.135)$$

onde N é o n.º de massas pontuais e estando nós aqui em em coordenadas cartesianas, P tem dimensões de potência (*energia* \times *tempo*⁻¹), como se vê diretamente.

Agora, se as forças dependerem das coordenadas, das velocidades e do tempo tal que se verifica a condição

$$\frac{\partial F_{x_i}}{\partial \dot{y}_k} = \frac{\partial F_{y_k}}{\partial \dot{x}_i}, \text{ etc} \quad (3.136)$$

então o diferencial $F_{x_i} dx_i + F_{y_i} dy_i + F_{z_i} dz_i$ é exato pelo que é verdade que

$$\begin{cases} F_{x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} \\ F_{y_i} = \frac{\partial P}{\partial y_i} \\ F_{z_i} = \frac{\partial P}{\partial z_i} \end{cases} \quad (3.137)$$

com x_i , y_i , z_i e t constantes nestas derivadas parciais. Mas já vimos atrás que

$$F_{q_r} = \sum_{i=1}^N \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right) \quad (3.138)$$

pelo que substituindo F_{x_i} , F_{y_i} e F_{z_i} aqui, se tem

$$F_{q_r} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + \frac{\partial P}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + \frac{\partial P}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right) \quad (3.139)$$

Ora, como também já vimos atrás, da igualdade

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.140)$$

deduz-se imediatamente que

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (3.141)$$

e substituindo na expressão de F_{q_r} acima, vem

$$\begin{aligned} F_{q_r} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial P}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial P}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_r} \right) \\ \Rightarrow F_{q_r} &= \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_r} \end{aligned} \quad (3.142)$$

e, assim, podemos integrar forças de atrito nas equações do movimento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial P_{dissipativa}}{\partial \dot{q}_r} \quad (3.143)$$

para cada coordenada generalizada q_r (em igual n^o ao de graus de liberdade do sistema). Determinada a função lagrangeana

$$L(q_r, \dot{q}_r, t) = T(\dot{q}_r, t) - U(q_r, t) \quad (3.144)$$

e a função potência $P(q_r, \dot{q}_r, t)$ apropriadas para a situação concreta, o movimento das massas do sistema, sujeitas a forças conservativas e a forças dissipativas, será obtido pela resolução dos sistema de equações de Euler-Lagrange acima, com tantas equações quantos os graus de liberdade do sistema em causa.

Vejamos então alguns exemplos de forças dissipativas, todas na forma de uma função ϕ_i das coordenadas, do módulo da velocidade e do tempo:

$$F_i = \phi_i(x_i, y_i, z_i, t) \quad (3.145)$$

para cada massa pontual m_i .

Usamos aqui coordenadas cartesianas, mas quaisquer coordenadas generalizadas seriam possíveis. Projetando sobre as três direções cartesianas, temos

$$\begin{cases} F_{x_i} = \phi_i(x_i, y_i, z_i, v_i, t) \frac{v_{x_i}}{v_i} = \phi_i(x_i, y_i, z_i, v_i, t) \frac{\dot{x}_i}{v_i} \\ F_{y_i} = \phi_i(x_i, y_i, z_i, v_i, t) \frac{v_{y_i}}{v_i} \\ F_{z_i} = \phi_i(x_i, y_i, z_i, v_i, t) \frac{v_{z_i}}{v_i} \end{cases} \quad (3.146)$$

com $v_i = (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Neste tipo de expressão para a força de atrito temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_{x_i}}{\partial \dot{y}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} \left(\phi_i \frac{\dot{x}_i}{v_i} \right) \\
 &= \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} \left(\frac{\phi_i}{v_i} \right) \\
 &= \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\phi_i}{v_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial \dot{y}_i} \right) \\
 &= \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\phi_i}{v_i} \right) \left(\frac{\dot{y}_i}{v_i} \right)
 \end{aligned} \tag{3.147}$$

visto que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_i}{\partial \dot{y}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{-\frac{1}{2}} 2\dot{y}_i \\
 &= \frac{\dot{y}_i}{v_i}
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

Do resultado

$$\frac{\partial F_{x_i}}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\dot{x}_i \dot{y}_i}{v_i} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\phi_i}{v_i} \right) \tag{3.149}$$

tiramos logo

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_{y_i}}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\dot{y}_i \dot{x}_i}{v_i} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\phi_i}{v_i} \right) \\
 &= \frac{\partial F_{x_i}}{\partial \dot{y}_i}
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

e também

$$\frac{\partial F_{x_i}}{\partial \dot{y}_k} = \frac{\partial F_{y_k}}{\partial \dot{x}_i} \tag{3.151}$$

e portanto estamos nas condições que permitem concluir que a integranda na expressão de potência P apresentada anteriormente é de facto um diferencial exato pelo que podemos escrever

$$\begin{aligned}
 P &= \int \sum_{i=1}^N (F_{x_i} d\dot{x}_i + F_{y_i} d\dot{y}_i + F_{z_i} d\dot{z}_i) \\
 &= \int \sum_{i=1}^N \left(\phi_i \frac{\dot{x}_i}{v_i} d\dot{x}_i + \phi_i \frac{\dot{y}_i}{v_i} d\dot{y}_i + \phi_i \frac{\dot{z}_i}{v_i} d\dot{z}_i \right) \\
 &= \int \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{v_i} (\dot{x}_i d\dot{x}_i + \dot{y}_i d\dot{y}_i + \dot{z}_i d\dot{z}_i)
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

Mas sendo $v_i = (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)^{\frac{1}{2}}$, temos $dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i + \frac{\partial v_i}{\partial \dot{y}_i} d\dot{y}_i + \frac{\partial v_i}{\partial \dot{z}_i} d\dot{z}_i$ onde

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2, \dot{y}_i^2, \dot{z}_i^2)^{-\frac{1}{2}} (2\dot{x}_i) = \frac{\dot{x}_i}{v_i} \quad (3.153)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{y}_i} = \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2, \dot{y}_i^2, \dot{z}_i^2)^{-\frac{1}{2}} (2\dot{y}_i) = \frac{\dot{y}_i}{v_i} \quad (3.154)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{z}_i} = \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2, \dot{y}_i^2, \dot{z}_i^2)^{-\frac{1}{2}} (2\dot{z}_i) = \frac{\dot{z}_i}{v_i} \quad (3.155)$$

pelo que

$$\begin{aligned} dv_i &= \frac{\dot{x}_i}{v_i} d\dot{x}_i + \frac{\dot{y}_i}{v_i} d\dot{y}_i + \frac{\dot{z}_i}{v_i} d\dot{z}_i = \\ &= \frac{1}{v_i} (\dot{x}_i d\dot{x}_i + \dot{y}_i d\dot{y}_i + \dot{z}_i d\dot{z}_i) \end{aligned} \quad (3.156)$$

e portanto

$$P = \int \sum_{i=1}^N \phi_i dv_i \quad (3.157)$$

com $\phi_i = \phi_i(x_i, y_i, z_i, t)$.

Como casos particularmente importantes, consideremos

$$F_i = \phi_i(x_i, y_i, z_i, t) = a_i v_i^n \quad (3.158)$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} P &= \int \sum_{i=1}^N a_i v_i^n dv_i \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \int v_i^n dv_i \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \frac{v_i^{n+1}}{n+1} \end{aligned} \quad (3.159)$$

ou seja,

$$F_i = a_i v_i^n \leftrightarrow P = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^N a_i v_i^{n+1}. \quad (3.160)$$

Para simples fricção, temos

$$n = 0 \rightarrow F_i = a_i \leftrightarrow P = \sum_{i=1}^N a_i v_i. \quad (3.161)$$

Para atrito viscoso temos

$$n = 1 \rightarrow F_i = a_i v_i^1 \leftrightarrow P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i v_i^2. \quad (3.162)$$

A função potência, descrita na expressão (3.162), é a chamada função de dissipação de Rayleigh.

Para um projétil supersônico com $n = 2$ temos

$$F_i = a_i v_i^2 \leftrightarrow P = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N a_i v_i^3. \quad (3.163)$$

Havendo presença simultânea de vários tipos de função dissipativa, então a função potência é a simples soma das funções potência correspondentes a cada um dos tipos de força dissipativa. Será o caso da força dissipativa do atrito ser representado por um polinómio de potências de velocidade. Na realidade, usaremos o resultado geral

$$F_i = a_i v_i^n \leftrightarrow P = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^N a_i v_i^{n+1} \quad (3.164)$$

mesmo que n não seja inteiro.

3.6.4 Aplicação

Vejamus um caso concreto, com uma só massa pontual em movimento a 3D, sujeita a uma força de atrito proporcional à n -ésima potência do módulo da velocidade,

$$F_{atrito} = av^n \leftrightarrow P_{atrito} = \frac{av^{n+1}}{n+1} \quad (3.165)$$

e iremos obter as respetivas componentes (de \mathbf{F}_{atrito}) a partir de P_{atrito} , quer em coordenadas cartesianas, quer em coordenadas esféricas. De seguida, voltaremos a deduzir as componentes desta força em coordenadas esféricas mas partindo das componentes em coordenadas cartesianas.

Seja qual for o método utilizado, as equações de Euler-Lagrange a resolver serão do tipo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = F_{q_r \text{ dissipativa}} \quad (3.166)$$

em que reservaremos as forças dissipativas (de atrito) ao lado direito da equação, juntando as forças conservativas no termo $\frac{\partial L}{\partial q_r}$ do lado esquerdo (força gravítica, e.g.).

Coordenadas Cartesianas

Aqui é

$$ds = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \quad (3.167)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{s}}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} \\ &= \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z} \end{aligned}$$

e, claro,

$$v = [\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.168)$$

pelo que a função potência (dissipativa) é

$$P_{\text{dissipativa}} = \frac{a}{n+1} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n+1}{2}} \quad (3.169)$$

Então

$$\begin{aligned} F_{x_{\text{dissipativa}}} &= \frac{\partial P_{\text{dissipativa}}}{\partial \dot{x}} \\ &= \frac{a}{n+1} \frac{n+1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n+1}{2}-1} (2\dot{x}) \\ &= a (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \dot{x} \\ &= a (v^2)^{\frac{n-1}{2}} \dot{x} \\ &= a\dot{x}v^{n-1} \\ &= av^n \left(\frac{\dot{x}}{v} \right) \\ &= av^n \cos \alpha_x \end{aligned} \quad (3.170)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para os outros dois eixos

$$\begin{aligned} F_{y_{\text{dissipativa}}} &= \frac{\partial P_{\text{dissipativa}}}{\partial \dot{y}} \\ &= a\dot{y}v^{n-1} \\ &= av^n \left(\frac{\dot{y}}{v} \right) \\ &= av^n \cos \alpha_y \end{aligned} \quad (3.171)$$

$$\begin{aligned}
F_{z_{dissipativa}} &= \frac{\partial P_{dissipativa}}{\partial \dot{z}} \\
&= a\dot{z}v^{n-1} \\
&= av^n \left(\frac{\dot{z}}{v} \right) \\
&= av^n \cos \alpha_z
\end{aligned} \tag{3.172}$$

Claro que

$$\left[F_{x_{dissipativa}}^2 + F_{y_{dissipativa}}^2 + F_{z_{dissipativa}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = |\mathbf{F}_{diss}| = av^n \tag{3.173}$$

Como queremos que a força de atrito se oponha, naturalmente, ao movimento, será necessário ter $a < 0$.

Coordenadas Esféricas

Para obter as componentes de força de atrito em coordenadas esféricas teremos primeiro de expressar a função potência dissipativa em coordenadas esféricas. Ora, nestas coordenadas é, como sabemos

$$d\mathbf{s} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi\hat{\varphi} \tag{3.174}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} \\
&= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\varphi}\hat{\varphi}
\end{aligned} \tag{3.175}$$

e

$$v = |\mathbf{v}| = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.176}$$

Consequentemente

$$P_{diss} = \frac{av^{n+1}}{n+1} = \frac{a}{n+1} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \tag{3.177}$$

e

$$F_{atrito} = av^n = a \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n}{2}} \tag{3.178}$$

Entretanto, a relação geral

$$F_{q_r} = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_r} \tag{3.179}$$

dá-nos as respetivas componentes:

$$\begin{aligned}
F_{r_{diss}} &= \frac{\partial P_{diss}}{\partial \dot{r}} \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \frac{a}{n+1} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \\
&= \frac{a}{n+1} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \right] \\
&= \frac{a}{n+1} \frac{n+1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}-1} (2\dot{r} + 0 + 0) \\
&= a\dot{r} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \\
&= a\dot{r}v^{n-1} \tag{3.180}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\theta_{diss}} &= \frac{\partial P_{diss}}{\partial \dot{\theta}} \\
&= \frac{a}{n+1} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \right] \\
&= \frac{a}{n+1} \frac{n+1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}-1} (0 + r^2 2\dot{\theta} + 0) \\
&= ar^2 \dot{\theta} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \\
&= ar^2 \dot{\theta}v^{n-1} \tag{3.181}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\varphi_{diss}} &= \frac{\partial P_{diss}}{\partial \dot{\varphi}} = \\
&= \frac{a}{n+1} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left[\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \right] = \\
&= \frac{a}{n+1} \frac{n+1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}-1} (0 + 0 + r^2 \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi}) = \\
&= a \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = \\
&= ar^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta v^{n-1} \tag{3.182}
\end{aligned}$$

Obtenção das Componentes dissipativas em Coordenadas Esféricas a partir das obtidas em Coordenadas Cartesianas

Vamos exemplificar a aplicação de expressão

$$F_{q_r} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_r} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_r} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_r} \quad (3.183)$$

re-obtendo as componentes de força de atrito em coordenadas esféricas. Ora, sabemos que as relações entre as coordenadas cartesianas e as esféricas são

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta \\ r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \theta = \cos^{-1} \left(\frac{z}{r} \right), \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases} \quad (3.184)$$

onde r é a distância na radial à origem, θ o ângulo polar e φ o ângulo azimutal.

- Para componente radial de F_{diss} , $F_{r_{diss}}$, temos

$$F_{r_{diss}} = F_{x_{diss}} \frac{\partial x}{\partial r} + F_{y_{diss}} \frac{\partial y}{\partial r} + F_{z_{diss}} \frac{\partial z}{\partial r} \quad (3.185)$$

onde

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta \end{cases} \quad (3.186)$$

Substituindo, vem

$$\begin{aligned} F_{r_{diss}} &= a\dot{x}v^{n-1} \sin \theta \cos \varphi + a\dot{y}v^{n-1} \sin \theta \sin \varphi + a\dot{z}v^{n-1} \cos \theta \quad (3.187) \\ &= av^{n-1} (\dot{x} \sin \theta \cos \varphi + \dot{y} \sin \theta \sin \varphi + \dot{z} \cos \theta) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= \dot{r} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2) \\ \Rightarrow \dot{r} &= \frac{1}{2r} (2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}) \\ &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r} \\ &= \frac{x}{r}\dot{x} + \frac{y}{r}\dot{y} + \frac{z}{r}\dot{z} \\ &= \sin \theta \cos \varphi \dot{x} + \sin \theta \sin \varphi \dot{y} + \cos \theta \dot{z} \end{aligned} \quad (3.188)$$

e portanto

$$F_{r_{diss}} = av^{n-1} \dot{r} = a\dot{r}v^{n-1}, \quad (3.189)$$

como atrás, diretamente de P_{diss} expressada em coordenadas esféricas.

- Para a componente polar de \mathbf{F}_{diss} , $F_{\theta_{diss}}$, temos

$$F_{\theta_{diss}} = F_{x_{diss}} \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_{y_{diss}} \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_{z_{diss}} \frac{\partial z}{\partial \theta} \quad (3.190)$$

onde

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta \end{cases} \quad (3.191)$$

pelo que

$$\begin{aligned} F_{\theta_{diss}} &= a\dot{x}v^{n-1}r \cos \theta \cos \varphi \\ &\quad + a\dot{y}v^{n-1}r \cos \theta \sin \varphi - a\dot{z}v^{n-1}r \sin \theta \\ &= arv^{n-1}(\dot{x} \cos \theta \cos \varphi + \dot{y} \cos \theta \sin \varphi - \dot{z} \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.192)$$

Mas

$$\begin{aligned} \dot{x} &\equiv \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin \theta \cos \varphi) \\ &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \dot{\theta} \cos \varphi + r \sin \theta (-\sin \varphi) \dot{\varphi} \\ \Rightarrow \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.193)$$

e também

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \quad (3.194)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.195)$$

e substituindo em $F_{\theta_{diss}}$ fica

$$\begin{aligned} F_{\theta_{diss}} &= arv^{n-1} \left[\begin{aligned} &\left(\dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \right) \cos \theta \cos \varphi + \\ &+ \left(\dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \right) \cos \theta \sin \varphi - \\ &- \left(\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \right) \sin \theta \end{aligned} \right] \\ &= arv^{n-1} \left[\begin{aligned} &\dot{r} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + r\dot{\theta} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - r\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + \dot{r} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi + r\dot{\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \\ &\quad + r\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - \dot{r} \sin \theta \cos \theta + r\dot{\theta} \sin^2 \theta \end{aligned} \right] \\ \Rightarrow F_{\theta_{diss}} &= arv^{n-1} \left[\begin{aligned} &\dot{r} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \dot{r} \sin \theta \cos \theta + \\ &+ r\dot{\theta} \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 0 \end{aligned} \right] \\ &= arv^{n-1} \left[\dot{r} \sin \theta \cos \theta - \dot{r} \sin \theta \cos \theta + r\dot{\theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right] \\ &= arv^{n-1} \left[r\dot{\theta} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{\theta_{diss}} = ar^2\dot{\theta}v^{n-1} \quad (3.196)$$

como atrás, diretamente de $P_{diss}(r, \theta, \varphi)$.

- Para a componente azimutal de F_{diss} , $F_{\varphi_{diss}}$, temos

$$F_{\varphi_{diss}} = F_{x_{diss}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_{y_{diss}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_{z_{diss}} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \quad (3.197)$$

onde

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (3.198)$$

pelo que

$$F_{\varphi_{diss}} = a\dot{x}v^{n-1}(-r \sin \theta \sin \varphi) + a\dot{y}v^{n-1}(r \sin \theta \cos \varphi) \quad (3.199)$$

Substituindo os resultados de \dot{x} e \dot{y} já deduzidos acima, vem

$$\begin{aligned} F_{\varphi_{diss}} &= arv^{n-1} \sin \theta (-\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi) \\ &= arv^{n-1} \sin \theta \left[\begin{aligned} &\left(r\dot{\varphi} \sin \theta \sin^2 \varphi - \dot{r} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - r\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \right) + \\ &+ \left(\dot{r} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \right) + r\dot{\varphi} \sin \theta \sin^2 \varphi \end{aligned} \right] \\ \Rightarrow F_{\varphi_{diss}} &= arv^{n-1} \sin \theta [r\dot{\varphi} \sin \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)] \\ &= arv^{n-1} \sin \theta [r\dot{\varphi} \sin \theta] \\ &= ar^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta v^{n-1} \end{aligned} \quad (3.200)$$

como atrás, diretamente de $P_{diss}(r, \theta, \varphi)$.

É de notar que estas forças generalizadas não têm de ter dimensões de força.

Finalmente, expomos o sistema de equações de Euler-Lagrange que teríamos que resolver, por exemplo em coordenadas cartesianas, para um projétil no campo de gravidade homogéneo e segundo o sentido negativo do eixo vertical dos yy , sendo o eixo dos xx na horizontal e no plano de tiro:

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \quad (3.201)$$

$$\begin{cases} F_{x_{atrito}} = a\dot{x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ F_{y_{atrito}} = a\dot{y} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ F_{z_{atrito}} = a\dot{z} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases} \quad (3.202)$$

com $a < 0$ e portanto virá por aplicação das equações de Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \right] \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \right] \\ = & a\dot{x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \quad (3.203)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \right] \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \right] \\ = & a\dot{y} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \quad (3.204)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \right] \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \right] \\ = & a\dot{z} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \quad (3.205)$$

que se simplificam, numa primeira fase, para

$$\begin{cases} m\ddot{x} = a\dot{x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ m\ddot{y} - mg = a\dot{y} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ m\ddot{z} = a\dot{z} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases} \quad (3.206)$$

sistema de equações diferenciais que teria de ser resolvido tomando em consideração as condições iniciais sobre (x, y, z) e sobre $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

Efeitos adicionais como, por exemplo, o da força de Coriolis, teriam de ser incluídos no lagrangeano L atrás, como já vimos atrás, num sistema de coordenadas apropriado. Além disso, não concretizámos o valor do expoente n na força de atrito, podendo ser, ele próprio, função da velocidade instantânea, $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}$, o que iria complicar substancialmente a resolução daquele sistema de equações gerais. Concretamente, será o caso de um projétil lançado a velocidade supersónica ($n \approx 2$) consoante vá perdendo velocidade na sua trajetória.

Nesta temática, não foram feitos quaisquer procedimentos em MATLAB visto que o tratamento realizado na formulação Newtoniana já foi suficientemente extenso. Com isto, o propósito é abrir caminhos para outros alunos

complementarem o que já se fez no programa, desta vez com os efeitos descritos por Euler-Lagrange, de forma que, num *software* e com um único formalismo geral de base (as equações de Euler-Lagrange) ir acrescentando de forma sistemática "camadas" de diferentes efeitos para uma precisão cada vez maior. Por exemplo, outros tipos de atrito, efeitos giroscópicos etc.

Capítulo 4

Trajетórias com Força de Atrito explícita

Nesta secção vai então ser estendido o estudo do movimento de projéteis na atmosfera mantendo a força de atrito atmosférico supondo regimes de forças deste atrito proporcionais a várias potências da velocidade, no intervalo de $[1,2]$ e não ao seu quadrado como foi feito anteriormente.

4.1 Potência da Velocidade como Parâmetro livre

O problema do movimento de projétil bidimensional para o qual a força de atrito é proporcional a várias potências da velocidade da partícula foi resolvido por John Bernoulli em 1711.

Começaremos então por admitir o seguinte sistema de equações, em que é de certa forma semelhante ao exemplo estudado aquando do atrito proporcional ao quadrado da velocidade com resolução numérica, mas agora com o expoente n a variar, sendo que as representações numéricas obtidas pelo meio de gráficos mostrarão diversas simulações com os diversos n admitidos. Serve este estudo para saber o quão sensível é a trajetória para estes diferentes valores de n .

Seguiremos então com as equações iniciais já deduzidas atrás

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}\rho AC_D V^n \cos \theta \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2}\rho AC_D V^n \sin \theta - mg \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2m}\rho AC_D V^n \frac{v_x}{V} \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{2m}\rho AC_D V^n \sin \theta - g \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2m}\rho AC_D V^{n-1} v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{2m}\rho AC_D V^{n-1} v_y - g \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2m}\rho AC_D (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{2m}\rho AC_D (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} v_y - g \end{cases}
\end{aligned}$$

A partir daqui há que seguir com uma resolução admissível, ou seja, de modo numérico, através de MATLAB, em que é necessário criar alguns parâmetros no novo sistema de equações.

Com

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \dot{x} = z \quad (4.1)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \dot{y} = w, \quad (4.2)$$

como feito atrás, fica o sistema de equações de 1^a ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = w \\ \dot{z} = -\frac{1}{2m}\rho AC_D (z^2 + w^2)^{\frac{n-1}{2}} z \\ \dot{w} = -\frac{1}{2m}\rho AC_D (z^2 + w^2)^{\frac{n-1}{2}} w - g \end{cases} \quad (4.3)$$

Para a continuação do problema e visto que há muito desconhecimento dentro deste domínio, admite-se que as variáveis envolvidas nas expressões inicialmente apresentadas nesta secção que constituem a força de atrito têm o mesmo valor relativamente ao caso do atrito proporcional ao quadrado velocidade.

Este é um dos caminhos que irá ser adotado pelo nosso modelo em que ao escolhermos $n = 2$, $n = 1$ ou qualquer outro n nos dará as respetivas trajetórias balísticas, cada uma com o seu comportamento como irá ser posteriormente apresentado.

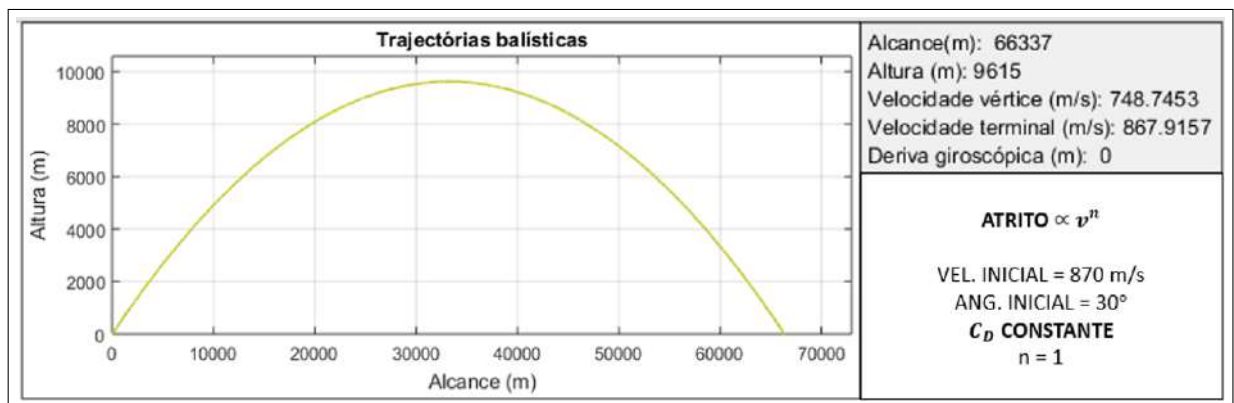


Figura 4.1: Trajetória balística, com atrito a variar com potências n da velocidade v, em que n = 1

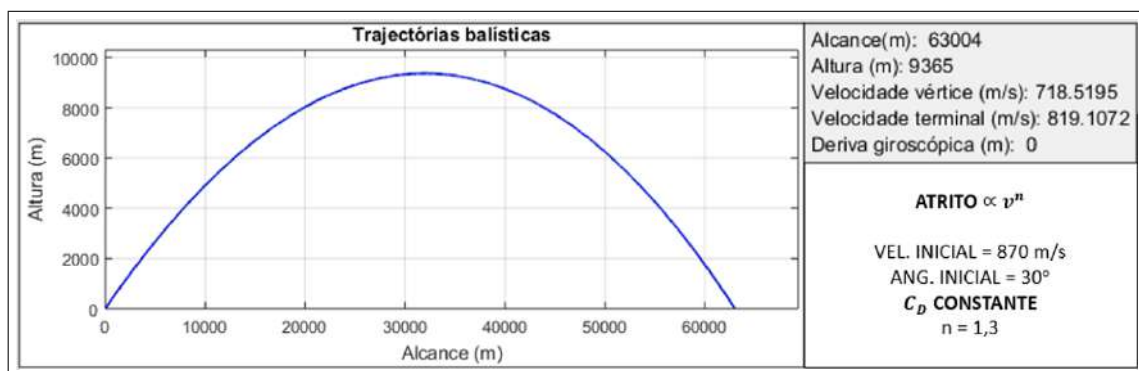


Figura 4.2: Trajetória balística, com atrito a variar com potências n da velocidade v, em que n = 1,3

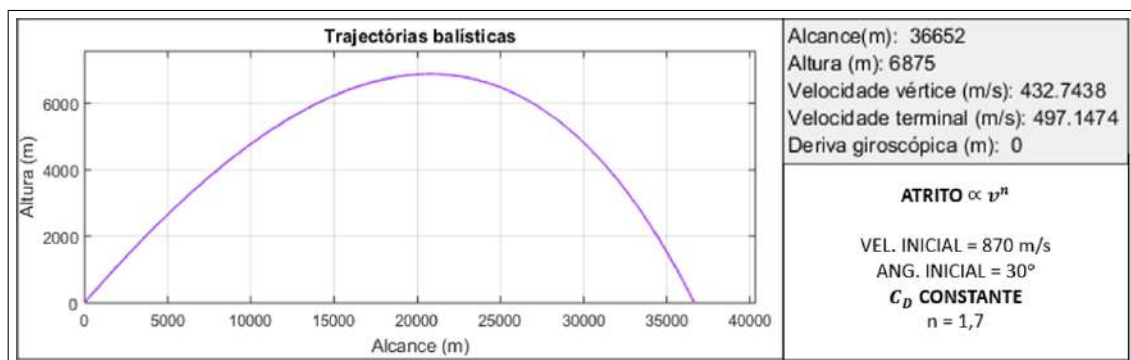


Figura 4.3: Trajetória balística, com atrito a variar com potências n da velocidade v, em que n = 1,7

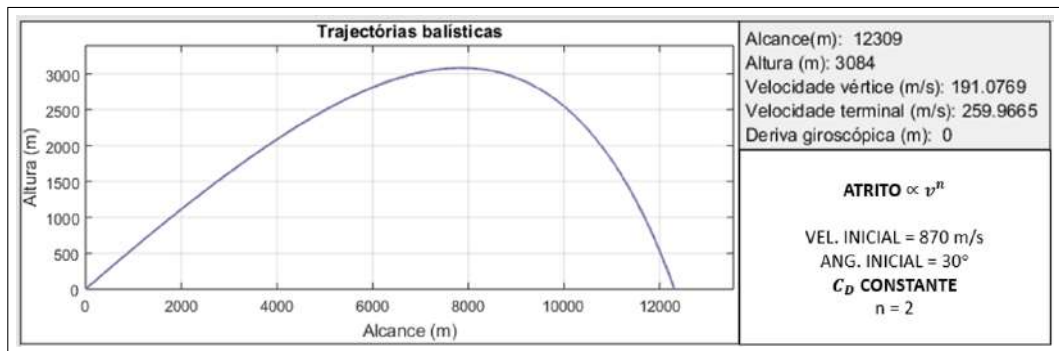


Figura 4.4: Trajetória balística, com atrito a variar com potências n da velocidade v , em que $n = 2$

4.2 Front-end em MATLAB

Através da apresentação do *front-ent* em MATLAB para a imposição versátil dos parâmetros de tiro e da explicação de cada uma das secções que estão disponíveis para o utilizador seleccionar e escrever os valores ou casos a partir dos quais se queiram obter resultados, pressupõe-se que os futuros utilizadores desta ferramenta (maioritariamente cadetes da EN) a usem para analisar resultados obtidos através dos gráficos com a anterior introdução de dados de entrada e sendo esta ainda uma ferramenta em construção, sugere-se que se vá aperfeiçoando aos poucos até os erros serem cada vez menores, com a inclusão de mais fatores que influenciam a trajetória balística. O código do programa apresenta-se no Apêndice B.

Segue-se a visualização geral do programa

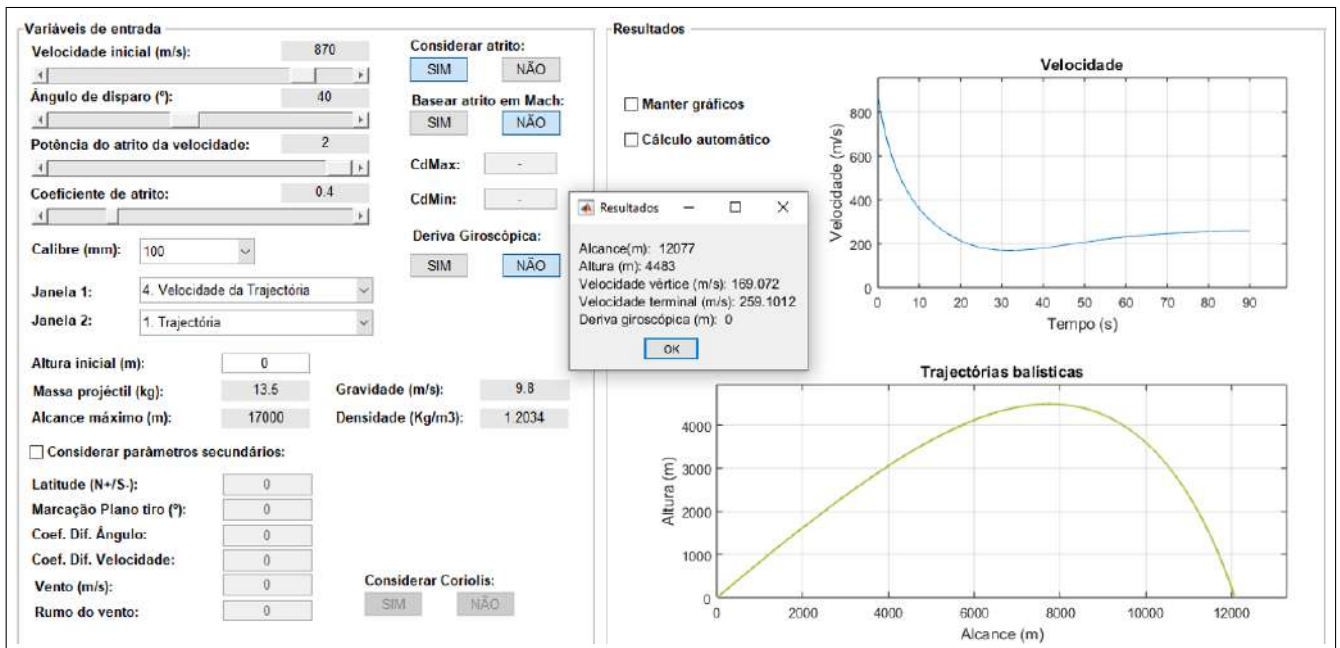


Figura 4.5: Front-end do MATLAB

Os parâmetros de entrada mais usuais podem ser escolhidos através dos seguintes *sliders* representados

Velocidade inicial (m/s):	870
<input type="text"/>	<input type="text"/>
Ângulo de disparo (°):	30
<input type="text"/>	<input type="text"/>
Potência do atrito da velocidade:	2
<input type="text"/>	<input type="text"/>
Coefficiente de atrito:	0.3
<input type="text"/>	<input type="text"/>

Figura 4.6: Parâmetros de entrada

em que se escolhe a velocidade inicial do projétil a considerar, seguidamente o ângulo de disparo, depois escolher a potência da velocidade, entre 1 e 2, sendo que o primeiro refere-se ao caso em que o atrito é proporcional à velocidade, o outro é quando o atrito é proporcional ao quadrado da velocidade, sendo que os outros números decimais intermédios são as diferentes variações de n .

Na figura (4.7) é onde se selecciona o calibre da arma e de referir que a janela onde vai ser apresentado o gráfico e que nos interessa essencialmente é a janela 2, porque a janela 1 encontra-se já colocada no programa mas aguarda os futuros desenvolvimentos neste projeto, onde se poderão escolher as diferentes secções representadas na figura (4.8).

Calibre (mm):	100	▼
Janela 1:	1. Distância da Trajectória	▼
Janela 2:	1. Trajectória	▼

Figura 4.7: Calibres e janelas

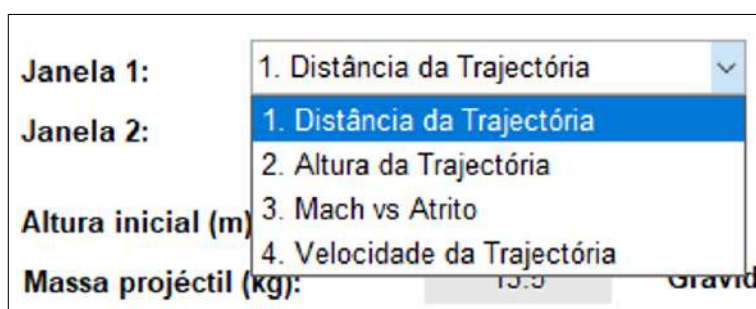


Figura 4.8: Janela 1

A figura (4.9) indica a altura inicial, que normalmente apresenta o valor 0 como origem, sendo que a massa do projétil é automaticamente colocada consoante a escolha que se fez no calibre e o alcance máximo que teoricamente esse projétil é capaz de ter. A gravidade e a densidade são apenas constantes e têm caráter informativo.

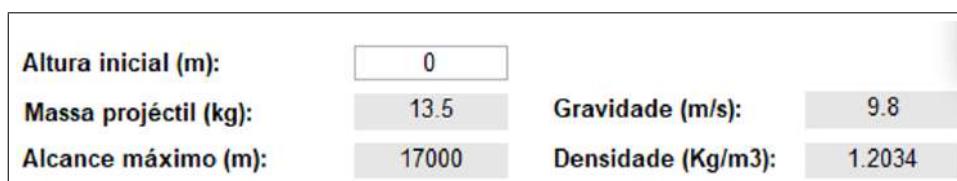


Figura 4.9: Altura inicial, características do projétil e constantes

Em trabalhos futuros, em que se possam adicionar, como já referido anteriormente outros fatores importantes a ter em conta para obtenção de gráficos mais realistas, temos o representado na figura (4.10)

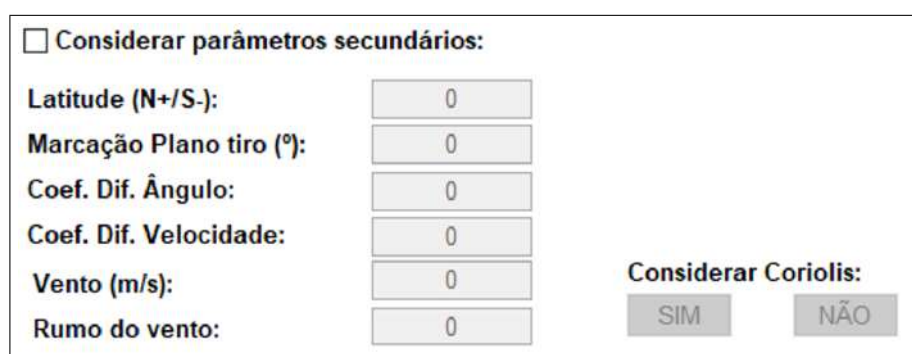


Figura 4.10: Parâmetros a serem usados futuramente

Uma parte também importante e que também faz plenamente a diferença e que constitui também o estudo desta dissertação é o comportamento do

atrito. Ou seja, na figura (4.11) é possível ter a decisão de escolha entre incluir o atrito atmosférico ou não e em caso afirmativo, decidir se admite que o coeficiente de atrito se mantém constante, facto que foi sempre referido nas aulas da cadeira de Balística e Tiro ou então optar por seguir a teoria de que o coeficiente de atrito altera ao longo da trajetória com o comportamento do gráfico modelo (2.6). A opção deriva giroscópica encontra-se também aqui, podendo ser utilizada de acordo com o princípio referido na equação (1.6)

Considerar atrito:	
<input checked="" type="button" value="SIM"/>	<input type="button" value="NÃO"/>
Basear atrito em Mach:	
<input type="button" value="SIM"/>	<input checked="" type="button" value="NÃO"/>
CdMax:	<input type="text" value="0"/>
CdMin:	<input type="text" value="0"/>
Deriva Giroscópica:	
<input type="button" value="SIM"/>	<input checked="" type="button" value="NÃO"/>

Figura 4.11: Parâmetros a serem usados futuramente

Quanto à parte mais gráfica e com obtenção de resultados, temos as 2 janelas já referidas anteriormente sendo a figura (4.12) a janela 1 e a figura (4.13) a janela 2.

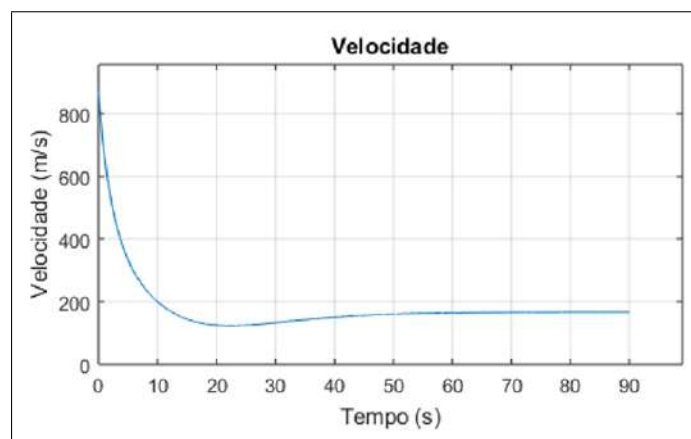


Figura 4.12: Janela 1

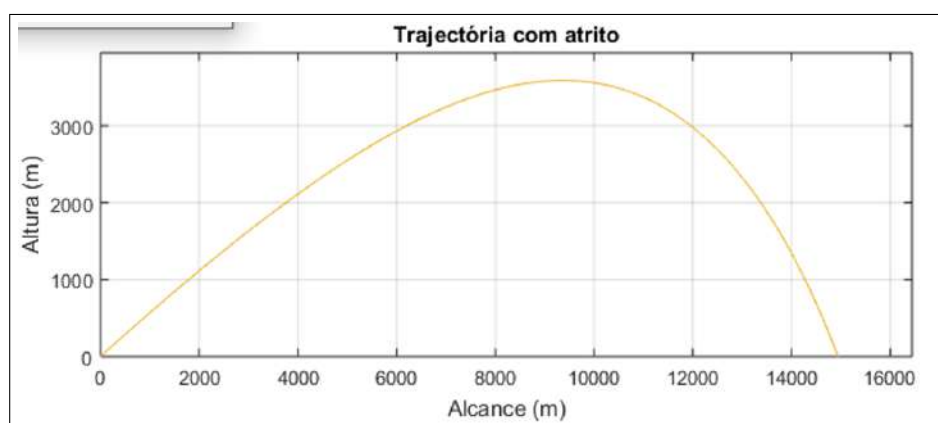


Figura 4.13: Janela 2

Para finalizar as 3 secções que se encontram no canto superior esquerdo que apresentam as seguintes informações

Ficheiro	Dados	Ajuda
Exportar Plot 1 (.EPS)	Carregar exemplo	Descrição do Programa
Exportar Plot 2 (.EPS)		
Limpar		
Sair		

Figura 4.14: Secções superiores

Este é então um programa em MATLAB que permite obter trajetórias balísticas de acordo com os parâmetros inicialmente escolhidos pelo utilizador permitindo analisar as correspondentes trajetórias. Esta análise encontra-se no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Análise e Discussão de Resultados

Após as diversas deduções, esquematizações e resoluções analíticas e numéricas, avançamos para uma seção com exemplos mais práticos, onde irão ser apresentados inúmeros gráficos em que a partir daí e com a relação entre uns e outros deverá ser feita uma análise e discussão dos resultados adquiridos. Uma tabela final será preenchida tendo em conta resultados anteriormente adquiridos por um manual de balística, de modo a que haja a possibilidade de haver uma comparação entre ambos e que se possa fazer a sua avaliação.

5.1 Trajetória Balística sem Atrito

Pegaremos inicialmente na simulação da trajetória balística sem atrito da peça de 100 mm que irá ser analisada quanto ao seu comportamento.

Aqui, vai apenas haver alteração do ângulo de disparo, sendo que os únicos fatores a fazer com que haja alteração do comportamento da trajetória é v_0 e θ_0 . Visto que nestes casos, colocam-se os dados reais do projétil a estudar, a nossa v_0 vai ser sempre 870 m/s. Na figura (5.1) encontram-se então todos os dados necessários para observar o comportamento do projétil no vácuo.

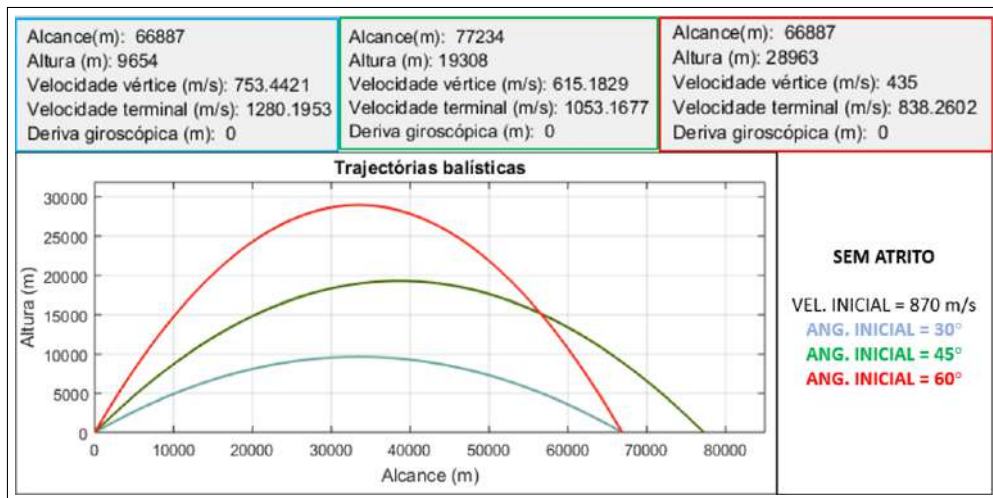


Figura 5.1: Diferença nos ângulos

O facto de se alterarem portanto os ângulos, é possível claramente ver que há diferenças.

5.2 Trajetória Balística com Atrito Proporcional à Velocidade

Segue-se agora um domínio que agora irá estar presente em todas as posteriores secções, onde começará a ser incluído o atrito. Neste caso, o regime que é suposto ser utilizado é o subsónico, no entanto tanto o subsónico como o supersónico são aqui apresentados de modo a ser feita uma análise dos seus comportamentos. Apresenta-se um exemplo que com o C_D constante que de acordo com a figura (2.6) nos dá a informação que este valor se encontra entre 0.3 e 0.4. Desta vez iremos optar por 0.3, no entanto nos próximos exemplos iremos colocar 0.4, que é o valor arredondado e mais correto colocar caso a verdade fosse mesmo constante. De lembrar que estamos a referir-nos ao projétil de 100 mm e de acordo com a equação (2.67) o valor de mach é aproximadamente 2.55.

Seguidamente, dentro deste regime, na figura (5.2) estarão representados novamente as diferentes alterações com a alteração dos θ_0 .

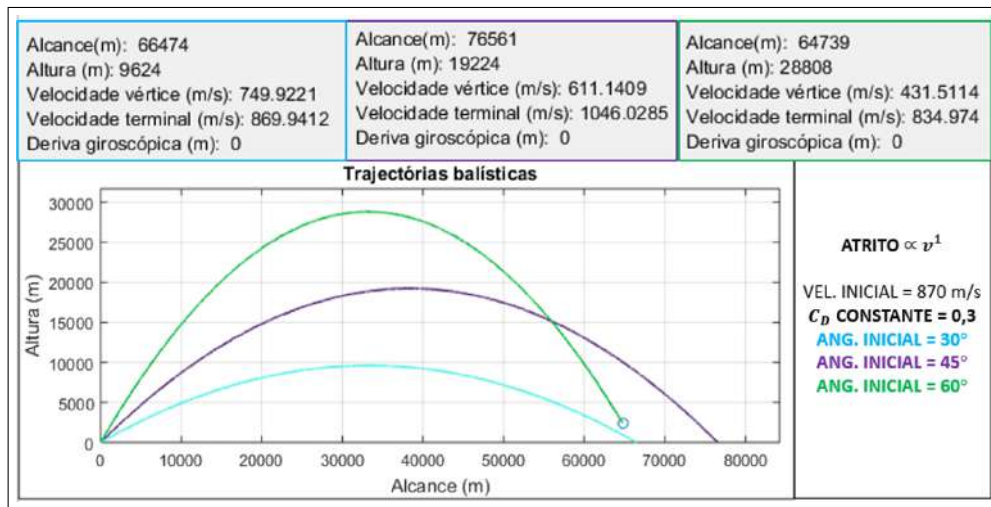


Figura 5.2: Diferença nos ângulos

Seguidamente haverão diferenças de C_D , visto que ainda estamos a analisar o estudo dos coeficientes de atrito a começar por C_D constantes.

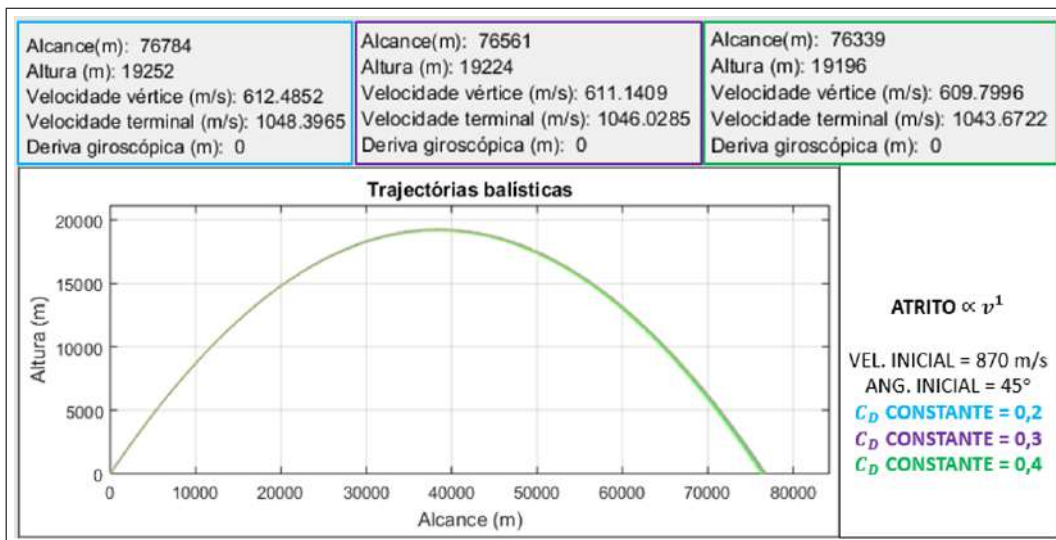


Figura 5.3: Diferença nos coeficientes de atrito

Depois destes dois exemplos, de salientar que com este modelo, dentro deste regime em que o atrito apresenta-se como proporcional à velocidade, tem características muito semelhantes relativamente à situação do projétil se encontrar no vácuo. Daí que na primeira figura os alcances são praticamente iguais ao caso anterior e na segunda figura em que se coloca a hipótese de adicionar atrito atmosférico, este tem sempre o mesmo alcance.

Por fim, saindo um pouco da área de tiro naval de grande calibre e dirigindo-nos para uma componente mais realística desta secção, sendo o regime subsónico o suposto a ser aqui estudado, apresenta-se a figura (5.4) com o comportamento de trajetórias balísticas de um projétil com $v_0 = 200$ m/s.

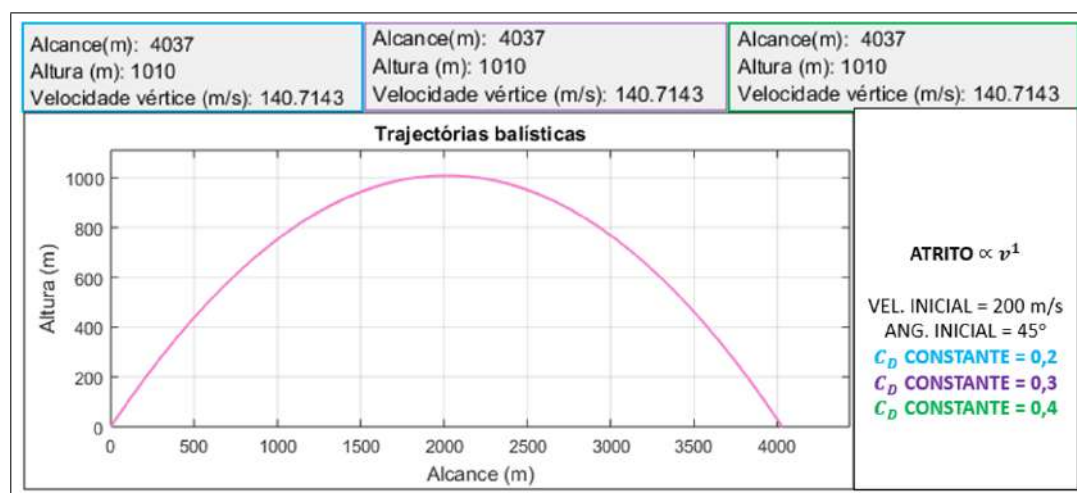


Figura 5.4: Diferença nos coeficientes de atrito

Com isto, pode-se concluir que para regimes subsónicos, mesmo variando o C_D , este não influencia praticamente em nenhum aspeto o alcance do projétil.

5.3 Trajetória Balística com Atrito Proporcional ao Quadrado da Velocidade

Este é o exemplo que vai sem dúvida ser o mais utilizado porque embora tenhamos os outros exemplos de regimes, este modelo é o que apresenta resultados mais próximos aos da realidade e que, sem dúvida é o que surge a maior parte das vezes na literatura. O regime mais correto a ser aqui utilizado é o supersónico.

Já se viu e vai-se ver que cada um destes regimes tem as suas características e mesmo o próximo modelo poderá ser viável escolhendo o n correto, no entanto, como já foi dito, no que toca ao estudo do C_D a variar com a velocidade, este vai ser o escolhido para servir como teste à adição do $C_D(M)$ para posterior análise e discussão com resultados já obtidos por outros autores.

Em primeiro lugar, na figura (5.5), com coeficiente de atrito constante e igual a 0.4, o comportamento da trajetória relativamente à mudança de θ_0 .

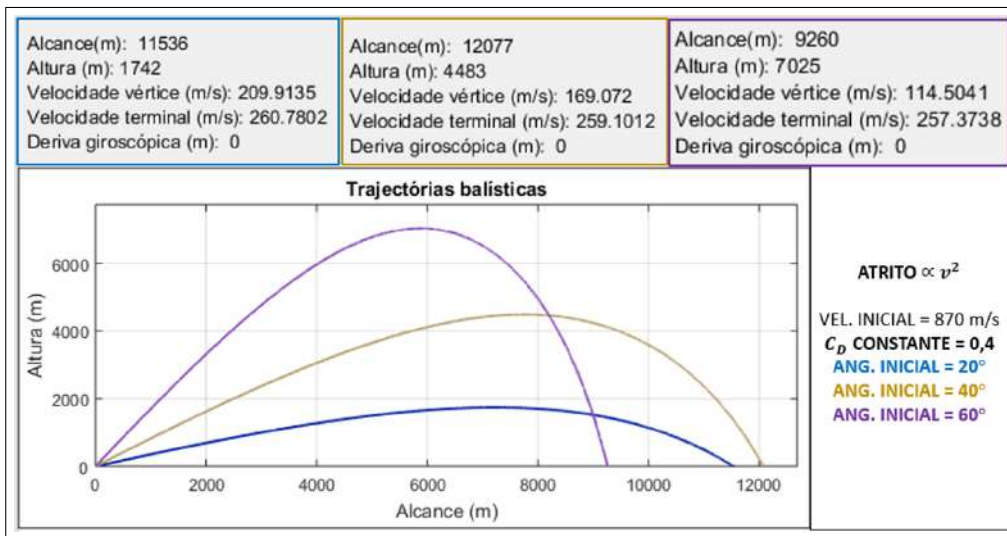


Figura 5.5: Diferença nos ângulos

Mais uma vez se vê que há diferenças entre cada um dos ângulos, salientando que excepto na figura seguinte, o $\theta_0 = 40^\circ$ vai ser o utilizado visto que referindo ao projétil de 100 mm, tal como já dito no início da dissertação, este ângulo é o que permite um maior alcance.

Seguidamente, com $\theta_0 = 45^\circ$, uma alteração entre cada um dos casos no que toca ao C_D , que mais uma vez é uma constante, algo que seguidamente vai ser substituído pelo modelo construído que tem em conta a função elaborada no trabalho no que toca à variação do C_D com a velocidade.

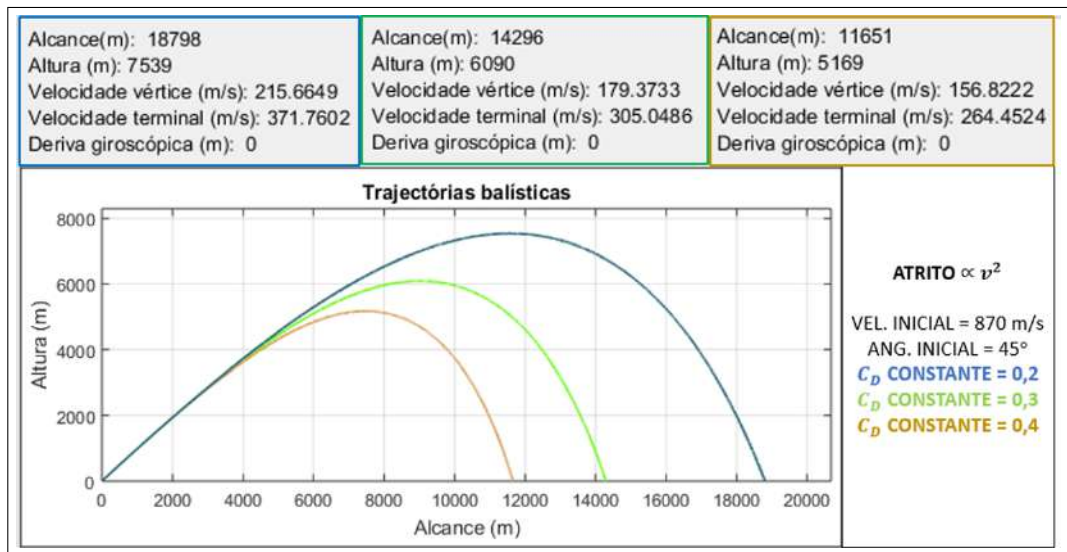


Figura 5.6: Diferença nos coeficientes de atrito

Aqui apenas salienta a óbvia diferença que os C_D traduzem nos caminhos das trajetórias e agora, aproveitando o facto de se ter criado o modelo que permite visualizar a variação do C_D com a velocidade em mach (C_D variável, no gráfico), vai ser dado um exemplo que permite observar os diferentes gráficos respeitantes a este novo C_D , em diferentes situações de θ_0 .

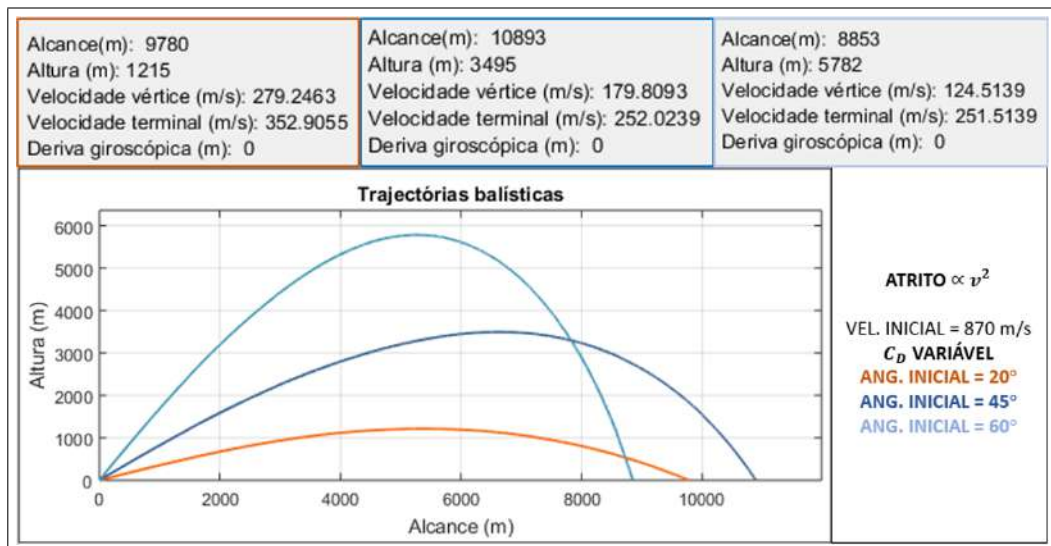


Figura 5.7: Diferença nos ângulos

Aqui também dá para se ter apenas a noção das diferenças no que toca

à alteração dos θ_0 , quando neste caso temos C_D a variar.

Agora uma figura bastante importante que mostra a relação entre os gráficos com C_D constante e variável, ou seja, algo que não é real e que, como já foi dito algumas vezes, o que se dizia ser na cadeira de Balística e Tiro e uma verdade, que embora também tenha muitas aproximações, com posteriores melhorias, pode muito bem representar a realidade.

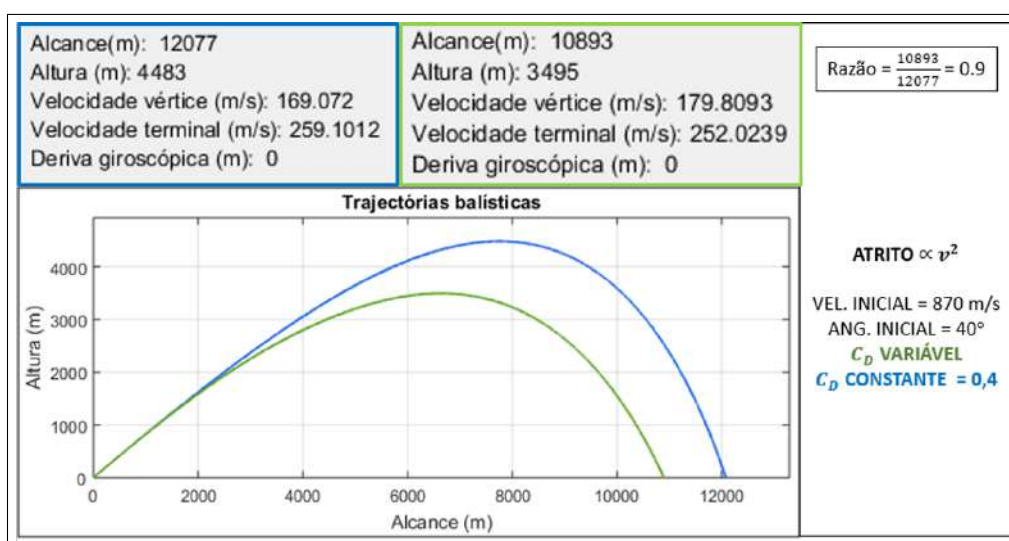


Figura 5.8: Comparação entre coeficiente de atrito constante e variável

Na última secção deste capítulo irá ser novamente discutida a fiabilidade desta metodologia, no entanto é de referir que é possível ver uma clara diferença entre ambos, permanecendo a ideia logo ao início de que é um erro assumir que se pode simplesmente tornar C_D uma constante.

Como é possível também verificar na figura, a diferença entre as duas suposições do comportamento do C_D levou a determinar uma razão entre os dois alcances que neste caso vale 0.9 mas que depende obviamente dos valores de C_D e da velocidade, sendo que muitos mais exemplos podem ser apresentados a partir do *software* desenvolvido.

De facto, muitos outros casos poderiam ser analisados e comparados com diferentes intervalos de C_D variáveis e diferentes valores de C_D em caso de C_D constantes.. No entanto, como ao longo do período da tese não foi possível obter os dados concretos dos projéteis a ser tratados, este conteúdo é deixado para que em trabalhos posteriores, caso se venha a ter acesso aos valores reais.

5.4 Trajetória Balística com Atrito e variação da Potência n da Velocidade v

No que toca aos diversos regimes e modelos que estivemos a estudar, relativamente à potência da velocidade normalmente representada por n , esta será a última abordagem.

Segue-se então a figura (5.9) que nos mostra o comportamento das trajetórias aquando da utilização de alguns n diferentes de 1 e de 2, tendo sido usados os dois mais próximos de 2, o regime mais fiável.

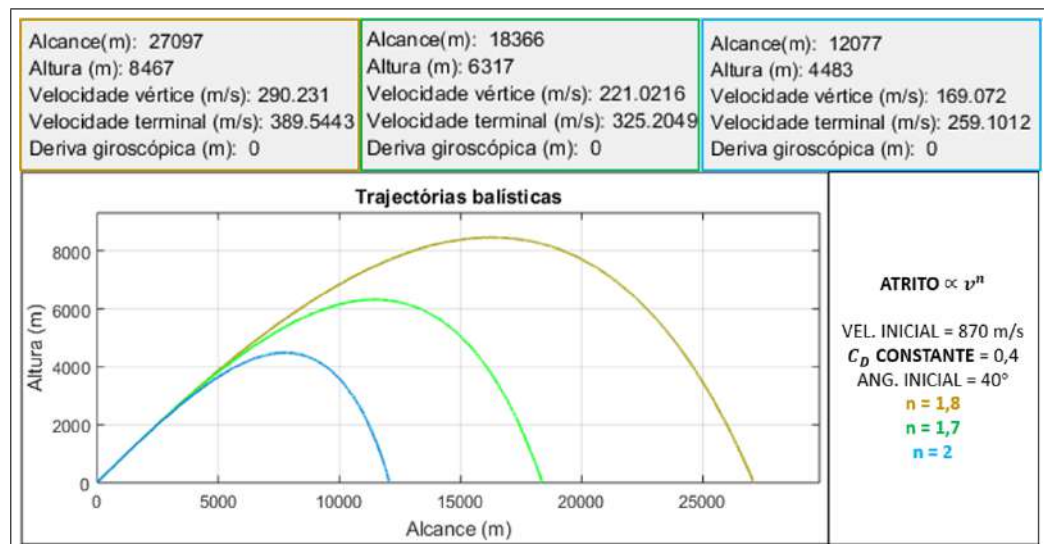


Figura 5.9: Diferença nas potências da velocidade na força de atrito

A partir daqui é possível observar que o facto de alterarmos a potência de atrito, ou seja o n , vai também influenciar as trajetórias balísticas, por isso, poderia haver muito mais estudo nesta área, mas isto quer dizer que o C_D influencia e a potência pode não ser de facto exatamente igual a 2 e poderão haver ligeiras diferenças neste aspeto que conduzirão aos resultados obtidos experimentalmente das armas.

Seguidamente surge uma figura em que mostra as trajetórias balísticas quando $n = 1$ e $n = 2$, com C_D constante e igual a 0.4, desta vez com ângulos mais pequenos (30°).

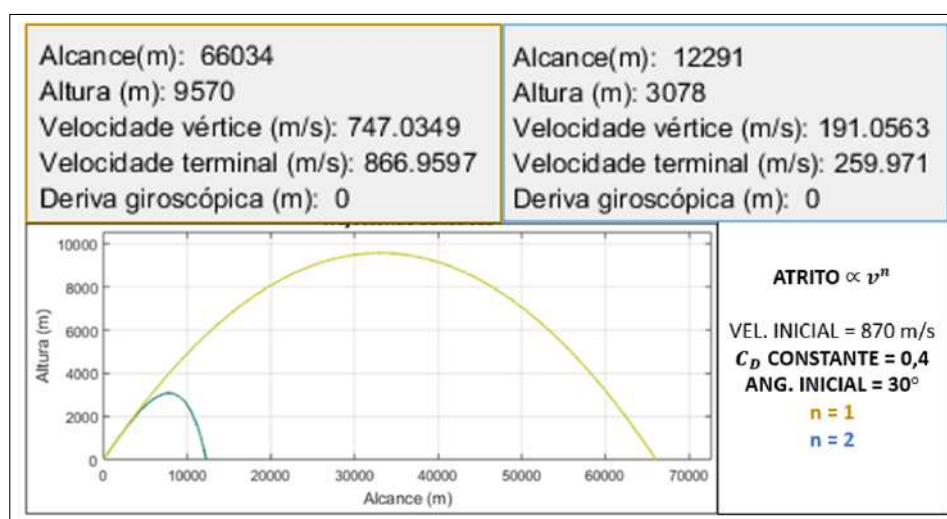


Figura 5.10: Comparação entre potências da velocidade na força de atrito $n=1$ e $n=2$

Aqui dá bem para ver a grande diferença entre ambos. Seguidamente, para finalizar esta secção, apresenta-se uma figura que mostra novamente a diferença entre as 2 potências ($n = 1$ e $n = 2$), no entanto quando $n = 2$, mostra-se já a comparação entre C_D constante e C_D variável e quando $n = 1$, mostra-se com o C_D variável, visto que se viu anteriormente que a diferença não era praticamente nenhuma.

5.5 Validação do Modelo relativamente a dados reais

De modo a podermos analisar e avaliar o programa construído com os diferentes métodos, modelos e regimes utilizados ao longo do trabalho, é importante fazer algumas comparações com resultados já obtidos presentes na literatura.

Embora neste trabalho o objeto em estudo tenha sido maioritariamente o projétil de 100 mm da peça de 100 mm e tendo dado logo ao início uma breve introdução da peça de 76 mm, ao longo do período dedicado à elaboração da tese não foi possível obter muitas informações sobre estes dois calibres. No entanto, um dos dados que foi possível obter e que de facto, é um dos mais importantes é o alcance máximo. Seguidamente irão ser representados os diferentes gráficos com as diferentes noções de C_D , em que desta vez surge um terceiro tipo que quer dizer qual é o C_D médio que está presente durante toda a trajetória e que permite chegar aos alcances teóricos. Aqui

vai ser então importante colocar, pelo menos para os dois calibres da Marinha Portuguesa, o $\theta_0 = 40^\circ$, mas também se deve ter em conta que há muitos outros fatores que até podem alterar as trajetórias dentro das outras partes da balística, principalmente da balística interna.

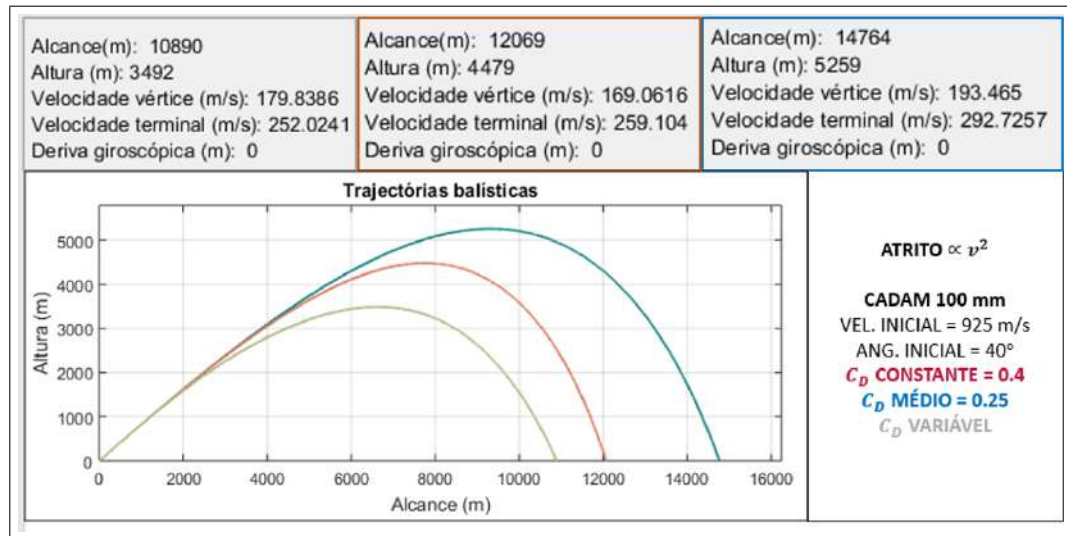


Figura 5.11: Projeções projétil 76 mm

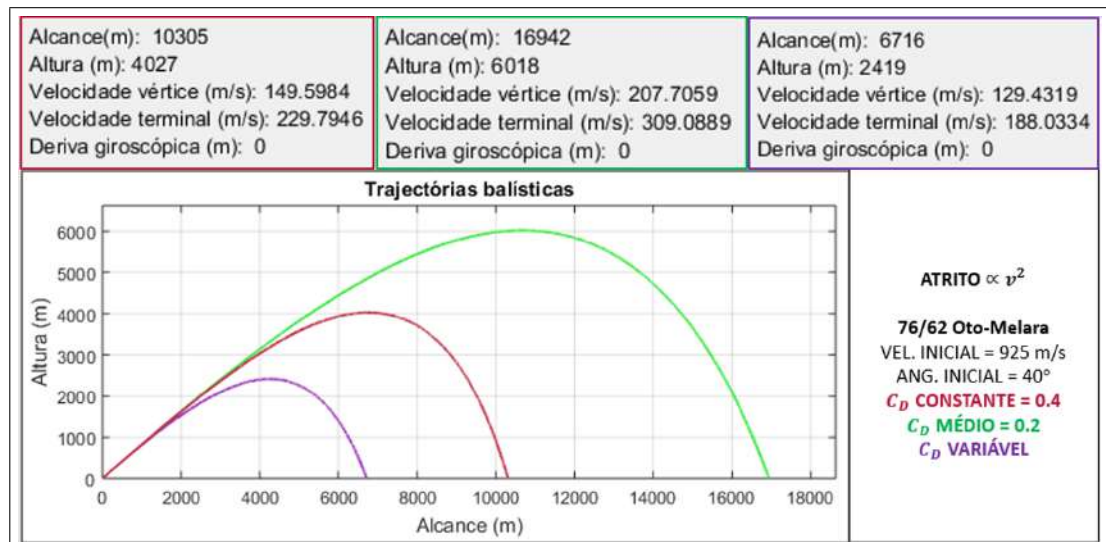


Figura 5.12: Projeções projétil 100 mm

Os dados destes dois calibres irão ser analisados e comparados através do preenchimento de uma tabela incluída num manual de balística (Morales,

2000).

Como já foi dito anteriormente, não houve muita oportunidade de acesso a dados das trajetórias da Marinha Portuguesa principalmente por razões de confidencialidade, por isso visto que nessa tabela constava informação dos alcances do projétil de 105 mm que, mesmo não fazendo parte da nossa área, e sendo um projétil superssônico, decidiu-se também testar o modelo alterando apenas os valores e características do projétil.

Assim sendo, a figura deste calibre é a seguinte:

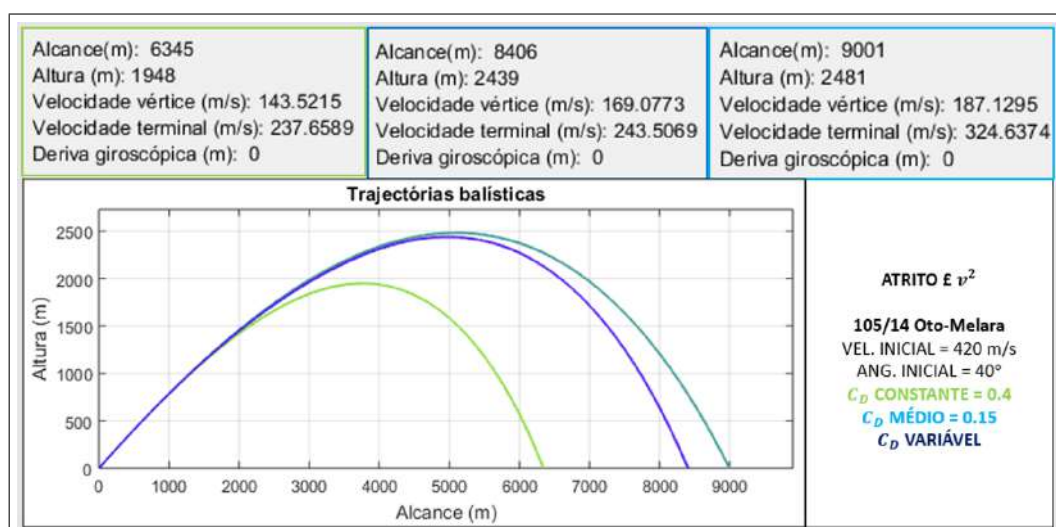


Figura 5.13: Projeções projétil 105 mm

Portanto, a melhor maneira de conseguirmos analisar para posteriores conclusões acerca deste domínio, é encontrar os erros associados aos alcances máximos introduzidos na literatura, encontrar o erro relativo, tentar perceber o porquê dos diversos resultados e concluir se há uma variação assim tão acentuada entre supor que C_D é constante e admitir que C_D é variável.

Sendo assim, a tabela (5.1) mostra-nos tudo isto.

De referir que a azul claro se encontram os valores da tabela do manual, a verde escuro dados pertencentes ao projétil de 100 mm que se encontram em *datasheets* e a verde claro os resultados retirados dos gráficos aqui representados.

Analisaremos portanto os três casos que nos interessam mais que são os do projétil de 76, 100 e 105 mm. De referir que numa primeira instância dá logo para concluir que quando usamos o nosso programa, o resultado do alcance no vácuo está 100% correto.

Começaremos pelo primeiro caso que corresponde ao projétil de 76 mm que na situação de considerar o atrito atmosférico, verificamos que com o C_D

Tipo Projétil	Velocidade Inicial	Alcance no Vácuo (km)	Alcance no Ar (km)	Erro relativo (%)
Morteiro 300 mm	396	16	11	-
155 FH70	700	50	24	-
7.62 SLR	840	72	4	-
76/62 Oto-Melara	925	87	16	-
76/62 Oto-Melara	925	87	7*; 10**	56.25; 37.5
40/70 Bofor Breda	985	99	12	-
105/14 Oto-Melara	420	18	10	-
105/14 Oto-Melara	420	18	9*; 6**	10; 40
CADAM 100 mm	870	76	17	-
CADAM 100 mm	870	76	11*; 12**	35; 29
155/39 HE M107	684	48	18	-

* C_D variável
** $C_D = 0.4$

Tabela 5.1: Resultados provenientes da literatura, experiências - azul - e provenientes do software desenvolvido - verde (adaptado de A. E. G. Morales, 2000)

a variar temos um erro de 56.25% e que com o $C_D = 0.4$ temos um erro de 37.5%. Obviamente que ao cumprir com o modelo criado deveríamos obter uma menor taxa de erro, no entanto isso pode ser explicado pelo facto de ainda terem de haver bastantes ajustes no gráfico que relaciona a velocidade (mach) com o C_D , chegando neste caso a ter muitas variações que podem chegar aos 0.5. Já no caso do C_D constante tem sempre o valor 0.4 e nunca tem um valor superior, logo consegue obter um alcance maior e mais próximo ao da realidade. Mas ainda mais importante que isto é que a tabela não refere que tipo de C_D está a supor, por isso, tal como no exemplo seguinte, pode estar a ser assumido que C_D é constante, sendo normal que dê um resultado mais próximo quando este é assim admitido, no entanto, segundo o nosso estudo, não é o método mais correto, sendo que pelas diferenças observadas entre ambos, é incorreto afirmar que se pode fazer uma aproximação grosseira deste modo quanto ao C_D .

Ainda referindo a projéteis da Marinha Portuguesa, temos o terceiro caso onde se trata do projétil de 100 mm que obtém uma vez mais erros de uma certa significativos, em que no caso de C_D variável apresenta 35% de erro e quando o valor é 0.4 apresenta 29%. Aqui, a razão é muito provavelmente a mesma.

Por fim, na segunda situação referenciada na tabela temos o projétil de

105 mm que, contrariamente aos outros, quando se faz uso do modelo criado da variação do C_D , apresenta apenas 10% de erro, enquanto que com um C_D constante apresenta 40%. Aqui a razão poderá também estar relacionada com o gráfico criado, mas que neste caso já poderá ter um comportamento mais semelhante ao da realidade. Tudo depende das características do projétil.

Claramente e como foi aqui demonstrado, há bastantes diferenças entre os dois tipos de C_D , o que permite dizer que não se devem de facto fazer as aproximações.

Capítulo 6

Conclusão e Recomendações finais

Visto que a mera resolução do problema do coeficiente de atrito a variar e a depender da velocidade, juntamente com a obtenção dos gráficos relacionados com as diferentes formas de abordar as trajetórias balísticas segundo o formalismo newtoniano já tiveram de ser alvo de um grande estudo, estas foram as vertentes principais do desenvolvimento da dissertação.

De salientar que alguns dos problemas que surgiram no decorrer da elaboração da dissertação foi o facto de não haver muita informação, pelo menos que pudesse ser fornecida no que toca ao comportamento do atrito a variar com a velocidade dos projéteis da Marinha Portuguesa em estudo. Os locais/projetos por onde passei para encontrar informação relativamente às duas peças da Marinha encontram-se no Apêndice A. Também o facto de haver muito desconhecimento nesta área fez com que houvesse mais dificuldade em perceber alguns conceitos que na leitura dos diversos manuais de balística eram um pouco difíceis de interpretar. Também de lembrar que foi este desconhecimento e transmissão de informação de balística externa através de métodos muito aproximados e normalmente sempre analíticos aos alunos da EN que fizeram com que me despertasse o interesse em saber mais e mesmo com resultados não 100% corretos tentasse perceber o porquê e através de uma base que constitui esta dissertação alertar aos próximos elementos que pudessem pegar neste trabalho e continuá-lo até chegar a resultados mais concretos, lógicos e demonstrando que há muito mais para além do dado nas aulas e que pode ser interessante para conseguirmos perceber tudo à nossa volta, visto que estamos num meio onde a área da balística e consequentemente da matemática é muito presente.

Como já deu para reparar, um dos desafios que também poderia ter sido realizado era o estudo do C_D para cada um dos regimes, ou seja, para v^1 , v^2

e v^n , no entanto, uma vez mais, já foi interessante ver os diferentes comportamentos entre eles aquando de um C_D constante e normalmente igual para todos e a elaboração de um modelo com uma função em que C_D depende da velocidade que já fica ainda mais próxima da realidade quando ainda nos referimos a v^2 , e claramente a diferença entre ambos é óbvia, fazendo com que seja uma vez mais um erro admitir que se poderão fazer estas aproximações sem referir e ter em conta a diferença que está adjacente a tudo isto, permitindo uma vez mais que surja aqui uma nova visão que nos indica o porquê de muitas vezes ser necessário tentar ir à raiz do problema e entender que nem tudo é tão simples como às vezes parece ser. Este poderá ser um desafio para qualquer um que queira perceber e alargar os conhecimentos nesta área.

Para finalizar esta parte da formulação newtoniana e de programação, de referir que os resultados anteriormente analisados poderiam ter sido muito mais precisos se conseguíssemos elaborar um modelo ainda mais similar e genérico para todos os projéteis e não com algumas formas limitadas. No entanto, acho que foi perceptível que de facto há muito para aprender e que realmente podemos através da tecnologia atual (programas) demonstrar que a realidade é outra, para além dos manuais referenciados que nos dão muito material para neste caso referir que o facto de por vezes algo ser constante, serve apenas como questão de diminuir a dificuldade da questão.

Sendo assim, a formulação lagrangeana, inicialmente o tema que iria ser mais aprofundado ficou para segundo plano e serviu apenas para suporte e base para trabalhos futuros.

No que toca ao formalismo lagrangeano, onde também houve a oportunidade de se estender um pouco o estudo por esse lado, de referir que:

- Esta formulação permite uma maior uniformização independentemente do sistema de coordenadas que se está a utilizar.
- Não é habitual continuar a usar formulação lagrangeana no caso de forças dissipativas e aqui havia também o interesse em rever como é que sabendo como é que funcionava a formulação newtoniana, como poderia ser introduzido, neste caso, o efeito de Coriolis na formulação lagrangeana, bem como de outras forças inerciais.
- Também de facto não se fica fixo a um sistema de coordenadas ortogonal, ou seja, tem-se a liberdade de usar as coordenadas generalizadas e a invariância das equações e nestas coordenadas generalizadas, as equações são sempre as mesmas, particularmente no caso $\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \frac{dL}{dq} = 0$, esta equação é sempre assim, seja qual for o "q" (pode ser uma distância, ângulo...).

- Se tivermos no domínio de $a = \frac{F}{m}$ e quisermos direcionar-nos para um referencial não inercial, este F complica-se. No caso de Euler-Lagrange, as equações mantêm-se na mesma.
- Podem-se usar referenciais não inerciais (permitem colocar por exemplo Coriolis, porque o referencial é o centro da Terra).
- Independência em relação às coordenadas generalizadas (distâncias, ângulos, etc) convenientes para o problema.
- Aplicável a domínios vastos da Física, não só à mecânica das partículas mas à eletrodinâmica etc.
- Maneira sintética de descobrir equações diferenciais.
- Relação direta com as leis da conservação (de energia, do momento linear e do momento angular) para sistemas físicos fechados (isto é, que não sofrem interação de sistemas exteriores).

Assim, para concluir e abrangendo toda a matéria abordada na dissertação, o que foi feito e o que importa salientar foi:

- Demonstração da variação no alcance nos diferentes regimes de velocidades (v^n);
- Demonstração da variação no alcance relacionada com os $C_D(v)$;
- Elaboração de um modelo genérico Newtoniano com as características mencionadas;
- Desenvolvimento de um *software* de carácter pedagógico, apenas dentro do formalismo Newtoniano;
- Apresentação introdutória da formulação Lagrangeana, incluindo a situação da existência de atrito atmosférico;
- Aprofundamento do conhecimento.

No que toca aos trabalhos futuros, muitos estudos poderão a partir daqui ser desenvolvidos, em que esta dissertação poderá servir como ponto de partida para prosseguir nomeadamente com a inclusão operacional da formulação Lagrangeana a qual permite incluir sistematicamente muitos outros efeitos que costumamos incluir nos Problemas Secundários na Balística Externa.

Bibliography

- Baranowski, L., Gadomski, B., Majewski, P., and Szymonik, J. (2016). *Explicit ballistic M-model: a refinement of the implicit modified point mass trajectory model*. Technical Sciences, Vol. 64, No. 1, p.p. 81-89.
- Barbosa, L. M., Blanco, A. L. M., Dutra, D. P., Santana, W. C., and Abrunhosa, J. D. M. (2005). *A Critical Evaluation of Three Models of External Ballistics*. ABCM (Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas).
- Carlucci, D. E. and Jacobson, S. S. (2008). *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC (Chemical Rubber Company) Press.
- Chand, K. and Panda, H. (2007). *Mathematical Model to Simulate the Trajectory Elements of an Artillery Projectile Proof Shot*. Defence Science Journal, Vol. 57, No. 1, p.p. 139-148.
- da Silva Fonte-Boa, R. F. (2014). *Análise de Balística Externa de um Projétil de Calibre 155 mm*. Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, p.p. 4-16.
- de Almeida Júnior, O. (2017). *Um estudo sobre o movimento dos projéteis balísticos e sua trajetória*. Tese de Mestrado, Faculdade Cidade São Paulo, São Paulo, p.p. 22-43.
- Fann, C. M. (2006). *Development of an artillery accuracy model*. Tese de Doutorado, Naval Postgraduate School, Monterey, p.p. 29-34.
- Farrar, C. L. and Leeming, D. W. (1983). *Basic Military Ballistics*. Battlefield Weapons Systems and Technology, Vol. 10, p.p. 78-80.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (1964). *The Feynman Lecture on Physics*. Addison-Wesley, Vol. 2, p.p. 41.1-41.9.

- Han, S., Hwang, M.-C., Lee, B.-Y., Ahn, J., and Tahk, M.-J. (2016). *Analytic Solution of Projectile Motion with Quadratic Drag and Unity Thrust*. ELSEVIER Journals, Vol. 49, No. 17, p.p. 40-45.
- Hayen, J. C. (2001). *Projectile motion in a resistant medium Part I: exact solution and properties*. International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 38, No. 3, p.p. 357-369.
- Hayen, J. C. (2015). *Projectile Motion with Aerodynamic Drag: The Cubic Law*. Seattle.
- Hooke, R. F. (2012). *The mathematical modelling of projectile trajectories under the influence of environmental effects*. ADFA (Australian Defence Force Academy) Journals.
- Lanczos, C. (1986). *The Variational Principles of Mechanics*. 4 ed., Dover Publications, New York.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1971). *Mecanique*. Ed. MIR, Moscow.
- McCoy, R. L. (1999). *Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symetric Projectils*. Schiffer Publishing, New York.
- Mohazzabi, P. (2018). *When Does Air Resistance Become Significant in Projectile Motion?* The Physics Teacher, Vol. 56, No. 3, p.p. 168-169.
- Morales, A. E. G. (2000). *Fundamentos de Balística*. Escuela Naval Militar, p.p. 71-75.
- Parker, G. W. (1977). *Projectile motion with air resistance quadratic in the speed*. American Journal of Physics, Vol. 45, No. 7, p.p. 606-610.
- Symon, K. R. (1971). *Mechanics*. 3 ed., Adisson-Wesley Publishing Company, p.p. 111-115.
- Warburton, R. D. H., Wang, J., and Burgdorfer, J. (2010). *Analytic Approximations of Projectile Motion with Quadratic Air Resistance*. Scientific Research, Vol. 3, No. 1, p.p. 98-105.
- Weinacht, P., Cooper, G. R., and Newill, J. F. (2005). *Analytical Prediction of Trajectories for High-Velocity Direct-Fire Munitions*. General Books, p.p. 1-9.
- Wells, D. A. (1967). *Lagrangian Dynamics*. McGraw-Hill, New York.

Westkaemper, E. (2009). *ENIAC*. disponível em <http://zuse-z1.zib.de/simulations/eniac/history.html>, acessado em 7 de Maio de 2019.

Apêndice A

Recolha de informação

1. LABORATÓRIO DE EXPLOSIVOS DA MARINHA (LEM):

- **DATA:** 10 de dezembro de 2018
- **MATERIAL FORNECIDO:** 2 documentos em formato digital com características de munições (Ammunition Data Sheet)
- **QUEM:** 1TEN EN-AEL Graça da Motta

2. DIREÇÃO DE NAVIOS (DN):

- **DATA:** dezembro de 2018
- **QUEM:** CTEN ST-AEL Antunes Gregório; CTEN EN-AEL Rocha Valente

3. PROJETO FIREND:

- **DATA:** 13 de fevereiro
- **MATERIAL FORNECIDO:** Imagens de tiro
- **QUEM:** 1TEN EN-AEL Graça da Motta; Prof. Luís Faria

4. ESCOLA DE TECNOLOGIAS NAVAIS (ETNA) – DEPARTAMENTO DE ARMAS E ELETRÓNICA (DAE):

- **DATA:** 21 de fevereiro
- **MATERIAL FORNECIDO:** Documentos em formato digital (generalidades da trajetória balística)
- **QUEM:** 1SAR ETA Almeida

5. ARSENAL DO ALFEITE, S.A.:

- **DATA:** 22 de fevereiro
- **QUEM:** 1TEN EN-AEL Alves Nogueira

6. ESCOLA DE TECNOLOGIAS NAVAIS (ETNA) – DEPARTAMENTO DE OPERAÇÕES (DOP):

- **DATA:** 22 de fevereiro
- **MATERIAL FORNECIDO:** Documentos em formato digital (generalidades da trajetória balística; peça de 100 mm)
- **QUEM:** 1SAR A Cunha; 1TEN M Nunes Esquedelhado

7. ESCOLA DE ARTILHARIA:

- **DATA:** 22 de fevereiro
- **QUEM:** CAB A Ribeiro; 1SAR A Piçarra

8. NRP D. FRANCISCO DE ALMEIDA:

- **DATA:** 7 de março
- **MATERIAL FORNECIDO:** Manuais em formato digital de sistemas de armas
- **QUEM:** 1TEN EN-AEL Xavier Marques; CTEN EN-AEL Figueiredo dos Santos

Apêndice B

Código do Programa em MATLAB

```
% Programa efetuado pelo ASPOF Coelho Lourenço no âmbito da Dissertação  
de Mestrado intitulada Balística Externa Naval: Uma Proposta de  
Formulação Geral, orientada pelo Prof. Mário Gatta e coorientada pelo  
Prof. Miguel Moreira
```

```
% Inicialização
```

```
function varargout = BalExtNaval(varargin)
```

```
gui_Singleton = 1;  
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...  
                  'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...  
                  'gui_OpeningFcn', @BalExtNaval_OpeningFcn, ...  
                  'gui_OutputFcn',  @BalExtNaval_OutputFcn, ...  
                  'gui_LayoutFcn',  [], ...  
                  'gui_Callback',   []);
```

```
if nargin && ischar(varargin{1})  
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});  
end
```

```
if nargin  
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});  
else  
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});  
end
```

```
% End initialization code - DO NOT EDIT
```

```
%% Funções abertura
```

```
function BalExtNaval_OpeningFcn(hObject, ~, handles, varargin)
```

```
% Limpeza e preparação
```

```
clc;                % Limpeza ecrã  
commandwindow;     % Muda visualização para commandwindow
```

```
% Choose default command line output for BalExtNaval
```

```

handles.output = hObject;

% Update handles structure

guidata(hObject, handles);

% Abrir ficheiro de dados (criado previamente, vazio) - o utilizador deve
alterar a diretorio para onde se encontram os ficheiros para o programa
funcionar

fullfile(pwd, 'final_project.mat');
dados_fich = 'C:\Users\Proprietario\Documents\MATLAB\final_project';

global ws;
ws = matfile(dados_fich, 'Writable', true);

% Flags

global flag_plot1;
global flag_plot2;
global flag_msg;

flag_plot1 = 0;
flag_plot2 = 0;

flag_msg = 1;

% Reset do GUI

reset_inputs(handles, 1);
reset_plots(handles);
function varargout = BalExtNaval_OutputFcn(~, ~, handles)
varargout{1} = handles.output;

%% Funções gerais (preparação, reset, etc)

function reset_inputs(handles, option)

% Variáveis

global ws;

% Pop-Up lists

ws.lista_calibre = {'7.62', '76', '100', '105'};

lista_plots_1 = {'1. Distância da Trajetória', '2. Altura da
Trajetória', ...
                '3. Mach vs Atrito', '4. Velocidade da Trajetória'};

lista_plots_2 = {'1. Trajetória'};

```

```

% Variáveis de entrada

gama_vel      = [1:1000];
gama_angulo   = [0:90];
gama_potencia = [1:.01:2].*1e2;
gama_atrito   = [0:.01:2].*1e2;

% Configuração inicial de opções/campos

switch(option)

    % Modo 1: Limpeza (tudo bloqueado)

    case 1

        % Listas

        set(handles.menu_calibre, 'String', '-');      % Campos por defeito
        set(handles.menu_calibre, 'Enable', 'Off');   % Coloca o campo
inativo      set(handles.menu_calibre, 'Value', 1);   % Seleciona 1o valor por
defeito      set(handles.menu_calibre, 'Value', 1);

        set(handles.menu_plot1, 'String', '-');
        set(handles.menu_plot1, 'Enable', 'Off');
        set(handles.menu_plot1, 'Value', 1);

        set(handles.menu_plot2, 'String', '-');
        set(handles.menu_plot2, 'Enable', 'Off');
        set(handles.menu_plot2, 'Value', 1);

        % Campos (texto)

        set(handles.box_altura, 'String', '-'); % Coloca um texto "-"
        set(handles.box_massa, 'String', '-');

        set(handles.box_alcance, 'String', '-');
        set(handles.box_grav, 'String', '-');
        set(handles.box_den, 'String', '-');

        set(handles.box_latitude, 'String', '-');
        set(handles.box_plano, 'String', '-');
        set(handles.box_c_angulo, 'String', '-');
        set(handles.box_c_vel, 'String', '-');
        set(handles.box_vento, 'String', '-');
        set(handles.box_rumo, 'String', '-');

        set(handles.box_cdmax, 'String', '-');
        set(handles.box_cdmin, 'String', '-');

        set(handles.box_vel, 'String', '-');
        set(handles.box_angulo, 'String', '-');
        set(handles.box_potencia, 'String', '-');
        set(handles.box_atrito, 'String', '-');

```

```

% Campos (estado)

set(handles.box_altura, 'Enable', 'Off'); % Coloca o campo inativo
set(handles.box_latitude, 'Enable', 'Off');
set(handles.box_plano, 'Enable', 'Off');
set(handles.box_c_angulo, 'Enable', 'Off');
set(handles.box_c_vel, 'Enable', 'Off');
set(handles.box_vento, 'Enable', 'Off');
set(handles.box_rumo, 'Enable', 'Off');

set(handles.box_cdmax, 'Enable', 'Off');
set(handles.box_cdmin, 'Enable', 'Off');

% Sliders (estado)

set(handles.slider_vel, 'Enable', 'Off');
set(handles.slider_angulo, 'Enable', 'Off');
set(handles.slider_potencia, 'Enable', 'Off');
set(handles.slider_atrito, 'Enable', 'Off');

% Opções botões (posições)

set(handles.mach_sim, 'Value', 0);
set(handles.mach_nao, 'Value', 0);
set(handles.deriva_sim, 'Value', 0);
set(handles.deriva_nao, 'Value', 0);
set(handles.atrito_sim, 'Value', 0);
set(handles.atrito_nao, 'Value', 0);
set(handles.coriolis_sim, 'Value', 0);
set(handles.coriolis_nao, 'Value', 0);

% Opções botões (estado)

set(handles.mach_sim, 'Enable', 'Off');
set(handles.mach_nao, 'Enable', 'Off');
set(handles.deriva_sim, 'Enable', 'Off');
set(handles.deriva_nao, 'Enable', 'Off');
set(handles.atrito_sim, 'Enable', 'Off');
set(handles.atrito_nao, 'Enable', 'Off');
set(handles.coriolis_sim, 'Enable', 'Off');
set(handles.coriolis_nao, 'Enable', 'Off');

set(handles.botao_calcular, 'Enable', 'Off');

% Opções plots

set(handles.check_hold, 'Value', 0);
set(handles.check_auto, 'Value', 0);
set(handles.check_secundarios, 'Value', 0);

set(handles.check_hold, 'Enable', 'Off');
set(handles.check_auto, 'Enable', 'Off');
set(handles.check_secundarios, 'Enable', 'Off');

```

```

% Modo 2: Preparação (campos operacionais)

case 2

    % Listas

        set(handles.menu_calibre, 'String', ws.lista_calibre);
% Coloca a lista de calibres
        set(handles.menu_calibre, 'Enable', 'On');
% Volta a ativar campo
        set(handles.menu_calibre, 'Value', 3);
% Coloca o calibre 1 por defeito

        set(handles.menu_plot1, 'String', lista_plots_1);
        set(handles.menu_plot1, 'Enable', 'On');
        set(handles.menu_plot1, 'Value', 1);

        set(handles.menu_plot2, 'String', lista_plots_2);
        set(handles.menu_plot2, 'Enable', 'On');
        set(handles.menu_plot2, 'Value', 1);

    % Campos (texto)

        set(handles.box_altura, 'String', '0'); % Coloca o valor 0
        set(handles.box_massa, 'String', '0');

        set(handles.box_alcance, 'String', '0');
        set(handles.box_grav, 'String', '0');
        set(handles.box_den, 'String', '0');

        set(handles.box_latitude, 'String', '0');
        set(handles.box_plano, 'String', '0');
        set(handles.box_c_angulo, 'String', '0');
        set(handles.box_c_vel, 'String', '0');
        set(handles.box_vento, 'String', '0');
        set(handles.box_rumo, 'String', '0');

        set(handles.box_cdmax, 'String', '0');
        set(handles.box_cdmin, 'String', '0');

        set(handles.box_vel, 'String', '0');
        set(handles.box_angulo, 'String', '0');
        set(handles.box_potencia, 'String', '0');
        set(handles.box_atrito, 'String', '0');

    % Campos (estado)

        set(handles.box_altura, 'Enable', 'On'); % Coloca o campo ativo

        set(handles.box_cdmax, 'Enable', 'Off');
        set(handles.box_cdmin, 'Enable', 'Off');

```

```

% Sliders (estado)

set(handles.slider_vel, 'Enable', 'On'); % Coloca o campo ativo
set(handles.slider_angulo, 'Enable', 'On');
set(handles.slider_potencia, 'Enable', 'On');
set(handles.slider_atrito, 'Enable', 'On');

% Sliders (valores)

set(handles.slider_vel, 'Min', min(gama_vel));
% Máximo da gama
set(handles.slider_vel, 'Max', max(gama_vel));
% Mínimo da gama
set(handles.slider_vel, 'SliderStep', [10/max(gama_vel),
100/max(gama_vel)]); % Tamanho dos steps (pequeno/grande)

set(handles.slider_angulo, 'Min', min(gama_angulo));
set(handles.slider_angulo, 'Max', max(gama_angulo));
set(handles.slider_angulo, 'SliderStep', [1/max(gama_angulo),
10/max(gama_angulo)]);

set(handles.slider_potencia, 'Min', min(gama_potencia));
set(handles.slider_potencia, 'Max', max(gama_potencia));
set(handles.slider_potencia, 'SliderStep', [1/max(gama_potencia),
20/max(gama_potencia)]);

set(handles.slider_atrito, 'Min', min(gama_atrito));
set(handles.slider_atrito, 'Max', max(gama_atrito));
set(handles.slider_atrito, 'SliderStep', [1/max(gama_atrito),
10/max(gama_atrito)]);

set(handles.slider_vel, 'Value', gama_vel(1)); % Coloca posição no
início
set(handles.slider_angulo, 'Value', gama_angulo(1)); % em cada uma
das barras
set(handles.slider_potencia, 'Value', gama_potencia(1));
set(handles.slider_atrito, 'Value', gama_atrito(1));

set(handles.box_vel, 'String', num2str(gama_vel(1))); % Coloca essa
valor na caixa
set(handles.box_angulo, 'String', num2str(gama_angulo(1)));
set(handles.box_potencia, 'String', num2str(gama_potencia(1)/1e2));
set(handles.box_atrito, 'String', num2str(gama_atrito(1)/1e2));

% Opções botões (posição)

set(handles.atrito_sim, 'Value', 0); % Coloca na posição inicial
set(handles.atrito_nao, 'Value', 1); % Coloca na posição oposta
(não)

set(handles.mach_sim, 'Value', 0);
set(handles.mach_nao, 'Value', 0);

% Opções botões (estado)

```

```

set(handles.atrito_sim, 'Enable', 'On'); % Coloca o campo ativo
set(handles.atrito_nao, 'Enable', 'On');

set(handles.mach_sim, 'Enable', 'Off');
set(handles.mach_nao, 'Enable', 'Off');

set(handles.botao_calcular, 'Enable', 'On');

% Opções plots

set(handles.check_hold, 'Value', 0);
set(handles.check_auto, 'Value', 0);
set(handles.check_secundarios, 'Value', 0);

set(handles.check_hold, 'Enable', 'On');
set(handles.check_auto, 'Enable', 'On');
set(handles.check_secundarios, 'Enable', 'On');

% Atualiza informação base dos calibres

atualizar_calibres(handles);

end
function reset_plots(handles)

% Reset Plot #1

axes(handles.eixos_1); cla('reset'); plot(0,0) % Seleciona o eixo a
modificar e limpa
xlim([0 1]); ylim([0 1]); zlim([0 1]); % Define limites eixos
hold on; grid on; % Fixa; Liga a malha (grid)

plot([0 1],[0 1], 'Color', [0.4,0.4,0.4]); % Dois traços cruzados por
defeito
plot([0 1],[1 0], 'Color', [0.4,0.4,0.4]); % para mostrar um modo "standby"

% Reset Plot #2

axes(handles.eixos_2); cla('reset'); plot3(0,0,0);
xlim([0 1]); ylim([0 1]); zlim([0 1]);
hold on; grid on;

plot3([0 1],[0 1],[0 0], 'Color', [0.4,0.4,0.4]);
plot3([0 1],[1 0],[0 0], 'Color', [0.4,0.4,0.4]);

plot3([0 1],[1 1],[0 1], 'Color', [0.4,0.4,0.4]);
plot3([0 1],[1 1],[1 0], 'Color', [0.4,0.4,0.4]);

plot3([1 1],[0 1],[0 1], 'Color', [0.4,0.4,0.4]);
plot3([1 1],[0 1],[1 0], 'Color', [0.4,0.4,0.4]);

%% Funções de cálculo

```

```

function carregar_exemplo(handles)

% Ativa os campos

reset_inputs(handles, 2);
reset_plots(handles);

% Variáveis entrada

ini_vel      = 870;
ini_angulo   = 30;
ini_potencia = 2;
ini_atrito   = 1;

% Carregar valores predefinidos

set(handles.slider_vel, 'Value', ini_vel);
set(handles.slider_angulo, 'Value', ini_angulo);
set(handles.slider_potencia, 'Value', ini_potencia*1e2);
set(handles.slider_atrito, 'Value', ini_atrito*1e2);

set(handles.box_vel, 'String', num2str(ini_vel));
set(handles.box_angulo, 'String', num2str(ini_angulo));
set(handles.box_potencia, 'String', num2str(ini_potencia));
set(handles.box_atrito, 'String', num2str(ini_atrito));
function carregar_nulos(handles)

% Ativa os campos

reset_inputs(handles, 2);
reset_plots(handles);

% Variáveis entrada

ini_vel      = 1;
ini_angulo   = 1;
ini_potencia = 2;
ini_atrito   = 1;

% Carregar valores predefinidos

set(handles.slider_vel, 'Value', ini_vel);
set(handles.slider_angulo, 'Value', ini_angulo);
set(handles.slider_potencia, 'Value', ini_potencia*1e2);
set(handles.slider_atrito, 'Value', ini_atrito*1e2);

set(handles.box_vel, 'String', num2str(ini_vel));
set(handles.box_angulo, 'String', num2str(ini_angulo));
set(handles.box_potencia, 'String', num2str(ini_potencia));
set(handles.box_atrito, 'String', num2str(ini_atrito));
function calcular(handles)

% Variáveis

```

```

global ws;

% Ler dados do GUI

vel      = str2double(get(handles.box_vel, 'String'));
angulo   = str2double(get(handles.box_angulo, 'String'));
potencia = str2double(get(handles.box_potencia, 'String'));
atrito   = str2double(get(handles.box_atrito, 'String'));

massa    = str2double(get(handles.box_massa, 'String'));

g = str2double(get(handles.box_grav, 'String'));

atrito_opcao = get(handles.atrito_sim, 'Value');
mach_opcao   = get(handles.mach_sim, 'Value');
deriva_opcao = get(handles.deriva_sim, 'Value');

cd_min = str2double(get(handles.box_cdmin, 'String'));
cd_max = str2double(get(handles.box_cdmax, 'String'));

c      = 0;
ws.c   = c;

machs  = 0;
ws.machs = machs;

% Transpor formulas

m      = massa;
n      = potencia;
v0     = vel;
angle  = angulo;

% Duração, tempo e condições iniciais

delta = 0.01;
tspan = [0:delta:90];

% Cálculos com atrito

if atrito_opcao

    if mach_opcao

        % Calcula velocidade

        [T,X] = main_function_bum_c_variavel(m,v0,angle,cd_min,cd_max);

        % "Exportar" valores

        ws.trajX = X(:,1);

```

```

ws.trajY = X(:,2);

ws.velX = X(:,3);
ws.vely = X(:,4);

else

c = atrito;

% Calcula velocidade

X0 = [0; 0; v0*cosd(angle); v0*sind(angle)];
[T,X] = ode45(@bum_exp_varia,tspan,X0,[],c,m,n,handles);

% "Exportar" valores

c_array = zeros(size(X(:,1)));
c_array(:, :) = c;

ws.c = c_array;

ws.trajX = X(:,1);
ws.trajY = X(:,2);

ws.velX = X(:,3);
ws.vely = X(:,4);

end

if deriva_opcao

% Calcular deriva com base no calibre

cal_ref = get(handles.menu_calibre, 'Value');
calibres = ws.lista_calibre;
calibre = str2double(calibres(cal_ref));

% Constante com base no calibre

if calibre < 76 % Calibres pequenos

ws.trajZ = 0.1548.*(T.^2);

else % Grandes calibres

ws.trajZ = 0.1548.*(T.^2);

end

else

% Não existe deriva

```

```

        ws.trajZ = zeros(size(X));

    end

    % Outros cálculos

    ws.posX = zeros(size(tspan));
    ws.posY = zeros(size(tspan));

else

    % Cálculo sem atrito

    X      = [0:500:1e6];
    angle  = deg2rad(angle);

    Y = X.*tan(angle) - ((g.*X.^2)./(2.*(v0.^2)*(cos(angle).^2)));

    % "Exportar" valores

    ws.trajX = X;
    ws.trajY = Y;

    % Não existe deriva

    ws.trajZ = zeros(size(X));

    % Outros cálculos

    ws.T = tspan;
    ws.c = zeros(size(X));

    ws.velX = vel.*cos(angle);
    ws.velY = vel.*sin(angle) - g.*tspan;

    ws.posX = vel.*tspan.*cos(angle);
    ws.posY = vel.*tspan.*sin(angle) - 1/2.*g.*tspan.^2;

end

% Atualizar plot

atualizar_plot(handles, 1)
atualizar_plot(handles, 2)

%% Funções auxiliares (especificas do cálculo)

function Y = heaviside2(X)

if X < 0

```

```

        Y = 0;

elseif X > 0

        Y = 1;

else

        Y = 1/2;

end
function dXd_t = bum_exp_varia(t,X,c,m,n,handles)

% Variáveis

global ws;

% Ler valores

cal_ref    = get(handles.menu_calibre, 'Value');
calibres   = ws.lista_calibre;
calibre    = str2double(calibres(cal_ref));

a = pi()*(calibre/2e3)^2;
g = str2double(get(handles.box_grav, 'String'));
p = str2double(get(handles.box_den, 'String'));

% Variáveis intermédias

x = X(1);
y = X(2);
z = X(3);
w = X(4);

% Calcular trajetória

dXd_t = [z;w;-((1/2)*(p*a*c)*(z^2+w^2)^(n/2-1/2)*z)/m;-
          ((1/2)*(p*a*c)*(z^2+w^2)^(n/2-1/2)*w)/m-g];
function dXd_t = bum_c_variavel(t,X,m,cd_min,cd_max)

global ws;

g=9.8;
p=1.2; % densidade do ar
a=4.5*10^(-3); % projétil 76 mm

x=X(1);
y=X(2);
z=X(3);
w=X(4);

mach=(sqrt(z^2+w^2))/340;

```

```

cd=cd_min*heaviside2(0.8 - mach) + (((cd_max-cd_min)/0.4)*mach +
(3*cd_min - 2*cd_max)...
    * heaviside2(mach - 0.8) * heaviside2(1.2 - mach)) +
(1/sqrt(mach) + (cd_max - 0.9129))...
    * heaviside2(mach - 1.2);

machs = ws.machs;
machs = [machs,mach];
ws.machs = machs;

c      = ws.c;
c      = [c,cd];
ws.c = c;

dXdz=[z;w;-((1/2)*(p*a*cd)*(z^2+w^2)^(1/2)*z)/m;-
((1/2)*(p*a*cd)*(z^2+w^2)^(1/2)*w)/m-g];
%dXdz=[z;w;-((1/2)*(p*a*cd)*(z^2+w^2)^(1/2)*z)/m;cd];
function [T,X] = main_function_bum_c_variavel(m,v0,angle,cd_min,cd_max)

% Dummy variables

if nargin == 0

    m      = 6;
    v0     = 870;
    angle  = 30;
    cd_min = 0.2;
    cd_max = 1.6;

end

% Algoritmo

delta = 0.01;
tspan = [0:delta:90];

X0     = [0; 0; v0*cosd(angle); v0*sind(angle)];
[T,X] = ode45(@bum_c_variavel,tspan,X0,[],m,cd_min,cd_max);

%% Funções de operação de plots

function atualizar_plot(handles, ref_plot)

% Variáveis

global ws;

global flag_plot1;
global flag_plot2;

% Verifica o modo de apresentação

atrito_opcao = get(handles.atrito_sim,'Value');
modo_hold    = get(handles.check_hold,'Value');

```

```
deriva_opcao = get(handles.deriva_sim, 'Value');

% Seleciona o plot a atualizar

if ref_plot == 1

    axes(handles.eixos_1); % Selecionar o plot
    grafico = get(handles.menu_plot1, 'Value'); % Tipo de gráfico

else

    axes(handles.eixos_2);
    grafico = get(handles.menu_plot2, 'Value');

end

% Bloqueia plot se necessário

if modo_hold

    hold on;

    flag_plot1 = 1; % Ativa as flags
    flag_plot2 = 1;

else

    hold off; grid off; % Desliga o "hold" e a grid
    cla; cla('reset'); % Limpeza dos eixos

    flag_plot1 = 0; % Desativa as flags
    flag_plot2 = 0;

end

% Impressão gráfica

switch(ref_plot)

    case 1

        %{

            Gráfico sempre em 2D, vários plots disponíveis no menu
            Switch seguinte serve para plotar o que for pretendido

        %}

        switch(grafico)

            case 1
```

```

X = ws.T;
Y = ws.posX;

% Gráfico Distância da Trajetória

plot(X, Y)

% Ajuste plots

hold on;
grid on;

% Ajusta eixos se valores fizerem sentido

if sum(Y) ~= 0

    % Determinar pontos críticos

    y_max = max(Y);
    x_max = interp1(Y(2:end), X(2:end), 0);

    if isnan(x_max)

        x_max = max(X);

    end

    y_max = round(y_max,0);
    x_max = round(x_max,0);

    % Eixos atuais

    x_lim = get(gca, 'Xlim');
    y_lim = get(gca, 'Ylim');

    % Remover modo científico da escala

    ax = gca;

    ax.XRuler.Exponent = 0;
    ax.YRuler.Exponent = 0;

    if flag_plot1

        % Se plot existir, verifica/corrigir eixos

        if x_lim(2) < x_max, xlim([0 x_max*1.1]); end
        if y_lim(2) < y_max, ylim([0 y_max*1.1]); end

    else

```

```

        % Se plot não existir, ajusta eixos

        xlim([0 x_max*1.1])
        ylim([0 y_max*1.1])

    end

end

% Legendas/Eixos

title('Distância da Trajectória');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Distância (m)');

hold off;

case 2

X = ws.T;
Y = ws.posY;

% Gráfico Distância da Trajetória

plot(X, Y)

% Ajuste plots

hold on;
grid on;

% Ajusta eixos se valores fizerem sentido

if sum(Y) ~= 0

    % Determinar pontos críticos

    y_max = max(Y);
    x_max = interp1(Y(2:end), X(2:end), 0);

    if isnan(x_max)

        x_max = max(X);

    end

    y_max = round(y_max, 0);
    x_max = round(x_max, 0);

    % Eixos atuais

    x_lim = get(gca, 'Xlim');
    y_lim = get(gca, 'Ylim');

```

```

% Remover modo científico da escala

ax = gca;

ax.XRuler.Exponent = 0;
ax.YRuler.Exponent = 0;

if flag_plot1

    % Se plot existir, verifica/corrige eixos

    if x_lim(2) < x_max, xlim([0 x_max*1.1]); end
    if y_lim(2) < y_max, ylim([0 y_max*1.1]); end

else

    % Se plot não existir, ajusta eixos

    xlim([0 x_max*1.1])
    ylim([0 y_max*1.1])

end

end

% Legendas/Eixos

title('Altura da Trajectória');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Altura (m)');

hold off;

case 3

% Mach vs atrito

Vx = ws.velX;
Vy = ws.velY;

vel = sqrt(Vx.^2 + Vy.^2);

X = ws.machs;
Y = ws.c;

whos

% Gráfico Distância da Trajetória

% scatter(X,Y)
plot(Y)

```

```

% Ajuste plots

hold on;
grid on;

% Determinar pontos críticos

y_max = max(Y);
x_max = max(X);

if y_max >= 1, y_max = round(y_max*1.1,0);
end

if x_max >= 1, x_max = round(x_max*1.1,0);
end

% Eixos atuais

x_lim = get(gca, 'Xlim');
y_lim = get(gca, 'Ylim');

% Remover modo científico da escala

ax = gca;

ax.XRuler.Exponent = 0;
ax.YRuler.Exponent = 0;

if flag_plot1

    % Se plot existir, verifica/corrige eixos

    if x_lim(2) < x_max, xlim([0 x_max]); end
    %if y_lim(2) < y_max, ylim([0 y_max]); end
    %ylim([0 2])

else

    % Se plot não existir, ajusta eixos

    xlim([0 x_max])
    %ylim([0 2])

end

% Legendas/Eixos

title('Mach vs atrito');
xlabel('Velocidade (mach m/s)');
ylabel('Atrito');

hold off;

```

```

case 4

% Velocidade

Vx = ws.velX;
Vy = ws.velY;

vel = sqrt(Vx.^2 + Vy.^2);

X = ws.T;
Y = vel;

% Gráfico Distância da Trajetória

plot(X,Y)

% Ajuste plots

hold on;
grid on;

% Determinar pontos críticos

y_max = max(Y);
x_max = max(X);

if y_max >= 1, y_max = round(y_max*1.1,0);
end

if x_max >= 1, x_max = round(x_max*1.1,0);
end

% Eixos atuais

x_lim = get(gca, 'Xlim');
y_lim = get(gca, 'Ylim');

% Remover modo científico da escala

ax = gca;

ax.XRuler.Exponent = 0;
ax.YRuler.Exponent = 0;

if flag_plot1

    % Se plot existir, verifica/corrige eixos

    if x_lim(2) < x_max, xlim([0 x_max]); end
    if y_lim(2) < y_max, ylim([0 y_max]); end

else

```

```

        % Se plot não existir, ajusta eixos

        xlim([0 x_max])
        ylim([0 y_max])

    end

    % Legendas/Eixos

    title('Velocidade');
    xlabel('Tempo (s)');
    ylabel('Velocidade (m/s)');

    hold off;

end

case 2

    % Ajustes específicos de cada Plot

    switch (grafico)

        case 1

            % Plotagem de resultados com atrito

            X = ws.trajX;
            Y = ws.trajY;
            Z = ws.trajZ;

            Vx = ws.velX;
            Vy = ws.velY;

            vel = sqrt(Vx.^2 + Vy.^2);

            v_ver = min(vel);
            v_end = vel(end);

            % Determinar pontos críticos

            y_max = max(Y);
            x_max = interp1(Y(2:end), X(2:end), 0);

            if isnan(x_max)

                x_max = max(X);

            end

            if deriva_opcao

```

```

z_max = interp1(Y(2:end), Z(2:end), 0);
z_max = round(z_max,0);

y_max = round(y_max,0);
x_max = round(x_max,0);

% Trajetória do Cometa (3D)

plot3(X,Z,Y, '--');
hold on;

else

y_max = round(y_max,0);
x_max = round(x_max,0);

% Trajetória do Cometa (2D)

plot(X,Y, '--');
hold on;

end

% Ajustes Plot

grid on;

% Eixos atuais

if deriva_opcao

x_lim = get(gca, 'Xlim');
y_lim = get(gca, 'Zlim');

else

x_lim = get(gca, 'Xlim');
y_lim = get(gca, 'Ylim');

end

% Remover modo científico da escala

ax = gca;

ax.XRuler.Exponent = 0;
ax.YRuler.Exponent = 0;

if deriva_opcao

% Caso seja 3D, ajusta o Z

```

```

z_lim = get(gca, 'Ylim');
ax.ZRuler.Exponent = 0;

end

if flag_plot2

    % Se plot existir, verifica/corrige eixos

    if x_lim(2) < x_max, xlim([0 x_max*1.1]); end

    if deriva_opcao

        %if y_lim(2) < y_max, zlim([0 y_max*1.1]); end
        if y_lim(2) < y_max, ylim([0 y_max*1.1]); end

    else

        if y_lim(2) < y_max, ylim([0 y_max*1.1]); end

    end

    % Inverter eixo

    if deriva_opcao , set(ax, 'ydir', 'reverse'); end

else

    % Se plot não existir, ajusta eixos

    if deriva_opcao

        xlim([0 x_max*1.1])
        zlim([0 y_max*1.1])

    else

        xlim([0 x_max*1.1])
        ylim([0 y_max*1.1])

    end

    % Inverter eixo

    if deriva_opcao, set(ax, 'ydir', 'reverse'); end

end

% Plotagem e informação

if deriva_opcao

```

```

    % Traçado do "Comet"

    comet3(X,Z,Y);
    plot3(X,Z,Y, 'color', rand(1,3), 'LineWidth', 1.5)
    hold on;

    % Mensagem com resultados finais

    title('Trajectórias balísticas');
    xlabel('Alcance (m)');
    zlabel('Altura (m)');
    ylabel('Deriva (m)');

    % Mensagem com resultados finais

    mensagem(x_max, y_max, v_ver, v_end, z_max)

else

    % Traçado do "Comet"

    comet(X,Y);
    plot(X,Y, 'color', rand(1,3), 'LineWidth', 1.5)
    hold on;

    title('Trajectórias balísticas');
    xlabel('Alcance (m)');
    ylabel('Altura (m)');

    % Mensagem com resultados finais

    mensagem(x_max, y_max, v_ver, v_end, 0)

end

hold off;

end

end

function mensagem(A,B,C,D,E)

% Variáveis

global flag_msg;

% Verifica Flag

if flag_msg

    msg = { ['Alcance (m): ', num2str(A)]
            ['Altura (m): ', num2str(B)]

```

```

        ['Velocidade vértice (m/s): ',num2str(C)]
        ['Velocidade terminal (m/s): ',num2str(D)]
        ['Deriva giroscópica (m): ',num2str(E)]];

% Apresenta mensagem

msg = msgbox(msg, 'Resultados', 'modal');
msg.Resize = 'on';

txt = findall(msg, 'type', 'text');
txt.FontSize = 10;

dw = sum(txt.Extent([1,3]))-msg.Position(3) + txt.Extent(1);
dh = sum(txt.Extent([2,4]))-msg.Position(4) + 10;
msg.Position([3,4]) = msg.Position([3,4]) + [dw,dh];

end
function mensagem_avisos(A,B)

msg = { A
        B};

% Apresenta mensagem

msg = msgbox(msg, 'Aviso', 'modal');
msg.Resize = 'on';

txt = findall(msg, 'type', 'text');
txt.FontSize = 10;

dw = sum(txt.Extent([1,3]))-msg.Position(3) + txt.Extent(1);
dh = sum(txt.Extent([2,4]))-msg.Position(4) + 10;
msg.Position([3,4]) = msg.Position([3,4]) + [dw,dh];
function mensagem_sobre()

msg = { 'Este é um programa que permite obter trajetórias balísticas
através da introdução de dados pertencentes ao projétil a considerar.'};

% Apresenta mensagem

msg = msgbox(msg, 'Sobre', 'modal');
msg.Resize = 'on';

txt = findall(msg, 'type', 'text');
txt.FontSize = 10;

dw = sum(txt.Extent([1,3]))-msg.Position(3) + txt.Extent(1);
dh = sum(txt.Extent([2,4]))-msg.Position(4) + 10;
msg.Position([3,4]) = msg.Position([3,4]) + [dw,dh];

%% Funções Criação de Objectos

function slider_vel_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```

```

% Hint: slider controls usually have a light gray background.
if isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor',[.9 .9 .9]);
end
function slider_angulo_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: slider controls usually have a light gray background.
if isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor',[.9 .9 .9]);
end
function slider_potencia_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: slider controls usually have a light gray background.
if isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor',[.9 .9 .9]);
end
function slider_atrito_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: slider controls usually have a light gray background.
if isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor',[.9 .9 .9]);
end
function box_atrito_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_altura_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_massa_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_plano_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.

```

```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_latitude_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_longitude_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function box_c_atrito_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_rumo_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_vento_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function menu_calibre_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: popupmenu controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

```

%% Resposta dos "sliders"

function slider_vel_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Recebe valor e arredonda

vel = get(handles.slider_vel, 'Value');
vel = round(vel,0);

% Coloca valor arredondado no slider e caixa

set(handles.slider_vel, 'Value', vel);
set(handles.box_vel, 'String', num2str(vel));

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end
function slider_angulo_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Recebe valor e arredonda

angulo = get(handles.slider_angulo, 'Value');
angulo = round(angulo,0);

% Coloca valor arredondado no slider e caixa

set(handles.slider_angulo, 'Value', angulo);
set(handles.box_angulo, 'String', num2str(angulo));

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end
function slider_potencia_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Recebe valor e arredonda

potencia = get(handles.slider_potencia, 'Value');
potencia = round(potencia,0);

% Coloca valor arredondado no slider e caixa

```

```

set(handles.slider_potencia, 'Value', potencia);
set(handles.box_potencia, 'String', num2str(round(potencia/1e2,1)));

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end
function slider_atrito_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Recebe valor e arredonda

atrito = get(handles.slider_atrito, 'Value');
atrito = round(atrito,0);

% Coloca valor arredondado no slider e caixa

set(handles.slider_atrito, 'Value', atrito);
set(handles.box_atrito, 'String', num2str(round(atrito/1e2,1)));

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end

%% Botões "rádio" de Opções

function atrito_sim_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Altera estado do outro botão

if get(handles.atrito_sim, 'Value') == 1

    set(handles.atrito_nao, 'Value', 0); % Coloca o estado oposto

    % Corrige estado potência/atrito

    set(handles.slider_potencia, 'Value', 2e2);
    set(handles.slider_atrito, 'Value', 1e2);

    set(handles.box_potencia, 'String', '2');
    set(handles.box_atrito, 'String', '1');

```

```

% Permite escolher deriva

set(handles.deriva_sim, 'Value', 0);
set(handles.deriva_nao, 'Value', 1);

set(handles.mach_sim, 'Value', 0);
set(handles.mach_nao, 'Value', 1);

set(handles.deriva_sim, 'Enable', 'On');
set(handles.deriva_nao, 'Enable', 'On');

set(handles.mach_sim, 'Enable', 'On');
set(handles.mach_nao, 'Enable', 'On');

else

set(handles.atrito_nao, 'Value', 1);

% Corrige estado potência/atrito

set(handles.slider_potencia, 'Value', 2e2);
set(handles.slider_atrito, 'Value', 0);

set(handles.box_potencia, 'String', '2');
set(handles.box_atrito, 'String', '0');

% Permite escolher deriva

set(handles.deriva_sim, 'Value', 0);
set(handles.deriva_nao, 'Value', 0);

set(handles.mach_sim, 'Value', 0);
set(handles.mach_nao, 'Value', 0);

set(handles.deriva_sim, 'Enable', 'Off');
set(handles.deriva_nao, 'Enable', 'Off');

set(handles.mach_sim, 'Enable', 'Off');
set(handles.mach_nao, 'Enable', 'Off');

set(handles.box_cdmax, 'Enable', 'Off');
set(handles.box_cdmin, 'Enable', 'Off');

set(handles.box_cdmax, 'String', '-');
set(handles.box_cdmin, 'String', '-');

end

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

```

```

if auto_status

    calcular(handles)

end
function atrito_ao_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Altera estado do outro botão

if get(handles.atrito_ao, 'Value') == 1

    set(handles.atrito_sim, 'Value', 0); % Coloca o estado oposto

    % Corrige estado potência/atrito

    set(handles.slider_potencia, 'Value', 2e2);
    set(handles.slider_atrito, 'Value', 0);

    set(handles.box_potencia, 'String', '2');
    set(handles.box_atrito, 'String', '0');

    % Permite escolher deriva

    set(handles.deriva_sim, 'Value', 0);
    set(handles.deriva_ao, 'Value', 0);

    set(handles.mach_sim, 'Value', 0);
    set(handles.mach_ao, 'Value', 0);

    set(handles.deriva_sim, 'Enable', 'Off');
    set(handles.deriva_ao, 'Enable', 'Off');

    set(handles.mach_sim, 'Enable', 'Off');
    set(handles.mach_ao, 'Enable', 'Off');

    set(handles.box_cdmax, 'Enable', 'Off');
    set(handles.box_cdmin, 'Enable', 'Off');

    set(handles.box_cdmax, 'String', '-');
    set(handles.box_cdmin, 'String', '-');

else

    set(handles.atrito_sim, 'Value', 1);

    % Corrige estado potência/atrito

    set(handles.slider_potencia, 'Value', 2e2);
    set(handles.slider_atrito, 'Value', 1e2);

    set(handles.box_potencia, 'String', '2');
    set(handles.box_atrito, 'String', '1');

```

```

% Permite escolher deriva

set(handles.deriva_sim, 'Value', 0);
set(handles.deriva_nao, 'Value', 1);

set(handles.mach_sim, 'Value', 0);
set(handles.mach_nao, 'Value', 1);

set(handles.deriva_sim, 'Enable', 'On');
set(handles.deriva_nao, 'Enable', 'On');

set(handles.mach_sim, 'Enable', 'On');
set(handles.mach_nao, 'Enable', 'On');

end

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end
function mach_sim_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Altera estado do outro botão

if get(handles.mach_sim, 'Value') == 1

    set(handles.mach_nao, 'Value', 0); % Coloca o estado oposto

    set(handles.box_cdmin, 'Enable', 'On'); % Ativa dos campos max/min
    set(handles.box_cdmax, 'Enable', 'On');

    set(handles.box_cdmin, 'String', '0.2'); % Coloca valor predefinido
    set(handles.box_cdmax, 'String', '0.5');

    set(handles.slider_atrito, 'Enable', 'Off');

else

    set(handles.mach_nao, 'Value', 1);

    set(handles.box_cdmin, 'Enable', 'Off'); % Ativa dos campos max/min
    set(handles.box_cdmax, 'Enable', 'Off');

    set(handles.box_cdmin, 'String', '-'); % Coloca valor predefinido
    set(handles.box_cdmax, 'String', '-');

    set(handles.slider_atrito, 'Enable', 'On');

```

```

end

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end
function mach_nao_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Altera estado do outro botão

if get(handles.mach_nao, 'Value') == 1

    set(handles.mach_sim, 'Value', 0); % Coloca o estado oposto

    set(handles.box_cdmin, 'Enable', 'Off'); % Ativa os campos max/min
    set(handles.box_cdmax, 'Enable', 'Off');

    set(handles.box_cdmin, 'String', '-'); % Coloca valor predefinido
    set(handles.box_cdmax, 'String', '-');

    set(handles.slider_atrito, 'Enable', 'On');

else

    set(handles.mach_sim, 'Value', 1);

    set(handles.box_cdmin, 'Enable', 'On'); % Ativa os campos max/min
    set(handles.box_cdmax, 'Enable', 'On');

    set(handles.box_cdmin, 'String', '0.2'); % Coloca valor predefinido
    set(handles.box_cdmax, 'String', '1.4');

    set(handles.slider_atrito, 'Enable', 'Off');

end

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end
function deriva_sim_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

```
% Altera estado do outro botão

if get(handles.deriva_sim, 'Value') == 1

    set(handles.deriva_nao, 'Value', 0); % Coloca o estado oposto

else

    set(handles.deriva_nao, 'Value', 1);

end

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end

function deriva_nao_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Altera estado do outro botão

if get(handles.deriva_nao, 'Value') == 1

    set(handles.deriva_sim, 'Value', 0); % Coloca o estado oposto

else

    set(handles.deriva_sim, 'Value', 1);

end

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end

function coriolis_sim_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Altera estado do outro botão

if get(handles.coriolis_sim, 'Value') == 1
```

```

        set(handles.coriolis_nao, 'Value', 0); % Coloca o estado oposto
    else

        set(handles.coriolis_nao, 'Value', 1);

    end
function coriolis_nao_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Altera estado do outro botão

if get(handles.coriolis_nao, 'Value') == 1

    set(handles.coriolis_sim, 'Value', 0); % Coloca o estado oposto
else

    set(handles.coriolis_sim, 'Value', 1);

end

function botao_calcular_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Forçar cálculo

calcular(handles)

%% Funções resposta a dados de entrada

function menu_calibre_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Atualiza dados de referência

atualizar_calibres(handles);

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end
function atualizar_calibres(handles)

% Variáveis de entrada

m = {'0.2', '6', '13.5', '12.2'};
a = {'4', '16000', '17000', '10'};
v = {'830', '915', '870'};
g = '9.8';

```

```

ro = '1.2034';

ref = get(handles.menu_calibre, 'Value');

% Atualizar campos de dados

set(handles.box_alcance, 'String', a(ref));
set(handles.box_massa, 'String', m(ref));
set(handles.box_grav, 'String', g);
set(handles.box_den, 'String', ro);

function box_atrito_Callback(hObject, eventdata, handles)
function box_altura_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Recalcular

auto_status = get(handles.check_auto, 'Value');

if auto_status

    calcular(handles)

end
function box_latitude_Callback(hObject, eventdata, handles)
function box_massa_Callback(hObject, eventdata, handles)
function box_longitude_Callback(hObject, eventdata, handles)
function box_plano_Callback(hObject, eventdata, handles)

function box_c_atrito_Callback(hObject, eventdata, handles)
function box_rumo_Callback(hObject, eventdata, handles)
function box_vento_Callback(hObject, eventdata, handles)

%% Opções intra-plot

function check_hold_Callback(hObject, eventdata, handles)

if get(handles.check_hold, 'Value')

    flag_plot1 = 1;
    flag_plot2 = 1;

else

    flag_plot1 = 0;
    flag_plot2 = 0;

end

function check_auto_Callback(hObject, eventdata, handles)

%% Funções operação de menus

function Menu_1_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

```

function Menu_1_1_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Exportar Plot 1

axes(handles.eixos_1);

% Exportar DPSC

time = datestr(datetime('now'),'ddmmyyyy_HHMM_');

set(gcf,'PaperType','a4');
fig1 = [time,'fig_color_ps_CASE_'];

print(gcf,'-dpsc',fig1)
fig2 = [time,'fig_dmeta_CASE_'];

print(gcf,'-dmeta', fig2)
iprt = 0;
function Menu_1_2_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Exportar Plot 2

axes(handles.eixos_2);

% Exportar DPSC

time = datestr(datetime('now'),'ddmmyyyy_HHMM_');

set(gcf,'PaperType','a4');
fig1 = [time,'fig_color_ps_CASE_'];

print(gcf,'-dpsc',fig1)
fig2 = [time,'fig_dmeta_CASE_'];

print(gcf,'-dmeta', fig2)
iprt = 0;
function Menu_1_3_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Colocar tudo a "zeros"

carregar_nulos(handles)
function Menu_1_4_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Close figure

close('BalExtNaval');

function Menu_2_Callback(hObject, eventdata, handles)
function Menu_2_1_Callback(~, ~, handles)

% Carregar dados do exemplo e calcular

carregar_exemplo(handles)

```

```

calcular(handles)

function Menu_3_Callback(hObject, eventdata, handles)
function Menu_3_1_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Abrir janela de descrição "Sobre"

mensagem_sobre()

function box_potencia_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_angulo_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_vel_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function box_cdmax_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_cdmin_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_c_angulo_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%     See ISPC and COMPUTER.

```

```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function box_c_vel_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function box_cdmax_Callback(hObject, eventdata, handles)
function box_cdmin_Callback(hObject, eventdata, handles)

function check_secundarios_Callback(hObject, eventdata, handles)
% Ativar ou desativar campos

if get(handles.check_secundarios,'Value') == 1

    set(handles.box_latitude,'Enable','On');
    set(handles.box_plano,'Enable','On');
    set(handles.box_c_angulo,'Enable','On');
    set(handles.box_c_vel,'Enable','On');
    set(handles.box_vento,'Enable','On');
    set(handles.box_rumo,'Enable','On');

    set(handles.deriva_sim,'Enable','On');
    set(handles.deriva_nao,'Enable','On');
    set(handles.coriolis_sim,'Enable','On');
    set(handles.coriolis_nao,'Enable','On');

else

    set(handles.box_latitude,'Enable','Off');
    set(handles.box_plano,'Enable','Off');
    set(handles.box_c_angulo,'Enable','Off');
    set(handles.box_c_vel,'Enable','Off');
    set(handles.box_vento,'Enable','Off');
    set(handles.box_rumo,'Enable','Off');

    set(handles.deriva_sim,'Enable','Off');
    set(handles.deriva_nao,'Enable','Off');
    set(handles.coriolis_sim,'Enable','Off');
    set(handles.coriolis_nao,'Enable','Off');

end

function menu_plot1_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Variáveis

```

```

global flag_plot1;

% Reset gráficos automáticos

set(handles.check_hold, 'Value', 0);
flag_plot1 = 0;

% Atualiza os plot

atualizar_plot(handles, 1)
function menu_plot2_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Variáveis

global flag_plot2;

% Reset gráficos automáticos

set(handles.check_hold, 'Value', 0);
flag_plot2 = 0;

% Atualiza os plot

atualizar_plot(handles, 2)

function menu_plot1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: popupmenu controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
function menu_plot2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

% Hint: popupmenu controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function box_calibre_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to box_calibre (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject, 'String') returns contents of box_calibre as text
%        str2double(get(hObject, 'String')) returns contents of
box_calibre as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function box_calibre_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to box_calibre (see GCBO)

```

```
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% ws. é no fundo um ficheiro; cada vez que se usa o "ws." + algum nome
% são guardados os dados numa variavel com esse "nome" no workspace "ws".
%
% flag é uma solução que se usa para "flow control". Por exemplo para se
% saber se já calculou alguma vez ou se já existem dados carregados. É
uma
% maneira fácil de o fazer em vez de ir ver se as variáveis estão vazias.
```