EDUCAÇÃO

ESCOLA SUPERIOR
POLITÉCNICO SETÚBAL

ISABEL INÊS PINTO MATOS

A INTERAÇÃO ENTRE PARES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: CONTRIBUTOS E DESAFIOS

Relatório de projeto de investigação do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

ORIENTADORA

Professora Doutora Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado

Dezembro de 2025

ISABEL INÊS
PINTO MATOS

A INTERAÇÃO ENTRE PARES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: CONTRIBUTOS E DESAFIOS

JÚRI

Presidente: Joana Isabel Gaudêncio de Matos, Professora Adjunta Convidada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Orientador: Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado, Professora Coordenadora da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Vogal: Maria de Fátima Pista Calado Mendes, Professora Coordenadora da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Dezembro de 2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, à minha orientadora, Professora Doutora Catarina Delgado, pelo acompanhamento atento, pela disponibilidade constante e pela confiança que sempre me transmitiu, permitindo-me crescer enquanto investigadora e futura professora.

Estendo o meu agradecimento aos professores que marcaram, de forma significativa, o meu percurso académico e contribuíram para a construção da profissional que hoje sou: Fátima Mendes, Célia Mestre, Luís Mestre, Sílvia Ferreira, Mariana Pinto, Miguel Feio, Ana Rita Leitão, Cristina Gonçalves e Marina Martins.

Expresso também o meu agradecimento à Professora Cooperante pelo acolhimento e colaboração ao longo do estágio, bem como aos alunos do 6.º ano que participaram nesta investigação, pela disponibilidade, pelo empenho e pelo interesse demonstrado.

Agradeço, de forma muito especial, ao Alexandre Oliveira, meu parceiro de estágio, cujo apoio na recolha de dados, na gestão da turma e nos momentos mais exigentes no terreno foi determinante para a concretização desta investigação.

Agradeço também aos colegas e amigos que caminharam comigo ao longo da Licenciatura e do Mestrado, pelo companheirismo, pelas conversas, pelas partilhas e pela força nos dias mais difíceis: Marta Dionísio Vaz, Inês Cristão, o grupo de WhatsApp “Equipa dos Zé’s” (Mafalda Meireles, Andreia Solas e Vanessa Borrego), bem como Susana Morais, Pedro Silva, Érica Ribeirinho, Patrícia Mosca e Sara Oliveira.

Agradeço, com especial carinho, às minhas amigas que são família, Sofia Cardoso e Margarida Bernardino, pelo apoio incondicional, e às profissionais que transformaram a minha visão sobre a educação, Arminda Almeida e Fernanda Reigada.

Ao meu pai, Luís Matos, agradeço por me ter dado a oportunidade de voltar a estudar e por todo o carinho ao longo deste percurso. À minha mãe, Cecília Matos, agradeço pelo carinho e pela disponibilidade incansável como revisora de textos.

Ao meu companheiro de vida e pai do meu filho, Gonçalo Martins, agradeço por ter assumido o leme quando mais precisei, pela compreensão nos momentos de maior tensão e, sobretudo, por nunca deixar de acreditar em mim.

Por fim, agradeço ao meu filho, Miguel Martins, a principal razão que me levou a ingressar no mundo da educação. Peço desculpa pelos momentos de ausência ao longo destes cinco anos e agradeço cada beijo, abraço e mimo que me deu precisamente quando mais precisava.

RESUMO

As transformações sociais e educativas das últimas décadas têm reforçado a importância de práticas pedagógicas que promovam a cooperação, a participação e o desenvolvimento de competências transversais. No ensino da Matemática, a resolução de problemas assume um papel central, configurando-se como uma capacidade com potencial para desenvolver outras quando apoiada por práticas intencionais. Neste contexto, o presente estudo analisa o papel da interação entre pares na aprendizagem matemática, procurando compreender de que forma esta interação contribui para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos em alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Para tal, o estudo orientou-se por duas questões principais: (i) De que forma a interação entre pares contribui para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos em alunos do 2.º ciclo do ensino básico? e (ii) Que desafios emergem da interação entre pares na sala de aula de matemática no contexto da resolução de problemas?

A investigação adotou uma abordagem qualitativa, enquadrada na investigação sobre a prática, combinando observação participante e recolha documental. A intervenção integrou três tarefas sequenciais, exploradas em díades e posteriormente em grande grupo.

Os resultados revelam que a interação entre pares promoveu a comunicação matemática, a construção conjunta de significados e a validação de procedimentos, bem como o desenvolvimento de competências associadas à resolução de problemas. Identificaram-se, contudo, desafios associados a assimetrias de participação, dificuldades comunicacionais e interrupções. Conclui-se que a interação entre pares constitui uma estratégia com elevado potencial para promover aprendizagens matemáticas significativas, desde que acompanhada por uma mediação intencional que assegure uma participação equitativa e minimize os desafios identificados, garantindo condições favoráveis à construção coletiva do conhecimento.

Palavras-chave: interação entre pares, resolução de problemas, ensino da Matemática, aprendizagem cooperativa

ABSTRACT

Social and educational transformations over the past decades have reinforced the importance of pedagogical practices that promote cooperation, participation, and the development of transversal competences. In mathematics education, problem solving plays a central role, being configured as a capability with the potential to foster others when supported by intentional practices. In this context, the present study examines the role of peer interaction in mathematics learning, seeking to understand how such interaction contributes to the development in mathematical problem-solving competences in students in the second cycle of basic education. To this end, the study was guided by two main questions: (i) In what ways does peer interaction contribute to the development of mathematical problem-solving competences in students in the second cycle of basic education? and (ii) What challenges emerge from peer interaction in the mathematics classroom within the context of problem solving?

The research adopted a qualitative approach, framed within practitioner inquiry, combining participant observation with document collection. The pedagogical intervention comprised three sequential tasks, initially explored in dyads and subsequently in collective discussions.

The results reveal that peer interaction promoted mathematical communication, joint construction of meaning, and validation of procedures, as well as the development of skills associated with problem solving. However, challenges were also identified, associated with participation asymmetries, communication difficulties, and interruptions. It is concluded that peer interaction constitutes a strategy with high potential to foster meaningful mathematical learning, provided it is accompanied by intentional mediation that ensures equitable participation and minimizes the identified challenges, thereby guaranteeing favorable conditions for the collective knowledge building.

Keywords: peer interaction, problem solving, mathematics education, cooperative learning

ÍNDICE

LISTA DE ABREVIATURAS

PASEO - Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

AE - Aprendizagens Essenciais

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

A sociedade contemporânea tem sido moldada por profundas transformações políticas, económicas, demográficas e tecnológicas, que têm provocado alterações significativas nas dinâmicas sociais, nomeadamente no contexto educativo (Lopes & Silva, 2022). Estas mudanças trouxeram consigo um aumento da diversidade e do multiculturalismo nas escolas, tornando-as espaços de encontro de jovens provenientes de diferentes origens étnicas e culturais. Contudo, a crescente competitividade e o individualismo que caracterizam o ambiente atual têm influenciado a socialização dos alunos, muitas vezes levando-os a experiências de isolamento em detrimento de práticas cooperativas ou colaborativas (Lopes & Silva, 2022).

Neste cenário, torna-se fundamental refletir sobre o papel das metodologias pedagógicas, em particular a interação entre pares, para promover a cooperação e o desenvolvimento de competências essenciais. Johnson e Johnson (2014) defendem que a aprendizagem cooperativa, além de promover o sucesso académico, é uma estratégia eficaz para desenvolver competências sociais e a interdependência positiva entre os alunos, preparando-os para enfrentar os desafios do século XXI. De acordo com os autores, a aprendizagem cooperativa fomenta interações produtivas e reforça a responsabilidade mútua entre os pares, sendo crucial para o desenvolvimento de competências cognitivas e sociais numa sociedade cada vez mais interligada e multicultural.

Em consonância com esta problemática de transformações sociais e educativas, o tema central deste projeto de investigação é "A interação entre pares e o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos". O projeto é implementado numa turma de 6.º ano e tem como objetivo compreender de que forma a interação entre pares contribui para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos em alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico. A investigação procura analisar a eficácia das práticas cooperativas na aprendizagem de Matemática e como estas experiências influenciam a participação dos alunos e a sua capacidade de enfrentar desafios matemáticos de forma criativa.

De forma a alcançar o objetivo desta investigação, proponho-me responder às seguintes questões de investigação, que orientam o presente estudo: (i) De que forma a interação entre pares contribui para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos em alunos do 2.º ciclo do ensino básico? (ii) Que desafios emergem da interação entre pares na sala de aula de matemática no contexto da resolução de problemas?

A importância da interação entre pares para o desenvolvimento integral da criança é inegável. Lev Vygotsky é amplamente reconhecido pela sua teoria construtivista sociocultural, que enfatiza o papel das interações sociais no desenvolvimento cognitivo e social. Segundo Vygotsky (1896-1934), o desenvolvimento mental das crianças é mediado pelo ambiente social e cultural em que estão inseridas. Ele introduziu conceitos fundamentais, como a Zona de Desenvolvimento Proximal, que define "a diferença entre a capacidade da criança de resolver problemas por si própria e a capacidade de resolvê-los com a ajuda de alguém" (Vygotsky, 1896-1934, p. 4).

A interação entre pares permite aos alunos não apenas aprender, mas também desenvolver competências sociais essenciais, como a capacidade de trabalhar em equipa, a comunicação eficaz e a empatia. Assim, a aprendizagem cooperativa não só melhora o desempenho académico, mas também promove capacidades sociais, como a resolução de conflitos e o trabalho cooperativo (Johnson & Johnson, 2009).

A competência de resolução de problemas é transversal e aplicável a vários âmbitos da vida, não se restringindo ao contexto escolar. De acordo com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO), a Resolução de Problemas é uma das áreas de competências a desenvolver e está relacionada com a capacidade de encontrar respostas para novas situações, mobilizando o raciocínio para tomar decisões, construir e utilizar estratégias, e eventualmente formular novas questões (Martins, et al., 2017). Estas competências implicam que os alunos sejam capazes de interpretar informação, planear e conduzir pesquisas, gerir projetos e tomar decisões para resolver problemas, além de desenvolver processos que levem à construção de produtos e conhecimento, utilizando recursos diversificados. A capacidade de resolução de problemas é, portanto, uma competência essencial para a vida, valorizada não só na educação, mas também em diversos contextos profissionais e sociais, ajudando os indivíduos a enfrentar desafios de forma eficaz. Boavida (1992) reforça esta ideia ao afirmar que a resolução de problemas é amplamente reconhecida como uma das áreas mais importantes tanto na educação em geral quanto na educação matemática, sendo vista como o principal objetivo do desenvolvimento das capacidades dos alunos.

A interação cooperativa é amplamente valorizada no contexto educativo atual, especialmente no ensino da matemática. As Aprendizagens Essenciais de Matemática destacam a importância de promover a interação entre os alunos e de organizar atividades que incentivem o trabalho em pequenos grupos, sob a supervisão do professor (Canavarro, et al., 2021). A prática cooperativa tem como objetivo fortalecer as competências sociais e cognitivas dos alunos, tais como a comunicação, a cooperação e a resolução de problemas, preparando-os para enfrentar desafios em diversos contextos. Com base neste documento orientador, acredito que a aprendizagem da matemática é um processo cooperativo, e não solitário, no qual os alunos desenvolvem o conhecimento de forma conjunta, através do diálogo, da troca de ideias e da resolução partilhada de problemas.

A resolução de problemas constitui uma componente essencial no currículo da Matemática, ao facilitar o contacto com ideias matemáticas significativas e contextualizar os conteúdos curriculares (Boavida et al., 2008). Segundo as autoras, esta prática envolve não só a formulação de problemas, mas também a procura de soluções, promovendo a exploração de conceitos e a aplicação do conhecimento adquirido. Além disso, conforme apontado por Sousa e Mendes (2017), a resolução de problemas aproxima os alunos do pensamento do quotidiano, permitindo-lhes abordar questões relacionadas com a sua realidade. As mesmas autoras destacam que, durante este processo, os alunos são desafiados a construir caminhos não rotineiros, utilizando estratégias variadas para alcançar soluções, o que distingue um problema de um simples exercício. Concluem que, quando um aluno resolve uma tarefa de forma imediata e mecanizada, está meramente a realizar um exercício. Portanto, ao exigir a construção de um percurso criativo para chegar a uma solução, o aluno está efetivamente diante de um problema matemático.

O tema proposto surgiu tanto de um desejo profissional de lecionar no 2.º Ciclo do Ensino Básico como de um interesse pessoal em aprofundar o conhecimento sobre o papel da cooperação na aprendizagem e sobre a resolução de problemas matemáticos, com particular foco nas competências que possam ser desenvolvidas através deste processo. Ao longo do meu percurso académico, embora tenha sempre nutrido um gosto pela Matemática, experienciei um processo de aprendizagem predominantemente solitário. Acredito que a partilha de diferentes estratégias e abordagens poderia ter enriquecido significativamente a minha aprendizagem ao proporcionar-me a compreensão mais profunda dos conceitos, além de criar um ambiente cooperativo que favorecesse o desenvolvimento de competências interpessoais, tão essenciais para a vida profissional que já experienciei. Adicionalmente, nas minhas experiências de estágio, observei a ausência de práticas cooperativas entre os alunos, o que me levou a refletir sobre as razões pelas quais estas estratégias não são amplamente adotadas pelos professores.

Tendo presente este enquadramento e o propósito da investigação, o relatório organiza-se em quatro capítulos principais, para além desta introdução.

O Capítulo 1 apresenta a fundamentação teórica que sustenta o estudo. Este capítulo aborda os contributos da literatura relativos à resolução de problemas em Matemática e à interação social na aprendizagem, aprofundando o papel da interação entre pares, as potencialidades desta abordagem e os desafios que pode implicar em contexto de sala de aula.

O Capítulo 2 diz respeito à metodologia de investigação, explicitando e justificando as opções metodológicas adotadas, bem como as técnicas de recolha e análise de dados utilizadas ao longo do estudo.

O Capítulo 3 descreve o contexto educativo e os participantes, apresentando e fundamentando a intervenção pedagógica implementada, incluindo as tarefas propostas e a forma como foram exploradas em sala de aula.

O Capítulo 4 consiste na análise e discussão dos dados recolhidos, organizada em torno das três tarefas da intervenção, identificando os contributos e desafios das interações entre pares tanto no trabalho em díades como na discussão coletiva.

Por fim, surgem as Considerações Finais, que incluem uma síntese do estudo, as conclusões articuladas com as questões de investigação e o enquadramento teórico, bem como uma reflexão pessoal sobre o percurso desenvolvido e os contributos do estudo para o desenvolvimento profissional docente.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1. A resolução de problemas em Matemática

A resolução de problemas ocupa um lugar central no ensino e aprendizagem da Matemática, sendo reconhecida como uma abordagem metodológica essencial, um objetivo de ensino e um meio privilegiado de desenvolvimento de competências (Cai & Lester, 2010; NCTM, 2000; Canavarro et al., 2021). O seu potencial para promover aprendizagens significativas, fomentar o raciocínio e desenvolver a autonomia dos alunos é amplamente valorizado pela investigação, que sublinha a importância de envolver os alunos em tarefas desafiantes, cognitivamente exigentes e com significado matemático (Boavida & Menezes, 2012; Vale et al., 2015). Neste enquadramento, importa compreender, por um lado, como a resolução de problemas contribui para a construção do conhecimento matemático e, por outro, de que forma os alunos aprendem a resolver problemas e que competências se desenvolvem durante esse processo. A revisão da literatura desenvolve-se, assim, em torno de quatro dimensões complementares: significado de problema de matemática, o papel da resolução de problemas na construção do conhecimento matemático, como os alunos aprendem a resolver problemas e as competências que esta prática permite desenvolver.

1.1. Significado(s) de problema de matemática

A análise do papel da resolução de problemas na aprendizagem matemática exige, antes de mais, uma clarificação do que se entende por "problema" no contexto do ensino da Matemática. Com efeito, esta noção constitui a base para compreender de que forma determinadas tarefas podem promover aprendizagens significativas, dependendo do tipo de envolvimento cognitivo que exigem e da intencionalidade pedagógica com que são propostas.

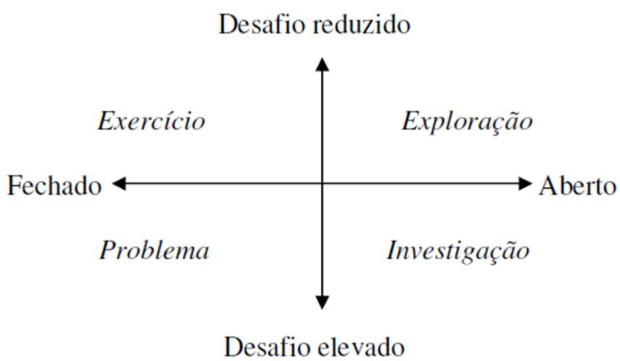
Neste sentido, vários autores têm procurado caracterizar o que distingue um problema de outras tarefas habitualmente propostas na sala de aula. Ponte et al. (2011) identificam como principais características de um problema o facto de não ser de resolução imediata, de exigir um esforço de compreensão aprofundado, a formulação e concretização de uma estratégia de resolução e, ainda, a reflexão sobre os resultados obtidos. Acrescentam que os problemas matemáticos se distinguem por apresentarem dados bem definidos e um objetivo claramente formulado, diferenciando-se de tarefas mais abertas, nas quais o aluno pode ter de interpretar ou reconstruir a situação a resolver. Esta descrição reforça a ideia de que a natureza de um problema se define não pela sua aparência formal, mas pelo tipo de envolvimento cognitivo que exige ao aluno.

Complementarmente, Vale et al. (2015) destacam que, de forma geral, um problema é uma situação em que o caminho para a solução não é conhecido à partida ou não é evidente, exigindo a mobilização de raciocínio e compreensão. No entanto, alertam que, em determinados contextos de ensino, certas tarefas podem perder essas características, tornando-se exercícios, sobretudo quando a sua resolução se limita à aplicação de procedimentos previamente adquiridos. Esta distinção remete para a perspetiva de Pólya (1945/2003), que diferencia os problemas rotineiros, resolvidos com base em procedimentos conhecidos, dos problemas não rotineiros, que implicam reflexão, tomada de decisões e a seleção de estratégias ajustadas à situação. São estas tarefas que, segundo o autor, promovem verdadeiramente o desenvolvimento do pensamento matemático. O autor salienta ainda que a dificuldade é um elemento intrínseco de qualquer problema, defendendo que só podemos considerar uma tarefa como problema quando esta suscita no aluno o desejo de procurar uma solução. Um exercício cuja resolução é automática, sem exigir esforço nem compreensão, não configura, segundo o autor, um verdadeiro problema.

Com o intuito de clarificar e diferenciar as tarefas matemáticas propostas em sala de aula, Ponte (2005) caracteriza quatro tipos com base em dois critérios (ver figura 1): o grau de estrutura (fechada ou aberta) e o grau de desafio (reduzido ou elevado). No cruzamento destes dois critérios, os problemas são definidos pelo autor como tarefas de estrutura fechada e com um grau de desafio elevado, caracterizando-se por apresentarem um objetivo bem definido e exigirem do aluno um envolvimento cognitivo significativo.

Figura 1

Relação entre tipos de tarefas e o seu grau de desafio e estrutura.



Nota. Retirado de Ponte (2005, p. 8).

O mesmo autor destaca ainda que a distinção entre os tipos de tarefas nem sempre é evidente. Um mesmo enunciado pode assumir diferentes naturezas consoante os conhecimentos prévios dos alunos e a forma como é trabalhado em sala de aula. Assim, uma tarefa que representa um problema para um aluno pode ser encarada como um exercício por outro, o que evidencia que a natureza de uma tarefa não se determina apenas pela sua estrutura formal, mas também pela experiência do aluno e pela intencionalidade pedagógica com que é proposta.

Neste enquadramento, a valorização das tarefas matemáticas que envolvem os alunos em raciocínios exigentes ganha particular relevância quando aliada a uma intencionalidade pedagógica. Segundo Cai e Lester (2010), o termo resolução de problemas refere-se a tarefas com potencial para desafiar os alunos cognitivamente e promover o seu desenvolvimento matemático. Estas tarefas, quando selecionadas com um propósito bem definido, podem constituir um meio privilegiado para promover aprendizagens matematicamente significativas. Tal como sublinha Ponte (2005), a aprendizagem resulta essencialmente da atividade que os alunos desenvolvem e da reflexão que fazem sobre ela.

No âmbito desta investigação entende-se por problema uma tarefa com enunciado claro, dados definidos e um objetivo específico, que exige dos alunos um envolvimento cognitivo significativo e a formulação de estratégias próprias para a sua resolução. Embora apresente uma estrutura fechada, o problema caracteriza-se por não ter uma solução imediata, mobilizando raciocínio, compreensão e tomada de decisões. Trata-se de uma tarefa que coloca os alunos perante um desafio, para o qual não dispõem de um procedimento pronto a aplicar, mas que constitui um ponto de partida para a construção e compreensão de novos conceitos matemáticos.

1.2. O papel da resolução de problemas na construção do conhecimento matemático

A discussão sobre o papel da resolução de problemas na construção do conhecimento matemático implica analisar não apenas o seu contributo direto para as aprendizagens dos alunos, mas também a forma como esta abordagem é conceptualizada, valorizada nos documentos curriculares e mobilizada nas práticas pedagógicas. A resolução de problemas tem vindo a assumir um lugar central tanto nas orientações nacionais como internacionais, sendo reconhecida como uma via privilegiada para promover aprendizagens matematicamente significativas. Nesta perspetiva, importa compreender de que forma esta prática pode constituir, em simultâneo, uma metodologia de ensino, uma estratégia de aprendizagem e uma finalidade educativa, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a construção ativa do conhecimento pelos alunos.

Neste sentido, tarefas matematicamente significativas e intelectualmente desafiantes, tal como caracterizadas por Cai e Lester (2010), são aquelas que envolvem conteúdos relevantes, exigem raciocínio de ordem superior, contribuem para o desenvolvimento conceptual, permitem diferentes estratégias de resolução e incentivam a comunicação e a argumentação matemática. Quando propostas com intencionalidade pedagógica, estas tarefas favorecem o envolvimento ativo dos alunos e a construção de aprendizagens com sentido.

Estes contributos teóricos refletem-se nas orientações curriculares nacionais e internacionais, que atribuem à resolução de problemas um papel estruturante no ensino da Matemática. Resolver problemas matemáticos não deve ser, segundo diversos autores, apenas um objetivo do ensino, mas sim uma abordagem fundamental para promover aprendizagens significativas e desenvolver o pensamento matemático dos alunos (Cai & Lester, 2010; NCTM, 2000). Esta perspetiva reforça a ideia de que o trabalho com problemas deve ocupar um lugar estruturante no currículo, orientando as práticas pedagógicas e contribuindo para uma aprendizagem mais ativa e significativa da Matemática.

O NCTM (2000) afirma que a resolução de problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem da Matemática (p. 52), sublinhando a sua relevância em todos os níveis de ensino e em todos os domínios do conteúdo matemático. Resolver problemas permite aos alunos mobilizar e aplicar conhecimentos em diversos contextos, construir novos significados e desenvolver estratégias próprias para abordar situações complexas (NCTM, 2000). O mesmo documento acrescenta que os professores têm um papel fundamental na criação de ambientes matematicamente ricos, através da seleção de tarefas que estimulem o raciocínio, a autonomia e a comunicação matemática.

No plano nacional, esta valorização da resolução de problemas encontra eco nas orientações curriculares em vigor. Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (AE) a resolução de problemas é identificada como uma das seis capacidades matemáticas transversais, a par do raciocínio matemático, comunicação matemática, representações matemáticas, conexões matemáticas e pensamento computacional (Canavarro et al., 2021). Estas capacidades devem ser desenvolvidas ao longo de todos os ciclos de forma integrada e transversal, constituindo simultaneamente um meio e um fim no processo de aprendizagem matemática. Este documento refere, ainda, que a resolução de problemas deve ser uma atividade central na aula de Matemática, permitindo aos alunos mobilizar os seus conhecimentos, testar ideias e desenvolver novas estratégias.

Também no PASEO salienta-se a importância de desenvolver, de forma sistemática e intencional, a competência de resolver problemas (Martins, et al., 2017). Esta competência é entendida como integradora de várias dimensões cognitivas tais como: interpretar informação, planear e conduzir pesquisas, gerir projetos, tomar decisões, construir e aplicar estratégias, e formular novas questões. Acrescenta-se ainda que os alunos devem ser capazes de analisar “criticamente as conclusões a que chegam” (p. 23), reformular estratégias quando necessário e generalizar resultados através da construção e teste de modelos aplicáveis a diferentes contextos. Neste enquadramento, a resolução de problemas é reconhecida como uma prática pedagógica essencial para o desenvolvimento de competências cognitivas e sociais, com impacto direto na formação de cidadãos autónomos, críticos e criativos.

Em síntese, ao colocar os alunos perante desafios intelectualmente exigentes e ao incentivar a construção de soluções próprias, a resolução de problemas transforma-se num motor de desenvolvimento das competências matemáticas e de formação de cidadãos críticos e reflexivos. Por isso, a sua integração efetiva no currículo do Ensino Básico representa um passo fundamental para garantir uma educação matemática exigente, inclusiva e com significado (Cai & Lester, 2010; NCTM, 2000).

1.3. Como os alunos aprendem a resolver problemas

Se a resolução de problemas deve ocupar um lugar estruturante no currículo de Matemática, importa compreender de que forma os alunos desenvolvem esta competência ao longo do seu percurso escolar. Segundo Cai e Lester (2010), aprender a resolver problemas é um processo gradual, que se desenvolve ao longo do tempo e exige prática regular, persistência e uma abordagem pedagógica intencional. Os autores defendem que esta aprendizagem não se desenvolve através da memorização de estratégias generalistas nem da resolução repetitiva de problemas rotineiros, mas através da exposição a tarefas verdadeiramente problemáticas, que promovam a compreensão, o raciocínio e a comunicação matemática. Sublinham ainda que estas tarefas devem conter um nível de desafio que convide à especulação, ao esforço e à reformulação, reconhecendo o erro como parte integrante do processo de aprendizagem. Neste enquadramento, a resolução de problemas surge não apenas como um objetivo curricular, mas como um caminho para a construção do conhecimento matemático.

A investigação mostra que os alunos aprendem a resolver problemas quando se envolvem em tarefas cognitivamente exigentes, que requerem compreensão, tomada de decisão e formulação de estratégias próprias. Como evidenciam Sousa e Mendes (2017), mesmo nos níveis iniciais de escolaridade, os alunos são capazes de mobilizar representações e raciocínios pessoais na resolução de problemas, ainda antes de as estratégias terem sido formalmente apresentadas. No estudo apresentado, a mediação do professor revelou-se fundamental para apoiar esta construção, através da valorização das estratégias dos alunos, da sua discussão em grande grupo e do acompanhamento do raciocínio desenvolvido. Este papel mediador assumido pelo professor favorece a explicitação do pensamento, a comparação de procedimentos e a construção conjunta de significados em torno das tarefas matemáticas.

Apesar do potencial formativo da resolução de problemas, a investigação tem vindo a evidenciar múltiplas dificuldades enfrentadas pelos alunos ao longo deste processo. Sousa e Mendes (2017) referem que muitos alunos revelam dificuldades na interpretação dos enunciados, na compreensão das situações problemáticas e na justificação das soluções, o que compromete a comunicação do raciocínio desenvolvido. Estas limitações, como também salientam Costa e Fonseca (2009), estão fortemente associadas a fragilidades linguísticas, que dificultam a leitura e a compreensão dos textos matemáticos. De forma convergente, Proença et al. (2022) apontam para dificuldades recorrentes na seleção e aplicação de estratégias adequadas e na organização lógica do raciocínio, sobretudo nas etapas iniciais da resolução. A desistência precoce perante o desafio é igualmente salientada por Ponte (2005), ao referir que "se o problema for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente (ou a nem lhe pegar)" (p. 13). Estas dificuldades não decorrem apenas de fragilidades conceptuais, mas refletem também práticas de ensino que nem sempre incentivam a exploração, a reflexão e a autonomia. Como alertam Boavida e Menezes (2012), o tratamento rotineiro e tecnicista dos problemas em sala de aula, sem espaço para o erro, a dúvida ou a construção de significado, restringe o desenvolvimento das competências de resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemático.

Para além das dificuldades mencionadas, a resolução de problemas favorece a aprendizagem quando ocorre num contexto de interação social, onde a partilha de estratégias e a discussão entre pares desempenham um papel central. Como defendem Boavida e Menezes (2012), a partilha de estratégias entre alunos e a reflexão crítica sobre os erros permitem o contacto com formas de pensar distintas, o que favorece a compreensão dos conceitos envolvidos e a construção de novos significados. Estes autores sublinham a importância de criar uma cultura de sala de aula onde se fomente a análise e discussão de diferentes abordagens, apoiando a clarificação do pensamento e a apropriação progressiva de ideias matemáticas. De forma convergente, Cai e Lester (2010) referem que, ao apresentarem, justificarem e discutirem as suas soluções em ambiente colaborativo, os alunos têm oportunidade de reformular ideias, negociar significados e aprender com os raciocínios dos seus pares.

Adicionalmente, o modo como os alunos encaram a resolução de problemas está profundamente influenciado pelas crenças que desenvolvem sobre a Matemática e sobre a própria aprendizagem. Como destaca Schoenfeld (1992), muitos alunos acreditam que os problemas matemáticos devem ser resolvidos rapidamente e com base em procedimentos memorizados, o que os leva a encarar a Matemática como um conjunto de regras a aplicar mecanicamente, e não como uma atividade de construção e compreensão. Esta perceção redutora limita a sua flexibilidade e leva frequentemente à desistência perante tarefas mais exigentes. Como afirma o autor, os alunos que têm essa crença desistem de resolver um problema após alguns minutos de tentativas sem sucesso, embora pudessem tê-lo resolvido se tivessem sido perseverantes (p. 359). Para contrariar estas tendências, torna-se essencial criar ambientes de aprendizagem que valorizem o esforço intelectual, legitimem a dúvida e o erro e promovam a perseverança e a reformulação como componentes naturais do processo de aprender a resolver problemas.

Aprender a resolver problemas é, assim, um processo longo, exigente e profundamente enraizado nas experiências que os alunos vivenciam em sala de aula. Esta aprendizagem constrói-se de forma progressiva, à medida que os alunos são desafiados a explorar novas situações, a persistir perante a incerteza e as dificuldades, a comunicar os seus raciocínios e a refletir criticamente sobre as suas estratégias. Como evidenciam os estudos analisados, a mediação do professor, a interação entre pares, a valorização do erro e a superação das dificuldades são elementos essenciais deste processo.

1.4. Competências desenvolvidas na resolução de problemas

A resolução de problemas, quando integrada como eixo estruturante da prática pedagógica, constitui um poderoso meio de desenvolvimento de um vasto conjunto de competências matemáticas transversais. A literatura evidencia que esta abordagem contribui significativamente para a aprendizagem com compreensão, promovendo capacidades como a interpretação de enunciados, a seleção e aplicação de estratégias, a representação e comunicação matemática, o raciocínio matemático e a autonomia (Boavida & Menezes, 2012; Cai & Lester, 2010; Canavarro, et al., 2021).

Uma das primeiras competências mobilizadas na resolução de problemas é a compreensão e interpretação de enunciados. Envolve a capacidade de identificar dados relevantes, inferir relações e clarificar o objetivo da tarefa, o que requer um trabalho articulado entre o pensamento matemático e a linguagem (Cai & Lester, 2010; Menezes, 2000). Esta competência revela-se crítica, uma vez que, quando não desenvolvidas, limitam "a manifestação de diversas competências matemáticas, nomeadamente a seleção de estratégias adequadas à resolução de problemas e o domínio de conceitos matemáticos envolvidos na execução das tarefas" (Costa & Fonseca, 2009, pp. 8-9).

A par da compreensão, destaca-se a seleção e aplicação de estratégias de resolução. Resolver problemas implica tomar decisões sobre como avançar, selecionar heurísticas, combinar estratégias conhecidas ou criar abordagens novas, num processo que requer uma disciplina intelectual na estruturação do pensamento e a capacidade de aplicar diferentes estratégias de forma articulada e adaptativa (Pólya, 1945/2003; Canavarro et al., 2021; Boavida et al., 2008). Esta competência é promovida através do contacto com tarefas diversificadas e cognitivamente exigentes, que incentivam os alunos a mobilizar diferentes tipos de estratégias. A familiarização com recursos como a tentativa e erro, a simplificação, o uso de esquemas, tabelas, padrões ou simulações permite construir um repertório variado de abordagens, ajustável a diferentes contextos e desafios (Boavida et al., 2008). Assim, o desenvolvimento do pensamento estratégico exige que o aluno não só recorra a abordagens conhecidas, mas também reflita criticamente sobre a adequação das suas escolhas e explore alternativas sempre que necessário.

Outra competência essencial desenvolvida na resolução de problemas é a representação e comunicação matemática. Representar ideias matemáticas envolve recorrer a múltiplos registos, sejam eles orais, escritos, visuais ou simbólicos, que facilitam a organização do raciocínio e a construção de significados (Boavida et al., 2008). Estes autores referem ainda que a articulação entre diferentes formas de representação permite aos alunos clarificar relações, estruturar estratégias e comunicar o seu pensamento de forma visível e partilhável. Por sua vez, Menezes (2000) defende que o ensino e a aprendizagem da Matemática decorrem num processo de comunicação constante, sendo a linguagem o principal meio de construção do conhecimento matemático. Neste sentido, a comunicação matemática constitui-se como um processo interativo através do qual os alunos refletem, refinam e constroem significados matemáticos partilhados, desenvolvem a sua compreensão e aprendem a comunicar de forma clara e convicta (NCTM, 2000). A valorização da comunicação bidirecional e a criação de oportunidades para que todos os alunos partilhem, justifiquem e reformulem os seus raciocínios em interação com os colegas são condições essenciais para construir uma comunidade de aprendizagem onde o conhecimento matemático é construído de forma coletiva (Boavida et al., 2008).

Simultaneamente, a resolução de problemas promove o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que este está intimamente ligado à formulação e análise de conjeturas, à justificação, à explicação e à argumentação em torno de situações matemáticas (Boavida & Menezes, 2012). Segundo Boavida (2008), raciocinar para aprender implica mobilizar a razão para justificar, explicar, argumentar, convencer e ser convencido, num processo que exige reflexão e troca de ideias. Neste enquadramento, o raciocínio matemático vai além da demonstração formal, envolvendo também a análise do sentido lógico das conjeturas e a avaliação da coerência e validade das estratégias adotadas, contribuindo para aprofundar a compreensão dos conceitos (Boavida et al., 2008; NCTM, 2000). O desenvolvimento desta competência requer, por isso, a criação de ambientes didáticos marcados pela consistência, pela persistência e pela valorização da justificação das ideias, permitindo aos alunos construir hábitos de pensamento e explicação progressivamente mais formais (Boavida, 2008).

Outro aspeto amplamente referido na literatura é a contribuição da resolução de problemas para o desenvolvimento da perseverança, da autonomia e da autorregulação. Como referem Cai e Lester (2010), o envolvimento dos alunos em tarefas cognitivamente exigentes promove hábitos de pensamento persistente e legitima o erro e a reformulação como parte do processo. Schoenfeld (1992) acrescenta que a autorregulação permite aos alunos manter o foco e adaptar estratégias perante a dificuldade. Nesta linha, o NCTM (2000) salienta que a resolução de problemas contribui para a construção de confiança, curiosidade e atitudes positivas face à Matemática.

Por fim, importa destacar que estas competências não se desenvolvem isoladamente. A resolução de problemas, enquanto abordagem transversal à aprendizagem matemática, permite articular o raciocínio, a comunicação e a autorregulação, promovendo um envolvimento cognitivo profundo (Boavida & Menezes, 2012). Quando os alunos se confrontam com tarefas desafiadoras, são levados a refletir sobre os seus próprios processos e estratégias, ajustando-os à medida que resolvem o problema, um tipo de pensamento reflexivo que o NCTM (2000) designa como metacognição. Este tipo de envolvimento é favorecido em ambientes onde se valorizam a discussão, a partilha de ideias e a construção coletiva de significados.

2. A interação social na aprendizagem da Matemática

A aprendizagem da Matemática não se limita a processos individuais de aquisição de conhecimentos, ocorrendo frequentemente em contextos sociais marcados pela partilha, negociação e construção conjunta de significados. A investigação tem mostrado que as interações entre alunos, especialmente em ambientes de cooperação ou colaboração, favorecem o desenvolvimento do raciocínio, da argumentação e da compreensão conceptual (César, et al., 2000; NCTM, 2000). Reconhecendo que o conhecimento matemático também se constrói no diálogo com os outros, importa compreender os fundamentos teóricos que sustentam esta perspetiva, perceber de que forma a interação entre pares pode ser mobilizada como estratégia pedagógica e identificar os desafios que a sua implementação coloca no quotidiano da sala de aula.

2.1. Fundamentos socioconstrutivistas da aprendizagem em Matemática

A teoria socioconstrutivista da aprendizagem, tal como formulada por Lev Vygotsky, defende que o desenvolvimento cognitivo resulta da construção de conhecimento a partir das interações sociais mediadas pela cultura. O autor sublinha que as funções psicológicas superiores, como o pensamento abstrato ou a linguagem, não emergem espontaneamente, mas desenvolvem-se historicamente através da apropriação de instrumentos culturais disponíveis no meio social (Vygotsky, 1978). De acordo com o autor, tais funções surgem, primeiramente, no plano social, isto é, na interação com pessoas no ambiente da criança e em cooperação com os seus pares, e só posteriormente se reorganizam como estruturas psicológicas internas. Esta transição do plano interpsicológico para o plano intrapsicológico é possível graças à mediação simbólica, sendo a linguagem o principal instrumento através do qual o sujeito constrói significados e organiza o seu pensamento (Vygotsky, 1978).

Partindo desta conceção, Vygotsky (1978) propõe que a aprendizagem não apenas acompanha o desenvolvimento, mas pode antecipá-lo e promovê-lo. Como afirma o autor, a aprendizagem devidamente organizada resulta no desenvolvimento mental e desencadeia uma variedade de processos de desenvolvimento que, de outro modo, não ocorreriam (p. 90). No contexto da interação social surge o conceito de zona de desenvolvimento proximal, entendido como sendo a distância entre o nível de desenvolvimento atual, determinado pela resolução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, que se revela quando a resolução ocorre com o apoio de um adulto ou em colaboração com colegas mais capazes (Vygotsky, 1978, p. 86). Este espaço entre o desempenho autónomo e o desempenho mediado constitui o ponto de maior eficácia para a intervenção educativa (César, 2000), na medida em que a aprendizagem orientada contribui diretamente para o avanço do desenvolvimento psicológico.

Neste enquadramento, a interação entre pares constitui, segundo César (2000), uma forma privilegiada de construção de conhecimentos e de desenvolvimento de competências matemáticas. A autora defende que esta interação entre alunos vai além da simples partilha de saberes, permitindo aos mesmos descobrir em si e nos outros capacidades que desconheciam, promover aprendizagens cognitivas e desenvolver atitudes e valores fundamentais. Para César et al. (2000), a interação entre pares possibilita o confronto de pontos de vista distintos, estimula a descentração e favorece a construção coletiva do conhecimento. De acordo com os autores, estas dinâmicas colaborativas, ao serem intencionalmente promovidas, tornam a sala de aula num espaço de aprendizagem partilhada onde cada aluno é chamado a contribuir, a ouvir e a reconstruir o seu pensamento com base nas contribuições dos outros.

Outro aspeto fundamental da teoria socioconstrutivista de Vygotsky é o papel da linguagem como instrumento mediador do desenvolvimento psicológico. Vygotsky (1978) destaca que a linguagem está na base das funções psicológicas superiores, desempenhando um papel essencial na organização do pensamento, na autorregulação e na planificação da ação. Segundo o autor, a fala, inicialmente usada para interagir com os outros, transforma-se gradualmente num instrumento para orientar o comportamento do próprio sujeito ao permitir organizar o raciocínio e estruturar os processos mentais.

No ensino e na aprendizagem da Matemática, esta mediação linguística ganha especial relevância. Serrazina (2018) salienta que as AE valorizam explicitamente a comunicação matemática, tanto verbal como escrita, sublinhando que esta é essencial para que os alunos expressem e justifiquem os seus raciocínios e constitui uma componente central das práticas de ensino exploratório, nas quais se integram a resolução de problemas e outras tarefas matemáticas. De acordo com a autora, permitir aos alunos esclarecer os seus raciocínios, articular argumentos e justificar conclusões não é apenas uma capacidade acessória, mas sim central para o aprofundamento da compreensão matemática. Esta perspetiva é também defendida pelo NCTM (2000), que considera a comunicação uma componente essencial do ensino e da aprendizagem da Matemática, destacando que é através da troca de ideias e da argumentação que os alunos clarificam o seu pensamento, analisam as estratégias dos outros e aprendem a expressar conceitos com rigor. Assim, comunicar matemática não é apenas uma capacidade linguística, mas um processo central na construção da compreensão conceptual e na aprendizagem ativa e partilhada.

2.2. Interação entre pares como estratégia pedagógica

A interação entre pares tem sido reconhecida como um elemento facilitador da construção do conhecimento matemático, sobretudo em práticas pedagógicas que valorizam a participação ativa dos alunos e o diálogo entre iguais. De acordo com César et al. (2000), as interações sociais em sala de aula, nomeadamente as que ocorrem entre pares, contribuem significativamente para a apreensão de conhecimentos e para a aquisição de competências matemáticas. Neste contexto, a partilha de estratégias de resolução em grupo permite aos alunos verbalizar, justificar e reformular os seus raciocínios, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos e a construção de conhecimentos de longa duração (Boavida et al., 2008).

Alicerçada no que Vygotsky (1978) entende como o papel mediador da linguagem e da interação social no desenvolvimento, a interação entre pares pode ser concebida como o conjunto de trocas verbais e não verbais que ocorrem entre alunos quando estes trabalham em conjunto na resolução de tarefas.

Segundo Dillenbourg (1999), as interações entre pares em contextos colaborativos podem assumir diferentes formas, dependendo de variáveis como o grau de simetria entre os participantes, quer ao nível do conhecimento, da ação ou do estatuto, e da forma como a situação de aprendizagem é estruturada pelo professor. Segundo o autor, estas condições influenciam o tipo de interações que emergem, sendo que a colaboração efetiva exige mais do que simplesmente juntar alunos. Requer a criação de um ambiente que favoreça a negociação e a construção conjunta de significados. O autor propõe ainda que uma situação pode ser considerada de aprendizagem colaborativa sempre que dois ou mais indivíduos tentam aprender algo juntos, partilham responsabilidade e constroem significados de forma interdependente. Este tipo de interação destaca-se pela sua natureza dialógica, em que o conhecimento emerge do confronto e da negociação de ideias no seio do grupo.

Apesar de serem muitas vezes usados como sinónimos, os conceitos de “cooperação” e “colaboração” têm vindo a ser analisados por diversos autores a partir de diferentes perspetivas, procurando clarificar as suas características e implicações no contexto educativo. Dillenbourg (1999) distingue colaboração de cooperação com base na forma como o trabalho é organizado e nos papéis assumidos pelos participantes. Na cooperação, os papéis assumidos por cada elemento do grupo são definidos e estáveis desde o início, e a tarefa é dividida de forma a que cada um trabalhe de forma autónoma, sendo os resultados posteriormente reunidos e integrados. Já na colaboração, o grupo desenvolve a tarefa em conjunto, podendo surgir, de forma espontânea, alguma distribuição de responsabilidades, mas mantendo-se uma forte interdependência entre os participantes, com papéis que vão sendo ajustados e alternados ao longo do processo.

No entanto, a perspetiva de Lopes e Silva (2022) diverge em alguns aspetos fundamentais. Em primeiro lugar, a interdependência que Dillenbourg (1999) associa à colaboração, Lopes e Silva (2022) atribuem essa característica à aprendizagem cooperativa, considerando que a colaboração pode implicar uma interdependência mais moderada. Em segundo lugar, os autores invertem a lógica da organização da tarefa, descrevendo a aprendizagem colaborativa como uma abordagem em que a tarefa é dividida e realizada de forma autónoma. Por fim, também o foco da análise é distinto uma vez que Dillenbourg (1999) centra-se nas dinâmicas internas da interação entre os pares, enquanto Lopes e Silva (2022) colocam ênfase na intencionalidade pedagógica e na estrutura da atividade, com especial atenção ao papel do professor.

De acordo com esta última perspetiva, Lopes e Silva (2022) caracterizam a aprendizagem cooperativa como uma abordagem estruturada, com objetivos comuns definidos pelo professor, tarefas partilhadas entre os membros do grupo e um elevado grau de interdependência, tanto na execução das tarefas como na responsabilização pelo progresso de todos. Já a aprendizagem colaborativa, ainda que partilhe a importância da interação entre pares, tende a privilegiar uma estrutura mais aberta, centrada na autonomia dos alunos, em que o trabalho é desenvolvido de forma mais individual, embora em contexto de partilha e apoio mútuo.

No âmbito da teoria da interdependência social, Johnson e Johnson (2014) apresentam a aprendizagem cooperativa como um modelo de ensino estruturado, caracterizado por cinco elementos fundamentais: a interdependência positiva, a responsabilidade individual, a interação promotora, o desenvolvimento de competências sociais e a avaliação conjunta do funcionamento do grupo. Os autores defendem que, para que a cooperação seja eficaz, é necessário que todos os membros do grupo percebam que o seu sucesso depende do sucesso dos outros, promovendo um clima de apoio mútuo, participação ativa e corresponsabilização.

Para além da distinção conceptual entre diferentes formas de interação entre pares, importa considerar os benefícios que esta estratégia pedagógica pode proporcionar na aprendizagem da Matemática, tal como tem sido evidenciado por diversos estudos. A interação entre alunos favorece o desenvolvimento de competências cognitivas, nomeadamente o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses, a mobilização de estratégias variadas e a capacidade de comunicar e justificar procedimentos matemáticos, como evidenciam César et al. (1999), ao referirem que os alunos "ganham uma maior capacidade de verbalização ao explicarem ao par o seu raciocínio" (p. 84) e que, ao longo das interações, são levados a formular e testar conjeturas. Santos (2011) acrescenta que estas interações "podem conduzir a uma aprendizagem mais profícua em Matemática" (p. 124).

Paralelamente, este tipo de interação contribui também para o desenvolvimento de competências sociocognitivas, fundamentais a uma aprendizagem inclusiva e colaborativa. De acordo com César et al. (2000), a troca de ideias entre alunos promove capacidades como a argumentação, o respeito pelo outro, a cooperação, a compreensão e a solidariedade. Estes autores salientam que mesmo os alunos sem dificuldades de aprendizagem beneficiam deste tipo de trabalho, aprofundando os seus conhecimentos e desenvolvendo competências interpessoais. Além disso, segundo César et al. (1999), a interação entre pares implica a gestão de conflitos sociocognitivos e afetivos, exigindo aos alunos a capacidade de negociar significados, partilhar a liderança, lidar com a frustração e respeitar os sentimentos dos outros. Neste contexto, destaca-se o papel da interação na construção de uma atitude mais positiva face à Matemática, bem como no reforço da autonomia, do pensamento crítico e da solidariedade entre os alunos.

Neste sentido, importa ainda compreender como e quando as interações entre pares se concretizam numa aula de Matemática orientada por uma abordagem exploratória. Um dos momentos particularmente relevantes ocorre durante a fase de exploração da tarefa, em que os alunos trabalham autonomamente em díades ou pequenos grupos, dispondo de tempo e espaço para, em conjunto, formular estratégias, testar hipóteses, confrontar raciocínios e tomar decisões (Canavarro, 2011; NCTM, 2000; César et al., 1999). Este momento da aula, cuidadosamente preparado pelo professor, com tarefas desafiantes, promove o envolvimento ativo dos alunos na construção do conhecimento matemático (Canavarro, 2011). As interações entre pares nesta fase potenciam o desenvolvimento de competências cognitivas e sociais, já que os alunos aprendem uns com os outros, mobilizam diferentes formas de pensar e assumem responsabilidade partilhada na resolução do problema. Tal como sublinham César et al. (1999), a interação entre pares favorece o progresso de todos os alunos, seja através da explicação, da escuta ativa ou da reformulação de ideias, e promove aprendizagens significativas mesmo em pares com níveis de desempenho distintos. Esta valorização do trabalho cooperativo e da construção partilhada do conhecimento está igualmente presente nas orientações internacionais, onde se destaca a importância de proporcionar aos alunos oportunidades para resolver problemas, justificar estratégias e discutir soluções (NCTM, 2000).

Outro momento crucial de interação entre pares ocorre durante a discussão coletiva, geralmente conduzida pelo professor. Nesta fase, os grupos apresentam as suas soluções à turma e as diferentes estratégias são analisadas, justificadas e confrontadas num ambiente de partilha. Como salientam Ponte (2005) e Canavarro (2011), estas interações favorecem a construção coletiva do conhecimento matemático, ao permitir que os alunos explicitem os seus raciocínios, interroguem os colegas e negociem significados. Além de promover a consolidação dos conteúdos, este tipo de prática potencia o desenvolvimento de competências comunicativas e argumentativas, na medida em que envolve os alunos na análise crítica das estratégias e raciocínios apresentados (Canavarro, 2011). Neste momento, o papel do professor é determinante. Cabe-lhe "procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática" (Ponte, 2005, p. 16), assegurando a gestão do discurso da aula e a promoção de aprendizagens significativas.

Neste estudo, entende-se a interação entre pares como uma dinâmica de partilha e confronto de ideias entre alunos, que pode ocorrer em díades, pequenos grupos ou em grande grupo, durante a exploração conjunta de tarefas matemáticas. Esta conceção aproxima-se da aprendizagem cooperativa, no sentido proposto por Lopes e Silva (2022), ao valorizar a interdependência positiva, o envolvimento ativo dos alunos e a responsabilidade partilhada na construção do conhecimento, permitindo, contudo, que a organização interna das tarefas emerja de forma espontânea entre os membros do grupo.

2.3. Desafios da interação entre pares na aula de Matemática

A importância das interações entre pares para a aprendizagem tem sido amplamente reconhecida por vários autores e evidenciada ao longo deste documento, sobretudo no que respeita ao desenvolvimento de competências matemáticas, cognitivas e sociais. A valorização pedagógica desta dinâmica, nomeadamente na promoção da construção partilhada de conhecimento, da comunicação e do raciocínio matemático, não impede que surjam desafios decorrentes da diversidade dos alunos, das exigências do contexto e da complexidade da própria interação. Tal como referem César et al. (2000), as histórias de vida dos alunos, o seu passado escolar e a interpretação que fazem do contexto influenciam significativamente os seus desempenhos, podendo mesmo bloquear a aprendizagem quando associados a experiências anteriores de insucesso. Os autores salientam a importância de termos em conta estes fatores, que ajudam a compreender a complexidade da implementação desta prática, exigindo uma mediação pedagógica atenta e intencional.

Um dos principais desafios identificados na literatura prende-se com os desequilíbrios que podem ocorrer nas interações entre alunos, seja ao nível das competências matemáticas, seja ao nível da motivação e do envolvimento na tarefa. Quando os alunos se encontram a trabalhar em díades ou pequenos grupos, é frequente que alguns deles adotem uma posição dominante, assumindo as rédeas do trabalho e a tomada de decisões, enquanto outros adotam uma postura mais passiva, limitando-se a seguir orientações (Beebe & Masterson, 2016). Esta dinâmica pode conduzir, por um lado, ao conformismo ou à submissão por parte dos alunos com mais dificuldades ou menor confiança, e, por outro, à perceção de sobrecarga nos alunos mais ativos, que sentem que os colegas não estão a assumir a sua parte da responsabilidade (Lopes & Silva, 2022). Segundo estes autores, quando não regulada, esta dinâmica compromete a interdependência positiva desejável na interação entre pares e pode acentuar desigualdades no acesso ao conhecimento.

Apesar destes riscos, estudos como os de César et al. (1999) mostram que díades assimétricas, isto é, pares em que um dos alunos revela maior domínio ou confiança matemática do que o colega, podem ser produtivas, desde que se criem condições para que todos os alunos participem ativamente na construção de significados. A análise das interações revela que mesmo alunos com menor domínio podem propor estratégias eficazes e transformar a sua relação com a Matemática, desde que o ambiente favoreça a escuta, a valorização das ideias e a negociação de soluções. Cabe, por isso, ao professor um papel central de mediador e regulador destas interações, quer ocorram em pequeno grupo, quer se desenvolvam em momentos de discussão coletiva, clarificando, no âmbito do contrato didático, as regras que orientam estes momentos e as expectativas quanto à participação, à responsabilidade individual e à entreajuda (César, et al., 2000; Ponte, 2005).

Outro dos desafios frequentemente apontados na literatura diz respeito à gestão do tempo em aulas que promovem interações entre pares. Trabalhar em díades ou pequenos grupos exige mais tempo do que o trabalho individual ou expositivo, tanto na exploração das tarefas como na discussão e sistematização (Beebe & Masterson, 2016; Lopes & Silva, 2022; Themeli, 2023). Esta exigência acentua a pressão sobre a planificação, especialmente num contexto em que os professores se veem obrigados a cumprir um conjunto extenso de aprendizagens em tempo limitado (Cunha & Uva, 2017). Além disso, a simultaneidade de interações na sala de aula requer do professor um acompanhamento próximo e contínuo, o que se torna particularmente desafiante quando existem diferenças nos ritmos de trabalho ou dificuldades de comunicação entre alunos. Embora estas práticas favoreçam aprendizagens mais significativas, implicam uma gestão de tempo exigente e podem ser percecionadas como uma ameaça ao cumprimento do que está estipulado nos documentos curriculares em vigor (Themeli, 2023).

As interações entre pares implicam também desafios de natureza relacional e organizacional, uma vez que os alunos não estão preparados para cooperar de forma produtiva e respeitosa. Como referem Isidoro (2008) e Cunha e Uva (2017), cada aluno transporta consigo atitudes individuais, experiências marcantes e aprendizagens quotidianas distintas, que influenciam o modo como se posiciona face ao grupo e à tarefa. Em muitos casos, os alunos não se sentem integrados na turma, revelam insegurança para trabalhar com certos colegas ou manifestam resistência à partilha, num contexto frequentemente marcado por dinâmicas de competição individual (Cunha & Uva, 2017). Estas dificuldades agravam-se quando os alunos apresentam baixos níveis de confiança social ou competências interpessoais limitadas, fatores que, como aponta Themeli (2023), podem ter sido acentuados pela pandemia e resultar numa menor predisposição para interagir, debater ideias ou assumir um papel ativo na aprendizagem. Acrescem ainda os obstáculos de natureza comunicacional. Sendo a linguagem o principal instrumento de mediação na construção de significados e no desenvolvimento das funções cognitivas superiores (Vygotsky, 1978), quando os alunos revelam dificuldades em exprimir os seus raciocínios matemáticos, justificar procedimentos ou compreender as ideias dos colegas, compromete-se a partilha de significados e reduz-se o potencial da interação entre pares para promover aprendizagens significativas.

A par das dificuldades já referidas, importa considerar também os desafios associados às interrupções e distrações que podem ocorrer durante as interações entre pares. Estas situações comprometem a concentração dos alunos e o desenvolvimento das tarefas, exigindo do professor uma intervenção constante para manter o foco e restaurar o clima de cooperação. Segundo Themeli (2023), ambientes de aprendizagem entre pares são particularmente suscetíveis a este tipo de perturbações, o que reforça a complexidade da sua gestão em contexto de sala de aula.

Em suma, embora as interações entre pares representem uma estratégia pedagógica com elevado potencial para promover aprendizagens matemáticas mais significativas, a sua concretização em sala de aula envolve diversos desafios. As dificuldades associadas aos desequilíbrios na participação, à gestão do tempo, às dinâmicas relacionais e comunicacionais, bem como às interrupções e distrações, exigem do professor uma atuação atenta, flexível e contínua. Reconhecer estes desafios permite compreender melhor a complexidade desta prática e a importância de uma planificação cuidada e da adoção de um papel de facilitador e mediador, que favoreça a participação equitativa e a construção conjunta do conhecimento.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Com esta investigação procuro compreender de que forma a interação entre pares contribui para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos em alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Tendo em conta este objetivo, defino duas questões de investigação centrais: (i) De que forma a interação entre pares contribui para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos em alunos do 2.º ciclo do ensino básico?; e (ii) Que desafios emergem da interação entre pares na sala de aula de matemática no contexto da resolução de problemas?.

Este capítulo está organizado em três partes principais. Na primeira apresento as opções metodológicas que fundamentam a investigação, nas quais explico a escolha de uma abordagem qualitativa e a adoção da investigação sobre a prática. A seguir, descrevo as técnicas de recolha de dados utilizadas: observação participante e recolha documental, explicitando a sua adequação aos objetivos do estudo. Na terceira parte, abordo as técnicas de análise de dados, com destaque para a análise de conteúdo, incluindo a definição das categorias que estruturam a interpretação do material empírico.

1. Opções metodológicas

A presente investigação adota uma abordagem qualitativa, uma vez que se pretende compreender, em profundidade, de que forma o trabalho entre pares pode contribuir para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos. Trata-se de um fenómeno que emerge das interações estabelecidas entre os alunos em contexto real de sala de aula e que exige, por isso, uma aproximação investigativa capaz de compreender a complexidade e o dinamismo das práticas vivenciadas pelos alunos. Tal como referem Bogdan e Biklen (1994), na investigação qualitativa "as questões a investigar ... [são] formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural ... . Privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspetiva dos sujeitos da investigação" (p. 16)

Outra característica fundamental da investigação qualitativa, também destacada pelos autores, é o seu carácter descritivo. Os dados são registados com detalhe, procurando compreender não apenas o que acontece, mas de que forma os acontecimentos se desenrolam, considerando os contextos, as ações e os significados atribuídos pelos participantes (Bogdan & Biklen, 1994). No âmbito deste estudo, esta dimensão manifesta-se através da recolha de notas de campo durante as aulas, da observação das interações estabelecidas entre pares, da escuta das verbalizações produzidas durante a resolução de problemas e da análise das produções escritas resultantes das tarefas propostas.

A terceira característica apontada por Bogdan e Biklen (1994) é a valorização do processo, em detrimento dos produtos finais. De acordo com estes autores, o interesse do investigador está na forma como os fenómenos se desenrolam, nas decisões tomadas ao longo da experiência e nas aprendizagens que emergem no decurso da ação. Esta perspetiva revela-se especialmente pertinente no estudo da resolução de problemas matemáticos, já que permite acompanhar o percurso dos alunos: as tentativas, os erros, as reformulações e as interações cooperativas entre pares. Mais do que verificar se chegaram a uma resposta certa, interessa compreender como pensam, que estratégias mobilizam e como evoluem enquanto indivíduos e enquanto grupo.

Em quarto lugar, a investigação qualitativa pauta-se por uma lógica indutiva, ou seja, as interpretações e categorias analíticas vão sendo construídas a partir dos dados recolhidos, e não impostas previamente com base em hipóteses fixas (Bogdan & Biklen, 1994). Esta orientação permite que a análise acompanhe a complexidade e a imprevisibilidade das situações educativas, respeitando os sentidos que emergem da realidade vivida pelos participantes. No presente estudo, esta abordagem traduz-se nas concordâncias e conflitos observados nas interações entre pares, nas estratégias utilizadas pelos alunos e nos discursos que vão produzindo sobre as suas próprias ações e pensamentos. Em vez de procurar confirmar ideias antecipadas, o foco está em compreender o que os dados revelam e como estes podem contribuir para responder às questões de investigação e alcançar o objetivo definido.

Por fim, a investigação qualitativa tem como foco principal a compreensão do significado que os participantes atribuem às suas experiências (Bogdan & Biklen, 1994). Segundo os autores, mais do que descrever ações ou identificar padrões de comportamento, o objetivo é aceder à forma como os sujeitos interpretam aquilo que fazem, dizem e sentem no decorrer do processo investigativo. Neste estudo, essa dimensão torna-se especialmente relevante, uma vez que se pretende compreender como os alunos vivem a experiência de construir conhecimento com os pares, que valor reconhecem dessa prática e de que modo essa vivência se relaciona com a sua forma de encarar a Matemática e os desafios que ela implica.

Complementando esta perspetiva, Coutinho (2014) salienta que a investigação qualitativa parte de uma visão construtivista e interpretativa da realidade, centrada na compreensão dos fenómenos sociais no seu contexto e através do olhar dos participantes. A autora destaca também a importância da postura reflexiva do investigador, da triangulação de fontes e da flexibilidade na aplicação das técnicas de recolha de dados, aspetos que são particularmente relevantes quando se investiga em contexto escolar.

Por seu lado, Flick (2009) reforça a adequação da abordagem qualitativa ao estudo de práticas pedagógicas, sublinhando que esta permite aceder à dimensão relacional, subjetiva e contextual da ação educativa. Este autor considera que as salas de aula são espaços vivos de negociação de significados e que a investigação que nelas se realiza deve ser sensível às vozes e às experiências daqueles que nelas participam.

Deste modo, optar por uma abordagem qualitativa implica reconhecer que a realidade educativa é complexa, construída nas relações que se estabelecem entre os intervenientes e só verdadeiramente compreensível quando observada e interpretada no seu contexto. Entre as possibilidades que esta abordagem contempla, destaca-se a investigação sobre a prática, uma modalidade que decorre em simultâneo com a ação pedagógica e permite ao professor-investigador refletir sistematicamente sobre a sua intervenção, procurando compreendê-la e transformá-la a partir da experiência concreta (Ponte, 2002).

A investigação sobre a prática parte da convicção de que é possível construir conhecimento profissional a partir da análise crítica da ação docente. Como afirma Ponte (2002), trata-se de uma forma de investigar com e na prática, onde a docência e a investigação ocorrem de forma integrada, permitindo compreender os fenómenos educativos no momento em que ocorrem e agir intencionalmente sobre eles com base em evidências. De acordo com o autor, este processo favorece o desenvolvimento de uma postura profissional mais consciente e fundamentada.

Para além de construir conhecimento, este tipo de investigação constitui um caminho para o desenvolvimento profissional dos professores. Segundo o autor supracitado, ao analisar criticamente a forma como ensina, interage com os alunos e responde aos desafios do seu contexto, o professor-investigador reforça a sua identidade profissional e melhora a qualidade da sua prática. Nas palavras de Ponte (2002), “a investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente [sic]” (p. 3).

Na mesma linha, Oliveira e Serrazina (2002) sublinham que investigar sobre a própria ação implica descrever, analisar e interpretar criticamente as decisões pedagógicas tomadas, questionando os pressupostos que as orientam e avaliando os seus efeitos na aprendizagem dos alunos. As mesmas autoras acrescentam que é através deste exercício reflexivo que os professores podem desenvolver uma visão crítica da sua prática e do contexto em que atuam, o que lhes permite questionar crenças e reconstruir conceções sobre o ensino.

Importa ainda referir que a investigação sobre a prática constitui também uma resposta metodológica a problemas concretos que emergem no quotidiano da sala de aula e que não encontram solução imediata na experiência ou na intuição docente. Nestes casos, como salienta Ponte (2002), é necessário recorrer a uma análise mais aprofundada e sistemática. O autor identifica quatro razões principais para que os professores assumam este papel investigativo: (i) fortalecer a sua autonomia profissional; (ii) promover o desenvolvimento individual e institucional; (iii) construir conhecimento coletivo na profissão; e (iv) compreender com maior clareza os problemas educativos. Ao adotar uma atitude crítica e transformadora, o professor-investigador contribui para práticas mais eficazes, intencionais e adequadas ao contexto onde atua.

Neste sentido, a investigação que desenvolvo inscreve-se nesta abordagem, uma vez que assume a forma de uma investigação sobre a prática realizada no âmbito de uma intervenção pedagógica. Enquanto professora-estagiária-investigadora, procuro compreender e transformar a minha própria prática educativa, refletindo de forma crítica sobre as interações entre alunos e as dinâmicas que emergem do trabalho entre pares na resolução de problemas matemáticos.

2. Técnicas de recolha de dados

Nesta investigação, a recolha de dados assenta em princípios éticos fundamentais, nomeadamente o respeito pela dignidade e pelos direitos dos participantes. Garante-se o anonimato dos alunos, substituindo os seus nomes durante a análise e na apresentação dos dados. A participação decorre de forma voluntária e todos os envolvidos (alunos, encarregados de educação, professora cooperante e direção da escola) foram previamente informados sobre os objetivos e os procedimentos da investigação. A utilização dos dados para efeitos de análise e investigação apenas ocorreu após a obtenção de autorizações formais (ver Anexo A), respeitando as orientações éticas para a investigação com crianças e jovens (Shaw et al., 2011). Ao longo de todo o processo, procurei assegurar um ambiente de confiança e segurança, no qual os alunos se sintam respeitados e livres para participar sem receios.

De forma a compreender a complexidade do fenómeno investigado adota-se uma estratégia de recolha múltipla de dados, compatível com a natureza interpretativa e construtivista da abordagem qualitativa. Como defende Coutinho (2014), a investigação em educação beneficia de uma abordagem metodológica complementar, em vez de uma oposição rígida entre métodos. Esta visão reforça a pertinência de articular diferentes técnicas de recolha de dados, de forma a enriquecer e validar múltiplas perspetivas sobre o fenómeno em estudo.

Neste sentido, são vários os autores que reconhecem a pertinência da triangulação metodológica, entendida como a combinação de diferentes fontes de dados ou perspetivas analíticas, com o objetivo de aprofundar a compreensão dos fenómenos e aumentar a credibilidade dos resultados (Denzin & Lincoln, s.d.; Flick, 2009; Coutinho, 2014). Com base nestes contributos, entendo que esta opção metodológica responde à convicção de que a realidade educativa é complexa e multifacetada, exigindo instrumentos sensíveis à diversidade de vozes, interações e significados que a constituem.

Considerando os pressupostos teóricos e metodológicos apresentados, a seguir descrevo as técnicas de recolha de dados utilizadas no presente estudo, bem como a sua adequação aos objetivos definidos. A seleção dessas técnicas decorre da intenção de compreender, de forma aprofundada e contextualizada, as práticas, interações e significados construídos pelos alunos durante o trabalho entre pares na resolução de problemas matemáticos. Para cada técnica, apresenta-se a sua fundamentação teórica, o modo como é operacionalizada no estudo e o contributo específico que oferece para a compreensão do fenómeno investigado.

2.1. Observação participante

A observação participante é uma das técnicas centrais da investigação qualitativa, especialmente relevante quando se pretende compreender os fenómenos no seu contexto natural e os significados que lhes são atribuídos pelos participantes. Tal como referem Bogdan e Biklen (1994), observar implica estar presente onde a ação ocorre, acompanhar os acontecimentos à medida que se desenrolam e recolher dados de forma sistemática e contextualizada. Quivy e Campenhoudt (1998) caracterizam esta técnica pela inclusão do investigador no campo, permitindo-lhe assumir simultaneamente os papéis de participante e observador, o que favorece uma compreensão mais rica e situada da realidade estudada. Segundo os mesmos autores, a observação participante "consiste em estudar um grupo ou uma comunidade durante um período relativamente longo, participando na vida colectiva [sic]. O investigador estuda então os seus modos de vida, de dentro e pormenorizadamente, esforçando-se por perturbá-los o menos possível" (p. 79).

Afonso (2014) reforça o valor desta técnica, sublinhando que permite recolher informação direta, não mediada pelas opiniões dos sujeitos, o que a torna particularmente fidedigna. O autor distingue entre observação estruturada, baseada em categorias e instrumentos previamente definidos, e observação não estruturada, marcada por uma maior abertura à realidade, sem categorias rígidas que limitem o olhar do investigador.

No âmbito deste estudo, realizo uma observação participante que conjuga estas duas dimensões. Por um lado, utilizei um instrumento estruturado de recolha de dados, mais concretamente uma grelha de observação (ver Anexo B), construída com base no objetivo da investigação e nas dimensões que considero pertinentes para analisar o trabalho entre pares e os processos de resolução de problemas. Esta grelha permitiu-me manter o foco em aspetos-chave e sistematizar a recolha de dados de forma consistente ao longo das aulas.

Por outro lado, complementei esta abordagem com notas de campo livres, registadas durante e após as aulas. Estas notas incluem descrições de comportamentos, verbalizações, atitudes e acontecimentos significativos que não são comtemplados pelo registo estruturado. Tal como referem Bogdan e Biklen (1994), todas as anotações produzidas neste tipo de investigação podem ser consideradas notas de campo, sendo algumas de natureza descritiva e outras de carácter mais reflexivo. Neste caso, as notas são maioritariamente descritivas, embora incluam, por vezes, observações interpretativas, comentários sobre dificuldades sentidas ou aspetos que merecem atenção futura.

Enquanto professora-estagiária, estou integrada na dinâmica da turma, o que me permite acompanhar de forma próxima e contínua as interações entre os alunos, observar as estratégias que mobilizam na realização das tarefas e compreender as dinâmicas cooperativas que emergem ao longo do trabalho entre pares. Este posicionamento confere à minha observação o carácter participativo, permitindo aceder a aspetos da realidade que poderiam passar despercebidos a um olhar externo ou distante.

Face à impossibilidade de acompanhar em detalhe todos os pares em simultâneo, recorri ainda a gravações áudio para registar as interações de três pares de alunos, selecionados intencionalmente por mostrarem uma interação verbal rica, partilha de procedimentos e negociação de estratégias. Por estas razões, são considerados bons informantes no contexto deste estudo. Estas gravações permitem-me analisar com maior profundidade os processos de construção conjunta de conhecimento. Para além disso, as discussões coletivas em grande grupo, realizadas após cada tarefa, também são gravadas, fornecendo dados relevantes sobre a forma como os alunos comunicam, argumentam e validam as suas estratégias perante os colegas e o professor.

Assim, esta técnica permite-me recolher informação diversificada, situada e coerente com a abordagem qualitativa adotada. Creio que a articulação entre observação participante, registos escritos e áudio e um instrumento estruturado se revela particularmente adequada para acompanhar o desenrolar das interações entre os pares e aceder aos processos vividos no contexto da sala de aula, em articulação com os objetivos da investigação.

2.2. Recolha documental

A recolha documental é uma das técnicas que integro nesta investigação qualitativa, sendo particularmente útil quando se pretende aceder a dados produzidos no contexto da ação educativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994), os materiais escritos pelos próprios participantes, como composições, cartas, diários ou outros registos pessoais, podem ser utilizados como dados em estudos qualitativos, pois revelam as formas como os sujeitos pensam e interpretam a sua experiência. Na mesma linha, Afonso (2014) refere que os documentos podem ser classificados como oficiais, públicos ou privados, incluindo-se neste último grupo os documentos pessoais, como os que recolho neste estudo. Já Quivy e Campenhoudt (1998) salientam que a recolha de documentos de natureza textual, quando adequadamente contextualizada, constitui um verdadeiro método de investigação em ciências sociais.

No âmbito da presente investigação, a recolha documental incide sobre as resoluções escritas das tarefas matemáticas realizadas pelos alunos durante a intervenção pedagógica. Estes documentos foram produzidos em sala de aula, no decorrer das tarefas propostas, e refletem as estratégias utilizadas, as decisões tomadas, as reformulações realizadas e a forma como os alunos organizaram o seu pensamento matemático. As produções foram recolhidas no final de cada aula e digitalizadas, de modo a garantir a preservação dos registos originais e a sua posterior sistematização e consulta durante a fase de análise.

Esta técnica permite-me aceder a dados registados diretamente pelos participantes no momento da ação, o que a torna particularmente valiosa para compreender os significados que os alunos atribuem às tarefas e às suas próprias resoluções. Além disso, contribui para a diversificação das fontes de dados, valorizada na investigação qualitativa, e permite cruzar os dados escritos com os obtidos através da observação participante e das gravações áudio, favorecendo uma visão mais completa e contextualizada do fenómeno em estudo.

3. Técnica de análise de dados

A análise dos dados recolhidos nesta investigação é conduzida através da análise de conteúdo, entendida como um conjunto de técnicas sistemáticas e objetivas de tratamento de comunicações, com vista à inferência de conhecimentos sobre as condições de produção ou de receção das mensagens (Bardin, 2016). De acordo com a autora, esta abordagem metodológica permite ultrapassar a leitura imediata dos dados, adotando uma postura crítica e reflexiva face ao material empírico.

Neste estudo, a análise incide sobre as grelhas de observação, as notas de campo e transcrições dos áudios da observação participante e as produções escritas dos alunos. A diversidade destas fontes possibilita uma triangulação metodológica, o que contribui para a fiabilidade da interpretação dos resultados e a construção de uma compreensão mais aprofundada do fenómeno estudado.

O processo analítico estrutura-se em três fases, conforme proposto por Bardin (2016):

- A fase de pré-análise – "esta primeira fase possui três missões: a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final" (p. 125).
- A fase de exploração do material – trata-se da "aplicação sistemática das decisões tomadas [na fase de pré-análise]. ... Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas" (p. 131).
- A fase de tratamento dos resultados, inferência e interpretação – "os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos … e válidos. … O analista … pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos – ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas" (p. 131).

Concluída a definição das fases do processo analítico, e tendo presente o objetivo e as questões da investigação, definem-se as categorias de análise, construídas a partir da análise da literatura, garantindo coerência conceptual e alinhamento com os referenciais teóricos que sustentam o estudo. Esta organização permite sistematizar os dados de forma rigorosa, mantendo simultaneamente abertura à emergência de categorias indutivas. As categorias distribuem-se em dois grandes grupos: (i) categorias associadas ao desenvolvimento e aprendizagem dos alunos e (ii) categorias associadas aos desafios da interação entre pares. A Tabela 1 apresenta o primeiro grupo de categorias, enquanto a Tabela 2 reúne o segundo. Ambas sintetizam a informação relevante para a análise de conteúdo, articulando cada categoria com a definição operacional, os autores de referência e os principais indicadores utilizados no processo de codificação.

Tabela 1

Categorias associadas ao desenvolvimento e aprendizagem dos alunos

Categoria de análise	Definição operacional	Indicadores observáveis	Referências teóricas
Comunicação e argumentação matemática	Capacidade dos alunos para explicitar, justificar e discutir raciocínios matemáticos, recorrendo à linguagem oral, escrita e simbólica.	- Explica ao colega o procedimento utilizado; - Justifica escolhas ou soluções com argumentos matemáticos; - Reformula ou clarifica explicações após ouvir o outro; - Usa linguagem e representações matemáticas adequadas.	Vygotsky (1978); Serrazina (2018); Boavida et al. (2008); NCTM (2000)
Construção partilhada do conhecimento e descentração cognitiva	Processo de elaboração e reconstrução de significados matemáticos a partir do confronto e negociação de perspetivas entre pares.	- Compara o próprio raciocínio com o do colega; - Muda de estratégia após discussão; - Integra ideias do outro na solução; - Demonstra compreensão de diferentes pontos de vista.	César et al. (1999, 2000); Dillenbourg (1999)
Desenvolvimento de competências matemáticas específicas	Aprendizagens cognitivas potenciadas pela interação: interpretação de enunciados, formulação de estratégias e raciocínio lógico.	- Identifica dados e relações relevantes; - Propõe estratégias adequadas; - Liga representações (tabelas, esquemas, diagramas); - Constrói argumentos matemáticos consistentes.	Boavida & Menezes (2012); Cai & Lester (2010); Canavarro et al. (2021)

Categoria de análise	Definição operacional	Indicadores observáveis	Referências teóricas
Desenvolvimento metacognitivo e autorregulatório	Capacidade para monitorizar, avaliar e ajustar o próprio pensamento e estratégias durante a resolução de problemas.	- Reconhece erros e reformula procedimentos; - Questiona a eficácia da estratégia usada; - Persiste perante dificuldades; - Explicita o raciocínio ("pensei que…, mas percebi que…").	Schoenfeld (1992); NCTM (2000); Cai & Lester (2010)
Atitudes e disposições face à Matemática	Transformações nas atitudes e crenças relacionadas com confiança, cooperação e interesse na disciplina.	- Mostra entusiasmo e curiosidade; - Demonstra confiança crescente; - Valoriza o trabalho conjunto; - Mantém empenho perante erros; - Demonstra empatia, abertura e respeito pelo colega.	Schoenfeld (1992); César et al. (1999, 2000); NCTM (2000)

Tabela 2

Categorias associadas aos desafios da interação entre pares

Categoria de análise	Definição operacional	Indicadores observáveis	Referências teóricas
Desequilíbrios de participação	Diferenças no grau de envolvimento e influência que afetam a construção conjunta do conhecimento.	- Um aluno domina a discussão; - Outro aluno participa pouco; - Intervenções ignoradas ou interrompidas; - Falta de corresponsabilização.	Beebe & Masterson (2016); Lopes & Silva (2022); César et al. (1999)
Dificuldades comunicacionais e sociocognitivas	Obstáculos linguísticos ou cognitivos que limitam a partilha e compreensão dos raciocínios.	- Linguagem ambígua ou confusa; - Falhas de compreensão; - Dificuldade em verbalizar raciocínios; - Ausência de entendimento mútuo.	Sousa & Mendes (2017); Costa & Fonseca (2009); Vygotsky (1978); Themeli (2023)
Fatores emocionais e relacionais	Emoções e relações interpessoais que influenciam o envolvimento	- Insegurança, receio de errar; - Evita participar; - Frustração ou entusiasmo visível;	César et al. (2000); Isidoro (2008); Cunha & Uva (2017);

Categoria de análise	Definição operacional	Indicadores observáveis	Referências teóricas
	e a qualidade da interação.	- Resistência a certos colegas.	Themeli (2023)
Gestão do tempo durante o trabalho em pares	Dificuldades em organizar o tempo, manter ritmo ou concluir etapas autonomamente.	- Demasiado tempo numa fase; - Falta de progressão; - Dependência constante do professor; - Trabalho incompleto.	Beebe & Masterson (2016); Lopes & Silva (2022); Themeli (2023)
Dificuldades de concentração e manutenção da atenção	Incapacidade de manter o foco na tarefa, prejudicando o raciocínio e a cooperação.	- Conversas paralelas; - Distrações prolongadas; - Não retoma a tarefa sozinho; - Quebras de raciocínio.	Themeli (2023)

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo organiza-se em duas secções: na primeira, é contextualizado o estudo, com a apresentação do meio educativo e dos participantes; na segunda, apresenta-se e fundamenta-se a intervenção pedagógica, explicitando os objetivos definidos, a sequência das tarefas propostas e as opções metodológicas adotadas.

1. Apresentação do contexto e dos participantes

Nesta secção é apresentada a caracterização do contexto educativo no qual a investigação foi desenvolvida, abordando as características gerais do ambiente escolar, assim como a organização e a dinâmica da sala de aula. Procede-se, igualmente, à descrição dos participantes envolvidos neste estudo.

1.1. Caracterização do contexto educativo

O projeto de investigação foi desenvolvido em contexto de estágio, no âmbito da unidade curricular Estágio no 1.º e no 2.º Ciclos, pertencente ao segundo ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, com a duração de sete semanas. A intervenção pedagógica decorreu numa turma de 6.º ano de uma escola pública situada no concelho de Almada, distrito de Setúbal. A instituição localiza-se em meio urbano, com bons acessos e transportes públicos (Projeto Educativo, 2020). Dispõe de três pavilhões interligados, um pavilhão polidesportivo e áreas de recreio cimentadas, incluindo um campo de futebol. Os espaços interiores são amplos e incluem biblioteca, refeitório, bar e zonas de leitura e convívio. A escola encontra-se equipada com materiais manipuláveis para o ensino da Matemática.

No âmbito da oferta educativa, a escola promove diversas iniciativas curriculares e extracurriculares centradas no sucesso educativo, na inclusão e na participação dos alunos (Projeto Educativo, 2020; Projeto Cultural do Agrupamento, s.d.). O compromisso com uma educação de qualidade é reforçado pelo Projeto Curricular e Organizacional do Agrupamento (2024), alinhado com as necessidades da comunidade escolar e os desafios contemporâneos.

As salas de aula são equipadas com mesas duplas, cadeiras, quadro branco, computador, armário, quadros de cortiça e projetor. Este projeto foi desenvolvido em duas salas diferentes: a sala de referência da turma, com aproximadamente 45 m², organizada segundo o modelo tradicional, e a sala de Expressões que tem o dobro da área e cuja organização favorece o trabalho cooperativo. Ambas as salas dispõem de iluminação natural, complementada por luz artificial e a disposição das mesas pode ser ajustada conforme as necessidades da dinâmica de aula, devendo ser restituída à configuração original ao final da mesma.

1.2. Caracterização dos participantes

A turma onde decorreu a intervenção é constituída por 22 alunos do 6.º ano de escolaridade, 13 do género feminino e 9 do género masculino, com idades compreendidas entre os 10 e os 13 anos, todos de nacionalidade portuguesa.

De acordo com a professora cooperante, quatro alunos beneficiam de medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão, previstas no Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, abrangendo medidas seletivas e adicionais. Dois desses alunos registam retenções no seu percurso escolar. De entre os quatro alunos com estas medidas, um está sinalizado para tutoria devido a dificuldades na codificação da escrita, descodificação da leitura e raciocínio lógico, além de apresentar uma atitude apática perante as aprendizagens curriculares. Dois alunos usufruem de apoio tutorial específico: um devido a disgrafia, que afeta a escrita e a organização do pensamento, e outro devido a dislexia, com impacto na leitura e na produção escrita. O quarto aluno, que apresenta um quadro de perturbação do espetro do autismo, é o único a beneficiar de medidas adicionais, frequentando oficinas pedagógicas, apoio especializado e horário parcial com a turma, não tendo participado na investigação por estar ausente durante as aulas em que esta decorreu.

Relativamente ao contexto socioeconómico, este é diversificado. De acordo com a relação da turma fornecida pela professora cooperante, seis alunos beneficiam de Apoio Social Escolar, mas, segundo a mesma não existem disparidades significativas que comprometam as aprendizagens e as oportunidades educativas dos alunos.

A interação entre os alunos é em geral positiva, embora haja desafios na gestão da atenção, motivação e autoconfiança, especialmente entre os alunos com dificuldades de aprendizagem. Durante as apresentações, muitos alunos expressaram uma preferência pelas Ciências em relação à Matemática, alguns evidenciando mesmo desinteresse por esta disciplina.

Segundo a professora cooperante, a participação dos alunos nas aulas varia consoante os conteúdos e a dinâmica da aula. Alguns revelam-se bastante ativos e envolvidos, enquanto outros mostram maior passividade e dificuldade de concentração, necessitando de orientação mais próxima.

De acordo com a cooperante, esta adota uma abordagem flexível e centrada no aluno, iniciando as aulas com um diálogo sobre o tema e revendo os conhecimentos prévios. Alterna entre métodos expositivos e atividades em grupo, estimulando o trabalho individual ou a pares para sistematização. Valoriza a comunicação matemática e promove um ambiente inclusivo onde as opiniões dos alunos são respeitadas. Ajusta ainda as suas práticas para apoiar alunos com dificuldades de aprendizagem, trabalhando em colaboração com a equipa de apoio especializado.

No que respeita às competências matemáticas, a professora refere que a resolução de problemas é trabalhada de forma pontual, após os conteúdos, não constituindo uma prática sistemática. Em consequência, muitos alunos revelam dificuldades em interpretar enunciados, identificar o que é solicitado e selecionar estratégias adequadas, o que, aliado à insegurança e baixa autoconfiança, originam a atitudes de desistência perante tarefas de maior exigência cognitiva. Apesar disso, a cooperante refere que alguns alunos acabam por se surpreender com os seus próprios progressos quando devidamente apoiados, revelando potencial a desenvolver.

O trabalho em pares assume, assim, particular relevância neste contexto. Segundo a professora cooperante, a turma já tem experiência nesta modalidade, tanto na sistematização de conteúdos como em algumas tarefas de resolução de problemas. No entanto, persistem dificuldades como a falta de confiança nas próprias estratégias, a necessidade de validação constante ou a resistência inicial a cooperar com determinados colegas, exigindo uma gestão cuidadosa das díades. Ainda assim, a maioria dos alunos acaba por se envolver ativamente e mostrar maior confiança quando trabalha com um par. A discussão de estratégias é incentivada pela professora, tanto em pequenos grupos como em momentos de partilha coletivos.

Deste modo, esta turma constitui um contexto educativo adequado para investigar o impacto da interação entre pares no desenvolvimento de competências na resolução de tarefas com situações problemáticas. As dificuldades evidentes e a experiência prévia com o trabalho colaborativo facilitam a implementação do projeto, permitindo explorar o potencial desta metodologia como estratégia de desenvolvimento de competências matemáticas, com foco na análise das interações e das aprendizagens emergentes.

2. Apresentação e fundamentação da intervenção pedagógica proposta

Nesta secção é apresentada e fundamentada a intervenção pedagógica desenvolvida no âmbito deste estudo, composta por três tarefas matemáticas sequenciais. Primeiramente, descrevem-se as tarefas propostas, os respetivos objetivos de aprendizagem, a sua intencionalidade e enquadramento. Seguidamente, caracteriza-se a forma como estas tarefas foram exploradas em contexto de sala de aula, à luz das opções metodológicas que orientaram a prática docente.

2.1. As tarefas

Nesta intervenção pedagógica foram implementadas três tarefas matemáticas sequenciais numa turma do 6.º ano, entre os dias 24 de fevereiro e 12 de março, em quatro aulas com diferentes durações. Concebidas com base nas AE de Matemática (2021), as tarefas foram planeadas para promover a resolução de problemas, o pensamento algébrico e a capacidade de generalizar regularidades e de mobilizar estratégias em contextos diversos e significativos.

À luz da conceção de problema matemático adotada nesta investigação, cada tarefa foi pensada de forma a constituir um desafio cognitivo adequado ao nível dos alunos, propondo situações que apelam à experimentação, à formulação de conjeturas e à justificação das estratégias. A estrutura das tarefas, organizada em questões de complexidade progressiva, tem como objetivo favorecer a mobilização de conhecimentos prévios, a consolidação de novos conceitos e a construção de aprendizagens significativas.

Ao longo do 1.º ciclo e do 5.º ano, os alunos contactaram com tarefas que envolviam a identificação de regularidades em sequências de repetição e de crescimento, o uso de tabelas de correspondência e representações visuais, bem como a formulação de conjeturas. As tarefas desta intervenção retomam e aprofundam essas experiências, funcionando como ponto de partida para a concretização de aprendizagens previstas nas AE do 6.º ano (2021), em particular no tema da Álgebra. Procurou-se, assim, que os alunos estabelecessem relações em sequências, representassem regularidades através de expressões algébricas e aprofundassem a compreensão da proporcionalidade direta e do raciocínio multiplicativo. A Tabela 3 resume a organização e calendarização das três tarefas desenvolvidas na intervenção pedagógica.

Tabela 3

Quadro-Síntese das Tarefas da Intervenção

Tarefa	Nome da tarefa	Modalidade de trabalho	N.º de aulas	Tempo total	Datas	Anexo
1	O Concurso “Acerta ou Perde”	Trabalho a pares e discussão final coletiva	2	150 min. (50 + 100)	24 e 26 de fevereiro	Anexo C
2	Os Tijolos		1	100 min.	5 de março	Anexo D
3	O Folar de Ovos		1	100 min.	12 de março	Anexo F

Nota. A Tabela 3 apresenta o quadro-síntese das três tarefas implementadas durante a intervenção pedagógica com uma turma do 6.º ano. min. = minutos; N.º = número. A tarefa 1 e a tarefa 3 foram adaptadas de Faneco e Valério (2023), e a tarefa 2 foi adaptada de Pedro (2013).

A primeira tarefa, O Concurso “Acerta ou Perde”, planeada para duas aulas, tem como objetivo aprofundar o reconhecimento de regularidades em sequências numéricas crescentes e decrescentes, resultantes de situações de duplicação ou divisão sucessiva. A segunda tarefa, Os Tijolos, possibilita a transição de representações pictóricas para sequências numéricas de crescimento, explora a relação entre a ordem e o número de elementos e prepara os alunos para a compreensão da proporcionalidade direta. Por fim, a terceira tarefa, O Folar de Ovos, insere os alunos num contexto do quotidiano e significativo e permite a consolidação da noção de proporcionalidade direta e a exploração de razões e proporções em situações financeiras e culinárias.

Nos pontos seguintes, cada uma das tarefas é apresentada de forma detalhada, incluindo a sua planificação, os objetivos de aprendizagem, o enunciado, a fundamentação curricular, bem como as dificuldades antecipadas e as estratégias previstas para apoiar os alunos.

2.1.1. Primeira tarefa – O Concurso “Acerta ou Perde”

A primeira tarefa da intervenção pedagógica, designada O Concurso “Acerta ou Perde”, foi planificada para duas aulas (no total de 150 minutos), nos dias 24 e 26 de fevereiro, conforme detalhado no Anexo C, que inclui a planificação da tarefa e o enunciado adaptado. Concebida como uma tarefa de exploração inicial, visa promover a identificação de regularidades em sequências numéricas crescentes e decrescentes, resultantes de situações de duplicação e divisão sucessiva. A proposta parte de uma tarefa retirada do manual Missão 6 – Volume II Matemática – 6.º ano (Faneco & Valério, 2023), posteriormente adaptada de forma a adequar-se ao contexto da turma e aos propósitos da intervenção.

A tarefa explora uma sequência de operações matemáticas no contexto de um concurso fictício com 10 perguntas de cultura geral. Cada concorrente começa com 50 euros e, a cada resposta certa, duplica o valor acumulado; a cada resposta errada, perde metade do valor que possui. Os alunos são desafiados a analisar a evolução do montante consoante diferentes combinações de respostas, identificando os padrões de crescimento e de decrescimento associados.

O enunciado da tarefa encontra-se estruturado em três blocos de questões organizados de forma progressiva. O primeiro bloco (questões 1 e 2) incide sobre os casos-limite, nos quais todas as respostas estão corretas ou incorretas, permitindo reconhecer as regularidades associadas a sequências exclusivamente crescentes ou decrescentes. O segundo bloco (questão 3) introduz uma situação mista, com cinco respostas certas e cinco erradas, que desafia os alunos a explorar a influência da ordem das respostas no resultado final. Por fim, o terceiro bloco (questões 4 e 5) orienta os alunos para a generalização, propondo a formulação de leis de formação em linguagem natural e a construção de expressões algébricas. Este encadeamento progressivo favorece o desenvolvimento do pensamento lógico, da experimentação e da comunicação matemática, recorrendo a diferentes formas de representação.

Esta tarefa assenta em objetivos de aprendizagem presentes nas AE de Matemática do 6.º ano (2021), no tema da Álgebra, particularmente no tópico das regularidades em sequências. De uma forma geral, pretende-se que os alunos reconheçam padrões em sequências numéricas decrescentes, identifiquem relações entre os termos e formulem conjeturas sobre possíveis leis de formação. Para além disso, pretende-se que sejam capazes de expressar essas regularidades em linguagem natural ou simbólica, bem como a utilizar e analisar criticamente diferentes estratégias na resolução dos problemas propostos.

De forma mais específica, os blocos de questões da tarefa foram organizados de modo a potenciar progressivamente estas aprendizagens:

- Bloco 1 (questões 1 e 2): identificar padrões em sequências numéricas simples, exclusivamente crescentes ou decrescentes, reconhecendo a estrutura multiplicativa ou divisiva subjacente e antecipando os termos seguintes com base nessa regularidade;

- Bloco 2 (questão 3): testar conjeturas sobre o impacto da ordem das respostas corretas e incorretas no valor final, analisando criticamente diferentes configurações;
- Bloco 3 (questões 4 e 5): formular leis de formação em linguagem natural e simbólica, construindo expressões algébricas que representem generalizações dos padrões identificados.

A planificação da tarefa teve em conta os conhecimentos matemáticos previamente desenvolvidos pelos alunos, essenciais para que pudessem compreender a situação proposta e avançar na sua resolução. Ao longo do 1.º Ciclo, os alunos desenvolvem a capacidade de identificar e descrever padrões em sequências de repetição e de crescimento, recorrendo a diversas representações como tabelas ou esquemas. Adquirem também competências fundamentais no cálculo do dobro e da metade de um número, através das operações de multiplicação e divisão. Estas aprendizagens são aprofundadas no Ciclo seguinte, com o desenvolvimento do cálculo mental e escrito, a compreensão de expressões numéricas com múltiplas operações, o uso de potências de base 10 e a multiplicação de números naturais por frações. No 5.º ano, os alunos iniciam ainda a identificação e descrição de leis de formação, em linguagem natural, pictórica e simbólica, criando e completando sequências com base em regras dadas. Estes conhecimentos permitem interpretar a evolução do valor acumulado na tarefa, reconhecer regularidades e justificar estratégias de resolução. Assim, a tarefa foi planificada como uma extensão natural dessas aprendizagens, permitindo consolidar, aprofundar e expandir os conhecimentos previamente adquiridos.

Anteciparam-se diversas dificuldades que poderiam emergir durante a exploração da tarefa. Uma delas foi o cálculo progressivo dos valores, sobretudo em sequências longas. Para apoiar os alunos, sugeriu-se o uso de tabelas ou diagramas e a verificação mútua entre pares. Também se previram dificuldades na divisão de valores muito pequenos, que poderiam originar números inferiores a um cêntimo, recomendando-se, neste caso, a aproximação às centésimas dada a natureza monetária do contexto.

Outra dificuldade esperada dizia respeito ao reconhecimento da regularidade associada às respostas corretas, em particular à estrutura multiplicativa baseada em potências de base 2. Para facilitar esta perceção, promoveu-se a escrita sistemática dos valores obtidos e a observação dos padrões emergentes. Paralelamente, anteciparam-se dificuldades na formulação de leis de formação e de expressões geradoras. Neste sentido, foi retomado o exemplo de uma sequência pictórica já explorada anteriormente, com o objetivo de reativar conhecimentos anteriores.

A possível influência da ordem das respostas no valor final foi igualmente identificada como um potencial obstáculo. Para o ultrapassar, propôs-se a análise comparativa de diferentes cenários, como acertar as cinco primeiras perguntas versus acertar as cinco últimas, e a verificação dos valores acumulados após cada etapa. Por fim, foi ainda antecipada a dificuldade de representar o processo global através de uma expressão algébrica. Como estratégia de apoio, incentivou-se a descrição do efeito de cada operação (multiplicação e divisão por 2) e a construção de expressões que representassem generalizações válidas.

2.1.2. Segunda tarefa – Os Tijolos

A segunda tarefa da intervenção pedagógica, intitulada Os Tijolos, foi planificada e desenvolvida numa aula de 100 minutos, no dia 5 de março, conforme detalhado no Anexo D. Esta proposta foi inspirada numa tarefa apresentada por Pedro (2013), tendo sido também ela ajustada ao contexto da turma e aos objetivos específicos da intervenção. Para além de dar continuidade ao trabalho de identificação e generalização de regularidades iniciado na tarefa anterior, esta proposta foi pensada como um ponto de transição para a abordagem da proporcionalidade direta, temática a ser explorada nas aulas subsequentes.

A tarefa explora uma sequência de figuras compostas por tijolos, sendo que cada tijolo contém oito buracos. A sequência inicia-se com uma figura com um tijolo, seguida de uma figura com três e outra com cinco, aumentando de forma regular. O enunciado da tarefa está organizado em dois grandes conjuntos de questões. O primeiro grupo (questão 1) convida os alunos a analisar a sequência, identificando padrões e antecipando novos termos. Inicialmente (alínea a), devem completar uma tabela até ao 6.º termo, registando o número de tijolos e o número total de buracos em cada figura. Seguem-se duas questões de antecipação e verificação (alíneas b e c): a primeira desafia os alunos a prever o número de tijolos e de buracos numa figura de ordem elevada; a segunda, a determinar se um dado número de tijolos corresponde a algum termo da sequência. O segundo grupo (questão 2) propõe a generalização das regularidades identificadas, solicitando a formulação de expressões algébricas que permitam determinar, para qualquer figura, o número de tijolos (alínea a) e o número total de buracos (alínea b).

Esta tarefa, à semelhança da anterior, também assenta em objetivos de aprendizagem presentes nas AE de Matemática do 6.º ano (2021), no domínio da

Álgebra, nomeadamente no tópico das regularidades em sequências. De forma geral, pretende-se que os alunos reconheçam relações entre os termos de uma sequência, formulem e testem conjeturas quanto à sua lei de formação, e representem essas regularidades através de expressões algébricas. Valoriza-se a mobilização de diferentes formas de representação, a explicitação dos procedimentos e a comunicação matemática.

De forma mais específica, os dois conjuntos de questões que compõem a tarefa foram organizados de modo a promover, progressivamente, estas aprendizagens:

- Questão 1a: reconhecer e descrever regularidades entre termos consecutivos e respetivas ordens, organizando a informação numa tabela;
- Questões 1b e 1c: prever termos de ordem superior e verificar se determinado número pertence à sequência, formulando e testando conjeturas com base nas regularidades identificadas;
- Questão 2 (alíneas a e b): generalizar as relações observadas através da construção de expressões algébricas que representem leis de formação em linguagem simbólica.

A planificação desta tarefa teve em conta os conhecimentos matemáticos já trabalhados e descritos na tarefa anterior, mas também outras aprendizagens específicas necessárias para a resolução desta proposta. Neste caso, destaca-se a familiaridade dos alunos com representações pictóricas e a sua capacidade de extrair e organizar informação a partir de figuras. É igualmente relevante a leitura e interpretação de tabelas e a articulação entre diferentes formas de representação (pictórica, numérica e algébrica).

Identificaram-se, antecipadamente, potenciais dificuldades associadas à exploração da tarefa. Essas dificuldades incluem o reconhecimento das regularidades na sequência de figuras, a identificação de uma estratégia para determinar diretamente o número de tijolos em figuras de ordem elevada, a transição da regularidade observada para uma expressão algébrica, bem como a utilização dessa expressão na determinação do número de buracos e o reconhecimento da relação constante entre os dois elementos. Para cada um destes desafios, foram pensadas questões que, sem fornecer diretamente as respostas, ajudassem os alunos a observar as diferenças constantes entre figuras, relacionar o número da figura com o número de tijolos, compreender a ordem como variável determinante na construção da expressão algébrica e, por fim, perceber que o número de buracos depende diretamente do número de tijolos, facilitando assim a construção de uma segunda expressão com base na primeira.

2.1.3. Terceira tarefa – O Folar de Ovos

A tarefa O Folar de Ovos foi a terceira proposta da intervenção pedagógica e foi desenvolvida ao longo de uma aula de 100 minutos, realizada a 12 de março, conforme detalhado no Anexo F. A proposta baseia-se numa tarefa presente no manual Missão 6 – Volume II Matemática – 6.º ano (Faneco & Valério, 2023), tendo sido modificada de forma a responder às características dos alunos e aos objetivos pedagógicos definidos para esta intervenção. Apesar de se tratar de uma adaptação, o manual não foi utilizado como suporte em sala de aula, tendo o enunciado sido impresso e distribuído por cada aluno, de modo a garantir a autonomia no acompanhamento da tarefa. Surgindo na continuidade das tarefas anteriores, esta tarefa introduz o estudo da proporcionalidade direta, utilizando um contexto próximo e significativo para os alunos.

A tarefa desenvolve-se num contexto do quotidiano familiar relacionada com a confeção de uma receita tradicional da época pascal. As personagens principais da tarefa decidem preparar seis folares para oferecer aos seus familiares, mas, ao consultarem o livro de receitas da família, constatam que as quantidades indicadas correspondem apenas à confeção de dois folares. No decurso da tarefa, surgem outros desafios associados à preparação da receita, como a necessidade de adquirir fermento numa loja que disponibiliza várias embalagens com quantidade e preços distintos. Já no momento da confeção, confrontam-se com a necessidade de garantir que todos os folares sejam preparados de forma equitativa.

A partir desta narrativa, os alunos são desafiados a mobilizar raciocínios matemáticos associados à proporcionalidade direta. O enunciado da tarefa está organizado em três conjuntos de questões. O primeiro (questões 1 e 2) incide sobre a análise da relação entre grandezas no contexto de uma receita, a partir da qual os alunos devem completar uma tabela com as quantidades de ingredientes necessárias para seis folares, a partir dos valores fornecidos para dois, e explicitar a relação proporcional entre estes valores apresentados. O segundo conjunto (questão 3, alíneas a e b) propõe a análise de uma tabela de preços com diferentes embalagens de fermento, levando os alunos a verificar a existência (ou não) de proporcionalidade entre o peso e o preço e, posteriormente, a determinar qual a opção mais económica, tendo em conta a quantidade de fermento necessária. No terceiro conjunto (questão 4) é solicitado o cálculo das quantidades de cada ingrediente para um único folar a partir dos dados iniciais, promovendo a aplicação do raciocínio proporcional em sentido inverso ao inicialmente proposto.

Esta tarefa inscreve-se nos objetivos de aprendizagem definidos nas AE de Matemática do 6.º ano (2021), no domínio da Álgebra, particularmente no tópico da proporcionalidade direta. De forma geral, pretende-se que os alunos reconheçam situações em que existe uma relação de proporcionalidade direta entre grandezas, determinem a constante de proporcionalidade e utilizem-na para calcular valores desconhecidos. Para além disso, a tarefa promove o desenvolvimento do raciocínio proporcional em diferentes sentidos (multiplicativo e divisivo), bem como a análise crítica de relações entre grandezas no contexto da resolução de problemas do quotidiano.

De forma mais específica, os diferentes conjuntos de questões foram organizados de modo a favorecer progressivamente estas aprendizagens:

- Questões 1 e 2: reconhecer a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta entre o número de folares e as quantidades dos ingredientes; determinar valores proporcionais e explicitar, por palavras próprias, a constante de proporcionalidade;
- Questão 3: analisar a relação entre o peso e o preço das diferentes embalagens de fermento, avaliando a existência (ou não) de proporcionalidade direta e justificando a resposta com base na razão entre as grandezas apresentadas; determinar a opção mais económica para adquirir a quantidade necessária de fermento, aplicando o raciocínio proporcional;
- Questão 4: calcular, a partir das quantidades totais, os valores correspondentes a um único folar, reforçando a compreensão da constante de proporcionalidade e a aplicação do raciocínio proporcional em diferentes sentidos.

A planificação desta tarefa teve em consideração os conhecimentos matemáticos previamente desenvolvidos pelos alunos ao longo do 1.º Ciclo e do início do 2.º Ciclo, apesar de ser a primeira vez que contactam formalmente com o conceito de proporcionalidade direta, tal como previsto nas AE (2021). Desde os anos anteriores, os alunos foram expostos a situações do quotidiano que envolvem relações proporcionais, como a duplicação de valores, partilhas equitativas ou distribuição justa de quantidades, nas quais foram mobilizadas operações de multiplicação e divisão. Nessas experiências, foi também trabalhada a noção de fração como representação de uma relação entre duas quantidades, bem como o conceito de frações equivalentes, fundamentais para a compreensão da razão, da proporção e da constante de proporcionalidade. As tarefas anteriores, centradas na análise de regularidades, também contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de identificar e generalizar regularidades, preparando os alunos para o reconhecimento de relações proporcionais entre grandezas. Assim, a tarefa O Folar de Ovos foi planificada como um primeiro momento estruturado de exploração da proporcionalidade direta, apoiando-se em experiências matemáticas anteriores e preparando o terreno para aprendizagens mais formais neste domínio.

À semelhança das tarefas anteriores, anteciparam-se várias dificuldades que poderiam emergir ao longo da resolução da tarefa. Uma das primeiras prende-se com a compreensão da relação proporcional entre as quantidades de ingredientes e o número de folares, podendo os alunos não reconhecer que os ingredientes devem crescer proporcionalmente à medida que aumenta a quantidade de folares. A este nível, foram pensadas intervenções centradas no questionamento, convidando os alunos a refletir sobre o que aconteceria às quantidades caso se aumentasse o número de folares. Também se considerou que alguns alunos poderiam recorrer à adição repetida, em vez da multiplicação, para determinar os novos valores, pelo que se previram comparações entre os dois métodos, a fim de evidenciar a maior eficiência do raciocínio multiplicativo. Para aprofundar esta compreensão, foi ainda sugerida a exploração de outros exemplos com números maiores, que tornassem evidente a limitação da adição enquanto estratégia de resolução.

Outra dificuldade prevista relaciona-se com a capacidade de expressar, de forma clara e matemática, a relação proporcional identificada. Neste caso, foi proposta a observação sistemática dos valores da tabela como meio de apoiar a explicitação da regularidade presente. Na análise dos preços das diferentes embalagens de fermento, antecipou-se que os alunos poderiam não compreender que nem sempre existe uma relação de proporcionalidade direta entre o peso e o preço. Como resposta, previram-se apoios centrados na comparação de razões, por exemplo, através do cálculo do preço por grama ou por quilograma, para permitir a identificação (ou não) de proporcionalidade.

Foram ainda antecipadas dificuldades na escolha da embalagem mais adequada à quantidade necessária de fermento, admitindo-se que alguns alunos poderiam desconsiderar o excesso de produto adquirido. Assim, previram-se momentos de reflexão que aproximassem a tarefa de uma situação real de compra, incentivando a tomada de decisão com base no rigor das quantidades. Relativamente à última questão da tarefa, previu-se que alguns alunos não reconhecessem que, para determinar as quantidades de ingredientes correspondentes a um único folar, seria necessário dividir os valores previamente calculados pelo número de folares. Neste sentido, foram delineadas estratégias baseadas no questionamento orientado, levando os alunos a refletir sobre o processo inverso necessário para passar das quantidades calculadas para seis folares para as quantidades correspondentes a um único folar. Por fim, foi ainda considerada a possibilidade de surgirem dificuldades na compreensão do conceito de razão, tendo sido sugerida a mobilização de exemplos familiares do quotidiano, como a preparação de outras receitas mais simples, para ajudar os alunos a compreender intuitivamente esta relação entre duas quantidades.

Tendo em conta os objetivos de aprendizagem e os conceitos matemáticos mobilizados em cada conjunto de questões, optou-se por reorganizar sequência na discussão coletiva, iniciando pelas questões 1 e 2, prosseguindo com a questão 4 e concluindo com a questão 3. Esta opção procurou garantir uma consolidação prévia da relação de proporcionalidade direta entre grandezas antes da introdução do conceito de razão e proporção.

2.2. A exploração das tarefas na sala de aula

A intervenção desenvolveu-se em torno da exploração de tarefas matemáticas concebidas para colocar os alunos no centro da ação e promover a construção partilhada de conhecimento. De acordo com Ponte et al. (2020) e Canavarro (2011), esta abordagem assenta na resolução de tarefas desafiantes, na formulação de conjeturas e na discussão das estratégias dos alunos, cabendo ao professor a responsabilidade de organizar e orquestrar o trabalho da turma, de modo a potenciar aprendizagens significativas sem retirar aos alunos o protagonismo da exploração. Assim, a prática letiva adotada nesta intervenção procurou criar oportunidades para que os alunos trabalhassem em díades, confrontassem ideias e participassem em discussões coletivas, numa dinâmica coerente com as perspetivas defendidas por estes autores.

O ensino exploratório da Matemática constitui uma orientação pedagógica que se distingue do ensino transmissivo, privilegiando não a exposição e a repetição de exercícios, mas a realização de tarefas ricas e desafiantes, em que os alunos exploram estratégias próprias, partilham-nas com os colegas e constroem conhecimento através da discussão (Ponte, 2005). Esta abordagem organiza-se em quatro momentos: a apresentação da tarefa, o trabalho autónomo, a discussão coletiva e a sistematização. Como identificam Canavarro et al. (2012), o professor desempenha um papel fundamental em cada um destes momentos: na apresentação da tarefa, introduz e clarifica o enunciado, sem reduzir a sua exigência cognitiva; durante o trabalho autónomo, acompanha e questiona os alunos, incentivando-os a explicitar raciocínios e a avançar nas suas estratégias, ao mesmo tempo que seleciona e organiza as produções que irão sustentar o próximo momento; na discussão coletiva, promove a partilha e o confronto de estratégias, de modo a construir conhecimento matemático partilhado; e, na sistematização, apoia a consolidação de conceitos e a articulação com aprendizagens anteriores.

Na intervenção realizada, as diferentes fases foram concretizadas de forma intencional. Na apresentação da tarefa, o enunciado foi projetado e lido em voz alta, sendo também impresso e entregue a cada aluno, promovendo a autonomia no acompanhamento da proposta. A única exceção ocorreu na primeira tarefa, em que se recorreu ao manual escolar, em continuidade com as práticas habituais da turma. Após a leitura, os alunos foram convidados a explicar, com as suas próprias palavras, a sua interpretação do enunciado e a colocar dúvidas sempre que considerassem necessário. Este momento inicial teve a intenção de esclarecer eventuais dificuldades de compreensão e garantir que todos partiam de uma interpretação partilhada da tarefa.

O trabalho autónomo realizou-se em díades, constituídas com a colaboração da professora cooperante. O critério principal foi a heterogeneidade de níveis de desempenho, procurando potenciar o apoio mútuo e o confronto de raciocínios. Esta decisão encontra respaldo em César et al. (1998), que evidenciam como o trabalho em pares, sejam simétricos ou assimétricos, pode favorecer o desenvolvimento de ambos os elementos. As interações estabelecidas neste contexto permitem confrontar raciocínios, negociar significados e favorecer a apropriação de conhecimentos matemáticos. As díades mantiveram-se, na sua maioria, ao longo das diferentes tarefas, sofrendo apenas ajustes pontuais sempre que algum aluno faltava. Durante este momento, assumi o papel de questionar e apoiar os alunos, sem reduzir a exigência da tarefa. Para preparar a discussão coletiva, organizei previamente um quadro com possíveis resoluções por ordem crescente de complexidade e em função do objetivo das questões, no qual registei o par responsável por apresentar cada uma. Esta opção visou estruturar a discussão de forma intencional e assegurar que diferentes estratégias seriam valorizadas.

Neste processo, mobilizei as práticas propostas por Stein et al. (2008) para a orquestração produtiva das discussões matemáticas: antecipei estratégias, monitorizei o trabalho desenvolvido em díades, selecionei resoluções relevantes, sequenciei as produções de modo a favorecer o raciocínio coletivo e, por fim, procurei estabelecer conexões entre as diferentes abordagens apresentadas. A mobilização destas práticas teve como propósito sustentar uma planificação intencional, que visava a organização e a estruturação do trabalho dos alunos de modo a facilitar a gestão das interações e a condução das discussões em sala de aula.

A discussão coletiva assumiu-se como um momento central da exploração das tarefas. Segundo a seleção previamente organizada, um elemento de cada díade, escolhido pelos próprios alunos, apresentava no quadro a estratégia de resolução e explicitava o procedimento adotado. Durante este processo, procurei promover a comparação crítica entre diferentes abordagens, incentivei a explicitação dos pensamentos e ajudei os alunos a identificar conexões entre estratégias aparentemente distintas. A discussão coletiva decorreu, assim, como um espaço de partilha e confronto de estratégias, em linha com o que Ponte et al. (2020) e Canavarro (2011) descrevem como o momento em que os contributos individuais se tornam públicos e são articulados para construir conhecimento matemático comum à turma.

O momento de sistematização teve como principal objetivo consolidar as ideias centrais de cada tarefa, clarificar dúvidas e dar nome aos conceitos matemáticos que tinham emergido da discussão. Assumi a condução deste momento, formalizando as aprendizagens e articulando-as com conhecimentos previamente trabalhados, de modo a integrá-las num quadro conceptual mais estruturado. Tal como referem Ponte et al. (2020) e Canavarro (2011), a sistematização constitui uma etapa essencial no ensino exploratório, pois assegura que as ideias emergentes da exploração são reconhecidas, validadas e transformadas em conhecimento matemático partilhado.

Ainda que a intervenção tenha procurado manter coerência metodológica, ocorreram ajustes pontuais face ao planeado. Na segunda tarefa, a discussão coletiva não incluiu a ponte para o estudo da proporcionalidade direta, como estava previsto, devido à limitação temporal. Essa ligação foi retomada numa aula posterior, a partir dos resultados obtidos na tarefa. Já na terceira tarefa, optou-se por reorganizar a ordem de discussão das questões: começou-se pelas questões 1 e 2, seguiu-se a questão 4 e concluiu-se com a questão 3. Com esta decisão pretendeu-se consolidar previamente a noção de proporcionalidade direta antes de introduzir os conceitos de razão e proporção.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

O presente capítulo tem como finalidade analisar e discutir os dados recolhidos durante a exploração das tarefas realizadas em sala de aula no âmbito da intervenção pedagógica. Encontra-se organizado em três secções principais, correspondentes às três tarefas propostas aos alunos. Em cada secção, são considerados dois momentos da exploração da tarefa: a realização em díades e a discussão coletiva. Cada um destes momentos inicia-se pela análise dos contributos das interações entre pares para a resolução dos problemas e conclui com a identificação dos desafios emergentes nesses mesmos momentos de trabalho.

1. Primeira tarefa – O Concurso “Acerta ou Perde”

1.1. Realização da tarefa em díades

As aulas de 24 e 26 de fevereiro permitiram observar o papel da interação entre pares na resolução de problemas. As notas de campo destas aulas mostram que a constituição das díades suscitou reações distintas entre os alunos: alguns manifestaram satisfação com o colega atribuído, enquanto outros expressaram desagrado, o que pareceu influenciar a sua predisposição inicial para a tarefa. Apesar dessas diferenças, dois pares iniciaram de imediato a resolução, revelando disponibilidade para cooperar. Tanto as grelhas de observação (Anexo G) como as notas de campo indicam ainda que, de forma geral, as díades se foram envolvendo progressivamente no trabalho, sendo a interpretação do enunciado e a definição da estratégia os momentos que mais exigiram diálogo e negociação de significados.

Um dos contributos mais significativos da interação manifestou-se na fase inicial, quando várias díades revelaram interpretações divergentes do enunciado, tornando a interação essencial para a construção de um entendimento comum. No par formado por A1 e A2, esta divergência tornou-se evidente e o confronto de perspetivas desencadeou uma longa discussão, marcada pela necessidade de explicitar procedimentos e justificar posições.

A1: (…) Se ela acertar as dez respostas, temos que saber quanto dinheiro é que ela ganha. Se ela começa com 50, se nós fizermos 10 × 50…

A2: Não, imagina… Ela começa com 50. Ela acerta a primeira: vezes dois, 100.

A1: (…) Não. Imagina que ela começa com zero e ela ganha 50. Se tu fizeres 50 × 10 (…). Mas ela começa com 50, então temos que somar os 50 que ela começa, por isso fica 550. Faz sentido?

A2: Não! Ela começa com 50 e ela acerta a primeira: vezes dois; a segunda: vezes dois; e a terceira: é esse número vezes dois.

A1: Mas depois é sempre assim?

A2: Sim, eu acho que é 2 elevado a 10.

(…)

A1: Então… é mais fácil fazer 50 × 10 + 50.

(…)

A2: Não! 50 × 2 e esse número vezes 2 e isso vezes 2 e isso vezes 2, vezes 2, vezes 2, vezes…

Este diálogo evidencia como o confronto de interpretações originou um momento de argumentação matemática entre os alunos, contribuindo para a clarificação do enunciado. A1 iniciou a resolução apoiando-se numa leitura literal do problema, recorrendo à multiplicação direta ("50 × 10") e adicionando, posteriormente, o valor inicial, enquanto A2, ao defender que o valor se deveria duplicar a cada resposta certa, mostrou compreender o carácter sucessivo da progressão descrita no enunciado. A insistência de A2 em reforçar a ideia de repetição ("vezes 2") e o seu comentário espontâneo sobre a natureza da situação ("Mas isto é sequências!") funcionou como elementos de mediação cognitiva, favorecendo o reconhecimento da estrutura sequencial e levando A1 a reformular a sua interpretação inicial.

Dinâmica semelhante observou-se no par A3 e A4, onde a expressão "duplicar o dinheiro" gerou interpretações distintas e levou esta díade ao confronto e ajustamento gradual das perspetivas. Enquanto A3 associava "duplicar" à repetição sucessiva, A4 aproximava-se de uma leitura literal de multiplicação direta, o que exigiu a explicitação de procedimentos e a verificação conjunta de resultados.

A3: Ele começa com 50 euros e depois?

A4: E ele vai duplicando o dinheiro.

A3: Sempre que ganha, vai duplicando. Duplicando é tipo vezes 2.

A4: Portanto, temos que fazer (…) 50 × 10?

A3: Não, espera… se duplica, é vezes 2.

(…)

A4: Vai dar 500?

A3: Não, imagina: 50, certo? Se ganha uma é vezes 2, dá 100. Depois temos de fazer outra vez 100 × 2

A3 e A4 (em uníssono): × 2 × 2…

Ao contrário do par anterior, em que a divergência originou um debate mais afirmativo, aqui o entendimento foi construído através de sucessivas tentativas de validação e reformulação. A díade testou hipóteses, verificou resultados intermédios e usou o diálogo como espaço de experimentação discursiva, onde o erro e a correção contribuíram para o avanço conceptual. O momento em que ambos enunciam em uníssono “× 2 × 2…” assinala a estabilização da compreensão e a consolidação partilhada da ideia de duplicação sucessiva.

Para além da interpretação do enunciado, a interação entre pares revelou-se decisiva na clarificação de conceitos matemáticos essenciais à tarefa, nomeadamente a distinção entre lei de formação e expressão geradora. Em várias díades, estes termos suscitaram dúvidas e motivaram momentos de análise conjunta, durante os quais os alunos procuraram identificar o significado e a função de cada conceito. No par A1 e A2, a incerteza inicial de A1 desencadeou um diálogo marcado por sucessivas perguntas e explicações, permitindo que ambos estruturassem o pensamento e aprofundassem a compreensão dos conceitos envolvidos.

A1: O que é a lei de formação?

A2: A lei de formação …

A1: É 2 × n?

A2: Não, isso é a expressão geradora. A lei de formação é o que é que acontece. Por exemplo… 2 + 2, 4, 4 + 2… adicionas 2 ao termo anterior.

(…)

A1: Então o que é que temos de fazer? Dizer a expressão algébrica do 1 e do 2.

A2: Sim.

A1: O que é que é a expressão geradora? Eu sei.

A2: Então diz lá o que é a expressão geradora?

A1: Então, vou dar o exemplo que A5 deu. [escreve no caderno: 2, 4, 6…]

A2: Ah! Já sei… é o n2.

A1: Isso! O que é que tu vês daqui para aqui?

A2: + 2.

A1: + 2.

A2: Então é n2 porque soma-se 2…

Este episódio evidencia contributos relevantes ao nível da comunicação e da argumentação matemática, uma vez que a formulação de perguntas por A1 levou A2 a explicitar e a diferenciar os conceitos em causa, clarificando a relação entre a regularidade observada numa sequência e a respetiva expressão algébrica. A construção e análise do exemplo “2, 4, 6…” permitiram validar a correspondência entre o acréscimo constante e a expressão “2n”, reforçando competências de identificação de padrões e de generalização. A verificação conjunta dos valores e as justificações apresentadas por ambos mostram um processo de construção partilhada de significado, no qual a interação serviu como mecanismo de apoio conceptual e de consolidação das ideias algébricas.

Num outro par, a clarificação da expressão geradora resultou igualmente da apresentação de um exemplo numérico e da verificação passo a passo dos primeiros termos da sequência. A5 também recorreu à sequência “2, 4, 6, 8…” para justificar a expressão correspondente e apoiar a compreensão de A6.

A6: Então o que é a expressão geradora?

A5: 2, 4, 6, 8, 10, 12… Aqui é que é 2n!

A6: Ok.

A5: Oh! Aqui é o termo 1, termo 2, termo 3… Podes experimentar: 2 × 1, 2. 2 × 2, 4. 2 × 3, 6. 2 × 4, 8… vês?

A6: Ah! Já entendi…

Também este excerto evidencia a importância do diálogo na clarificação da expressão geradora, uma vez que a apresentação do exemplo numérico e a verificação dos primeiros termos permitiram a A6 compreender a correspondência entre o valor do termo e a expressão “2n”. A interação funcionou aqui como um mecanismo de confirmação e de consolidação da estrutura algébrica envolvida.

No par A3 e A4, a clarificação de conceitos motivou um momento de explicação entre a díade, ainda que através de uma abordagem mais informal. Perante a dificuldade em compreender o significado de lei de formação, A3 recorreu a uma analogia para tornar o conceito mais acessível.

A3: A lei de formação. Sabes o que é a lei de formação? A lei de formação é tipo… é tipo… para obteres um.

A4: Ah! Já sei, já sei.

A3: Pronto, tens de escrever isto por extenso porque é uma regra.

A4: Por extenso?

A3: Yah, porque é uma regra. Imagina… sei lá… Imagina que ainda estávamos nos tempos dos reis e os reis escreviam regras para os cidadãos cumprirem. Então, é a mesma coisa só que em matemática e neste caso tu és o rei.

O recurso a esta analogia é particularmente significativo, pois mostra como a díade recorreu a estratégias discursivas informais para apoiar a compreensão de um conceito ainda em construção. Apesar de não oferecer uma explicação matematicamente rigorosa, a comparação utilizada por A3 aproximou a ideia de lei de formação de uma situação do quotidiano, facilitando a apropriação do termo por A4.

Após a clarificação do enunciado e a consolidação dos conceitos fundamentais, a interação entre pares continuou a desempenhar um papel relevante na fase de resolução propriamente dita. Ainda que nem sempre se tenham verificado divergências explícitas sobre a estratégia a adotar, as díades envolveram-se em processos de verificação, experimentação e validação conjunta dos procedimentos escolhidos. Em vários casos, a comunicação assumiu a forma de explicações sucessivas, comparações de resultados e ajustes de cálculo, revelando que o diálogo funcionou como um meio de regulação e de controlo partilhado da tarefa.

A2: Então… 50 × 2.

A1: Dá 100. Vezes 2 dá 200. (…) Isto vai dar um número absurdo…

A2: Então é esse o suposto dos pontos.

(…)

A1: Duplica, mas se fizeres 10 × 2… não, 50 × 100.

A2: Não é vezes 100, é vezes 2. Vamos continuar e ver o que acontece.

A1: Então vamos fazer assim… 50 × 2 = 100, 100 × 2 = 200, 200 × 2 = 400…

(…)

A1: Só podes ter aí 10… tens de contar 10.

A2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Falta 2.

A1: Ok, espera… 400 × 2 = 800… (…) Mostra como pensaste.

Este episódio mostra que, após a concordância quanto à regra de duplicação, a interação se centrou na aplicação e no controlo do procedimento. As hesitações de A1 (“isto vai dar um número absurdo…”, “tens de contar 10”) e as correções de A2 (“não é vezes 100, é vezes 2”) revelam um processo de verificação e ajuste realizado em conjunto, no qual o diálogo funciona como meio para garantir a precisão dos cálculos. A contagem dos passos e o pedido “mostra como pensaste” transferem a atenção do cálculo isolado para a explicitação dos procedimentos utilizados, garantindo a consistência na execução da estratégia.

Noutro par, a interação revelou-se determinante na escolha da representação. Embora os alunos tenham mantido a estratégia de multiplicação e divisão sucessivas, decidiram organizar os procedimentos através de um esquema que lhes permitisse visualizar a diferença entre acertar nas primeiras ou nas últimas perguntas da tarefa (questão 3). O diálogo mostra que a proposta partiu de A5, que orientou o colega na construção do esquema:

A5: Vamos fazer assim um pequeno esquemazinho.

A6: Um pequeno esquema?

A5: Bora, mete assim oh! Mete um 8 aqui. É para explicar. Vamos explicar de uma maneira muito fixe.

A6: Ok.

(…)

A5: Então… agora tu nas setas de cima vais fazer para aqui a dividir. Estás a ver? É a mesma coisa com pontos de interrogação e tudo, mas só que em cima é a dividir com as setas para aqui e depois a seguir é vezes 2.

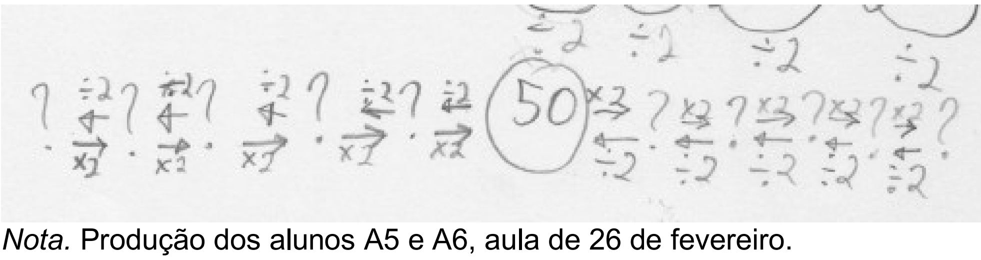
A6: Ah! Já entendi!

A5: Mas isto dá para entender!

A6: Claro que dá!

Figura 2

Estratégia adotada por A5 e A6 para a questão 3 da tarefa 1.



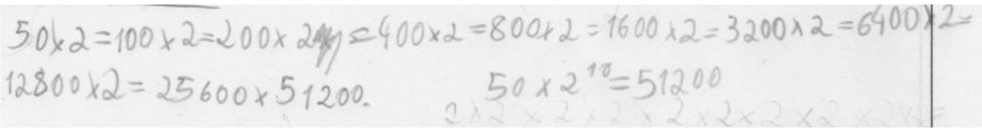
Nota. Produção dos alunos A5 e A6, aula de 26 de fevereiro.

Este episódio evidencia o papel mediador de A5, cuja iniciativa conduziu à utilização de uma representação alternativa que permitiu organizar os procedimentos de forma mais clara. O esquema elaborado pelos alunos (Figura 2) tornou visíveis as operações de multiplicação e divisão sucessivas, permitindo comparar as duas situações da tarefa sem recorrer ao cálculo de todos os valores. Esta representação apoiou a compreensão do efeito da ordem das respostas no valor final e mostrou que os procedimentos podem ser organizados e comunicados de diferentes formas.

De modo distinto, outro par evidenciou como a interação pode apoiar a compreensão da tarefa mesmo quando persistem dificuldades individuais. Nas notas de campo de dia 24 de fevereiro registou-se que A7 ajudou A8 a compreender a questão e a generalização através do uso de potências, enquanto este último tentava expressar o que pensava, revelando algumas dificuldades. Durante a resolução, A7 conduziu a sequência de procedimentos, explicando como o valor inicial se duplica sucessivamente e mostrando a A8 como representar esse procedimento com recurso a potências. A produção escrita (Figura 3) mostra o percurso realizado desde as multiplicações sucessivas até à expressão algébrica, que traduz a generalização da regularidade observada.

Figura 3

Estratégia adotada por A7 e A8 para a questão 1 da tarefa 1.



Nota. Produção dos alunos A7 e A8, aula de 24 de fevereiro.

A explicação de A7, ao tornar explícitas as relações entre os termos, apoiou a compreensão de A8 e permitiu-lhe acompanhar, ainda que com dificuldade, o procedimento desenvolvido. Este episódio evidencia como a interação pode apoiar a identificação de padrões e a formulação de expressões gerais, mesmo quando a contribuição de cada elemento da díade é significativamente diferente.

Para além dos aspetos relacionados com a interpretação, com os procedimentos e com a compreensão dos conceitos envolvidos, a interação entre pares revelou também uma dimensão afetiva e motivacional significativa. Em vários momentos, os alunos apoiaram-se mutuamente, quer para ultrapassar dificuldades, quer para manter o envolvimento na tarefa. No par A1 e A2, o diálogo evidencia como o encorajamento de A1 funcionou como suporte emocional, ajudando A2 a ultrapassar momentos de dúvida e frustração.

A1: Olha para mim. Concentra-te. Inspira-te, ok?

(…)

A1: Boa, A1! Estás inteligente, hã?

(…)

A1: Ficaste demasiado feliz [por terem chegado a uma conclusão sobre a estratégia a adotar para aplicar potências], não ficaste?

A2: Fiquei!

As expressões de incentivo e de humor presentes neste diálogo revelam contributos ao nível das atitudes e disposições face à Matemática, ao criar um ambiente de confiança que favoreceu a continuidade do trabalho. A atitude de valorização que A1 assumiu contribuiu para que A2 recuperasse a confiança e prosseguisse na resolução, transformando a frustração inicial em entusiasmo partilhado.

De modo semelhante, no par A5 e A6, a relação de confiança e a negociação constante sustentaram a cooperação ao longo da tarefa. As interações entre ambos, marcadas por expressões de humor e respeito mútuo, revelam um equilíbrio entre autonomia e apoio que favoreceu a participação de ambos.

A6: Eu confio no A5.

(…)

A6: Deixa-me também pensar, A5!

(…)

A5: Deixo-te ir [apresentar] nas próximas duas vezes se ficarmos juntos.

(…)

A6: A5, temos de acordar para a vida!

A motivação foi particularmente evidente na expressão proferida no final da aula por A6: "É agora que vou tirar cinco a Matemática!", registada nas notas de campo do dia 26 de fevereiro, e que traduz o entusiasmo e a perceção de progresso pessoal resultantes da cooperação.

Apesar dos contributos observados ao nível da compreensão, da comunicação e das atitudes de natureza afetiva, a interação entre pares também evidenciou alguns desafios. As notas de campo das aulas de 24 e 26 de fevereiro mostram que, por vezes, a cooperação se tornou momentaneamente assimétrica ou pouco equilibrada, quer pela diferença de níveis de desempenho entre os elementos das díades, quer por dificuldades na gestão da atenção e da própria dinâmica relacional.

No par A5 e A6, nas notas de campo de 24 de fevereiro registou-se que "usaram diagramas para resolver ambas as questões" e que "comunicam bem um com o outro", evidenciando uma cooperação geralmente eficaz. Contudo, num momento específico da resolução, A5 assumiu um papel de liderança, orientando as decisões e a realização dos cálculos, enquanto A6 aceitou as indicações do colega sem questionar.

A6: Como? Calma. 8 × 2 é 16. E depois faço 16 a dividir por 2?

A5: Não, não, não. Só escreve assim! Confia, confia.

A6: Está bem. Eu confio no A5.

Este episódio ilustra um desafio associado aos desequilíbrios de participação: mesmo em contextos cooperativos, podem emergir momentos em que a urgência em avançar leva um dos elementos a assumir a condução da resolução, reduzindo a oportunidade de participação do colega.

Situação distinta ocorreu no par A7 e A8. As notas de campo de 24 de fevereiro referem que “A7 ajuda o A8 a perceber a pergunta e a generalização das potências”, enquanto A8 “vai tentando dizer o que pensa”. Na aula seguinte, registou-se que “A7 está a começar a sentir-se desmotivado para explicar (…) ao A8, que não o compreende e tem mais dificuldade”. Estes registos evidenciam o desafio de manter o envolvimento e a cooperação quando existe uma discrepância significativa de compreensão da tarefa, o que pode originar frustração no aluno com maior domínio e dependência no colega que enfrenta mais dificuldades.

Outros pares enfrentaram dificuldades de concentração na resolução da tarefa, o que condicionou a progressão do trabalho e a qualidade da interação. As notas de campo referem que “A9 e A10 perdem-se na conversa, não resolvem o problema” e que “A11 e A12 distraem-se muito, não discutem ideias nem estratégias”.

1.2. Discussão coletiva

A análise das discussões coletivas das aulas de 24 e 26 de fevereiro evidencia que a interação entre os alunos desempenhou um papel determinante na clarificação do enunciado, na validação coletiva de estratégias, e na construção partilhada de significados. Tal como na fase em díades, foi através do diálogo, da comparação de procedimentos e da explicitação de ideias que os alunos avançaram na compreensão da estrutura multiplicativa subjacente à tarefa.

Um dos momentos mais significativos ocorreu quando A5 e A6 explicaram à turma por que motivo a expressão “50 × 10” não traduzia corretamente a situação apresentada na questão 1. A explicação funcionou como ponto de partida para a compreensão coletiva da ideia de duplicação sucessiva:

A5: Porque é sempre o dobro. Não é vezes 10.

(…)

A5: Não, mas a cada pergunta tu não vais adicionando 50, tu vais adicionando…

A6: O dobro.

(…)

A5: Depois o dobro de 100 é 100 + 100, não é 100 + 50. Então vai ser 100 + 100 = 200; depois 200 + 200, 400…

A explicação apresentada por A5 e A6 apoiou-se sobretudo numa descrição informal do processo de duplicação (“somar o dobro”), tornando visível a regularidade da sequência e permitindo que vários colegas ajustassem a sua interpretação do enunciado. A forma como A5 e A6 se complementaram mostrou ainda monitorização mútua e um esforço de clarificação progressiva, apoiado na verbalização conjunta dos procedimentos.

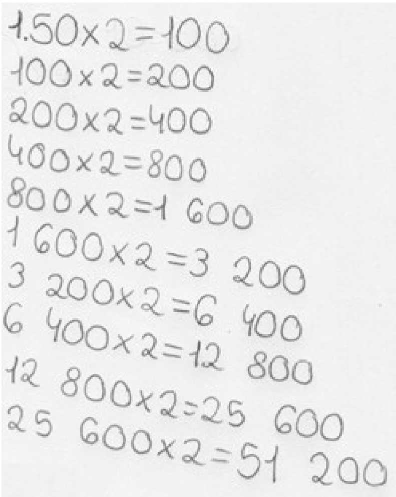
A explicação de A5 e A6 desencadeou intervenções de outros pares que procuraram reformular a mesma ideia com diferentes representações. A4, por exemplo, apresentou uma versão centrada na multiplicação sucessiva.

A4: Nós, em vez de fazermos com mais fizemos 50 × 2 e depois sempre vezes dois.

(Reações da turma: “É a mesma coisa!”)

Figura 4

Estratégia adotada por A4 para a questão 1 da tarefa 1.



Nota. Produção dos alunos A3 e A4, aula de 24 de fevereiro.

A Figura 4 ilustra a representação produzida pela díade, evidenciando a utilização da multiplicação sucessiva como forma de expressar a regularidade da duplicação. A intervenção de A4 reformulou a estratégia verbalizada inicialmente por A5 e A6, aproximando-a de uma representação mais estruturada e assente na multiplicação por 2. A reação imediata dos colegas (“É a mesma coisa!”) evidencia um momento de descentração cognitiva, no qual reconhecem a equivalência entre diferentes formas de expressar a mesma relação multiplicativa.

A partir deste esclarecimento inicial, a discussão evoluiu para a análise de diferentes representações, nomeadamente o diagrama produzido por A5 e A6 para responder à questão 3. Quando convidado a explicá-lo à turma, A5 descreveu a lógica que orientou a construção do esquema:

> A5: Eu reparei que (…) se dividimos o 8 por 2 dá 4 e se dividirmos o 4 por 2 dá 2… se multiplicarmos o 2 por 2 dá 4 e 4 por 2 dá 8. Ou seja, vai voltar ao número inicial se multiplicarmos por 2 o mesmo número de vezes que dividimos por 2. (…) Para explicar o meu pensamento, fiz isto: meti 50 no início e não achei necessário calcular. Mostrei que 'vezes 2' vai dar um valor, 'vezes 2' dá outro (…) até ao quinto número. Depois, se fizermos a dividir por 2, volta sempre ao número anterior até chegar a 50.

A explicação no coletivo do diagrama (Figura 2) tornou visível uma representação centrada na relação entre operações inversas, permitindo que vários alunos compreendessem o efeito compensatório entre multiplicação e divisão. Este momento ampliou o repertório de possíveis representações para a turma e mostrou que nem sempre é necessário calcular todos os valores para compreender o comportamento da sequência.

A explicitação deste diagrama levou também alguns alunos a reconhecer verbalmente que já tinham pensado deste modo, mesmo antes de saberem explicá-la formalmente:

> A14: Eu pensei logo assim. Eu vi logo que isso ia dar 50.
>
> Estagiária: Não foste o único a pensar assim, a A15 também pensou assim, mas não sabia como explicar, não foi A15?

A dificuldade de A15 em justificar oralmente aquilo que reconhecia intuitivamente foi igualmente registada nas notas de campo do dia 26 de fevereiro, onde o aluno afirmou: "Eu sei que se tiver 5 maçãs e ganhar 2 e perder 2, fico com 5, mas não sei como explicar". O conjunto de intervenções mostra a importância da discussão como espaço para transformar intuições em explicações matematicamente comunicáveis.

A discussão progrediu para a generalização do comportamento da sequência perante diferentes combinações de respostas certas e erradas:

> Estagiária: E se fizéssemos alternado, por exemplo, acerto a primeira e erro a segunda?
>
> A5: Vai dar a mesma coisa.
>
> Estagiária: E se acertar a terceira?
>
> A5: Vai sempre dar a mesma coisa: 50, 100, 50, 100…
>
> Estagiária: E se eu começar por errar?

A5: 25, 50, 25, 50…

Este momento permitiu à turma perceber que o valor obtido em cada passo depende apenas do valor anterior, independentemente da ordem das respostas certas ou erradas na sequência. A intervenção de A5 tornou explícita esta relação e ajudou os colegas a organizar o pensamento em torno da ligação entre os valores sucessivos.

Ainda durante a aula de 24 de fevereiro, após a turma ter discutido o procedimento da duplicação sucessiva, A7 apresentou uma abordagem mais formal da regularidade, recorrendo às potências:

A7: Nós temos 50, então podemos fazer 2 elevado a 10… [porque] precisamos de dez 2.

Estagiária: E vou repetir 10 vezes [vezes 2] e posso substituir isto?

A7: Por 2 elevado a 10.

Esta intervenção introduziu uma forma mais estruturada e formal de expressar a repetição do mesmo fator multiplicativo, ampliando, mais uma vez, o repertório de representações disponíveis na turma. A partilha no coletivo permitiu que a potência fosse entendida como uma alternativa adequada para representar a multiplicação sucessiva.

A relevância desta abordagem tornou-se evidente na aula de 26 de fevereiro, durante a discussão da questão 3. O contacto prévio com a estratégia baseada em potências facilitou a compreensão coletiva das respostas de A7. Na sua resolução, o aluno voltou a utilizar as potências como estratégia para as respostas certas (50×2^5), mas recorreu à divisão sucessiva para as respostas erradas (Figura 5). Esta combinação levou A6 a sugerir uma alternativa mais coerente, propondo que a diminuição do valor também fosse expressa através de potências:

A7: 50×2^5 é a mesma coisa que nós fazermos isto, ou isto também.

A6: A7, podias ter feito 50 a multiplicar por 2 elevado a 5, que dá 1600. Depois fazias… 50 a dividir por 2 elevado a 5…

A5: Não, 1600 a dividir por dois elevado a 5…

A6: Sim. 1600 a dividir por 2 elevado a 5 ia dar 50.

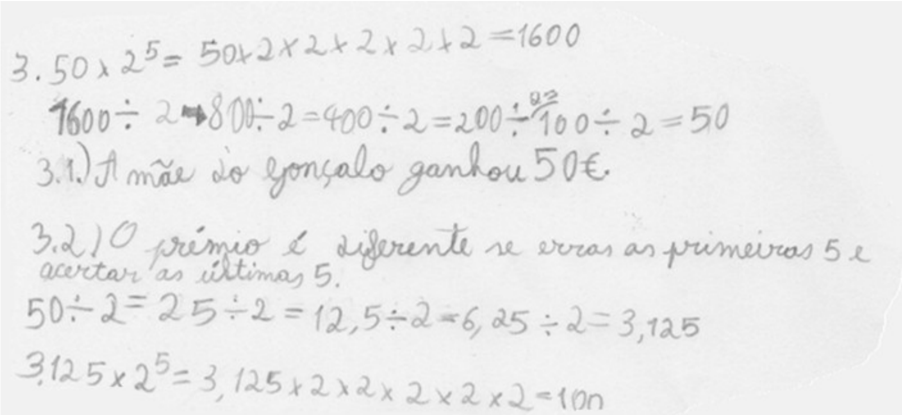
A7: Eu também pensei nisso.

(…)

A5: Porque no fundo estaria a dividir pelo mesmo número que multiplicou.

Figura 5

Estratégia adotada por A7 para a questão 3 da tarefa 1.



3. $50 \times 2^5 = 50 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1600$

$1600 \div 2 \rightarrow 800 \div 2 = 400 \div 2 = 200 \div 2\ 100 \div 2 = 50$

3.1.) A mãe do gonçalo ganhou 50€.

3.2.) O prémio é diferente se erras as primeiras 5 e acertar as últimas 5.

$50 \div 2 = 25 \div 2 = 12{,}5 \div 2 = 6{,}25 \div 2 = 3{,}125$

$3{,}125 \times 2^5 = 3{,}125 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 100$

Nota. Produção dos alunos A7 e A8, aula de 26 de fevereiro.

A intervenção de A6 não surgiu como oposição à proposta de resolução apresentada por A7, mas como extensão da sua estratégia inicial, tornando a resposta mais coerente ao aplicá-la nas duas partes da questão. Esta capacidade de operar sobre a estratégia do colega revela descentração e monitorização, permitindo que a proposta inicial fosse refinada no coletivo. A participação de A5, ao explicitar que "no fundo estaria a dividir pelo mesmo número que multiplicou", mostra que o entendimento se estava a disseminar na turma, indicando partilha efetiva de significados. Este episódio exemplifica como a cooperação e a co-construção emergem nas discussões matemáticas coletivas, permitindo aos alunos comparar procedimentos, reformular explicações e consolidar relações, apropriando-se das estratégias dos colegas.

Contudo, apesar dos contributos significativos das interações para a compreensão do enunciado e das diferentes estratégias e representações, também emergiram alguns desafios. Um primeiro desafio prendeu-se com a dificuldade em justificar determinados passos na estratégia apresentada. Em vários momentos, alguns alunos apresentaram respostas sem conseguirem explicitar o procedimento subjacente, o que dificultou a apropriação coletiva das estratégias. Por exemplo, quando questionada sobre a sua expressão (Figura 6), A2 monstra hesitação evidente:

A5: Porque é que adicionaste?

A2: Então porque é os pontos que ela ganhou (…)

A5: Mas…. Tu multiplicas por 2 sempre que ganha.

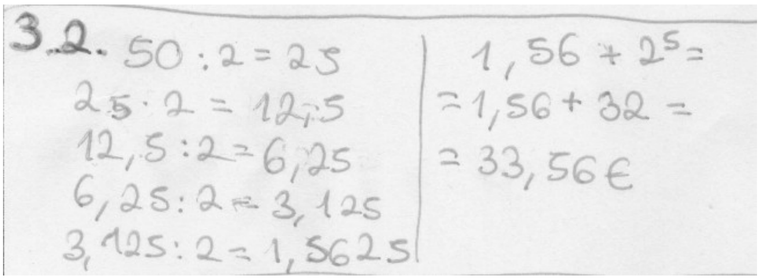
A2: Sim.

A5: Então esses [mais] 32 vêm de onde?

A2: Ah… porque eu… Ah!

Figura 6

Estratégia adotada por A2 e A8 para a questão 3.2 da tarefa 1.



Nota. Produção dos alunos A1 e A2, aula de 26 de fevereiro.

Esta incapacidade de verbalizar o procedimento utilizado mostra que, embora alguns alunos mobilizem procedimentos operatórios, nem sempre dispõem dos recursos discursivos necessários para os comunicar matematicamente. A sequência de perguntas de A5 evidencia uma tentativa de compreender o pensamento de A2, mas a hesitação desta revela que não consegue justificar a origem do procedimento, o que limita a clarificação da estratégia para o grupo.

Outro desafio relacionou-se com a assimetria na participação. A análise dos áudios mostra que a discussão foi frequentemente protagonizada por um pequeno grupo de alunos, sobretudo por A5, A6 e A2, que assumiram um papel central na argumentação e validação das estratégias. Em contraste, outros alunos intervieram apenas quando foram diretamente solicitados pela estagiária. Este desequilíbrio, comum das interações espontâneas, sugere que nem todos os alunos se sentem igualmente confortáveis ou confiantes para expor as suas ideias no coletivo, o que reduz a diversidade das contribuições e exige mediação docente para promover uma participação mais equilibrada.

No entanto, o desafio mais expressivo emergiu ao nível da negociação de significados e da escuta ativa, quando a turma tentou compreender por que motivo “2 elevado a 5” correspondia a 32. O excerto seguinte mostra como a ausência de um questionamento mais sistemático e a tendência para respostas imediatas conduziram a desentendimentos e interpretações confusas:

A14: Eu não percebi.

(…)

A14: Onde é que ela foi buscar o 32?

A5: O 32 é igual a 2 elevado a 5.

A2: 2 elevado a 5 é igual a 32.

A13: Ah? De onde é que tu foste tirar o 32?

A20: Acabou de dizer.

A2: 2 elevado a 5 é igual a 32.

A4: Como?

A5: Sim, mas…

A15: Exato… Como?

A13: Pois, mas 5 × 5 é igual a 25.

A5: Oh A2, essa conta não está bem.

A4: Yah, 5 × 5 é igual a 25.

Este episódio mostra que, apesar do interesse e da participação espontânea, a partilha das ideias ficou marcada por interrupções, sobreposições e interpretações precipitadas. A sucessão rápida de afirmações dificultou a construção de um significado comum e revelou fragilidades na escuta ativa. Em vez de analisarem a explicação apresentada, vários alunos reagiram ao que pensavam ter ouvido, o que impediu que a justificação de A2 ("2 elevado a 5 é igual a 32") fosse discutida ou reconstruída de forma coletiva.

A persistência da dúvida sobre "de onde vem o 32" evidencia, ainda, a dificuldade em distinguir operações distintas ($2^5 \neq 5 \times 5$), o que gerou desentendimentos que poderiam ter sido ultrapassados com uma escuta verdadeiramente atenta às contribuições dos colegas. A falta de clarificação comprometeu, também, a fluidez da discussão, já que várias intervenções surgiram para corrigir erros isolados, em vez de contribuírem para uma explicação progressiva e partilhada.

2. Segunda tarefa – Os tijolos

2.1. Realização da tarefa em díades

A aula de 5 de março, dedicada à tarefa "Os tijolos", possibilitou observar de forma aprofundada o papel da interação entre pares na construção de regularidades, na formulação de leis de formação e na emergência de expressões geradoras. Tal como na primeira tarefa, também aqui se verificaram diferenças na forma como as díades se envolveram na resolução, especialmente ao nível da comunicação matemática, da descentração cognitiva, da autorregulação e dos desafios sociocognitivos associados à interação em pares.

Um primeiro contributo relevante da interação entre pares nesta tarefa manifestou-se na identificação da regularidade associada ao número de tijolos e na clarificação conjunta da lei de formação. Em várias díades, o diálogo foi o instrumento central para estabilizar a ideia de que a sequência cresce de dois em dois, permitindo articular os valores da tabela com as figuras da tarefa. No par A3 e A4, esse processo torna-se particularmente visível quando, ao preencherem a tabela, A4 explicita o padrão:

A4: Número de tijolos, 1

A3: Número de tijolos, 1, Número de tijolos, 3

A4: Depois é 5.

(…)

A4: Isto é sempre mais 2.

(…)

A4: Olha lá (…) aqui um temos um tijolo, certo? Depois passamos para 3! Como é que passamos para 3? Acrescentando 2. Depois de 3 passamos para 5, acrescentando mais 2.

Esta verbalização constitui um momento de construção conjunta de significado, em que a regularidade "+2" deixa de ser uma perceção intuitiva para se tornar explícita, partilhável e passível de discussão entre a díade.

Um fenómeno semelhante verificou-se na díade A1 e A2, em que o diálogo permite a ambos explicitar a regularidade e chegar à formulação da respetiva lei de formação:

A1: Se nós encontrarmos a lei de formação da sequência, é só fazer tipo a figura 3 mais a lei de formação, mais a lei de formação até chegar à figura 6. Pode ser?

A2: (…) Vamos então saber primeiro qual é a lei de formação. Eu já sei qual é a lei de formação.

A1: Eu também.

(…)

A2: Qual é a lei de formação?

A1: Adicionar 2 ao termo anterior.

A2: Não!

(…)

A2: Tu tens aqui 3 e acrescentas 2 também, mas tipo…

(…)

A1: É acrescentar 2 ao número anterior.

Ainda que a formulação inicial não tenha sido totalmente rigorosa, este episódio mostra um processo de apropriação progressiva do discurso matemático, no qual a reformulação da estratégia, após ouvir o contributo do par, funciona como um mecanismo de descentração e de reconstrução conceptual. Tal como na tarefa anterior, o diálogo obriga o par a pôr em palavras aquilo que observam na sequência, tornando a regularidade explícita, partilhável e discutível, o que contribui para consolidar a compreensão da regularidade.

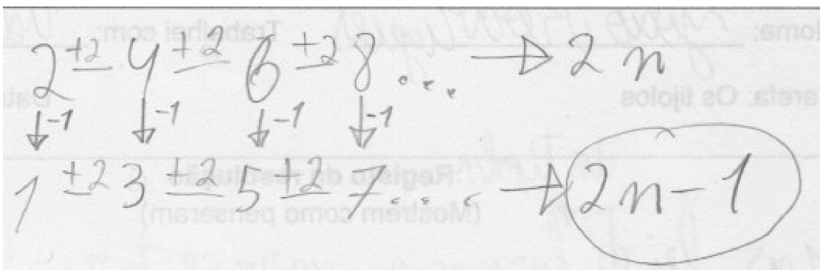
Na díade A5 e A6, a identificação da regularidade é rapidamente articulada com a generalização algébrica. Depois de reconhecerem que a sequência cresce de dois em dois, o diálogo conduz naturalmente à expressão simbólica:

> A5: Meti que a lei de formação dos tijolos é acrescentar dois tijolos ao termo anterior.
>
> (…)
>
> A6: Então, deixa ver se percebi. O número de tijolos na [figura] 1 é 1 tijolo, não é? (…) Aqui é 3 e aqui é 5, ou seja, aqui é 7, aqui é 9 e aqui é 11.
>
> (…)
>
> A5: Vamos pegar na (…) expressão geradora, que é uma coisa muito prática. (…) Os tijolos, tu vês o que é que aconteceu, começa no 1 e vais acrescentando. Qual é a expressão geradora? (…) Pensa assim, uma sequência que vai de 2 em 2.
>
> A6: 2n?
>
> A5: Sim. Vai sempre de 2 em 2, mas começa no 1, depois 3, 5… é 2n …
>
> A6: vezes...?
>
> A5: Vezes!?
>
> A6: Não! 2n – 1!
>
> A5: Boa!

A Figura 7 mostra a estratégia escrita que ambos construíram para justificar a expressão 2n − 1, evidenciando a forma como relacionaram a sequência par com a sequência dos tijolos.

Figura 7

Estratégia adotada por A5 e A6 para as questões 1.b) e 2.a) da tarefa 2.



Nota. Produção dos alunos A5 e A6, aula de 5 de março.

O diálogo mostra de forma clara como a interação entre pares pode orientar a construção da estratégia e apoiar a organização dos procedimentos necessários à generalização. A5 revela um domínio mais avançado da regularidade e da expressão algébrica, orientando A6 através de perguntas e pistas que lhe permitem reconstruir a estrutura da sequência. Ao partir da descrição verbal "acrescentar dois tijolos ao termo anterior" e ao convidar o colega a pensar numa "sequência que vai de 2 em 2", A5 cria um percurso de aproximação progressiva à generalização, levando A6 a formular progressivamente a expressão algébrica. A6 responde a esse percurso propondo primeiro "2n", que A5 valida, e ajusta depois para "2n − 1", momento em que o significado algébrico se torna claro para ambos.

Para além da sequência de tijolos, a interação foi igualmente determinante na compreensão da relação funcional entre o número de tijolos e o número de buracos. No par A1 e A2, este processo começou com uma dúvida persistente sobre o número de buracos existentes em cada tijolo, o que originou um confronto de perspetivas acerca da interpretação da figura:

A1: Cada [tijolo] tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (…) 8! Mas temos de pensar que, imagina, o tijolo tem buracos à frente e atrás.

A2: Então, é acrescentar 16 a cada [figura]. (…)

A1: Sim. Então tem de ser 16 × 2.

A2: Não.

(…)

A1: Mas imagina 16 é o número total de um tijolo.

(…)

A2: perguntar, vamos perguntar à professora. Professora? (…) Cada tijolo tem 8 ou 16 buracos?

(…)

Professora: Mas é só um buraco que vai de um lado ao outro do tijolo.

A1: ok, ok. Então só tem 8 buracos, OK!

Este episódio refere-se, portanto, à interpretação do enunciado e evidencia como a incerteza inicial pode afetar a progressão da resolução. A divergência entre considerar que cada tijolo teria 8 ou 16 buracos desencadeou uma negociação conceptual que, apesar de não envolver ainda a relação funcional pedida pela tarefa, foi determinante para estabilizar o entendimento da situação. A explicação da professora funcionou como ponto de ancoragem para que ambos pudessem alinhar a compreensão da figura e avançar para a resolução propriamente dita. Nas notas de campo de 5 de março, este momento é referido como uma das razões pelas quais o par "perdeu muito tempo a discutir quantos buracos teria cada tijolo”, o que ajudou a explicar o facto de não conseguirem concluir a tarefa dentro do tempo previsto.

Superada esta dúvida, a díade passou então à análise da relação entre o número de tijolos e o número total de buracos. Neste segundo momento, o diálogo centrou-se já na procura de uma regularidade multiplicativa que explicasse o crescimento simultâneo das duas grandezas.

A2: É assim, há uma relação entre o número de tijolos e o número de buracos. Não há?

A1: Pois.

(…)

A2: Olha, 1 vezes o quê para dar 8?

A1: Vezes 8.

A2: 3 vezes o quê para dar 24? (…) Faz lá 8 × 3.

A1: 24.

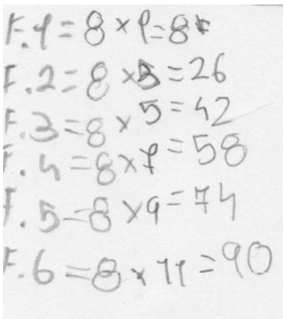
A2: Então, chegámos à conclusão que o número de buracos é sempre vezes 8 ao número de tijolos.

A partir deste diálogo, torna-se claro que a interação permitiu transformar contagens isoladas em generalização. A2 conduziu A1 a testar valores concretos “1 vezes o quê para dar 8?”, “3 vezes o quê para dar 24?”, rejeitando alternativas inconsistentes, até concluírem que a relação entre as duas grandezas é multiplicativa.

Para além desta díade, outras evidências recolhidas durante a aula mostram que o reconhecimento da relação funcional entre o número de tijolos e o número total de buracos foi um traço transversal a vários pares, ainda que expresso com diferentes graus de formalização. Em algumas produções, os alunos recorreram diretamente à multiplicação por 8, organizando os cálculos como uma lista sistemática de produtos sucessivos (Figuras 8 e 9). Noutros casos, esta relação foi incorporada na própria tabela de valores utilizada na resolução, articulando número da figura, número de tijolos e número de buracos (Figura 10).

Figura 8

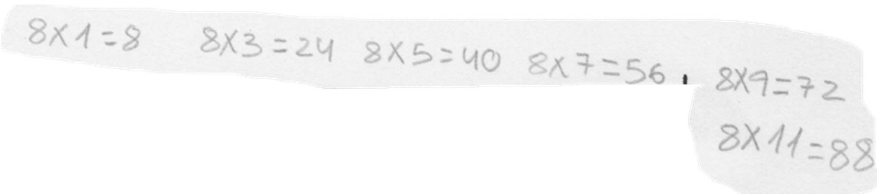
Estratégia adotada por A9 e A10 para a questão 1 da tarefa 2.



Nota. Produção dos alunos A9 e A10, aula de 5 de março.

Figura 9

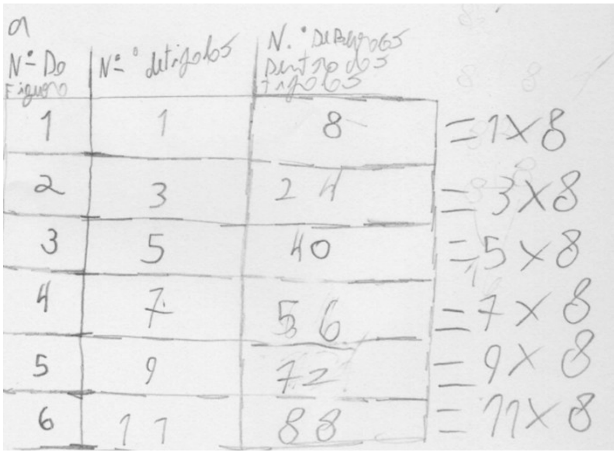
Estratégia adotada por A20 e A21 para a questão 1 da tarefa 2.



Nota. Produção dos alunos A20 e A21, aula de 5 de março.

Figura 10

Estratégia adotada por A7 e A19 para a questão 1 da tarefa 2.



Nota. Produção dos alunos A7 e A19, aula de 5 de março.

Numa abordagem diferente à relação funcional entre o número de buracos e o número de tijolos, a díade A5 e A6 tratou o número de buracos como uma nova sequência numérica e aplicou a mesma estratégia que havia utilizado para generalizar a sequência dos tijolos. Em vez de explorarem a relação entre as duas grandezas, os alunos concentraram-se na evolução dos valores sucessivos dos buracos e procuraram uma expressão algébrica que descrevesse esse crescimento:

A5: Temos uma maneira muito fácil de pensar. Começa no 8 e vai de 16 em 16.

A6: [a figura] 1 é 8.

A5: Vai de 16 em 16.

A6: Sim.

A5: É apenas fazer o mesmo raciocínio.

A6 e A5 (em uníssono): 16n.

A5: −1.

A6: −8. −8!

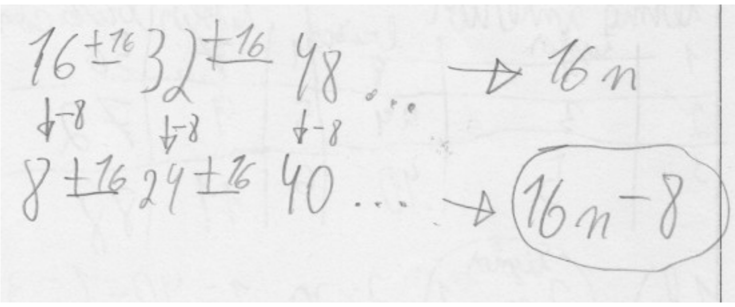
A5: −8!? Ah yah! Faz sentido, não faz?

A6: Calma, 16n porque vai 16 em 16 e menos 8…

A5: Porque começa no 8.

Figura 11

Estratégia adotada por A5 e A6 para as questões 1.b) e 2.b) da tarefa 2.



Nota. Produção dos alunos A5 e A6, aula de 5 de março.

Neste episódio, os alunos transportam diretamente o esquema de generalização usado na sequência dos tijolos para a sequência dos buracos, identificando a regularidade constante entre termos sucessivos e ajustando a expressão ao valor inicial. A frase "é apenas fazer o mesmo raciocínio" torna explícita essa transferência. A construção conjunta de "16n", seguida do ajuste imediato para "16n − 8", revela um processo de monitorização mútua, em que cada proposta é validada, corrigida ou reajustada pelo colega. A produção apresentada na Figura 11 confirma este percurso, mostrando como os alunos construíram primeiro uma sequência auxiliar (16, 32, 48, …) e, a partir dela, ajustaram o valor inicial para chegar à expressão 16n − 8. Embora não explorem aqui a relação multiplicativa entre o número de tijolos e o número de buracos, o diálogo mostra um nível significativo de generalização algébrica em que a díade identifica a estrutura da nova sequência e constrói uma expressão geradora coerente com essa regularidade.

Para além destes processos de generalização numérica e algébrica, a interação entre pares voltou também a desempenhar um papel decisivo na clarificação de conceitos que os alunos ainda estavam a consolidar, nomeadamente a distinção entre lei de formação e expressão geradora. No par A1 e A2, esta diferenciação surge de forma clara:

A2: (…) Vamos então saber primeiro qual é a lei de formação. Eu já sei qual é a lei de formação.

(…)

A2: Eu acho que é 2n + 1.

A1: Não! Isso é a expressão geradora. A lei de formação é tipo, "o que é que acontece?"

A2: hum. [expressão de resignação] Pronto!

Este diálogo evidencia a forma como a interação obriga os pares a explicitar distinções que, quando tratadas individualmente, podem permanecer implícitas ou pouco claras. A1 recupera a definição trabalhada anteriormente: a lei de formação descreve o procedimento que transforma um termo no seguinte, enquanto a expressão geradora fornece uma regra geral em função do número da figura, e verbaliza-a de modo direto e prático: "o que é que acontece?". A resposta conformada de A2 mostra não só o reconhecimento do equívoco, mas também a eficácia da explicitação do par na reorganização conceptual.

A interação desempenhou igualmente um papel relevante na regulação e validação dos procedimentos, sobretudo quando surgiram dúvidas ou resultados inconsistentes. No par A3 e A4, a tentativa de construir uma expressão geradora conduziu a um momento de verificação em que o diálogo funcionou como mecanismo de controlo da tarefa:

A3: Agora temos de fazer isto tudo até 20. Já fizemos até 6, agora até 20.

(…)

Estagiária: Ou então encontram uma regularidade que vos ajude a determinar o 20 sem ter que fazer isso tudo. (…) Tem de ter uma expressão geradora certo?

A4: é sempre de 16 em 16, certo?

A3: 16 × 20… olha como eu sou esperta! (…) 16 × 20 é igual…

(…)

A4: 320

(…)

A4: Nós agora fizemos os tijolos.

(…)

A4: Não dá para ser 320. Está errado. É um número ímpar que tem de dar um número ímpar, isto é um número par. Está errado.

Ainda que marcado por alguma instabilidade, este episódio ilustra de forma clara como o diálogo pode assumir uma função de monitorização e controlo da resolução, sobretudo quando surgem resultados que não parecem coerentes com a estrutura da sequência. A sugestão da estagiária para encontrarem uma expressão geradora desencadeia um momento de experimentação em que A3 avança rapidamente para o cálculo "16 × 20", assumindo-o como resposta plausível sem proceder a uma verificação conceptual. É A4 quem introduz um critério de validação ao reparar que todos os termos da sequência de tijolos são ímpares e que, por isso, um resultado par como 320 não pode estar correto. Esta verificação, baseada numa propriedade observável da sequência, permite identificar de imediato a incoerência e rejeitar o procedimento que lhe deu origem, impedindo que o par avance com uma conclusão incorreta.

As notas de campo de dia 5 de março mostram que este tipo de validação com base no facto de os termos serem sempre ímpares não foi exclusivo desta díade. No par A17 e A18, por exemplo, A18 afirmou que "seguindo a sequência nunca vai dar 88, porque a sequência é 1, 3, 5, 7, 9", enquanto no par A13 e A14, este último justificou que "não pode ser par porque o número de tijolos é sempre ímpar". Estas observações indicam que a coerência entre a natureza dos valores obtidos e a estrutura da sequência funcionou como um critério recorrente de monitorização conceptual, permitindo a vários grupos detetar incoerências sem necessidade de recorrer ao cálculo exaustivo.

Apesar dos contributos cognitivos e metacognitivos evidenciados durante a resolução da tarefa "Os tijolos", a interação entre pares também revelou desafios que interferiram na continuidade da resolução, na fluidez da comunicação matemática e na eficácia da cooperação. Tal como na primeira tarefa, estes desafios assumiram naturezas variadas: desde dificuldades de autorregulação a assimetrias na participação, passando por momentos de bloqueio conceptual ou de instabilidade no discurso matemático. As notas de campo de 5 de março apontam, por exemplo, para díades que "distraem-se bastante, não conseguindo acabar a tarefa", outras que "falam de muitos assuntos e estão pouco focadas na tarefa", bem como pares mais individualistas, que "pensavam em silêncio (…) e só depois partilhavam quando já tinham a solução". A grelha de observação (Anexo H) confirma esta diferença, evidenciando padrões contrastantes: vários alunos registaram níveis elevados de empenho, cooperação e uso adequado de linguagem matemática, enquanto outros revelaram menor participação, dificuldades na comunicação ou interesse reduzido durante a tarefa. Estes contrastes reforçam a diversidade de perfis presente no grupo e ajudam a explicar as dinâmicas distintas observadas nas diferentes díades.

Um dos desafios mais evidentes ocorreu no par A1 e A2, onde a dificuldade em manter o foco e a oscilação constante entre momentos de envolvimento e episódios de dispersão afetaram o avanço da resolução. Em vários momentos, o diálogo é interrompido por brincadeiras, comentários paralelos ou expressões de desmotivação, o que fragmenta o trabalho matemático e cria uma dinâmica em que um dos alunos tenta recuperar a continuidade da tarefa enquanto o outro se afasta. Num dos momentos registados, esta oscilação torna-se clara:

A1: Vá… A2 concentra-te! concentra está?
(…)
A1: Concentra!
(…)
A1: A2 concentra-te no teu trabalho! A2!
(…)
A1: A2! Concentra-te… [com um tom de desespero]
(…)
A1: A2, podes fazer me fazer um favor?
A2: Sim da próxima vez eu brinco menos… Só que eu hoje estou muito preguiçosa.

Os sucessivos pedidos de A1 para que o colega se concentrasse revelam de forma clara como a dificuldade de autorregulação afetou a progressão da díade. A insistência constante em recentrar o trabalho matemático contrasta com as dispersões sucessivas de A2, criando quebras frequentes na continuidade do trabalho. A resposta "da próxima vez eu brinco menos… hoje estou muito preguiçosa" evidencia essa oscilação, ajudando a explicar por que razão o trabalho matemático era sujeito a interrupções sucessivas. Esta dinâmica obrigou A1 a assumir um papel regulador, desviando parte da sua energia cognitiva para a gestão da atenção e limitando o tempo efetivamente dedicado à construção de significados. Nas notas de campo, dificuldades semelhantes foram observadas noutros pares, como no caso de uma díade que "se distraem na brincadeira e não levaram a tarefa a sério", evidenciando que a falta de autorregulação e o desvio constante da atenção constituíram um desafio transversal, capaz de comprometer o avanço da resolução.

Um desafio distinto emergiu na díade A5 e A6, onde se observou uma assimetria consistente na participação. Embora ambos os alunos se mantivessem envolvidos, A5 assumiu frequentemente a condução da resolução, sugerindo estratégias, antecipando procedimentos e orientando as decisões a tomar. A6 acompanhava, validava ou ajustava detalhes, mas com menor iniciativa. Este desequilíbrio surge, por exemplo, quando constroem a expressão geradora para o número de tijolos:

A5: (…) Pensa assim, uma sequência que vai de 2 em 2.

A6: 2n?

A5: Sim. (…) mas começa no 1.

Aqui, o diálogo transforma-se temporariamente numa exposição orientada, em que a urgência em avançar leva A5 a definir o percurso quase sozinho. Embora produtiva, esta dinâmica reduz a oportunidade de coautoria plena e evidencia como a interação pode, por vezes, cristalizar papéis assimétricos no par.

Um desafio particularmente patente nesta aula surgiu durante a construção da tabela, momento em que, em duas díades distintas, o perfeccionismo associado à apresentação formal interferiu na continuidade do trabalho matemático. No par A3 e A4, este perfeccionismo manifestou-se de forma explícita quando A4 revelou dificuldade em avançar enquanto a tabela não estivesse "bonita":

A3: Pronto, já tenho a minha tabela. (…) Não quero saber se está feia ou se está bonita.

A4: Eu não consigo fazer assim como tu fazes. Para mim tem de estar tudo perfeito.

A3: A professora disse para fazer isto rápido.

(…)

A4: Olha a minha… está bonitinha.

A insistência na perfeição gráfica, contrariando a orientação para avançar rapidamente, retardou o progresso e desviou o foco da resolução para o aspeto da apresentação, criando tensão no par e reduzindo o tempo disponível para o trabalho conceptual.

Situação semelhante ocorreu na díade A5 e A6, onde o perfeccionismo emergiu sob a forma de uma preocupação insistente com o traçado "correto" da tabela, mesmo após a orientação da estagiária no sentido de simplificar o procedimento. A6 resistiu a abandonar a régua e a preparar a tabela de forma mais rápida, o que gerou frustração em A5 e atrasou o início da resolução:

Estagiária: Não precisas de usar régua. Faz uma tabela sem régua.

A6: Eu não gosto, professora.

(…)

A5: Tu és uma tartaruga!

Nestes dois episódios, o perfeccionismo assume uma função bloqueadora: a preocupação com a apresentação da tabela atrasa e condiciona o envolvimento na resolução. O tempo investido na apresentação reduz o tempo útil para explorar a sequência e discutir estratégias, gerando desequilíbrios na cooperação e interrupções na fluidez da tarefa.

2.2. Discussão coletiva

A análise da discussão coletiva da aula de 5 de março mostra que a interação entre os alunos foi fundamental para a negociação de significados, a validação pública de estratégias e a explicitação e reformulação das estratégias e procedimentos. Estes processos revelam dinâmicas claras de co-construção, nas quais os alunos mobilizam e ajustam ideias inicialmente desenvolvidas em díades, recorrendo ao diálogo para clarificar procedimentos, justificar escolhas e apoiar a compreensão dos colegas.

Um dos momentos centrais da discussão coletiva ocorreu quando a estagiária solicitou à turma que olhasse diretamente para a imagem da sequência e propôs a sua decomposição. A decomposição da figura em "tijolos na fileira de baixo" e "tijolos na fileira de cima" originou um processo de construção conjunta da expressão 2n – 1 que não foi apresentada pelas díades.

Estagiária: Tenho os tijolos que estão…
Alunos: Em baixo.
(…)
Estagiária: Quantos tijolos tenho em cima?
Alunos: 1.
Estagiária: Eu posso relacionar este 1 com este 2?
A5: É sempre menos um que o número da figura.
(…)
Estagiária: Então, se aqui é n − 1, aqui é quanto?
A5: n.
A2: Sim, porque n é o número da figura.
(…)
A5: Aí está outra maneira de fazer a expressão geradora.

A explicação conjunta decorreu de um processo visivelmente cooperativo: A5 propôs a relação "n − 1", A2 validou o significado de n, A6 questionou e procurou compreender a ligação entre as ordens dos termos, e vários colegas intervieram para verificar a consistência da relação. Este episódio evidencia uma verdadeira negociação social do significado, em que diferentes contributos parciais convergiram para a construção da expressão $2n - 1$.

A decomposição da figura funcionou como um suporte visual para a generalização algébrica, permitindo que os alunos relacionassem diretamente a estrutura da imagem com a estrutura simbólica. O diálogo revela ainda como a estagiária abriu espaço para que os pares se explicassem mutuamente, nomeadamente quando aguardou que os alunos esclarecessem as dúvidas uns aos outros antes de intervir, reforçando o papel do coletivo como motor de generalização.

A explicação anterior teve impacto imediato no trabalho de algumas díades. A3 e A4, que durante a resolução mostraram dificuldade em generalizar, apropriaram-se da generalização construída pelo grupo e aplicaram-na autonomamente ao termo de ordem 20, reconstruindo oralmente a expressão algébrica a partir da relação entre os "tijolos na fileira de baixo" e os "tijolos na fileira de cima".

A3: Agora já entendi como é que nós podíamos ter feito! Como em baixo é sempre o número da ordem, no termo de ordem 20 é 20 tijolos em baixo.

A4: E 19 tijolos em cima.

A3: Exatamente. E dá 39!

Este diálogo mostra de forma clara a função transformadora da discussão coletiva. A relação n e $n-1$, construída momentos antes pelo grupo, torna-se imediatamente reutilizável pelo par. Ao explicitar "como é sempre o número da ordem", A3 revela ter passado da observação empírica para uma generalização transferível, enquanto A4 complementa o procedimento com o termo "19". A interação entre ambos revela apoio mútuo e reconstrução conceptual, mostrando que a aprendizagem entre pares também ocorre no espaço do coletivo, quando as explicações dos colegas desbloqueiam formas de compreender a estrutura anteriormente inacessíveis.

Outro momento marcante ocorreu quando A15 apresentou a sua estratégia para determinar os valores da figura 20, recorrendo a uma multiplicação direta dos valores da figura 5. A reação dos colegas deu origem a um debate rico em argumentação e critérios matemáticos.

A15: 5 × 4 é 20. Então fiz 9 × 4 para saber os tijolos e 72 × 4 para saber os buracos.

A6: Onde é que tu foste buscar o 72?

A13: Mas é só números ímpares!

(…)

A3: De onde é que vem o 9?

(…)

A13: Tem de ser ímpar.

Estagiária: Porquê que dizes isso?

A13: Porque começou por 1 e com a lei da sequência que é 1 + 2 deu 3 e por assim em diante dá sempre só número ímpares. Se calhou número par é porque não faz parte da sequência.

(…)

Estagiária: E quando multiplicamos um número ímpar por um número par?

A6: Vai dar par.

Este episódio é exemplar do modo como o coletivo mobiliza critérios matemáticos consistentes para validar ou rejeitar estratégias. Os alunos recorrem à regularidade estrutural da sequência, números ímpares, como argumento central. Ao confrontarem a estratégia do colega, os pares não apenas criticam, mas justificam matematicamente por que razão a multiplicação por 4 não respeita a regra da sequência. A justificação de A13 e a intervenção de A6 constituem passos de controlo conceptual, que evidenciam argumentação de natureza relacional e monitorização matemática.

O último episódio mostra um processo de apoio conceptual entre pares na passagem da regularidade para uma expressão algébrica. Convidado pela estagiária a construir a expressão geradora do número de buracos a partir da expressão do número de tijolos, A6 começou por escrever $2n - 1 \times 8$, mas não identificou a necessidade de parênteses.

Estagiária: O que falta nesta expressão?

(…)

A6: Professora, não falta nada.

(…)

Estagiária: Turma, o que vou resolver primeiro nesta expressão tal e qual como ela está neste momento?

A6: Imagina que é uma expressão numérica.

A5: Vai fazer primeiro o $2 \times n$ e depois o 1×8. No final vai ficar $2n - 8$.

A6: Não, não vai. No final vai ficar 16n-

(…)

Estagiária: Falta aqui qualquer coisa nesta expressão.

(…)

Estagiária: Queres perguntar aos teus colegas?

A6: Alguém sabe?

(…)

A1 e A2: Os parênteses!

(…)

A5: Faz os parênteses à volta do $2n - 1$.

(…)

A5: Depois é isso vezes 8, porque cada tijolo tem 8 buracos.

Este episódio revela de forma muito clara a força da mediação entre pares: antes da estagiária intervir diretamente, A5, A2 e A1 ofereceram pistas sucessivas que permitiram a A6 reconstruir o significado da expressão. A ajuda não se limitou ao resultado, tratou-se de uma intervenção focada no processo: perceber a ordem das operações e reconhecer que primeiro se determina o número de tijolos e só depois se multiplica por 8. O contributo dos colegas funcionou como um verdadeiro suporte conceptual, permitindo a A6 avançar de uma visão operatória para uma compreensão estrutural da expressão algébrica.

Apesar dos contributos significativos da discussão coletiva para a construção conjunta de significados e para a consolidação das estratégias elaboradas em díades, emergiram também várias limitações inerentes à dinâmica espontânea entre os alunos. Estes desafios revelam fragilidades tanto na gestão da participação como nos processos de comunicação e validação entre pares, afetando a fluidez da discussão e, por vezes, a própria compreensão das estratégias apresentadas.

Tal como observado noutras fases da intervenção, a discussão coletiva foi dominada por um grupo reduzido de alunos, sobretudo A5, A6, A13 e A2, que intervieram com frequência, antecipando respostas e conduzindo grande parte da argumentação. Em contraste, vários colegas participaram apenas quando diretamente solicitados pela estagiária e, mesmo assim, com hesitação ou silêncio prolongado. Um momento particularmente ilustrativo ocorreu quando a estagiária tentou distribuir a palavra para identificar a expressão geradora:

Professora: A9, diz-me a expressão geradora…

[silêncio]

Professora: A10?

[silêncio]

Professora: A19?

A19: $2n – 1$.

A sucessão de silêncios, seguida da resposta imediata de um aluno mais confiante, evidencia um padrão de participação desigual: enquanto alguns assumem protagonismo discursivo, outros parecem receosos de expor o o pensamento matemático, mesmo quando possuem o conhecimento necessário. Esta assimetria restringe a diversidade de estratégias em circulação e limita as oportunidades de aprendizagem proporcionadas pela interação coletiva.

Em vários momentos da discussão coletiva, sobretudo quando surgiram estratégias inesperadas ou respostas que divergiam do habitual, a turma reagiu com comentários paralelos, expressões espontâneas e sobreposição de vozes. Este ruído de fundo dificultou a escuta ativa, fragmentou o diálogo e perturbou a compreensão progressiva das ideias partilhadas. O episódio associado à apresentação da estratégia de A15 ilustra de forma clara este fenómeno. Ainda antes de o aluno iniciar a explicação oral, apenas ao escrever a sua resolução no quadro, vários colegas reagiram de imediato:

[A15 apresenta a sua resolução]

Vários alunos: “hã?”, “o quê?”

Estagiária: Eu não quero esses comentários, mas sim perguntas para perceberem como a colega pensou.

Estas interjeições, surgindo antes da conclusão da apresentação da estratégia, fragmentaram o foco da turma e levaram a estagiária a intervir para recentrar o diálogo nos aspetos matematicamente relevantes. No entanto, o desafio não se limitou ao ruído. Seguiu-se a tendência para formular julgamentos precipitados, corrigindo o par antes de compreender a lógica da sua estratégia. À medida que A15 tentava explicar, a turma reagia com afirmações categóricas:

A13: Mas é só números ímpares.

A20: Exato.

(…)

A6: Só que não deu certo porque tem de ser número ímpar.

(…)

A3: Onde é que ela foi buscar o 9?

Estas intervenções, ainda que matematicamente fundamentadas, surgiram sem qualquer tentativa prévia de reconstruir o procedimento utilizado pelo colega. O efeito acumulado foi visível. A15 revelou uma crescente insegurança, hesitou na explicação e a estagiária teve de intervir novamente para evitar o bloqueio comunicativo. A conjugação entre o ruído e os julgamentos imediatos cria um ambiente em que o erro tende a ser sancionado antes de ser compreendido. Em vez de funcionar como oportunidade para análise da estratégia, o equívoco arrisca transformar-se numa marca de falha individual, sobretudo para alunos com menor confiança ou domínio discursivo. Este episódio mostra que, em contextos de discussão matemática, a rapidez em corrigir pode ser dissuasora quando não vem acompanhada da reconstrução cuidadosa do procedimento subjacente.

3. Terceira tarefa – O Folar de ovos

3.1. Realização da tarefa em díades

A aula de 12 de março dedicada à tarefa *O Folar de Ovos* permitiu observar de forma muito clara como a interação entre pares influencia a compreensão do enunciado, a seleção de estratégias, a comunicação matemática e a autorregulação durante a resolução de problemas. Tal como nas tarefas anteriores, as díades revelaram dinâmicas heterogéneas: alguns pares comunicaram de forma estruturada e cooperativa, enquanto outros evidenciaram dificuldades de concentração, assimetrias de participação ou bloqueios conceptuais, particularmente na interpretação da proporcionalidade entre grandezas e na justificação das relações encontradas. A grelha de observação (Anexo I) e as notas de campo reforçam essa diversidade de perfis, assinalando desde participações parciais ou individualistas até pares que cooperam de forma produtiva e discursivamente rica.

Um primeiro contributo relevante emergiu na fase inicial de leitura e interpretação das questões. Em várias díades, o diálogo funcionou como instrumento de regulação mútua, permitindo centrar a atenção no enunciado e alinhar o sentido da tarefa. No par A5 e A6, este papel assume uma forma particularmente explícita:

A6: Calma, calma, calma, A5, deixa-me ler a pergunta.

Este pequeno episódio, aparentemente simples, evidencia a capacidade da díade para se autorregular, controlar o ritmo da leitura e recentrar o trabalho. Ao pedir que o colega abrande, A6 assegura que ambos partem de uma compreensão comum da questão, evitando interpretações precipitadas. Desta forma, o controlo da atenção e do ritmo da leitura deixa de ser individual e passa a ser partilhado entre a díade, permitindo que a resolução avance de forma mais clara e construtiva.

Num registo distinto, também A2 e A1 identificaram a necessidade de clarificar o enunciado antes de avançarem:

A2: Eu não estou a perceber nada porque ainda não falámos sobre o problema uma com a outra.

Ao explicitar a sua dificuldade, A2 evidencia um posicionamento metacognitivo importante: reconhece que a compreensão não se constrói individualmente, mas através da discussão. A verbalização deste impasse permite iniciar um diálogo mais focado, revelando que, mesmo em díades marcadas por dispersão ou instabilidade, a interação pode funcionar como um apoio essencial para recentrar o diálogo e reconstruir a compreensão do problema.

A interação entre pares revelou-se igualmente determinante na escolha das estratégias associadas à proporcionalidade direta entre o número de folares e as quantidades de ingredientes. No par A2 e A1, a reconstrução da estratégia "vezes 3" surge após uma sequência de perguntas curtas que procuram estabilizar o sentido da relação:

A2: 2 vezes o quê para dar 6?

A1: Dá 3.

A2: 3. Então, fazemos 70 × 3.

A1: Que dá 210. Que é uma coisa que 70 + 70 + 70.

A2: Sim.

A1: Ou 70 + 70 dá igual a 140, mais 70 igual a 210. É sempre tipo o número vezes 3, por exemplo, 2 × 3.

A2: É isto mesmo.

Este diálogo ilustra de forma clara como a insistência discursiva pode reconduzir a estratégia à relação funcional em causa. A2 inicia o processo com uma pergunta simples, mas orientadora, que leva A1 a identificar o fator multiplicativo entre 2 e 6. A partir desse ponto, a estratégia deixa de surgir como aplicação mecânica e passa a ser construída de forma dialogada: primeiro através da multiplicação direta "70 × 3" e, de seguida, pela decomposição aditiva que A1 explicita "70 mais 70 mais 70", evidenciando a equivalência entre ambas as abordagens. Este movimento discursivo de questionar, responder, justificar e decompor permite que a relação proporcional seja progressivamente compreendida e validada pela díade. A formulação final "É sempre tipo o número vezes 3" mostra que o padrão multiplicativo foi reconstruído, não por repetição, mas como resultado de um processo de negociação de significados, no qual cada intervenção contribuiu para estabilizar a estratégia.

Numa outra díade, a interação entre pares evidenciou um percurso distinto, marcado pela persistência de uma interpretação errada da estrutura da tarefa. Sob influência do trabalho anterior sobre sequências, A3 e A4 iniciaram a resolução aplicando multiplicações sucessivas aos resultados obtidos, gerando valores incoerentes e expressando dúvidas sobre a validade do procedimento. A perceção de que os resultados não estavam a corresponder ao que se esperava levou-as a solicitar o apoio da estagiária, que procurou recentrar a resolução na informação fornecida pela tabela.

A4: 18 vezes 3?

A3: 54. (…) 54 × 3 igual a 162

(…)

A4: Eu acho que isto está errado.

A3: Não, A4. Está certo. Acho eu…

A4: É porque isto não está a fazer sentido. Não, isto está errado.

(…)

(chamam a estagiária]

(…)

Estagiária: O que vos diz a tabela?

(…)

Estagiária: Para dois folares são precisos…

A3: Preciso 8 ovos.

Estagiária: Quantos ovos são precisos para 6 folares?

(…)

A4: 8 × 3… por isso é que eu disse que nós estávamos a fazer mal.

A3: Ah…! Ok. Já entendi.

(…)

A3: 24. 70 × 3?

Este episódio revela o modo como a interação entre pares pode funcionar como um espaço de regulação cognitiva, mesmo quando os alunos partem de uma resolução incorreta. A verbalização da dúvida “isto não está a fazer sentido” constitui um sinal importante de monitorização do próprio pensamento, permitindo que o erro deixe de ser apenas um resultado incorreto e passe a ser objeto de reflexão conjunta. A intervenção da estagiária atua como mediadora externa que reposiciona a díade no quadro da proporcionalidade direta, mas é o diálogo que se segue, a apropriação verbal do “8 × 3” e a reação imediata de compreensão, que mostra como a explicação é integrada e transformada em estratégia.

A capacidade de justificar matematicamente as relações encontradas constituiu um dos contributos mais significativos da interação entre pares, particularmente na alínea relativa ao preço e a massa do fermento. No par A5 e A6, este momento revelou-se especialmente rico: partindo de justificações inicialmente hesitantes, os alunos envolveram-se num diálogo em que a comparação sistemática de valores, a verificação de relações e a reconstrução conjunta de significados orientaram a construção da resposta.

A5: 50 gramas são 30 cêntimos. (…) 100 gramas é o dobro de 50. 60 cêntimos é o dobro de 30. (…) 200 gramas ao dobro disto. Podia ser o dobro de 60 cêntimos, mas é 1 euro. Não é o dobro de 60 cêntimos.

A6: O dobro de 60 cêntimos é 1 euro e 20.

A5: Exatamente, mas aqui está só 1 euro.

(…)

A5: 250 gramas seria mais 30 cêntimos porque 50 gramas são 30 cêntimos. Ficou 1 euro e 20. Ou seja…

A6: E um euro e 20 devia ser aqui.

A5: Exatamente

A6: Ou seja, aqui devia ser um euro e meio.

(…)

A6: Então vamos explicar. Então, se 50 é igual a 30 cêntimos,

A5: 100 gramas, depois eu meto entre parênteses 50+50.

A6: Sim, igual a 60 cêntimos.

(…)

A5: Depois eu meti 100 gramas é 50 + 50 igual a 60 cêntimos que é 0,30 + 0,30. Depois, 200 gramas, 100 + 100, mas só que é igual a 1 euro. Estás a perceber? 1 euro. (…)

A5: Eu no 250 vou meter 200 + 50

A6: Resposta: Não porque…

(…)

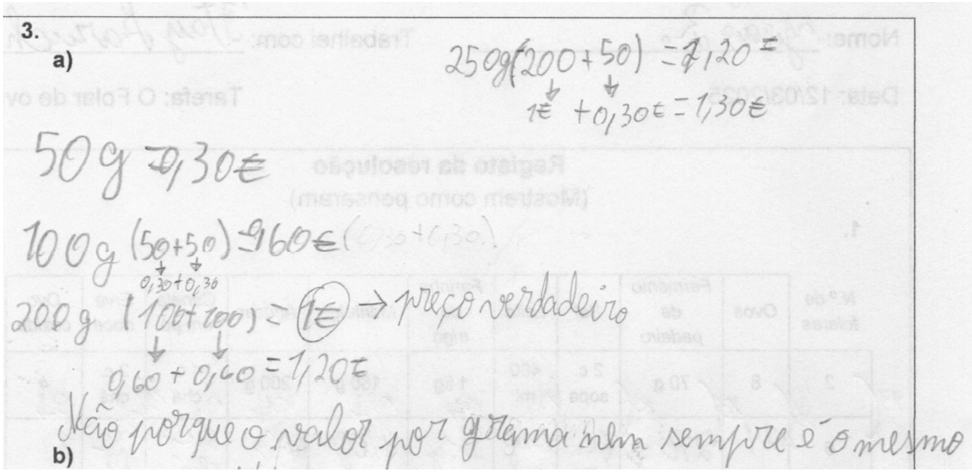
A5: Vê se concordas. Porque o valor por 50 gramas nem sempre é o mesmo.

(…)

A6 e A5: O valor por grama nem sempre é o mesmo.

Figura 12

Estratégia adotada por A5 e A6 para a questão 3.a) da tarefa 3.



Nota. Produção dos alunos A5 e A6, aula de 12 de março.

Este excerto evidencia de forma exemplar como a comunicação matemática entre pares pode potenciar a construção de uma justificação sólida e conceptualmente fundamentada. Ao recorrer sistematicamente ao dobro como referência comparativa, “100 gramas é o dobro de 50” e “60 cêntimos é o dobro de 30”, A5 orienta a análise de A6, estruturando a justificação em passos sucessivos e logicamente encadeados. A intervenção de A6, “O dobro de 60 cêntimos é 1 euro e 20”, funciona como mecanismo de validação conceptual, confirmando a coerência da relação e tornando explícita a discrepância presente na tabela. A produção escrita (Figura 12) corrobora este percurso, evidenciando a decomposição aditiva (50+50; 100+100; 200+50) para verificar a consistência dos preços e explorar a razão preço/massa. A frase conjunta, “o valor por grama nem sempre é o mesmo”, sintetiza este processo. Não é apenas a resposta correta, mas o culminar de uma argumentação co-construída, no qual a justificação emerge do diálogo, da comparação de unidades e da articulação entre estruturas aditivas e multiplicativas.

Embora de forma menos segura, A1 e A2 também procuraram justificar a relação entre a massa e o preço do fermento. O diálogo entre ambos revela uma compreensão parcial da estrutura proporcional, marcada por tentativas de comparar valores esperados e observados e por momentos de hesitação na formulação da justificação.

A2: Se fosse cada 50 gramas, 30 cêntimos. 100 gramas devia ser vezes 2, não é?

A1: Então está certo.

A2: Está certo. Agora, 100 × 2 dá 200. 60 × 2 dá 1 euro?

A1: Não. Dá 1,20 euros.

A2: Então, mas isto não é vezes 2. Então quer dizer que não está igual.

A1: Está bem.

A2: Estás a perceber?

A1: Então qual é a relação?

A2: A relação entre os pesos de fermento e os preços a pagar? Opa, eu não percebi. Só sei que não está igual.

Neste diálogo, observa-se uma justificação ainda incipiente, mas construída a partir de comparações entre valores esperados e valores observados. A2 identifica corretamente que, se o preço fosse proporcional à massa, duplicar 100 gramas deveria duplicar também os 60 cêntimos, conduzindo a 1,20€. A constatação de que o valor apresentado é diferente leva-a a concluir que "não está igual", revelando uma forma espontânea de testar a hipótese proporcional. Ainda que A1 participe sobretudo através de validações pontuais, o diálogo permite que a díade avance na interpretação dos dados, operando com ideias fundamentais, ainda que fragmentadas, sobre a relação entre grandezas.

Também o par A3 e A4 revelou progressos na justificação da relação entre massa e preço, ainda que com um nível de elaboração mais intuitivo e menos sistemático. O diálogo entre a díade mostra um esforço de comparar valores esperados com valores observados, mobilizando o pensamento proporcional de forma espontânea para justificar porque a relação não se mantém constante.

A3: Não é. Porque olha aqui. Aqui faz 250 se fosse o mesmo tinha de ser 1 euro e 50. Que é 1 euro vem do 200 [g].

(…)

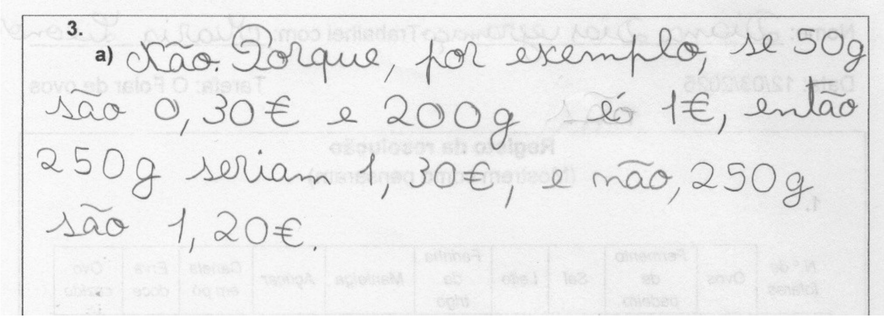
A4: 1,30 euros

A3: Sim. Porque é 1 euro mais 30 cêntimos.

A4: Então não.

Figura 13

Estratégia adotada por A3 e A4 para a questão 3.a) da tarefa 3.


3.

a) Não. Porque, por exemplo, se 50g são 0,30€ e 200g só 1€, então 250g seriam 1,30€, e não, 250g são 1,20€.

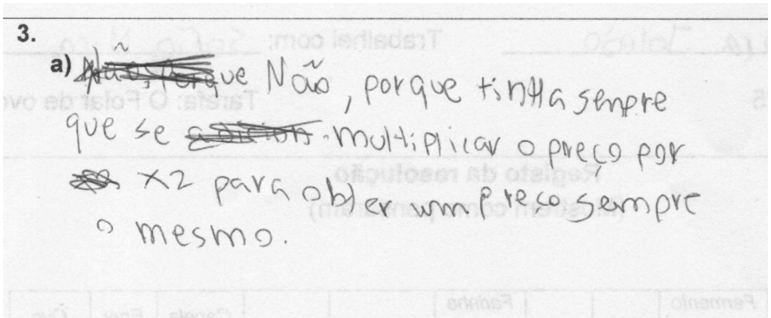
Nota. Produção dos alunos A3 e A4, aula de 12 de março.

Este diálogo revela um nível intermédio de justificação, no qual a relação entre grandezas é analisada através da comparação entre o preço observado e o preço que seria esperado caso a proporcionalidade se mantivesse. A3 mobiliza corretamente a decomposição da massa, 200g correspondem a 1€, pelo que 250g deveriam corresponder a 1,30€, e utiliza esse valor como critério para justificar a resposta negativa. Embora a argumentação seja menos estruturada do que noutros pares, a produção escrita apresentada na Figura 13 confirma que a díade consegue relacionar unidades de massa e preço e reconhecer desvios ao esperado.

A análise das produções escritas revela ainda díades em que a justificação não emergiu como construção conjunta. No par A15 e A16, apesar de terem trabalhado em conjunto, cada aluno apresentou uma explicação distinta, revelando uma compreensão fragmentada da relação entre massa e preço e a ausência de negociação conceptual durante a tarefa.

Figura 14

Estratégia adotada por A15 para a questão 3.a) da tarefa 3.



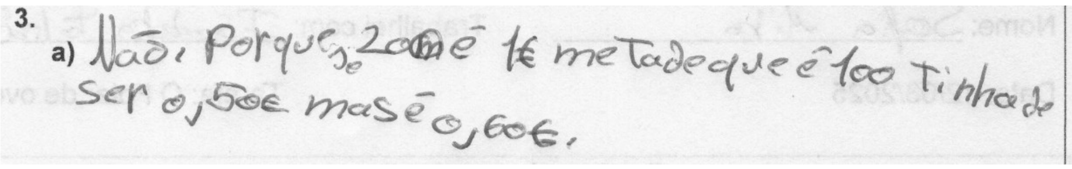
3.

a) Não, porque tinha sempre que se multiplicar o preço por x2 para obter um preço sempre o mesmo.

Nota. Produção de A15, aula de 12 de março.

Figura 15

Estratégia adotada por A16 para a questão 3.a) da tarefa 3.



3.

a) Não, porque se 200g é 1€ metade que é 100 tinha de ser 0,50€ mas é 0,60€.

Nota. Produção de A16, aula de 12 de março.

Estas duas produções revelam um caso particular em que a comunicação matemática não funcionou como espaço de negociação conceptual. A15 (Figura 14) mobiliza uma regra verbal simplificada, multiplicar o preço por 2, que reduz a proporcionalidade a uma duplicação automática, ignorando a relação entre as grandezas preço e unidade de massa. Já A16 apresenta (Figura 15) uma justificação conceptualmente mais robusta, recorrendo à ideia de metade para comparar o valor esperado de 100g com o valor observado de 0,60€, evidenciando uma compreensão adequada da proporcionalidade. Contudo, apesar de estar correta, esta explicação surge isolada, sem articulação com o colega. A ausência de convergência entre as duas respostas mostra que, nesta díade, a interação entre pares não gerou uma justificação partilhada, pelo contrário, cada aluno produziu a sua, revelando dificuldades na co-construção e comunicação do pensamento matemático.

A análise transversal das díades revelou outros desafios associados à forma como a interação se organizou. A assimetria na participação constituiu o obstáculo mais recorrente, assumindo formas diversas. No par A3 e A4, a liderança unilateral de A4 surge de forma explícita:

A4: Olha, eu vou começar a fazer. Se tu não queres, não faças.

Este excerto evidencia uma cooperação frágil, na qual a responsabilidade da resolução recai quase exclusivamente sobre um dos elementos da díade. A comunicação assume um carácter diretivo e pouco propício à construção conjunta de significado, reduzindo a oportunidade de o colega participar na formulação da estratégia.

Situação semelhante foi registada nas notas de campo do dia 12 de março relativamente ao par A7 e A8 em que diz explicitamente "O A7 (..) tem de explicar tudo ao A8. Não existe discussão neste par, apenas explicação." Neste caso, a interação assume a forma de exposição unilateral, em que um aluno transmite a estratégia de resolução e o outro recebe-a passivamente, sem participação ativa. A ausência de diálogo impede a negociação de significados e a validação conjunta que caracterizam processos de aprendizagem verdadeiramente cooperativos.

Um desafio de natureza diferente surge no par A13 e A14, onde a assimetria deriva da dificuldade em aceitar ou escutar as propostas do colega. Nas notas de campo de 12 de março foi registada a seguinte afirmação de A13: "Ele não sabe, e depois tudo o que digo, está sempre errado". Aqui, o bloqueio não advém da diferença de domínio matemático, mas de uma relação interpessoal fragilizada, marcada pela desvalorização das contribuições do par. Esta postura inibe a partilha de justificações e a construção cooperada da estratégia, transformando a díade num espaço de frustração e resistência em vez de num ambiente de co-construção.

Para além destes casos, outros episódios ilustram desafios mais subtis, mas igualmente relevantes, na gestão da interação. No par A5 e A6, a dificuldade residiu não apenas na assimetria de desempenho, mas na forma como essa assimetria se refletiu na tomada de decisão e na partilha de responsabilidades. Em vários momentos, A6 procurou assumir o controlo da resolução:

A6: Vou fazer a lei de formação. Se não quiseres escrever, não escrevas.

Ao mesmo tempo que expressava frustração pela falta de trabalho conjunto:

A6: Sabes que devemos fazer isto em conjunto, não é A5?

Esta oscilação entre uma tentativa de condução unilateral e apelo à cooperação evidencia um desequilíbrio relacional que condicionou a fluidez do trabalho partilhado.

Um desafio distinto emergiu no par A1 e A2, marcado por tensões na escuta e na gestão da tomada de palavra. O diálogo inclui momentos de sobreposição de falas e dificuldade em negociar tempos de intervenção:

A1: A2, vamos pensar!
A2: A1, A1, A1, A1…
A1: Ouve, ouve, tens que saber ouvir.
A2: Não… Ó A1, tu também. Eu ainda não acabei.
A1: Então vá.

Este episódio mostra que, mesmo quando ambos tentam contribuir, a dificuldade em gerir a escuta e a tomada de palavra compromete a construção de uma estratégia conjunta. A interação torna-se marcada por interrupções e negociações sucessivas, revelando que o desafio não está apenas no conteúdo matemático, mas na coordenação comunicativa necessária para que o diálogo seja produtivo.

Para além dos desafios comunicativos e relacionais, emergiram igualmente dificuldades de natureza conceptual, sendo a mais transversal a confusão entre proporcionalidade direta e a lógica de sequência numérica. Esta dificuldade manifestou-se em várias díades e interferiu diretamente na escolha de estratégias, na interpretação do enunciado e na coerência dos resultados produzidos.

Um dos casos mais marcantes ocorreu no par A3 e A4, onde a interpretação inicial do problema foi condicionada pela experiência prévia com tarefas de sequências. Assumindo que se tratava novamente de uma progressão gerada por multiplicações sucessivas, a díade começou a aplicar fatores de crescimento contínuo sem relação com a situação apresentada. O diálogo ilustra claramente esta confusão:

A4: 18 × 3?
A3: 54. (…) 54 × 3 igual a 162.

A multiplicação sucessiva de resultados (“18 × 3”, “54 × 3”, “162 × 3”) revela que ambos estavam a tratar a tabela como se cada linha fosse uma sequência gerada através de multiplicações sucessivas, ignorando a proporcionalidade entre número de folares e quantidade de cada ingrediente.

Um desafio semelhante surgiu no par A5 e A6, embora com características distintas. Aqui, a confusão conceptual surge sobretudo pela tentativa de A6 impor ao problema a estrutura formal de uma “lei de formação”, típica de sequências:

> A6: Então a lei de formação é multiplicar por 3 o termo anterior para obter o termo seguinte.
>
> A5: Onde é que está o termo anterior?
>
> A6: É este! (…) Este é o primeiro, este é o segundo…

O diálogo mostra um esforço insistente de A6 em reinterpretar a tabela como uma sequência, mesmo quando A5 lhe pede que se foque na relação entre as duas linhas (2 folares e 6 folares). A discussão torna-se circular: A5 questiona a aplicabilidade da lógica de “termos”, enquanto A6 tenta forçar a estrutura sequencial (“primeiro”, “segundo”, “seguinte”). Antes de chegarem a uma conclusão, a interação é interrompida, o que impede a resolução deste impasse conceptual. Este episódio evidencia como os conhecimentos recentemente construídos, neste caso, sobre sequências, podem interferir com a interpretação de novas tarefas, sobretudo quando os alunos procuram aplicar automaticamente estruturas familiares, mesmo quando inadequadas.

Também no par A1 e A2 se observa uma dinâmica idêntica, ainda que com maior oscilação entre dúvida e insistência. Apesar de A1 inicialmente identificar corretamente o fator de proporcionalidade (“2 × 3 dá 6”), ambos entram numa discussão prolongada em que A2 questiona múltiplas vezes se o problema constitui ou não uma sequência:

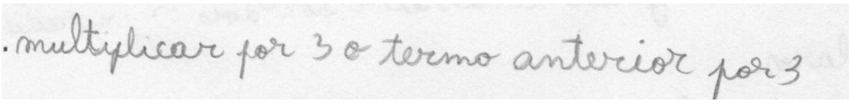
> A2: Mas como é que isto é uma sequência?
>
> A1: Hã?
>
> A2: Mas como é que isto é uma sequência?
>
> A1: Isto não é sequência
>
> A2: É, é.
>
> A1: Não é não.
>
> A2: A1 tem de ser. A gente está a dar as sequências.
>
> A2: Não é, não. A1… vamos só [continuar] ok?

Este diálogo evidencia de forma clara como a proximidade entre tarefas pode induzir interferências conceptuais. A2 associa automaticamente o exercício à temática anteriormente trabalhada e procura enquadrar a tabela dentro dessa lógica. A1 reconhece que a tarefa não segue essa lógica, mas a insistência do par torna a interação oscilante, marcada por interrupções, sobreposições e tentativas frustradas de clarificação.

Esta dificuldade conceptual não se limitou às díades que verbalizaram estas confusões. Também se manifestou em produções escritas noutras díades, como no par A7 e A8, onde a explicação apresentada indica que os alunos assumiram tratar-se de uma sequência numérica. Na resposta à questão 2 (Figura 16), os alunos registaram a regra *"multiplicar por 3 o termo anterior"*, sugerindo que interpretaram os valores como termos consecutivos de uma progressão gerada por multiplicação e não como grandezas relacionadas por proporcionalidade direta.

Figura 16

Estratégia adotada por A7 e A8 para a questão 2 da tarefa 3.

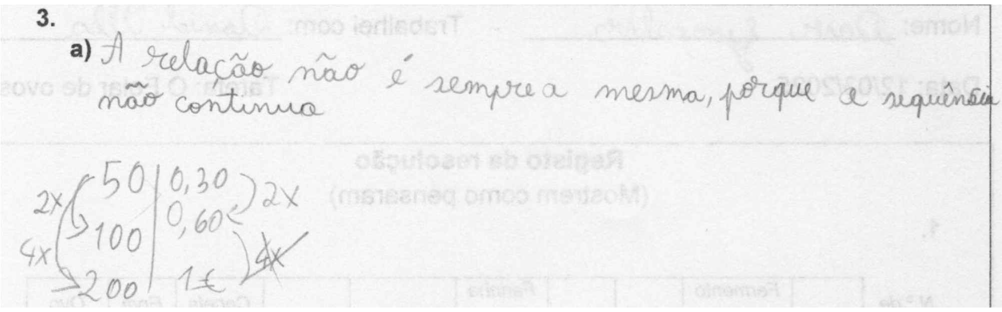


Nota. Produção dos alunos A7 e A8, *aula de 12 de março*.

Na alínea 3.a), os mesmos alunos reforçaram essa leitura ao justificarem a resposta com o argumento de que *"a sequência não continua"* (Figura 17). Esta explicação indica que continuaram a procurar uma regularidade entre termos sucessivos, tomando a tabela de preços como se representasse uma sequência numérica uniforme, ignorando que os valores correspondem a relações entre grandezas diferentes (massa e preço) e não a uma progressão.

Figura 17

Estratégia adotada por A7 e A8 para a questão 3.a) da tarefa 3.



Nota. Produção dos alunos A7 e A8, *aula de 12 de março*.

Outro conjunto de desafios emergiu ao nível da autorregulação, da gestão do tempo e da capacidade de manter a continuidade da tarefa. Em algumas díades, estes fatores tiveram impacto direto na qualidade do trabalho matemático produzido e na própria possibilidade de completar a resolução.

No par A1 e A2, surgiram dificuldades relacionadas com a autorregulação e com a manutenção do foco na tarefa. De acordo com as notas de campo de 12 de março, "o par não acabou a resolução da tarefa pois divertiu-se nos últimos minutos a destruir uma calculadora". A ausência de continuidade não parece resultar de dificuldades matemáticas, mas de um desvio abrupto da atenção, que levou ao abandono total da tarefa.

No par A3 e A4, a gestão do tempo revelou-se um fator decisivo na forma como a resolução da tarefa foi conduzida. A constante monitorização do relógio levou a uma aceleração progressiva das decisões, afetando a forma como justificavam os procedimentos:

A4: São e 20. Só temos 20 minutos.

(…)

A4: Então despacha-te. Temos 15 minutos. Até menos. São e 27. Temos 13 minutos.

(…)

A4: São e 33 portanto…

A3: Sim, faltam 7 minutos.

(…)

A3: São e 35. Temos 5 minutos.

(…)

A3: E acabámos um minuto antes, A4. A4? A4? 1 minuto antes.

A4: Acabámos um minuto antes. Pronto! Yupi!

A atenção frequentemente transferida para o tempo disponível traduz-se numa execução apressada, deixando menos espaço para explicar, justificar ou validar cada procedimento. A rapidez passa a sobrepor-se à reflexão, comprometendo o rigor conceptual e a clareza argumentativa, que são dimensões essenciais numa tarefa que exige analisar relações proporcionais.

As notas de campo registam ainda casos em que a dispersão, mais do que a pressão temporal, interferiu diretamente na continuidade da tarefa. No par A20 e A21, a energia e o entusiasmo acabaram por desviar completamente o foco da atividade. De acordo com o registo de 12 de março, as observações sobre este par indicam que estavam "muito divertidas, mas não a trabalhar". Neste caso, a ausência de foco decorre de uma gestão insuficiente do envolvimento. A dinâmica da díade, marcada por brincadeiras constantes, impede a concentração necessária para avançar na tarefa, comprometendo a construção de justificações sustentadas e a progressão do trabalho.

3.2. Discussão coletiva

A análise da discussão coletiva da aula de 12 de março mostra que as interações entre os alunos desempenharam um papel crucial na consolidação da compreensão da proporcionalidade direta e na análise crítica da relação entre o preço e a massa das diferentes embalagens de fermento. Tal como nas tarefas anteriores, foi através da verbalização no coletivo do pensamento matemático, da reformulação de ideias e da explicitação do sentido das operações matemáticas que a turma avançou na interpretação da situação e na seleção de estratégias de resolução adequadas.

Um dos contributos mais evidentes da interação entre pares ocorreu ao nível da mediação linguística e conceptual, observável em momentos em que os alunos reformularam perguntas ou explicações para apoiar colegas que revelavam dificuldades em acompanhar o pensamento. Estas intervenções não se limitaram à repetição da informação dada pela estagiária, pelo contrário, envolveram processos de seleção, reorganização e tradução dos conteúdos matemáticos em linguagem mais acessível, permitindo observar como o grupo mobiliza os seus próprios recursos discursivos para reconstruir coletivamente o significado das operações e relações em análise.

> Estagiária: A18, se eu quiser 4 folares, o que é que acontece ao valor dos ingredientes?
>
> (…)
>
> [A18 não responde]
>
> Estagiária: Alguém consegue explicar o que eu estou a perguntar à A18?
>
> (…)
>
> A13: A professora quer sabe se nós fizéssemos… Se nós quiséssemos fazer 4 folares. Se os ingredientes diminuíam ou aumentavam de quantidade, então… Então, para nós conseguirmos 4, nós temos que fazer vezes 2 ao número que já está nos 2 folares, que já está feito. Então, temos de fazer 2 × 2 que é igual a 4, pronto. E temos de ao 8 fazer vezes 2 e ao resto dos ingredientes fazer sempre vezes 2.

Neste episódio, A13 atua como mediador ao reinterpretar a questão inicial da estagiária, explicitando a relação multiplicativa entre o número de folares e a quantidade de cada ingrediente. Na sua intervenção, o aluno traduz a pergunta numa formulação mais direta e explicita a operação necessária (“vezes 2”). A intervenção evidencia a capacidade do aluno para identificar a dificuldade, reorganizar a informação relevante e explicá-la de forma mais acessível, facilitando a compreensão do procedimento. Esta dinâmica reaparece noutras partes da discussão, em que diferentes alunos assumem a função de clarificar as explicações apresentadas pelos pares.

Estagiária: Alguém não percebeu o que o A5 disse? Posso perguntar a qualquer um de vocês e vão conseguir explicar o que o A5 disse?

A7: Pode explicar de novo professora?

Estagiária: A5 queres explicar novamente? Ou alguém quer explicar aquilo que o A5 esteve a dizer? A2?

A2: Então, vamos supor, como o A5 estava a sugerir, que o pacote de 50 gramas custa 30 cêntimos. 100 é equivalente a 50 × 2, logo 30 [cêntimos] × 2 dá 60 [cêntimos], dá certo. Agora 200 [gramas] é igual a 50 [gramas] × 4, ou seja, 30 [cêntimos] × 4, tínhamos que fazer 30 [cêntimos] × 4 pelo que não dá 1 euro sendo que na tabela está 1 euro. Dá 1 euro e 20 e na tabela só está a 1 euro. Então, não tem a mesma relação.

Estagiária: A A11 continua sem compreender. Quem é que pode ajudar? Diz lá.

A1: É porque, por exemplo, ali nos 100 [gramas] está 30 [cêntimos] × 2 dá 60 [cêntimos] e se fosse sempre essa constante tinha de ser sempre vezes 2.

O excerto evidencia uma sequência de mediações horizontais que estendem e aprofundam a explicação inicialmente apresentada por A5. A2 reconstrói passo a passo o processo de verificação da proporcionalidade, articulando as relações entre a massa e preço através da multiplicação sucessiva, enquanto A1 sintetiza o critério central da análise: a constante de proporcionalidade direta. Este encadeamento de explicações mostra que a compreensão não se constrói exclusivamente a partir da intervenção da estagiária, pelo contrário, emerge da sobreposição de reformulações sucessivas, cada uma destacando aspetos distintos do pensamento matemático apresentado.

Outro contributo relevante da interação entre pares emergiu ao nível da monitorização mútua, quando os alunos verificaram de forma espontânea o trabalho apresentado no quadro e identificaram inconsistências nos valores calculados. Esta intervenção mostra que a turma não se limitou a confirmar a informação disponibilizada, mas mobilizou procedimentos de verificação próprios para validar a correção dos cálculos.

A17: Professora, não é necessário meter gramas e quilos?

(…)

Estagiária: Confirmam todos estes valores?

Alunos: Sim.

A5: Hã? Há um que está errado.

A17: Há um que está errado. Aquele 400.

Neste episódio, A5 e A17 intervêm no preciso momento em que a turma estava prestes a validar a tabela, sinalizando o valor "400" como incoerente com os restantes cálculos. A sua participação evidencia um processo de monitorização horizontal, em que os alunos comparam os dados apresentados com os procedimentos previamente discutidos e identificam divergências que comprometem a coerência da resolução.

A análise da discussão coletiva revela também momentos em que a intervenção inicial de uma díade foi retomada e aprofundada por outros colegas, dando origem a análises mais completas da situação-problema. Isto tornou-se particularmente evidente quando, após a escolha inicial de A4 pela embalagem de 250 gramas, a dupla A5 e A6 complementou essa resposta, acrescentando uma exploração sistemática das possíveis combinações de embalagens, dos custos associados e da proximidade ao valor necessário.

Estagiária: Então, tendo em conta a quantidade de fermento necessária, qual é a opção mais económica?

(…)

A4: A de 250 gramas.

Estagiária: (…) Porquê?

A4: Porque é a que está mais perto de 210 gramas.

Estagiária: Diz lá A6.

A6: Nós também escolhemos 250 gramas, mas sós explicámos o nosso raciocínio.

A5: Nós fizemos várias combinações.

(…)

A6: Então vamos primeiro ao pacote de 50 gramas. (…) 5 [pacotes de 50 gramas] é igual a 250 [gramas]. (…) O valor é 0,3 × 5 que dá 1 euro e 50 [cêntimos]. (…) Depois fomos para o pacote de 100 e fizemos 100 × 2 que ia dar 200, depois adicionámos 50. O valor também dá 1 euro e meio.

(…)

Estagiária: Existe mais alguma combinação que podemos comprar?

Alunos: Sim.

Estagiária: Qual?

A6: 250 gramas.

Estagiária: E quanto custa a embalagem de 250 gramas?

Alunos: 1 euro e vinte [cêntimos].

A5 e A6: Ou seja, é a opção mais económica.

(…)

Estagiária: Então, vocês vieram reforçar aquilo que a A4 estava a dizer?

A6: Sim.

A apresentação de A5 e A6 evidencia como a interação entre pares pode aprofundar uma resposta inicial, transformando uma escolha intuitiva ("é a que está mais perto de 210 gramas") numa resposta matematicamente fundamentada. Ao enumerar as diferentes combinações e determinar os respetivos custos, a dupla torna explícita uma análise apoiada em critérios quantitativos e não apenas intuitivos. A forma como comunicam cada etapa (seleção de embalagens, cálculos intermédios e confronto de resultados) oferece à turma um modelo de análise detalhada da situação, mostrando como a discussão entre pares pode orientar a construção de justificações mais estruturadas.

A par destes contributos, emergiram também desafios que interferiram com a fluidez da discussão coletiva e com o acompanhamento do pensamento matemático por parte de toda a turma. Dois aspetos foram particularmente visíveis: a participação desigual entre os alunos e as quebras de atenção que interromperam o desenvolvimento das ideias em discussão.

A participação distribuiu-se de forma desigual, com intervenções recorrentes de alguns alunos e silêncio ou hesitação de outros quando chamados a partilhar. Em vários momentos, a falta de resposta imediata sugere que alguns alunos não acompanharam o trabalho em curso ou não se sentiram confortáveis em partilhar o seu pensamento, o que fragilizou a continuidade da discussão.

Estagiária: A15 e A16, começaram por encontrar os valores correspondentes a 1 folar, certo? Querem explicar à turma porquê? Como é que fizeram isso?

(Momento de silêncio)

Estagiária: Estou à espera de uma de vocês.

Estes momentos ao longo da discussão mostram assimetrias de participação. Quando solicitados, alguns alunos não partilham a sua linha de pensamento, o que sugere um acompanhamento intermitente da discussão ou o desconforto na partilha em grande grupo. A ausência de resposta no momento em que são chamados a intervir quebra o encadeamento argumentativo e reduz a diversidade de contributos na validação pública das ideias.

Para além da participação desigual, também ocorreram episódios de dispersão que perturbaram o seguimento da discussão e exigiram paragens para recentrar a turma. Risos, comentários paralelos e distrações coincidiam frequentemente com passos críticos da explicação, criando ruturas na escuta e dificultando a progressão contínua do trabalho matemático.

> Estagiária: Boa, A12. Estavam todos distraídos. Era só para ver se estavam atentos, não era?
>
> (…)
>
> Estagiária: Olha! Enquanto a maior parte da turma estava a brincar, esta dupla experimentou várias combinações de embalagens.
>
> (…)
>
> Estagiária: Vamos para uma nova opção. Já estão todos perdidos, não é?
>
> (…)
>
> Estagiária: Olha! Eu não estou a achar piada! Continuamos no mesmo registo…
>
> (…)
>
> Estagiária: Podes ler em voz alta e com convicção para se ouvir? O resto da turma tem de estar em silêncio.
>
> (…)
>
> Estagiária: Tomem atenção! (…) Já acabaram de passar a correção? Então acabem lá de passar.
>
> (…)
>
> Estagiária: Tomem atenção ao que a A15 está a dizer.

As intervenções por parte da estagiária evidenciam que as quebras de atenção foram recorrentes ao longo da discussão, interrompendo pensamentos em construção e fragmentando a continuidade discursiva necessária para a compreensão coletiva. Os comentários sucessivos da estagiária ("estavam todos distraídos", "já estão todos perdidos" ou "continuamos no mesmo registo") evidenciam oscilações no acompanhamento coletivo, sugerindo que parte da turma deixava de seguir as inferências matemáticas em curso. Estas interrupções implicaram a necessidade de retomar definições, repetir cálculos e reconstruir relações numéricas já estabelecidas, o que limitou a apropriação das contribuições dos pares, uma vez que as ideias produzidas não eram sempre escutadas pelos restantes alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente capítulo organiza-se em três secções: (i) síntese do estudo, na qual se relembra o seu objetivo, as questões de investigação, a metodologia utilizada e a intervenção realizada; (ii) conclusões do estudo, estruturadas pelas questões de investigação e articuladas com o enquadramento teórico; e (iii) reflexão sobre o estudo desenvolvido, incluindo desafios com que deparei na realização deste estudo, apreciação metodológica e implicações do estudo para a prática docente contributos para o perfil profissional docente.

1. Síntese do estudo

O presente projeto de investigação, centrado na interação entre pares e o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos no 2.º Ciclo, foi desenvolvido em contexto de estágio com uma turma de 6.º ano de uma escola pública do concelho de Almada. A pertinência deste tema resulta não só das dificuldades identificadas na turma no que se refere à leitura e interpretação de enunciados, à seleção de estratégias adequadas e à comunicação do pensamento matemático, mas também da importância atribuída na literatura e nos documentos curriculares ao trabalho cooperativo e à resolução de problemas como meios fundamentais de aprendizagem. Neste enquadramento, diversos autores defendem que as interações entre pares promovem a partilha de raciocínios, a negociação de significados e o desenvolvimento de competências sociais e cognitivas essenciais, enquanto documentos como o PASEO e as AE reforçam a centralidade da resolução de problemas e das práticas de cooperação na aprendizagem matemática.

Neste contexto, o estudo teve como objetivo compreender de que forma a interação entre pares contribui para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos em alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico e identificar os desafios que emergem da sua implementação em contexto real de sala de aula. Para operacionalizar este propósito, foram formuladas duas questões orientadoras: (i) De que forma a interação entre pares contribui para o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos em alunos do 2.º ciclo do ensino básico?; e (ii) Que desafios emergem da interação entre pares na sala de aula de Matemática no contexto da resolução de problemas?

A metodologia adotada seguiu uma abordagem qualitativa, enquadrada na investigação sobre a prática, valorizando a compreensão dos processos tal como ocorrem num ambiente natural e permitindo um olhar aprofundado sobre a forma como os alunos interagem, constroem significados e enfrentam dificuldades ao longo das tarefas. A recolha de dados integrou duas técnicas principais, a observação participante e a recolha documental, das quais resultaram diferentes instrumentos e registos, nomeadamente notas de campo, grelhas de observação, registos áudio e produções escritas dos alunos. O cruzamento sistemático destes dados permitiu aprofundar e validar a interpretação das dinâmicas discursivas e cognitivas emergentes ao longo da intervenção.

A operacionalização do estudo concretizou-se através da exploração de três tarefas matemáticas sequenciais, "*O Concurso 'Acerta ou Perde'*", "*Os Tijolos*" e "*O Folar de Ovos*", implementadas entre 24 de fevereiro e 12 de março. Estas tarefas foram concebidas à luz das AE e estruturadas de acordo com a abordagem de ensino exploratório, envolvendo momentos de apresentação da tarefa, resolução em díades, discussão coletiva e sistematização final. A sequência das tarefas procurou desenvolver competências relacionadas com regularidades, expressões algébricas e proporcionalidade direta, promovendo a formulação e validação de conjeturas, a comparação de estratégias e a transição para formas de pensamento matemático mais estruturadas.

A análise dos dados foi orientada por categorias previamente definidas e fundamentadas na literatura, agrupando-se em duas dimensões: contributos da interação entre pares para a aprendizagem e desafios da interação entre pares. Embora estas categorias tenham sido estabelecidas antes da análise, emergiu um desafio conceptual adicional, não antecipado, relacionado com a transferência inadequada de procedimentos recentemente trabalhados para novas situações. Este quadro analítico permitiu interpretar de forma sistemática as evidências recolhidas ao longo das três tarefas e compreender com maior profundidade o papel da interação entre pares na aprendizagem matemática.

2. Conclusões do estudo

2.1. Interação entre pares e o desenvolvimento de competências na resolução de problemas matemáticos

A análise das três tarefas desenvolvidas ao longo da intervenção permite concluir que a interação entre pares desempenhou um papel decisivo no desenvolvimento de competências associadas à resolução de problemas matemáticos. Tal como defendem Vygotsky (1978) e César et al. (2000), a aprendizagem emerge de processos de diálogo, cooperação e negociação de significados, nos quais os alunos confrontam e articulam as suas ideias, construindo conhecimento de forma partilhada. Os resultados deste estudo evidenciam de forma consistente esta perspetiva. Tanto nas díades como na discussão coletiva, a interação constituiu um espaço de construção e reconstrução partilhada de significados, no qual os alunos explicitaram, compararam e ajustaram o seu modo de pensar, mobilizando processos que dificilmente emergiriam com a mesma profundidade e clareza em situações de trabalho individual.

Um dos contributos mais robustos da interação entre pares diz respeito à comunicação e argumentação matemática. A necessidade de explicar procedimentos ao colega levou muitos alunos a tornar explícitas as suas estratégias, justificar escolhas e reformular explicações em função das dúvidas ou contributos do par. Nas díades, este aspeto foi particularmente evidente na clarificação de conceitos, como lei de formação e expressão geradora, nos quais os alunos recuperaram exemplos, testaram valores e tornaram visíveis as razões que sustentavam as suas conclusões. No coletivo, esta capacidade intensificou-se quando diferentes alunos reformularam explicações inicialmente apresentadas por um colega, traduzindo relações matemáticas em linguagem mais acessível ou mais formal, reforçando a construção partilhada de significado. Estes episódios confirmam o papel estruturante da comunicação na construção do pensamento matemático, tal como defendido por Boavida et al. (2008) e pelo NCTM (2000), que sublinham que verbalizar, justificar e discutir ideias permite clarificar conceitos, aprofundar procedimentos e consolidar significados. Além disso, as interações observadas evidenciam a relevância da linguagem enquanto instrumento mediador do desenvolvimento cognitivo, em linha com a perspetiva socioconstrutivista de Vygotsky (1978), para quem a comunicação não é apenas veículo de transmissão, mas condição da própria aprendizagem.

Outro contributo decisivo prende-se com a construção partilhada do conhecimento e a descentração cognitiva. Nas díades, o confronto de interpretações e a necessidade de chegar a uma estratégia comum favoreceram a comparação de procedimentos e a integração das ideias do colega. Em vários casos, os alunos passaram de leituras divergentes do enunciado para uma compreensão partilhada da estrutura do problema, como se verificou na clarificação da duplicação sucessiva na Tarefa 1 ou na estabilização da regra "acrescentar 2" na Tarefa 2. No coletivo, estes processos ampliaram-se: as explicações iniciais de alguns pares foram retomadas, refinadas e alargadas por outros colegas, permitindo que regularidades, representações e relações funcionais fossem apropriadas pela turma como um todo. A evolução da estratégia apresentada por um aluno, posteriormente refinada por outro através do uso das potências inicialmente introduzidas pelo primeiro, constitui um exemplo particularmente forte desta dinâmica, mostrando como a proposta inicial se transformou, no diálogo coletivo, numa forma mais coerente e partilhada de representar a relação multiplicativa. Estes resultados convergem com Dillenbourg (1999), que destaca que o confronto de diferentes pontos de vista favorece a construção conjunta de novos significados. A forma como os alunos integraram contributos dos colegas e ajustaram as suas interpretações confirma este potencial das interações sociais para promover avanços conceptuais. De forma complementar, César et al. (1999; 2000) salientam que a negociação de significados permite superar interpretações individuais e promover a construção coletiva de conhecimento matemático. A co-construção observada na resolução dos problemas confirma, assim, o potencial das interações sociais para apoiar a clarificação das ideias e consolidar entendimentos partilhados ao longo do trabalho desenvolvido.

A interação entre pares contribuiu também de forma clara para o desenvolvimento de competências matemáticas específicas, particularmente na identificação de padrões, na generalização e na formulação de expressões algébricas. Nas díades, os alunos mobilizaram exemplos, tabelas, esquemas e representações diversas para descobrir regularidades e transformar observações de valores específicos em expressões que descrevem a estrutura da situação. Episódios como a construção conjunta das expressões 2n - 1 ou 16n - 8 ilustram como a cooperação permite articular regularidades, estruturar o pensamento e transitar para formas mais abstratas de representação. No coletivo, estes processos tornaram-se ainda mais evidentes quando expressões e estratégias que não tinham emergido no trabalho a pares foram produzidas na negociação coletiva de significados, mostrando o papel fundamental da discussão para formalizar ideias e avançar para níveis superiores de generalização. Os resultados observados corroboram que estas generalizações e expressões algébricas emergiram do confronto e da partilha de estratégias entre os alunos. Esta evidência testemunha a perspetiva de Boavida e Menezes (2012), que destacam que a partilha de estratégias e a reflexão crítica sobre os erros permitem aos alunos aceder a formas de pensar distintas e construir novos significados. Também Cai e Lester (2010) salientam que a aprendizagem na resolução de problemas depende da oportunidade de testar ideias, confrontar formas de pensar e construir soluções não rotineiras. Assim, o que ocorreu nas díades e na discussão coletiva confirma que a interação entre pares foi decisiva para estruturar o pensamento, articular regularidades e avançar para níveis mais abstratos de generalização.

A interação desempenhou igualmente um papel relevante no desenvolvimento metacognitivo e autorregulatório. Em várias díades, os alunos monitorizaram conjuntamente a adequação das estratégias, questionaram procedimentos, verificaram resultados e detetaram incoerências. Critérios como “tem de dar um número ímpar” ou expressões como “isto não está a fazer sentido” foram usados espontaneamente como formas de controlo conceptual, permitindo corrigir procedimentos e reconstruir estratégias de forma partilhada. No coletivo, esta monitorização horizontal tornou-se visível na verificação espontânea dos valores apresentados no quadro ou na identificação de erros nas explicações dos colegas, evidenciando que os alunos se apropriaram de formas de controlo típicas do pensamento matemático competente. Estes resultados sustentam as ideias de Schoenfeld (1992), que destaca a importância da autorregulação na resolução de problemas, nomeadamente a capacidade de monitorizar o progresso, ajustar estratégias perante a dificuldade e manter o foco na compreensão do processo. De forma convergente, o NCTM (2000) sublinha que a análise e a revisão das estratégias são práticas essenciais para desenvolver um pensamento matemático mais reflexivo e autónomo. Assim, a interação entre pares funcionou simultaneamente como apoio à execução e como espaço privilegiado de regulação partilhada do trabalho matemático.

Por fim, a interação entre pares revelou contributos significativos nas atitudes e disposições face à Matemática. O apoio mútuo, as expressões de incentivo e o reconhecimento dos progressos individuais favoreceram a confiança, a persistência e o envolvimento positivo na resolução dos problemas. Em diversas díades, surgiram episódios de encorajamento, humor e valorização mútua que favoreceram a superação das dificuldades e um envolvimento mais seguro na resolução do problema. Estes resultados articulam-se com as ideias do NCTM (2000), que salienta que a resolução de problemas contribui para a construção de confiança, curiosidade e atitudes positivas face à Matemática. No mesmo sentido, César et al. (1999; 2000) enfatizam que a troca de ideias entre alunos promove competências interpessoais como a cooperação, o respeito mútuo e a compreensão, ao mesmo tempo que exige a gestão de conflitos sociocognitivos e afetivos. Assim, os episódios de apoio, incentivo e valorização mútua observados nas díades mostram que a interação entre pares não só favorece a superação das dificuldades, como também contribui para a construção de um ambiente mais solidário e emocionalmente seguro.

Em síntese, o estudo mostra que a interação entre pares:

- Apoiou a explicitação do pensamento matemático, tornando visíveis ideias e procedimentos que permaneceriam implícitos em trabalho individual.
- Favoreceu a clarificação dos enunciados, a seleção de estratégias e a negociação de significados na resolução de problemas.

- Promoveu a comparação de explicações, a reformulação de interpretações e a construção de generalizações, sustentando a formulação de expressões algébricas e o reconhecimento de regularidades.
- Contribuiu para o desenvolvimento da flexibilidade estratégica e da capacidade de justificar os raciocínios durante a resolução dos problemas.
- Apoiou a monitorização do processo de resolução de problemas, permitindo detetar incoerências, rever decisões e validar resultados.
- Reforçou uma postura mais reflexiva e crítica perante o problema.
- Proporcionou suporte socio-emocional, fortalecendo a confiança, a persistência e o envolvimento dos alunos.
- Permitiu articular a exploração em díades com a discussão coletiva, ampliando e estabilizando os significados matemáticos construídos ao longo da resolução dos problemas.

2.2. Desafios que emergem da interação entre pares no contexto da resolução de problemas

Da análise constata-se que, embora a interação entre pares constitua um espaço privilegiado de aprendizagem, também envolve desafios significativos que afetam a participação, a comunicação matemática e a construção partilhada de conhecimento matemático. Tal como referem César et al. (2000), as interações em sala de aula são marcadas pelas histórias de vida dos alunos, pelas suas experiências durante o percurso escolar e pela forma como interpretam o contexto, fatores que influenciam a forma como se envolvem na resolução dos problemas, se posicionam perante os colegas e o próprio discurso matemático. Estes aspetos podem mesmo bloquear a aprendizagem quando associados a experiências anteriores de insucesso, exigindo, por isso, uma mediação pedagógica atenta e intencional.

Um primeiro desafio prende-se com os desequilíbrios de participação, observados tanto nas díades como nas discussões coletivas. Em várias situações, um aluno assumiu uma posição dominante, orientando decisões e antecipando estratégias, enquanto o colega adotou um papel mais passivo. Numa das díades, um dos elementos chegou mesmo a dirigir a resolução com instruções como “confia” ou “faz assim”, reduzindo as oportunidades de participação efetiva do parceiro. No coletivo, um pequeno grupo de alunos interveio sistematicamente, enquanto vários colegas apenas participaram quando diretamente solicitados. Esta assimetria de participação, quando não regulada, compromete a interdependência positiva desejável e pode acentuar desigualdades no acesso ao conhecimento (Beebe & Masterson, 2016; Lopes & Silva, 2022), colocando em causa a corresponsabilização e a participação equitativa que a cooperação pretende promover.

A estes desequilíbrios juntam-se as dificuldades comunicacionais e sociocognitivas, que constituíram um dos obstáculos mais recorrentes. Em diversos momentos, os alunos revelaram dificuldade em verbalizar o pensamento desenvolvido, justificar procedimentos ou compreender explicações apresentadas pelo par. Surgiram hesitações prolongadas, justificações incompletas e respostas que não esclareciam a origem dos procedimentos utilizados. No coletivo, estas fragilidades tornaram-se particularmente visíveis em discussões que envolviam conceitos mais formais, como potências, em que se registaram interrupções, sobreposições de vozes e interpretações precipitadas, revelando ausência de escuta ativa e uma compreensão ainda em construção. Estes resultados vão, também, ao encontro das ideias de Vygotsky (1978), para quem a linguagem constitui o principal instrumento de mediação na construção de significados e no desenvolvimento das funções cognitivas superiores; por isso, quando os recursos linguísticos e conceptuais são insuficientes, compromete-se a partilha de significados e reduz-se o potencial da interação entre pares para promover aprendizagens significativas. De forma convergente, Sousa e Mendes (2017) alertam que fragilidades linguísticas dificultam a interpretação das situações problemáticas e a comunicação dos procedimentos, aspetos igualmente evidenciados nestes episódios.

Os resultados evidenciam também a presença significativa de fatores emocionais e relacionais que condicionam a qualidade das interações. Numa díade, a diferença de desempenho e de ritmos de compreensão originou frustração. Noutra, a resistência em aceitar as contribuições do par, quer seja por falta de reconhecimento ou resistência à escuta, gerou momentos de tensão interpessoal que dificultam o clima de confiança necessário ao debate de ideias. Estes episódios refletem o que Beebe e Masterson (2016) e Lopes e Silva (2022) descrevem sobre dinâmicas assimétricas que geram frustração, submissão e sobrecarga, e confirmam, simultaneamente, os desafios relacionais apontados por Isidoro (2008) e Cunha e Uva (2017), como a insegurança e a resistência à partilha.

A par destes aspetos, verificaram-se dificuldades evidentes na gestão do tempo e no ritmo de trabalho, particularmente durante a fase de resolução em pares. Várias díades revelaram dificuldades em manter ritmo de trabalho, organizar etapas e concluir a tarefa dentro do tempo previsto. Em algumas situações, os alunos permaneceram longos períodos numa única questão da tarefa, discutindo detalhes secundários ou concentrando-se excessivamente na apresentação formal dos registos, o que atrasou a progressão da resolução. Também surgiram abordagens excessivamente apressadas, motivadas pela perceção de falta de tempo, que levaram a decisões precipitadas e à ausência de justificações ou de monitorização dos procedimentos. Estes episódios confirmam o que refere a literatura sobre a exigência temporal do trabalho em pares: trabalhar em díades requer mais tempo para negociar estratégias e coordenar ações (Beebe & Masterson, 2016), tornando a progressão difícil quando existem diferenças de ritmos de trabalho ou dificuldades de comunicação (Lopes & Silva, 2022).

As dificuldades de concentração e de manutenção da atenção constituíram outro desafio evidente, tanto nas díades como no coletivo. Estas dificuldades foram particularmente recorrentes em pares mais instáveis do ponto de vista da autorregulação, nos quais se registaram conversas paralelas, momentos prolongados de distração e dificuldade em retomar a resolução do problema após interrupções. No coletivo, estas fragilidades manifestaram-se sob a forma de dispersão generalizada em momentos críticos da discussão, obrigando-me a intervir repetidamente para recentrar o foco do grupo. Estes resultados vão ao encontro do que refere Themeli (2023), ao salientar que ambientes cooperativos são especialmente vulneráveis a interrupções e distrações, que comprometem a concentração dos alunos e o clima de cooperação, exigindo do professor uma intervenção constante para restaurar a atenção e garantir a continuidade das aprendizagens.

Por fim, emergiu no estudo um desafio conceptual que não é explicitamente referido na literatura mobilizada na fundamentação teórica, mas que se revelou particularmente relevante na terceira tarefa: a transferência inadequada de procedimentos e formas de pensar recentemente trabalhados para uma nova situação. Em vários pares, os alunos aplicaram automaticamente a lógica de crescimento sucessivo utilizada nas tarefas anteriores sobre sequências numéricas, interpretando a tabela de proporcionalidade direta como se fosse uma progressão termo-a-termo. Este fenómeno traduziu-se em explicações baseadas em "multiplicar por 3 o termo seguinte" ou na afirmação de que "a sequência não continua", ignorando que a tarefa exigia analisar a relação entre grandezas e não a identificação de uma sequência. Estes episódios mostram que aprendizagens recentes podem interferir de forma inapropriada na interpretação de problemas distintos, configurando um desafio adicional à mobilização adequada de estratégias na resolução de problemas matemáticos.

Em suma, os desafios que emergem da interação entre pares no contexto da resolução de problemas incluem:

- Desequilíbrios de participação, com posições dominantes e passividade;

- Fragilidades comunicacionais, que dificultam a explicitação e a justificação de procedimentos;
- Tensões emocionais e relacionais, que comprometem a cooperação;
- Dificuldades na gestão do tempo e do ritmo de trabalho, que atrasam a progressão da resolução do problema;
- Perdas frequentes de foco e distrações, que exigem constante mediação por parte do professor;
- Transferências conceptuais inadequadas, nas quais os alunos aplicam regras de tarefas anteriores a situações de natureza distinta.

Estes fatores, combinados, tornam a interação entre pares um processo complexo, que requer mediação cuidada e intencional para garantir participação equitativa e aprendizagens matemáticas significativas.

3. Reflexão sobre o estudo desenvolvido

A realização deste projeto constituiu uma oportunidade privilegiada para refletir sobre os desafios pedagógicos e investigativos que emergem na prática letiva, particularmente num contexto em que a abordagem adotada (o ensino exploratório articulado com o trabalho em díades) era relativamente nova para a turma e para mim enquanto professora em formação. A introdução simultânea destas duas mudanças estruturais exigia tempo, continuidade e diálogo para que os alunos interiorizassem as expectativas, os objetivos e as normas desta modalidade de trabalho. Contudo, as limitações temporais da intervenção e o conhecimento ainda incipiente que tinha sobre a turma e sobre as dinâmicas individuais dos alunos dificultaram a implementação gradual e intencional das rotinas que sustentam o funcionamento pleno do ensino exploratório. Considero que estas rotinas exigem tempo e uma construção progressiva e persistente, algo que o espaço temporal reduzido desta intervenção não permitiu desenvolver plenamente. Assim, tiveram de ser implementadas em simultâneo, o que condicionou a fluidez e a estabilidade das interações e tornou evidente a necessidade de um investimento continuado na consolidação destas práticas.

Foi precisamente neste enquadramento que emergiram algumas dificuldades durante o trabalho em díades. A diversidade de perfis presentes na sala tornou evidente a complexidade de promover interações equitativas e de qualidade, e de sustentar um ambiente de aprendizagem cooperativa que favorecesse o envolvimento de todos. Surgiram de forma recorrente momentos de frustração, assimetrias de diferentes naturezas entre pares e dificuldades de autorregulação, obrigando-me a ajustar continuamente a minha intervenção. A desmotivação manifestada por um aluno quando integrado em díades muito assimétricas mostrou que a posição de "explicador" pode gerar frustração quando não é trabalhada previamente numa lógica de corresponsabilização. Estas dificuldades, embora esperadas num contexto de aplicação limitada no tempo, reforçaram a importância de uma preparação gradual da turma para o trabalho cooperativo, assente na explicitação dos papéis e das expectativas associadas a este tipo de trabalho, na construção de rotinas e no desenvolvimento de uma cultura de cooperação que se consolida apenas ao longo do tempo.

Nos momentos de discussão coletiva, a gestão do tempo e da atenção revelou-se igualmente desafiante. A natureza rica e aberta, característica dos problemas, conduzia a momentos de diálogo matemático extensos, cuja duração, embora pedagogicamente relevante, potenciava episódios de dispersão e perda de foco por parte de alguns alunos. A complexidade das ideias matemáticas em discussão exigia um esforço contínuo de mediação para recentrar a turma, reorganizar os contributos e assegurar a progressão coerente do pensamento coletivo. Apesar destes desafios, a planificação prévia das discussões, que incluía a antecipação de possíveis estratégias, a monitorização das díades, a seleção criteriosa de resoluções e a sua sequenciação intencionalmente estruturada, segundo as orientações de Stein et al. (2008), revelou-se fundamental para conferir sentido à discussão coletiva das tarefas. Esta preparação permitiu-me estruturar a discussão, estabelecer conexões entre diferentes abordagens e mitigar os efeitos da dispersão, transformando a partilha de estratégias num momento produtivo de construção conjunta de significado matemático.

A análise destes momentos permitiu-me clarificar um conjunto de princípios que pretendo integrar de forma consistente na minha prática futura. A experiência demonstrou-me que a qualidade das interações entre alunos depende da existência de rotinas consolidadas, de expectativas claras e de uma cultura de cooperação construída progressivamente ao longo do tempo. Assim, reconheço que o trabalho cooperativo exige uma preparação intencional ao nível da constituição das díades, da explicitação das responsabilidades individuais e da forma como os contributos são mobilizados em grande grupo. Do mesmo modo, a gestão da discussão coletiva revelou-se uma competência fundamental, cuja eficácia depende de uma planificação cuidadosa, de uma mediação atenta e da capacidade de relacionar as diferentes estratégias e justificações apresentadas. Estas aprendizagens conferem-me uma maior consciência sobre a complexidade da mediação matemática e sobre o papel estruturante que o professor desempenha na construção do pensamento coletivo.

No futuro, pretendo manter o ensino exploratório como abordagem didática de referência, valorizando a resolução de tarefas ricas e a orquestração das discussões no coletivo, que permitam a construção e a explicação partilhada de significados matemáticos. Contudo, ajustarei alguns aspetos da organização da aula. Na fase de exploração autónoma das tarefas, pretendo alternar momentos de resolução individual com momentos de trabalho em díades, de modo a promover maior autonomia e a aprofundar a responsabilização pelo desenvolvimento das próprias estratégias. Quando optar pelo trabalho em díades, pretendo reajustá-las periodicamente, tendo em conta a evolução dos alunos e às exigências específicas das tarefas, de forma a evitar dependências ou assimetrias persistentes e a assegurar interações diversificadas e equilibradas. Paralelamente, reforçarei explicitamente as normas de cooperação e corresponsabilização que enquadram este tipo de trabalho, clarificando expectativas e rotinas desde o início. Procurarei, ainda, ajustar o tempo das discussões às necessidades que emergem em aula, assegurando que estas decorrem com a profundidade necessária sem comprometer a concentração da turma, e reforçar a etapa de sistematização, garantindo que os conceitos emergentes são formalizados e apropriados por todos. Estes intentos configuram um compromisso com uma prática mais intencional, equitativa e orientada para a construção partilhada do conhecimento matemático.

Para além da dimensão pedagógica, este projeto constituiu igualmente um momento determinante na construção das minhas primeiras competências enquanto investigadora, convidando-me a olhar para a prática com uma atenção e intencionalidade até então pouco familiares. A articulação entre o lecionar e a recolha de dados revelou-se particularmente exigente, sobretudo porque, sendo esta a primeira vez que desenvolvia uma investigação desta natureza, a gestão dos diferentes suportes de recolha exigiu um esforço contínuo de adaptação e de tomada de decisão em tempo real. As grelhas de observação revelaram-se demasiado extensas para uma utilização fluida em contexto de aula, obrigando-me, com frequência, a completá-las a posteriori e levando-me a reconhecer que, em contexto de sala de aula, nem sempre é possível registar tudo aquilo que consideramos relevante. Do mesmo modo, as notas de campo evidenciaram a dificuldade de conciliar a observação rigorosa com a necessidade de responder, no imediato, às solicitações dos alunos, mostrando-me que a recolha de dados em contexto real implica escolhas permanentes e, por vezes, incompatíveis entre si. Já os registos áudio, frequentemente marcados por ruído de fundo ou pelo afastamento dos alunos em relação ao dispositivo, dificultaram a captura integral das interações, revelando que a investigação em ambientes autênticos é inevitavelmente condicionada por fatores que escapam ao controlo do investigador. A preocupação inicial de assegurar dados “suficientes” levou-me a acumular mais informação do que a necessária, experiência que tornou evidente que a exaustividade não substitui a pertinência e que a qualidade da análise depende, sobretudo, da capacidade de selecionar e priorizar. O reconhecimento de que investigar implica tanto recolher como abdicar, tanto registar como escolher, constituiu uma das aprendizagens mais significativas deste percurso.

A análise dos dados constituiu um processo igualmente desafiante. A seleção dos episódios relevantes obrigou-me a construir critérios cada vez mais claros sobre o que realmente evidenciava progressos, dificuldades ou dinâmicas de interação significativas, evidenciando que analisar não é apenas descrever, mas interpretar com intencionalidade. A definição das categorias revelou-se particularmente exigente, sobretudo pela necessidade de articular, de forma coerente e conceptualmente consistente, os referenciais teóricos sobre interações entre pares com aqueles relativos à resolução de problemas. Contudo, este esforço acabou por orientar de forma decisiva a seleção e organização dos episódios a analisar. No momento da análise, a distinção entre estratégias e representações constituiu um desafio adicional, pois exigia interpretar cada episódio com precisão para lhe atribuir a categoria mais adequada. À medida que a análise avançava, fui-me tornando mais consciente das nuances presentes nos dados, o que me levou a rever e a ajustar as primeiras análises realizadas, reconhecendo que o olhar investigativo se refina progressivamente e que este processo exige revisão contínua. Esta experiência permitiu-me desenvolver uma postura investigativa mais consciente e rigorosa, mostrando-me que a investigação implica distanciamento analítico, disciplina metodológica e abertura para rever decisões sempre que a própria análise assim o exige.

As limitações temporais da intervenção constituíram um dos principais constrangimentos do estudo, não só porque reduziram a possibilidade de preparar a turma para a abordagem adotada, como também porque dificultaram um conhecimento mais aprofundado dos alunos, indispensável à constituição das díades e à interpretação das dinâmicas de interação. Se dispusesse de mais tempo, teria aprofundado esta preparação inicial e ajustado a composição das díades com base num conhecimento mais sólido das dificuldades individuais, o que me teria permitido antecipar melhor as necessidades de cada par e promover interações mais equilibradas e produtivas. Ainda assim, este percurso permitiu-me reconhecer que a investigação em contexto real implica lidar com constrangimentos inevitáveis, tomar decisões metodológicas ajustadas às condições existentes e aceitar que nem sempre é possível concretizar tudo o que inicialmente se idealiza. Tornou ainda evidentes as tensões inerentes à dupla função de professora e investigadora, já que o apoio aos alunos acabou por prevalecer sobre o registo exaustivo dos dados. Reconhecer esta realidade foi uma aprendizagem significativa, assim como perceber que a investigação, mesmo com os seus limites, é essencial para aprofundar a compreensão da prática e sustentar o meu desenvolvimento profissional.

Para além da reflexão sobre a minha prática, considero que este estudo oferece contributos relevantes para a comunidade educativa, particularmente no domínio da resolução de problemas em Matemática. Os resultados mostram que tanto o trabalho em díades como as discussões coletivas, quando sustentados por tarefas ricas e por rotinas de cooperação bem definidas, potencia processos essenciais à resolução de problemas como a interpretação dos enunciados, a seleção de estratégias, a comparação de procedimentos, a construção de generalizações e a validação conjunta dos resultados. Estas evidências reforçam a importância de criar, nas escolas, ambientes de aprendizagem que favoreçam o diálogo, a argumentação e a negociação de significados, reconhecendo a interação entre pares como um recurso pedagógico que amplia o acesso dos alunos a formas mais elaboradas do pensamento matemático.

Neste sentido, o estudo sugere implicações práticas para os profissionais que pretendam integrar as interações entre pares na resolução de problemas. Destaca-se a necessidade de preparar progressivamente os alunos para trabalhar em pares, clarificando normas de cooperação e expectativas de participação, constituindo as díades com intencionalidade face às exigências das tarefas e acompanhando de perto as interações para prevenir assimetrias persistentes. Do mesmo modo, torna-se fundamental que os docentes planifiquem cuidadosamente as tarefas de resolução de problemas, antecipem as possíveis estratégias, organizem de forma estruturada momentos de discussão coletiva e valorizem a justificação, a comparação de estratégias e a reflexão e análise dos erros. Quando articuladas, estas práticas contribuem para a criação de contextos mais equitativos e produtivos de resolução de problemas, favorecendo o desenvolvimento de competências matemáticas e a construção de práticas de trabalho cooperativo mais consistentes.

REFERÊNCIAS

Afonso, N. (2014). *Investigação naturalista em educação: Um guia prático e crítico*. Fundação Manuel Leão.

Agrupamento de Escolas. (2020). *Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas*.

Agrupamento de Escolas. (2024). *Projeto Curricular e Organizacional do Agrupamento – 2024/2025*.

Alves, B. D., & Canavarro, A. P. (2018). Desenvolvimento do pensamento algébrico de jovens crianças: Potencialidades da exploração de padrões no contexto do ensino exploratório da Matemática. *Debates em Educação*, *10*(22), 247–270. https://doi.org/10.28998/2175-6600.2018v10n22p247-270

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo* (L. A. Reto & A. Pinheiro, Trads.). Edições 70. (Obra original publicada em 1977)

Beebe, S. A., & Masterson, J. T. (2016). *Communicating in small groups: Principles and practices* (Updated 11th ed.). Pearson Education. https://mymission.lamission.edu/userdata/casarera/docs/Small-Groups.pdf

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos* (M. J. Alvarez, S. B. Santos & T. M. Baptista, Trads.). Porto Editora.

Boavida, A. M. (1992). O sentido de resolução de problemas. *Quadrante*, 1(1), pp. 45-71. https://quadrante.apm.pt/article/view/22619/16686

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*, (100), 1. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1713

Boavida, A. M., & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: Contornos e desafios. *Investigação em Educação Matemática*, 287–295. http://hdl.handle.net/10400.26/5717

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico: Programa de formação contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico*. Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. http://hdl.handle.net/10400.26/5566

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning? *Research Brief 14: Problem Solving*, 1–6. https://www.nctm.org/Research-and-Advocacy/Research-Brief-and-Clips/Problem-Solving/

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81–118. https://doi.org/10.48489/quadrante.22816

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e matemática*, (115), 11-17. http://hdl.handle.net/10174/4265

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais: Matemática*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. Em P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255–266). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. http://hdl.handle.net/10451/7041

Casimiro, A. (s.d.). *Projeto Cultural do Agrupamento*.

César, M. (2000). Interacções na aula de Matemática: Um percurso de 20 anos de investigação e reflexão. Em C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. da Ponte, J. M. Matos & L. Menezes (Orgs.), *Interacções na aula de Matemática* (pp. 13–34). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática. https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_1999.pdf

César, M., Torres, M., Caçador, F., & Candeias, N. (1999). E se eu aprender contigo? A interacção entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos. In M. V. Pires, C. M. Morais, J. P. da Ponte, M. H. Fernandes, A. M. Leitão & M. L. Serrazina (Orgs.), *Caminhos para a investigação em educação matemática em Portugal* (pp. 73–89). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação e Matemática. https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_1998.pdf#page=74

César, M., Torres, M., Rebelo, M., Castelhano, A., Candeias, N., Candeias, A., Caçador, F., Coração, R., Gonçalves, C., Silva de Sousa, R., Malheiro, L., Fonseca, S., Martins, H. & Costa, C. (2000). Interacções sociais e Matemática: Ventos de mudança nas práticas de sala de aula. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. da Ponte, J. M. Matos & L. Menezes (Orgs.), *Interacções na aula de Matemática* (pp. 47–84). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática. https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_1999.pdf

Costa, A. M., & Fonseca, L. (2009). Os números na interface da língua portuguesa e da matemática. *Atas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 9–19. https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2009.pdf

Coutinho, C. P. (2014). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática* (2.ª ed.). Almedina.

Cunha, F., & Uva, M. (2017). A aprendizagem cooperativa: Perspetiva de docentes e crianças. *Revista Interacções*, *12*(41), 133–159. https://doi.org/10.25755/int.10839

Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. (2018). Diário da República, 1.ª série — N.º 129.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (s.d.). The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1–19). SAGE. https://uk.sagepub.com/sites/default/files/upm-binaries/40425_Chapter1.pdf

Dillenbourg, P. (1999). What do you mean by collaborative learning? In P. Dillenbourg (Ed.), *Collaborative-learning: Cognitive and computational approaches* (pp. 1–19). Elsevier. https://www.researchgate.net/publication/240632230

Faneco, C., & Valério, N. (2023). *Missão 6 – Vol. II: Matemática – 6.º ano* (1.ª ed.). Texto Editores.

Flick, U. (2009). *An introduction to qualitative research* (4th ed.). Sage.

Isidoro, P. S. P. (2008). *O trabalho colaborativo na construção do saber matemático dos alunos* [Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências]. Repositório da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/43575

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. *Educational Researcher*, 38(5), pp. 365-379. https://doi.org/10.3102/0013189X09339057

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2014). Cooperative Learning in 21st Century. *Anales de Psicología / Annals of Psychology*, *30*(3), 841–851. https://doi.org/10.6018/analesps.30.3.201241

Lopes, J. P., & Silva, H. S. (2022). *Aprendizagem cooperativa na sala de aula: Um guia prático para o professor* (2.ª ed.). Pactor.

Martins, G. d. O., Gomes, C. A., Brocardo, J. M., Pedroso, J. V., Carrilho, J. L., Silva, L. M., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. F., & Rodrigues, S. M. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Direção-Geral da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Menezes, L. (2000). Matemática, linguagem e comunicação. *Millenium*, (20), 178–196. http://hdl.handle.net/10400.19/899

Menezes, L., & Nacarato, A. M. (2020). Comunicação no ensino e na aprendizagem da Matemática. *Quadrante*, *29*(2), 1–5. https://doi.org/10.48489/quadrante.22568

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29–42). APM.

Pedro, I. (2013). *Das sequências à proporcionalidade direta : uma experiência de ensino no 6.º ano de escolaridade.* [Relatório de Mestrado, Universidade de Lisboa, Instituto de Educação]. Repositório da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/10316

Pólya, G. (2003). Como resolver problemas (Obra original publicada em 1945). Gradiva.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5–28). APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). http://hdl.handle.net/10451/3008

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. *Educação Matemática em Foco*, 1(1), 9–29. http://hdl.handle.net/10451/28726

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Exploração de tarefas matemáticas: Práticas e desafios para o professor. *Educação Matemática*, (49), 21–40. Universidade de Lisboa. https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/44393

Proença, M. C., Maia-Afonso, É. J., Mendes, L. O., & Travassos, W. B. (2022). Dificuldades de alunos na resolução de problemas: Análise a partir de propostas de ensino em dissertações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(72), 262–285. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a12

Quivy, R., & Van Campenhoudt, L. (1998). *Manual de investigação em ciências sociais* (2.ª ed., J. M. Marques, M. A. Mendes & M. Carvalho, Trads.). Gradiva.

Santos, M. C. S. C. (2011). *Aprendizagem cooperativa em Matemática: Um estudo longitudinal com uma turma experimental do Novo Programa de Matemática do 2.º ciclo do Ensino Básico* [Tese de doutoramento, Universidade do Algarve]. SAPIENTIA – Repositório Institucional da Universidade do Algarve. http://hdl.handle.net/10400.1/3454

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Em D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). MacMillan. https://www.researchgate.net/publication/289963462_Learning_to_think_mathematically_Problem_solving_metacognition_and_sense_making_in_mathematics

Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática*, (149), [Número temático: Comunicação Matemática]. Associação de Professores de Matemática. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2518

Shaw, C., Brady, L.-M., & Davey, C. (2011). *Guidelines for research with children and young people*. NCB Research Centre.

Sousa, C., & Mendes, F. (2017). Aprender a resolver problemas no 2.º ano do ensino básico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 243–265. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a12

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Themeli, C. (2023). Peer learning pros, cons, and contextual factors in higher education. In *Inclusive peer learning & augmented reality in higher education: A technology-enhanced learning (TEL) perspective*. Power Learning Solutions. https://pressbooks.pub/ipear/chapter/chapter-2-peer-learning-pros-cons-and-contextual-factors-in-higher-education/

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), 39–60. https://doi.org/10.48489/quadrante.22923

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman, Orgs.). Harvard University Press. http://w.pauldowling.me/rtf/2021.1/readings/LSVygotsky_1978_MindinSocietyDevelopmentofHigherPsycholo.pdf

Vygotsky, L. S. (1896-1934). *Pensamento e Linguagem*. (Ridendo Castigat Mores ed.). (N. J. Garcia, Trad.) https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7630412/mod_resource/content/1/pensamentolinguagem.pdf

ANEXOS

Anexo A – Pedido de autorização para a recolha de dados

Pedido de autorização para a recolha de dados

Exmo(a).

Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver atividades pedagógicas que explorem a influência do trabalho cooperativo no desenvolvimento de competências matemáticas. O desenvolvimento destas atividades implica a análise das produções dos alunos e a observação das suas ações durante as aulas. Para melhor compreender os processos de aprendizagem, necessito de proceder à recolha de dados através de gravações de áudio. Assim, venho solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio das atividades realizadas em sala de aula pelo(a) seu(sua) educando(a).

Esta recolha de dados servirá exclusivamente para fins académicos. Comprometo-me a garantir o anonimato tanto da escola como dos participantes. O único objetivo é obter dados que me ajudem a aprimorar a minha prática pedagógica. Importa referir que a participação no projeto não terá qualquer impacto na avaliação escolar do(a) aluno(a). Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todos os dados recolhidos após a conclusão do projeto de investigação.

Agradeço a sua colaboração e disponibilidade.

A estagiária,

Isabel Matos

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação de ____, autorizo a participação do(a) meu(minha) educando(a) no projeto de investigação acima descrito, incluindo a recolha e o tratamento dos dados conforme as condições apresentadas.

Encarregado de Educação,

____

Anexo B – Grelha de observação

Data: ______/______/_________ **Grelha de Observação**

Nome dos alunos	Envolvimento e participação		Cooperação e Trabalho em Equipa			Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução			Comunicação e Expressão Matemática		
	Nível de empenho na atividade	Interesse demonstrado na resolução das questões	Interação com os colegas	Contributo para a resolução das questões	Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões	Clareza e lógica na explicação das respostas	Uso adequado de estratégias	Correção das respostas e argumentação utilizada	Clareza e precisão na comunicação das ideias	Uso correto de linguagem matemática	Confiança na apresentação das respostas
	A/M/P	S/N/NO	C/P/I	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO

Legenda: **A** – Ativo; **M** – Moderado; **P** – Passivo / **S** – Sim; **N** – Não; **NO** – Não Observado / **C** – Cooperativo; **P** – Parcial; **I** - Individualista

Anexo C – Planificação da primeira tarefa: O Concurso “Acerta ou Perde”

Atividade de segunda-feira, dia 24/02 (8:50h – 9:40h)

Designação da tarefa: O Concurso “Acerta ou Perde” – Parte I

Objetivos/Conteúdos de ensino/aprendizagem visados:

<table>
<tr><th colspan="5">Aprendizagens Essenciais Matemática de 6.º ano</th></tr>
<tr><th>Tema</th><th>Tópico</th><th>Subtópico</th><th>Objetivos de aprendizagem:</th><th>Áreas de Competência do Perfil dos Alunos</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Capacidades Matemáticas</td><td>Resolução de problemas</td><td>Estratégias</td><td>Reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias da resolução de um problema.</td><td rowspan="6">C – Raciocínio e resolução de problemas
D – Pensamento crítico e pensamento criativo
E – Relacionamento interpessoal
F – Desenvolvimento pessoal e autonomia
I – Saber científico, técnico e tecnológico</td></tr>
<tr><td>Raciocínio matemático</td><td>Conjeturar e generalizar</td><td>Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comunicação matemática</td><td rowspan="2">Expressão de ideias</td><td>Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.</td></tr>
<tr><td>Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Álgebra</td><td rowspan="2">Regularidades em sequências</td><td rowspan="2">Leis de formação</td><td>Reconhecer relações, entre termos consecutivos de uma sequência numérica decrescente ou entre termos e as respetivas ordens, e formular conjeturas quanto a leis de formação das sequências.</td></tr>
<tr><td>Resolver problemas que envolvam regularidades e comparar criticamente diferentes estratégias da resolução.</td></tr>
</table>

Recursos necessários:

- Quadro branco/negro
- Canetas Whitboard/Giz
- Computador
- Projetor
- Folha de registo das respostas
- Manual
- Material de escrita
- Grelha de observação/avaliação

Organização dos alunos:

- Apresentação: Grande grupo
- Exploração: Pares
- Discussão e sistematização: Grande grupo

Tempos previstos:

- Apresentação: 10 minutos
- Exploração: 15 minutos
- Discussão: 15 minutos
- Sistematização: 10 minutos

Propostas de trabalho e atividade esperada o que esperar dos alunos

Apresentação

<u>Apresentação Contextualizada:</u>

- Apresentação da tarefa explicando o contexto: O concurso "Acerta ou Perde".
- Leitura do enunciado e das perguntas da tarefa com a turma.
- Esclarecimento de dúvidas sobre o que é solicitado através do questionamento sobre o entendimento dos alunos do que é pedido.
    - Nota: A tarefa encontra-se na página 8 do manual e será projetado de forma a situar os alunos e a auxiliar o esclarecimento do que é pedido em cada questão. Será pedido que os alunos respondam às questões 1, e 2.
    - A tarefa "O Concurso "Acerta ou Perde"" explora uma sequência de operações matemáticas em que o concorrente começa com 50 euros e, dependendo das respostas corretas ou erradas, o valor acumulado segue uma regularidade específica. A cada resposta correta, o dinheiro do concorrente duplica, e a cada resposta errada, o valor é reduzido pela metade. Os alunos devem analisar a sequência de valores resultantes dessas operações e identificar a regularidade no crescimento ou decrescimento do montante.

<u>Orientações de Trabalho:</u>

- O trabalho será feito a pares e os alunos devem registar por escrito como pensaram.
- Definir 15 minutos para o trabalho autónomo.
- Enfatizar que, no final, alguns pares serão chamados para apresentar as suas resoluções.

<u>Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:</u>

- Explica, por palavras tuas, o que é pedido nesta questão.
- O que quer dizer esta questão? O que querem saber?

Exploração

<u>Os alunos discutem e resolvem as duas primeiras perguntas da tarefa:</u>

EXPLORA

Concurso «ACERTA OU PERDE»

A mãe do Gonçalo vai participar no concurso de televisão «ACERTA OU PERDE».

Neste concurso são feitas 10 perguntas de cultura geral.

Cada concorrente começa com 50 euros e, por cada resposta certa, o concorrente duplica o seu dinheiro, mas se a sua resposta estiver errada, perde metade do dinheiro que tem.

1. Se um concorrente acertar as 10 respostas, **que quantia** consegue ganhar?

2. Se não acertar nenhuma resposta, **quanto** dinheiro ganha o concorrente?

Tarefa O Concurso "Acerta ou Perde" na página 8 do manual.

Função do Professor:

- Circula pela sala, acompanhando os pares.
- Incentiva a exploração de diferentes estratégias.

Evita dar soluções diretas, colocando questões para promover reflexão.

Antecipação das estratégias de resolução da tarefa

Questão 1 – "*Se um concorrente acertar as 10 respostas, que quantia consegue acumular por cada pergunta?*"

- Multiplicação sucessiva (passo a passo)
    - Os alunos podem começar com 50 euros e multiplicar sucessivamente por 2 a cada resposta correta.

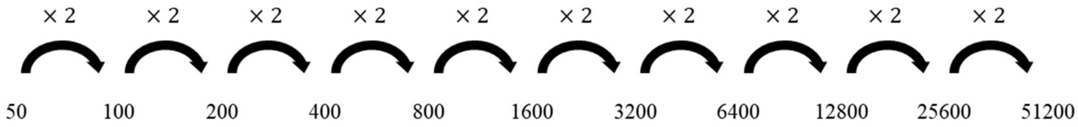
      1.ª pergunta: $50 \times 2 = 100$
      2.ª pergunta: $100 \times 2 = 200$
      3.ª pergunta: $200 \times 2 = 400$
      … (Seguir este processo até a 10.ª pergunta)
      10.ª pergunta: $25600 \times 2 = 51200$
- Identificação da regularidade nas multiplicações repetidas
    - Os alunos podem observar que as multiplicações seguem esta regularidade:

      1.ª pergunta: $50 \times 2 = 100$
      2.ª pergunta: $50 \times 2 \times 2 = 200$
      3.ª pergunta: $50 \times 2 \times 2 \times 2 = 400$
      … (Seguir este padrão até a 10.ª pergunta)
      10.ª pergunta: $25600 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 51200$
- Uso de tabelas
    - Os alunos podem criar uma tabela (vertical ou horizontal) com duas entradas: n.º da pergunta e valor acumulado. E recorrer à multiplicação sucessiva ou à adição de dois valores iguais.

N.º da pergunta	Multiplicação sucessiva	Adição de valores iguais	Valor acumulado
1	50×2	$50 + 50$	100
2	100×2	$100 + 100$	200
3	200×2	$200 + 200$	400
4	400×2	$400 + 400$	800
5	800×2	$800 + 800$	1600
6	1600×2	$1600 + 1600$	3200
7	3200×2	$3200 + 3200$	6400
8	6400×2	$6400 + 6400$	12800
9	12800×2	$12800 + 12800$	25600

10	25600×2	$25600 + 25600$	51200

- Uso de diagramas
  - Os alunos podem desenhar um diagrama que ilustre como o valor é duplicado a cada pergunta correta.



- Expressão algébrica geradora
  - Os alunos podem observar que o valor após 10 respostas corretas segue a fórmula:

$$Valor\ final = 50 \times 2^{10}$$

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade no cálculo progressivo.
  - *Atuação:* Sugerir a organização dos cálculos de cada resposta em tabelas ou diagramas. Incentivar a que os pares verifiquem os cálculos.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- O que significa "duplica"? De que operação estamos a falar?
- Se começamos com 50€ e acertamos a primeira pergunta, quanto dinheiro acumulámos?
- Se voltarmos a acertar, como podemos calcular o novo valor?
- Quanto dinheiro tens antes de responder?
- Se acertares, o que acontece ao dinheiro? Como podes calcular?
- Esta organização é a melhor? Não haverá outra que vos ajude? Confirmaram os resultados?
- Como podem registar os passos de forma a evitar erros?
- Como podem registar os passos de forma a evitar erros?
- Podem explicar como pensaram?
- Já verificaram se os cálculos estão corretos?

Questão 2 – "*Se não acertar nenhuma resposta, quanto dinheiro ganha o concorrente?*"

- Divisão sucessiva por 2 ou multiplicação por $\frac{1}{2}$ (passo a passo)
  - Os alunos podem começar com 50 euros e dividir sucessivamente por 2 a cada resposta errada.

    1.ª pergunta: $50 \div 2 = 25$ ou $50 \times \frac{1}{2} = 25$

    2.ª pergunta: $25 \div 2 = 12{,}5$ ou $25 \times \frac{1}{2} = 12{,}5$

    3.ª pergunta: $12{,}5 \div 2 = 6{,}25$ ou $12{,}5 \times \frac{1}{2} = 6{,}25$

    … (Seguir este processo até a 10.ª pergunta)

    10.ª pergunta: $0{,}09 \div 2 \cong 0{,}05$ ou $0{,}09 \times \frac{1}{2} \cong 0{,}05$
- Identificação do padrão nas multiplicações repetidas
  - Os alunos podem observar que as multiplicações seguem este padrão:

    1.ª pergunta: $50 \times \frac{1}{2} = 25$

2.ª pergunta: $50 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 12{,}5$

3.ª pergunta: $50 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 6{,}25$

… (Seguir este padrão até a 10.ª pergunta)

10.ª pergunta: $50 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cong 0{,}05$

- Uso de tabelas
  - Os alunos podem criar uma tabela (vertical ou horizontal) com duas entradas: n.º da pergunta e valor acumulado. Através da divisão sucessiva por 2 ou multiplicação por $\frac{1}{2}$.

N.º da pergunta	Divisão sucessiva	Multiplicação sucessiva	Valor acumulado
1	$50 \div 2$	$50 \times \frac{1}{2}$	25
2	$25 \div 2$	$25 \times \frac{1}{2}$	12,5
3	$12{,}5 \div 2$	$12{,}5 \times \frac{1}{2}$	6,25
4	$6{,}26 \div 2$	$6{,}26 \times \frac{1}{2}$	3,13
5	$3{,}13 \div 2$	$3{,}13 \times \frac{1}{2}$	1,56
6	$1{,}56 \div 2$	$1{,}56 \times \frac{1}{2}$	0,78
7	$0{,}78 \div 2$	$0{,}78 \times \frac{1}{2}$	0,39
8	$0{,}39 \div 2$	$0{,}39 \times \frac{1}{2}$	0,20
9	$0{,}20 \div 2$	$0{,}20 \times \frac{1}{2}$	0,10
10	$0{,}10 \div 2$	$0{,}10 \times \frac{1}{2}$	0,05

- Uso de diagramas
  - Os alunos podem desenhar um diagrama que ilustre como o valor é reduzido a metade a cada pergunta errada.

$$50 \xrightarrow{\div 2} 25 \xrightarrow{\div 2} 12{,}5 \xrightarrow{\div 2} 6{,}25 \xrightarrow{\div 2} 3{,}13 \xrightarrow{\div 2} 1{,}56 \xrightarrow{\div 2} 0{,}78 \xrightarrow{\div 2} 0{,}39 \xrightarrow{\div 2} 0{,}2 \xrightarrow{\div 2} 0{,}1 \xrightarrow{\div 2} 0{,}05$$

- Expressão algébrica geradora
  - Os alunos podem observar que, para 10 respostas erradas, o dinheiro é dividido por 2^{10} ou multiplicado por $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, o que pode ser expresso como:

$$Valor\ final = 50 \div 2^{10} \text{ ou } Valor\ final = 50 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em dividir valores muito pequenos.
  - *Atuação:* Sugerir aos alunos o arredondamento às centésimas, relembrando que o dinheiro não tem valores abaixo de um cêntimo.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- E se errarmos a primeira pergunta? Quanto dinheiro acumulamos?
- O que acontece ao dinheiro se errarmos várias perguntas seguidas? Ele desaparece completamente?
- Quanto dinheiro tens antes de responder?
- Se errares, como podemos descobrir o novo valor?
- Existem moedas abaixo de 1 cêntimo?
- Esse valor a que chegaram, se estivermos a referirmo-nos a euros, como dirias?
- Podem arredondar aos cêntimos (às centésimas)?

Discussão

Selecionar algumas resoluções, começando por pares que apresentaram resoluções incompletas ou mais informais para discutir e valorizar as tentativas:

- Solicitar que os alunos expliquem as suas estratégias e como chegaram aos resultados.
- Incentivar os pares a justificarem a sequência de cálculos para cada resposta.
- Fomentar a discussão entre os colegas sobre diferentes estratégias e processos de raciocínio, fazendo a pontes entre as diferentes estratégias apresentadas.
- Relembrar conceitos de sequências e regularidades estudados em anos anteriores como:
  - Sequência – Conjunto de elementos organizados segundo uma determinada ordem.
  - Termo da sequência – Cada elemento de uma sequência.
  - Ordem de um termo – Posição em que se encontra esse termo na sequência.
  - Sequência Pictórica – Sequência de figuras.
  - Sequência Numérica – Lista ordenada de números.
  - Sequência crescente – Lista ordenada de números que obedece a uma lei de formação, na qual cada termo é maior que o anterior.
  - Sequência decrescente – Lista ordenada de números que obedece a uma lei de formação, na qual cada termo é menor que o anterior.
- Incentivar a reflexão sobre os processos matemáticos e estratégias utilizadas.

Conjunto de questões orientadoras da discussão:

- Podes dizer como pensaste?
- Concordam com o que o vosso colega disse?
- Mais alguém pensou desta forma?
- Como passamos desta estratégia para esta?
- O que é uma sequência?

- Este número o que é numa sequência? O que é um termo da sequência? E a ordem?
- Alguém organizou a resposta de uma forma diferente?
- Como chegaste a este resultado?
- Qual é a diferença entre esta sequência e esta? O número a seguir é maior ou menor? O que podemos dizer sobre esta sequência?
- Que sequências conhecem? São todas com números? E como chamamos as sequências que não são numéricas?

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em reconhecer as regularidades nas sequências (uso de potências).
    - *Atuação:* Desafiar os alunos a escrever os valores após cada resposta certa e observar o padrão. Exemplo: 50, 100, 200, 400... Incentivar os alunos, através do questionamento, a relacionar cada termos da sequência com o termo inicial.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Há alguma regularidade no crescimento da quantia de dinheiro quando só acertamos? E quando só erramos?
- Se acertarmos todas as perguntas, o que acontece ao valor acumulado dinheiro? O que acontece a cada pergunta?
- E se errarmos todas as perguntas? O que podemos dizer sobre o que acontece ao valor acumulado?
- Se acertares sempre, consegues prever qual será a quantia de dinheiro acumulado ao fim de 5 perguntas?

Sistematização

- Questionar os alunos sobre o que estivemos a fazer nesta aula.
- Relembrar os conceitos matemáticos trabalhados e estratégias de resolução.
- Escrever o sumário.
- Recolher as perceções dos alunos sobre a importância do momento de discussão, recolhendo os dados para a investigação em curso:

Guião de Perguntas – Reflexão sobre a discussão em grande grupo

- O que é que aprenderam com a discussão da tarefa em grande grupo?
- Houve alguma estratégia ou ideia apresentada por um colega que vos ajudou a esclarecer dúvidas ou a perceber melhor a tarefa? Qual?
- Como foi partilhar as estratégias com a turma? Sentiram-se à vontade para o fazer? Porquê?
- Acham que todos tiveram oportunidade de partilhar?
- Acham importante explicar a própria estratégia? Porquê?
- Acham útil ouvir as estratégias dos outros colegas? Porquê?

- Solicitar para trabalho de casa que os alunos resolvam os exercícios 3, 6 e 7 das páginas 6 e 7 do manual a fim de relembrar os conteúdos trabalhados anteriormente sobre sequências de crescimento.

3. **Observa** com atenção as seguintes sequências numéricas.

I. 4, 14, 24, 34, ...

II. 12, 15, 18, 21, ...

III. 6, 11, 16, 21, ...

a) **Indica** o termo seguinte de cada uma das sequências.

b) **Descreve** a lei de formação de cada uma das sequências.

Exercício 3 da página 6.

6. **Indica** os primeiros dois termos das sequências com as seguintes expressões geradoras.

a) $2n + 1$ **b)** $n + 55$ **c)** $22 + 5n$

7. **Qual** é a expressão geradora de cada uma das seguintes sequências?

a) 6, 12, 18, 24, 30, ...

b) 5, 9, 13, 17, 21, ...

c) 102, 104, 106, 108, 110, ...

Exercício 6 e 7 da página 7.

Nota: Estas tarefas não serão corrigidas para o grupo turma, apenas serão apoiados na aula seguinte os alunos que demonstram mais dificuldade.

Avaliação

<u>A avaliação será formativa, será suportada por uma grelha de observação e terá como parâmetros:</u>

- O envolvimento e participação
  - Nível de empenho na atividade (ativo, moderado, passivo)
  - Interesse demonstrado na resolução das questões (Sim/Não/Não Observado)
- Cooperação e Trabalho em Equipa
  - Interação com os colegas (cooperativo, parcial, individualista)
  - Contributo para a resolução das questões (Sim/Não/Não Observado)
  - Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões (Sim/Não/Não Observado)
- Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução
  - Clareza e lógica na explicação das respostas (Sim/Não/Não Observado)
  - Uso adequado de estratégias de resolução de problemas (Sim/Não/Não Observado)
  - Correção das respostas e argumentação utilizada (Sim/Não/Não Observado)
- Comunicação e Expressão Matemática
  - Clareza e precisão na comunicação das ideias (Sim/Não/Não Observado)
  - Uso correto de linguagem matemática (Sim/Não/Não Observado)
  - Confiança na apresentação das respostas (Sim/Não/Não Observado)

Atividade de quarta-feira, dia 26/02 (10:00h – 11:40h)

Designação da tarefa: – O Concurso “Acerta ou Perde” – Parte II

Objetivos/Conteúdos de ensino/aprendizagem visados:

Aprendizagens Essenciais Matemática de 6.º ano				
Tema	**Tópico**	**Subtópico**	**Objetivos de aprendizagem:**	**Áreas de Competência do Perfil dos Alunos**
Capacidades Matemáticas	Resolução de problemas	Estratégias	Reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias da resolução de um problema.	**C** – Raciocínio e resolução de problemas **D** – Pensamento crítico e pensamento criativo **E** – Relacionamento interpessoal **F** – Desenvolvimento pessoal e autonomia **I** – Saber científico, técnico e tecnológico
	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar	Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia.	
	Comunicação matemática	Expressão de ideias	Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.	
			Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.	
Álgebra	Regularidades em sequências	Leis de formação	Reconhecer relações, entre termos consecutivos de uma sequência numérica decrescente ou entre termos e as respetivas ordens, e formular conjeturas quanto a leis de formação das sequências.	
			Identificar e descrever em linguagem natural ou simbólica uma possível lei de formação para uma dada sequência decrescente.	
			Resolver problemas que envolvam regularidades e comparar criticamente diferentes estratégias da resolução.	

<u>Recursos necessários:</u>

- Quadro branco/negro
- Canetas Whitboard/Giz
- Computador
- Projetor
- Folha de registo das respostas
- Enunciado da tarefa
- Material de escrita
- Grelha de observação/avaliação

<u>Organização dos alunos:</u>

- Apresentação: Grande grupo
- Exploração: Pares
- Discussão e sistematização: Grande grupo

<u>Tempos previstos:</u>

- Apresentação: 10 minutos
- Exploração: 40 minutos
- Discussão: 40 minutos
- Sistematização: 10 minutos

Propostas de trabalho e atividade esperada o que esperar dos alunos

Apresentação

<u>Apresentação Contextualizada:</u>

- Relembrar a turma das descobertas realizadas na aula anterior e das regularidades que foram observadas.
- Contextualizar a extensão do desafio: os alunos devem agora encontrar uma lei de formação para cada sequência e as respetivas expressões geradoras.
- Leitura do enunciado e de todas as perguntas da tarefa para relembrar o que foi realizado anteriormente.
- Esclarecimento de dúvidas sobre o que é solicitado através do questionamento sobre o entendimento dos alunos do que é pedido.
- Será projetado e distribuído por cada aluno o enunciado com todas as questões que faltam e distribuído por cada par uma nova folha de respostas juntamente com a folha preenchida na última aula para que possam consultar o que fizeram.
    - Nota: Tarefa adaptada de Faneco, C., & Valério, N. (2023). *Missão 6 – Vol. II: Matemática – 6.º ano* (1.ª ed.). Texto Editores.

<u>Orientações de Trabalho:</u>

- Esclarecer que, à semelhança do que foi feito na aula anterior, este trabalho será realizado a pares e devem registar por escrito como pensaram
- Definir 40 minutos para o trabalho autónomo.
- Relembrar que no final, alguns pares serão chamados para apresentar as suas resoluções.

<u>Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:</u>

- Dificuldade em recordar o que é a lei de formação e/ou a expressão geradora de uma sequência.
    - *Atuação:* Mostrar uma sequência (uma pictórica) como exemplo e relembrar o que é a lei de formação, através do questionamento.

<u>Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:</u>

- Lembram-se do que fizemos na última aula? O que foi?
- O que descobrimos sobre as sequências?
- O que acontece à quantia de valor acumulado se acertarmos numa pergunta? E se errarmos?
- Identificámos alguma regularidade? Qual?
- Explica por palavras tuas o que é pedido nesta questão.
- O que quer dizer esta questão? O que querem saber?

Exploração

<u>Os alunos discutem e resolvem as restantes perguntas da tarefa:</u>

O Concurso "Acerta ou Perde"

A mãe do Gonçalo vai participar no concurso de televisão «ACERTA OU PERDE». Neste concurso são feitas 10 perguntas de cultura geral. Cada concorrente começa com

50 euros e, por cada resposta certa, o concorrente duplica o seu dinheiro, mas se a sua resposta estiver errada, perde metade do dinheiro que tem.

1. Se um concorrente acertar as 10 respostas, **que quantia** consegue acumular em cada pergunta?
2. Se não acertar nenhuma resposta, **quanto** dinheiro ganha o concorrente?
3. A mãe do Gonçalo acertou cinco respostas e errou outras cinco.
   3.1. Quanto dinheiro ganhou?
   3.2. Será que o prémio é diferente se acertar nas cinco primeiras respostas ou nas cinco últimas?
4. **Qual** é a lei de formação que descreve a sequência numérica determinada na pergunta 1? E para a sequência numérica da pergunta 2?
5. **Qual** é a expressão geradora da sequência numérica determinada na pergunta 1? E para a sequência numérica da pergunta 2?

(Tarefa adaptada de Faneco, C., & Valério, N. (2023). *Missão 6 – Vol. II: Matemática – 6.º ano* (1.ª ed.). Texto Editores.)

Função do Professor:

- Circula pela sala, acompanhando os pares.
- Incentiva a exploração de diferentes estratégias.
- Evita dar soluções diretas, colocando questões para promover reflexão.

Antecipação das estratégias de resolução da tarefa:

Questão 3.1 – *"A mãe do Gonçalo acertou cinco respostas e errou outras cinco. Quanto dinheiro ganhou?"*

- Multiplicação e divisão sucessiva (cálculo passo a passo)
  - A cada resposta correta, o valor é multiplicado por 2. A cada resposta errada, o valor é dividido por 2.

    Inicial: 50 euros
    1.ª pergunta (correta): $50 \times 2 = 100$
    2.ª pergunta (correta): $100 \times 2 = 200$
    …
    5.ª pergunta (correta): $800 \times 2 = 1600$
    6.ª pergunta (errada): $1600 \div 2 = 800$
    7.ª pergunta (errada): $800 \div 2 = 400$
    …
    10.ª pergunta (errada): $100 \div 2 = 50$
- Identificação da regularidade nas multiplicações e divisões alternadas
  - Os alunos podem, ao alternar a multiplicação e a divisão, encontrar uma regularidade que dita o valor no 10.º termo.

    Inicial: 50 euros
    1.ª pergunta (correta): $50 \times 2 = 100$
    2.ª pergunta (errada): $100 \div 2 = 50$
    3.ª pergunta (correta): $50 \times 2 = 100$

4.ª pergunta (errada): $100 \div 2 = 50$
Nas perguntas de número par o valor é 50 e nas perguntas de número ímpar o valor é 100. Logo, na 10.ª pergunta o valor será 50€.
10.ª pergunta (errada): $100 \div 2 = 50$

Ou

Inicial: 50 euros
1.ª pergunta (errada): $50 \div 2 = 25$
2.ª pergunta (correta): $25 \times 2 = 50$
3.ª pergunta (errada): $50 \div 2 = 25$
4.ª pergunta (correta): $25 \times 2 = 50$
Nas perguntas pares o valor é 50 e nas perguntas ímpares o valor é 25. Logo, na 10.ª pergunta o valor será 50€.
10.ª pergunta (correta): $25 \times 2 = 50$

- Uso de tabelas
  - Criar uma tabela que regista a acumulação do valor após cada pergunta, recorrendo à multiplicação e divisão sucessiva:

	Corretas					Errada				
N.º da pergunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor acumulado	100	200	400	800	1600	800	400	200	100	50

- Representação com diagramas
  - Os alunos podem desenhar um diagrama que ilustre como o valor altera consoante cada pergunta correta ou errada.

$$50 \xrightarrow{\div 2} 25 \xrightarrow{\div 2} 12{,}5 \xrightarrow{\div 2} 6{,}25 \xrightarrow{\div 2} 3{,}13 \xrightarrow{\div 2} 1{,}56 \xrightarrow{\times 2} 3{,}13 \xrightarrow{\times 2} 6{,}25 \xrightarrow{\times 2} 12{,}5 \xrightarrow{\times 2} 25 \xrightarrow{\times 2} 50$$

$$50 \xrightarrow{\times 2} 100 \xrightarrow{\times 2} 200 \xrightarrow{\times 2} 400 \xrightarrow{\times 2} 800 \xrightarrow{\times 2} 1600 \xrightarrow{\div 2} 800 \xrightarrow{\div 2} 400 \xrightarrow{\div 2} 200 \xrightarrow{\div 2} 100 \xrightarrow{\div 2} 50$$

$$50 \xrightarrow{\div 2} 25 \xrightarrow{\times 2} 50 \xrightarrow{\div 2} 25 \xrightarrow{\times 2} 50 \xrightarrow{\div 2} 25 \xrightarrow{\times 2} 50 \xrightarrow{\div 2} 25 \xrightarrow{\times 2} 50 \xrightarrow{\div 2} 25 \xrightarrow{\times 2} 50$$

$$50 \xrightarrow{\times 2} 100 \xrightarrow{\div 2} 50 \xrightarrow{\times 2} 100 \xrightarrow{\div 2} 50 \xrightarrow{\times 2} 100 \xrightarrow{\div 2} 50 \xrightarrow{\times 2} 100 \xrightarrow{\div 2} 50 \xrightarrow{\times 2} 100 \xrightarrow{\div 2} 50$$

- Expressão algébrica geradora
  - Os alunos podem utilizar a expressão geradora.

5 respostas corretas → Multiplicação por $2^5 = 32$

5 erros → Divisão por $2^5 = 32$ ou Multiplicação por $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

O efeito das cinco respostas correta é anulado pelas cinco respostas erradas $50 \times 2^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 50 \times 32 \times \frac{1}{32} = 50 \times 1 = 50$

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- O que fizeste na aula anterior quando se acertava numa questão? E quando se errava?
- Verificaram se estão 5 perguntas corretas e 5 erradas?

Questão 3.2 – *"Será que o prémio é diferente se acertar nas cinco primeiras respostas ou nas cinco últimas?"*

- Multiplicação e divisão sucessiva (simulação)
  - Os alunos podem repetir o cálculo, alterando a ordem das respostas:

    5 primeiras correta → Duplicação até 1.600, seguida por divisão até 50.

    5 primeiras erradas → Redução para 1,56 euros, depois multiplicação de volta para 50.
- Estratégia algébrica (generalização)
  - Os alunos podem utilizar a expressão algébrica geral.

    A fórmula geral: $\text{Valor final} = 50 \times 2^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 50$

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em perceber a relação entre a ordem das respostas e o valor final acumulado.
  - *Atuação:* Incentivar os alunos a testar cenários diferentes: acertar cinco respostas seguidas e depois errar cinco, e o inverso, acertar e errar alternadamente. Sugerir que analisem os resultados intermediários após cada resposta para identificar o efeito das operações em cada etapa.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Para obtermos o termo a seguir o que temos de fazer ao termo anterior?
- O que precisaste de fazer para determinar este termo?
- O que acontece ao valor inicial após cada resposta certa? É maior ou menor que o anterior? Maior em quanto?

Questão 4 – *"Qual é a lei de formação que descreve a sequência de valores para as perguntas 1 e 2?"*

- Lei de formação para a sequência crescente.

  Adicionar duas vezes o valor do termo anterior.

  Cada termo é obtido multiplicando o anterior por 2.
- Lei de formação para a sequência decrescente.

  Cada termos é obtido dividindo o anterior por 2.

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em generalizar o padrão de crescimento ou diminuição do dinheiro.

- *Atuação:* Incentivar os alunos a identificar padrões numéricos nos resultados das perguntas anteriores. Colocar questões que levem à formulação de conjeturas sobre a regra de crescimento ou diminuição.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Para obtermos o termo a seguir o que temos de fazer ao termo anterior?
- O que precisaste de fazer para determinar este termo?
- O que acontece ao valor inicial após cada resposta certa? É maior ou menor que o anterior? Maior em quanto?

Questão 5 – *"Determinem a expressão geradora da sequência numérica crescente. E qual é a expressão geradora da sequência numérica decrescente?"*

- Através da identificação da regularidade nas multiplicações repetidas
  - Os alunos podem observar que as multiplicações seguem esta regularidade:

Sequência crescente

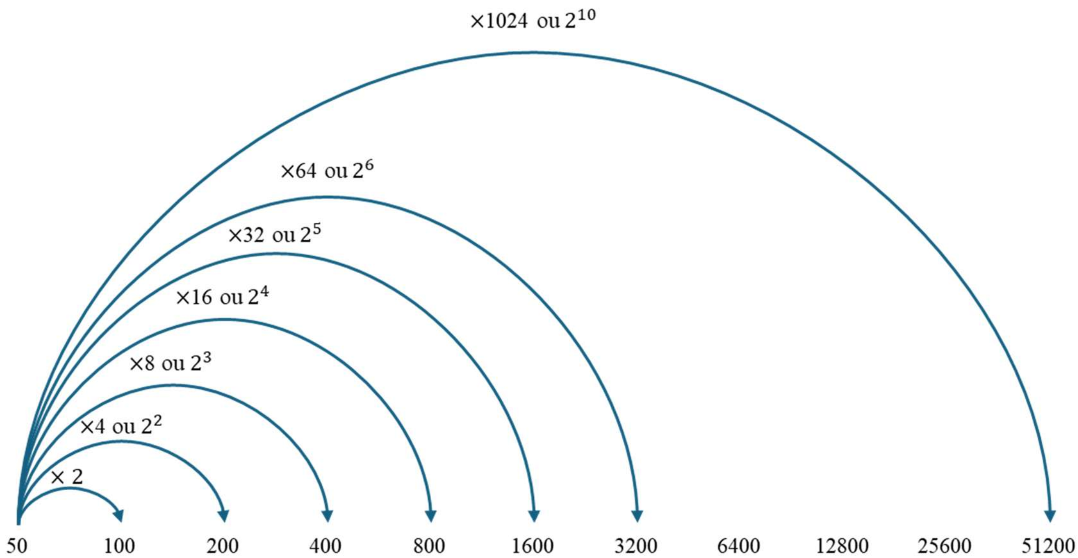
1.ª pergunta: $50 \times 2 = 100$
2.ª pergunta: $50 \times 2 \times 2 = 200$
3.ª pergunta: $50 \times 2 \times 2 \times 2 = 400$
… (Seguir este padrão até a 10.ª pergunta)
10.ª pergunta: $25600 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 51200$

Sequência decrescente

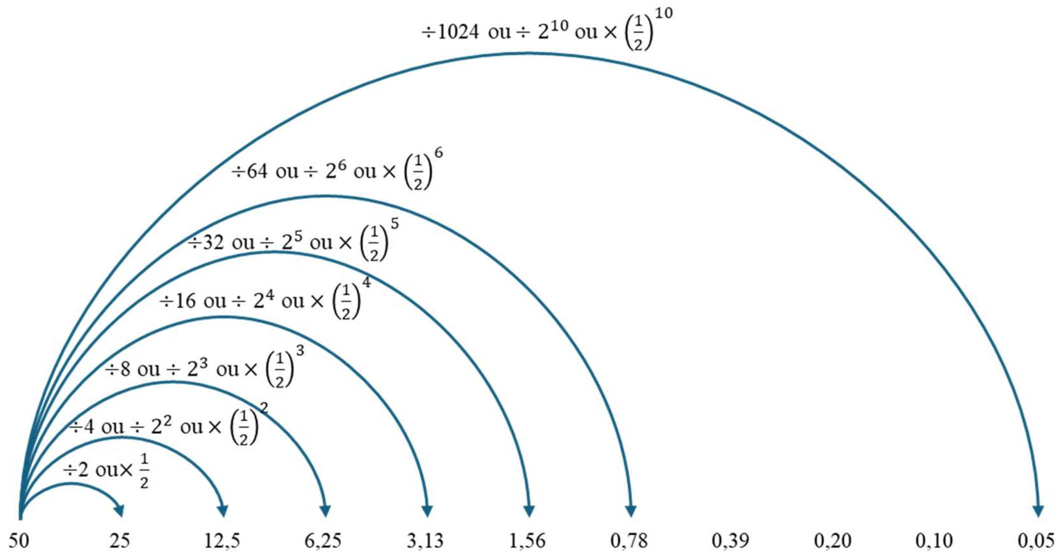
1.ª pergunta: $50 \times \frac{1}{2} = 25$
2.ª pergunta: $50 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 12{,}5$
3.ª pergunta: $50 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 6{,}25$
… (Seguir este padrão até a 10.ª pergunta)
10.ª pergunta: $50 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cong 0{,}05$

- Através da identificação da regularidade na sequência

Sequência crescente



Sequência decrescente



- Expressão algébrica geradora
  - Os alunos podem observar que o valor após 10 respostas corretas segue a fórmula:

Sequência crescente

$$50 \times 2^{10}$$

Sequência decrescente

$$50 \div 2^{10} \text{ ou } 50 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Chegar à Expressão geradora:

Sequência decrescente

$$50 \times 2^{n}$$

Sequência decrescente

$$50 \div 2^{n} \; ou \; 50 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em identificar corretamente a expressão geradora.
  - *Atuação:* Orientar os alunos para verificarem a regularidade nas multiplicações sucessivas ou a regularidade entre o valor inicial e cada resultado obtido.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Qual será a relação entre respostas certas e o valor acumulado?
- Como podemos escrever uma expressão algébrica que nos diga o dinheiro que temos ao fim de "n" respostas certas?
- E se forem erradas?

- Que regularidade encontram nesta sequência? Como determinaram o primeiro termo? Sem fazer o resultado dessa operação como determinam o segundo termo? E o terceiro?
- Dividir por 2 é o mesmo que…?
- Entre o valor inicial e a segunda resposta correta quantas vezes cresceu o valor do prémio?

Discussão

Selecionar algumas resoluções, começando por pares que apresentaram resoluções incompletas ou mais informais para discutir e valorizar as tentativas:

- Solicitar que os alunos expliquem as suas estratégias e como chegaram aos resultados.
- Incentivar os pares a justificarem cada resposta.
- Fomentar a discussão entre os colegas sobre as justificações e os processos de raciocínio, fazendo a pontes entre as respostas anteriores e a generalização.
- Relembrar conceitos de sequências e regularidades estudados em anos anteriores como:
    - Lei de formação – Regra que permite obter cada termo da sequência a partir do termo anterior.
    - Termo geral ou expressão geradora de uma sequência – Expressão que permite obter qualquer termo de uma sequência, relacionando-o com a sua ordem.
- Incentivar a reflexão sobre a fórmula geral, relacionando as duas expressões geradoras.

Conjunto de questões orientadoras da discussão:

- Podes dizer como pensaste?
- Concordam com o que o vosso colega disse?
- Mais alguém pensou desta forma?
- Como passamos desta estratégia para esta?
- O que é a lei de formação de uma sequência?
- O que é a expressão geradora ou termo geral?
- Alguém pensou de forma diferente?
- Como chegaste a esta conclusão?

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em relacionar as duas expressões geradoras para obter o resultado qualquer que seja o número de respostas corretas e erradas.
    - *Atuação:* Incentivar os alunos a escreverem uma expressão algébrica que descreva o processo passo a passo. Ajudar a identificar que cada resposta certa corresponde a uma multiplicação por 2, e cada resposta errada a uma divisão por 2.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Quantas vezes o valor é multiplicado por 2, dependendo das respostas certas? E quantas vezes é dividido por 2, dependendo das respostas erradas?

- Agora que já temos as expressões geradoras de ambas as sequências, será que conseguimos determinar uma expressão geral sabendo o número de respostas corretas e erradas?
- Que expressão devo utilizar para determinar a quantia acumulada sabendo que acertei 5 respostas? Sem resolver a expressão, que expressão utilizaria para determinar a quantia acumulada sabendo que errei as outras 5 respostas?
- Vamos testar? O valor que obtemos é igual ao que obtivemos na pergunta 3.1?

Sistematização

- Questionar os alunos sobre o que estivemos a fazer nesta aula.
- Relembrar os conceitos matemáticos trabalhados e relacionar com o que foi feito na aula anterior.
- Recolher as perceções dos alunos sobre a importância do momento de discussão, recolhendo os dados para a investigação em curso:

Guião de Perguntas – Reflexão sobre a discussão em grande grupo

- O que é que aprenderam com a discussão da tarefa em grande grupo?
- Houve alguma estratégia ou ideia apresentada por um colega que vos ajudou a esclarecer dúvidas ou a perceber melhor a tarefa? Qual?
- E as tarefas que resolveram anteriormente ajudaram a compreender/resolver este problema? Se sim em quê?
- Como foi partilhar as estratégias com a turma? Sentiram-se à vontade para o fazer? Porquê?
- Acham que todos tiveram oportunidade de partilhar?
- Acham importante explicar a própria estratégia? Porquê?
- Acham útil ouvir as estratégias dos outros colegas? Porquê?

- Escrever o sumário da aula em conjunto com os alunos.
- Solicitar para trabalho de casa que os alunos resolvam os exercícios 4 e 5 da página 10 do manual e o problema 9 da página 11 a fim de consolidar os conteúdos trabalhados sobre sequências.

4. **Observa** a sequência de figuras formadas por triângulos.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) **Considera** o triângulo maior como unidade de medida da área e **completa** a tabela.

N.º da figura	Área do triângulo menor
1	1
2	$\frac{1}{4}$
3	
4	
5	

b) **Qual** é a lei de formação da sequência dos valores das áreas dos triângulos menores de cada figura?

Exercícios 4 da página 10 do manual.

5. **Observa** as sequências.

I. 2 , 5 , 8 , 11 , 14, ...

II. 125 , 114 , 103 , 92 , ...

a) **Indica** os próximos dois termos de cada sequência.

b) **Qual** é a expressão geradora da sequência I?

c) **Indica** a lei de formação da sequência II.

Exercício 5 da página 10 do manual.

9. Num país encantado vive um duende que se chama Adão.
O Adão está a pintar um arco-íris no céu do seu país. Começa de manhã bem cedo e só para à noite. Todos os dias consegue pintar 12 km de um lindo arco-íris, mas, todas as noites, a Bruxa Negra apaga $\frac{1}{10}$ do trabalho feito pelo Adão.
De manhã, quando o Adão começa a pintar não percebe o que aconteceu, mas a sua obra nunca mais acaba. Sabendo que tem de pintar 100 km, **quantos** dias demorará o Adão a concluir o seu trabalho?

Exercícios 9 da página 11 do manual.

Avaliação

<u>A avaliação será formativa, será suportada por uma grelha de observação e terá como parâmetros:</u>

- O envolvimento e participação
  - Nível de empenho na atividade (ativo, moderado, passivo)
  - Interesse demonstrado na resolução das questões (Sim/Não/Não Observado)
- Cooperação e Trabalho em Equipa
  - Interação com os colegas (cooperativo, parcial, individualista)
  - Contributo para a resolução das questões (Sim/Não/Não Observado)
  - Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões (Sim/Não/Não Observado)
- Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução
  - Clareza e lógica na explicação das respostas (Sim/Não/Não Observado)
  - Uso adequado de estratégias de resolução de problemas (Sim/Não/Não Observado)
  - Correção das respostas e argumentação utilizada (Sim/Não/Não Observado)
- Comunicação e Expressão Matemática
  - Clareza e precisão na comunicação das ideias (Sim/Não/Não Observado)
  - Uso correto de linguagem matemática (Sim/Não/Não Observado)
  - Confiança na apresentação das respostas (Sim/Não/Não Observado)

Data: ______/______/_________ **Grelha de Observação**

	Envolvimento e participação		Cooperação e Trabalho em Equipa			Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução			Comunicação e Expressão Matemática		
	Nível de empenho na atividade	Interesse demonstrado na resolução das questões	Interação com os colegas	Contributo para a resolução das questões	Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões	Clareza e lógica na explicação das respostas	Uso adequado de estratégias	Correção das respostas e argumentação utilizada	Clareza e precisão na comunicação das ideias	Uso correto de linguagem matemática	Confiança na apresentação das respostas
	A/M/P	S/N/NO	C/P/I	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO

Nome: ___________________________ Trabalhei com: ____________________

Data: ___/___/_____ Tarefa: ____________________________

Registo da resolução

(Mostrem como pensaram)

Questionário para preencher após a resolução a pares.

1. **Considera** as seguintes afirmações e **escolhe** uma das opções.

	Discordo totalmente	Discordo	Concordo	Concordo totalmente
Gostei de realizar esta tarefa.				
Trabalhar a pares é importante.				

Nome: ____ Data: ___/___/_____

O Concurso “Acerta ou Perde”

A mãe do Gonçalo vai participar no concurso de televisão «ACERTA OU PERDE». Neste concurso são feitas 10 perguntas de cultura geral. Cada concorrente começa com 50 euros e, por cada resposta certa, o concorrente duplica o seu dinheiro, mas se a sua resposta estiver errada, perde metade do dinheiro que tem.

1. Se um concorrente acertar as 10 respostas, **que quantia** consegue acumular em cada pergunta?
2. Se não acertar nenhuma resposta, **quanto** dinheiro ganha o concorrente?
3. A mãe do Gonçalo acertou cinco respostas e errou outras cinco.
   - **3.1.** **Quanto** dinheiro ganhou?
   - **3.2.** **Será que** o prémio é diferente se acertar nas cinco primeiras respostas ou nas cinco últimas?
4. **Qual** é a lei de formação que descreve a sequência numérica determinada na pergunta 1? E para a sequência numérica da pergunta 2?
5. **Qual** é a expressão geradora da sequência numérica determinada na pergunta 1? E para a sequência numérica da pergunta 2?

Anexo D – Planificação da segunda tarefa: Os Tijolos

Atividade de quarta-feira, dia 05/03 (10:00h – 11:40h)

Designação da tarefa: Os Tijolos

Objetivos/Conteúdos de ensino/aprendizagem visados:

<table>
<tr><th colspan="5">Aprendizagens Essenciais Matemática de 6.º ano</th></tr>
<tr><th>Tema</th><th>Tópico</th><th>Subtópico</th><th>Objetivos de aprendizagem:</th><th>Áreas de Competência do Perfil dos Alunos</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Capacidades Matemáticas</td><td rowspan="2">Raciocínio matemático</td><td>Conjeturar e generalizar</td><td>Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia.</td><td rowspan="7">C – Raciocínio e resolução de problemas
D – Pensamento crítico e pensamento criativo
E – Relacionamento interpessoal
F – Desenvolvimento pessoal e autonomia
I – Saber científico, técnico e tecnológico</td></tr>
<tr><td>Justificar</td><td>Reconhecer a correção, diferença e adequação de diversas formas de justificar uma conjetura/generalização.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comunicação matemática</td><td rowspan="2">Expressão de ideias</td><td>Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.</td></tr>
<tr><td>Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Álgebra</td><td rowspan="3">Regularidades em sequências</td><td rowspan="3">Leis de formação</td><td>Reconhecer relações, entre termos consecutivos de uma sequência numérica ou entre termos e as respetivas ordens, e formular conjeturas quanto a leis de formação das sequências.</td></tr>
<tr><td>Criar, completar e continuar sequências dadas de acordo com uma lei de formação e verificar se um dado número é elemento de uma sequência, justificando.</td></tr>
<tr><td>Resolver problemas que envolvam regularidades e comparar criticamente diferentes estratégias da resolução.</td></tr>
</table>

<u>Recursos necessários:</u>

- Quadro branco/negro
- Canetas Whitboard/Giz
- Computador
- Projetor
- Folha de registo das respostas
- Enunciado da tarefa
- Material de escrita
- Grelha de observação/avaliação

<u>Organização dos alunos:</u>

- Apresentação: Grande grupo
- Exploração: Pares
- Discussão e sistematização: Grande grupo

<u>Tempos previstos:</u>

- Apresentação: 10 minutos
- Exploração: 40 minutos
- Discussão: 40 minutos
- Sistematização: 10 minutos

Propostas de trabalho e atividade esperada o que esperar dos alunos

Apresentação

Apresentação Contextualizada:

- Apresentação da tarefa explicando o contexto: Os tijolos.
- Leitura do enunciado e das perguntas da tarefa com a turma.
- Esclarecimento de dúvidas sobre o que é solicitado através do questionamento sobre o entendimento dos alunos do que é pedido.
  - Nota: Tarefa adaptada de Pedro, I. (2013). Das sequências à proporcionalidade direta : uma experiência de ensino no 6.º ano de escolaridade. [Relatório de Mestrado, Universidade de Lisboa, Instituto de Educação]. Repositório da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/10316.
  - A tarefa "Os tijolos" consiste numa sequência de figuras compostas por tijolos, onde cada tijolo contém oito buracos no seu interior. A sequência inicia-se com um tijolo, seguida por uma segunda figura com três tijolos e uma terceira com cinco tijolos. Os alunos devem analisar não apenas a regularidade no número de tijolos, mas também a relação entre o número de tijolos e a quantidade total de buracos.
  - Para apoiar essa análise, é fornecida uma tabela que os alunos devem completar até ao 6.º termo da sequência, registando o número de tijolos e o número total de buracos. Depois de identificadas as regularidades da sequência e determinada a sua lei de formação do número de tijolos, os alunos serão desafiados a prever valores para termos mais avançados da sequência; a verificar se um determinado número pertence à sequência; e a generalizar as relações identificadas através da formulação de expressões algébricas que descrevem a relação entre os termos da sequência.
- A tarefa será projetada para facilitar a visualização, o acompanhamento e a interpretação do que é solicitado.
- Será distribuído por aluno o enunciado da tarefa e a folha de registo das respostas.

Orientações de Trabalho:

- Esclarecer que, à semelhança do que foi feito em aulas anteriores, este trabalho será realizado a pares e devem registar por escrito como pensaram
- Definir 40 minutos para o trabalho autónomo.
- Relembrar que no final, alguns pares serão chamados para apresentar as suas resoluções.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- O que temos aqui?
- Olhando para as figuras, o número de tijolos está a aumentar ou a diminuir a cada figura? Quanto?
- E parece-vos que é uma sequência crescente ou decrescente? Porquê?
- O que têm de preencher nesta tabela?

- Explica, por palavras tuas, o que é pedido nesta questão.
- O que se quer determinar/saber com esta questão?
- Se sabes quantos tijolos tem a figura anterior, como podes encontrar a próxima?
- Todos os tijolos têm o mesmo número de buracos? Quantos buracos tem cada tijolo?

Exploração

<u>Os alunos discutem e resolvem a tarefa:</u>

Os tijolos

1. Considerem a seguinte sequência de figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) **Completem**, de acordo com a imagem, a seguinte tabela:

N.º da Figura	*N.º de tijolos*	*Número de buracos dentro dos tijolos*
1		
2		
3		
4		
5		
6		

b) **Quantos** tijolos tem, no total, a figura que corresponde ao termo de ordem 20? E **quantos** buracos têm todos os tijolos da 20.ª figura?

c) **Existe**, nesta sequência, alguma figura com 88 tijolos? Se existir, **determinem** a ordem que lhe corresponde.

2. **Escrevam** uma expressão geradora que vos permita determinar, para qualquer figura:

a) o número de tijolos.

b) o número de buracos de todos os tijolos dessa figura.

(Tarefa adaptada de Pedro, I. (2013). *Das sequências à proporcionalidade direta: uma experiência de ensino no 6.º ano de* *escolaridade.* [Relatório de Mestrado, Universidade de Lisboa, Instituto de Educação]. Repositório da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/10316)

Função do Professor:

- Circular pela sala, acompanhando os pares.
- Incentivar a exploração de diferentes estratégias.
- Evitar dar soluções diretas, colocando questões para promover reflexão.

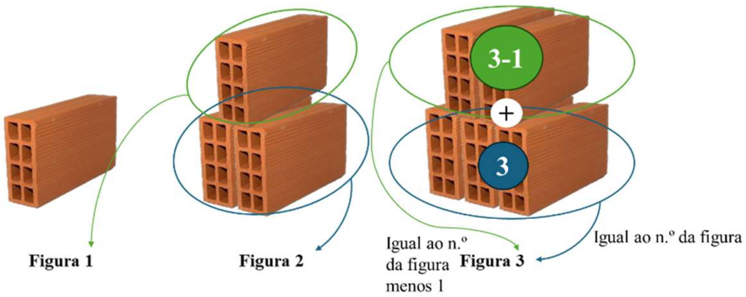
Antecipação das estratégias de resolução da tarefa:

Questão 1 a) – "*Completem, de acordo com a sequência, a seguinte tabela.*"

- Os alunos podem começar por contagem direta dos tijolos e buracos até identificar uma regularidade.
  Para determinar o número de tijolos, basta acrescentar dois ao número de tijolos presentes na figura anterior (lei de formação). Podem ainda relacionar com a ordem dos termos e identificar que o número de tijolos de um determinado termo obtém-se adicionando à ordem desse termo a ordem do termo anterior (expressão geradora).
  Para obter o número de buracos dentro dos tijolos, como cada tijolo tem oito buracos, é necessário multiplicar o número de tijolos pelo número de buracos.

N.º da Figura	***N.º de tijolos***	***Número de buracos dentro dos tijolos***
1	1	8
2	3	$8+8+8=24$ ou $3\times 8=24$
3	5	$8+8+8+8+8=40$ ou $5\times 8=40$
4	5+2=7 4+3=7	$8+8+8+8+8+8+8=56$ ou $7\times 8=56$
5	7+2=9 5+4=9	$8+8+8+8+8+8+8+8+8=72$ ou $9\times 8=72$
6	9+2=11 6+5=11	$8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8=88$ ou $11\times 8=$ 88

A partir do preenchimento da tabela pode-se encontrar regularidades, não só na tabela como também na componente estrutural da sequência. Para tal será necessário decompor as imagens e relacionar com as ordens do termos.



Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em identificar as regularidades na sequência das figuras.
  - *Atuação*: Incentivar o aluno a descobrir as regularidades através do questionamento.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Quantos tijolos temos no termo de ordem 1? E quantos temos no de ordem 2? Qual é a diferença?
- Essa diferença é a mesma que existe dos termos de ordens 2 e 3?
- Como obtemos o termo de ordem 3? E para determinares o termo de ordem 4 o que tens de fazer ao termo de ordem 3?
- Quantos buracos tem cada tijolo? Cada tijolo tem sempre o mesmo número de buracos?
- Para determinar o número de buracos o que precisas de fazer?

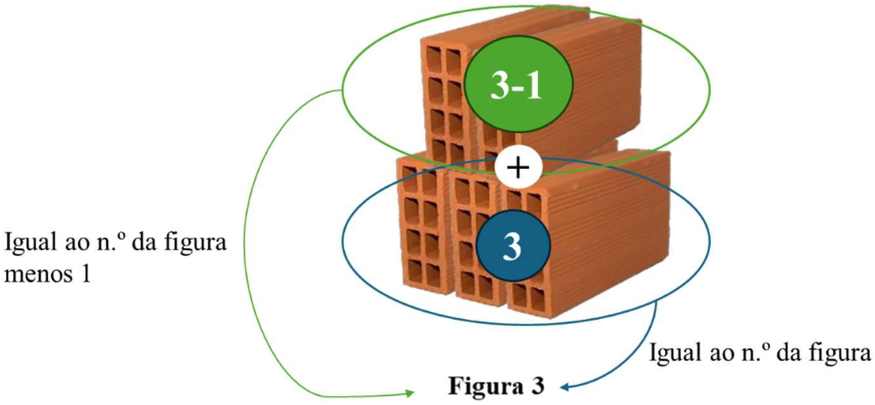
Questão 1 b) – "*Quantos tijolos tem, no total, a figura que corresponde ao termo de ordem 20? E quantos buracos têm todos os tijolos da 20.ª figura?*"

Para determinar o número de tijolos

- Continuar a preencher parte da tabela.

  …
  Figura 19 → 37
  Figura 20 → 39
- Apoiar-se nas relações numéricas anteriormente identificadas.

  Se adicionar a ordem da figura com a ordem da figura anterior obtém o número de tijolos através da observação da estrutura física da sequência.



  Ex.: Se queremos saber o n.º de tijolos da figura 20, somamos $20 + 19 = 39$

  R: O termo de ordem 20 tem, no total, 39 tijolos.
- Identificar o termo geral:

  O número de tijolos por figura corresponde à soma do n.º da figura (n) com o n.º da figura anterior:

  $n + (n - 1)$, ou seja, o termo de ordem 20 tem $20 + (20 - 1) = 20 + 19 = 39$ tijolos.

  O número de tijolos por figura corresponde ao dobro da sua ordem, menos um.

  $2n - 1$, ou seja, o termo de ordem 20 tem $2 \times 20 - 1 = 39$ tijolos.

Para determinar o número de buracos

- Multiplicam o n.º de tijolos pelo número de buracos por tijolo.

$$39 \times 8 = 312$$

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em determinar uma forma para encontrar diretamente sem ter de construir todas as figuras até à 20.ª
  - *Atuação:* Incentivar os alunos a encontrarem regularidades na sequência já identificada.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Como podemos determinar o número de tijolos de uma figura sem ter de determinar figura a figura?
- Existe alguma relação entre o número de tijolos e o n.º da figura? Qual?
- O número de buracos depende diretamente do número de tijolos?

Questão 1 c) – *"Existe, nesta sequência, alguma figura com 88 tijolos? Se existir, determinem a ordem que lhe corresponde."*

- Recorrer à identificação de uma regularidade, verificando que o número total de tijolos de cada figura é sempre um número ímpar.

  R: Como os n.ºs de tijolos são sempre ímpares, 88 não pode estar na sequência porque é um número par.
- Justificar através da regularidade da adição de dois termos consecutivos e que chegar à conclusão de que a adição de um número par com um número ímpar resulta sempre num número ímpar.

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

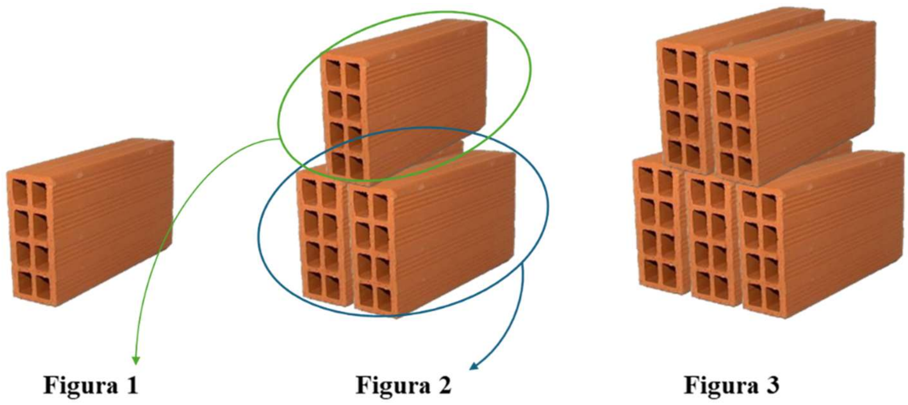
- Dificuldade em determinar uma regularidade
  - *Atuação:* Incentivar os alunos a encontrarem regularidades na sequência.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- O que me podes dizer sobre os números de tijolos de cada figura?
- Eles têm uma particularidade, qual é? O 1, o 3, o 5. Que números são?

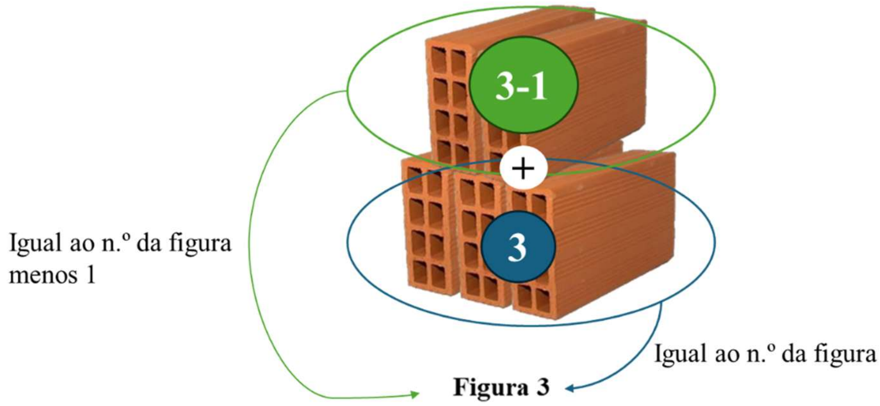
Questão 2 a) – *"Escrevam uma expressão geradora que vos permita determinar, para qualquer figura, o número de tijolos."*

- Através da sequência identificar uma regularidade que relaciona a ordem de um termo com o imediatamente anterior.



$$N.º\ da\ figura\ +\ \text{N.º}\ da\ figura\ anterior$$

- Através da sequência identificar uma regularidade que relaciona o valor de um termo com a sua ordem.



$N.º\ da\ figura\ +\ \text{N.º}\ da\ figura - 1$, simplificando para

$$2\ \times N.º\ da\ figura - 1$$

- Expressar através da linguagem simbólica, as regularidades anteriormente identificadas e utilizadas:

  Adicionar o n.º da figura (n) com o n.º da figura anterior:

  $$n + (n - 1)$$

  Duplicar o n.º da figura (n) e subtrair uma unidade:

  $$2n - 1$$

<u>Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:</u>

- Dificuldade em transitar da regularidade ou lei de formação para uma expressão algébrica.
  - *Atuação:* Desafiar, através do questionamento, a identificar a regularidade de crescimento ou relacionando cada elemento com a sua ordem e assim encontrar a expressão geradora.

<u>Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:</u>

- Cada nova figura tem um número de tijolos que segue uma regularidade. Como podemos escrever isso com uma expressão algébrica?

- Como aumenta o número de tijolos? Poderás utilizar essa diferença para encontrar qualquer temo?
- Como podemos relacionar o número de tijolos com o número da figura?
- Observa as figuras. Consegues decompor a figura 3, por exemplo, e relacionar o número de tijolos com o número da figura?
- Na figura 2 quantos tijolos estão na linha de baixo e na de cima? Conseguimos relacionar estes valores com a ordem dos termos?
- Então e se fosse a figura 10, como seria? E a 100?
- Como generalizamos essa expressão que encontraste para qualquer termo de sequência?

Questão 2 b) – *"Escrevam uma expressão geradora que vos permita determinar, para qualquer figura, o número de buracos de todos os tijolos dessa figura."*

- Indicar que para determinar o número total de buracos de todos os tijolos é necessário multiplicar um pelo outro.

$$n.º\ de\ tijolos \times 8\ (buracos\ por\ tijolo) = n.º\ total\ de\ buracos$$

- Recorrer às expressões algébricas, anteriormente identificadas, e multiplicar por 8 (o n.º de buracos de cada tijolo).

$$(N.º\ da\ figura\ +\ \mathrm{N.º}\ da\ figura\ anterior) \times 8$$
$$(N.º\ da\ figura\ +\ N.º\ da\ figura - 1) \times 8$$
$$(2 \times N.º\ da\ figura - 1) \times 8$$
$$8\big(n + (n-1)\big)$$
$$8(2n-1)$$

<u>Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:</u>

- Dificuldade em relacionar a expressão anterior com a determinação do número de buracos.
  - *Atuação:* Incentivar os alunos a utilizarem a expressão anterior para determinar o número de buracos.

<u>Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:</u>

- Sabendo o número de tijolos em cada figura, como podemos determinar o número total de buracos?
- Já encontrámos uma expressão que determine o número de tijolos? Que operação temos de usar para determinar o número de buracos?

Discussão

<u>Selecionar algumas resoluções, começando por pares que apresentaram resoluções incompletas ou mais informais para discutir e valorizar as tentativas:</u>

- Solicitar que os alunos expliquem as suas estratégias e como chegaram aos resultados.
- Incentivar os pares a justificarem a sequência de cálculos para cada resposta.
- Fomentar a discussão entre os colegas sobre diferentes estratégias e processos de raciocínio, fazendo a pontes entre as diferentes estratégias apresentadas.
- Incentiva a reflexão sobre os processos matemáticos, as estratégias utilizadas, as regularidades e proporcionalidades presentes na tabela.

Possível sequenciação de apresentações:

- Identificação da lei de formação e preenchimento da tabela a partir da lei de formação.
- Identificação de regularidades na estrutura física da sequência e relacionar com as ordens dos termos (tanto do próprio termo como com o termo imediatamente anterior).
- Utilização das regularidades identificadas para determinar a 20.ª figura.
- Identificação das regularidades do número de tijolos a partir da tabela e a partir das regularidades que relacionam a figura com a própria ordem do termo e a ordem do termo imediatamente anterior (propriedade da adição de um número par com um número ímpar).
- A partir das regularidades das figuras com a própria ordem do termo ou com a própria ordem do termo e a ordem do termo imediatamente anterior, identificar o termo geral que determina o número de tijolos.
- Utilizar o termo geral que determina o número de tijolos para identificar uma expressão algébrica para obter o número de buracos qualquer que seja a ordem do termo.
- Questionar que regularidades identificam entre o número de tijolos e o número de buracos a partir da tabela construída. Como o número de buracos varia em relação ao número de tijolos. Identificar se a relação é de proporcionalidade direta. A partir destas identificações explicar o que é a proporcionalidade direta.
    - Proporcionalidade direta: quando duas grandezas variam, mas mantêm uma relação constante entre elas, por exemplo, se uma duplica, a outra também duplica; se uma triplica, a outra também triplica; se uma reduz para metade, a outra também reduz para metade, diz-se que existe proporcionalidade direta entre essas grandezas.

Conjunto de questões orientadoras da discussão além das já mencionadas anteriormente:

- Podes dizer como pensaste?
- Concordam com o que o vosso colega disse?
- Mais alguém pensou desta forma?
- Como passamos desta estratégia para esta?
- Como chegaste a esta conclusão?

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em reconhecer a relação que existe entre a quantidade de tijolos e a quantidade de buracos.
    - *Atuação:* Desafiar os alunos a encontrarem a relação constante entre o número de tijolos e o número de buracos.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Que relação existe entre o número de tijolos e o número de buracos?
- Como é que elas aumentam? Aumentam de igual forma? Porquê?

Sistematização

- Questionar os alunos sobre o que estivemos a fazer nesta aula.

- Questionar os alunos de que forma o número de buracos varia em relação ao número de tijolos e se a relação entre estas duas grandezas é constante. Desta forma espera-se sistematizar o conceito de proporcionalidade direta que será mais aprofundado numa aula da semana seguinte.
- Escrever o sumário.
- Relembrar os conceitos matemáticos trabalhados e estratégias de resolução.
- Recolher as perceções dos alunos sobre a importância do momento de discussão, recolhendo os dados para a investigação em curso:

Guião de Perguntas – Reflexão sobre a discussão em grande grupo

- O que é que aprenderam com a discussão da tarefa em grande grupo?
- Houve alguma estratégia ou ideia apresentada por um colega que vos ajudou a esclarecer dúvidas ou a perceber melhor a tarefa? Qual?
- E as tarefas que resolveram anteriormente ajudaram a compreender/resolver este problema? Se sim em quê?
- Como foi partilhar as estratégias com a turma? Sentiram-se à vontade para o fazer? Porquê?
- Acham que todos tiveram oportunidade de partilhar?
- Acham importante explicar a própria estratégia? Porquê?
- Acham útil ouvir as estratégias dos outros colegas? Porquê?

Avaliação

<u>A avaliação será formativa, será suportada por uma grelha de observação e terá como parâmetros:</u>

- O envolvimento e participação
    - Nível de empenho na atividade (ativo, moderado, passivo)
    - Interesse demonstrado na resolução das questões (Sim/Não/Não Observado)
- Cooperação e Trabalho em Equipa
    - Interação com os colegas (cooperativo, parcial, individualista)
    - Contributo para a resolução das questões (Sim/Não/Não Observado)
    - Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões (Sim/Não/Não Observado)
- Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução
    - Clareza e lógica na explicação das respostas (Sim/Não/Não Observado)
    - Uso adequado de estratégias de resolução de problemas (Sim/Não/Não Observado)
    - Correção das respostas e argumentação utilizada (Sim/Não/Não Observado)
- Comunicação e Expressão Matemática
    - Clareza e precisão na comunicação das ideias (Sim/Não/Não Observado)
    - Uso correto de linguagem matemática (Sim/Não/Não Observado)
    - Confiança na apresentação das respostas (Sim/Não/Não Observado)

Data: ______/______/_________

Grelha de Observação

	Envolvimento e participação		Cooperação e Trabalho em Equipa			Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução			Comunicação e Expressão Matemática		
	Nível de empenho na atividade	Interesse demonstrado na resolução das questões	Interação com os colegas	Contributo para a resolução das questões	Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões	Clareza e lógica na explicação das respostas	Uso adequado de estratégias	Correção das respostas e argumentação utilizada	Clareza e precisão na comunicação das ideias	Uso correto de linguagem matemática	Confiança na apresentação das respostas
	A/M/P	S/N/NO	C/P/I	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO

Nome: ___________________________ Trabalhei com: ____________________

Tarefa: Os Tijolos Data: ___/___/_____

Registo da resolução

(Mostrem como pensaram)

Questionário para preencher após a resolução a pares.

1. **Considera** as seguintes afirmações e **escolhe** uma das opções.

	Discordo totalmente	Discordo	Concordo	Concordo totalmente
Gostei de realizar esta tarefa.				
Trabalhar a pares é importante.				

Nome: ____ Data: ___/___/_____

Os tijolos

1. Considerem a seguinte sequência de figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) **Completem**, de acordo com a imagem, a seguinte tabela:

N.º da Figura	*N.º de tijolos*	*Número de buracos dentro dos tijolos*
1		
2		
3		
4		
5		
6		

b) **Quantos** tijolos tem, no total, a figura que corresponde ao termo de ordem 20? E **quantos** buracos têm todos os tijolos da 20.ª figura?

c) **Existe**, nesta sequência, alguma figura com 88 tijolos? Se existir, **determinem** a ordem que lhe corresponde.

2. **Escrevam** uma expressão geradora que vos permita determinar, para qualquer figura:

a) o número de tijolos.

b) o número de buracos de todos os tijolos dessa figura.

Anexo F – Planificação da terceira tarefa: O Folar de Ovos

Atividade de quarta-feira, dia 12/03 (08:50h – 11:40h)

Designação da tarefa: O Folar de ovos

Objetivos/Conteúdos de ensino/aprendizagem visados:

<table>
<tr><th colspan="5">Aprendizagens Essenciais Matemática de 6.º ano</th></tr>
<tr><th>Tema</th><th>Tópico</th><th>Subtópico</th><th>Objetivos de aprendizagem:</th><th>Áreas de Competência do Perfil dos Alunos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Capacidades Matemáticas</td><td rowspan="2">Raciocínio matemático</td><td>Justificar</td><td>Reconhecer a correção, diferença e adequação de diversas formas de justificar uma conjetura/generalização.</td><td rowspan="5">C – Raciocínio e resolução de problemas
D – Pensamento crítico e pensamento criativo
E – Relacionamento interpessoal
F – Desenvolvimento pessoal e autonomia
I – Saber científico, técnico e tecnológico</td></tr>
<tr><td>Expressão de ideias</td><td>Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.</td></tr>
<tr><td>Comunicação matemática</td><td>Expressão de ideias</td><td>Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Álgebra</td><td rowspan="2">Proporcionalidade direta</td><td>Relação de Proporcionalidade direta</td><td>Reconhecer a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e distinguir relações de proporcionalidade direta daquelas que não o são.</td></tr>
<tr><td>Razão, proporção e constante de proporcionalidade</td><td>Determinar uma quantidade, dada uma outra que lhe é proporcional e conhecida a razão de proporcionalidade.</td></tr>
</table>

Recursos necessários:

- Quadro branco/negro
- Canetas Whitboard/Giz
- Computador
- Projetor
- Folha de registo das respostas
- Enunciado da tarefa
- Material de escrita
- Grelha de observação/avaliação

Organização dos alunos:

- Apresentação: Grande grupo
- Exploração: Pares
- Discussão e sistematização: Grande grupo

Tempos previstos:

- Apresentação: 10 minutos
- Exploração: 40 minutos
- Discussão: 40 minutos
- Sistematização: 10 minutos

Propostas de trabalho e atividade esperada o que esperar dos alunos

Apresentação

Apresentação Contextualizada:

- Apresentação da tarefa explicando o contexto: O Folar de ovos.
- Leitura do enunciado e das perguntas da tarefa com a turma.
- Esclarecimento de dúvidas sobre o que é solicitado através do questionamento sobre o entendimento dos alunos do que é solicitado.
    - Nota: Tarefa adaptada de Faneco, C., & Valério, N. (2023). *Missão 6 – Vol. II: Matemática – 6.º ano* (1.ª ed.). Texto Editores.
    - A tarefa "O Folar de Ovos" desafia os alunos a analisar a relação entre grandezas no contexto da culinária. A partir de uma receita para dois folares, os alunos devem completar uma tabela para determinar as quantidades de ingredientes necessárias para seis folares, identificando uma relação de proporcionalidade direta. Além disso, são levados a calcular as quantidades para um único folar, aplicando também o raciocínio proporcional. A tarefa inclui ainda a análise de preços de diferentes embalagens de fermento, permitindo que os alunos explorem a proporcionalidade no contexto da escolha mais vantajosa na compra de ingredientes.
- A tarefa será projetada para facilitar a visualização, o acompanhamento e a interpretação do que é solicitado.
- Será distribuído por aluno o enunciado da tarefa e a folha de registo das respostas.

Orientações de Trabalho:

- O trabalho será realizado a pares e os alunos devem registar por escrito como pensaram.
- Definir 40 minutos para o trabalho autónomo.
- Enfatizar que, no final, alguns pares serão chamados para apresentar as suas resoluções.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- O que têm de preencher nesta tabela?
- Explica, por palavras tuas, o que é pedido nesta questão.
- O que se quer determinar/saber com esta questão?
- Como podemos saber quantos ovos são necessários para cozinhar seis folares?

Exploração

Os alunos discutem e resolvem a tarefa:

O Folar de ovos

O Francisco e o pai tiveram a ideia de cozinharem folares de ovos e oferecer aos familiares na Páscoa. Antes de começarem a cozinhar precisam de ir comprar os ingredientes para fazer esta iguaria tão tradicional. Vão fazer seis folares e é preciso confirmar as quantidades dos ingredientes necessárias. No livro de receitas da família estão escritos os ingredientes para dois folares.

Para não se enganarem nas quantidades, fizeram a seguinte tabela:

N.º de folares	*Ovos*	*Fermento de padeiro*	*Sal*	*Leite*	*Farinha de trigo*	*Manteiga*	*Açúcar*	*Canela em pó*	*Erva doce*	*Ovo cozido*
2	8	70 g	2 c. sopa	400 ml	1 kg	160 g	200 g	4 c. chá	2 c. chá	4
6										

1. **Completem** a tabela e **indiquem** a quantidade de fermento que é necessário comprar.
2. **Que relação** existe entre cada um dos valores da linha de ingredientes para dois folares e o valor correspondente na linha para seis folares?
3. O Francisco e o pai foram à padaria do bairro comprar o fermento.
   O Sr. Silva explicou que existem seis embalagens de fermento diferentes e mostrou-lhes a tabela de preços.

Peso	***Preço***
50 g	0,30 €
100 g	0,60 €
200 g	1 €
250 g	1,20 €
500 g	2,40 €
1 kg	4 €

   a) **A relação** que existe entre o peso do fermento e o preço a pagar é sempre a mesma? **Justifiquem** a vossa resposta.

b) Tendo em conta a quantidade de fermento necessária, **qual** é a opção mais económica?

4. Depois de fazerem as compras, o Francisco e o pai começam a preparar os ingredientes. Para garantir que cada folar tem exatamente a mesma quantidade de cada ingrediente, precisam de saber as quantidades correspondentes de cada ingrediente para um único folar. **Determinem** as quantidades de cada ingrediente para um folar.

(Tarefa adaptada de Faneco, C., & Valério, N. (2023). *Missão 6 – Vol. II: Matemática – 6.º ano* (1.ª ed.). Texto Editores.)

Função do Professor:

- Circular pela sala, acompanhando os pares.
- Incentivar a exploração de diferentes estratégias.
- Evitar dar soluções diretas, colocando questões para promover reflexão.

Antecipação das estratégias de resolução da tarefa:

Questão 1 – "*Completem a tabela e indiquem a quantidade de fermento que é necessário comprar.*"

- Contagem repetida – Somar os ingredientes para 2 folares três vezes porque 2+2+2=6 (ex.: 8 ovos + 8 ovos + 8 ovos).

N.º de folares	*Ovos*	*Fermento de padeiro*	*Sal*	*Leite*	*Farinha de trigo*	*Manteiga*	*Açúcar*	*Canela em pó*	*Erva doce*	*Ovo cozido*
2	8	70 g	2 c. sopa	400 ml	1 kg	160 g	200 g	4 c. chá	2 c. chá	4
6	$8+8+8=24$	$70+70+70=210$ g	$2+2+2=6$ c. sopa	$400+400+400=1200$ ml	$1+1+1=3$ kg	$160+160+160=480$ g	$200+200+200=600$ g	$4+4+4=12$ c. chá	$2+2+2=6$ c. chá	$4+4+4=12$

- Os alunos identificam a proporcionalidade direta ao observarem que, como 6 folares é o triplo de 2 folares, todas as quantidades devem ser multiplicadas por 3.
  Aplicam esta relação a cada ingrediente da tabela:

N.º de folares	*Ovos*	*Fermento de padeiro*	*Sal*	*Leite*	*Farinha de trigo*	*Manteiga*	*Açúcar*	*Canela em pó*	*Erva doce*	*Ovo cozido*
2	8	70 g	2 c. sopa	400 ml	1 kg	160 g	200 g	4 c. chá	2 c. chá	4
6	$3\times 8=24$	$3\times 70=210$ g	$3\times 2=6$ c. sopa	$3\times 400=1200$ ml	$3\times 1=3$ kg	$3\times 160=480$ g	$3\times 200=600$ g	$3\times 4=12$ c. chá	$3\times 2=6$ c. chá	$3\times 4=12$

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em compreender a relação proporcional entre as quantidades de ingredientes.

    - *Atuação*: Incentivar o aluno a refletir o que acontece à quantidade de cada ingrediente se quiser aumentar o número de folares. Explicar que os ingredientes devem aumentar proporcionalmente.
- Dificuldade em compreender que deve multiplicar, em vez de adicionar, para determinar a quantidade necessária de ingredientes.
    - *Atuação*: Questionar os alunos sobre a relação entre os números de folares ("De 2 para 6, quantas vezes aumentamos?").
      Incentivar a descoberta da multiplicação como uma forma mais rápida de calcular.
      Comparar os resultados obtidos por adição e por multiplicação para destacar a eficiência do cálculo multiplicativo.
      Explorar diferentes tamanhos (exemplo: "E se fossem 10 folares?") para mostrar que somar várias vezes não é prático.

<u>Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:</u>

- Se os ingredientes para 2 folares estão dados, como podemos descobrir os ingredientes para 6 folares?
- O que acontece aos valores quando passamos de 2 para 6 folares? E para 10? Como conseguimos rapidamente obter as quantidades de cada ingrediente?
- Se a receita para 2 folares usa 8 ovos, como podemos calcular quantos ovos precisamos para 6 folares?
- O que acontece se multiplicarmos por 3 todas as quantidades?
- Como podemos garantir que os valores estão corretos?

Questão 2 – "*Que relação existe entre cada um dos valores da linha de ingredientes para dois folares e o valor correspondente na linha para seis folares?*"

- Os alunos verificam que todos os valores da segunda linha são o triplo dos da primeira linha, confirmando que a relação entre os ingredientes é de proporcionalidade direta.

<u>Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:</u>

- Dificuldade em expressar essa relação de forma clara e matemática.
    - *Atuação:* Incentivar a observação de padrões na tabela.

<u>Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:</u>

- Se temos 2 folares e queremos fazer 6, que operação devemos fazer com os valores?
- Todos os ingredientes aumentaram da mesma forma? Por quê?
- Como podemos descrever esta relação com palavras ou números?
- Se tivéssemos uma receita para 1 folar, como poderíamos obter os valores para 2 ou 6 folares? E para 10 folares?

Questão 3 a) – *"A relação que existe entre o peso do fermento e o preço a pagar é sempre igual? Justifiquem a vossa resposta."*

- Comparação direta entre valores pequenos e grandes – Observar que dobrar o peso nem sempre significa dobrar o preço exatamente.

P. Ex.: $2 \times 100g = 200g$ $2 \times 0{,}60€$ (custo de duas embalagens de 100g) não é igual a 1€ (custo da embalagem de 200g).

- Uso de adições sucessivas – Somar os preços de várias embalagens pequenas para ver se correspondem ao preço de uma embalagem maior.

  P. Ex.: $100g + 200g + 200g = 500g$ e $0{,}60€ + 1€ + 1€ = 2{,}6€$ maior do que o custo de uma embalagem de 500g (2,40€).

- Cálculo da razão preço/peso – Os alunos podem calcular o preço por grama de cada embalagem, dividindo o preço pelo peso.

Peso (g)	***Preço de uma embalagem (€)***	***Preço por grama (€)***
50	*0,30*	$\frac{0{,}30}{50} = 0{,}006$
100	*0,60*	$\frac{0{,}60}{100} = 0{,}006$
200	*1*	$\frac{1}{200} = 0{,}005$
250	*1,20*	$\frac{1{,}20}{250} = 0{,}0048$
500	*2,40*	$\frac{2{,}40}{500} = 0{,}0048$
1000	*4*	$\frac{4}{1000} = 0{,}004$

- Outra forma de comparação é calcular quanto custaria uma outra quantidade de referência, por exemplo 1 kg de fermento para cada embalagem. Primeiramente os alunos identificam quantas embalagens de cada tipo são necessárias para perfazer 1000 g e multiplicam essa quantidade pelo preço unitário da embalagem.

Peso (g)	***Preço de uma embalagem (€)***	***Número de embalagens para 1000 g***	***Preço por quilograma (€)***
50	*0,30*	$\frac{1000}{50} = 20$	$20 \times 0{,}3 = 6$
100	*0,60*	$\frac{1000}{100} = 10$	$10 \times 0{,}6 = 6$
200	*1*	$\frac{1000}{200} = 5$	$5 \times 1 = 5$
250	*1,20*	$\frac{1000}{250} = 4$	$4 \times 1{,}2 = 4{,}80$
500	*2,40*	$\frac{1000}{500} = 2$	$2 \times 2{,}40 = 4{,}80$
1000	*4*	$\frac{1000}{1000} = 1$	4

- Em qualquer uma das estratégias os alunos conseguem perceber que o preço por quantidade (grama ou quilograma) varia conforme a embalagem escolhida.

R: A relação entre o peso e o preço não é sempre a mesma, pois as embalagens mais pesadas têm um custo por grama/quilograma inferior.

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em compreender se o preço aumenta sempre na mesma proporção que o peso
  - *Atuação:* Incentivar os alunos a determinar o preço por grama ou quilograma para diferentes embalagens.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Se 50 g custam 0,30 €, quanto custa 100 g? E cada grama? E se compararmos o preço por grama nas outras embalagens, o valor é sempre igual?
- Os valores seguem sempre a mesma regularidade? Quais é que não seguem? Porquê?
- Será que é sempre melhor comprar uma embalagem maior? Como podemos comprovar isso?
- Qual embalagem tem o melhor custo por grama?

Questão 3 b) – *"Tendo em conta a quantidade de fermento necessária, qual é a opção mais económica?"*

- Escolha intuitiva – Os alunos podem ver qual embalagem tem um peso próximo ao necessário e escolher apenas com esse critério.
- Os alunos, na pergunta anterior, perceberam que a embalagem de 1 kg tem o menor custo por grama ou quilograma (4€/kg), tornando-se a mais vantajosa.
- Atendendo ao problema, os alunos para identificarem a escolha ideal terão de ter em conta as gramas de fermento necessário (210 g) e as diversas hipóteses de compra.

  Se a quantidade necessária de fermento para 6 folares é 210 g, escolhem a embalagem ou o conjunto de embalagens que mais se próxima desse valor e com o menor custo possível.

Hipóteses	*Conjunto de embalagens*	*Custo (€)*
1	5 de 50g	$5 \times 0{,}3 = 1{,}5$
2	1 de 100g e 3 de 50g	$1 \times 0{,}6 + 3 \times 0{,}3 = 0{,}6 + 0{,}9 = 1{,}5$
3	2 de 100g e 1 de 50g	$2 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}3 = 1{,}2 + 0{,}3 = 1{,}5$
4	1 de 200g e 1 de 50g	$1 \times 1 + 1 \times 0{,}3 = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$
5	1 de 250g	$1 \times 1{,}2 = 1{,}2$

R: A embalagem mais vantajosa e com menos desperdício de alimento é a embalagem de 250 g uma vez que paga apenas 1,20 €.

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em escolher a embalagem correta baseada na quantidade necessária.

- *Atuação:* Ajudar os alunos a identificar a quantidade exata necessária. Incentivar o aluno a refletir, caso fosse uma situação real, que decisão tomaria.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Quantos gramas de fermento precisamos?
- Quais são as embalagens disponíveis? Alguma tem exatamente a quantidade que precisamos? Qual a embalagem mais próxima desse valor?
- Quanto vamos pagar? Será que sobra fermento?
- Não posso fazer combinação de embalagens?
- Imagina que vais fazer os folares e tens esta decisão para tomar. Qual seria a melhor opção para a receita e para a tua carteira?

Questão 2 b) – *"Depois de fazerem as compras, o Francisco e o pai começam a preparar os ingredientes. Para garantir que cada folar tem exatamente a mesma quantidade de cada ingrediente, precisam de saber as quantidades correspondentes para um único folar. Determinem as quantidades de cada ingrediente para um folar."*

- Os alunos percebem que 1 folar corresponde à sexta parte dos valores para 6 folares, então devem dividir por 6 todas as quantidades da linha da tabela onde consta os valores de 6 folares:

N.º de folares	*Ovos*	*Fermento de padeiro*	*Sal*	*Leite*	*Farinha de trigo*	*Manteiga*	*Açúcar*	*Canela em pó*	*Erva doce*	*Ovo cozido*
6	24	210 g	6 c. sopa	1200 ml	3 kg	480 g	600 g	12 c. chá	6 c. chá	12
1	$\frac{24}{6} = 4$	$\frac{210}{6} = 35$ g	$\frac{6}{6} = 1$ c. sopa	$\frac{1200}{6} =$ 200 ml	$\frac{3000}{6} =$ 500 g	$\frac{480}{6} = 80$ g	$\frac{600}{6} =$ 100 g	$\frac{12}{6} = 2$ c. chá	$\frac{6}{6} = 1$ c. chá	$\frac{12}{6} = 2$

R: A quantidade necessária para 1 folar é obtida dividindo por 2 os valores das quantidades de 2 folares.

- No entanto, o mais provável é que os alunos percebem que 1 folar corresponde a metade da receita para 2 folares, então devem dividir por 2 todas as quantidades da primeira linha da tabela:

N.º de folares	*Ovos*	*Fermento de padeiro*	*Sal*	*Leite*	*Farinha de trigo*	*Manteiga*	*Açúcar*	*Canela em pó*	*Erva doce*	*Ovo cozido*
2	8	70 g	2 c. sopa	400 ml	1 kg	160 g	200 g	4 c. chá	2 c. chá	4
1	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{70}{2} = 35$ g	$\frac{2}{2} = 1$ c. sopa	$\frac{400}{2} =$ 200 ml	$\frac{1000}{2} =$ 500 g	$\frac{160}{2} = 80$ g	$\frac{200}{2} =$ 100 g	$\frac{4}{2} = 2$ c. chá	$\frac{2}{2} = 1$ c. chá	$\frac{4}{2} = 2$

R: A quantidade necessária para 1 folar é obtida dividindo por 2 os valores das quantidades de 2 folares.

Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:

- Dificuldade em compreender que, para obter a quantidade para 1 folar, é necessário dividir os valores dos ingredientes.
    - *Atuação:* Incentivar o aluno a refletir sobre o que fazer aos ingredientes dos 6 folares ou da receita para obter as quantidades de um folar.

Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:

- Se temos ingredientes para 6 folares, o que devemos fazer para encontrar a quantidade para 1?
- Se usamos 24 ovos para 6 folares, quantos são necessários para 1 folar?
- Como podemos descobrir a quantidade de ingredientes para 1 folar?
- Se temos ingredientes para 6 folares e queremos saber para 1, que operação devemos fazer?
- Se tivéssemos que fazer 3 folares em vez de 6, como poderíamos determinar a quantidade de cada ingrediente?
- Para quantos folares a receita original está escrita? E para obter as quantidades de cada ingrediente para um folar o que devo fazer às quantidades definidas na receita?

Discussão

Selecionar algumas resoluções, começando por pares que apresentaram resoluções incompletas ou mais informais para discutir e valorizar as tentativas:

- Solicitar que os alunos expliquem as suas estratégias e como chegaram aos resultados.
- Incentivar os pares a justificarem a sequência de cálculos para cada resposta.
- Fomentar a discussão entre os colegas sobre diferentes estratégias e processos de raciocínio, fazendo a pontes entre as diferentes estratégias apresentadas.
- Incentiva a reflexão sobre os processos matemáticos, as estratégias utilizadas, as regularidades e proporcionalidades presentes na tabela.

Possível sequenciação de apresentações:

- Contagem repetida – Adições sucessiva (questão 1)
- Identificam a proporcionalidade direta ao observarem que 6 folares é o triplo de 2 folares. (questão 1 e 2)
- Identificação da quantidade de ingredientes para 1 folar (questão 4)
- Relembrar o que é a proporcionalidade direta.
    - Proporcionalidade direta: quando duas grandezas variam, mas mantêm uma relação constante entre elas, por exemplo, se uma duplica, a outra também duplica; se uma triplica, a outra também triplica; se uma reduz para metade, a outra também reduz para metade, diz-se que existe proporcionalidade direta entre essas grandezas.
    - Uma grandeza é tudo o que pode ser medido ou contado.
- Duplicar valores pequenos. (questão 3a)
- Uso de adições sucessivas (questão 3a)
- Cálculo da razão preço/peso (questão 3a)
- Com o determinarmos do preço por grama ou por quilo vai se introduzir os seguintes conceitos: Razão e sua leitura, proporção (razões equivalentes) e sua leitura, termos da proporção (externos e meios).
    - Razão: é a relação entre duas quantidades que se querem comparar. Ou seja, uma razão é o quociente entre dois números, sendo o divisor não nulo. As quantidades neste caso serão o preço/peso.
    - Representações das razões: 1:200 ou $\frac{1}{200}$

    - Como se lêem as razões. 1 está para 200.
    - Proporção (razões equivalentes): $\frac{0,30}{50} = \frac{0,60}{100}$
    - Como se lê a proporção: 0,30 está para 50 assim como 0,60 está para 100.
    - Termos da proporção (extremos e meios).
- Comparação com uma quantidade de referência, por exemplo 1 kg (será mostrado uma imagem de uma etiqueta para ilustrar que as superfícies comerciais fazem estas comparação de quantidades para ajudar os clientes a escolher a melhor opção). (questão 3a)

  Por exemplo:

- Escolha intuitiva. (questão 3b)
- Escolha economicamente vantajosa, mas com sobras. (questão 3b)
- Combinação de embalagens para perfazer a quantidade necessária. (questão 3b)
- Escolha da opção que mais se próxima da quantidade necessária e com o menor custo possível. (questão 3b)

<u>Conjunto de questões orientadoras da discussão além das já mencionadas anteriormente:</u>

- Podes dizer como pensaste?
- Concordam com o que o vosso colega disse?
- Mais alguém pensou desta forma?
- Como chegaste a esta conclusão?
- Como chegaram ao vosso resultado? Conseguem explicar os passos que seguiram?
- Porque escolheram essa estratégia em vez de outra?
- Se tivessem de explicar a um colega que não compreendeu, como fariam?
- Existem outras formas de resolver este problema?

<u>Dificuldades previstas e atuação para ultrapassá-las:</u>

- Dificuldade em compreender o conceito “razão”.
    - *Atuação:* Desafiar os alunos a pensar em situações do dia a dia, como por exemplo fazer arroz. Através do questionamento levar os alunos a refletir sobre este conceito.

<u>Questões a colocar para apoiar as aprendizagens:</u>

- Neste caso das embalagens de fermento que grandezas é que nós estamos aqui a relacionar?

- Se quiser comprar uma embalagem de 50g quanto vou pagar? E como posso colocar essa relação numa razão preço/peso? O que procuro saber com esta razão? (o preço por grama)
- E se quiser comprar duas embalagens de 50g quanto vou pagar? Qual é a razão nesta situação? O que se manteve? (o preço por embalagem - a razão)
- O que posso dizer sobre estas duas razões (0,3:50 e 0,6:100)? (são equivalentes). E, portanto, são uma…(proporção)
- Como leio esta proporção?

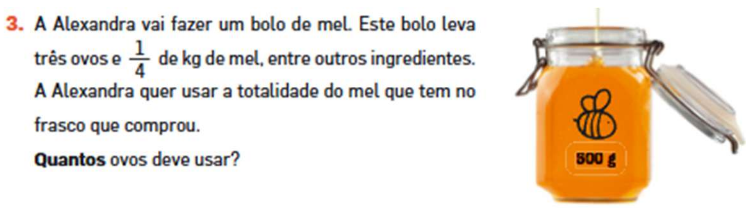
Sistematização

- Questionar os alunos sobre o que estivemos a fazer nesta aula.
- O que é a razão e a proporção.
- Solicitar que os alunos pensem, no seu dia a dia, mais situações em que identifiquem existir razões (comparação de duas quantidades) de forma a consolidar a compreensão de razão e proporção.
- Solicitar aos alunos que digam, na turma, a razão entre:
    - o número de raparigas e o número de rapazes (13:9)
    - o número de rapazes e o número de raparigas (9:13)
    - o número de raparigas e o número total de alunos (13:22)
    - o número de rapazes e o número total de alunos (9:22)
- Relembrar os conceitos matemáticos trabalhados e estratégias de resolução.
- Escrever o sumário da aula em conjunto com os alunos.
- Recolher as perceções dos alunos sobre a importância do momento de discussão, recolhendo os dados para a investigação em curso:

Guião de Perguntas – Reflexão sobre a discussão em grande grupo

- O que é que aprenderam com a discussão da tarefa em grande grupo?
- Houve alguma estratégia ou ideia apresentada por um colega que vos ajudou a esclarecer dúvidas ou a perceber melhor a tarefa? Qual?
- E as tarefas que resolveram anteriormente ajudaram a compreender/resolver este problema? Se sim em quê?
- Como foi partilhar as estratégias com a turma? Sentiram-se à vontade para o fazer? Porquê?
- Acham que todos tiveram oportunidade de partilhar?
- Acham importante explicar a própria estratégia? Porquê?
- Acham útil ouvir as estratégias dos outros colegas? Porquê?

- Informar os alunos que para trabalho de casa devem resolver as tarefas 3 e 5 da página 16 do manual e 6 e 8 das páginas 20 e 21 respetivamente do manual.


3. A Alexandra vai fazer um bolo de mel. Este bolo leva três ovos e $\frac{1}{4}$ de kg de mel, entre outros ingredientes. A Alexandra quer usar a totalidade do mel que tem no frasco que comprou.
Quantos ovos deve usar?

Exercício 3 da página 16 do manual.

5. A Maria vai passar uma semana com a tia que vive em Boston.

Ela sabe que a moeda usada em Boston é o dólar americano e, por isso, foi ver qual é o valor da conversão do dólar para euros.

1 Dólar = 1,03 Euros

a) **Qual** é a moeda que tem maior valor?

b) A Maria foi hoje ao banco trocar 500 euros por dólares. **Trouxe** mais ou menos de 500 dólares? **Justifica** a tua resposta.

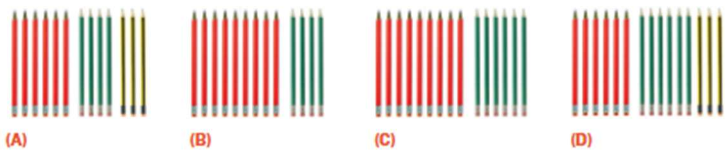
Exercícios 5 da página 16 do manual.

6. A Júlia faz arranjos de flores, e todos os seus arranjos são feitos na razão de 3 rosas vermelhas para 5 rosas brancas. **Completa** a tabela, mantendo a razão de rosas vermelhas para rosas brancas.

Rosas vermelhas	3	6	12		24	30		
Rosas brancas	5			25			55	60

Exercícios 6 da página 20 do manual

8. Em que imagens a razão entre lápis vermelhos e lápis verdes é 3 : 2 ?



Exercícios 8 da página 21 do manual

Avaliação

<u>A avaliação será formativa, será suportada por uma grelha de observação e terá como parâmetros:</u>

- O envolvimento e participação
  - Nível de empenho na atividade (ativo, moderado, passivo)
  - Interesse demonstrado na resolução das questões (Sim/Não/Não Observado)
- Cooperação e Trabalho em Equipa
  - Interação com os colegas (cooperativo, parcial, individualista)
  - Contributo para a resolução das questões (Sim/Não/Não Observado)
  - Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões (Sim/Não/Não Observado)
- Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução
  - Clareza e lógica na explicação das respostas (Sim/Não/Não Observado)
  - Uso adequado de estratégias de resolução de problemas (Sim/Não/Não Observado)
  - Correção das respostas e argumentação utilizada (Sim/Não/Não Observado)
- Comunicação e Expressão Matemática
  - Clareza e precisão na comunicação das ideias (Sim/Não/Não Observado)
  - Uso correto de linguagem matemática (Sim/Não/Não Observado)
  - Confiança na apresentação das respostas (Sim/Não/Não Observado)

Data: ______/______/_________ **Grelha de Observação**

	Envolvimento e participação		Cooperação e Trabalho em Equipa			Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução			Comunicação e Expressão Matemática		
	Nível de empenho na atividade	Interesse demonstrado na resolução das questões	Interação com os colegas	Contributo para a resolução das questões	Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões	Clareza e lógica na explicação das respostas	Uso adequado de estratégias	Correção das respostas e argumentação utilizada	Clareza e precisão na comunicação das ideias	Uso correto de linguagem matemática	Confiança na apresentação das respostas
	A/M/P	S/N/NO	C/P/I	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO

Nome: ___________________________ Trabalhei com: ____________________

Tarefa: O Folar de ovos Data: ___/___/_____

Registo da resolução

(Mostrem como pensaram)

Questionário para preencher após a resolução a pares.

1. **Considera** as seguintes afirmações e **escolhe** uma das opções.

	☹ Discordo totalmente	😐 Discordo	🙂 Concordo	😀 Concordo totalmente
Gostei de realizar esta tarefa.				
Trabalhar a pares é importante.				

Nome: ____ Data: ___/___/_____

O Folar de ovos

O Francisco e o pai tiveram a ideia de cozinharem folares de ovos e oferecer aos familiares na Páscoa. Antes de começarem a cozinhar precisam de ir comprar os ingredientes para fazer esta iguaria tão tradicional. Vão fazer seis folares e é preciso confirmar as quantidades dos ingredientes necessárias. No livro de receitas da família estão escritos os ingredientes para dois folares.

Para não se enganarem nas quantidades, fizeram a seguinte tabela:

N.º de folares	*Ovos*	*Fermento de padeiro*	*Sal*	*Leite*	*Farinha de trigo*	*Manteiga*	*Açúcar*	*Canela em pó*	*Erva doce*	*Ovo cozido*
2	8	70 g	2 c. sopa	400 ml	1 kg	160 g	200 g	4 c. chá	2 c. chá	4
6										

1. **Completem** a tabela e indiquem a quantidade de fermento que é necessário comprar.

2. **Que relação** existe entre cada um dos valores da linha de ingredientes para dois folares e o valor correspondente na linha para seis folares?

3. O Francisco e o pai foram à padaria do bairro comprar o fermento.

O Sr. Silva explicou que existem seis embalagens de fermento diferentes e mostrou-lhes a tabela de preços.

Peso	***Preço***
50 g	0,30 €
100 g	0,60 €
200 g	1 €
250 g	1,20 €
500 g	2,40 €
1 kg	4 €

a) **A relação** que existe entre o peso do fermento e o preço a pagar é sempre a mesma? **Justifiquem** a vossa resposta.

b) Tendo em conta a quantidade de fermento necessária, **qual** é a opção mais económica?

4. Depois de fazerem as compras, o Francisco e o pai começam a preparar os ingredientes. Para garantir que cada folar tem exatamente a mesma quantidade de cada ingrediente, precisam de saber as quantidades correspondentes para um único folar. **Determinem** as quantidades de cada ingrediente para um folar.

Anexo G – Grelha de observação da Tarefa 1 – dias 24 e 26 de fevereiro

Data: 24/02/2025

Grelha de Observação

Nome dos alunos	Envolvimento e participação		Cooperação e Trabalho em Equipa			Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução			Comunicação e Expressão Matemática		
	Nível de empenho na atividade	Interesse demonstrado na resolução das questões	Interação com os colegas	Contributo para a resolução das questões	Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões	Clareza e lógica na explicação das respostas	Uso adequado de estratégias	Correção das respostas e argumentação utilizada	Clareza e precisão na comunicação das ideias	Uso correto de linguagem matemática	Confiança na apresentação das respostas
	A/M/P	S/N/NO	C/P/I	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO
A1	A	S	C	S	S	S	S	S	S	N	N
A2	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	N
A3	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A4	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	N
A5	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A6	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A7	M	S	P	S	NO	S	S	S	S	S	S
A8	M	S	P	N	S	N	NO	NO	NO	NO	NO
A10	P	N	I	N	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A19	M	N	I	S	NO	N	N	NO	NO	NO	NO
A11	P	N	I	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A12	P	N	I	NO	NO	NO	NO	S	N	NO	N
A13	A	S	C	S	N	S	N	S	S	S	S
A14	A	S	C	S	S	S	S	NO	S	NO	S
A15	A	S	C	S	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A16	A	S	C	S	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A17	M	N	I	NO	NO	N	N	NO	NO	NO	NO
A18	M	S	I	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A20	A	S	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A21	A	S	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO

Legenda: **A** – Ativo; **M** – Moderado; **P** – Passivo / **S** – Sim; **N** – Não; **NO** – Não Observado / **C** – Cooperativo; **P** – Parcial; **I** - Individualista

Data: 26/02/2025 **Grelha de Observação**

Nome dos alunos	Envolvimento e participação		Cooperação e Trabalho em Equipa			Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução			Comunicação e Expressão Matemática		
	Nível de empenho na atividade	Interesse demonstrado na resolução das questões	Interação com os colegas	Contributo para a resolução das questões	Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões	Clareza e lógica na explicação das respostas	Uso adequado de estratégias	Correção das respostas e argumentação utilizada	Clareza e precisão na comunicação das ideias	Uso correto de linguagem matemática	Confiança na apresentação das respostas
	A/M/P	S/N/NO	C/P/I	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO
A1	A	S	C	S	S	S	S	S	S	N	N
A2	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	N
A3	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A4	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A5	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A6	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A7	M	S	P	S	S	S	S	S	S	S	S
A8	P	S	P	N	S	N	NO	N	N	N	N
A9	P	N	P	N	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A10	M	N	P	N	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A11	A	S	P	NO	NO	NO	N	NO	NO	NO	NO
A12	A	S	P	NO	NO	NO	N	NO	NO	NO	NO
A13	A	S	C	S	N	S	N	S	N	N	S
A14	A	S	C	S	S	S	S	NO	S	NO	S
A15	A	S	C	S	S	S	S	S	N	N	N
A16	A	S	C	S	S	S	S	S	N	N	N
A17	M	NO	P	NO	NO	N	N	NO	NO	NO	NO
A18	A	NO	P	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A19	A	NO	C	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A20	A	S	C	S	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO

Legenda: **A** – Ativo; **M** – Moderado; **P** – Passivo / **S** – Sim; **N** – Não; **NO** – Não Observado / **C** – Cooperativo; **P** – Parcial; **I** - Individualista

Anexo H – Grelha de observação da Tarefa 2 – dia 5 de março

Data: 05/03/2025

Grelha de Observação

Nome dos alunos	Envolvimento e participação		Cooperação e Trabalho em Equipa			Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução			Comunicação e Expressão Matemática		
	Nível de empenho na atividade	Interesse demonstrado na resolução das questões	Interação com os colegas	Contributo para a resolução das questões	Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões	Clareza e lógica na explicação das respostas	Uso adequado de estratégias	Correção das respostas e argumentação utilizada	Clareza e precisão na comunicação das ideias	Uso correto de linguagem matemática	Confiança na apresentação das respostas
	A/M/P	S/N/NO	C/P/I	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO
A1	A	S	C	S	S	S	NO	S	S	N	S
A2	A	S	C	S	S	S	NO	S	S	N	S
A3	A	S	C	S	S	S	NO	S	S	S	S
A4	A	S	C	S	S	S	NO	S	S	N	S
A5	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A6	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A7	M	N	P	N	S	S	NO	S	S	N	S
A8	P	S	P	N	S	N	NO	NO	N	N	N
A9	A	S	P	N	S	N	NO	NO	NO	NO	NO
A10	A	S	P	N	S	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A11	P	N	I	N	S	NO	N	NO	NO	NO	NO
A12	P	N	I	N	S	NO	N	NO	NO	NO	NO
A13	A	S	C	S	S	S	NO	S	N	N	S
A14	A	S	C	N	S	N	NO	S	N	N	S
A15	A	S	C	S	S	NO	NO	NO	N	N	S
A16	A	S	C	N	S	NO	NO	S	N	N	S
A18	A	S	C	S	S	S	NO	S	N	N	S
A19	P	N	C	N	S	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A20	A	S	C	S	S	S	NO	NO	S	N	S
A21	A	S	C	S	S	NO	NO	NO	NO	NO	NO

Legenda: **A** – Ativo; **M** – Moderado; **P** – Passivo / **S** – Sim; **N** – Não; **NO** – Não Observado / **C** – Cooperativo; **P** – Parcial; **I** - Individualista

Anexo I – Grelha de observação da Tarefa 3 – dia 12 de março

Data: 12/03/2025 **Grelha de Observação**

Nome dos alunos	Envolvimento e participação		Cooperação e Trabalho em Equipa			Raciocínio Matemático e Estratégias de Resolução			Comunicação e Expressão Matemática		
	Nível de empenho na atividade	Interesse demonstrado na resolução das questões	Interação com os colegas	Contributo para a resolução das questões	Capacidade de ouvir e aceitar diferentes opiniões	Clareza e lógica na explicação das respostas	Uso adequado de estratégias	Correção das respostas e argumentação utilizada	Clareza e precisão na comunicação das ideias	Uso correto de linguagem matemática	Confiança na apresentação das respostas
	A/M/P	S/N/NO	C/P/I	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO	S/N/NO
A1	A	S	C	S	S	S	S	S	S	N	S
A2	A	S	C	S	S	S	S	S	S	N	S
A3	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A4	A	S	C	S	S	N	S	S	N	N	S
A5	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A6	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A7	P	N	P	S	NO	S	S	S	N	N	N
A8	P	S	P	N	S	N	N	S	N	N	N
A10	P	S	I	N	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A19	P	N	I	N	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A11	A	N	P	S	S	N	N	S	NO	NO	NO
A12	A	N	P	S	S	N	N	S	NO	NO	NO
A13	A	S	C	S	S	S	N	S	N	N	S
A14	A	S	C	S	N	S	S	S	S	N	S
A15	A	S	C	S	S	S	S	S	NO	NO	N
A16	A	S	C	S	S	S	S	S	NO	NO	N
A17	M	N	C	S	S	S	N	S	N	N	NO
A18	A	S	C	S	S	S	S	S	S	S	S
A20	A	S	P	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A21	A	S	P	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO

Legenda: **A** – Ativo; **M** – Moderado; **P** – Passivo / **S** – Sim; **N** – Não; **NO** – Não Observado / **C** – Cooperativo; **P** – Parcial; **I** - Individualista